

# Основные понятия теории разностных схем. Примеры построения разностных схем для начально-краевых задач.

Большое количество задач физики и техники приводит к краевым либо начально-краевым задачам для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных. При этом число задач, имеющих аналитическое решение, ограничено. Это задачи в канонических областях, таких как, например, прямоугольник, круг или шар, и как правило, для уравнений с постоянными коэффициентами. На практике часто приходится решать задачи в весьма сложных областях и для уравнений с переменными коэффициентами, зачастую нелинейных. Это приводит к необходимости искать приближенные решения, пользуясь для этого различными численными методами. Достаточно эффективным методом численного решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток, позволяющий сводить приближенное решение уравнений в частных производных к решению систем алгебраических уравнений. Системы алгебраических уравнений при этом формулируются для приближенных значений решения в некотором наборе точек в расчетной области.

## 1 Сеточные функции и разностные операторы

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \\ lu(x) = \mu(x), & x \in \Gamma; \quad \bar{G} = G + \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $L$  — дифференциальный оператор,  $l$  — оператор (также в общем случае дифференциальный) всех дополнительных условий (граничных и начальных). Пусть решение задачи ищется в некотором функциональном пространстве  $H_0$ . Если задачу (1.1) не удастся решить аналитически, то приходится искать ее приближенное решение. Одним из способов

численного решения начально-краевых задач является метод конечных разностей. В методе конечных разностей численное решение строится не для всех значений аргумента  $x \in \bar{G}$ , а на некотором множестве точек, называемом *сеткой*. Сами точки, в которых ищется решение, называются *узлами сетки*.

Сетку в области  $\bar{G}$  будем характеризовать некоторым параметром  $h$  и обозначать  $\bar{\omega}_h$ . Множество всех узлов сетки, лежащих строго внутри  $G$ , будем обозначать  $\omega_h$  и называть внутренними узлами, а множество узлов, попадающих на границу  $\Gamma$ , будем обозначать  $\gamma_h$  и называть граничными узлами.

Расстояние между двумя соседними узлами сетки (по какому-либо направлению в многомерном случае) называется шагом сетки. Если шаг сетки не зависит от номера узла, ее называют равномерной. В простейшем случае одномерной равномерной сетки параметр  $h$  представляет собой шаг сетки. (см. рис.1). Равномерная сетка на отрезке  $x \in [0, 1]$  с шагом

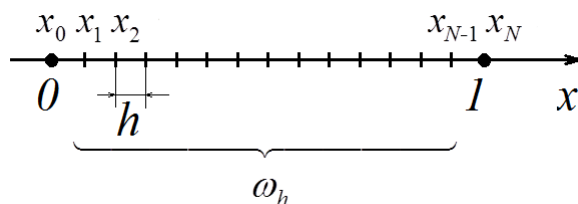


Рис. 1: Равномерная сетка на отрезке

$h$  имеет вид:

$$\bar{\omega}_h = \{x_k = h \cdot k, k = 0, 1, \dots, N, h \cdot N = 1\}.$$

В более общем многомерном случае параметр  $h = \{h_1, \dots, h_n\}$  — вектор, координаты которого представляют собой расстояния между узлами (шаги сетки) по какому-либо координатному направлению, причем  $|h| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$ .

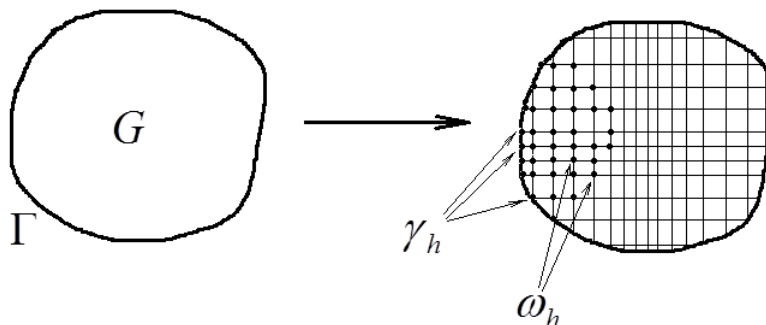


Рис. 2: Пример неравномерной двумерной сетки

Функции, заданные на сетке, называют *сеточными* функциями:

$$y_h = y_h(x_k), \quad x_k \in \bar{\omega}_h.$$

Если мы перейдем от исходной задачи (1.1) для функции  $u(x) \in H_0$  к задаче для сеточной функции  $y_h$ , принадлежащей некоторому функциональному пространству  $H_h$ , то необходимо иметь возможность оценивать близость функций  $u(x)$  и  $y_h$ . Для этого можно использовать два подхода:

- 1) доопределение сеточной функции в точках, где она не задана, то есть  $y_h \Rightarrow \tilde{y}(x, h) \in H_0$ ;
- 2) проектирование функции  $u(x) \in H_0$  на сетку:  $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$ , где  $\mathcal{P}$  — оператор, действующий из  $H_0$  в  $H_h$ .

