Profunctor の表現定理の仮まとめ 2

2022 年 12 月 20 日

命題 0.0.1　対象 A, A', S, S' から Optic $\int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S')$ を取る操作は Profunctor である。

証明 0.0.2　$\Phi((A, A'), (S, S')) = \int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S')$ とする。Hom 関手の定義より、A, S' に対して共変、A', S に対して反変であるから、

$$\Phi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\mathbb{op}}) \times (\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{Set}$$

と表せる。任意の圏 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ に対して $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^{op} \cong \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{B}^{op}$ であるから、

$$\Phi : (\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C})^{\mathbb{op}} \times (\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{Set}$$

とも表すことができ、これは Profunctor

$$\Phi : \mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}$$

である。

定義 0.0.3 **（モナド）**　関手 $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対するモナド (M, η, μ) を以下の要素で構成する。

乗算子　自然変換 $\eta : Id_C \Rightarrow M$

単位子　自然変換 $\mu : M \circ M \Rightarrow M$

結合則　以下の図式を可換にする。

$$\begin{tikzcd}
M \circ M \circ M \arrow[r, Rightarrow, "M \circ \mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu \circ W"] & M \circ M \arrow[d, Rightarrow, "\eta"] \\
M \circ M \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] & M
\end{tikzcd}$$

単位則　以下の図式を可換にする。

$$
\begin{tikzcd}
 & M & \\
M \arrow[ur, equal] \arrow[r, Rightarrow, "M \circ \eta"] & M \circ M \arrow[u, Rightarrow, "\mu"] & M \arrow[ul, equal] \arrow[l, Rightarrow, "\eta \circ M"']
\end{tikzcd}
$$

このモナドの定義における関手を Profunctor に置き換える。

定義 0.0.4 **(プロモナド)**　Profunctor $M : \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ に対するモナド (M, η, μ) を以下の要素で構成する。

乗算子　自然変換 $\mu : M \diamond M \Rightarrow M$

単位子　自然変換 $\eta : \mathbb{C}(-,-) \Rightarrow M$

結合則　以下の図式を可換にする。

$$
\begin{tikzcd}
M \diamond M \diamond M \arrow[r, Rightarrow, "M \diamond \mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu \diamond W"] & M \diamond M \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
M \diamond M \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & M
\end{tikzcd}
$$

単位則　以下の図式を可換にする。

$$
\begin{tikzcd}
 & M & \\
M \arrow[ur, equal] \arrow[r, Rightarrow, "M \diamond \eta"] & M \diamond M \arrow[u, Rightarrow, "\mu"] & M \arrow[ul, equal] \arrow[l, Rightarrow, "\eta \diamond M"']
\end{tikzcd}
$$

命題 0.0.5　$\Phi : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}$ はプロモナドである。

証明 0.0.6

乗算子　まず

$$\Phi \diamond \Phi((A, A'), (T, T')) = \int^{S,S':\mathbb{C}} (\int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S)) \times (\int^{N:\mathbb{C}} \mathbb{C}(T, N \otimes S) \times \mathbb{C}(N \otimes A', S))$$

であるが、フビニの定理と積のコエンドの保存より、

$$\Phi \diamond \Phi((A, A'), (T, T')) \cong \int^{S,S',M,N:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S) \times \mathbb{C}(T, N \otimes S) \times \mathbb{C}(N \otimes A', S)$$

が成り立つ。

まず $\Phi \diamond \Phi((A, A'), (T, T'))$ の任意の元 $\langle l, r, l', r' \rangle$ を $\langle N \otimes l, N \otimes r, l', r' \rangle$ へ写すような操作を考える。すると射関数の自然性と双モノイダル積の関手性から、式中のすべての対象に対して自然に

なる。

次に余米田の補題を S, S' に対して適用すると、

$$\langle (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \rangle : \int^{M,N:\mathbb{C}} \mathbb{C}(T, N \otimes (M \otimes A)) \times \mathbb{C}(N \otimes (M \otimes A'), T')$$

となり、モノイダル積の結合子とフビニの定理から

$$\langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle : \int^{P:\mathbb{C}} \mathbb{C}(T, P \otimes A) \times \mathbb{C}(P \otimes A', T')$$

が得られる。これらを合成して単位子を

$$\eta_{(A,A'),(T,T')}(l, r, l', r') = \langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle$$

と定義する。またこれらの操作は A, A', T, T' に対して自然であるから η も自然である。

単位子　自然変換 $\eta : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}(-,-) \Rightarrow \Phi$ の任意の対象 $(A, A'), (S, S')$ に対する成分

$$\eta_{(A,A'),(S,S')} : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}((A, A'), (S, S')) \to \int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S)$$

を任意の射 $f : S \to A,\ g : A \to S$ とモノイダル積の単位子に対して

$$\eta_{(A,A'),(S,S')}(f, g) = \kappa_I(\lambda_A^{-1} \circ f, g \circ \lambda_{A'})$$

と定義する。また λ の自然性より η も自然である。

結合則　Optic の結合則と同様に示せる。

単位則　Optic の単位元則と同様に示せる。

命題 0.0.7 **（二重米田）**

$$\mathbb{C}(A, B) \cong \int_{F:\mathbb{Set}^{\mathbb{C}}} \mathbb{Set}(FA, FB)$$

であり、A, B に対して自然。

証明 0.0.8

$$\begin{aligned}
\int_{F:\mathbb{Set}^{\mathbb{C}}} \mathbb{Set}(FA, FB) &\cong \int_{F:\mathbb{Set}^{\mathbb{C}}} \mathbb{Set}(\mathbb{Set}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(A,-), F), \mathbb{Set}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B,-), F)) && \text{(米田の補題)} \\
&\cong \mathbb{Set}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B,-), \mathbb{C}(A,-)) && \text{(米田の原理)} \\
&\cong \mathbb{C}(A, B) && \text{(米田の原理)}
\end{aligned}$$