丹原 Double 圏同値の証明

2023 年 3 月 21 日

命題 0.0.1（丹原 Double 圏同値）　任意のモノイダル圏 $\mathbb{C}$ 上において $\mathbb{Tamb} \simeq [\mathbb{Optic}, \mathbb{Set}]$

補題 0.0.2　ある Profunctor $P : \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ に対して

$$\int_{AA'M} [P(A, A'), P(M \otimes A, M \otimes A')] \cong \int_{AA'SS'M} [\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}(M \otimes A, M \otimes A', S, S'), [P(A, A'), P(S, S')]]$$

証明 0.0.3　エンドを取る操作は関手であるから、

$$[P(B, B'), P(M \otimes A, N \otimes A')] \cong \int_{SS'} [\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}(M \otimes A, N \otimes A', S, S'), [P(B, B'), P(S, S')]]$$

が M, A, A', B, B' に対して自然に成り立つことを示せばよい。
同型性については $F(X, X') := [P(A, A'), P(M \otimes X, N \otimes X')]$ とすると米田の補題

$$FA \cong \int_{M} [\mathbb{C}(A, X), FX]$$

より成り立つ。また M, N, A, A' に対する自然性は米田の補題の F に対する自然性から、B, B' に対する自然性は米田の補題の A に対する自然性から成り立つ。

またこの時の同型射を

$$\phi : \int_{AA'M} [P(A, A'), P(M \otimes A, M \otimes A')] \to \int_{AA'SS'M} [\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}(M \otimes A, M \otimes A', S, S'), [P(A, A'), P(S, S')]]$$

$$\phi^{-1} : \int_{AA'SS'M} [\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C}(M \otimes A, M \otimes A', S, S'), [P(A, A'), P(S, S')]] \to \int_{AA'M} [P(A, A'), P(M \otimes A, M \otimes A')]$$

とし、それぞれ

$$\phi(\zeta) = \lambda \langle l, r \rangle . P(l, r) \circ \zeta$$

$$\phi^{-1}(F) = F(id, id)$$

となる。

補題 0.0.4　ある丹原加群 (P, ζ) に対して、$\phi(\zeta)$ はある関手 $F : \mathbb{Optic} \to \mathbb{Set}$ の射関数である。

証明 0.0.5　以降の証明では一部の添え字とモノイダル積の記号を省略する。仮定より

$$\zeta_N \circ \zeta_M = P(a^{-1}, a) \circ \zeta_{N \otimes M}$$

$$P(\lambda^{-1}, \lambda) \circ \zeta_I = id$$

であり、それによって以下の図式が可換になることを示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C})(NS, NS', T, T') \times (\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C})(MA, MA', S, S') \arrow[r, "\phi(\zeta_N) \times \phi(\zeta_M)"] \arrow[d, "\circ_{\mathbb{Optic}}"'] & {[P(S, S'), P(T, T')] \times [P(A, A'), P(S, S')]} \arrow[d, "\circ"] \\
(\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C})((NM)A, (NM)A', T, T') \arrow[r, "\phi(\zeta_{NM})"'] & {[P(A, A'), P(T, T')]}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^{\mathbb{op}} \times \mathbb{C})(MA, MA', A, A') \arrow[r, "\phi(\zeta_M)"] & {[P(A,A'), P(A,A')]} \\
 & 1 \arrow[u, "j_{P(A,A)}"'] \arrow[ul, "\langle \lambda^{-1}, \lambda \rangle"]
\end{tikzcd}$$

前者の図式の左上に任意の Optic の組 $\langle l', r', l, r \rangle$ を適用すると、それぞれ

$$P(a^{-1} \circ Nl \circ l', r' \circ Nr \circ a) \circ \zeta_{NM}$$

$$P(l', r') \circ \zeta_N \circ P(l, r) \circ \zeta_M$$

となるから、これらが等しいことを示す。

$$\begin{aligned}
P(l', r') \circ \zeta_N \circ P(l, r) \circ \zeta_M &= P(l', r') \circ P(Nl, Nr) \circ \zeta_N \circ \zeta_M && (\zeta \text{ の自然性}) \\
&= P(l', r') \circ P(Nl, Nr) \circ P(a^{-1}, a) \circ \zeta_{NM} && (\text{仮定}) \\
&= P(a^{-1} \circ Nl \circ l',\ r' \circ Nr \circ a) \circ \zeta_{NM}
\end{aligned}$$

同様に後者の図式から $P(\lambda^{-1}, \lambda) \circ \zeta_M$ を示せばよいが、これはそのまま 1 の元を適用すれば示せる。

補題 0.0.6　ある Profunctor$P : \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ に対して $F(A, B) = P(A, B)$ となるような任意の関手 $F : \mathbb{Optic} \to \mathbb{Set}$ が存在するとする。すると F の射関数 F に対して、$(P, \phi^{-1}(F))$ が丹原加群となる。

証明 0.0.7　仮定の F の関手性から、任意の Optic$\langle l, r \rangle : \mathrm{Optic}(A, A', S, S')$, $\langle l', r' \rangle : \mathrm{Optic}(S, S', T, T')$ に対して、

$$F_N(l', r') \circ F_M(l, r) = F_{NM}(a^{-1} \circ Nl \circ l',\ r' \circ Nr \circ a)$$

$$F_I(\lambda^{-1}, \lambda) = id_{P(A,A)}$$

であり、それによって以下の図式が可換になることを示せばよい。

$$\begin{tikzcd}
P(A, A') \arrow[r, "\phi(F_M)"] \arrow[d, "\phi(F_{NM})"] & P(MA, MA') \arrow[d, "\phi(F_N)"] \\
P((NM)A, (NM)A') \arrow[r, "P(a^{-1}, a)"] & P(N(NA), N(MA'))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P(A, A') \arrow[r, "\phi(F_I)"] \arrow[dr] & P(IA, IA') \arrow[d, "P(\lambda^{-1}, \lambda)"] \\
 & P(A, A')
\end{tikzcd}$$

すなわち、

$$F_N(id, id) \circ F_M(id, id) = P(a, a^{-1}) \circ F_{NM}(id, id)$$

$$P(\lambda^{-1}, \lambda) \circ F_I(id, id)$$

を示せばよい。

前者については、l', r', l, r を恒等射とすると、

$$\begin{aligned} F_N(id, id) \circ F_M(id, id) &= F_{NM}(a^{-1} \circ (N \otimes id) \circ id,\ id \circ (N \otimes id) \circ a) && \text{(仮定)} \\ &= F(a, a^{-1}) \end{aligned}$$