MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Professor: Roberto Schaefer

Cursos: **ADS** – Análise e Desenvolvimento de Sistemas
GTI – Gestão da Tecnologia da Informação
TCD – Tecnologia em Ciência de Dados
TBD – Tecnologia em Banco de Dados
TSI – Tecnologia da Segurança da Informação

Turma: 1º Sem.

1) O que pretendemos:

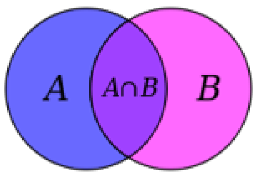
Que o aluno entenda os conceitos de conjunto, matrizes, funções, probabilidade, conectivos e análise combinatória para facilitar o entendimento nas disciplinas de lógica, banco de dados e programação

“A matemática vista corretamente não possui somente a verdade, mas beleza suprema”

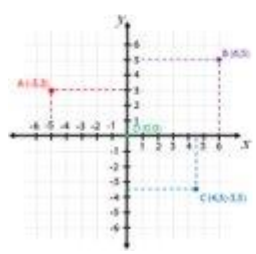
Berthand Russel

2) Introdução à Matemática:

- **Teoria dos Conjuntos**
  - Conjuntos são coleções de elementos.
  - A teoria dos conjuntos é aplicada na maioria das vezes a elementos que são relevantes para a matemática.
  - A linguagem da teoria dos conjuntos pode ser usada nas definições de quase todos os elementos matemáticos.
  - O estudo moderno da teoria dos conjuntos foi iniciado por Georg Cantor e Richard Dedekind em 1870.



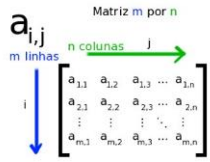
- **Plano Cartesiano**
  - É um esquema reticulado necessário para especificar pontos num determinado "espaço" com dimensões.
  - Chama-se Sistema de Coordenadas no plano cartesiano ou espaço cartesiano ou plano cartesiano.
  - Cartesiano é um adjetivo que se refere ao matemático francês e filósofo Descartes que, entre outras coisas, desenvolveu uma síntese da álgebra com a geometria euclidiana.



- Seus trabalhos permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como a geometria analítica, o cálculo e a cartografia.
- A ideia para este sistema foi desenvolvida em 1637.

- **Matriz**

  - Em matemática, uma matriz é uma tabela de linhas e colunas de símbolos sobre um conjunto, normalmente um corpo representado sob a forma de um quadro ou retângulo.



  - As matrizes são muito utilizadas para a resolução de sistemas de equações lineares e transformações lineares.

- **Probabilidade**

  - A palavra probabilidade deriva do Latim: ***probare*** (provar ou testar).
  - Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou conhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como “sorte”, “risco”, “azar”, “incerteza”, “duvidoso”, dependendo do contexto.

- **Análise Combinatória**

  - É um ramo da matemática que estuda coleções finitas de objetos que satisfaçam certos critérios específicos e se preocupa, em particular, com a "**contagem**" de objetos nessas coleções (combinatória enumerativa.

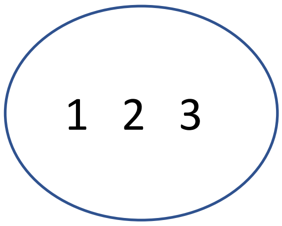
- **Lógica Matemática**

  - Para Aristóteles, a Lógica não era uma ciência teórica, prática ou produtiva, mas, sim, um instrumento para todas as ciências.
  - A Lógica Matemática lida com a formalização e a análise de tipos de argumentação utilizados na Matemática.

3) Teoria dos Conjuntos:

3.1. Conceitos básicos:

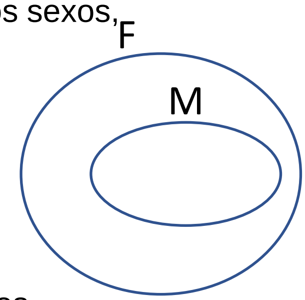
- Um conjunto é uma coleção não-ordenada de objetos.
- Normalmente todos os objetos em um conjunto gozam de uma mesma propriedade (além da de pertencer ao conjunto!);
    - qualquer objeto que contenha a propriedade é um elemento do conjunto e qualquer objeto que não tem a propriedade não é um elemento.
- **Notação**:
    - Usamos letras maiúsculas para definir conjuntos, letras minúsculas para definir elementos dos conjuntos e o símbolo $\in$ para denotar que um elemento pertence ao conjunto.
        - Portanto, $a \in A$ significa que a é um elemento, ou membro, do conjunto A e $b \notin A$ significa que o objeto b não é um elemento do conjunto A.
    - Usamos chaves para indicar conjuntos { }
        - A = {violeta, mostarda, vermelho}, assim mostarda $\in$ A e púrpura $\notin$ A.
    - Como um conjunto é uma coleção não-ordenada de objetos, a ordem na qual os elementos são escritos não importa; portanto {violeta, mostarda, vermelho}, denota o mesmo conjunto que {mostarda, vermelho, violeta}.
    - Cada elemento de um conjunto é listado apenas uma vez;
        - É redundante listá-los mais do que uma única vez.
    - Ao descrevermos um determinado conjunto, precisamos identificar seus elementos.
        - Para conjuntos finitos, podemos fazê-lo apenas listando os elementos que contêm.
        - Para indicar todos os elementos de um conjunto infinito podemos escrever {2,4, 6,...}.
        - Mas a forma mais clara de descrever este conjunto S, em particular, é descrever as propriedades de seus elementos através de palavras e escrever:
            - S = {x | x é um número inteiro e par}
- **Formas para definição de conjuntos:**
    - Listando total ou parcialmente os **elementos (LISTA)**:
        - A = {1, 2, 3}
    - usando recursão para descrever como gerar o conjunto de elementos ou descrevendo uma **propriedade** que caracterize os elementos do conjunto **(PROPRIEDADES)**:
        - $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$
    - representando graficamente os conjuntos com seus elementos através do **"DIAGRAMA DE VENN" (REPRESENTAÇÃO GRÁFICA)**:



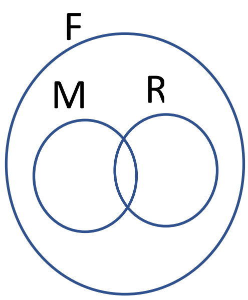
- **Conjunto Vazio:**
  - São representados por { } ou $\varnothing$
    - A = { }

3.2. Subconjuntos:

- Vamos iniciar com um exemplo:
  - Uma pesquisa foi realizada numa fundação que abriga jovens infratores, cujo perfil foi assim definido:
    - 93% são jovens do sexo masculino
    - 63% vem de família com renda inferior a 1 SM
    - 55% estudaram até a 4ª série
    - 40% estão detidos por roubo
    - 38% dos jovens do sexo masculino cometeram a 1ª infração aos 17 anos
  - Trazendo essas informações para a teoria dos conjuntos podemos definir esses exemplos como:
    - F = {x | x é qualquer interno da fundação}
    - M = {x | x é interno da fundação do sexo masculino}
    - R = {x | x é interno da fundação, de ambos os sexos, detido por roubo}



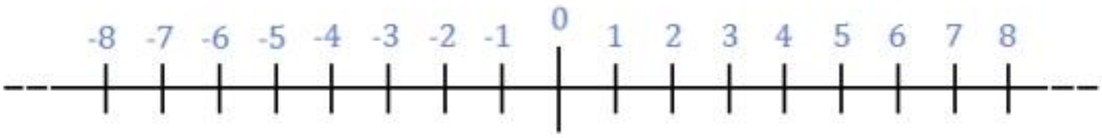
  - Na figura ao lado observamos que
    - cada elemento do conjunto M é também elemento de F, já que todos são internos da fundação:
    - desta forma: **$M \subset F$ ou $F \supset M$**
  - Analisando o conjunto R, vemos que seus elementos também são internos da fundação, então cada elemento de R é elemento de F, mas em R nem todos são do sexo masculino (elementos de M) e existem elementos que não pertencem a R, já que em R só constam os que foram detidos por roubo.



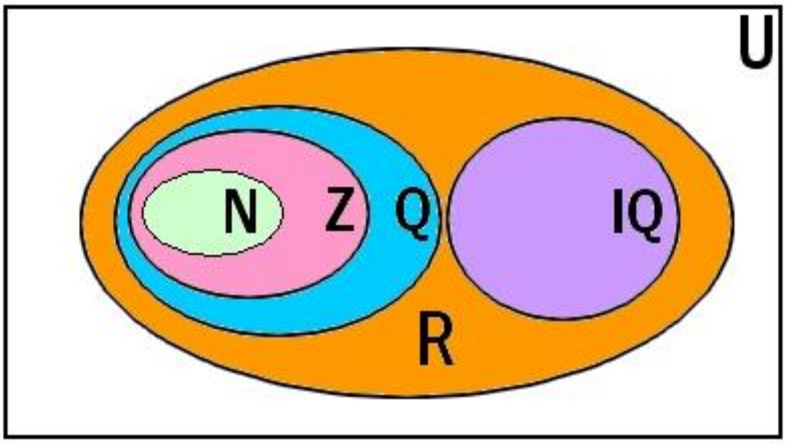
    - Desta forma: **$R \subset F$ e $R \not\subset M$ e $F \supset M$ e $M \not\supset R$**
- **NOTA**:
  - **Qualquer conjunto é subconjunto dele próprio**
    - **$X \supset X$ e $X \subset X$**
  - **Conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto**
    - **$X \supset \varnothing$ e $\varnothing \subset X$**

3.3. Conjuntos numéricos

- Em TI (Tecnologia da Informação) trabalhamos somente com dois tipos de conjunto numérico: Números Inteiros e Números Quebrados ou Decimais
- Os números inteiros ou quebrados podem ser Positivos ou Negativos, sendo separados pelo numeral zero
- Conjunto infinito: N = {1,2,3,4,5, ...}
- Conjunto finito: N = {101,103,105,107, ... ,493, 495, 497, 499}



- Na matemática os conjuntos numéricos são assim representados:

