プロファンクターオプティクスの理論と実装

March 21, 2023

目的

データへのアクセサの一般化である Lens やキャストの一般化である Prism は更に Optics という概念へと一般化される。

これらの一般化には圏論が用いられるが、興味深いことに圏論は自身を抽象化できる。そのため Optic も更に一般化できると考えた。

全体の構成

- 最初に導入として比較的身近な Lens と Prism を紹介し、Optic を定義して Optic がそれらの一般化であることを示す。
- 次に丹原加群を定義して、Optic との関係性を丹原 Double 圏同値として示す。
- そして最後にこれらの主要な結果として、Optic の別の形態を与えるプロファンクターの表現定理を述べる。

データアクセサの一般化 Lens

Definition (Lens[?])

Lens は以下の二つの写像で構成される。

$$\mathrm{get} : S \to A, \;\; \mathrm{put} : S \times A' \to S'$$

ここで $S := B \times A, \;\; S' := B \times A'$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{get} : S &\longrightarrow A & \mathrm{put} : S \times A' &\longrightarrow S' \\ \langle b, a \rangle &\longmapsto a & \langle \langle b, a \rangle, a' \rangle &\longmapsto \langle b, a' \rangle \end{aligned}$$

またこのような二つの写像の組の全体を $\mathrm{Lens}(A, A', S, S')$ とする。すなわち

$$\mathrm{Lens}(A, A', S, S') := [S, A] \times [S \times A', S']$$

となる。($[A, B]$ は集合 A から B への写像の集合とする。)

キャストの一般化 Prism

Definition (Prism[?])

Prism は以下の二つの射で構成される。

$$\text{downcast} : S \to S' + A, \;\; \text{upcast} : A' \to S'$$

ここで $S := B + A, \;\; S' := B + A'$ とすると、

$$\begin{aligned} \text{downcast} : S &\longrightarrow S' + A & \text{upcast} : A' &\longrightarrow S' \\ a &\longmapsto a & a' &\longmapsto a' \\ b &\longmapsto b & & \end{aligned}$$

Lens と同様に

$$\text{Prism}(A, A', S, S') := [S, S' + A] \times [A', S]$$

とする。

Lens と Prism の双対性

Theorem

Lens と *Prism* は双対である。

二つの概念が双対であるとは、それを構成する射の向きがすべて逆であることである。例えば積と余積はどちらも以下の図式によって定義される。

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f, g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_A"'] & A + B \arrow[u, "{[f, g]}"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_B"]
\end{tikzcd}
$$

これによって Lens $[S, A] \times [S \times A', S']$ と Prism $[S, S' + A] \times [A', S]$ が双対の関係にあると分かる。

Optic の定義

Definition (Optic[?])

四つの集合 A, A', S, S' に対する Optic の集合を

$$\mathrm{Optic}(A, A', S, S') := \int^{M} [S, M \otimes A] \times [M \otimes A', S']$$

と定義する。

モノイダル積 $\otimes$ 直積 $\times$、直和 $+$ の一般化した演算である。
また集合のみならず写像のモノイダル積も取ることができる。つまり二つの写像 $f : A \to B,\ g : C \to D$ を合成した写像

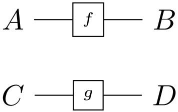
$$f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D$$

が得られる。

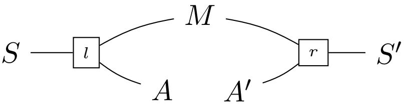
コエンド $\int^{M}$ 対象 M を添字とする直和集合を取る操作。

ストリングダイアグラム

モノイダル積の並列性 $f \otimes g : A \otimes C \to B \otimes D$ を以下のように表す。



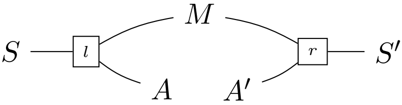
すると $\int^M [S, M \otimes A] \times [M \otimes A', S']$ のある要素 $\langle l, r \rangle$ は



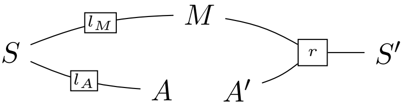
と書くことができる。また l, r は本来独立な写像であるが、コエンドの性質より M につながる線をつなげて書くことができる。

