Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Ingeniería Matemática
Línea Financiera

Tarea 02: Distribuciones de probabilidad

Alumno:
Yañez Perez Gabriel Osvaldo
Boleta: 2019330158
Correo electronico:
gyanezp1500@alumno.ipn.mx
Grupo: 8MM1

Profesor:
Medel Esquivel Ricardo

Simulación II

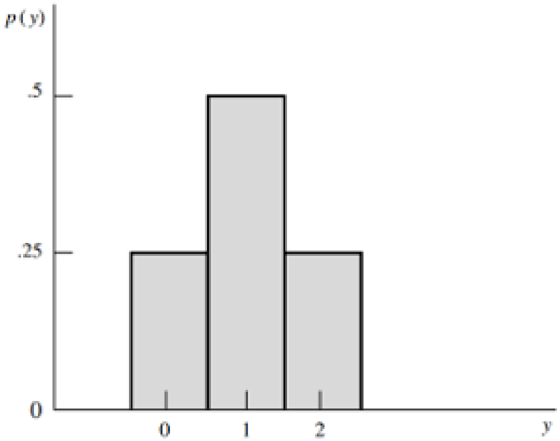
Ciudad de México
26 de febrero de 2022

Índice

1. Variables aleatorias discretas

1.1. Definición básica

Se dice que una variable aleatoria Y es discreta si puede tomar sólo un número finito o contablemente infinito de valores distintos.
De modo notacional usaremos una letra mayúscula, por ejemplo Y, para denotar una **variable aleatoria** y una letra minúscula, por ejemplo y, para denotar un **valor particular** que puede tomar una variable aleatoria.
La probabilidad de que Y tome el valor y, *P(Y=y)*, se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en S a los que se asigna el valor y.
Una **distribución de probabilidad** para una variable discreta Y puede ser representada por una fórmula, una tabla o una gráfica que produzca $p(y) = P(Y = y)$ para toda y.
Distribución de probabilidad para Y



y	$p(y)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad *p(y)*. Entonces el **valor esperado** de Y, *E(Y)*, se define como:

$$E(Y) = \sum_y yp(y)$$

Si *p(y)* es una caracterización precisa de la distribución de frecuencia poblacional, entonces $E(Y) = \mu$ es la **media poblacional**.
Si Y es una variable aleatoria con media $E(Y) = \mu$, la varianza de una variable aleatoria Y se define como el valor esperado de $(Y - \mu)^2$.

$$V(Y) = E[(Y - \mu)^2]$$

La *desviación estándar* de Y es la raíz cuadrda positiva de *V(Y)*

$$V(Y) = \sigma^2$$

σ^2 es la varianza poblacional y σ es la desviación estándar poblacional.

1.2. La distribución de probabilidad binomial

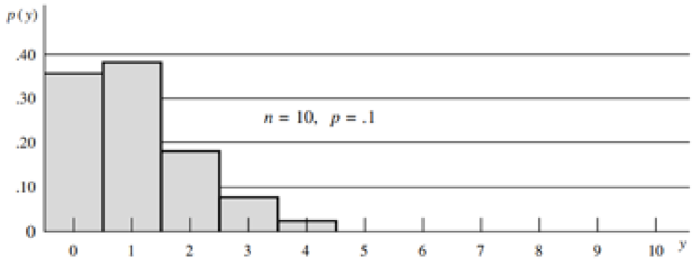
Se dice que una variable aleatoria Y tiene una *distribución binomial* basada en n pruebas con probabilidad p de éxito y si y sólo si.

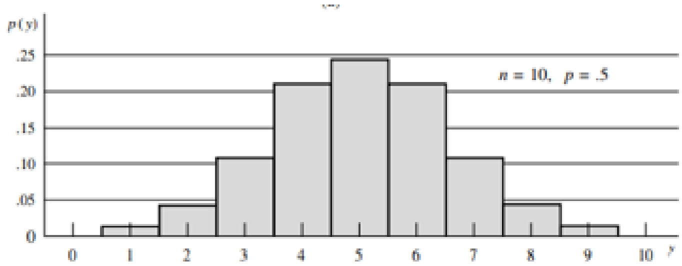
$$p(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \qquad y = 0, 1, 2, ..., n \quad y \quad 0 \leq p \geq 1$$

Sea Y una variable aleatoria binomial basada en n pruebas y probabilidad p de éxito.
Entonces

$$\mu = E(Y) = np$$
$$\sigma^2 = V(Y) = npq$$

Histogramas de probabilidad binomial.





