積圏における射が、任意の圏に Interval Category を置いた積の普遍性で構成される事がわかった。しかし射の組は私の考えていたように、一点離散圏からの関手の間の自然変換でも定義できる。当然この方法でも証明が可能であるはずだから、この関手としての射と自然変換としての射の関係を頑張って考えてみる。

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{2} \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "!\exists\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & \boldsymbol{B} \end{tikzcd}$$

Interval Category である $\mathbf{2}$ から任意の圏 $\boldsymbol{A}$ への関手全体は、圏 $\boldsymbol{A}$ の射の全体に対応する。ここで、$\mathbf{2}$ から $\boldsymbol{A}$ へのすべての関手と対応するような自然変換を考える。まず関手圏 $\boldsymbol{Func(2,A)}$ は射の圏と呼ばれる圏で、$a,b,a',b' \in Obj(\boldsymbol{A})$ と、射の圏の対象である二つの射 $f : a \to b, g : a' \to b'$ に対して射の圏における射 $\alpha : f \to g$ は射の組 $\alpha_1 : a \to a'$、$\alpha_2 : b \to b'$ で $g \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$ を満たす物である。この α が射の公理を満たすことは簡単に確認できる。

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & a' \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "\alpha_2"] & b' \end{tikzcd}$$

ここで、任意の対象 $a, a' \in Obj(\boldsymbol{A})$ と射 $f : a \to a'$、恒等射 $id_a : a \to a$ に対して、射の圏の射 $\eta : id_a \to f$ を考える。この時、図式を可換にする射の組は $\eta_1 = id_a$、$\eta_2 = f$ ただ一つである。また同様に、この条件を満たす η によって写される射は f ただ一つである。よってこの η と射 f を同一視することができる。

これで関手で表した射と自然変換で表した射の関係性を調べることができる等になった。次にこれらのこの射の圏の要素の元を取って対応を考える。

$id_a : \mathbf{2} \to \boldsymbol{A}$ に $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ を合成、つまり、関手 f が $1 \in Obj(\mathbf{2})$ をどの対象に写すかを見る。これは明らかに a であり、$id_a \circ 1 = a$ である。また同様に $f \circ 2 = a'$ が成り立つ。

射に関しても自然変換の水平合成より、$\eta \circ l$ はただ一つの成分 $id_a \circ f = f$ に対応する。

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "2"'] & \mathbf{2} \arrow[r, bend left, "id_a"] \arrow[r, bend right, "f"'] & \boldsymbol{A} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "l"] & a \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "id_a"] & a \arrow[d, "f"] \\ * & 2 & a \arrow[r, "\alpha_2"] & a' \end{tikzcd}$$

これで任意の関手 $f : \mathbf{2} \to \boldsymbol{A}$ に対してうまいこと自然変換 η を定義し、それらに IntervalCategory $\mathbf{2}$ の元を写させると、関手 f を関手 a, a' 間の自然変換 $\eta = f$ として表せることが分かった。

逆に同様の手段を用いれば任意の自然変換 $f : a \Rightarrow a' : \mathbf{1} \to \boldsymbol{A}$ を関手 $f : \mathbf{2} \to \boldsymbol{A}$ で表せる。これを用いて

$\boldsymbol{Cat}$ の積対象が積圏になることを、自然変換を用いて調べていきたい。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\
B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}
$$