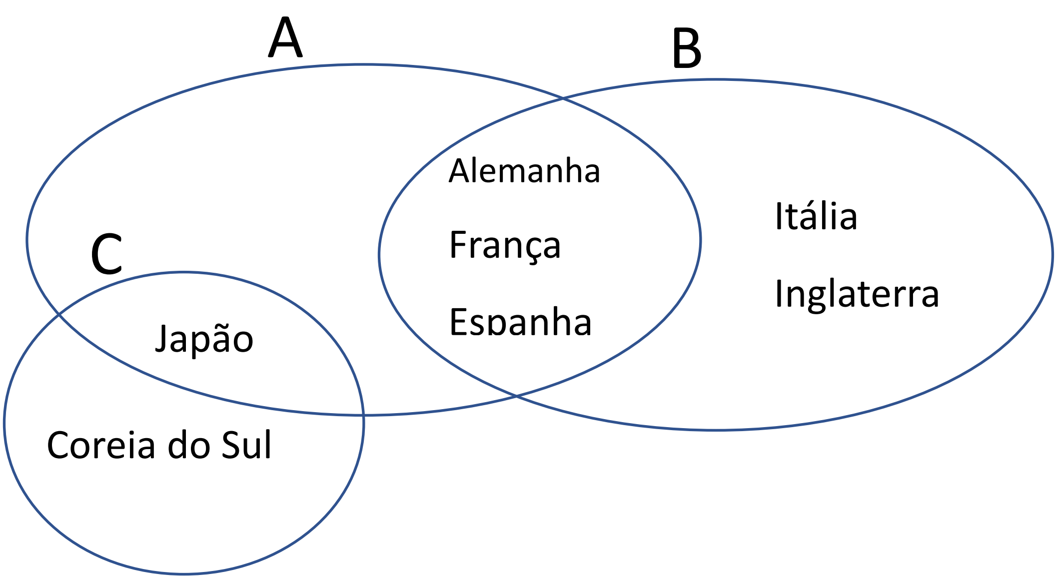


3.4. Operações com conjunto:

- Vamos trabalhar com exemplos para entendermos como funcionam as operações com conjuntos:
  - De acordo com a Anfevea – Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores, em um determinado momento o Brasil chegou ao 10º lugar em exportação de automóveis, conforme quadro a seguir:

Pais	Exportações
Japão	4 milhões
Alemanha	2,8 milhões
França	2,2 milhões
Espanha	1,9 milhões
Canadá, USA, Coreia do Sul, Inglaterra	1,5 milhões
Itália	700.000
Brasil	500.000

- A partir desses dados podemos definir alguns conjuntos:
  - A = {x | x é país que exporta mais de 1,5 milhões de carros}
    - A = {Alemanha, Espanha, França, Japão}
  - B = {y | y é país europeu situado entre os 10 maiores exportadores de carros}
    - B = {Alemanha, Espanha, França, Inglaterra, Itália}
  - C = {z | z é país asiático situado entre os 10 maiores exportadores de carros}
    - C = {Coreia do Sul, Japão}
- Representando os conjuntos (Diagrama de Venn) A, B e C teremos:



3.4.1. União:

- Qual é o conjunto formado pelos países europeus ou asiáticos e que estão entre os 10 maiores exportadores de automóveis?
    - Observando o diagrama, vemos que os elementos do conjunto procurado são todos os que pertencem a B e também pertencem a C: {Alemanha, Coreia do Sul, Espanha, França, Inglaterra, Itália, Japão}
        - Essa operação determina que um determinado elemento pode estar **em B ou C**
- Escrevemos:
    - B U C = {Alemanha, Coreia do Sul, Espanha, França, Inglaterra, Itália, Japão}
    - Em linguagem de definição lógica ou de propriedades:
        - $B \cup C = \{x \mid x \in B \text{ ou } x \in C\}$

3.4.2. Interseção:

- Qual é o conjunto dos países asiáticos situados entre os 10 maiores exportadores de carros e que venderam mais de 1,5 milhões de unidades?
    - Os elementos do conjunto que procuramos agora são os que pertencem a C e A ao mesmo tempo: {Japão}
        - Esse conjunto é formado pelos elementos que estão ao mesmo tempo **em C e A**
- Escrevemos:
    - $C \cap A$ = {Japão}
    - Em linguagem de definição lógica ou de propriedades:
        - $C \cap A = \{x \mid x \in C \text{ e } x \in A\}$

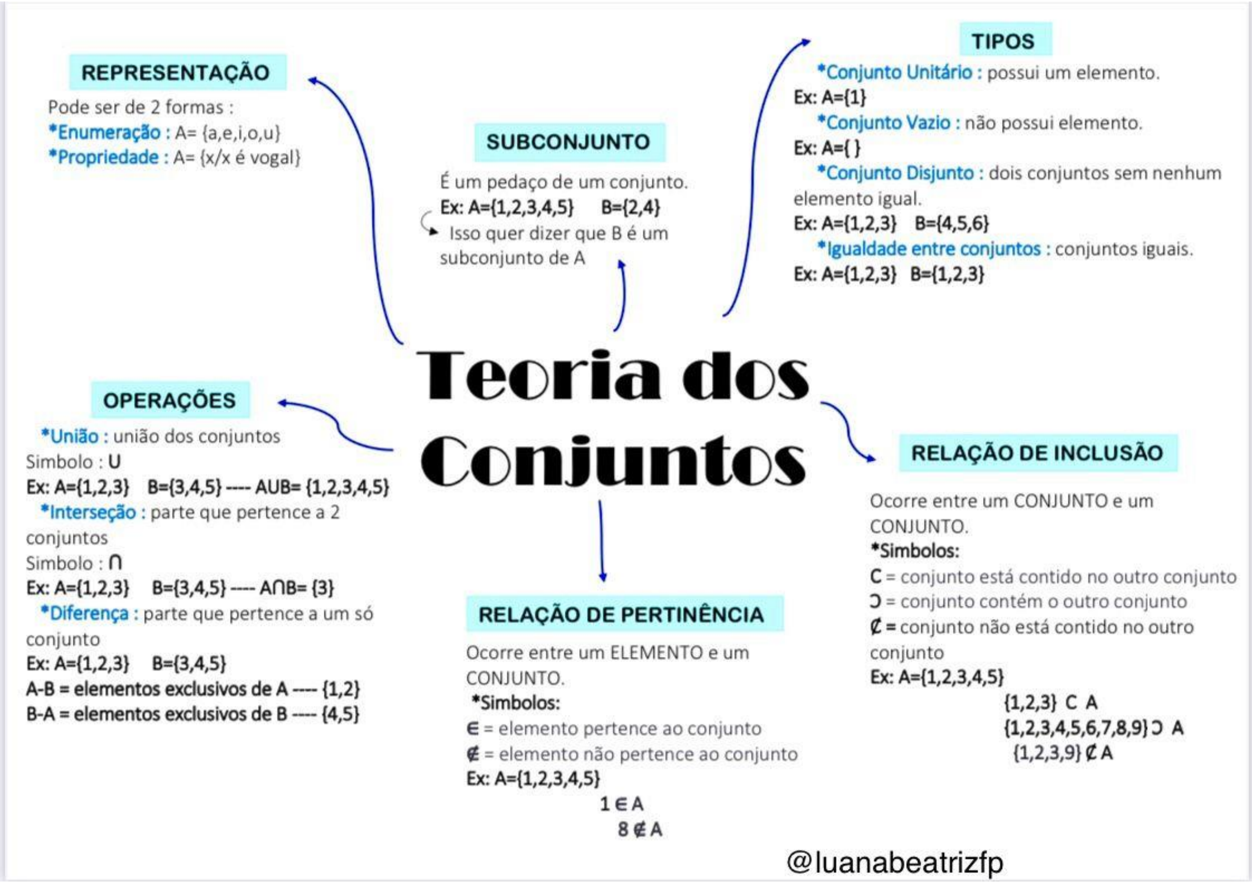
3.4.3. Diferença entre Conjuntos:

- Qual é o conjunto formado pelos países europeus que estão entre os 10 maiores exportadores de automóveis, mas apenas os que venderam 1,5 milhões, ou menos, de veículos
    - Os elementos do conjunto procurado são os que pertencem a B, já que são países europeus, excluindo os que estão em A, pois esses países venderam mais de 1,5 milhões de carros: {Inglaterra, Itália}
        - Conjunto formado pelos elementos que **pertencem a B mas não pertencem a A**, isto é**: pertencem só e somente só a B**
- Escrevemos:
    - B - A = {Inglaterra, Itália}
    - Em linguagem de definição lógica ou de propriedades:
        - $B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$

3.4.4. Expressões envolvendo operações entre conjuntos:

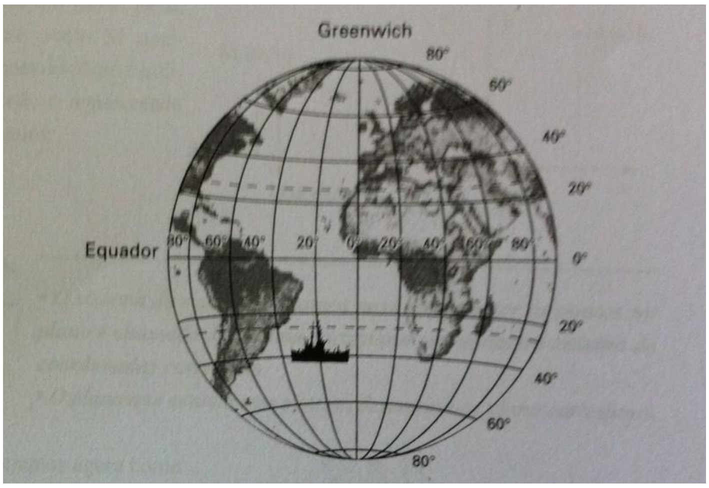
- Com as expressões que acabamos de ver, podemos resolver outras várias expressões mais complexas.
  - Vamos trabalhar com os seguintes conjuntos:
    - A = {2, 4, 6, 8}
    - B = {0, 1, 2, 3, ...}
    - C = {0, 4, 8}
  - Vamos resolver:
    1) $(A \cup B) - (C \cap B) =$
    2) $[(A - B) \cap C] \cup A =$
    3) $C - [A \cap (B \cup C)] =$

Resumo de Teoria dos Conjuntos



4) Plano Cartesiano:

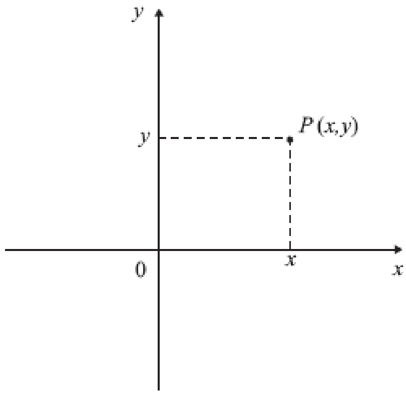
Observando o mapa vemos que o navio está em uma linha paralela ao Equador (40o ao sul) e esta está cortada por outra que fica a 20o a oeste do meridiano de Greenwich.



