1. Подчиненные матричные нормы. Свойства. Формула для вычисления второй нормы матрицы.

Подчинённая матричная норма

Норма, которая вычисляется по формуле $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Свойства

1. $\|E\| = 1$

   $\|E\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ex\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$
2. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

   $\|AB\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$

Вторая матричная норма

$||A||_2 = \sqrt{\max\limits_i \lambda_i(A^T A)}$

2. Подчиненные матричные нормы. Свойства. Формула для вычисления третьей нормы матрицы.

Подчинённая матричная норма

Норма, которая удовлетворяет условию $||A|| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{||Ax||}{||x||}$

То есть, если матричная норма подчинена введённой до неё векторной норме

Любая подчинённая матричная норма согласованна. Обратное — не факт.

Подчинение - более сильная форма согласования

Свойства

1. $\|E\| = 1$

   $\|E\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ex\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$
2. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

   $\|AB\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \|B\|$

Третья матричная норма

$||A||_\infty = \max_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3. Согласованные матричные нормы.

Матричная норма согласованная с векторной

Норма для которой выполняется неравенство $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \quad \forall x$

4. Число обусловленности матрицы. Определение. Вычислительная формула. Пример плохо обусловленной системы.

Число обусловленности матрицы A.

Также записывается как $\operatorname{cond}(A)$

Число, показывающее, насколько может измениться значение функции при небольшом изменении аргумента.
$\mu(A) = \sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \left(\frac{||Ax||}{||x||} / \frac{||Ay||}{||y||} \right)$
$\mu(A) \geq 1$

Вычислительная формула
$\mu(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

Вывод
$\mu(A) = \sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ y\neq 0}} \left(\frac{||Ax||}{||x||} / \frac{||Ay||}{||y||} \right) = (\sup\limits_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} / \inf\limits_{y\neq 0} \frac{||Ay||}{||y||}) =$
$z = Ay \implies y = A^{-1}z$
$= \frac{||A||}{\inf\limits_{z\neq 0} \frac{||z||}{||A^{-1}z||}} = \frac{||A||}{\frac{1}{\sup\limits_{z\neq 0} \frac{||A^{-1}z||}{||z||}}} = \frac{||A||}{\frac{1}{||A^{-1}||}} = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

Плохо обусловленная матрица
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix}$
$||A|| = 1 + 1.01$
$||A^{-1}|| = \left\| \begin{pmatrix} 101 & -100 \\ -100 & 100 \end{pmatrix} \right\| = 201$
$||A|| \cdot ||A^{-1}|| = 404.01$
Как видим матрица плохо обусловлена

5. Метод Гаусса.

Описание метода

Пусть имеется некоторая система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m_1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований приведём её к ступенчатому виду (aka прямой ход метода Гаусса)

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} & +\alpha_{1j_2}x_{j_2} & +\ldots & +\alpha_{1j_r}x_{j_r} & +\ldots & +\alpha_{1j_n}x_{j_n} & = \beta_1 \\ 0 & +\alpha_{2j_2}x_{j_2} & +\ldots & +\alpha_{2j_r}x_{j_r} & +\ldots & +\alpha_{1j_n}x_{j_n} & = \beta_2 \\ \ldots \\ 0 & +0 & +\ldots & +\alpha_{rj_r}x_{j_r} & +\ldots & +\alpha_{rj_n}x_{j_n} & = \beta_r \\ \ldots \\ 0 & +0 & +\ldots & +0 & +\ldots & +0 & = \beta_{r+1} \\ \ldots \\ 0 & +0 & +\ldots & +0 & +\ldots & +0 & = \beta_m \end{cases}$$