Как правило, на практике используется второй подход. В простейшем случае можно взять  $u_h = \mathcal{P}_h u = u(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ . Иногда для того, чтобы получить значения  $u_h$  в узлах сетки, используется усреднение по окрестности узла, например:

$$u_h(x) = \mathcal{P}_h u = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x + s \cdot h) ds.$$

Близость функций  $u_h$  и  $y_h$  будем оценивать по норме  $\|\cdot\|_h$  пространства  $H_h$ , называемой сеточной нормой. При этом норму в пространстве  $H_h$  естественно вводить таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\cdot\|_h = \|\cdot\|_0, \quad (1.2)$$

где  $\|\cdot\|_0$  — норма в пространстве  $H_0$ , в котором ищется решение исходной задачи (1.1). Условие (1.2) называется *условием согласования норм* в  $H_h$  и  $H_0$ .

*Примеры сеточных норм.*

- 1) Сеточный аналог равномерной нормы

$$\|y\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |y(x)|,$$

где  $\bar{G}$  — замкнутая ограниченная область, имеет вид:

$$\|y_h\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y_h(x)|,$$

где  $\bar{\omega}_h$  — сетка, введенная в области  $\bar{G}$ .

- 2) Сеточные аналоги нормы

$$\|y\|_{L_2} = \left( \int_0^1 y^2(x) dx \right)^{1/2}$$

в пространстве  $L_2$  на отрезке  $[0, 1]$  в случае равномерной сетки с шагом  $h$ , содержащей  $N + 1$  узлов  $x_k = h \cdot k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , определяются с помощью интегральных сумм и имеют вид:

$$\|y_h\| = \left( \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \right)^{1/2}, \quad \|y_h\| = \left( \sum_{k=1}^N y_k^2 h \right)^{1/2}, \quad \|y_h\| = \left( \sum_{k=0}^{N-1} y_k^2 h \right)^{1/2}.$$

Построим *разностную аппроксимацию* операторов  $L$  и  $l$  в задаче (1.1), заменяя все производные в выражениях  $Lu$  и  $lu$  разностными отношениями. В результате получим выражения  $L_h u_h$  и  $l_h u_h$ , представляющие собой линейные комбинации значений сеточной функции  $u_h$  на некотором множестве узлов сетки.

**Определение 1.1** *Множество узлов сетки  $\overline{\omega_h}$ , на котором строится разностный оператор, называется его шаблоном.*

Будем обозначать шаблон оператора в точке  $x \in \overline{\omega_h}$  как  $\Pi(x, h)$ . Линейный разностный оператор  $L_h$  можно записать следующим образом:

$$L_h u_h(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x, h)} A_h(x, \xi) u_h(\xi), \quad (1.3)$$

где  $u_h(\xi)$  — значение функции  $u_h$  в узле  $\xi$  шаблона, выражения  $A_h(x, \xi)$  — коэффициенты в линейной комбинации.

**Определение 1.2** *Величина  $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$  называется погрешностью разностной аппроксимации  $Lu$  в точке  $x$ .*

Пусть  $V$  — класс достаточно гладких функций, заданных в окрестности точки  $x$ , содержащей при  $|h| < h_0$  шаблон  $\Pi(x, h)$  разностного оператора  $L_h$ , имеющих столько непрерывных производных, сколько требуется для построения соответствующей погрешности аппроксимации. Говорят, что разностный оператор  $L_h$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$  с порядком  $m > 0$  в точке  $x$ , если для погрешности аппроксимации имеет место равенство:

$$\psi(x) = O(|h|^m)$$

при любой функции  $u(x) \in V$ .

