なぜ同型は同一視できるのか

2022 年 4 月 27 日

目次

まずある二対象が同型であるとは、私の直感ではお互いに相互互換の関係であると考えている。この対象の持つ性質が同じことを示せば良いが、圏論では対象の性質が射によって説明されることが多い。そのため、米田の補題の派生である米田の原理を出発点として考えていくことにする。

定義 0.0.1 **(米田の原理)**　任意の圏 $\mathbb{C}$ 上の対象 A, A' が同型 $A \cong A'$ である
$\iff$ 任意の対象 X で $\mathbb{C}(X, A) \cong \mathbb{C}(X, A')$ が成り立ち、X について自然である。
$\iff$ 任意の対象 X で $\mathbb{C}(A, X) \cong \mathbb{C}(A', X)$ が成り立ち、X について自然である。

$\mathbb{C}(X, A) \cong \mathbb{C}(X, A')$ と $\mathbb{C}(A, X) \cong \mathbb{C}(A', X)$ に関しては双対であるため前者の方で考える。

任意の射 $g : X \to Y$ に対して $i : A \to A'$、$i^{-1} : A' \to A$ を同型射とすると、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(X, A) \arrow[r, shift left, "\mathbb{C}(X, i)"] & \mathbb{C}(X, A') \arrow[l, shift left, "\mathbb{C}(X, i^{-1})"] \\
\mathbb{C}(Y, A) \arrow[u, "\mathbb{C}(g, A)"] \arrow[r, shift left, "\mathbb{C}(Y, i)"] & \mathbb{C}(Y, A') \arrow[u, "\mathbb{C}(g, A')"'] \arrow[l, shift left, "\mathbb{C}(Y, i^{-1})"]
\end{tikzcd}
$$

この図式が可換になることを示している。

もう少し具体的には、任意の射 $f : Y \to A$ に対して、

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dd, shift left, "i"] \\
X \arrow[r, "g"] \arrow[urr, bend left, "f \circ g"] \arrow[drr, bend right, "i \circ f \circ g"'] & Y \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i \circ f"'] & \\
 & & A' \arrow[uu, shift left, "i^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

が可換になることを示している。

射をある種の操作とみなせば、この射集合の同型はその二対象に関する操作が一対一対応をする、というこ

とで直感的に理解できる。さらに、この図式の自然性は f と $i \circ f$ が一対一対応をする時、それらに g 合成した $f \circ g$ と $i \circ f \circ g$ もまた一対一対応をしていることである。

次にこの射の対応とその双対を統合した対応関係を考える。

定義 0.0.2 **(射の同値)** 同型射とその逆射 $i : A \to A'$、$i^{-1} : A' \to A$、$j : B \to B'$、$j^{-1} : B' \to B$ に対して、$f' = j \circ f \circ i^{-1}$ である時 $f \sim f'$ とする。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "i"] & B \arrow[d, shift left, "j"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] & B' \arrow[u, shift left, "j^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

この関係が同値関係であることは $A \cong A'$、$B \cong B'$ が同値関係であることからすぐに証明できる。

また、i, i^{-1} か j, j^{-1} に恒等射を取ることによって米田の原理による一対一対応が得られる。

対象の性質を射の性質で述べると書いたが、一般的に圏論では射の性質は、圏におけるいくつかの操作で述べられるが、その中でも特に射の合成という操作によって述べられると考える。つまり、

$$
f \sim f', g \sim g' \Longrightarrow g \circ f \sim g' \circ f'
$$

が成り立てば、圏論的な操作では射の同値となる二つの射を区別できないと考えた。実際にこれが成り立てば、射の始域、終域を自由に同型な対象で入れ替えることができる。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "i"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "j"] & C \arrow[d, shift left, "k"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, shift left, "j^{-1}"] & C' \arrow[u, shift left, "k^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

しかし、私の出した結論としては一般には成り立たないことが分かる。$f \sim f'$ は同型射 i, j によって同値となり、$g \sim g'$ は同型射 j, k によって同値となるが、もし、$g \sim g'$ が $l \neq j$ となるような同型射 l, k により同値となる場合、f, f' と g, g' は合成可能であるにもかかわらず $g \circ f \sim g' \circ f'$ とはならない。

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "i"] & B \arrow[d, shift left, "j"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] & B' \arrow[u, shift left, "j^{-1}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "l"] & C \arrow[d, shift left, "k"] \\
B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, shift left, "l^{-1}"] & C' \arrow[u, shift left, "k^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "i"] & B \arrow[r, "id_B"] \arrow[d, shift left, "j"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, shift left, "l"] & C \arrow[d, shift left, "k"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, shift left, "i^{-1}"] & B' \arrow[r, "l \circ j^{-1}"'] \arrow[u, shift left, "j^{-1}"] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, shift left, "l^{-1}"] & C' \arrow[u, shift left, "k^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

この問題は $B \cong B'$ を複数の同型射によって同一視していることが要因である。流石に二対象間の同型がただ一つである、という条件は厳しすぎるが、現実的に複数の同型射によって二対象を同一視するような場合はほとんど無いように思える。

そのため圏論的な操作や性質によって与えられる同型射は、二対象間で一つしか与えられないと考えた。現時点では普遍性がそうであるか調べている。

・圏の骨格との関係

・射の圏の同型と射の同値

・下位互換、上位互換となるような対象と射の対応

・