Por isso dizemos com precisão que o navio está localizado a uma latitude de 40o ao sul e uma longitude de 20o a oeste

A posição correta do navio foi dada por uma latitude e uma longitude, ambas chamadas de coordenadas geográficas

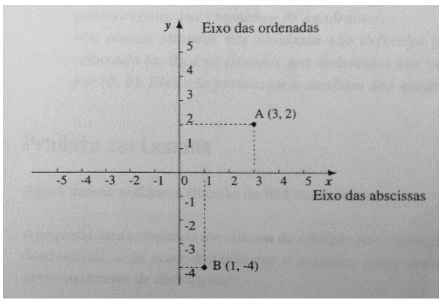
- Plano Cartesiano é formado pelos eixos do “x” na horizontal e do “y” na vertical
- Seus pontos são conhecidos como “Ponto Cartesiano” ou “Par Ordenado”
- O eixo do “x” é chamado de “Eixo das Abcissas” e do “y” de “Eixo das Ordenadas”
- O “Ponto Cartesiano” é formado pela ligação ou interseção das posições apresentadas nos eixos do “x” e do “y”



- Um exemplo prático: O ponto A tem as coordenadas 3 e 2, sendo 3 no eixo x e 2 no eixo y
    - Sua representação é A(3, 2)

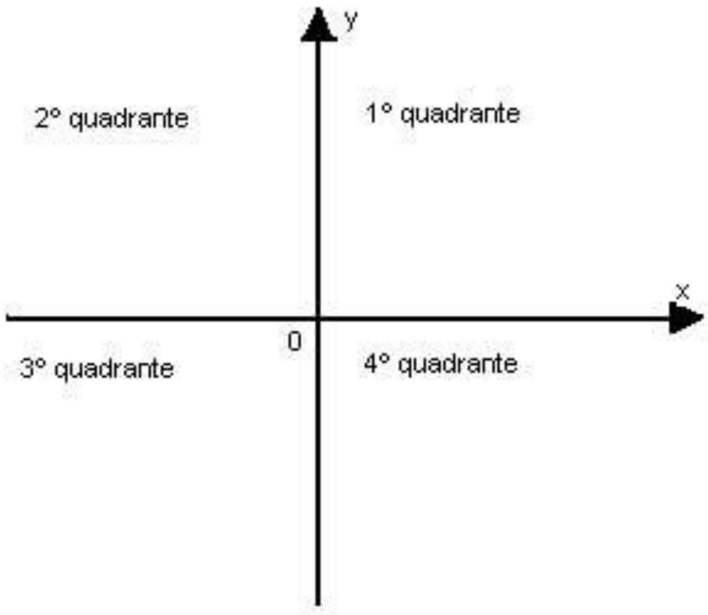
  O ponto B tem as coordenadas 1 e -4, sendo 1 no eixo x e -4 no eixo y
    - Sua representação é B(1, -4)

O plano cartesiano é representado assim:

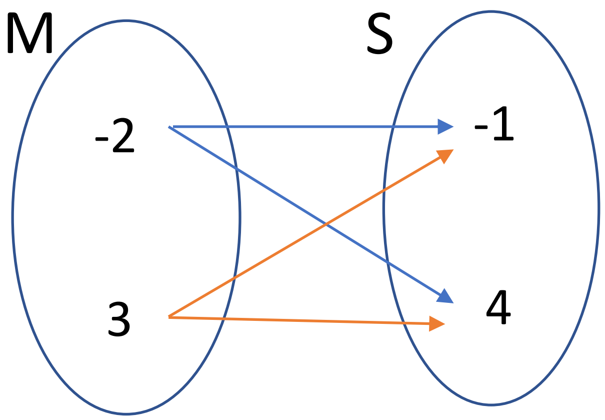


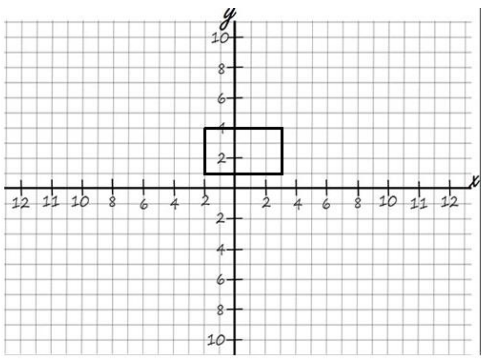
- **OBSERVAÇÃO**:
    - **SEMPRE** vem 1º o “x” e depois o “y” ➔ **A(x, y)**

- O sistema de eixos para representar os pontos no plano é chamado de **sistema cartesiano** ou **sistema de coordenadas cartesiano**
- A origem desse sistema é o ponto 0 (zero) que é indicado pelo par ordenado (0, 0)
- O plano cartesiano é separado pelos eixos coordenados em quatro regiões, chamados de **quadrantes**
- Os pontos situados nas abscissas são definidos pelo par ordenado (x, 0) e os situados nas ordenadas por (y, 0)
    - Eles não pertencem a nenhum dos quadrantes



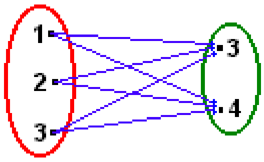
- Um exemplo:
    - Determine o plano cartesiano, e ligue seus pontos, dos conjuntos M x S, sendo seus pontos em M = {x|-2 ≤ x ≤ 3} e S = {y|1 ≤ y ≤ 4}
    - Sua representação será: M x S = {(x, y)| -2 ≤ x < 3 e 1 ≤ y ≤ 4}





5) Funções:

- **Produto Cartesiano:**
  - Dados dois conjuntos X e Y, o produto cartesiano desses dois (escrito como X × Y) é o conjunto de todos os pares ordenados, cujo primeiro termo pertence a X e o segundo, a Y.
    - Sejam os conjuntos *A* = {1, 2, 3} e *B* = {3, 4}.
    - Com auxílio do diagrama de flechas ao lado, formaremos o conjunto de todos os pares ordenados em que o 1º elemento pertença ao conjunto *A* e o 2º pertença ao conjunto *B*.

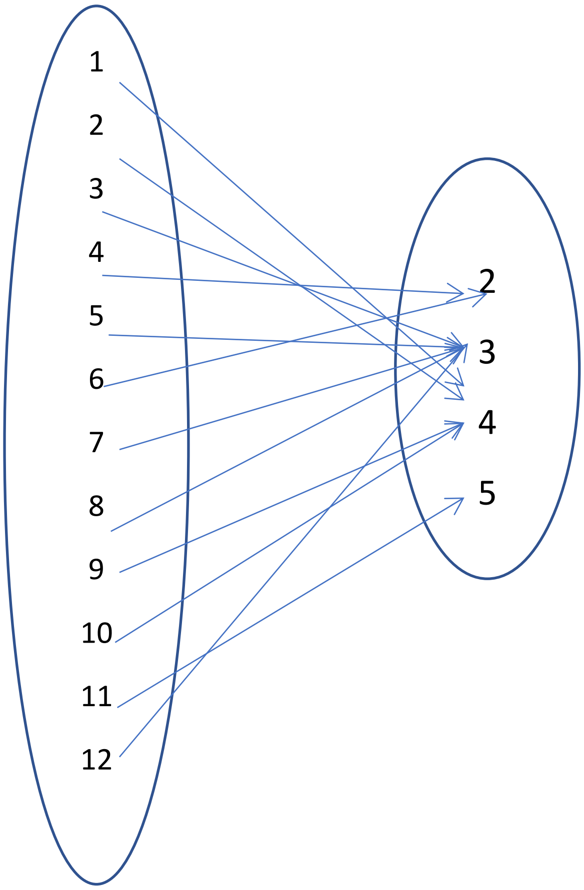


    - Assim, obtemos o conjunto: {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}
      - Esse conjunto é denominado **produto cartesiano de *A* por *B***, sendo indicado por:

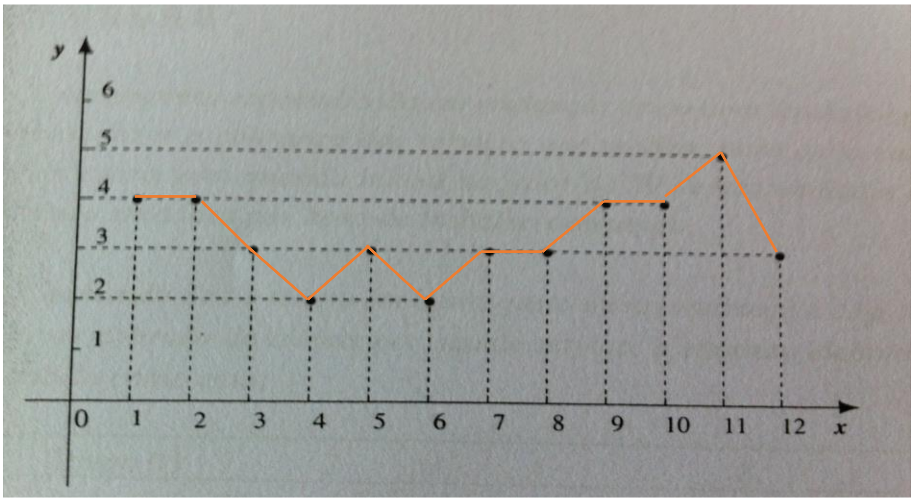
$$x \in A \quad e \quad y \in B.$$

  - De um modo geral, definimos assim o produto cartesiano de dois conjuntos A e B quaisquer, sendo ambos não-vazios:
    - A x B = { (a, b) | a ∈ A e b ∈ B }
- **Diferença entre RELAÇÃO e FUNÇÃO:**
  - **Relação:**
    - A relação existe quando temos a ligação direta entre dois conjuntos:
      - Na linguagem matemática dizemos que há uma relação do conjunto A no conjunto B
    - Por exemplo: uma empresa pratica taxas de juros diferenciadas em cada mês do ano

Mês do Ano	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Taxa de Juros (%)	**4**	**4**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**	**3**



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
2
3
4
5



y
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
x

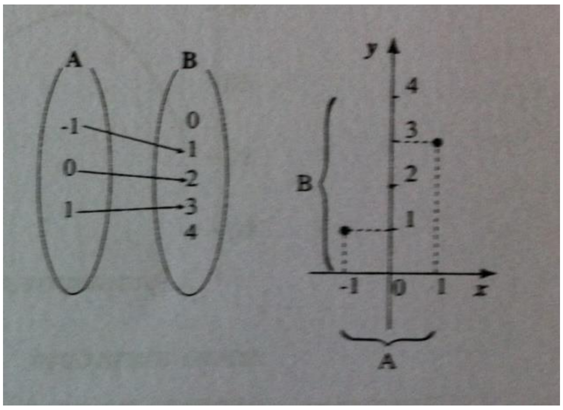
- **Função:**
  - Mais uma vez vamos trabalhar com exemplos práticos:
    - Uma empresa de mudanças criou uma unidade de cobrança dos serviços que realiza:
    - Para cada mudança ela cobra uma quantia inicial no valor de 50 unidades e mais 5 unidades por hora de trabalho realizada
    - Chamando de “t” o tempo de uma mudança e de “p” o preço em unidade de valor a ser cobrado do cliente, a empresa elaborou a seguinte tabela:

