同型と周辺の射の対応

2022 年 3 月 16 日

目次

圏論の初学者向けの文書を作成していたところ、圏論内での議論では同型を等号のように扱えるのかを説明している文書が少ないことに気がつき、どうにかして同型を定義する段階でそれを説明し、理解できるようにしたいと考えた。

まずある二対象が同型であるとは、私の直感ではお互いに相互互換の関係であると考えている。この対象の持つ性質が同じことを示せば良いが、圏論では対象の性質が射によって説明されることが多い。そのため、まずは米田の原理を出発点として考えていくことにする。

定義 0.0.1（米田の原理） 任意の圏 $\mathbb{C}$ 上の対象 A, A' が同型 $A \cong A'$ である
$\iff$ 任意の対象 X で $\mathbb{C}(X, A) \cong \mathbb{C}(X, A')$ が成り立ち、X について自然である。
$\iff$ 任意の対象 X で $\mathbb{C}(A, X) \cong \mathbb{C}(A', X)$ が成り立ち、X について自然である。

$\mathbb{C}(X, A) \cong \mathbb{C}(X, A')$ と $\mathbb{C}(A, X) \cong \mathbb{C}(A', X)$ に関しては双対であるため前者の方で考える。

任意の射 $g : X \to Y$ に対して $i : A \to A'$、$i^{-1} : A' \to A$ を同型射とすると、

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(X, A) \arrow[r, shift left, "\mathbb{C}(X, i)"] & \mathbb{C}(X, A') \arrow[l, shift left, "\mathbb{C}(X, i^{-1})"] \\
\mathbb{C}(Y, A) \arrow[u, "\mathbb{C}(g, A)"] \arrow[r, shift left, "\mathbb{C}(Y, i)"] & \mathbb{C}(Y, A') \arrow[u, "\mathbb{C}(g, A')"'] \arrow[l, shift left, "\mathbb{C}(Y, i^{-1})"]
\end{tikzcd}$$

この図式が可換になることを示している。

もう少し具体的には、任意の射 $f : Y \to A$ に対して、

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d, shift left, "i"] \\
X \arrow[r, "g"] \arrow[rru, bend left, "f \circ g"] \arrow[rrd, bend right, "i \circ f \circ g"'] & Y \arrow[ru, "f"] \arrow[rd, "i \circ f"'] & \\
 & & A' \arrow[u, shift left, "i^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

が可換になることを示している。

射をある種の操作とみなせば、この射集合の同型はその二対象に関する操作が一対一対応をする、ということで直感的に理解できる。しかしただ一対一対応をするだけでは対応する操作が等価であるという説明にはならない。そこで自然性が対応する操作の等価性を与えると考える。

定義 0.0.2 **(射の左同値)**　任意の射 $f : Y \to A$ に対して $i : A \to A'$ と、逆射 $i^{-1} : A' \to A$ を同型射とする。この時、

$$f' = i \circ f \iff f \sim f'$$

として関係 $\sim$ を定義する。

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, shift left, "i"] \\
Y \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & A' \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] \\
 &
\end{tikzcd}$$

次に左同値 $\sim$ は同値関係であることを示す。

証明 0.0.1

- **反射律**　任意の射 $f : Y \to A$ に対して、恒等射による同型 $A \cong A$ への射を取ると、$f \sim f$ となる。
- **対称律**　$i : A \to A'$ と、逆射 $i^{-1} : A' \to A$ に対して $f \sim f'$ が成り立つとき、$i : A \to A'$ を逆射とみなすことで $f' \sim f$ となる。
- **推移律**　$i : A \to A'$ と、逆射 $i^{-1} : A' \to A$ による関係 $f \sim f'$、$j : A' \to A''$ と、逆射 $j^{-1} : A'' \to A'$ による関係 $f' \sim f''$、が成り立つとき、新しい同型射 $j \circ i : A \to A''$、$j^{-1} \circ i^{-1} : A'' \to A$ が構成できる。これにより $f \sim f''$ が成り立つ。

また、この図式の双対によって得られる同値関係射の右同値を $f \backsim f'$ と表す。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, shift left, "i"] \arrow[dr, "f"] & \\
A' \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] \arrow[r, "f'"'] & Y
\end{tikzcd}$$

これを米田の原理による図式に当てはめると、

$$f \sim f' \Longrightarrow f \circ g \sim f' \circ g$$

となる。

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[d, shift left, "i"] \\
X \arrow[r, "g"] \arrow[urr, bend left, "f \circ g"] \arrow[drr, bend right, "f' \circ g = (f \circ g)'"'] & Y \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & A' \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] \\
 & &
\end{tikzcd}$$

同様に双対を考えると、

$$f \backsim f' \Longrightarrow g \circ f \backsim g \circ f'$$

となる。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "g \circ f"] \arrow[dd, shift left, "i"] & & \\
 & Y \arrow[r, "g"] & X \\
A' \arrow[ur, "f'"'] \arrow[urr, bend right, "g \circ f' = (g \circ f)'"'] \arrow[uu, shift left, "i^{-1}"] & &
\end{tikzcd}$$

命題 0.0.1 **（$\sim$ と $\backsim$ の接続）**　同値関係 $f \sim f'$、$g \backsim g'$ が同一の同型射 $i : A \to A'$、$i^{-1} : A' \to A$ によって得られる時、$g \circ f = g' \circ f'$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, shift left, "i"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\
 & A' \arrow[ur, "g'"'] \arrow[uu, shift left, "i^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

大層なものであるかのように命題として表現したが、二つの同値関係をつなぐ要素としてはとても使いにくい。そのため、これらの関係を統合した新しい同値関係を作ろうと思う。

定義 0.0.3 **（射の同値）**　同型射とその逆射 $i : A \to A'$、$i^{-1} : A' \to A$、$j : B \to B'$、$j^{-1} : B' \to B$ に対して、

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "i"] & B \arrow[d, shift left, "j"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] & B' \arrow[u, shift left, "j^{-1}"]
\end{tikzcd}$$