La distribución de probabilidad binomial tiene muchas aplicaciones porque el experimento binomial se presenta al muestrear defectos en control de calidad industrial, en el muestreo de preferencia de los consumidores o en poblaciones de votantes y en muchas otras situaciones físicas.

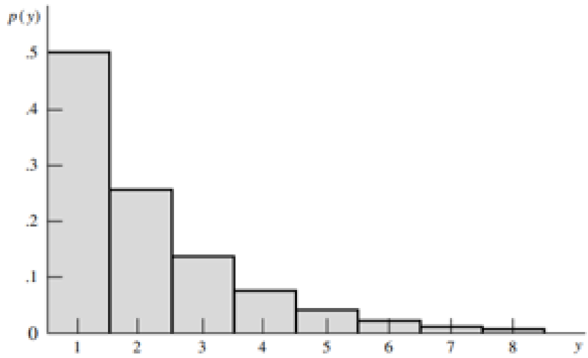
1.3. La distribución de probabilidad geométrica

Se dice que una variable aleatoria Y tiene una *distribución de pobabilidad geométrica* si y sólo si.

$$p(y) = q^{y-1}p \qquad y = 0, 1, 2, ..., n \quad y \quad 0 \leq p \geq 1$$

Sea Y una variable aleatoria con una distribución geométrica.
Entonces

$$\mu = E(Y) = \frac{1}{p}$$
$$\sigma^2 = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$$



La distribución de probabilidad geométrica se emplea con frecuencia para modelar distribuciones de la duración de tiempos de espera. Por ejemplo, suponga que el motor de un avión comercial recibe atención periódicamente para cambiar sus diversas partes en puntos diferentes de tiempo y que, por tanto, son de edades que varían. Entonces la probabilidad p de mal funcionamiento del motor durante cualquier intervalo de operación de una hora observado al azar podría ser el mismo que para cualquier otro intervalo de una hora. El tiempo transcurrido antes de que el motor falle es el número de intervalos de una hora, Y, hasta que ocurra la primera falla. (Para esta aplicación, el mal funcionamiento del motor en un periodo determinado de una hora se defi ne como éxito)

1.4. La distribución de probabilidad hipergeométrica

Se dice que una variable aleatoria Y tiene *distribución de probabilidad hipergeométrica* si y sólo si.

$$p(y) = \frac{\left(\begin{array}{c} r \\ y \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} N-r \\ n-y \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)}$$

donde y es un entero 0,1,2,...,n,sujeto a las restricciones $y \leq r$ y $n - y \leq N - r$. Si Y es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica.
Entonces

$$\mu = E(Y) = \frac{nr}{N}$$
$$\sigma^2 = V(Y) = n(\frac{r}{N})(\frac{N-r}{N})(\frac{N-n}{N-1})$$

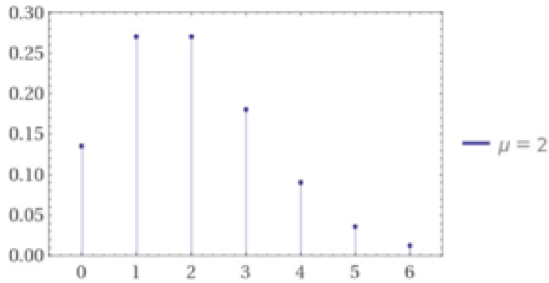
1.5. La distribución de probabilidad Poisson

Se dice que una variable aleatoria Y tiene *distribución de probabilidad de Poisson* si y sólo si.

$$p(y) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp -\lambda \qquad y = 0, 1, 2, ... \qquad \lambda > 0$$

Si Y es una variable aleatoria que posee una distribución de Poisson con parámetro λ, entonces

$$\mu = E(Y) = \lambda$$
$$\sigma^2 = V(Y) = \lambda$$



1.6. Tabla de resumen

Distribucion de Probabilidad	Función de probabilidad p(Y)	Esperanza	Varianza
Binomial	$p(y) = \left(\begin{array}{c} n \\ y \end{array} \right) p^y q^{n-y}$	$\mu = E(Y) = np$	$\sigma^2 = V(Y) = npq$
Geométrica	$p(y) = q^{y-1}p$	$\mu = E(Y) = \frac{1}{p}$	$\sigma^2 = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}$
Hipergeométrica	$p(y) = \frac{\left(\begin{array}{c} r \\ y \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} N-r \\ n-y \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)}$	$\mu = E(Y) = \frac{nr}{N}$	$\sigma^2 = V(Y) = n(\frac{r}{N})(\frac{N-r}{N})(\frac{N-n}{N-1})$
Poisson	$p(y) = \frac{\lambda^y}{y!} \exp -\lambda$	$\mu = E(Y) = \lambda$	$\sigma^2 = V(Y) = \lambda$

