

**Тема:** Вычислительные методы линейной алгебры.  
**§1** Подчиненные и согласованные матричные нормы.

Координатная сходимость используется в теоретических исследованиях, в практических приложениях удобнее пользоваться сходимостью по норме. Это объясняется тем, что при исследовании линейных пространств большой размерности трудно иметь дело с большим числом координатных последовательностей.

Вспомним определение линейного нормированного пространства.

Говорят, что в линейном пространстве  $X$  введена норма, если каждому вектору  $x \in X$  поставлено в соответствие действительное число  $\|x\|$ , называемое нормой, причем выполнены:

1.  $\|x\| \geq 0$  для  $\forall x$ , причем  $\|x\| = 0$ , тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$  для  $\forall x \in X, \forall \lambda$  - вещественно;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для  $\forall x$  и  $y$  из  $X$ .

В  $n$ -мерном векторном пространстве наиболее употребительными являются следующие нормы:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Из курса линейной алгебры известно, что множество всех квадратных матриц порядка  $n$  с обычным определением сложения матриц и умножения матрицы на число является линейным пространством. В нем как и во всяком линейном пространстве можно различными способами ввести норму, лишь бы выполнялись аксиомы нормы, например:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2},$$

евклидова норма матрицы  $A$ .

Выполнение аксиом нормы очевидно, ибо она представляет собой евклидову длину  $\|\cdot\|_2$  вектора, имеющего  $n^2$  компонент и составленного из  $n^2$  элементов матрицы.

С другой стороны, мы рассматриваем матрицу не как вектор с  $n^2$  компонентами, а как матрицу определяющую линейное преобразование  $n$ -мерного пространства и для нас матрицы представляют интерес именно с этой точки зрения.

Поэтому, если в пространстве векторов уже определена некоторая норма, то норму в пространстве матриц желательно вводить так, чтобы она была в некотором смысле согласована с нормой в пространстве векторов.

**Определение:** Если в  $n$ -мерном пространстве  $X$  определена некоторая норма  $\|x\|$ , то подчиненной ей нормой в пространстве матриц порядка  $n$  называется величина:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (*)$$

$\square$  проверить, что так введенная норма удовлетворяет аксиомам нормы.

Непосредственным следствием определения подчиненной матричной нормы является неравенство

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \forall x, \text{ в том числе для } x = 0 \quad (*)$$

Следствие: Говорят, что матричная норма согласована с векторной, если для всех  $A$  и  $x$  справедливо неравенство  $(*)$

Тогда, всякая подчиненная матричная норма согласована с той векторной нормой, которой она подчинена. Обратное, вообще говоря, неверно. Пример согласованности норм  $\|A\|_E$  и  $\|x\|_2$  в чем легко убедиться, используя неравенство Коши-Буняковского.

**Свойства подчиненных норм:**

1.  $\|E\| = 1$ , где  $E$  - единичная матрица

2.  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \forall A \text{ и } B$

Доказательство этих свойств:

$$\|E\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ex\|}{\|x\|} = 1$$

$$\|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$$

Использование свойства 1 позволяет утверждать, что не существует векторной нормы, которой была бы подчинена евклидова норма матрицы. В самом деле,

$$\|E\|_E = \sqrt{n} \neq 1$$

Обозначим через  $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$  матричные нормы, подчиненные соответственно  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ .

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A * A)}, \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

а) Доказательство справедливости формулы

$$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

для  $\forall x \neq 0$  оценим

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_1 \\ \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;\end{aligned}$$

если существует такой вектор  $y$ , для которого достигается максимум, то формула доказана.

Обозначим через  $k$  номер того столбца, для которого

$$\sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

в качестве  $y = e_k = (0, \dots, 0, 1^1, 0, \dots, 0)^*$

$$e_k = 1; \|Ae_k\| = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\frac{\|Ae_k\|_1}{\|e_k\|_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

б) Доказательство для  $\|A\|_2$

$(A^*A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^* \cdot A; \Rightarrow A^*A$  - симметрич. и неотрицательно определена

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

все собственные значения симметрической матрицы вещественны, и соответствующие собственные функции образуют полную ортогональную и нормированную систему, и в силу неотрицательности определителя  $A^*A$  неотрицательны,  $A^*Au_i = \lambda_i(A^*A)u_i \quad i = \overline{1, n}$

$$u_i(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

$$\forall x \neq 0 : x = \sum_{i=1}^n c_i u_i$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\left(\sum_i c_i u_i, \sum_i c_i u_i\right)} = \sqrt{\sum_i c_i^2};$$

---

<sup>1</sup> k-я компонента

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2 &= \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(A^*Ax, x)} = \sqrt{(A^*A \sum_i c_i u_i, \sum_i c_i u_i)} = \\ &= \sqrt{(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i (A^*A) u_i, \sum c_i u_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2} \leq \sqrt{\max_i \lambda_i} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_i c_i^2}}_{\|x\|_2}\end{aligned}$$

для  $\forall x \neq 0$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}$$

$\exists y \neq 0$ ; пусть  $k$  - номер максимального с.з.  $\sqrt{\lambda_k(A^*A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}$

$$y = u_k; \quad \|u_k\|_2 = 1; \quad \|Au_k\| = \sqrt{(A^*Au_k, u_k)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}$$

Если  $A$  - симметрическая матрица  $A^* = A$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^2)} = \sqrt{\max_i (\lambda_i(A))^2} = \max_i \lambda_i(A).$$

## §2 Обусловленность матриц и с.л.а.у.

Определение: числом обусловленности квадратной матрицы  $A$  называется величина

$$\mu(A) = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \left( \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \right)$$

Из (\*) следует, что  $\boxed{\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|} \quad \forall x$ , в том числе  $x = 0$  (\*\*)

Говорят, что матричная норма согласована с векторной, если выполнено (\*\*)

Согласно этому определению всякая подчиненная матричная норма согласована с той векторной нормой, которой она подчинена.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры согласованных норм:  $\|x\|_2$  и  $\|A\|_E$

$\boxed{Y}$  показать это, используя неравенство Коши - Буняковского.

Свойства подчиненной нормы:

$$1) \|E\| = 1$$

$$2) \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B$$

$\boxed{Y}$  доказать эти свойства

Использование свойства 1 позволяет утверждать, что не  $\exists$  - ет векторной нормы, которой была бы подчинена  $\| \cdot \|_E$   
В самом деле  $\|E\|_E = \sqrt{n} \neq 1$   
Обозначим через  $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$  матричные нормы, подчиненные соответственно нормам  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_{ij}| \quad (1)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^*A)} - \text{спектральная норма} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (2)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad (3)$$

Сначала докажем справедливость формулы (1).  
По определению подчиненной нормы

$$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \|x\|_1 \end{aligned}$$

Отсюда, для всех  $x \neq 0$

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

и для доказательства формулы (1) достаточно показать, что  $\exists$  такой вектор  $u$ , для которого

$$\frac{\|A\|_1}{\|y\|_1} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

обозначим через  $k$  - номер того столбца, для которого

$$\sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

в качестве искомого вектора  $u$  следует взять  $k$ -ый координатный столбец

$$e_k = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{k\text{-ое место}}, 0, \dots, 0)^*;$$

k-ое место

$$\|e_k\|_1 = 1; \quad \|Ae_k\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad !$$

$$\frac{\|Ae_k\|_1}{\|e_k\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \text{ - формула доказана!}$$

Аналогично доказывается формула (3). Перейдем к доказательству формулы (2)

Матрица  $A^*A$  - матрица и положительно определена.