Tempo (t)	1	2	3	4	...	8	...
Preço (p)	55	60	65	70		90	

  - Percebemos que o preço “**p**” depende do nº “**t**” de horas de trabalho
  - Para cada valor de “**t**” encontramos um único valor de “**p**”
  - Quando isso ocorre dizemos que **p é função de t**
  - A regra estabelecida pela empresa para determinar o preço de seus serviços e que relaciona as variáveis “**p**” e “**t**” é a **lei de formação** dessa função “**p**”

Todos os elementos de A (x) tem um único correspondente em B (y) => Lei de Formação

- **Conceito formal de função:**
  - Estudaremos funções a partir de conjuntos:
    - Consideremos os conjuntos A e B e uma relação F definida de A em B:
      - $A = \{-1, 0, 1\}$
      - $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
      - $F = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$
      - Calculo da função:
        - $f(x) = x + 2$
        - $f(-1) = 1$
        - $f(0) = 2$
        - $f(1) = 3$
      - Produto Cartesiano de A x B:
        - $F = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3)\}$



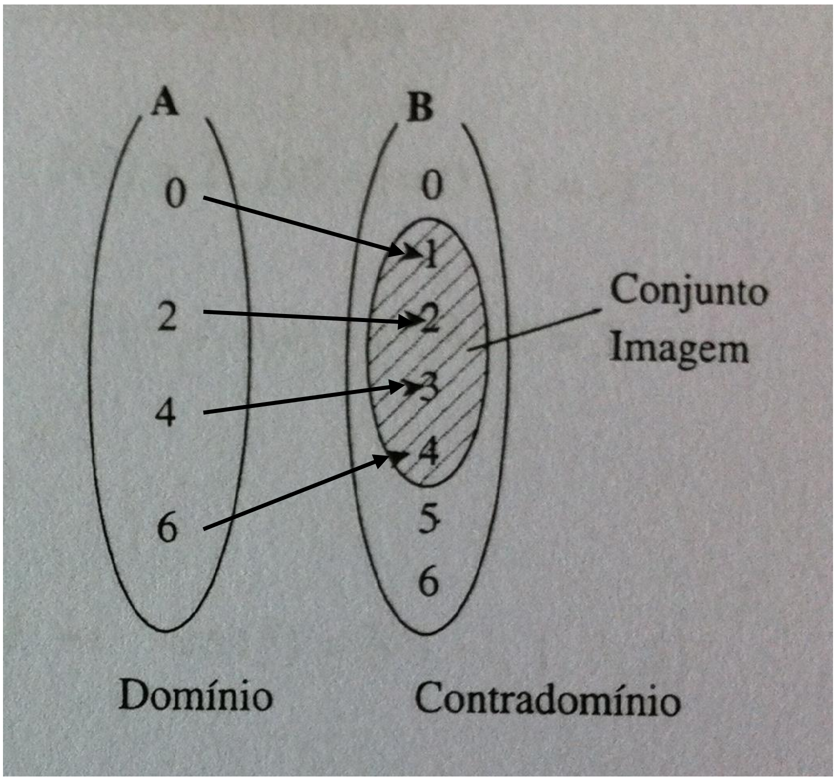
- Observamos nas figuras que cada elemento de A está associado a um único elemento de B, **por meio da lei de formação definida por y = x + 2**
- **Não existe um elemento de A que não tenha um correspondente em B**
  - Essa é uma relação especial e dizemos ser uma função de A em B
  - Chamando a função de f e lemos “f é função de A em B”

    f: A ➔ B

- **Domínio, Contradomínio e Imagem:**
  - Se tivermos a função f: A ➔ B definida pela lei de formação em que y = (x/2) + 1, sendo o conjunto A = {0, 2, 4, 6} e o conjunto B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Ao resolvermos a Função temos:
    - Conjunto Domínio = conjunto A
      - Conjunto x é o conjunto Domínio
      - Escrevemos assim: D(f) = A
    - Conjunto Contradomínio = conjunto B
      - Conjunto y é o conjunto Contradomínio
      - Escrevemos assim: **C(*f*) = B**
  - Calculo da Função:
    - f(x) = (x/2) + 1
      - f(0) = 1
      - f(2) = 2
      - f(4) = 3
      - f(6) = 4
    - Produto Cartesiano de A x B => F = {(0, 1), (2, 2), (4, 3), (6, 4)}
    - Conjunto Imagem da função f => Im(f) = {1, 2, 3, 4}

- Cada elemento de ***y*** que está associado a algum elemento de ***x*** é chamado de imagem de ***x***

- Escrevemos assim: ***f(x) = y*** e lemos ***y é igual a função de x***



6) Matriz:

- **Conceitos Básicos:**
  - Tabelas desse tipo chamamos de **MATRIZES**
  - Elas são representadas da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 15 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 30 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 19 & 4 & 2 \\ 15 & 10 & 28 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Linha}$$

$\downarrow$

Coluna

  - A matriz M tem 4 linhas e 5 colunas.
    - M_{4x5}
    - Lemos matriz M quatro por cinco
    - A matriz M tem 20 elementos (4 x 5)
  - A matriz M também pode ser representada da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 15 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 30 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 19 & 4 & 2 \\ 15 & 10 & 28 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left\| \begin{matrix} 10 & 8 & 15 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 30 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 19 & 4 & 2 \\ 15 & 10 & 28 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|$$

M =

10	8	15	2	1
12	5	30	3	2
9	6	19	4	2
15	10	28	2	1

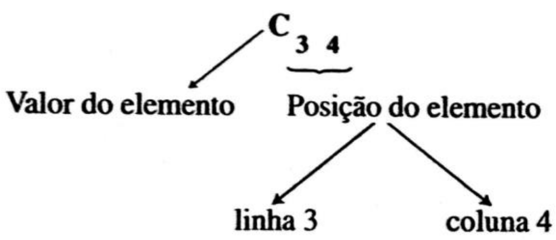
  - Exemplo:
    - A planilha abaixo representa o nº de seguros vendidos por 6 corretores em janeiro e fevereiro.

Corretores\Meses	Janeiro	Fevereiro
Carlos	24	32
Rogério	12	15
Sandra	29	36
Alberto	20	23
Anita	18	21
Tadeu	19	28

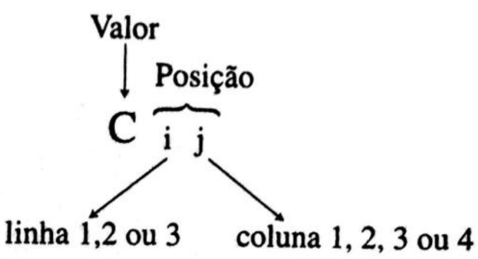
- Representação genérica de uma matriz:

$$C_{3\times4} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

  - A matriz escrita dessa forma podemos afirmar que:
    - C11 (C um um) é o elemento da 1ª linha e da 1ª coluna
    - C24 (C dois quatro) é o elemento da 2ª linha e 4ª coluna
- Cada letra e cada nº tem o seu significado:



- Para indicar um elemento qualquer da matriz escrevemos:



Observação: 1º vem a linha (i) e depois a coluna (j)

- Matrizes Especiais:
  - **Matriz Linha:**
    - É a matriz formada apenas por uma linha:

38	37	39	38	40	39	40

  - **Matriz Coluna:**
    - É a matriz formada apenas por uma coluna:

2453
1233
2995
2050
1827
1946

  - **Matriz Quadrada:**
    - São aquelas que tem o mesmo nº de linhas e colunas
      - Matriz quadrada de ordem 3 = M_{3x3}
      - Matriz quadrada de ordem 3 = M_{2x2}
  - **Matriz Transposta:**
    - São aquelas em que os elementos das linhas de uma matriz são iguais aos elementos das colunas de outra matriz.
      - A 1ª coluna vira 1ª linha na matriz transposta
      - As demais colunas seguem a mesma regra

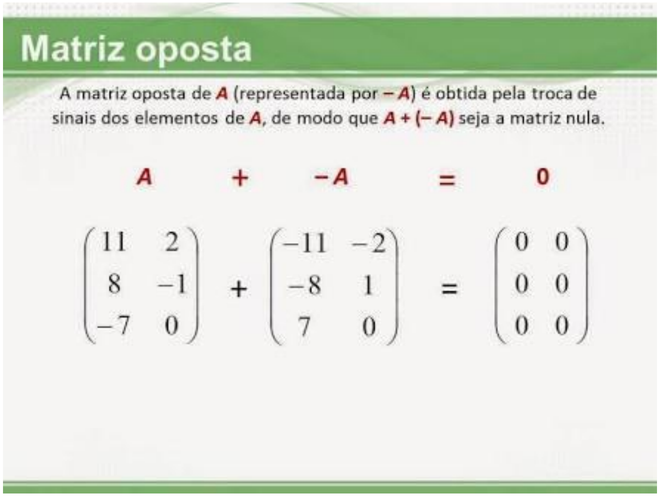
M =

13	8
5	10
12	9
21	17

M^t =

13	5	12	21
8	10	9	17

  - **Matriz Nula:**
    - É a matriz sem valores ou preenchida com zeros
  - **Matriz Oposta:**
    - É a matriz com os valores opostos aos valores da matriz original



- **Operações com Matrizes:**
  - **Adição e Subtração:**
    - A soma ou a subtração entre duas matrizes só pode ocorrer se ambas forem da mesma ordem:
    - Para operacionalizar (somar ou subtrair) a matriz A com a matriz B elas precisam ser A_{mxn} e B_{mxn}
    - O resultado da operação deve ser dado em uma nova matriz da mesma ordem (Z_{mxn})
    - A operação deve ser feita entre seus elementos de mesma ordem: a_{ij} com b_{ij} (Ex.: $a_{11} + b_{11} = z_{11}$ ou $a_{11} - b_{11} = z_{11}$)
    - Exercício 1:
      - Os resultados de pesquisas sobre o número de franquias em duas grandes cidades nos setores de cursos, alimentação e perfumaria foram apresentados nas matrizes, abaixo, do tipo cidade x setor.
        - Qual a situação ao final de 2022?
      - Situação ao final de 2021:
        | 21 120 55 |
        | 13 97 38 |
      - Franquias abertas em 2022:
        | 11 48 19 |
        | 5 17 13 |
      - Franquias fechadas em 2022:
        | 3 12 10 |
        | 1 0 6 |
  - **Multiplicação de um nº por uma matriz:**
    - Multiplica-se o valor apresentado por cada elemento da matriz
    - O resultado deve ser dado em uma nova matriz

$$2 \times \begin{bmatrix} 70 & 15 \\ 45 & 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 30 \\ 90 & 172 \end{bmatrix}$$

