

Profunctor の表現定理の仮まとめ 2

2023 年 1 月 22 日

命題 0.0.1 対象 A, A', S, S' から $\text{Optic} \int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S')$ を取る操作は Profunctor である。

証明 0.0.2 $\Phi((A, A'), (S, S')) = \int^{M:\mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S')$ とする。Hom 関手の定義より、 A, S' に対して共変、 A', S に対して反変であるから、

$$\Phi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\text{op}}) \times (\mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{S}\text{et}$$

と表せる。任意の圏 A, B に対して $(A \times B)^{\text{op}} \cong A^{\text{op}} \times B^{\text{op}}$ であるから、

$$\Phi : (\mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C})^{\text{op}} \times (\mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{S}\text{et}$$

とも表すことができ、これは Profunctor

$$\Phi : \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \rightrightarrows \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C}$$

である。

定義 0.0.3 (モナド) 関手 $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ に対するモナド (M, η, μ) を以下の要素で構成する。

乗算子 自然変換 $\eta : Id_{\mathbb{C}} \Rightarrow M$

単位子 自然変換 $\mu : M \circ M \Rightarrow M$

結合則 以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} M \circ M \circ M & \xrightarrow{M \circ \mu} & M \circ M \\ \downarrow \mu \circ W & & \downarrow \eta \\ M \circ M & \xrightarrow{\eta} & M \end{array}$$

単位則 以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & & \\
& \nearrow & \uparrow \mu & \nwarrow & \\
M & \xrightarrow{M \circ \eta} & M \circ M & \xleftarrow{\eta \circ M} & M
\end{array}$$

このモナドの定義における関手を Profunctor に置き換える。

定義 0.0.4 (プロモナド) Profunctor $M : \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}$ に対するモナド (M, η, μ) を以下の要素で構成する。

乗算子 自然変換 $\mu : M \diamond M \Rightarrow M$

単位子 自然変換 $\eta : \mathbb{C}(-, -) \Rightarrow M$

結合則 以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc}
M \diamond M \diamond M & \xrightarrow{M \diamond \mu} & M \diamond M \\
\downarrow \mu \diamond W & & \downarrow \mu \\
M \diamond M & \xrightarrow{\mu} & M
\end{array}$$

単位則 以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccccc}
& & M & & \\
& \nearrow & \uparrow \mu & \nwarrow & \\
M & \xrightarrow{M \diamond \eta} & M \diamond M & \xleftarrow{\eta \diamond M} & M
\end{array}$$

命題 0.0.5 $\Phi : \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C} \nrightarrow \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C}$ はプロモナドである。

証明 0.0.6

乗算子 まず

$$\Phi \diamond \Phi((A, A'), (T, T')) = \int^{S, S' : \mathbb{C}} \left(\int^{M : \mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S) \right) \times \left(\int^{N : \mathbb{C}} \mathbb{C}(T, N \otimes S) \times \mathbb{C}(N \otimes A', S) \right)$$

であるが、フビニの定理と積のコエンドの保存より、

$$\Phi \diamond \Phi((A, A'), (T, T')) \cong \int^{S, S', M, N : \mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S) \times \mathbb{C}(T, N \otimes S) \times \mathbb{C}(N \otimes A', S)$$

が成り立つ。

まず $\Phi \diamond \Phi((A, A'), (T, T'))$ の任意の元 $\langle l, r, l', r' \rangle$ を $\langle N \otimes l, N \otimes r, l', r' \rangle$ へ写すような操作を考える。すると射関数の自然性と双モノイダル積の関手性から、式中のすべての対象に対して自然に

なる。

次に余米田の補題を S, S' に対して適用すると、

$$\langle (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \rangle : \int^{M, N: \mathbb{C}} \mathbb{C}(T, N \otimes (M \otimes A)) \times \mathbb{C}(N \otimes (M \otimes A'), T')$$

となり、モノイダル積の結合子とフビニの定理から

$$\langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle : \int^{P: \mathbb{C}} \mathbb{C}(T, P \otimes A) \times \mathbb{C}(P \otimes A', T')$$

が得られる。これらを合成して単位子を

$$\eta_{(A, A'), (T, T')}(l, r, l', r') = \langle a^{-1} \circ (N \otimes l) \circ l', r' \circ (N \otimes r) \circ a \rangle$$

と定義する。またこれらの操作は A, A', T, T' に対して自然であるから η も自然である。

単位子 自然変換 $\eta : \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C}(-, -) \Rightarrow \Phi$ の任意の対象 $(A, A'), (S, S')$ に対する成分

$$\eta_{(A, A'), (S, S')} : \mathbb{C}^{\text{op}} \times \mathbb{C}((A, A'), (S, S')) \rightarrow \int^{M: \mathbb{C}} \mathbb{C}(S, M \otimes A) \times \mathbb{C}(M \otimes A', S)$$

を任意の射 $f : S \rightarrow A, g : A \rightarrow S$ とモノイダル積の単位子に対して

$$\eta_{(A, A'), (S, S')}(f, g) = \kappa_I(\lambda_A^{-1} \circ f, g \circ \lambda_{A'})$$

と定義する。また λ の自然性より η も自然である。

結合則 Optic の結合則と同様に示せる。

単位則 Optic の単位元則と同様に示せる。

命題 0.0.7 プロモナド Φ による EM 圏は丹原加群の圏である。

命題 0.0.8 (二重米田)

$$\mathbb{C}(A, B) \cong \int_{F: \text{Set}^{\mathbb{C}}} \text{Set}(FA, FB)$$

であり、 A, B に対して自然。

証明 0.0.9

$$\begin{aligned} \int_{F: \text{Set}^{\mathbb{C}}} \text{Set}(FA, FB) &\cong \int_{F: \text{Set}^{\mathbb{C}}} \text{Set}(\text{Set}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(A, -), F), \text{Set}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B, -), F)) && \text{(米田の補題)} \\ &\cong \text{Set}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(B, -), \mathbb{C}(A, -)) && \text{(米田の原理)} \\ &\cong \mathbb{C}(A, B) && \text{(米田の原理)} \end{aligned}$$