## Profunctor の表現定理の仮まとめ 2

## 2023年1月22日

命題 0.0.1 対象 A,A',S,S' から  $\operatorname{Optic}\int^{M:\mathbb{C}}\mathbb{C}(S,M\otimes A)\times\mathbb{C}(M\otimes A',S')$  を取る操作は Profunctor である。

証明 0.0.2  $\Phi((A,A'),(S,S'))=\int^{M:\mathbb{C}}\mathbb{C}(S,M\otimes A)\times\mathbb{C}(M\otimes A',S')$  とする。Hom 関手の定義より、A,S' に対して共変、A',S に対して反変であるから、

$$\Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{op}) \times (\mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{S}et$$

と表せる。任意の圏  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  に対して  $(\mathbb{A} \times \mathbb{B})^{op} \cong \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{B}^{op}$  であるから、

$$\Phi: (\mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C})^{op} \times (\mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{S}et$$

とも表すことができ、これは Profunctor

$$\Phi: \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}$$

である。

定義 0.0.3 (モナド) 関手  $M:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$  に対するモナド  $(M,\eta,\mu)$  を以下の要素で構成する。

乗算子 自然変換  $\eta: Id_C \Rightarrow M$ 

単位子 自然変換  $\mu: M \circ M \Rightarrow M$ 

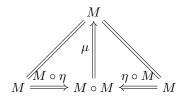
結合則 以下の図式を可換にする。

$$M \circ M \circ M \xrightarrow{M \circ \mu} M \circ M$$

$$\downarrow \mu \circ W \qquad \qquad \downarrow \eta$$

$$M \circ M \xrightarrow{\eta} M$$

単位則 以下の図式を可換にする。



このモナドの定義における関手を Profunctor に置き換える。

定義 0.0.4 (プロモナド) Profunctor  $M:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$  に対するモナド  $(M,\eta,\mu)$  を以下の要素で構成する。

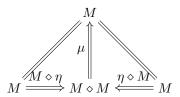
乗算子 自然変換  $\mu: M \diamond M \Rightarrow M$ 

単位子 自然変換  $\eta: \mathbb{C}(-,-) \Rightarrow M$ 

結合則 以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} M \diamond M \diamond M & \xrightarrow{M \mathrel{\diamond} \mu} M \diamond M \\ & & & \downarrow \mu \diamond W & & \downarrow \mu \\ M \diamond M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

単位則 以下の図式を可換にする。



命題 0.0.5  $\Phi: \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}$  はプロモナドである。

証明 0.0.6

乗算子 まず

であるが、フビニの定理と積のコエンドの保存より、

$$\Phi \diamond \Phi((A,A'),(T,T'))\cong \int^{S,S',M,N:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S,M\otimes A) \times \mathbb{C}(M\otimes A',S) \times \mathbb{C}(T,N\otimes S) \times \mathbb{C}(N\otimes A',S)$$
が成り立つ。

まず  $\Phi \diamond \Phi((A,A'),(T,T'))$  の任意の元  $\langle l,r,l',r' \rangle$  を  $\langle N \otimes l,N \otimes r,l',r' \rangle$  へ写すような操作を考える。すると射関数の自然性と双モノイダル積の関手性から、式中のすべての対象に対して自然に

なる。

次に余米田の補題をS,S'に対して適用すると、

$$\langle (N\otimes l)\circ l',r'\circ (N\otimes r)\rangle: \int^{M,N:\mathbb{C}}\mathbb{C}(T,N\otimes (M\otimes A))\times \mathbb{C}(N\otimes (M\otimes A'),T')$$

となり、モノイダル積の結合子とフビニの定理から

$$\langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle : \int^{P:\mathbb{C}} \mathbb{C}(T, P \otimes A) \times \mathbb{C}(P \otimes A', T')$$

が得られる。これらを合成して単位子を

$$\eta_{(A,A'),(T,T')}(l,r,l',r') = \langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle$$

と定義する。またこれらの操作は A, A', T, T' に対して自然であるから  $\eta$  も自然である。

単位子 自然変換  $\eta:\mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}(-,-)\Rightarrow\Phi$  の任意の対象 (A,A'),(S,S') に対する成分

を任意の射  $f:S \to A, \ g:A \to S$  とモノイダル積の単位子に対して

$$\eta_{(A,A'),(S,S')}(f,g) = \kappa_I(\lambda_A^{-1} \circ f, g \circ \lambda_{A'})$$

と定義する。また $\lambda$ の自然性より $\eta$ も自然である。

結合則 Optic の結合則と同様に示せる。

単位則 Optic の単位元則と同様に示せる。

命題 0.0.7 プロモナド  $\Phi$  による EM 圏は丹原加群の圏である。

命題 0.0.8 (二重米田)

$$\mathbb{C}(A,B)\cong\int_{F\cdot\mathfrak{S}_{\operatorname{ad}}^{\mathbb{C}}}}\mathbb{Set}(FA,FB)$$

であり、A, B に対して自然。

証明 0.0.9

$$\begin{split} \int_{F:\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}} & \mathbb{S}\text{et}(FA,FB) \cong \int_{F:\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}} \mathbb{S}\text{et}(\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(A,-),F),\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B,-),F)) \\ & \cong \mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B,-),\mathbb{C}(A,-)) \\ & \cong \mathbb{C}(A,B) \end{split} \tag{*田の原理}$$