Lens は Optic である

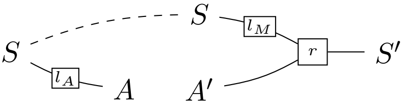
モノイダル積 $\otimes$ が直積 $\times$ である時、



$[A, B \times C] \cong [A, B] \times [A, C]$ より、



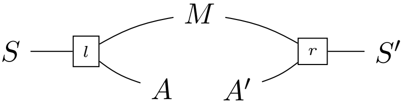
$FA \cong \int^M [A, M] \times FM$ から



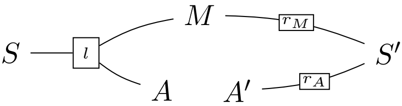
よって $\mathrm{Optics}_\times(A, A', S, S') \cong \mathrm{Lens}(A, A', S, S')$

Prism は Optic である

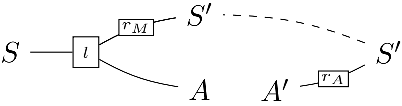
モノイダル積 $\otimes$ が直和 $+$ である時、



$[A+B, C] \cong [A, C] + [B, C]$ より、



$FA \cong \int^M [M, A] \times FM$ から



よって $\mathrm{Optics}_+(A, A', S, S') \cong \mathrm{Prism}(A, A', S, S')$

集合の圏

集合と写像の全体は圏と呼ばれる構造を持ち、これを $\mathbb{Set}$ とする。

Definition (集合の圏)

- **対象** 任意の (小さい) 集合を $\mathbb{Set}$ の対象とする。
- **射** 対象 A, B に対する射を任意の写像 $f : A \to B$ とする。
- **射の合成** 射の合成 $f \circ g$ はそのまま写像の合成とする。

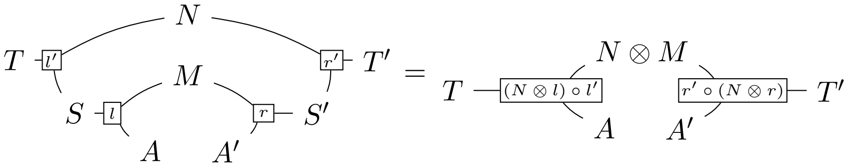
写像の集合は $[A, B]$ で表せるが、これを Optic の集合 $\mathrm{Optic}(A, A', S, S')$ と置くと同様に圏が定義できる。

Optic の圏

Definition (Optic の圏 [?])

集合の圏上の Optic の圏を以下のように構成する。

- **対象** 任意の (小さい) 集合の二つ組を対象とする。
- **射** 対象 (A, A'), (S, S') による射集合を $\mathrm{Optic}(A, A', S, S')$ とする。
- **射の合成** 二つの Optic $\langle l', r' \rangle$, $\langle l, r \rangle$ の合成を $\langle (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r') \rangle$ とする。



また Optic の合成が定義できるので、Lens、Prism でも合成ができる。

丹原加群

Definition (丹原加群 [?])

丹原加群とは以下の図式を可換にする Profunctor P と射の族

$$\zeta_{A,A',M} : P(A, A') \to P(M \otimes A, M \otimes A')$$

の組 (P, ζ) である。

$$\begin{tikzcd}
P(A, A') \arrow[r, "\zeta_{A,A',M}"] \arrow[d, "\zeta_{A,A',N\otimes M}"] & P(M \otimes A, M \otimes A') \arrow[d, "\zeta_{A,A',N}"] \\
P((N\otimes M)\otimes A, (N\otimes M)\otimes A') \arrow[r, "P(a^{-1}, a)"] & P(N\otimes(M\otimes A), N\otimes(M\otimes A'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P(A, A') \arrow[r, "\zeta_I"] \arrow[dr] & P(I \otimes A, I \otimes A') \arrow[d, "P(\lambda^{-1}, \lambda)"] \\
 & P(A, A')
\end{tikzcd}$$

ただし、Profunctor は圏上の二項演算の一種である。

丹原加群の圏

Definition (丹原加群の圏 [?])