Из курса линейной алгебры известно, что все собственные числа симметричной матрицы вещественны, кроме того собственные значения неотрицательны. Кроме того, симметричная матрица обладает полным ортонормированным набором обстныхенных векторов, обозначим  $u_i$  собственный вектор  $A^*A$  отвечающий ее собственному значению  $\lambda_i(A^*A) : (A^*A)u_i = \lambda_i(A^*A)u_i$  т.е.  $A^*Au_i = \lambda_i u_i, i = \overline{1, n}$ ;

По определению подчиненной нормы

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Оценим сверху величину  $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

Поскольку  $u_1, \dots, u_n$  образуют базис n-мерного векторного пространства, то x можно представить:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i u_i$$

Вычислим

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i, \sum_{i=1}^n c_i u_i\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

Оценим

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(A^*Ax, x)} = \sqrt{\left(A^*A \sum_{i=1}^n c_i u_i, \sum_{i=1}^n c_i u_i\right)} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i u_i, \sum_{i=1}^n c_i u_i\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2} \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i} \cdot \|x\|_2$$

Отсюда следует, что для всех  $x \neq 0$

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^*A)}$$

Покажем, что существует такой  $y$ , для которого достигается равенство. Обозначим через  $k$  - номер максимального собственного значения, в качестве искомого вектора  $y$  возьмем  $u_k$ , имеем

$$\|u_k\|_2 = 1, \quad \|Au_k\|_2 = \sqrt{(A^*Au_k, u_k)} = \sqrt{\lambda_k}$$

В частном случае симметрической матрицы  $A$  спектральная норма

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(Ax, Ax)} = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^2)} =$$

$$= \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2(A)} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^n \lambda_i(A)$$

#### Обусловленность матриц и систем линейных алгебраических уравнений.

Числом обусловленности матрицы  $A$  называется

$$\mu(A) = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \left( \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \right)$$

Чтобы понять смысл этой характеристики, рассмотрим систему уравнений

$$Ax = f \quad (2)$$

с невырожденной матрицей  $A$  и рассмотрим систему уравнений с возмущенной правой частью

$$A(x + \xi) = f + \eta \quad (3)$$

$\xi$  - возмущение решения, вызванное возмущением  $\eta$  правой части

Вычтем (2) из (3): имеем  $A\xi = \eta$

Оценим:

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|f\|}{\|\eta\|} = \frac{\|\xi\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Ax\|}{\|A\xi\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} / \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} \leq \mu(A) \frac{\|\eta\|}{\|f\|};$$

Отсюда:

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \frac{\|\eta\|}{\|f\|}. \quad (4)$$

Заметим, что из определения точной верхней грани непосредственно следует, что  $\mu(A)$  - наименьшая из констант, для которых при всех  $f \neq 0$  и всех

$\eta \neq 0$  справедливо (4).

**Величины**

$\frac{\|\eta\|}{\|f\|}$  - наз. относительным возмущением правой части

$\frac{\|\eta\|}{\|f\|}$  - относительным возмущением решения.

Неравенство (4) показывает, что если число  $\mu(A)$  велико, то даже при малом относительном возмущении правой части относительное возмущение решения может быть достаточно большим: последнее может быть больше первого в  $\mu(A)$  раз. Иными словами, при большом числе обусловленности даже малое изменение правой части может привести к большому изменению решения. В таком случае говорят, что решение системы плохо определено, или плохо обусловлено ее правой частью.

Если же число  $\mu(A)$  невелико, то из (4) следует, что малое изменение правой части приводит к малому изменению решения. В этом случае говорят, что решение системы хорошо обусловлено ее правой частью.

Мерой обусловленности решения системы ее правой частью, как мы видим, и является число обусловленности матрицы этой системы.

**Матрицы с большим числом обусловленности называют плохо обусловленными, а матрицы, имеющие большое число обусловленности - хорошо обусловленными.**

Предполагаем, что  $A$  невырожденная, получим формулу для  $\mu(A)$ :

$$\mu(A) = \frac{\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\inf_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$$

Числитель есть  $\|A\|$  подчиненная норме векторной  $\|x\|$

Сделаем замену  $z = Ay$

$$\inf_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \inf_{z \neq 0} \frac{\|z\|}{\|A^{-1}z\|} = \inf_{z \neq 0} \frac{1}{\frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}} = \frac{1}{\sup_{z \neq 0} \frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Окончательно,  $\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Если,  $A$  - вырожденная, то однородная система  $Ay = 0$  имеет нетривиальное решение и следовательно

$$\inf_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = 0$$

В этом случае  $\mu(A) = \infty$

Отметим, что число обусловленности матрицы не может быть  $\leq 1$ .

Выясняя смысл числа обусловленности  $\mu(A)$  мы видели, что оно характеризует обусловленность решения системы  $Ax = f$  ее правой частью. Оказывается, что  $\mu(A)$  указывает и на характер обусловленности решения системы ее матрицей.



Наряду с системой  $Ax = f$  рассмотрим систему

$$(A + \sigma)(x + \xi) = f + \eta$$

Здесь  $\xi$  - возмущение решения, вызванное возмущением  $\eta$  правой части и возмущением  $\sigma$  матрицы системы.

Теорема

Если  $\|A^{-1}\| \cdot \|\sigma\| < 1$ , то для относительного возмущения решения: справедлива оценка

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \frac{\|\sigma\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\eta\|}{\|f\|} + \frac{\|\sigma\|}{\|A\|} \right)$$

Для доказательства понадобится лемма:

Y

Лемма: Пусть  $\|B\| < 1$ . Тогда матрица  $E + B$  имеет обратную и  $\|(E + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$

Доказательство теоремы:

$$(A + \sigma)(x + \xi) = f + \eta$$

—

$$Ax = f$$

$$(A + \sigma)\xi = \eta - \sigma \cdot x$$

матрицу  $A + \sigma = A(E + A^{-1}\sigma)$  и покажем, что она имеет обратную.

