積圏の普遍性と元の存在

2021 年 1 月 20 日

一般的には積圏を定義してから積圏が $\boldsymbol{Cat}$ における積対象となることを示すが、逆に $\boldsymbol{Cat}$ における積対象から積圏の具体的な構成を与えることができるかどうかを確認したい。

圏の積は他の積と同様に、ある圏 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ とその間の関手 $\pi_A : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$、$\pi_B : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$ が存在して、任意の対象 $\boldsymbol{X}$ が関手 $F : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}$、$G : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{B}$ を持つときに、一意な関手 $\langle F, G \rangle : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ が存在し、$\pi_A \circ \langle F, G \rangle = F$、$\pi_B \circ \langle F, G \rangle = G$ となる。

$$
\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{X} \arrow[dl, "F"'] \arrow[d, "!\exists\langle F,G\rangle"] \arrow[dr, "G"] & \\
\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & \boldsymbol{B}
\end{tikzcd}
$$

1　積圏の対象

この積圏 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の対象と射を考えるために、任意の圏 $\boldsymbol{X}$ に一点離散圏 $\mathbf{1}$ をとり global element を考える。つまり、任意の圏 $\boldsymbol{X}$ において $\boldsymbol{Func}(\mathbf{1}, \boldsymbol{X}) \cong \boldsymbol{X}$ が成り立つから、関手 $a : \mathbf{1} \to \boldsymbol{A}$ は圏 $\boldsymbol{A}$ の対象と同一視できる。

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "!\exists\langle a,b\rangle"] \arrow[dr, "b"] & \\
\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & \boldsymbol{B}
\end{tikzcd}
$$

積の普遍性より、任意の関手 $a : \mathbf{1} \to \boldsymbol{A}$ と $b : \mathbf{1} \to \boldsymbol{B}$ に対して、$\pi_A \circ \langle a, b \rangle = a$、$\pi_B \circ \langle a, b \rangle = b$ が成り立つような関手 $\langle a, b \rangle$ が存在することが分かる。よって積圏の対象は、積圏の普遍性で与えられる

2　積圏の射

図式の簡略化のため積圏 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の圏 $\boldsymbol{B}$ の方を固定して考える。$\boldsymbol{Func}(\mathbf{1}, \boldsymbol{X}) \cong \boldsymbol{X}$ より、圏 $\boldsymbol{A}$ の射は圏 $\boldsymbol{Func}(\mathbf{1}, \boldsymbol{A})$ の射、つまり自然変換に対応する。よって、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\langle a,b\rangle"] \arrow[r, bend right, "\langle a',b\rangle"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \langle f,b\rangle"] & \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \arrow[r, "\pi_A"] & \boldsymbol{A}
\end{tikzcd}
$$

となり、自然変換の水平合成より、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\pi_A\circ\langle a,b\rangle"] \arrow[r, bend right, "\pi_A\circ\langle a',b\rangle"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \pi_A\circ\langle f,b\rangle"] & \boldsymbol{A}
\end{tikzcd}
$$

と書ける。また、$a = \pi_A \circ \langle a, b\rangle$、$a' = \pi_A \circ \langle a', b\rangle$ より、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\pi_A\circ\langle f,b\rangle \Downarrow\Downarrow f"] & \boldsymbol{A}
\end{tikzcd}
$$

と書ける。この関手 a から関手 a' への二つの自然変換が等しいことを示したい。

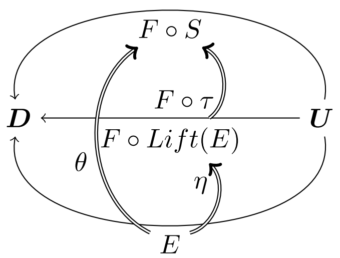
ここまでで使用していない積の性質は関手積の一意性であり、この性質を用いて $\pi_A \circ \langle f, b\rangle = f$ を求めることは想像できるが、関手の一意性が自然変換にどのような影響を与えるのか想像ができない。

関手と普遍性と自然変換ということで Kan 拡張が頭をよぎったので上手く図式に当てはめられないか試してみた。

3 左 Kan リフト

Kan 拡張の関手の方の双対を取った Kan リフトで表せそうである。ある圏 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{U}$、関手 $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}, E : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{D}$ に対し、関手 $Lift : \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{U}} \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{U}}$ と自然変換 $\eta : E \Rightarrow F \circ Lift(E)$ の組 $\langle Lift, \eta\rangle$ が左 Kan リフトであるとは、同様の条件を満たす組 $\langle S, \theta\rangle$ が存在するならば、$\theta = F\tau \circ \eta$ となるような自然変換 $\tau : Lift(E) \Rightarrow S$ が一意に存在する時である。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C} \arrow[d, "F"'] & \\
\boldsymbol{D} \arrow[u, phantom, near start, "\eta"] & \boldsymbol{U} \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "Lift(E)"']
\end{tikzcd}
$$



これを積圏の普遍性に当てはめる。また、簡略化の為 $\boldsymbol{B}$ 側を固定する。

ある圏 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}, \mathbf{1}$、関手 $\pi_A : \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}, a : \mathbf{1} \to \boldsymbol{A}$ に対し、関手 $\langle(-), b\rangle : \boldsymbol{A}^{\mathbf{1}} \to (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^{\mathbf{1}}$ と自然変換 $id_A : a \Rightarrow \pi_A \circ \langle(-), b\rangle(a)$ の組 $\langle\langle(-), b\rangle, id_A\rangle$ が左 Kan リフトであるとは、同様の条件を満たす組 $\langle S, \theta\rangle$ が存在するならば、$\theta = F\tau \circ \eta$ となるような自然変換 $\tau : Lift(E) \Rightarrow S$ が一意に存在する時である。

参考文献

[1] http://alg-d.com/math/kan_extension/

[2] S. マックレーン, (2019)『圏論の基礎』(三好博之・高木理訳) 丸善出版