丹原加群の圏 $\mathbb{T}\mathrm{amb}$ を以下のように定義する。

対象 任意の丹原加群 (P, ζ) を対象とする。

射 以下の図式を可換にする射の族 $\alpha_{A,A'} : P(A, A') \to Q(A, A')$ を射とする。

$$\mathbb{S}\mathrm{et} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{T}\mathrm{amb}$$

$$\begin{tikzcd} P(A, A') \arrow[r, "\zeta_{A,A',M}"] \arrow[d, "\alpha_{A,A'}"] & P(M \otimes A, M \otimes A') \arrow[d, "\alpha_{M\otimes A, M\otimes A'}"] \\ Q(A, A') \arrow[r, "\mu_{A,A',M}"] & Q(M \otimes A, M \otimes A') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (P, \zeta) \arrow[d, "\alpha"] \\ (Q, \mu) \end{tikzcd}$$

射の合成 元の圏の射の合成からそのまま定義できる。

Optic の圏と丹原加群

丹原加群は $\mathbb{Optic}$ から $\mathbb{Set}$ への準同型写像と対応する。

この対応は既存の文献において次の定理で知られているが、証明は行間が広いため定理の厳密化を行なった。

Theorem (丹原 Double 圏同値 [?][?])

$$\mathbb{Tamb} \simeq [\mathbb{Optic}, \mathbb{Set}]$$

$\simeq$ は圏の同型を緩めた等価性とし、$[\mathbb{Optic}, \mathbb{Set}]$ は $\mathbb{Optic}$ から $\mathbb{Set}$ への準同型写像の成す圏である。

Profunctor Optics

最後に最終目標である Profunctor の表現定理を紹介する。

Theorem (Profunctor の表現定理 [?][?])

$$\mathbb{O}\mathrm{ptic}(A, A', S, S') \cong \int_P [P(A, A'), P(S, S')]$$

ただし P は任意の丹原加群とする。

本来 P は丹原加群ではなく、$\mathbb{O}\mathrm{ptic}$ から $\mathbb{S}\mathrm{et}$ の準同型写像であるが、前スライドの丹原 Double 圏同値によって丹原加群とみなせる。

また左辺のような形で表した Optic を Profunctor Optics と呼び、実用ではこちらを用いることが多い。

まとめ

- Lens と Prism を定義し、それらが Optic の一例であることを示した。
- 丹原加群を定義し、丹原 Double 圏同値による Optic との関係を示した。
- 丹原 Double 圏同値の応用として、Profunctor の表現定理を示した。

また具体的な成果として、丹原 Double 圏同値の定理の厳密化を行なった。

今後の課題

- 2-圏論に関する体系的な知識を身につける。
- 2-圏論を用いて丹原 Double 圏同値の一貫した証明を示す。
- 丹原 Double 圏同値の一般化と思われる定理が 2-圏論に存在するため、それとの関係を明らかにする。

Opticの定義のさらなる一般化

このスライドではOpticを
$\mathrm{Optic}(A, A', S, S') := \int^M [S, M \otimes A] \times [M \otimes A', S']$ と定義したが、論文のほうでは $\mathbb{Set}$ で閉じることを要請せずに

$$\int^M \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S')$$

と定義している。さらに先行研究ではモノイダル積を圏への作用
$\cdot : \mathbb{M} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とした

$$\int^M \mathbb{C}(S, M \cdot A) \times \mathbb{C}(M \cdot A', S')$$

なるOpticで議論される。またMixed Opticでは二つの射集合に現れる圏の作用のうち、それぞれ別の作用を用いている。

特にモノイダル積から作用への一般化では議論が複雑になってしまう。そのためそれらがもたらす良い性質を捨てることを覚悟し、次の Optic の定義を提唱する。ただし $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ とする。

$$\mathrm{FOptic(A, A', S, S')} := \int^{F} \mathbb{C}(S, FA) \times \mathbb{C}(FA', S')$$

モノイダル積は $M \otimes - : C \to C$ と表せ、M に関する射は自然変換で媒介できる。そのため明らかに Optic の拡張になっている。

この FOptic を用いる利点として、異なるモノイダル積を採用した Optic 同士を必ず合成できることがある。

FOptic と Van laarhoven encoding

FOptic を

$$\mathrm{FOptic(A, A', S, S')} := \int^{F} \mathbb{C}(S, FA) \times \mathbb{C}(FA', S')$$

と定義したが、Lens,Prism の異なる一般化として Van laarhoven encoding があり、

$$\int_{F} [\mathbb{C}(A, FA), \mathbb{C}(S, FS)]$$

と定義される、構造が類似している。

Lens 則

Definition (Lawful Lens[?])