Não vamos tratar a multiplicação entre matrizes por não ter aplicação prática dentro das áreas da TI

- Exercício 2:
  - Calcule ½ P – 3Q
  - Sendo:

P =

-1	12	5
1/2	1	-5
3	2	8

Q =

4	-7	-3
5/2	3	3/8
-2	-1	7

- Software online para cálculos utilizando Matrizes:
  - https://matrixcalc.org/pt/

7) Probabilidade:

- **Curiosidade:**
    - Muitos estudiosos consideram que a probabilidade é uma das melhores orientações para nossa vida;
        - É o caso de Joseph Butter, que declarou:
    - **“A probabilidade é o próprio guia da vida”**

- **Vamos analisar os problemas e chegar aos resultados esperados:**

- **PROBLEMA 1:**
    - Quais são as possibilidades de um casal ter 2 filhos e uma filha?
        - Vamos chamar os filhos de “H” e as filhas de “M”
        - A possibilidade da combinação de filhos do casal é:
          HHH HHM HMH HMM
          MMM MMH MHM MHH
        - Dentre as possibilidades apresentadas (oito), somente três atendem ao problema: HHM HMH MHH
        - Portanto, a chance do casal ter dois filhos e uma filha é de 3 em 8, que é indicado pela fração ***3/8***
        - O resultado pode ser expresso de 3 formas:
            1. Em fração: P = 3/8
            2. Em notação decimal: P = 3/8 = 0,375
            3. Em percentagem: P = (3/8) * 100 = 37,5%
    - **Observações**:
        - O sexo dos filhos de um casal é algo que independe da matemática e para isso é dito que o fato é um ***<u>experimento aleatório</u>***
        - O conjunto formado pelos resultados quanto aos sexos dos filhos é o ***<u>espaço amostral</u>*** desse **experimento.**
        - O **espaço amostral** é o conjunto formado pelas **8 possibilidades**
        - O conjunto formado pelas 3 possibilidades de 2 filhos e 1 filha é o ***<u>evento</u>*** do **espaço amostral**
        - O nº 3/8 que mede a possibilidade do resultado ocorrer é a ***<u>probabilidade</u>*** do **evento** acontecer

Nº de possibilidades do casal
ter 2 filhos e 1 filha

Nº de possíveis resultados
quanto ao sexo dos 3 filhos

P = 3/8

Probabilidade

- **Resumindo**:

Nº de elementos do evento

Nº de elementos do
espaço amostral

P(E) = n(E)/n(S)

Probabilidade de ocorrer o evento

- **PROBLEMA 2:**
  - Se uma empresa resolve sortear uma TV entre seus 5 melhores vendedores, quais são as possibilidades de um desses funcionários ser sorteado?
    - Nós temos um experimento aleatório
    - O espaço amostral é de 5 vendedores – n(S) = 5
    - O evento é o de somente 1 ganhador – n(E) = 1
    - P(E) = n(E)/n(S) = 1/5 = 0,2 = 20%
    - **A probabilidade de um vendedor X ganhar a TV é de 20% ou 1/5 ou 0,2**
- **PROBLEMA 3:**
  - Um partido político tem 2 deputados e 2 senadores disponíveis para fazerem parte de uma comissão de trabalho. Quais são as possibilidades do partido formar a comissão com 2 deputados e 1 senador?

- 1º) Precisamos saber quantas comissões diferentes o partido poderá formar com os 2 deputados e os 2 senadores disponíveis
- 2º) Devemos verificar quais das comissões são formadas por apenas 2 deputados e 1 senador
- Como chegar a esses valores?
  - As comissões são agrupamentos do tipo combinação simples, pois elas diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos e a ordem deles não importa ($C_{4,3}$ = 4.3.2 / 3.2.1 = 4)
    $D_1D_2S_1$ $D_1D_2S_2$ $D_1S_1S_2$ $D_2S_1S_2$
  - Somente 2 comissões são formadas por 2 deputados e 1 senador
- Nós temos um experimento aleatório
  O espaço amostral é de 4 comissões formadas a partir dos 2 deputados e 2 senadores – n(S) = 4
  O evento é o conjunto formados por 2 deputados e 1 senador – n(E) = 2
  P(E) = n(E)/n(S) = 2/4 = 1/2 = 0,5 = 50%
- A probabilidade de se formar uma comissão com 2 deputados e 1 senador do partido é de 50% ou 1/2 ou 0,5

➢ **Resumindo**:

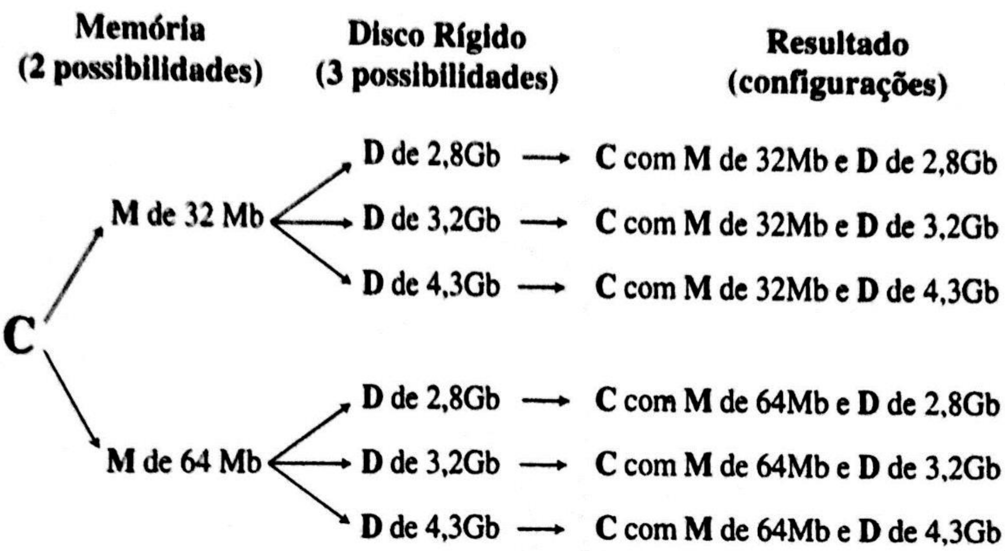
- ***Experimento aleatório***: é qualquer experimento cujo resultado depende somente do acaso
- ***Espaço amostral***: é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório
- ***Evento***: é qualquer subconjunto de um espaço amostral
- ***Probabilidade***: é o nº que mede a possibilidade de ocorrer um resultado

➢ **Importante:**

- A definição de probabilidade pressupõe que todos os elementos do espaço amostral tenham as mesmas chances de ocorrer (sejam equiprováveis)
- Se o evento "E" é um conjunto vazio, então n(E) = 0, a probabilidade será 0 ou 0%, indicando que não há chances daquele evento ocorrer
- Se o evento "E" é um conjunto igual ao espaço amostral "S", então n(E) = n(S), a probabilidade será de 1 ou 100%, indicando que o evento ocorrerá com certeza
- A probabilidade de ocorrer um evento é no mínimo 0 ou 0% e no máximo 1 ou 100%

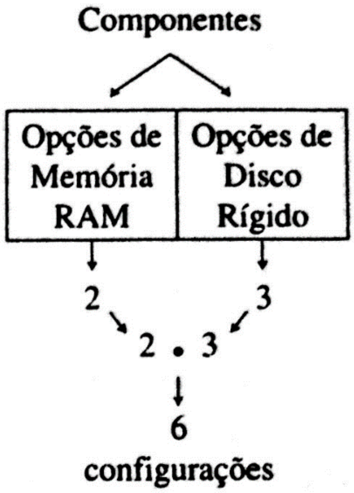
8) Análise Combinatória Simples:

- **Objetivo** – contagem do número de possibilidades de um evento ocorrer:
    - São contagens que fazemos, por exemplo, para determinar o nº de grupos diferentes compostos por 3 elementos que podemos formar com os 15 funcionários disponíveis
    - Ou ainda, quantas são as opções para adquirir um carro de uma marca que oferece 4 modelos diferentes com 3 cores distintas e 2 versões.
- A **análise combinatória simples**: arranjos, permutações e combinações.
- **Princípios fundamentais da contagem:**
    - A contagem por agrupamento serve para fazermos contagem por grupos de objetos:
        - Por exemplo: de quantas maneiras podemos combinar algarismos para formar senhas, nº de telefones ou placas de carro
    - Pelo princípio fundamental da contagem, se um acontecimento "A" tem um número "a" de possibilidade e um acontecimento "B" tem um número "b" de possibilidades, então o acontecimento formado por "A e B" terá um total de "a x b" possibilidades.
- **PROBLEMA 1:**
    - Na compra de um computador foram dadas as seguintes opções de configuração: memória de 32 ou 64 MB e disco de 2.8, 3.2 ou 4.3 GB
    - Para se chegar ao resultado das combinações possíveis mapeia-se o esquema na chamada ***<u>árvore das possibilidades</u>***