**Замечание 1.3** *Напомним, что подразумевается под символом « $O$  большое». Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ , а  $B$  — семейство всех интервалов пространства  $\mathbb{R}$ , которые либо все содержат точку  $x_0$  как внутреннюю, либо для всех этих интервалов точка  $x_0$  является только левым или только правым концом. Пусть  $F$  — семейство числовых функций  $f$ , таких что для любой из них существует интервал  $X \subset B$ , такой что  $f$  определена на  $X$  за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ . Если для функций  $f, g \in F$ , таких что  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X, Y \subset B$ , существует интервал  $Z \subset X \cap Y$  и такое число  $A > 0$ , что для  $\forall x \in Z$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ , выполняется неравенство:*

$$|g(x)| \leq A|f(x)|,$$

то  $f$  и  $g$  называют функциями одного порядка при  $x \rightarrow x_0$ . Для функций одного порядка при  $x \rightarrow x_0$  используют обозначение  $g = O(f)$ . [И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач «Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл» Том 1, 2001 г.]

Итак, перейдем от поиска функции  $u \in H_0$ , являющейся решением задачи (1.1), к поиску сеточной функции  $y_h$ , удовлетворяющей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} L_h y_h = \varphi_h(x), & x \in \omega_h, \\ l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.4)$$

где сеточные функции  $\varphi_h$  и  $\chi_h$  аппроксимируют на сетке функции  $f(x)$  и  $\mu(x)$  в правых частях уравнения и дополнительных условий задачи (1.1) соответственно.

**Определение 1.4** Семейство уравнений (1.4) относительно значений функции  $y_h$  в узлах сетки, зависящее от параметра  $h$ , называется разностной схемой.

Пусть решение разностной схемы (1.4) найдено. Возникает вопрос: с какой точностью в зависимости от  $h$  сеточная функция  $y_h$  приближает решение  $u(x)$  исходной задачи (1.1)? Строго дать ответ на этот вопрос можно в случае, когда система (1.4) линейная. Для исследования нелинейных схем сначала производят их линеаризацию. Поэтому далее будем рассматривать случай, когда  $L_h$  и  $l_h$  — линейные операторы. Введем погрешность схемы  $z_h = y_h - u_h$ . Тогда

$$\begin{cases} L_h z_h = \varphi_h - L_h u_h = (\varphi_h - f) - (L_h u_h - (Lu)_h) = \psi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h z_h = \chi_h - l_h u_h = (\chi_h - \mu) - (l_h u_h - (lu)_h) = \nu_h, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

Погрешность  $\psi_h$  аппроксимации уравнения складывается из погрешности аппроксимации  $Lu$  и правой части  $f$ , а погрешность  $\nu_h$  аппроксимации дополнительных условий складывается из погрешности аппроксимации  $lu$  и функции  $\mu$ .

**Определение 1.5** Говорят, что разностная схема (1.4)

1а) аппроксимирует задачу (1.1), если  $\|\psi_h\|_{(h2)} \rightarrow 0$  и  $\|\nu_h\|_{(h3)} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ;

1б) имеет  $m$ -й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(h2)} = O(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(h3)} = O(|h|^m);$$

2а) сходится, если  $\|y_h - u_h\|_{(h1)} \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ ;

2б) имеет  $m$ -й порядок точности, если  $\|y_h - u_h\|_{(h1)} = O(|h|^m)$ .

Нормы  $\|\cdot\|_{(h1)}$ ,  $\|\cdot\|_{(h2)}$  и  $\|\cdot\|_{(h3)}$  вводятся в пространствах сеточных функций, заданных на  $\overline{\omega_h}$ ,  $\omega_h$  и  $\gamma_h$  соответственно.

**Определение 1.6** Разностная задача (1.4) называется поставленной корректно, если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$ :

- 1) она однозначно разрешима для любых входных данных  $\varphi_h$  и  $\chi_h$ ;
- 2) решения  $y_h$  непрерывно зависят от входных данных  $\varphi_h$  и  $\chi_h$  равномерно по  $h$ .