Так как  $\|A^{-1}\sigma\| \leq \|A^{-1}\| \|\sigma\| < 1$ , то по лемме

$E + A^{-1}\sigma$  имеет обратную, следовательно, имеет обратную и матрица  $A(E + A^{-1}\sigma)$ .

$$\xi = (A + \sigma)^{-1}(\eta - \sigma x)$$

$$\xi = (E + A^{-1}\sigma)^{-1}A^{-1}(\eta - \sigma x)$$

Оценим сверху  $\xi$  по норме:

$$\begin{aligned} \|\xi\| &\leq \|(E + A^{-1}\sigma)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot (\|\eta\| + \|\sigma\|\|x\|) \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \frac{\|\sigma\| \|A\|}{\|A\|}} \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \left( \frac{\|\eta\|}{\|A\|} \cdot \frac{\|f\|}{\|f\|} + \frac{\|\sigma\|}{\|A\|} \|x\| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - \mu(A) \cdot \frac{\|\sigma\|}{\|A\|}} \cdot \mu(A) \left( \frac{\|\eta\|}{\|A\|} \cdot \frac{\|f\|}{\|A\| \cdot \|f\|} + \frac{\|\sigma\|}{\|A\|} \right) \|x\| \leq \\ &\leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \frac{\|\sigma\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\eta\|}{\|f\|} + \frac{\|\sigma\|}{\|A\|} \right) \end{aligned}$$

Полученная оценка показывает, что  $\mu(A)$  является мерой обусловленности решения системы  $Ax = f$  как ее правой частью, так и матрицей, т.е. всей системой в целом.

Тогда если есть нормы  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$ , то  $\|\mu\|_1, \|\mu\|_2, \|\mu\|_\infty$ .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1.0001 & 1 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 2.0001 \\ 2.0001 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Выясним число обусловленности

$$\|\mu\|_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2$$

т.к. матрица симметрична, то  $\|A\|_2 = \max(\lambda_1(A), \lambda_2(A))$ ;

$$(1 - \lambda)^2 - 1.0001^2 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1.0001^2 = 0 \quad (1 - \lambda) - 1.0001 = 0 \quad \lambda_1 = -0.0001$$

$$(1 + 0.0001 + 0.0001^2) \quad 1 - \lambda + 1.0001 = 0 \quad \lambda_2 = 2.0001$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 0.0002 - 0.0001^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 0.0002 + 0.0001^2} = 1 \pm (1 + 0.0001)$$

$$\lambda_1 = 2.0001; \lambda_2 = -0.0001, \text{ значит } \|A\|_2 = 2.0001;$$

$A^{-1}$  также симметрична, поэтому

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_2 &= \max(\lambda_1(A^{-1}), \lambda_2(A^{-1})) = \max\left(\frac{1}{\lambda_1(A)}, \frac{1}{\lambda_2(A)}\right) = \\ &= \frac{1}{|\min(\lambda_1(A^{-1}), \lambda_2(A^{-1}))|} = \frac{1}{0.0001} = 10^4 \\ \mu(A) &= 2.0001 \cdot 10^4; \end{aligned}$$

Рассмотрим возмущенную систему:

$$(A + \sigma) \underbrace{(x + \xi)}_y \neq f + \eta;$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.00005 \end{pmatrix} \eta = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1.0001 & 1.00005 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0002 \\ 2.00005 \end{pmatrix}$$

Решение не имеет ничего общего с решением исходной системы.

Найдем относительное возмущение решения

$$\frac{\|\xi\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|y - x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \quad -\lambda(0.00005 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.00005 = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$\|\sigma\| = \max_{i=1,2} |\lambda_i(\sigma)| = 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_2 &= 10^{-4} & \|f\|_2 &= \sqrt{2} \cdot 2.0001 \\
\frac{\|\sigma\|}{\|A\|} &= \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{2.0001}, \quad \frac{\|\eta\|_2}{\|f\|_2} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{2} \cdot 2.0001}; \\
\frac{\|\xi\|_2}{\|x\|_2} &\leq \frac{2.0001 \cdot 10^4}{1 - 2.0001 \cdot 10^4 \cdot \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{2.0001}} \left( \frac{10^{-4}}{2.0001 \cdot 10^4} + \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{2.0001} \right) = \\
&= \frac{1}{1-0.5} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2} = \sqrt{2} + 1;
\end{aligned}$$

### Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

В итерационных методах решения системы  $Ax = f$  определяется некоторая последовательность векторов  $x^{(k)}$ , такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ , здесь  $x^*$  - точное решение рассматриваемой системы. В  $n$ -мерном пространстве определяем норму и в дальнейшем будем понимать сходимость последовательности  $x^{(k)}$  к  $x^*$  в смысле:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$ .

Из анализа известно, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Поэтому из сходимости последовательности  $x^{(k)}$  в одной норме будет следовать ее сходимость и в любой другой норме. В дальнейшем мы воспользуемся этим обстоятельством, доказывая сходимость того или иного метода в той норме, в которой это можно сделать наиболее простым образом.

### Двухслойные итерационные методы.

Будем рассматривать двухслойные итерационные методы решения системы  $Ax = f$ , каждый из которых можно записать в следующем каноническом виде:

$$B \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + Ax^{(k)} = f, k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

здесь  $B$  - некоторая невырожденная матрица,  $\tau_k$  - итерационный параметр,  $x^{(0)}$  - произвольное начальное приближение. Если при  $\forall k \tau_k = \tau$  - то метод называется стационарным. В основном мы будем рассматривать именно стационарные двухслойные итерационные методы.

$$B \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = f, k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Предполагая, что  $A$  - невырожденная, покажем, что если метод сходится, то он обязательно сходится к единственному решению  $x^*$  системы  $Ax = f$ .

Действительно, пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \bar{x}$ . Переходя в методе к  $\lim_{k \rightarrow \infty}$

$$\frac{B}{\tau} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} - \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \right) + A \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = f$$

$$A\bar{x} = f$$

Отсюда в силу единственности решения системы  $Ax = f$  следует  $\bar{x} = x^*$

Следовательно, выбирая  $B$  и  $\tau$  нужно позаботиться о самом факте сходимости последовательности приближений. С другой стороны, вычисляя очередное приближение  $x^{(k+1)}$  необходимо решать систему

$$Bx^{(k+1)} = (B - \tau A)x^{(k)} + \tau f.$$

Трудоемкость решения этой системы зависит от структуры матрицы  $B$ . Поскольку в общем случае приходится решать много таких систем, то  $B$  желательно выбрать так, чтобы решение каждой такой системы осуществлялось как можно проще. Поэтому в качестве  $B$  обычно используют диагональную или треугольную матрицу.

$z^{(k)} = x^{(k)} - x^{(*)}$  - вектор ошибки (погрешности)  $k$ -го приближения;

$r^{(k)} = Ax^{(k)} - f$  - вектор невязки  $k$ -го приближения;

Тогда условие сходимости итерационного процесса принимает вид:

$$\|z^{(k)}\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{(k)}\| = 0$$

Перепишем итерационный процесс через  $z^{(k)}$ :

$$B \frac{x^{(k+1)} - x^{(*)} - x^{(k)} + x^{(*)}}{\tau} + A(x^{(k)} - x^{(*)}) = f - f = 0$$

или

$$B \frac{z^{(k+1)} - z^{(k)}}{\tau} + Az^{(k)} = 0$$

Отсюда:

$$z^{(k+1)} = B^{-1}(B - \tau A)z^{(k)}; \quad z^{(k+1)} = (E - \tau B^{-1}A)z^{(k)}$$

или

$$z^{(k+1)} = Sz^{(k)} \quad (3); \quad S = E - \tau B^{-1}A \quad (4)$$

Матрица  $S$  - называется матрицей перехода двухслойного итерационного метода. Оказывается, свойства сходимости метода целиком определяется матрицей перехода.