2. Variables aleatorias continuas

2.1. Distribución de probabilidad para una variable aleatoria continua

Denote con Y cualquier variable aleatoria. **La función de distribución** de Y, denotada por $F(y)$, es tal que $F(y) = P(Y \leq y)$ para $-\infty < y > \infty$
Sea $F(y)$ la función de destribucion para una variable aleatoria continua Y. Entonces $f(y)$, dada por

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y)$$

siempre que exista la derivada, se denomina **función de densidad deprobabilidad** para la variable aleatoria Y.

$$F(Y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$$

donde *f()* es la función de desnsidad de la probabilidad y t se usa como la variable de integración.
El valor esperado de una varible aleatoria continua Y es

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$$

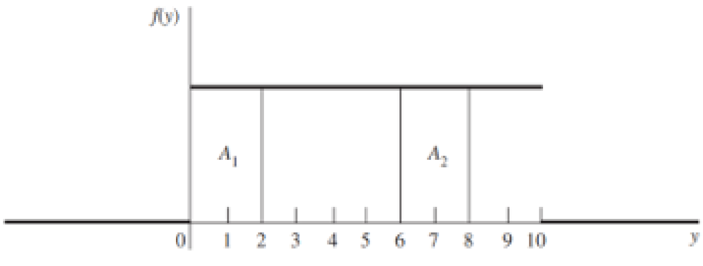
2.2. La distribución de probabilidad uniforme

Si $\theta_1 < \theta_2$ se dice que un variable aleatoria Y tiene *distribución de probabilidad uniforme* en el intervalo (θ_1, θ_2) si y solo si la funión de densidad Y es

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, \ \theta_1 \leq \ y \ \geq \theta_2 \\ 0, \ en \ cualquier \ otro \ punto \end{cases}$$

Si $\theta_1 < \theta_2$ y Y es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervaldo (θ_1, θ_2), entonces

$$\mu = E(Y) = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$
$$\sigma^2 = V(Y) = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$$



Como veremos, la distribución uniforme es muy importante por razones teóricas. Los estudios de **simulación** son técnicas valiosas para validar modelos en estadística. Si deseamos un conjunto de observaciones de una variable aleatoria Y con función de distribución $F(y)$, a menudo podemos obtener los resultados deseados si transformamos un conjunto de observaciones en una variable aleatoria uniforme. Por esta razón, casi todos los sistemas de cómputo contienen un generador de números aleatorios que produce valores observados para una variable aleatoria que tiene una distribución uniforme continua

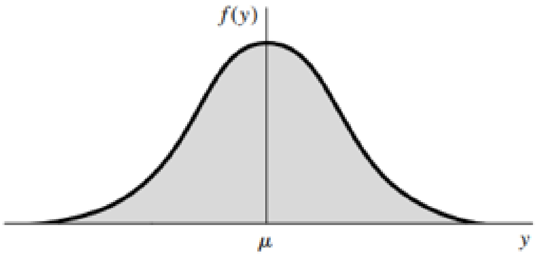
2.3. La distribución de probabilidad normal

Se dice que un variable aleatoria Y tiene *distribución normal de probabilidad* si y sólo si, para $\sigma > 0$ y $-\infty < \mu < \infty$, la función de densidad de Y es

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)$$

Si Y es una variable aleatoria normalmente distribuida con párametros μ y σ, entonces

$$E(Y) = \mu$$
$$V(Y) = \sigma^2$$



Esta distribución es frecuentemente utilizada en las aplicaciones estadísticas. Su propio nombre indica su extendida utilización, justificada por la frecuencia o normalidad con la que ciertos fenómenos tienden a parecerse en su comportamiento a esta distribución.
Muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene forma de campana. En otras ocasiones, al considerar distribuciones binomiales, tipo B(n,p), para un mismo valor de p y valores de n cada vez mayores, se ve que sus polígonos de frecuencias se aproximan a una curva en "forma de campana".
En resumen, la importancia de la distribución normal se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que siguen el modelo de la normal.