Свойство равномерной по  $h$  непрерывной зависимости решения  $y_h$  от  $\varphi_h$  и  $\chi_h$  называется *устойчивостью схемы* (1.4). Это означает, что при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$  найдутся такие числа  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$ , не зависящие ни от  $h$ , ни от входных данных, что

$$\|y_h\|_{(h1)} \leq M_1 \|\varphi_h\|_{(h2)} + M_2 \|\chi_h\|_{(h3)}. \quad (1.5)$$

Если операторы  $L_h$  и  $l_h$  линейны, то из устойчивости схемы следует, что

$$\|z_h\|_{(h1)} = \|y_h - u_h\|_{(h1)} \leq M_1 \|\psi_h\|_{(h2)} + M_2 \|\nu_h\|_{(h3)}.$$

Таким образом, если *линейная* схема (1.4) устойчива и аппроксимирует исходную задачу (1.1), то она сходится. При этом порядок точности схемы определяется ее порядком аппроксимации.

## 2 Аппроксимация дифференциальных операторов и уравнений

### 2.1 Разностная аппроксимация первой производной

В качестве первого примера рассмотрим дифференциальный оператор  $Lu = \frac{du}{dx}$  и построим его разностную аппроксимацию на равномерной сетке  $\overline{\omega_h}$  с шагом  $h$ . В произвольной внутренней точке  $x \in \omega_h$  разностные операторы, аппроксимирующие  $L$ , можно построить следующими способами:

$$L_h^+ u = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}; \quad L_h^- u = \frac{u(x) - u(x-h)}{h};$$

$$L_h^{0.5} u = 0.5(L_h^+ u + L_h^- u) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

Оператор  $L_h^+$  называют правой односторонней производной,  $L_h^-$  — левой односторонней производной, и  $L_h^{0.5}$  — центральной производной. Они используются для построения разностных аппроксимаций дифференциальных операторов более высокого порядка. В дальнейшем изложении будем использовать для этих фундаментальных разностных операторов следующие более краткие обозначения:

$$u_x = L_h^+ u, \quad u_{\bar{x}} = L_h^- u, \quad u_{\dot{x}} = L_h^{0.5} u.$$

Оценим погрешность аппроксимации оператора  $Lu = \frac{du}{dx}$  приведенными выше разностными операторами. Пусть  $u(x)$  — достаточно гладкая функция. Тогда при малом  $h$  имеют место равенства:

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3),$$

из которых получаем

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_x - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_{\bar{x}} - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\dot{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_{\dot{x}} - u'(x) = O(h^2).$$

Таким образом, односторонние разностные производные  $u_x$  и  $u_{\bar{x}}$  аппроксимируют первую производную в точке  $x$  с первым порядком, а симметричная разностная производная  $u_{\dot{x}}$  — со вторым.

Иногда бывает удобно использовать несимметричную первую разностную производную, аппроксимирующую  $u'(x)$  со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} L_h^{\sigma,+}u &= \sigma \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + (1-\sigma) \frac{u(x+2h) - u(x+h)}{h} = \\ &= \frac{\sigma}{h} \left( u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) - u(x) \right) + \\ &+ \frac{1-\sigma}{h} \left( u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) \right) = \\ &= u'(x) + \frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x) + O(h^2). \end{aligned}$$

Выбирая  $\sigma = 3/2$ , получаем

$$L_h^{3/2,+}u(x) = \frac{4u(x+h) - 3u(x) - u(x+2h)}{2h}, \quad \psi(x) = L_h^{3/2,+}u(x) - u'(x) = O(h^2).$$

Аналогично можно получить

$$L_h^{3/2,-}u(x) = \frac{3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{2h}, \quad \psi(x) = L_h^{3/2,-}u(x) - u'(x) = O(h^2).$$

## 2.2 Разностная аппроксимация второй производной

Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию второй производной  $Lu = \frac{d^2u}{dx^2}$  на равномерной сетке с шагом  $h$ . Для произвольной достаточно гладкой в окрестности точки  $x$  функции  $u(x)$  при достаточно малом  $h$  справедливы равенства:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + 0.5h^2u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + 0.5h^2u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4),$$

Сложив равенства и разделив результат на  $h^2$ , получим:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2).$$

Следовательно, разностный оператор  $L_h u = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$  аппроксимирует  $u''$  в точке  $x$  со вторым порядком.

Оператор  $L_h u$  можно переписать следующим образом:

$$L_h u = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = \frac{u_x(x) - u_{\bar{x}}(x)}{h} = u_{\bar{x}x}.$$

## 2.3 Разностная аппроксимация краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

**Пример 2.1.** Постройте разностную схему для краевой задачи

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = g_0, & u(1) = g_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $g_0$  и  $g_1$  — некоторые числа, и найдите ее порядок аппроксимации.