Важной характеристикой итерационного метода является так называемая асимптотическая скорость сходимости. Для того, чтобы определить это понятие, найдем число шагов, необходимое для уменьшения нормы начальной погрешности  $\|z^{(0)}\|$  в  $e$ -раз ( $e = \exp(1)$ ), т.е. мы пытаемся найти наименьшее число  $k$ , удовлетворяющее неравенству

$$\|z^{(k)}\| = \frac{1}{e} \|z^{(0)}\| \quad (5)$$

поскольку  $z^{(k)} = Sz^{(0)}$ , то (5) будет заведомо выполнено, если

$$\|S\|^k = \frac{1}{e} \text{ или } k \ln \|S\| \leq -1 \quad (6)$$

Естественно, говорить о скорости сходимости можно только для сходящегося ряда. В дальнейшем будет получено достаточное условие сходимости  $\|S\| \leq 1$ . Имея его в виду, из (6) находим: Покажем сначала, что модуль любого собственного значения матрицы не превосходит ее согласованной нормы.

Пусть  $Su = \lambda u, u \neq 0$ . Имеем

$$|\lambda| \cdot \|u\| = \|\lambda u\| = \|Su\| \leq \|S\| \cdot \|u\|$$

поделив крайние части неравенства на  $\|u\|, u \neq 0$ , имеем

$$|\lambda| \leq \|S\| \quad (7)$$

Пусть теперь  $\|S\| < 1$ . В силу (7) все собственные значения матрицы перехода  $S$  по модулю меньше 1, из теоремы 1 следует сходимость метода при любом начальном приближении.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 для различных конкретных норм получаем достаточные условия сходимости итерационных методов в терминах матрицы перехода.

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |S_{ij}| < 1$$

#### Метод простой итерации.

Полагая в методе (2)  $B=E$  получаем метод простой итерации. Согласно (4) матрица перехода имеет вид, а

$$S = E - \tau B^{-1}A = E - \tau A,$$

решение системы находится по явным формулам

$$x^{(k+1)} = x^k - \tau(Ax^k - f); \quad x_i^{(k+1)} = \tau f_i + (1 - \tau a_{ii})x_i^{(k)} - \tau \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k)}, i = \overline{1, n};$$

#### Метод Якоби.

Матрицу  $A$  представим в виде  $A = A_L + D + A_V$ , где  $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ,

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & 0 & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{31} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{pmatrix}, A_V = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & 0 & a_{n-1n} & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Предположим, что все  $a_{ii} \neq 0$ , следовательно  $D$  - невырождена.  
 Положим в канонической форме двухслойного итерационного процесса  $B = D, \quad \tau = 1$   
 Получаем

$$\begin{aligned} D(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + (D + A_L + A_V)x^{(k)} &= f, k = 0, 1, \dots \\ Dx^{(k+1)} &= -(A_L + A_V)x^{(k)} + f \\ x^{(k+1)} &= -D^{-1}(A_L + A_V)x^{(k)} + D^{-1}f. \end{aligned}$$

Явные формулы:

$$k \geq \frac{1}{-\ln \|S\|}$$

Полученное неравенство показывает, что чем больше величина  $\ln \|S\|$ , тем меньшее число шагов требуется выполнить для уменьшения начальной ошибки в  $e$  раз. По этой причине величина

$$R = -\ln \|S\|$$

называется асимптотической скоростью сходимости нетрадиционного метода с матрицей перехода  $S = E - \tau B^{-1}A$ . Имеют место следующие теоремы о сходимости итерационных методов: Теорема (Критерий сходимости)

Для того, чтобы метод (2) сходился при любом начальном приближении, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы перехода (4) были по модулю меньше 1.

Доказательство: Необходимость.

По условию метод (2) сходится  $\forall$  начальном приближении  $x^{(0)}$ . Требуется доказать, что все собственные значения матрицы  $S$  меньше по модулю 1.

Предположим противное, а именно, пусть есть хоть одно  $|\lambda| \geq 1$ .

Пусть  $u \neq 0$  отвечающий этому  $\lambda$  собственный вектор  $Su = \lambda u$

В качестве  $x^{(0)} = x^* + u$  возьмем.

Тогда  $z^{(0)} = x^{(0)} - x^* = u$ . Вычислим  $z^{(k)}$ :

$$z^{(k)} = S^k z^{(0)} = S^k u = \lambda^k u \text{ Отсюда } \|z^{(k)}\| = \|\lambda^k u\| = |\lambda^k| \|u\|,$$

поскольку  $u \neq 0$  - фиксированный вектор, а  $|\lambda| \geq 1$ , то из полученного следует, что при  $k \rightarrow \infty \|z^{(k)}\|$  не стремится к нулю, но это противоречит условию.

Для доказательства нам понадобится лемма.

Лемма: Пусть все собственные значения  $\lambda^i(S)$  удовлетворяют неравенству:

$$|\lambda^i(S)| < q, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда существует такая невырожденная матрица  $T$ , что матрица  $\Lambda = TST^{-1}$  удовлетворяет условию  $\|\Lambda\|_\infty \leq q$

Доказательство леммы: рассмотрим величину

$$\eta = q - \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(S)|$$

Очевидно,  $\eta > 0$ . Поэтому мы можем рассмотреть матрицу  $\eta^{-1}S$ . Из курса алгебры известно, что существует преобразование подобия, которое приводит матрицу к нормальной жордановой форме:

$$T\eta^{-1}ST^{-1} = \begin{pmatrix} \eta^{-1}\lambda_1(S) & \alpha_1 & 0.. & 0 \\ & \eta^{-1}\lambda_2(S) & \alpha_2 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & \eta^{-1}\lambda_n(S) \end{pmatrix}$$

где каждая из величин  $\alpha_i$  равно 0 или 1. Матрица  $\Lambda = TST^{-1} = \eta(T\eta^{-1}ST^{-1}) =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(S) & \eta\alpha_1 & 0.. & 0 \\ & \lambda_2(S) & \eta\alpha_2 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \eta\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n(S) \end{pmatrix}$$

Вычислим и оценим  $\|\Lambda\|_\infty$  :

$$\|\Lambda\|_\infty \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{1 \leq i \leq n-1} (|\lambda_i(S)| + \eta) \\ |\lambda_i(S)| \end{array} \right. \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(S)| + \eta = q$$

Лемма доказана.

Доказательство: Достаточность.

Итак,  $|\lambda_i(S)| < 1, i = 1, 2, \dots, n$

Выберем  $q < 1$  такое, что  $\max_{1 \leq i \leq n-1} (|\lambda_i(S)| + \eta) < q$  и покажем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{(k)}\| = 0$  при  $\forall z^{(0)}$ .