Пусть $\forall i \geq r+1 \quad \beta_i = 0$
Перенесём свободные переменные за знак равенств и поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент при самом левом x

$$\begin{cases} x_{j_1} & +\hat{\alpha}_{1j_2}x_{j_2} & +\dots & +\hat{\alpha}_{1j_r}x_{j_r} & = & \hat{\beta}_1 & -\hat{\alpha}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} & -\dots & -\hat{\alpha}_{1j_n}x_{j_n} \\ 0 & +x_{j_2} & +\dots & +\hat{\alpha}_{2j_r}x_{j_r} & = & \hat{\beta}_2 & -\hat{\alpha}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} & -\dots & -\hat{\alpha}_{2j_n}x_{j_n} \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & +0 & +0 & +x_{j_r} & = & \hat{\beta}_r & -\hat{\alpha}_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} & -\dots & -\hat{\alpha}_{rj_n}x_{j_n} \end{cases}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_i}}$$

$$\hat{\alpha}_{ij_k} = \frac{\alpha_{ij_k}}{\alpha_{ij_i}}$$

$$i = 1, \dots, r$$

$$k = i+1, \dots, n$$

Замечание

После прямого хода метода Гаусса можно легко вычислить определитель $|A| = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$

6. LU – разложение. Необходимое и достаточное условие существования.

LU - разложение

Декомпозиция матрицы системы A на две треугольные матрицы L, U так, что бы $A = L \cdot U$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Дальше по правилам умножения матриц выводятся общие формулы элементов

$l_{ii} = 1$

Если $i \geq j$:

$u_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i} l_{ik} \cdot u_{kj}$

Если $i < j$:

$l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot u_{kj}}{u_{jj}}$

Вывод формул (скорее всего, потребуется нижний вариант)

$\sum\limits_{j=1}^{n} l_{ij}u_{jk} = a_{ik} \quad i,k = \overline{1,\dots,n}$

$i < j \implies l_{ij} = 0 \quad j > k \implies u_{jk} = 0$

Всего у нас n^2 уравнений с $\underbrace{\frac{1}{2}n(n+1)}_{l_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}n(n-1)}_{u_{jk}} = n^2$ неизвестными

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} l_{ij}u_{jk} = a_{ik} \quad k \leq i \\ \sum\limits_{j=1}^{i} l_{ij}u_{jk} = a_{ik} \quad k > i \end{cases}$$

Выделим случаи с $k = 1$ и $i = 1$. Также учтём, что $u_{kk} = 1$

$$\begin{cases} \begin{cases} l_{i1} = a_{i1} & i = 1, \dots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} + l_{ik} = a_{ik} & 1 < k \le i, \quad i, k = 2, \dots, n \end{cases} \\ \begin{cases} l_{11} = u_{1k} = a_{1k} & k = 2, \dots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} + l_{ik} = a_{ik} & k > i > 1, \quad i, k = 2, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} l_{i1} = a_{i1} & i = 1, \dots, n \\ u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}} & k = 2, \dots, n \end{cases} \\ \begin{cases} l_{ik} = a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} & 1 < k \le i, \quad i, k = 2, \dots, n \\ u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk} \right) & k > i > 1, \quad i, k = 2, \dots, n \end{cases} \end{cases}$$

Вывод формулы через Гаусса

Нужен, чтобы показать существование таких матриц (и зависимость метода от Гаусса, лол)

Возьмём матрицы D_i, такие, что d_{ij} являются множителями Гаусса ($d_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$) и т. д.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -d_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -d_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad D_{n-1}$$

$$A_i = D_i A_{i-1}$$

$$U = A_{n-1} = D_{n-1} A_{n-2} = \dots = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 A = DA$$

$$D^{-1} = L$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ d_{21}d_{32} + d_{31} & d_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

У нас получится нижнедиагональная матрица. Просто переобозначьте суммы коэффициентов на l_{ij} и вс, лол

Необходимое и достаточное условие существования

Все угловые миноры матрицы A невырожденные

Замечание

После LU разложения можно легко вычислить определитель $|A| = \prod\limits_{i=1}^{n} u_{ii}$

Применение

Предположим, у нас есть система $Ax = b$

Тогда, $Ly = b, \quad Ux = y$

Из этих уравнений можно проще высчитать наши x.

7. Метод квадратного корня (a.k.a Метод Холецкого).