**РЕШЕНИЕ.** Введем на отрезке  $[0, 1]$  равномерную сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih; \ i = 0, 1, \dots, N; \ hN = 1\}.$$

Введем сеточную функцию  $\varphi$ , которая определяется значениями функции  $f(x)$  в узлах сетки:  $\varphi(x) = f(x)$ ,  $x \in \omega_h$ . Заменяя оператор второй производной его разностным аналогом, получим следующую разностную схему:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

или же, в явном виде:

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2\varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

где для краткости введены обозначения:  $y_i = y(x_i)$ ,  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ .

Рассмотрим погрешность аппроксимации уравнения:

$$\psi(x) = -\underbrace{(\varphi - f)}_{=0} - \underbrace{(u_{\bar{x}x} - u'')}_{=O(h^2)} = O(h^2), \quad x \in \omega_h.$$



Граничные условия в данном случае аппроксимируются точно. Следовательно, схема имеет второй порядок аппроксимации. ■

Заметим, что для достаточно гладкой функции  $u(x)$  справедливо равенство:

$$u_{\bar{x}x} = u''(x) + \frac{h^2}{12}u^{(IV)}(x) + \frac{h^4}{360}u^{(VI)}(x + \theta h), \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Если правая часть  $f(x)$  уравнения (2.1) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то

$$u''(x) = -f(x) \Rightarrow u^{(IV)}(x) = -f''.$$

Аналогично, если  $f(x)$  — четыре раза непрерывно дифференцируема, то для решения уравнения (2.1) справедливо равенство:

$$u^{(VI)}(x) = -f^{(IV)}(x),$$

и так далее. Следовательно, если  $f^{(k)}(x) = 0$  при  $k \geq 2$ , то есть  $f(x) = ax + b$  — линейная функция, то схема (2.2) точно аппроксимирует исходную задачу (2.1), так как погрешность аппроксимации в этом случае равна нулю. Если же  $f''(x) \neq 0$ , то погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi = u'' - u_{\bar{x}x} = -\frac{h^2}{12}u^{(IV)}(x) + O(h^4) = \frac{h^2}{12}f'' + O(h^4).$$

Пользуясь этим равенством, можно повысить порядок аппроксимации уравнения (2.1). Действительно, рассмотрим оператор:

$$\tilde{L}_h = u_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{12}f''.$$

Погрешность аппроксимации уравнения (2.1) разностным уравнением

$$\tilde{L}_h y_h = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h,$$

в этом случае будет иметь вид:

$$\tilde{\psi} = u'' - \tilde{L}_h u = O(h^4).$$

Следовательно, схема

$$\begin{cases} \tilde{L}_h y = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} = -\tilde{\varphi}(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

где  $\tilde{\varphi}(x_i) = f(x_i) + \frac{h^2}{12}f''(x_i)$ , аппроксимирует исходную задачу (2.1) с четвертым порядком. Число узлов шаблона при этом не увеличивается.

Рассмотрим теперь более общий случай — *краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами*:

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & 0 < x < 1; \\ -k(0)u'(0) + \sigma_0 u(0) = g_0, \\ k(1)u'(1) + \sigma_1 u(1) = g_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $k(x) \geq C > 0$  — непрерывно-дифференцируемая функция,  $q(x) \geq 0$  и  $f(x)$  — непрерывные функции,  $\sigma_0, \sigma_1, g_0$  и  $g_1$  — числа.

Аппроксимируем уравнение (2.3) на равномерной сетке

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; \ i = 0, 1, \dots, N; \ hN = 1\}.$$

Для этого заменим дифференциальный оператор разностным:

$$(k(x)u'(x))' \rightarrow (au_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)$$

и введем сеточные функции  $d_i = q(x_i) + O(h^2)$ ,  $\varphi_i = f(x_i) + O(h^2)$ . Сеточную функцию  $a_i = a(x_i)$ , аппроксимирующую функцию  $k(x)$ , построим таким образом, чтобы разностное уравнение

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

аппроксимировало дифференциальное уравнение в задаче (2.3) со вторым порядком. Для этого воспользуемся равенствами, справедливыми для достаточно гладкой функции  $u(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} &= u'_i + \frac{h}{2}u''_i + \frac{h^2}{6}u'''_i + O(h^3), \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{h} &= u'_i - \frac{h}{2}u''_i + \frac{h^2}{6}u'''_i + O(h^3), \end{aligned}$$

