Profunctor の表現定理の仮まとめ 2

2022年12月30日

命題 0.0.1 対象 A,A',S,S' から Optic $\int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S,M\otimes A) \times \mathbb{C}(M\otimes A',S')$ を取る操作は Profunctor である。

証明 0.0.2 $\Phi((A,A'),(S,S'))=\int_{-\infty}^{M:\mathbb{C}}\mathbb{C}(S,M\otimes A)\times\mathbb{C}(M\otimes A',S')$ とする。Hom 関手の定義より、A,S' に対して共変、A',S に対して反変であるから、

$$\Phi: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{op}) \times (\mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{S}et$$

と表せる。任意の圏 A, B に対して $(A \times B)^{op} \cong A^{op} \times B^{op}$ であるから、

$$\Phi: (\mathbb{C}^{\mathfrak{op}} \times \mathbb{C})^{\mathfrak{op}} \times (\mathbb{C}^{\mathfrak{op}} \times \mathbb{C}) \to \mathbb{S}\mathrm{et}$$

とも表すことができ、これは Profunctor

$$\Phi:\mathbb{C}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{C}\twoheadrightarrow\mathbb{C}^{\mathrm{op}}\times\mathbb{C}$$

である。

定義 0.0.3 (モナド) 関手 $M: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対するモナド (M, η, μ) を以下の要素で構成する。

乗算子 自然変換 $\eta: Id_C \Rightarrow M$

単位子 自然変換 $\mu: M \circ M \Rightarrow M$

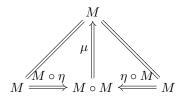
結合則 以下の図式を可換にする。

$$M \circ M \circ M \xrightarrow{M \circ \mu} M \circ M$$

$$\downarrow \mu \circ W \qquad \qquad \downarrow \eta$$

$$M \circ M \xrightarrow{\eta} M$$

単位則 以下の図式を可換にする。



このモナドの定義における関手を Profunctor に置き換える。

定義 0.0.4 (プロモナド) Profunctor $M: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対するモナド (M, η, μ) を以下の要素で構成する。

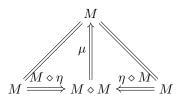
乗算子 自然変換 $\mu: M \diamond M \Rightarrow M$

単位子 自然変換 $\eta: \mathbb{C}(-,-) \Rightarrow M$

結合則 以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} M \diamond M \diamond M & \xrightarrow{M \mathrel{\diamond} \mu} M \diamond M \\ & & & \downarrow \mu \diamond W & & \downarrow \mu \\ M \diamond M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

単位則 以下の図式を可換にする。



命題 0.0.5 $\Phi: \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{C}$ はプロモナドである。

証明 0.0.6

乗算子 まず

$$\Phi \diamond \Phi((A,A'),(T,T')) = \int^{S,S':\mathbb{C}} (\int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S,M\otimes A) \times \mathbb{C}(M\otimes A',S)) \times (\int^{N:\mathbb{C}} \mathbb{C}(T,N\otimes S) \times \mathbb{C}(N\otimes A',S))$$
 であるが、フビニの定理と積のコエンドの保存より、

$$\Phi \diamond \Phi((A,A'),(T,T')) \cong \int^{S,S',M,N:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S,M\otimes A) \times \mathbb{C}(M\otimes A',S) \times \mathbb{C}(T,N\otimes S) \times \mathbb{C}(N\otimes A',S)$$
 が成り立つ。

まず $\Phi \diamond \Phi((A,A'),(T,T'))$ の任意の元 $\langle l,r,l',r'\rangle$ を $\langle N\otimes l,N\otimes r,l',r'\rangle$ へ写すような操作を考える。すると射関数の自然性と双モノイダル積の関手性から、式中のすべての対象に対して自然に

なる。

次に余米田の補題をS,S'に対して適用すると、

$$\langle (N\otimes l)\circ l',r'\circ (N\otimes r)\rangle: \int^{M,N:\mathbb{C}}\mathbb{C}(T,N\otimes (M\otimes A))\times \mathbb{C}(N\otimes (M\otimes A'),T')$$

となり、モノイダル積の結合子とフビニの定理から

$$\langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle : \int^{P:\mathbb{C}} \mathbb{C}(T, P \otimes A) \times \mathbb{C}(P \otimes A', T')$$

が得られる。これらを合成して単位子を

$$\eta_{(A,A'),(T,T')}(l,r,l',r') = \langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle$$

と定義する。またこれらの操作はA, A', T, T'に対して自然であるから η も自然である。

単位子 自然変換 $\eta:\mathbb{C}^{op}\times\mathbb{C}(-,-)\Rightarrow\Phi$ の任意の対象 (A,A'),(S,S') に対する成分

$$\eta_{(A,A'),(S,S')}: \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C}((A,A'),(S,S')) \to \int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S,M\otimes A) \times \mathbb{C}(M\otimes A',S)$$

を任意の射 $f: S \to A, g: A \to S$ とモノイダル積の単位子に対して

$$\eta_{(A,A'),(S,S')}(f,g) = \kappa_I(\lambda_A^{-1} \circ f, g \circ \lambda_{A'})$$

と定義する。また λ の自然性より η も自然である。

結合則 Optic の結合則と同様に示せる。

単位則 Optic の単位元則と同様に示せる。

命題 0.0.7 プロモナド Φ による EM 圏は丹原加群の圏である。

命題 0.0.8 (二重米田)

$$\mathbb{C}(A,B) \cong \int_{F: \mathbb{S} \, \text{et}^{\,\mathbb{C}}} \!\! \mathbb{Set}(FA,FB)$$

であり、A, B に対して自然。

証明 0.0.9

$$\int_{F:\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}} \mathbb{S}\text{et}(FA, FB) \cong \int_{F:\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}} \mathbb{S}\text{et}(\mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(A, -), F), \mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B, -), F)) \qquad (米田の補題)$$

$$\cong \mathbb{S}\text{et}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B, -), \mathbb{C}(A, -)) \qquad (米田の原理)$$

$$\cong \mathbb{C}(A, B) \qquad (米田の原理)$$