Из леммы следует, что существует такая невырожденная матрица  $T$ , что  $\|\Lambda\|_\infty < q$ , где  $\Lambda = TST^{-1}$ , отсюда следует, что  $S = TST^{-1}$ .  $S^2 = T^{-1}\Lambda TT^{-1}\Lambda T = T^{-1}\Lambda^2 T$

Очевидно  $S^k = T^{-1}\Lambda^k T, z^{(k)} = S^k z^{(0)}, \Rightarrow z^{(k)} = T^{-1}\Lambda^k T z^{(0)}$

Оценим  $\|z^{(k)}\|_\infty$  :

$$\begin{aligned} \|z^{(k)}\|_\infty &= \|T^{-1}\Lambda^k T z^{(0)}\|_\infty \leq \|T^{-1}\|_\infty \cdot \|T\|_\infty \|\Lambda\|_\infty^k \cdot \|z^{(0)}\|_\infty \leq \\ &\leq \underbrace{\mu_\infty(T)}_{\text{число}} \cdot \underbrace{q^k}_{\text{число}} \cdot \|z^{(0)}\|_\infty \end{aligned}$$

Отсюда, из-за  $q < 1$ , следует, что  $\|z^{(k)}\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

Достаточность доказана.

Теорема 2. Для сходимости метода при любом начальном приближении достаточно, чтобы хотя бы одна из норм матрицы перехода, согласованных с какой-либо векторной нормой, была меньше 1.

Доказательство.

$$x_i^{(k+1)} = (f_i - \sum_{j=1, i \neq j}^n a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, i = \overline{1, n}$$

Метод Зейделя.

Полагая  $B = A_L + D, \tau = 1$ , получим

$$(A_L + D)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + (A_L + D + A_V)x^{(k)} = f, k = 0, 1, \dots$$

$$(A_L + D)x^{(k+1)} = f - A_V x^{(k)}$$

Так как  $A_L + D$  - треугольная нижняя матрица, то явные формулы:

$$x_i^{(k+1)} = (f_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}, i = \overline{1, n}$$

Метод последовательной верхней релаксации.

$$B = D + \omega A_L, \tau = \omega$$

$$(D + \omega A_L) \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + \omega()x^k + \omega f$$

$$(D + \omega A_L)x^{(k+1)} = Dx^{(k)} - \omega(D + A_V)x^k + \omega f$$

$$(D + \omega A_L)x^{(k+1)} = D(1 - \omega)x^{(k)} - \omega A_V x^k + \omega f$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[-\omega A_L x^k + D(1 - \omega)x^{(k)} - \omega A_V x^k + \omega f]$$

$$x_i^{(k+1)} = (\omega f_i - \omega \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + (1 - \omega)a_{ii}x_i^{(k)}) / a_{ii}$$

Итак, для метода Якоби ( $\tau = 1, B = D$ )  $S = E - \tau B^{-1}A = E - D^{-1}A = E - D^{-1}(A_L + D + A_V) = -D^{-1}(A_L + A_V)$ ;

Для выяснения условий сходимости метода Якоби можно воспользоваться критерием сходимости ( $|\lambda_i(S)| < 1$ ) и достаточным условием  $\|S\| < 1$ . Обе теоремы формулируют условия в терминах матрицы перехода S. Сформулируем условия в терминах исходной матрицы A.

Определение. Говорят, что матрица A порядка n удовлетворяет строгим условиям Адамара, если для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  справедливо

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Определение. Говорят, что матрица A порядка n имеет строгое диагональное преобладание, если она удовлетворяет всем строгим условиям Адамара.



Теорема Адамара

Матрица со строгим диагональным преобладанием невырождена.

Доказательство.

Пусть матрица имеет строгое диагональное преобладание и невырождена. Тогда однородная система  $Ax = 0$  имеет нетривиальное решение  $x \neq 0$ . Пусть

$$|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| > 0$$

Выпишем  $k$ -ое уравнение системы  $Ax = 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j$$

или

$$a_{kk} x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} x_j$$

Отсюда

$$|a_{kk}| |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| |x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|$$

и следовательно

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|;$$

$k$ -ое строгое условие Адамара не выполнено. Теорема доказана.

По теореме Гершгорина каждое собственное значение  $\lambda_i(S)$  может хотя бы в одном из кругов Гершгорина:

$$|\lambda_i(S) - 0| \leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < 1$$

По условию, имеет место строгое диагональное преобладание, поэтому правая часть последнего неравенства  $< 1$ . Тогда

$$|\lambda_i(S)| < 1$$

Следовательно, в силу критерия сходимости метод Якоби сходится. Теорема доказана.

В методе Зейделя параметры итерационного метода равны:

$$\tau = 1, B = D + A_L.$$

$$\text{Матрица перехода } S = E - \tau B^{-1}(A) = E - (D + A_L)^{-1}(A_L + D + A_V) = \\ = -(D + A_L)^{-1} A_V;$$

Для выяснения условий сходимости воспользуемся критерием сходимости, сформулированные в терминах матрицы перехода, а именно необходимо и

достаточно, чтобы все собственные значения  $|\lambda_i(S)| < 1, i = \overline{1, n}$   
 Собственные значения матрицы  $S$  являются корнями уравнения:  
 $\det[-(A_L + D)^{-1}A_V - \lambda E] = 0 \quad (*)$

$$\text{Но } \det[-(A_L + D)^{-1}A_V - \lambda E] = \det[-(A_L + D)^{-1}(A_V + \lambda(A_L + D))] = \\ = \det[-(A_L + D)^{-1}] \cdot \det[\lambda(A_L + D)]$$

Так как  $A_L + D$  - невырожденная матрица, то уравнение  $(*)$  эквивалентно уравнению:

$$\det[\lambda(A_L + D) + A_V] = 0 \quad (**)$$

Тем самым доказана теорема (критерий). Для того, чтобы метод Зейделя сходил при любом начальном приближении, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения  $(**) \det[\lambda(A_L + D) + A_V] = 0$  были по модулю меньше единицы.

Теорема (достаточное условие)

Если матрица  $A$  системы уравнений  $Ax = f$  имеет строгое диагональное преобладание, то метод Зейделя сходится при любом начальном приближении.

Доказательство.

Пусть  $\lambda$  - произвольный корень уравнения  $(**)$

Матрица  $\lambda(A_L + D) + A_V$  - вырождена, поэтому по следствию из теоремы Адамара у нее нарушено хотя бы одно из строгих условий Адамара, т.е. существует такое  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), что

$$|\lambda a_{kk}| \leq \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda a_{kj}| + \sum_{j=k+1}^n |a_{kj}|.$$

Отсюда легко получить оценку сверху для  $|\lambda|$ :

$$|\lambda| \cdot |a_{kk}| = |\lambda a_{kk}| \leq \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda| |a_{kj}| + \sum_{j=k+1}^n |a_{kj}|$$

отсюда

$$|\lambda|(|a_{kk}| + \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|) \leq \sum_{j=k+1}^n |a_{kj}|$$

По условию матрица  $A$  имеет строгое диагональное преобладание т.е. для нее все строгие условия Адамара, в том числе  $k$ -ое:

$$|a_{kk}| > \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| + \sum_{j=k+1}^n |a_{kj}|$$

отсюда

$$\sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| < |a_{kk}| - \sum_{j=k+1}^n |a_{kj}|$$

таким образом  $|\lambda| < 1$ .