- ♦ Caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas,...) de una especie, p.ejm. tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros,...

- ♦ Caracteres fisiológicos, por ejemplo: efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.

- ♦ Caracteres sociológicos, por ejemplo: consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuos, puntuaciones de examen.

- ♦ Caracteres psicológicos, por ejemplo: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio,...

- ♦ Otras distribuciones como la binomial o la de Poisson son aproximaciones normales, ...

2.4. La distribución de probabilidad gamma

Se dice que un variable aleatoria Y tiene una *distribución gamma* con parámetros $\sigma > 0$ y $\beta > 0$ si y sólo si la función de densidad de Y es

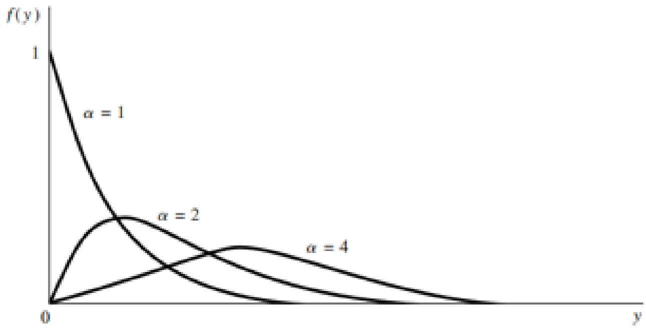
$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\sigma-1}\exp -y/\beta}{\beta^{\sigma}\Gamma(\sigma)}, \ 0 \leq \ y \ < \infty \\ 0, \ \textit{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

donde

$$\Gamma(\sigma) = \int_0^{\infty} y^{\sigma-1} \exp{(-y)} dy.$$

La cantidad $\Gamma(\sigma)$ se conoce como *función gamma.*
Si Y tiene una distribución gamma con parámetros σ y β, entonces

$$\mu = E(Y) = \sigma\beta$$
$$\sigma^2 = V(Y) = \sigma\beta^2$$



Es una distribución adecuada para modelizar el comportamiento de variables aleatorias continuas con asimetría positiva. Es decir, variables que presentan una mayor densidad de sucesos a la izquierda de la media que a la derecha.
En su expresión se encuentran dos parámetros, siempre positivos, (σ) y (β) de los que depende su forma y alcance por la derecha, y también la función Gamma $\Gamma(\sigma)$, responsable de la convergencia de la distribución.

2.5. La distribución de probabilidad beta

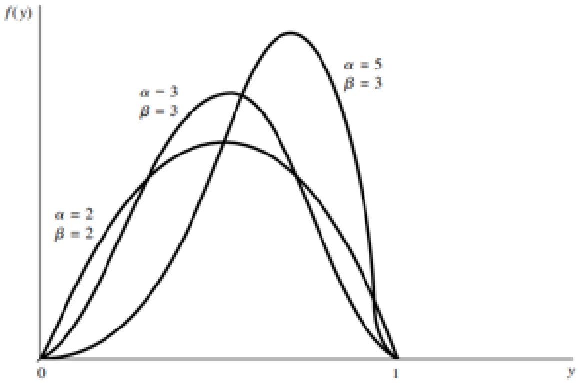
Se dice que un variable aleatoria Y tiene una *distribución de probabilidad beta con parámetros* $\sigma > 0$ y $\beta > 0$ si y sólo si la funión de densidad de Y es

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\sigma,\alpha)}, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & en\ cualquier\ otro\ punto \end{cases}$$

donde
$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Si Y es una variable aleatoria con distribución beta $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, entonces

$$\mu = E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
$$\sigma^2 = V(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$


f(y)
α = 5
β = 3
α = 3
β = 3
α = 2
β = 2
0
1
y

2.6. Tabla de resumen

Distribucion de Probabilidad	Función de densidad f(y)	Esperanza	Varianza
Uniforme	$\frac{1}{\theta_2-\theta_1}$	$\mu = E(Y) = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$	$\sigma^2 = V(Y) = \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$
Normal	$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	$E(Y) = \mu$	$V(Y) = \sigma^2$
Gamma	$\frac{y^{\sigma-1}e^{-y/\beta}}{\beta^\sigma \Gamma(\sigma)}$	$\mu = E(Y) = \sigma\beta$	$\sigma^2 = V(Y) = \sigma\beta^2$
Beta	$\frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\sigma,\alpha)}$	$\mu = E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\sigma^2 = V(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$