из которых следует, что:

$$(au_{\bar{x}})_x = \frac{a_{i+1} - a_i}{h}u'_i + \frac{a_{i+1} + a_i}{2}u''_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{6}hu'''_i + O(h^2). \quad (2.5)$$

Здесь использованы обозначения:

$$u'_i = u'(x_i), \quad u''_i = u''(x_i), \quad u'''_i = u'''(x_i).$$

Сравнивая равенство (2.5) с равенством:

$$(ku')' = k'u' + ku'',$$

заметим, что если выполняются соотношения:

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k_i + O(h^2); \quad \frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'_i + O(h^2), \quad (2.6)$$

то разностный оператор  $(ay_{\bar{x}})_x$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $(ku')'$  со вторым порядком. Из соотношений (2.6) получаем:

$$a_i = k_i - 0.5hk'_i + O(h^2), \quad a_{i+1} = k_i + 0.5hk'_i + O(h^2). \quad (2.7)$$

Добиться выполнения соотношений (2.7) можно, задавая  $a_i$  различными способами. Рассмотрим несколько вариантов:

1) В качестве  $a_i$  можно взять  $k(x)$  в центральной точке:

$$a_i = k_{i-\frac{1}{2}} = k(x_i - 0.5h).$$

При этом имеет место равенство:

$$a_i = k_i - 0.5hk'_i + \frac{h^2}{8}k''(x_i + \theta h), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Такой способ аппроксимации хорош в линейных задачах, когда функция  $k$  не зависит от искомой функции  $u$ .

2) В качестве  $a_i$  можно взять полусумму значений  $k(x)$  в соседних узлах:

$$a_i = 0.5(k_i + k_{i-1}).$$

При этом получаем:

$$a_i = k_i - 0.5hk'_i + \frac{h^2}{4}k''(x_i + \theta h), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Данный способ аппроксимации также широко используется на практике, особенно в квазилинейных задачах, когда коэффициент  $k$  зависит от искомой функции  $u$ .

3) В качестве  $a_i$  можно взять следующую конструкцию:

$$a_i = 2 \left( \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right)^{-1} = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}$$

при условии, что  $k_i \neq 0$  ни при каком значении  $i$ . В этом случае

$$a_i = k_i - 0.5hk'_i + \frac{h^2}{4} \left( k'' - \frac{(k')^2}{k} \right) \Big|_{x=x_i+\theta h}, \quad \theta \in [-1, 1].$$

Аппроксимируем теперь граничные условия задачи (2.3). Эти граничные условия содержат производные функции  $u$  при  $x = 0$  и  $x = 1$ , которые можно аппроксимировать

различными способами. Самый простой вариант — заменить их односторонними разностными производными:

$$u'(0) \rightarrow \frac{y_1 - y_0}{h} = y_x|_{x=x_0} = y_{x,0}; \quad u'(1) \rightarrow \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = y_{\bar{x}}|_{x=x_N} = y_{\bar{x},N}.$$

При этом получаем следующую аппроксимацию граничных условий:

$$-k_0 y_{x,0} + \sigma_0 y_0 = g_0, \quad k_N y_{\bar{x},N} + \sigma_1 y_N = g_1. \quad (2.8)$$

Так как односторонние производные аппроксимируют выражение  $u'(x)$  с первым порядком, то и уравнения (2.8) аппроксимируют граничные условия задачи (2.3) с первым порядком. Это означает, что и вся разностная схема (2.4), (2.8) будет аппроксимировать исходную задачу с первым порядком, несмотря на то, что порядок аппроксимации уравнения второй.

Порядок аппроксимации схемы можно сделать вторым, если построить немного более сложный, чем (2.8), разностный аналог граничных условий. Так как на границах отрезка  $[0, 1]$  необходимо построить аппроксимацию выражения  $k(x)u'(x)$ , воспользуемся тем, что функцию  $k(x)$  мы уже аппроксимировали с помощью сеточной функции  $a_i = a(x_i)$ , и рассмотрим разностные отношения  $a_{i+1}u_{x,i}$  и  $a_i u_{\bar{x},i}$ . Пользуясь равенствами (2.7) и тем, что в любой точке  $x_i \in \omega_h$

$$\left. \begin{array}{l} u_{x,i} \\ u_{\bar{x},i} \end{array} \right\} = u'_i \pm \frac{h}{2} u''_i + O(h^2),$$