Метод квадратного корня

Частный случай LU разложения для симметричных матриц $(A = A^T)$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$A = LL^T$ или $A = U^T U$

Разберём на примере $A = LL^T$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$

$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, \quad i \in [2, n]$

$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ji} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp} \right), \quad i \in [2, n-1],\ j \in [i+1, n]$

Вывод формул

$A = LU \quad U = DV$

$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$d_i = u_{ii} \quad v_{ij} = \dfrac{u_{ij}}{u_{ii}}$

$A = LDV$

$A^T = (LDV)^T = V^T D^T L^T = V^T D L^T = A$

$L = V^T \quad V = L^T$

$A = V^T D V$

$D^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$

$A = V^T D^{1/2} D^{1/2} V$

$A = W^T W \quad W = D^{1\backslash 2} V$

$a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} w_{ik}^T w_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{i} w_{ki} w_{kj} = a_{ij}$

$a_{11} = w_{11} w_{11}$

$w_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$a_{1j} = w_{11} w_{1j} \qquad w_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{w_{11}}$

$w_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} w_{ki}^2}$

$w_{ij} = \dfrac{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} w_{ki} w_{kj}}{w_{ii}} \qquad j = i+1, \dots, n$

8. Матрица отражения, ее свойства.

Определение

Пусть $p \in \mathbb{R}^n -$ вектор нормали некоторой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, проходящей через θ

Тогда $y = x - 2\dfrac{(p,x)}{(p,p)}p -$ задает вектор y, отраженный к x относительно гиперплоскости $(p,x) = 0$

Проведем ряд преобразований:

$y = x - 2\dfrac{(p,x)}{(p,p)}p = x - \dfrac{2}{(p,p)} \cdot (p,x) \cdot p = x - \dfrac{2}{(p,p)} \cdot p \cdot p^T \cdot x = (E - \dfrac{2}{(p,p)} \cdot p \cdot p^T) \cdot x$

Обозначим $P = E - \dfrac{2}{(p,p)} \cdot p \cdot p^T$

Тогда $P -$ матрица отражения

Свойства

1. $P^2 = E$
2. $P^T = P$
3. $P^T \cdot P = P^2 = E \implies P-$ ортогональная матрица
4. При замене нормали $p = \beta \cdot p$ матрица отражения не изменится
5. $p = x - y$
6. $p_i = 0 \implies y_i = x_i \quad i = \overline{1, k}$
7. $\begin{cases} p_1 = \ldots = p_k = 0 \\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0 \end{cases} \implies y_{k+1} = \ldots = y_n = 0$

9. QR – разложение. Условие существования QR – разложения.

QR разложение

$A = QR$

$A_1 = P_1 A$

P_1 - матрица отражения, такая, чтобы 1-й столбец матрицы имел вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1^{(1)} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_1$$

$$P_1 a_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p^{(1)} = a_1 - a_1^{(1)}$$

$p_1^{(1)} = a_{11} - a_{11}^{(1)}$

$p_2^{(1)} = a_{21}$

$\ldots$

$p_n^{(1)} = a_{n1}$

$||a_1^{(1)}||_2^2 = ||a_1||_2^2$

$(a_{11}^{(1)})^2 = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{l1}^2$

$a_{11}^{(1)} = \pm\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} a_{l1}^2}$

$p_1^{(1)} = a_{11} \pm \sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} a_{l1}^2}$

$$\sigma_1 = \begin{cases} 1, & a_{11} \geq 0 \\ -1, & a_{11} < 0 \end{cases}$$

$$p_1^{(1)} = a_{11} + \sigma_1 \cdot \sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} a_{l1}^2}$$

$$a_j^{(1)} = a_j - 2\frac{(p^{(1)}, a_j)}{(p^{(1)}, p^{(1)})} p^{(1)} \quad j = 2, \ldots, n$$