Теорема Если матрица  $A$  системы  $Ax = f$  симметрическая и положительно определенная, то метод Зейделя сходится при  $\forall$  начальном приближении.

Метод Зейделя имеет простую геометрическую интерпритацию:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = f_i$$

системы  $Ax = f$  определяет гиперплоскость в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Обозначим гиперплоскость, определяемую  $i$ -ым уравнением через  $L_i$ . Точное решение  $x^*$  есть точка пересечения всех гиперплоскостей  $L_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Рассмотрим некоторое приближение

$$y = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^*$$

полученное по методу Зейделя, и с помощью расчетной формулы метода Зейделя вычислим

$$x_i^{(k+1)} = (f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})/a_{ii}$$

последняя формула эквивалентна равенству

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} = f_i,$$

это равенство означает, что точка

$$z = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})^*$$

принадлежит гиперплоскости  $L_i$ .

Другими словами, в методе Зейделя  $i$ -ая компонента очередного приближения находится из условия принадлежности точки  $z$  гиперплоскости  $L_i$ . Так как вектор предыдущий  $y$  также находится по методу Зейделя, то  $y$  принадлежит гиперплоскости  $L_{i-1}$ . Таким образом, вычисляя  $x_i^{(k+1)}$  по методу Зейделя, мы переходим от точки  $y$ , принадлежавшей гиперплоскости  $L_{i-1}$ , к точке  $z \in L_i$ , причем этот переход осуществляется вдоль линии, параллельной  $i$ -ой координатной оси.

Для случая  $n = 2$  рассмотрим рисунок:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2$$

$$x_1^{(1)} = (f_1 - a_{12}x_2^{(0)})/a_{11}$$

$$a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^{(0)} = f_1$$

$$y = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})^*$$

$$z = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$$

Для того, чтобы наиболее простым способом перейти к следующему методу последовательной релаксации, посмотрим на приближения в методе Зейделя еще с одной точки зрения. Обозначим через  $t$  и  $r$  соответственно невязки приближений  $y$  и  $z$ :

$$t = Ay - f \Rightarrow t_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - f_i$$

$$t = Az - f \Rightarrow r_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - f_i \pm a_{ii}$$

Из расчетной формулы метода Зейделя следует, что  $r_i = 0$ . С другой стороны, обозначим  $\alpha = x_i^{(k)} - x_i^{(k+1)}$  и выразим  $r_i$  через  $t_i$ ,

$$r_i = t_i + a_{ii}(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = t_i - \alpha a_{ii}$$

$$r_i = t_i - \alpha a_{ii};$$

Таким образом, поправка  $\alpha$  к значению  $i$ -ой компоненты находится из условия:

$$r_i = t_i - \alpha a_{ii} = 0$$

Обнуление  $i$ -ой компоненты невязки  $r$  обычно называют полной релаксацией. По этой причине метод Зейделя называют методом полной релаксации. Метод последовательной релаксации

Иногда можно добиться более быстрой сходимости, если требовать не обнуления  $r_i$ , а всего лишь уменьшения  $|r_i|$  по сравнению с  $|t_i|$ , т.е. проводить не полную, а частичную релаксацию. Итак, потребуем, чтобы

$$|r_i| = |t_i - \alpha a_{ii}| < |t_i|$$

или

$$|\alpha - \frac{t_i}{a_{ii}}| < |\frac{t_i}{a_{ii}}|$$

Если  $\frac{t_i}{a_{ii}} > 0$ , то  $0 < \alpha < 2\frac{t_i}{a_{ii}}$  если  $\frac{t_i}{a_{ii}} < 0$ , то  $2\frac{t_i}{a_{ii}} < \alpha < 0$ ,

И в том, и в другом случае неравенства можно записать в единообразном виде  $\alpha = \omega \frac{t_i}{a_{ii}}$ , где  $\omega \in (0, 2)$

В том случае  $i$ -ая компонента невязки  $r_i$  будет определяться формулой

$$r_i = t_i - a_{ii}\omega \frac{t_i}{a_{ii}} = t_i(1 - \omega)$$

Мы получим семейство методов, которые наз. методами послед. релаксации.  
 При  $\omega = 1$   $r_i = 0$ , т.е. метод Зейделя получается из семейства методом послед. релаксации при  $\omega = 1$ .

Параметр  $\omega$  называют релаксационным параметром.

Получим формулы метода послед. релаксации при  $\omega = 1$

Параметр  $\omega$  называют релаксионным параметром.

Получим формулы метода посл. релаксации

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + a_{ii}x_i^k + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k - f_i - \omega \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + a_{ii}x_i^k + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k - f_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + a_{ii}x_i^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \\
 x_i^{k+1} &= (\omega f_i - \omega \sum_{i=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k + (1 - \omega)x_i^k a_{ii}) / a_{ii}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{B = D + \omega A_L, \tau = \omega} \quad S = E - \omega B^{-1} * A =$$

$$E - (D + \omega A_L)^{-1} (\omega A_L + \omega D + \omega A_V + D - D) = \boxed{-(D + \omega A_L)^{-1} ((\omega - 1)D + \omega A_V)}$$

Согласно критерию, для сходимости метода при  $\forall x^{(0)}$  необходимо и достаточно, чтобы все  $|\lambda(S)| < 1$ , или

$$\det[-(D + \omega A_L)^{-1} ((\omega - 1)D + \omega A_V) - \lambda E] = 0$$

$$\det[(D + \omega A_L)^{-1}] \det[(1 - \omega)D - \omega A_V - \lambda(D + \omega A_L)] = 0$$

$$\det[(1 - \omega)D - \omega A_V - \lambda(D + \omega A_L)] = 0; \quad (*)$$

Критерий, чтобы все корни этого уравнения были по модулю меньше 1.  
 в уравнении (\*) сделаем замену переменной

$$\lambda = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}$$

Уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}
 &\det \left[ (1 - \omega)D - \omega A_V - \frac{\mu + 1}{\mu - 1} (D + \omega A_L) \right] = \\
 &= \det \left( \frac{1}{\mu - 1} [(\mu - 1)(1 - \omega)D - (\mu - 1)\omega A_V - (\mu + 1)(D + \omega A_L)] \right) = 0 \\
 &\mu D - D - \mu \omega D + \omega D - \mu \omega A_V + \omega A_V - \mu D - \mu \omega A_L - D - \omega A_L \\
 &\det \left[ \frac{1}{\mu - 1} (-\mu \omega A + (\omega - 2)D + \omega(A_V - A_L)) \right] = 0 \\
 &\det [-\mu \omega A + (\omega - 2)D + \omega(A_V - A_L)] = 0 \quad (**)
 \end{aligned}$$

из ТФКП следует, что преобразование  $\lambda = \frac{\mu+1}{\mu-1}$  конформно отображает внутренность единичного круга  $|\lambda| < 1$  в левую полуплоскость  $\Re \mu < 0$ .