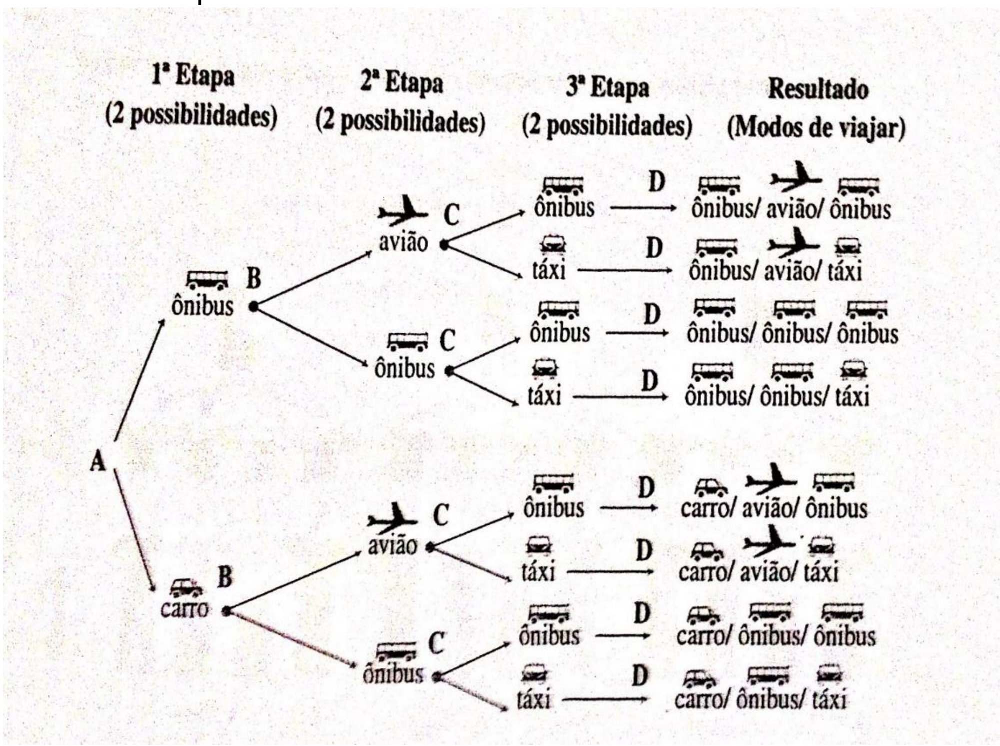


o

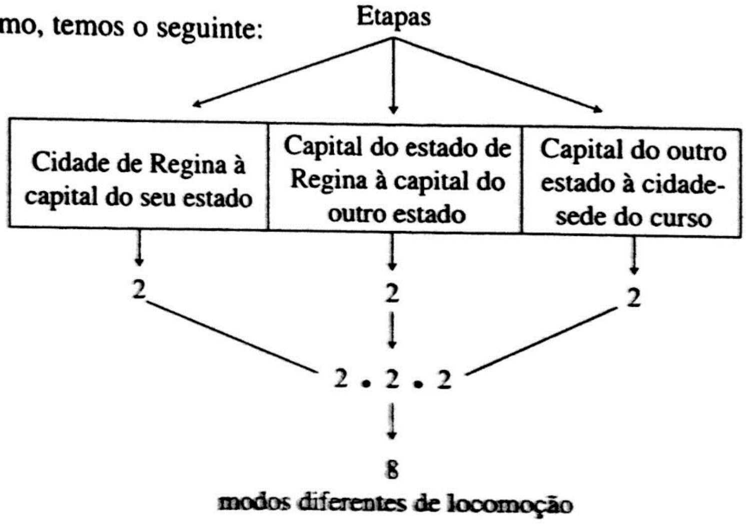
Podemos também visualizar essa questão do seguinte modo:



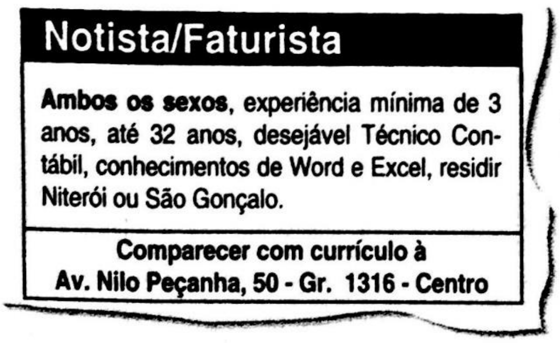
E daí concluímos que o número total de possibilidades de configuração do computador é dado pelo produto das possibilidades de cada um dos dois componentes.

- **PROBLEMA 2:**
  - Uma pessoa, Regina, foi selecionada para um curso de especialização, sendo que ela mora em uma cidade de interior e o curso é em outra cidade, também de interior, mas de outro estado. Ela fará a viagem em 3 etapas:
    - Viagem de sua cidade até a capital – pode ser feita de ônibus ou carro
    - Viagem da capital de seu estado à capital do estado do curso – pode ser feita de avião ou ônibus
    - Viagem da capital do estado do curso à cidade do curso – pode ser feita de ônibus ou taxi
  - 

Em resumo, temos o seguinte:



- **Arranjo Simples:**
  - De quantas maneiras diferentes os candidatos do anuncio abaixo poderão se classificar na 2ª etapa da seleção?

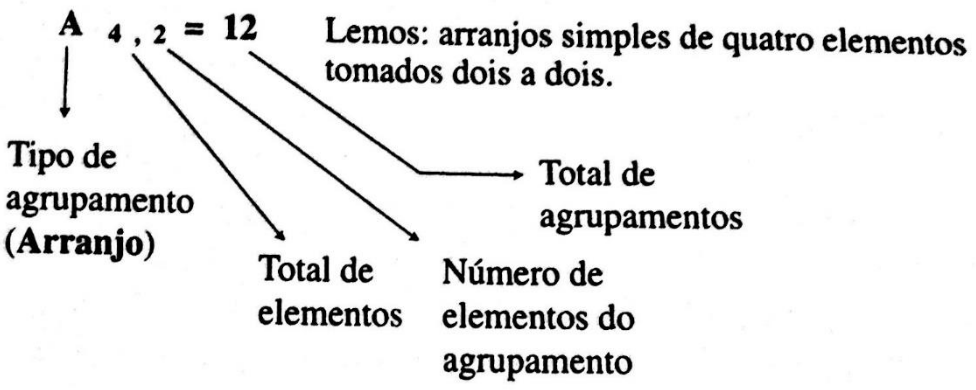


Os currículos recebidos em resposta a esse anúncio passaram por um rigoroso processo de seleção. Aldo, Davi, Helena e Pedro, depois de vencerem uma primeira bateria de testes, estão disputando os dois primeiros lugares, para garantir uma vaga na empresa.

1º lugar	2º lugar	Resultado
	Davi	Aldo e Davi
Aldo	Helena	Aldo e Helena
	Pedro	Aldo e Pedro
	Aldo	Davi e Aldo
Davi	Helena	Davi e Helena

	Pedro	Davi e Pedro
	Aldo	Helena e Aldo
Helena	Davi	Helena e Davi
	Pedro	Helena e Pedro
	Aldo	Pedro e Aldo
Pedro	Davi	Pedro e Davi
	Helena	Pedro e Helena

- Com a árvore a partir dos 4 candidatos formamos 12 agrupamentos com 2 elementos diferentes
  - Observe que o agrupamento Aldo e Davi é diferente do agrupamento Davi e Aldo, por exemplo
- Agrupamento com essas características são chamados de arranjos simples
  - Como são grupos de 2 elementos formados a partir de 4 elementos significa que temos **arranjos simples** de quatro elementos tomados dois a dois, assim representado: $A_{4,2}$
  - Arranjo simples são agrupamentos que diferem entre si pela **ORDEM** ou pela natureza de seus elementos



  - Forma de cálculo:

Deduzimos, assim, que:

$$A_{4,2} = \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{Dois fatores consecutivos e decrescentes a partir do 4}} = 12$$

- Outros exemplos de cálculo de arranjo simples:
  - $A_{6,3} = 6 . 5 . 4 = 120$
    - 3 fatores a partir de 6
  - $A_{5,1} = 5$
    - 1 fator a partir de 5
  - $A_{8,2} = 8 . 7 = 56$
    - 2 fatores a partir de 8

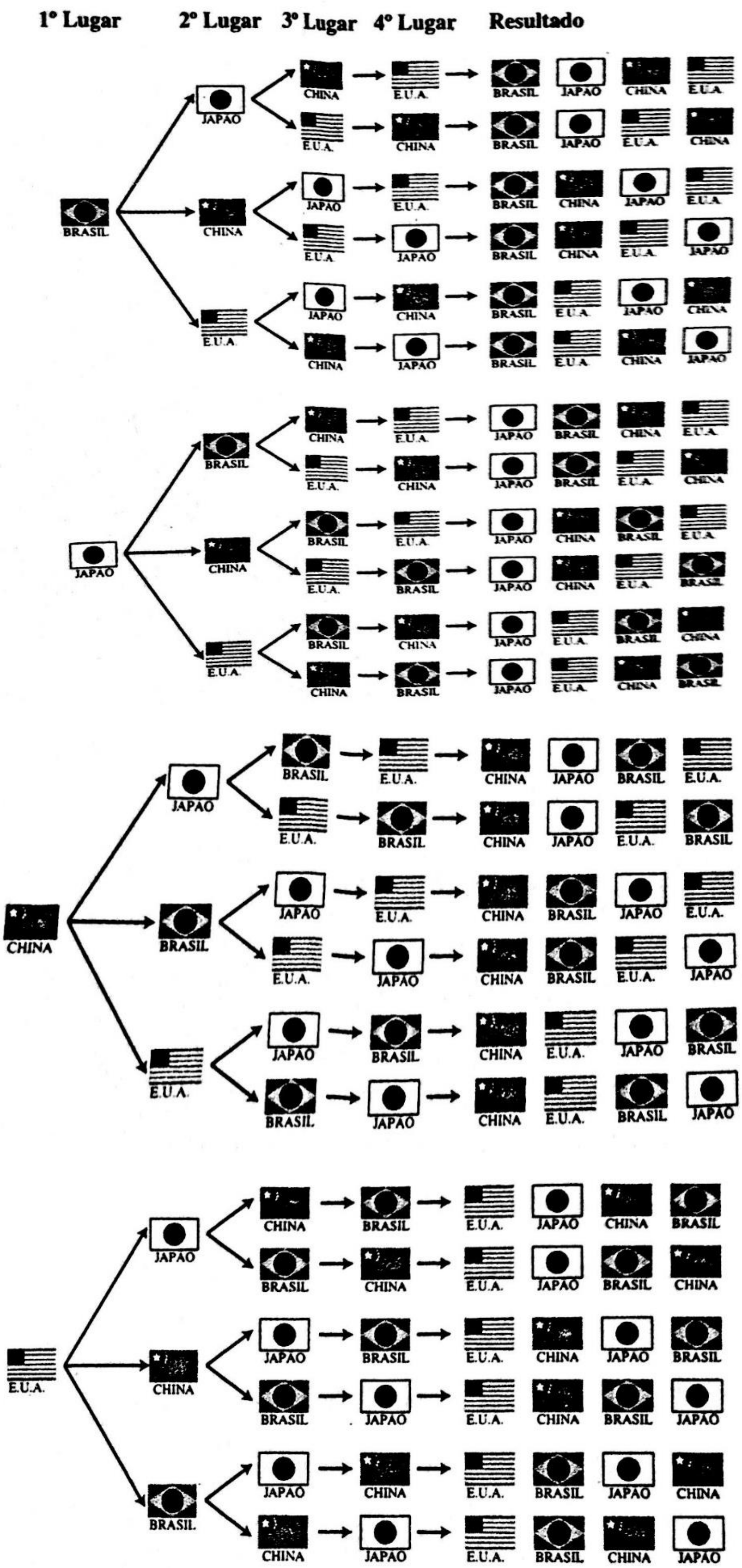
➢ **Permutação Simples:**

- Baseado na reportagem abaixo podemos identificar de quantas maneiras diferentes as 4 seleções do grupo do Brasil podem se classificar na 3ª etapa do Grand Prix:

O jornal *O Globo* publicou uma matéria sobre um campeonato de vôlei feminino que ocorria na ocasião, e da qual extraímos o seguinte trecho:

"... a seleção brasileira feminina de vôlei reagiu e conquistou ontem a segunda fase do Grand Prix ao derrotar a até então invicta seleção cubana por 3 a 1. ... A terceira e última fase de classificação do Grand Prix começa sexta-feira. Brasil, China, Japão e Estados Unidos jogarão em Xangai, na China. Rússia, Coréia do Sul, Cuba e Itália estão no grupo de Chennai, na Índia."