Рассмотрим k-ый шаг

Из-за отображения, у нас меняются все элементы

$A_k = P_k A_{k-1}$

$$a_k^{(k)} = P_k a_{k-1}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{1k}^{(1)} \\ a_{2k}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{(k-1)} \\ a_{kk}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$p^{(k)} = a_k^{(k-1)} - a_k^{(k)}$
$p_l^{(k)} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, k-1$
$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} - a_{kk}^{(k)}$
$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, \quad l = k+1, \dots, n$
$||a_k^{(k)}||_2^2 = ||a_k^{(k-1)}||_2^2$
$a_{kk}^{(k)} = \pm\sqrt{\sum\limits_{l=k}^{n}\left(a_{lk}^{(k-1)}\right)^2}$
$\sigma_k = \begin{cases} 1, & a_{kk}^{(k-1)} \geq 0 \\ -1, & a_{kk}^{(k-1)} < 0 \end{cases}$
$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k\sqrt{\sum\limits_{l=k}^{n}\left(a_{lk}^{(k-1)}\right)^2}$
$a_j^{(k)} = a_j^{(k-1)} - 2\frac{\left(p^{(k)}, a_j^{(k-1)}\right)}{\left(p^{(k)}, p^{(k)}\right)}p^k$
$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2\frac{p_i^{(k)}}{\sum\limits_{l=k}^{n}\left(p_l^{(k)}\right)^2}\sum\limits_{l=k}^{n} p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)} \quad j = k+1, \dots, n$
$p_1^{(k)} = p_2^{(k)} = \dots = p_{k-1}^{(k)} = 0$ (Коэффициенты до k будут нулевыми)
По прошествии $n-1$ шага получим матрицу R
$R = A_{n-1} = P_{n-1}A_{n-2} = P_{n-1}P_{n-2}A_{n-3} = \dots = P_{n-1}P_{n-2}\dots P_2P_1A$
$Q = P_1P_2\dots P_{n-1}$
Матрица Q будет ортогональной (тк является результатом произведения ортогональных матриц)
$R = Q^TA$
$A = QR$

Рассмотрим случай деления на 0
$\sum\limits_{l=k}^{n}\left(p_l^{(k)}\right)^2 = 0 \iff p_l^{(k)} = 0, \quad l = k, \dots, n$
Подберём вектор нормали, который будет ненулевым, но оставит вектор на месте.
$$p^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
Решение уравнений с помощью QR
$Ax = f$
$QRx = f$
$Rx = Q^Tf$
$Q^Tf = g$
$f^{(1)} = P_1f$
$f^{(2)} = P_2f^{(1)}$

$g = f^{(n-1)} = P_{n-1} f^{(n-2)}$
$f^{(1)} = f - 2\dfrac{\left(p^{(1)}, f\right)}{\left(p^{(1)}, p^{(1)}\right)} p^{(1)}$
$f^{(k)} = f^{(k-1)} - 2\dfrac{p^{(k)}}{\sum\limits_{l=k}^{n}\left(p_l^{(k)}\right)^2} \sum\limits_{l=k}^{n} p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}, \quad i = k, k+1, \ldots, n$
Условие существования
Разложение есть всегда(если матрица невырожденая)

10. Метод окаймления обращения матриц.

Метод окаймления
Нужен для нахождения обратной матрицы
A_j- матрица порядка j
Метод вычисления матрицы A_i^{-1}, при известной A_{i-1}^{-1}

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i-1} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_i^{-1} = \begin{pmatrix} B_{i-1} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{12}, b_{12}-$ вектор столбец, $a_{21}, b_{21}-$ вектор строка, $a_{22}, b_{22}-$ числа
$b_{22} = \frac{1}{k}$
По определению обратной матрицы:
$A_i \cdot A_i^{-1} = \begin{pmatrix} E & \theta \\ \theta^T & 1 \end{pmatrix}$
По правилам перемножения матриц получаем систему:

$$\begin{cases} A_{i-1} \cdot B_{i-1} + a_{12} \cdot b_{21} = E \\ A_{i-1} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = \theta \\ a_{21} \cdot B_{i-1} + a_{22} \cdot b_{21} = \theta^T \\ a_{22} \cdot b_{22} + a_{21} \cdot b_{12} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{i-1} = A_{i-1}^{-1} - A_{i-1}^{-1} a_{12} b_{21} \\ b_{12} = -\frac{1}{k} A_{n-1}^{-1} a_{12} \\ \frac{1}{b_{22}} = k = a_{22} - a_{21} \cdot A_{i-1}^{-1} \cdot a_{12} \\ b_{21} = -\frac{1}{k} a_{12} A_{n-1}^{-1} \end{cases}$$

Таким образом,
$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \frac{1}{k} A_{n-1} A^{-1} a_{12} a_{21} A_{n-1}^{-1} & -\frac{1}{k} A_{n-1}^{-1} a_{12} \\ -\frac{1}{k} a_{21} A_{n-1}^{-1} & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$
Где $k = a_{22} - a_{21} \cdot A_{i-1}^{-1} \cdot a_{12}$