

Лабораторная работа №2 на тему «LU-разложение».

Цель: решить систему линейных алгебраических уравнений в виде $Ax = b$ методом LU-разложения.

Метод LU – разложения заключается в представлении матрицы A в виде произведения двух треугольных матриц $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ход работы:

1. Находим матрицы L и U по следующим формулам:

- При $i = 1$ вычисляем первую строку матрицы U : $u_{1j} = a_{1j} \quad \forall j$;
- При $j = 1$ вычисляем первый столбец матрицы L : $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad \forall i$;
- $\forall i, j > 1$:

- Если $i \leq j$ находим $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$;

- Если $i > j$ находим $l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \right)$.

2. После нахождения значений матриц L и U решить СЛАУ в два этапа:

- а) Из системы $Ly = b$ находим вектор значений y ;
- б) Вычислив массив « y » решаем СЛАУ вида $Ux = y$.
- в) Полученный массив x будет являться решением исходной системы $Ax = b$.

3. Сравнить полученные результаты с точным решением x^* тестовых СЛАУ, по-другому отладить свой алгоритм на тестах, приведенных в таблице 1 (стр. 2).

4. После отладки программы решить две СЛАУ:

$$I. \quad \begin{cases} 13.14x_1 - 2.12x_2 + 1.17x_3 = 1.27 \\ -2.12x_1 + 6.3x_2 - 2.45x_3 = 2.13 \\ 1.17x_1 - 2.45x_2 + 4.6x_3 = 3.14 \end{cases}$$

$$II. \quad \begin{cases} 4.31x_1 + 0.26x_2 + 0.61x_3 + 0.27x_4 = 1.02 \\ 0.26x_1 + 2.32x_2 + 0.18x_3 + 0.34x_4 = 1.00 \\ 0.61x_1 + 0.18x_2 + 3.20x_3 + 0.31x_4 = 1.34 \\ 0.27x_1 + 0.34x_2 + 0.31x_3 + 5.17x_4 = 1.27 \end{cases}$$

5. Вывести полученные решения СЛАУ.

6. Подготовить отчет о выполненной работе.

Таблица 1. Тесты.

№	Матрица A	Столбец b	Точное решение x^*
1	$A = \begin{pmatrix} 2,1 & -4.5 & -2.0 \\ 3.0 & 2.5 & 4.3 \\ -6.0 & 3.5 & 2.5 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 19.07 \\ 3.21 \\ -18.25 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} 1,34025 \\ -4,75798 \\ 2,5771 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \\ 10 & -7 & 0 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 5,4 \\ -1,2 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} 0,7297 \\ 1,2138 \\ 0,1531 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$	$x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$