Т.о. доказана теорема: для сходимости м.п.р. при  $\forall x^{(0)}$  необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней уравнения  $(**)$  были отрицательны.

Теорема (достаточное условие сходимости м.п.р.)

Для симметрических положительно определенных матриц м.п.р. сходится, если  $\omega \in (0, 2)$ .

Док-во.  $\mu - \forall$  корень уравнения.

матрица  $P = -\omega\mu A + (\omega - 2)D + \omega(A_V - A_L)$  вырождена и система  $Px = 0$  имеет нетривиальное решение  $x$ .

т.к., вообще говоря,  $\mu$  — комплексно, то  $x = u + iv$

$Px = 0$   $x$  скалярно  $\bar{x} = u - iv$

$$(Px, \bar{x}) = 0 \quad -\omega\mu(Ax, \bar{x}) + (\omega - 2)(Dx, \bar{x}) + \omega((A_V - A_L)x, \bar{x}) = 0$$

из симметр. и полож. опред.  $A$  следует, что  $(Ax, \bar{x}) > 0$

$$(Dx, \bar{x}) > 0$$

$$(Ax, \bar{x}) = (A(u + iv), (u - iv)) = (Au, u) + (Av, v) + i(Au, v) - i(Au, v) > 0, \\ \text{аналогично } (Dx, \bar{x}) > 0$$

Покажем теперь, что вещ. часть  $((A_v - A_L)x, \bar{x})$  равна нулю.

$A_v - A_L$  кососимметрична.  $A_L = A_v^*$

$$A_v - A_L = (A_v - A_L);$$

$$\Re((A_v - A_L)x, \bar{x}) = ((A_v - A_L)u, u) + ((A_v - A_L)v, v)$$

$$((A_v - A_L)u, u) = (u, (A_v - A_L)^*u) = -(u, (A_v - A_L)u) = -((A_v - A_L)u, u)$$

$$2((A_v - A_L)u, u) = 0$$

$$((A_v - A_L)u, u) = 0$$

Аналогично,  $((A_v - A_L)v, v) = 0$

$$\Re() = 0 \quad -\Re\mu * \omega(Ax, \bar{x}) + (\omega - 2)(Dx, \bar{x}) = 0$$

$$\Re\mu = \frac{\omega - 2}{\omega} \underbrace{\frac{(Ax, \bar{x})}{(Dx, \bar{x})}}_{> 0} < 0 \quad \omega \in (0, 2)$$

$(A_v - A_L)$  - кососимметрична  $\Re((A_v - A_L)x, \bar{x}) = ((A_v - A_L)u, u) \quad a_{ij} = a_{ji}$

$$(A_v u, u) - (A_L u, u) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j \right) u_i - \sum_{i=1}^{i-1} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j \right) u_i =$$

$$(a_{12}u_2u_1 + a_{13}u_3u_1 + \dots a_{1n}u_nu_1) +$$

$$\begin{aligned}
& + (a_{23}u_3u_2 + a_{24}u_4u_2 + \dots a_{2n}u_nu_2) + \\
& \dots \\
& - (a_{21}u_1u_2) - (a_{31}u_1u_3 + a_{32}u_2u_3) + \dots = 0
\end{aligned}$$

#### Метод простой итерации

Когда  $B = E, S = E - \tau * A$ , формулы метода простых итераций:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau(Ax^{(k)} - f)$$

Поставим следующую задачу оптимизации: подобрать  $\tau > 0$  так, чтобы асимптотическая скорость сходимости  $R = -\ln \|S\|$  была наибольшей. Из формулы для  $R$  видно, что для решения этой задачи следует минимизировать  $\|S\|$

Решим эту задачу в наиболее простом случае, когда  $A = A^* > 0$ , собственные значения такой матрицы вещественны и положительны.

Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно  $\min$  и  $\max$  собственные значения  $A$ , тогда  $0 < \alpha \leq \lambda_i(A) \leq \beta$

Используем спектральную  $\| \cdot \|$ , т.е. минимизируем  $\|S\|_2$  матрица  $S$ , также является симметрической и  $\|S\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(S)|$

Очевидно  $\lambda_i(S) = 1 - \tau\lambda_i(A)$ , поэтому наша задача состоит в минимизации по  $\tau$  величины  $\|S\|_2 = \max_i |1 - \tau\lambda_i(A)|$

Для этого рассмотрим функцию  $f(\tau, \lambda) = |1 - \tau\lambda|$  для  $\forall \tau > 0, \lambda \in [\alpha, \beta]$ .

Покажем, что при фиксированном  $\tau$

$$\max_{\alpha \leq \lambda \leq \beta} f(\tau, \lambda) = \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta)) \quad (1)$$

1. Пусть  $\frac{1}{\beta} \leq \tau \leq \frac{1}{\alpha}$ . Имеем  $1 - \tau\alpha \geq 1 - \frac{1}{\alpha}\alpha = 0$        $1 - \tau\beta \leq 1 - \frac{1}{\beta}\beta = 0$   
т.е. на  $[\alpha, \beta]$  линейная функция  $1 - \tau\lambda$  меняет знак с  $+$  на  $-$   
график функции  $f(\tau, \lambda) = |1 - \tau\lambda|$  в таком случае имеет вид  
и утверждение (1) становится очевидным.

Аналогичным образом оно доказывается и для случаев

$$\tau < \frac{1}{\beta}, \tau > \frac{1}{\alpha}.$$

Ясно, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} |1 - \tau\lambda_i(A)| \leq \max_{\alpha \leq \lambda \leq \beta} f(\tau, \lambda) = \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta))$$

С другой стороны:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |1 - \tau\lambda_i(A)| \geq \max(|1 - \tau\alpha|, |1 - \tau\beta|) = \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta))$$

Следовательно,

$$\|S\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)| = \max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta))$$

Теперь, покажем, что решением этой задачи является  $\tau_0 = \frac{2}{\alpha+\beta}$  Убедимся в этом:

$$1 - \tau_0 \alpha = 1 - \frac{2}{\alpha + \beta} \cdot \alpha = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} > 0$$

$$1 - \tau_0 \beta = 1 - \frac{2}{\alpha + \beta} \cdot \beta = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} < 0$$

$$f(\tau_0, \alpha) = |1 - \tau_0 \alpha| = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

$$f(\tau_0, \beta) = |1 - \tau_0 \beta| = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

Итак,  $\max(f(\tau_0, \alpha), f(\tau_0, \beta)) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$

Нам осталось показать, что при всех  $\tau \neq \tau_0$

$$\max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta)) > \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

а) пусть  $\tau \leq \tau_0$ , тогда

$$1 - \tau \alpha > 1 - \tau_0 \alpha = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta} > 0$$

$$f(\tau, \alpha) = |1 - \tau \alpha| > \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta)) \geq f(\tau, \alpha) > \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

б) пусть  $\tau \geq \tau_0$ , тогда

$$1 - \tau \beta < 1 - \tau_0 \beta = \frac{\alpha - \beta}{\beta + \alpha} < 0$$

$$f(\tau, \beta) = |1 - \tau \beta| > \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\max(f(\tau, \alpha), f(\tau, \beta)) \geq f(\tau, \beta) > \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}$$