$\mathrm{Lens}(A, A, S, S)$ の要素であり、以下の三つの図式を可換にする (get, put) を Lawful Lens と呼ぶ。

$$
\begin{tikzcd}
S \times A \arrow[rr, "\pi_A"] \arrow[dr, "\mathrm{put}"'] & & A \\
& S \arrow[ur, "\mathrm{get}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "id_S"] \arrow[dr, "\langle id_S, \mathrm{get} \rangle"'] & & S \\
& S \times A \arrow[ur, "\mathrm{put}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(S \times A) \times A \arrow[r, "\mathrm{put} \times A"] \arrow[d, "\pi_S \times A"'] & S \times A \arrow[d, "\mathrm{put}"] \\
S \times A \arrow[r, "\mathrm{put}"] & A
\end{tikzcd}
$$

また図式による可換性をそれぞれ putget、getput、putput 則と呼ぶことにする。

また同様に双対を取ることで Lawful Prism も得られる。

Lawful Opti

Lens が Optic へ一般化されるように、Lawful Lens もまた Lawful Optic へと一般化される。

Definition (Lawful Opticc[?])

以下の等式を満たす Optic $\langle l, r \rangle$ を Lawful Optic と呼ぶ。

$$r \circ l = id_S$$

$$\langle l,\ l \circ r,\ r \rangle = \langle l,\ id_{M \otimes A},\ r \rangle$$

ただし、二つ目の等式は集合

$$\mathrm{Optic}^2(A, A, S, S) = \int^{M,N} [S, M \otimes A] \times [M \otimes A, N \otimes A] \times [N \otimes A, S]$$

の上で成り立つとする。

Theorem ([?])

ある *Lens* が *Lawful* であることと、その一般化の *Optic* が *Lawful* であることは同値である。

($\Longrightarrow$) については Lens (get, put) を Optic に変換すると $\langle\langle id_S, \mathrm{get}\rangle, \mathrm{put}\rangle$ となるから、

$$\mathrm{put} \circ \langle id_S,\ \mathrm{get}\rangle = id_S$$

と、

$$\langle\langle id_S,\ \mathrm{get}\rangle,\ \langle id_S,\ \mathrm{get}\rangle \circ \mathrm{put},\ \mathrm{put}\rangle = \langle\langle id_S,\ \mathrm{get}\rangle,\ id_{M\otimes A},\ \mathrm{put}\rangle$$

を示せばよい。どのように証明するか大まかに述べると、
一つ目の等式は明らかに getput 則より成り立ち、二つ目の等式は putget 則により中央の get が消え、コエンドの性質より中央の put が左に移る。そして putput 則により put が一つ消えて等式が成り立つ。

プロモナド

Definition

Profunctor $M : \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ $(M : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbb{Set})$ によるモナド (M, μ, η) を以下のように定義する。

- **乗算子** 自然変換 $\mu : M \diamond M \Rightarrow M$
- **単位子** 自然変換 $\eta : \mathbb{C}(-,-) \Rightarrow M$

結合則単位則 以下の二つの図式を可換にする。

$$
\begin{tikzcd}
M \diamond M \diamond M \arrow[r, Rightarrow, "M \diamond \mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu \diamond M"] & M \diamond M \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
M \diamond M \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & M & \\
M \diamond \mathbb{C}(-,-) \arrow[ur, equal] \arrow[r, Rightarrow, "M \diamond \eta"] & M \diamond M \arrow[u, Rightarrow, "\mu"] & \mathbb{C}(-,-) \diamond M \arrow[ul, equal] \arrow[l, Rightarrow, "\eta \diamond M"']
\end{tikzcd}
$$

ただし $(M \diamond M)(A, C) = \int^B M(B, C) \times M(A, B)$ とする。
また同様に自然変換の向きを入れ替えたプロコモナドも構成できる。