Vamos construir a árvore das possibilidades desses jogos:



Portanto, de acordo com esse esquema, as seleções de vôlei feminino dos quatro países poderiam se classificar de 24 maneiras diferentes.

Mas, observando a árvore com mais atenção, vemos que:

- no agrupamento Brasil - Japão - China - EUA, por exemplo, o primeiro classificado é o Brasil, o segundo é o Japão, o terceiro a China e o quarto são os Estados Unidos;

- esse agrupamento é diferente de, por exemplo, China - Brasil - EUA - Japão, pois seus elementos, apesar de iguais, estão em posições diferentes.

Também percebemos essas mesmas características em relação aos demais agrupamentos da árvore. E daí podemos dizer que eles diferem entre si pela **ordem** de seus elementos, mas **não diferem pela natureza**, já que os elementos são sempre os mesmos.

Agrupamentos com essas características são chamados de **permutações simples**. E como nesse caso são agrupamentos de quatro elementos, formados a partir desses mesmos elementos, dizemos que são **permutações simples de quatro elementos**.

Indicamos:

$\mathbf{P_4 = 24}$ Lemos: permutações simples de quatro elementos

- 24 → Total de agrupamentos
- 4 → Número de elementos do agrupamento
- P → Tipo de agrupamento (**Permutação**)

Permutações simples são agrupamentos que diferem entre si pela ordem de seus elementos.

1º classificado	2º classificado	3º classificado	4º classificado
qualquer um dos quatro países	exclui o país anterior	exclui os dois países anteriores	exclui os três países anteriores

E agora, aplicando o princípio fundamental da contagem, teremos:

1º classificado	2º classificado	3º classificado	4º classificado
4	3	2	1

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Portanto:

$$P_4 = \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{quatro fatores consecutivos e decrescentes a partir do 4}} = 24$$

quatro fatores **consecutivos e decrescentes** a partir do 4

Grupos com quatro elementos

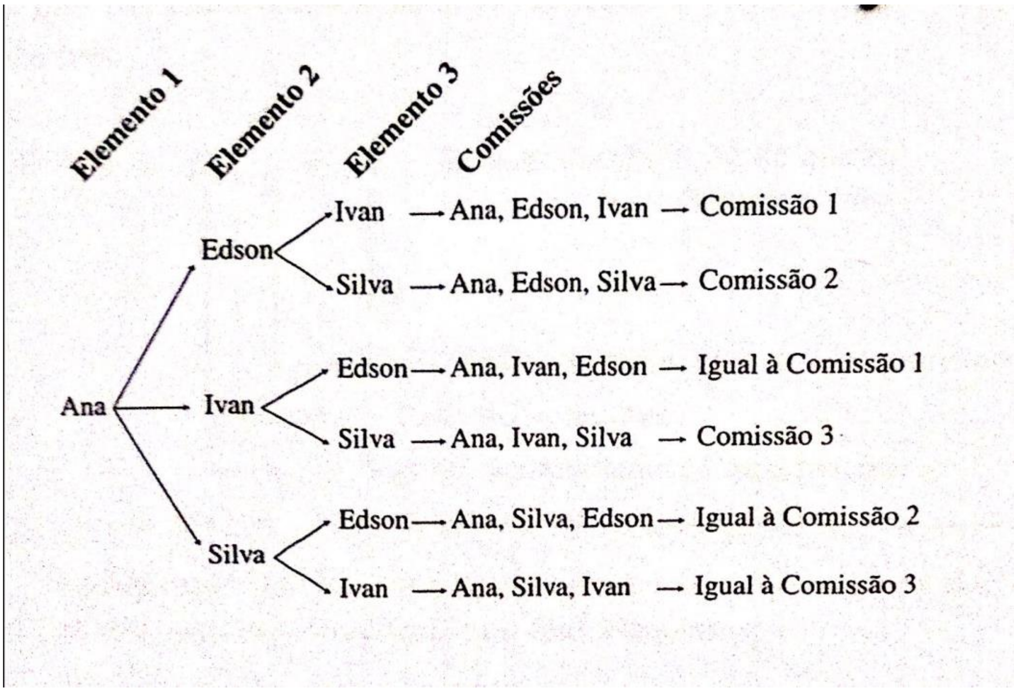
- Outros exemplos de cálculo de permutação simples:
  - $P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
    - Aplica-se o fatorial de 7
  - $P_1 = 1$
    - Aplica-se o fatorial de 1
  - $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
    - Aplica-se o fatorial de 3

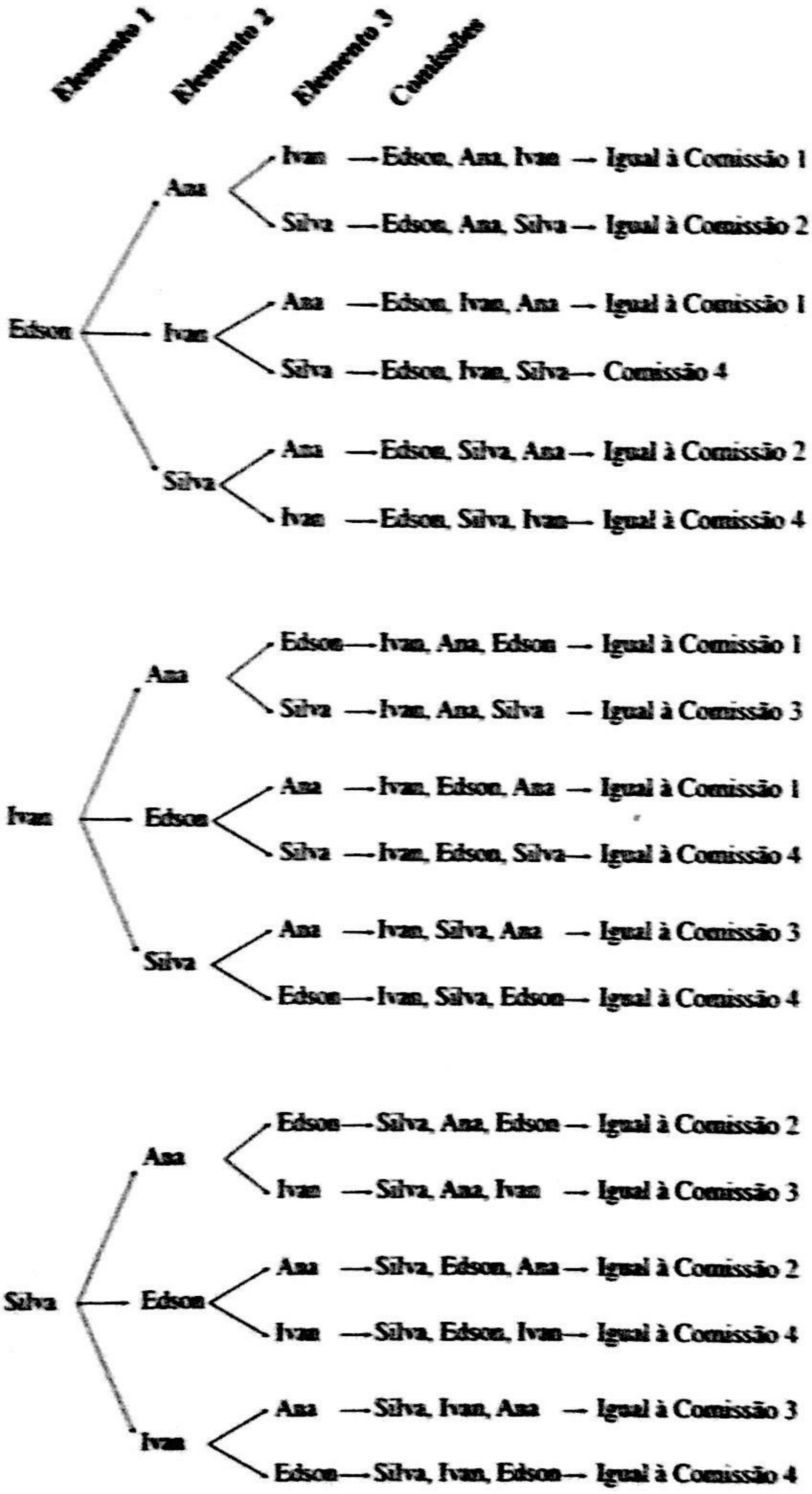
- **Combinação Simples:**

Os funcionários de uma empresa estão organizando comissões em seus setores para analisar e propor mudanças no Plano de Cargos e Salários que será implantado no próximo ano.

Quantas comissões diferentes podem ser formadas no Setor de Pessoal, sabendo que lá trabalham Ana, Edson, Ivan e Silva e que cada comissão terá três funcionários?

Para encontrarmos essa resposta, vamos construir a árvore das possibilidades das comissões.


Elemento 1
Elemento 2
Elemento 3
Comissões
Ana
Edson
Ivan
Silva
Ivan — Ana, Edson, Ivan — Comissão 1
Silva — Ana, Edson, Silva — Comissão 2
Edson — Ana, Ivan, Edson — Igual à Comissão 1
Silva — Ana, Ivan, Silva — Comissão 3
Edson — Ana, Silva, Edson — Igual à Comissão 2
Ivan — Ana, Silva, Ivan — Igual à Comissão 3


Elemento 1
Elemento 2
Elemento 3
Comissões
Edson
Ana
Ivan — Edson, Ana, Ivan — Igual à Comissão 1
Silva — Edson, Ana, Silva — Igual à Comissão 2
Ivan
Ana — Edson, Ivan, Ana — Igual à Comissão 1
Silva — Edson, Ivan, Silva — Comissão 4
Silva
Ana — Edson, Silva, Ana — Igual à Comissão 2
Ivan — Edson, Silva, Ivan — Igual à Comissão 4
Ivan
Ana
Edson — Ivan, Ana, Edson — Igual à Comissão 1
Silva — Ivan, Ana, Silva — Igual à Comissão 3
Edson
Ana — Ivan, Edson, Ana — Igual à Comissão 1
Silva — Ivan, Edson, Silva — Igual à Comissão 4
Silva
Ana — Ivan, Silva, Ana — Igual à Comissão 3
Edson — Ivan, Silva, Edson — Igual à Comissão 4
Silva
Ana
Edson — Silva, Ana, Edson — Igual à Comissão 2
Ivan — Silva, Ana, Ivan — Igual à Comissão 3
Edson
Ana — Silva, Edson, Ana — Igual à Comissão 2
Ivan — Silva, Edson, Ivan — Igual à Comissão 4
Ivan
Ana — Silva, Ivan, Ana — Igual à Comissão 3
Edson — Silva, Ivan, Edson — Igual à Comissão 4

A árvore mostra um total de 24 agrupamentos, mas na verdade são apenas quatro comissões diferentes, pois cada uma delas aparece repetida seis vezes.