Мы показали, что действительно значение  $\tau_0 = \frac{2}{\alpha+\beta}$  является таким, что

$$\min \|S\|_2 = \max(f(\tau_0, \alpha), f(\tau_0, \beta)) = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} < 1$$

Последнее неравенство гарантирует сходимость метода простой итерации с оптимальным значением итерационного параметра.

$$R = -\ln \|S\|_2 = -\ln \frac{(\beta - \alpha)}{\beta + \alpha} = \ln \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}$$



Преобразуем последнее выражение: т.к.  $A = A^* > 0$ , то

$$\begin{aligned}\mu_2(A) &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \max_i \lambda_i(A) \cdot \max_i \lambda_i(A^{-1}) = \max_i \lambda_i(A) \cdot \max_i \frac{1}{\lambda_i(A)} = \\ &= \frac{\max_i \lambda_i(A)}{\min_i \lambda_i(A)} = \frac{\beta}{\alpha}; \text{ тогда } R = \ln \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} = \ln \frac{\frac{\beta}{\alpha} + 1}{\frac{\beta}{\alpha} - 1} = \ln \frac{\mu_2(A) + 1}{\mu_2(A) - 1}\end{aligned}$$

скорость сходимости итерационного метода тем выше, чем лучше обусловлена матрица системы, т.е. чем меньше  $\mu_2(A)$ .

#### Итерационные методы решения частичной проблемы собственных значения.

Пусть  $A$  - вещественная матрица, все собственные значения которой вещественны и различны по модулю. Занумеруем их в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_1(A)| > |\lambda_2(A)| > \dots > |\lambda_n(A)|.$$

Из курса линейной алгебры известно, что матрица, все собственные значения которой различны, обладает полной системой собственных векторов:

$$u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}, \text{ что } Au^{(i)} = \lambda_i(A)u^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$$

Выберем произвольный вектор  $x^{(0)}$ , и построим последовательность векторов  $x^{(k)}$  так:  $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots$

Очевидно,  $x^{(k)} = A^k x^{(0)}$ . Представим вектор  $x^{(0)}$  в виде:

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i u^{(i)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}x^{(k)} &= A^k x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^n c_i u^{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i A^k u^{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k(A) u^{(i)} = \\ &= \lambda_1^k(A) \underbrace{\left[ c_1 u^{(1)} + \sum_{i=2}^n c_i \left( \frac{\lambda_i(A)}{\lambda_1(A)} \right)^k \right]}_{v^{(k)}} = \lambda_1^k(A) \cdot v^{(k)}\end{aligned}$$

В силу неравенств  $\left| \frac{\lambda_i(A)}{\lambda_1(A)} \right| < 1, i = 1, 2, \dots, n$

вектор  $v^{(k)}$  при  $k \rightarrow \infty$  стремится к вектору  $c_1 u^{(1)}$

Пусть  $c_1 \neq 0$ . Тогда вектор  $c_1 u^{(1)}$ , отличаясь от  $u^{(1)}$  только константой  $c_1$ , будет собственным вектором, отвечающим наибольшему по модулю собственному значению  $\lambda_1$ .

Вектор  $x^{(k)}$  отличается от  $v^{(k)}$  лишь множителем  $\lambda_1^k(A)$ , тогда  $x^{(k)} \rightarrow$  к собственному вектору при  $k \rightarrow \infty$ .

В этом, собственно, и заключается идея метода. Но при реализации алгоритма имеется одна трудность. Если  $|\lambda_1(A)| > 1$ , то при  $k \rightarrow \infty \lambda_k(A) \rightarrow \infty$  и вследствие этого при некотором  $k$  вектор  $x^{(k)}$  может стать настолько большим, что это приведет к переполнению разрядной сетки (ячейки) прежде, чем будет достигнута требуемая точность.

Если же  $|\lambda_1(A)| < 1$ , то при  $k \rightarrow \infty \lambda_k(A) \rightarrow 0$  и при вычислении некоторых компонент  $x^{(k)}$  может произойти исчезновение порядка, что может существенно ограничить точность вычисления собственного вектора. Во избежание таких неприятностей вектор  $x^{(k)}$  необходимо нормировать. Например, сделать  $\|x^{(k)}\|_\infty = 1$ , разделив все компоненты этого вектора на максимальную по модулю компоненту.

Обозначим через

$$\alpha_k = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|$$

Тогда  $x^{(k)} = A \frac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}, k = 1, 2, \dots$

Поделив каждый вектор  $x^{(k)}$  на  $\alpha_k$  мы не нарушаем сходимости последовательности  $x^{(k)}$  к собственному вектору, соответствующему наибольшему по модулю собственному значению. Более того, т.к.

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k)}}{\alpha_k} \right| = 1,$$

то вектор  $\left| \frac{x^{(k)}}{\alpha_k} \right| \xrightarrow{k \rightarrow \infty}$  к собственному вектору имеющему наибольшую по модулю компоненту, равную 1. Таким собственным вектором, очевидно, является собственным вектором

$$\frac{u^{(1)}}{\alpha}, \text{ где } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i^{(1)}|$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{(k)}}{\alpha_k} \right| &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{u^{(1)}}{\alpha}, \text{ и } \frac{x_i^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{u^{(1)}}{\alpha}, \\ \text{но } A \frac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} A \frac{u^{(1)}}{\alpha} = \frac{\lambda_k(A) u^{(1)}}{\alpha}, \text{ но т.к. } \frac{Ax^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}} = x^{(k)} \\ \text{тогда } x^{(k)} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_1(A) \frac{u^{(1)}}{\alpha} \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что  $\alpha_k$  - являясь наибольшей по модулю компонентой вектора  $x^{(k)}$  стремится к наибольшей по модулю компоненте вектора  $\lambda_1(A) \frac{u^{(1)}}{\alpha}$ , которая равна  $\lambda_1(A)$ , значит  $\boxed{\alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_1(A)}$

Этот метод позволяет найти как собственное значение, так и собственный вектор, отвечающий этому максимальному по модулю собственному значению.

### Метод обратных итераций.

В этом методе приближения  $x$  к собственному вектору строятся следующим образом:

$$x^{(k)} = A^{-1} \frac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}, k = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$Ax^{(k)} = \frac{x^{(k-1)}}{\alpha_{k-1}}$$

Поскольку собственные значения обратной матрицы обратны собственным значениям исходной матрицы, а собственные вектора совпадают с собственными векторами исходной матрицы, то последовательность  $x^{(k)}$  построенная по МОИ, будет сходиться к собственному вектору исходной матрицы  $A$ , отвечающему ее наименьшему по модулю собственному значению, при этом:

$$\alpha_k \rightarrow \frac{1}{\lambda_n(A)}, \Rightarrow \frac{1}{\alpha_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \lambda_k(A).$$

Следовательно, метод обратных итераций позволяет вычислить наименьшее по модулю собственное значение исходной матрицы и отвечающий ему собственный вектор.