プロコモナドと Lawful 性

$\Phi(A,A,S,S) \ := \ \mathrm{Optic}(A,A,S,S) = \int^{M}[S, M\otimes A]\times[M\otimes A, S]$ とする。するとこれを以下のように関手とみなすことができる。

$$\Phi : \mathbb{C}\times\mathbb{C}^{\mathbb{op}}\times\mathbb{C}^{\mathbb{op}}\times\mathbb{C}\to\mathbb{Set}$$

特に $\Phi(A,A,-,-) : \mathbb{C}^{\mathbb{op}}\times\mathbb{C}\to\mathbb{Set}$ は Profunctor
$\Phi(A,A,-,-) : \mathbb{C}\nrightarrow\mathbb{C}$ とみなすことができ、

$$\begin{aligned}
(\Phi(A,A,-,-)\diamond\Phi(A,A,-,-))(S,S) &= \int^{L}\Phi(A,A,L,S)\times\Phi(A,A,S,L) \\
&= \int^{L}(\int^{N}[L, N\otimes A]\times[N\otimes A, S])\times(\int^{N}[S, M\otimes A]\times[M\otimes A, L]) \\
&\cong \int^{L,N,M}[L, N\otimes A]\times[N\otimes A, S]\times[S, M\otimes A]\times[M\otimes A, L] \\
&\cong \int^{N,M}[S, M\otimes A]\times[M\otimes A, N\otimes A]\times[N\otimes A, S]
\end{aligned}$$

のように $\mathrm{Optic}^2(A,A,-,-)\cong\mathrm{Optic}(A,A,-,-)\diamond\mathrm{Optic}(A,A,-,-)$ であることが示せる。

Definition (Lawful プロコモナド)

Lawful プロコモナド $(\Phi(A,A,-,-),\delta_A,\epsilon_A)$ を以下のように構成する。

余乗算子 $\delta_A : \Phi(A,A,-,-) \Rightarrow \Phi^2(A,A,-,-)$ を

$$\delta_A(l,r) = \langle l, id, r \rangle$$

と定義する。

余単位子 $\epsilon_A : \Phi(A,A,-,-) \Rightarrow [-,-]$ を

$$\epsilon_A(l,r) = r \circ l$$

と定義する。

結合則単位則 省略

プロコモナドの圏と Lawful プロコモナド

$\Phi_A = \Phi(A, A, -, -)$ と略記することにする。

Theorem

二つの *Lawful* プロコモナド $(\Phi(A, A, -, -), \delta_A, \epsilon_A)$,$(\Phi(S, S, -, -), \delta_S, \epsilon_S)$ に対して、
Optic$\langle l, r\rangle$ が *Lawful* であることと、以下の図式を可換にすることは同値である。

$$\begin{tikzcd} \Phi_A \arrow[rr, Rightarrow, "\Phi(l, r, -, -)"] \arrow[dr, Rightarrow, "\epsilon_A"'] & & \Phi_S \arrow[dl, Rightarrow, "\epsilon_S"] \\ & {[-, -]} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi_A \arrow[r, Rightarrow, "\Phi(l, r, -, -)"] \arrow[d, Rightarrow, "\delta_A"'] & \Phi_S \arrow[d, Rightarrow, "\delta_S"] \\ \Phi_A \diamond \Phi_A \arrow[r, Rightarrow, "\Phi(l, r, -, -) \diamond \Phi(l, r, -, -)"'] & \Phi_S \diamond \Phi_S \end{tikzcd}$$

証明は省略するが、Lawful 性の等式とこの二つの図式を米田の補題的に対応させると示せる。

また射 $\Phi(l, r, –, –)$ の振る舞いはコモナド間の準同型写像のように思えるが、これは実際にプロコモナドの成す圏の特殊な 1-cell となる。
$\alpha = \Phi(l, r, -, -)$ として、

$$\mathbb{Prof} \qquad\qquad \mathbb{Mnd}(\mathbb{Prof}^{co})$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Set} \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "{[-,-]}"'] & \mathbb{Set} \arrow[d, "{[-,-]}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"] \\
\mathbb{Set} \arrow[r, "\Phi_S"'] & \mathbb{Set}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\Phi_A, \delta_A, \epsilon_A) \arrow[d, "{([-,-], \alpha)}"] \\
(\Phi_S, \delta_S, \epsilon_S)
\end{tikzcd}$$

余状態コモナドにおける余代数が well-behaved lens となる事実と関係性があるかもしれない。

参考文献