Outros aspectos que também podemos observar nessa árvore são:

- o agrupamento formado por Ana, Edson e Ivan, por exemplo, não é diferente do agrupamento Edson, Ivan e Ana. As pessoas são as mesmas, logo as comissões são também as mesmas. Nos agrupamentos da árvore, portanto, não há uma diferença quanto à ordem dos elementos;

- o agrupamento Silva, Edson e Ivan tem elementos diferentes de Silva, Ivan e Ana, indicando que esses agrupamentos diferem entre si pela natureza de seus elementos;

Logo, as comissões formadas pelos funcionários do Setor de Pessoal diferem entre si apenas quanto à natureza de seus elementos.

Esses tipos de agrupamentos são chamados de combinações simples. E como são grupos de três formados a partir de quatro elementos, dizemos que são combinações simples de quatro elementos tomados três a três.

Indicamos: $C_{4,3} = 4$ **Lemos: combinação de quatro elementos tomados três a três**

- 4 → **Total de agrupamentos**
- 3 → **Número de elementos do agrupamento**
- 4 → **Total de elementos**
- C → **Tipo de agrupamento (Combinação)**

Vamos observar novamente a árvore das possibilidades de formação das comissões, para descobrir um modo prático de calcular combinações simples.

Analisando o total de combinações dado nessa árvore, vemos que ele foi obtido assim:

$$C_{4,3} = 4 = \frac{\overset{\text{Total de agrupamentos que apareceram na árvore}}{24}}{\underset{\text{Número de vezes que cada agrupamento se repete}}{6}}$$

E a partir daí, podemos escrever:

$$C_{4,3} = \frac{\overbrace{4 \,.\, 3 \,.\, 2}^{\text{três fatores consecutivos e decrescentes a partir do 4}}}{\underbrace{3 \,.\, 2 \,.\, 1}_{\text{três fatores consecutivos e decrescentes a partir do 3}}} = \frac{24}{6} = 4$$

Combinações simples são agrupamentos que diferem uns dos outros apenas pela natureza de seus elementos.

Aplicando esse método ao cálculo de outras combinações simples, teremos:

$$C_{7,2} = \frac{\overbrace{7 \,.\, 6}^{\text{dois fatores a partir do 7}}}{\underbrace{2 \,.\, 1}_{\text{dois fatores a partir do 2}}} = \frac{42}{2} = 24$$

$$C_{11,4} = \frac{\overbrace{11 \,.\, 10 \,.\, 9 \,.\, 8}^{\text{quatro fatores a partir do 11}}}{\underbrace{4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}_{\text{quatro fatores a partir do 4}}} = \frac{7\,920}{24} = 330$$

- **Resumo:**

$A_{4,2} = 12$ Lemos: arranjos simples de quatro elementos tomados dois a dois.

- A → Tipo de agrupamento (**Arranjo**)
- 4 → Total de elementos
- 2 → Número de elementos do agrupamento
- 12 → Total de agrupamentos

Arranjos simples são agrupamentos que diferem entre si pela ordem ou pela natureza de seus elementos.

Indicamos:

$P_4 = 24$ Lemos: permutações simples de quatro elementos

- 24 → Total de agrupamentos
- 4 → Número de elementos do agrupamento
- P → Tipo de agrupamento (**Permutação**)

Permutações simples são agrupamentos que diferem entre si pela ordem de seus elementos.

Indicamos: $C_{4,3} = 4$ **Lemos: combinação de quatro elementos tomados três a três**

- 4 → **Total de agrupamentos**
- 3 → **Número de elementos do agrupamento**
- 4 → **Total de elementos**
- C → **Tipo de agrupamento (Combinação)**

Combinações simples são agrupamentos que diferem uns dos outros apenas pela natureza de seus elementos.

Problemas de combinações simples são muito semelhantes aos de arranjos simples. Por isso, antes de resolver esses problemas precisamos analisá-los cuidadosamente, para verificar o tipo de agrupamento que ele envolve.

9) Lógica Matemática:

- **Lógica matemática** é uma subárea da matemática que explora as aplicações da lógica formal para a matemática.
- Basicamente, tem ligações fortes com matemática, os fundamentos da matemática e ciência da computação teórica.
- A lógica matemática é muitas vezes dividida em campos da teoria dos conjuntos, teoria de modelos, teoria da recursão e teoria da prova.
- **Proposições:**
  - As proposições são determinadas por sentenças declarativas, pertencentes a uma certa linguagem, que formam um conjunto de palavras ou símbolos e expressam uma ideia. As sentenças declarativas são afirmações que podem receber apenas dois valores, Verdadeiro ou Falso. As proposições devem seguir os seguintes princípios:
    - **Princípio da identidade:** garante que uma proposição é igual a ela mesma.
    - **Princípio da não-contradição:** uma proposição não pode ser verdadeira e falsa.
    - **Princípio do terceiro excluído:** uma proposição é verdadeira ou falsa.
  - Exemplos:
    - O cachorro é um animal. - Verdadeiro
    - 2 + 2 = 7 - Falso
  - Qualquer sentença que não puder receber a atribuição de verdadeira ou falsa não é uma proposição.
    - Sentenças interrogativas, exclamativas e imperativas não são proposições, pois não é possível dizer se são verdadeiras ou falsas.
  - Exemplos de sentenças que não são proposições:
    - Como foi a aula?
    - O pior atentado nos EUA ocorreu em setembro de 2011?
    - Limpe a cozinha.
    - Que local de trabalho horroroso!
    - Esta sentença não é verdadeira.
- **Proposições compostas:**
  - Proposição composta é a união de proposições simples por meio de um conector lógico.
    - Este conector irá ser decisivo para o valor lógico da expressão.
  - Precedência de operadores
    - Em expressões que utilizam vários operadores não é possível saber qual proposição deve-se resolver primeiro.
    - Exemplo: $P \wedge Q \vee R$.

- Com isso, usar parênteses é fundamental. A expressão do exemplo poderia ficar assim: (P Λ Q) V R ou P Λ (Q V R).

- **Tabela verdade:**
  - A tabela verdade é construída para determinar o valor lógico de uma proposição composta.
  - **Conector e (Λ)**

p	q	p Λ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  - **Conector ou (V)**

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

  - **Conector condicional (→)**
    - Considere as proposições **p** e **q** (Condição). "Se **p** então **q**"

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - **Conector bicondicional (↔)**
    - Considere as proposições p e q (bicondicional). "Se p, e somente se q"

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

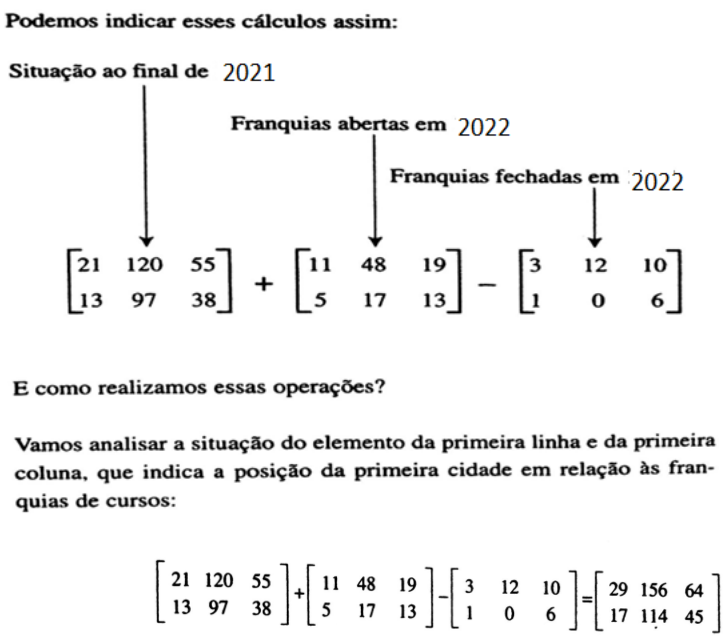
==========================XXXXXX==========================

Solução do exercício de Expressões envolvendo conjuntos:

1) **(A ∪ B) - (C ∩ B)** = A ∪ B = B e C ∩ B = C □ B – C = {0, 1, 2, 3, ...} – {0, 4, 8} = {1,2,3,5,6,7,9,10,11,12,13,...} = {x | x é nº inteiro positivo e x ≠ 0, ≠ 4 e ≠ 8}
2) **[(A – B) ∩ C] ∪ A** = [{ } ∩ C] ∪ A = [{ } ∩ {0,4,8}] ∪ {2,4,6,8} = [{ }] ∪ {2,4,6,8} = {2,4,6,8} = {x | x é par 2 ≤ x ≤ 8}
3) **C – [A ∩ (B ∪ C)]** = C – [A ∩ (B)] = {0,4,8} – [{2,4,6,8} ∩ ({0, 1, 2, 3, ...})] = {0,4,8} – {2,4,6,8} = 0 = {x | x = 0}

Solução dos exercícios de Matriz:

- Exercício 1:
  - Como descrever numa matriz cidade x setor a situação das franquias ao final de 2022?



Podemos indicar esses cálculos assim:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 21 & 120 & 55 \\ 13 & 97 & 38 \end{bmatrix}}_{\text{Situação ao final de 2021}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & 48 & 19 \\ 5 & 17 & 13 \end{bmatrix}}_{\text{Franquias abertas em 2022}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 12 & 10 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\text{Franquias fechadas em 2022}}$$

E como realizamos essas operações?

Vamos analisar a situação do elemento da primeira linha e da primeira coluna, que indica a posição da primeira cidade em relação às franquias de cursos:

$$\begin{bmatrix} 21 & 120 & 55 \\ 13 & 97 & 38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 48 & 19 \\ 5 & 17 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 12 & 10 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 156 & 64 \\ 17 & 114 & 45 \end{bmatrix}$$

- Exercício 2:

½ P =

-0,50	6,00	2,50
0,25	0,50	-2,50
1,50	1,00	4,00

½ P – 3Q =

-12,50	27,00	11,50
-7,25	-8,50	-3,63
7,50	4,00	-17,00

3Q =

12,00	-21,00	-9,00
7,50	9,00	1,13
-6,00	-3,00	21,00