получаем:

$$\begin{aligned} a_{i+1}u_{x,i} &= (k_i + 0.5hk'_i + O(h^2)) (u'_i + 0.5hu''_i + O(h^2)) = k_i u'_i + 0.5h(k_i u''_i + k'_i u'_i) + O(h^2) = \\ &= k_i u'_i + 0.5h(k_i u'_i)' + O(h^2) = k_i u'_i + 0.5h(q_i u_i - f_i) + O(h^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогично находим:

$$a_i u_{\bar{x},i} = k_i u'_i - 0.5h(q_i u_i - f_i) + O(h^2). \quad (2.10)$$

Переходя в равенстве (2.9) к пределу при  $x_i \rightarrow 0$  (или, что то же самое, при  $i \rightarrow 0$ ), получаем:

$$a_1 u_{x,0} = k_0 u'_0 + 0.5h(q_0 u_0 - f_0) + O(h^2). \quad (2.11)$$

Из граничного условия задачи (2.3) следует, что

$$k_0 u'_0 = \sigma_0 u_0 - g_0.$$

Подставляя это выражение в равенство (2.11), получаем

$$a_1 u_{x,0} = \sigma_0 u_0 - g_0 + 0.5h(q_0 u_0 - f_0) + O(h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение

$$-a_1 y_{x,0} + (\sigma_0 + 0.5hq_0)y_0 = g_0 + 0.5hf_0 \quad (2.12)$$

аппроксимирует граничное условие задачи (2.3) при  $x = 0$  со вторым порядком. Аналогично можно аппроксимировать со вторым порядком граничное условие при  $x = 1$ . Для этого перейдем к пределу при  $x_i \rightarrow 1$  (или, что то же самое, при  $i \rightarrow N$ ) в равенстве (2.10). При этом получим:

$$a_N u_{\bar{x},N} = k_N u'_N - 0.5h(q_N u_N - f_N) + O(h^2).$$

Так как

$$k_N u'_N = -\sigma_1 u_N + g_1,$$

получаем:

$$a_N u_{\bar{x},N} = -\sigma_1 u_N + g_1 - 0.5h(q_N u_N - f_N) + O(h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение

$$a_N y_{\bar{x},N} + (\sigma_1 + 0.5hq_N)y_N = g_1 + 0.5hf_N \quad (2.13)$$

будет аппроксимировать граничное условие задачи (2.3) при  $x = 1$  со вторым порядком.

Добавляя к уравнению (2.4) граничные условия (2.12)-(2.13), мы получаем следующую разностную схему, имеющую второй порядок аппроксимации на решении исходной задачи:

$$\begin{cases} (ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1; \\ -a_1 y_{x,0} + \tilde{\sigma}_0 y_0 = \tilde{g}_0, \\ a_N y_{\bar{x},N} + \tilde{\sigma}_1 y_N = \tilde{g}_1, \end{cases} \quad (2.14)$$

где  $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 + 0.5hq_0$ ,  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 + 0.5hq_N$ ,  $\tilde{g}_0 = g_0 + 0.5hf_0$ ,  $\tilde{g}_1 = g_1 + 0.5hf_N$ .

Схема (2.14) представляет собой систему  $N+1$  линейного алгебраического уравнения относительно  $N+1$  неизвестного  $y_i$ , где  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Запишем полученную систему в матричном виде:

$$AY = \Phi,$$

где

$$Y = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}^T, \quad \Phi = \left\{ \frac{\tilde{g}_0}{h}, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \frac{\tilde{g}_1}{h} \right\}^T,$$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 + h\tilde{\sigma}_0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 + h^2 d_1 & -a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -a_{N-1} & a_{N-1} + a_N + h^2 d_{N-1} & -a_N \\ 0 & \dots & 0 & -a_N & a_N + h\tilde{\sigma}_1 \end{bmatrix}.$$

Матрица системы является трехдиагональной, то есть имеет ненулевую главную диагональ  $A_{i,i}$ , где  $i = 0, 1, \dots, N$  и две ненулевые побочные диагонали  $A_{i,i-1}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ , и  $A_{i,i+1}$ , где  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ . Все остальные ее элементы равны нулю. Структура матрицы  $A$  схематически представлена на рис.3. Системы уравнений с трехдиагональными матрицами решаются методом прогонки (см. приложение к гл. 1.).

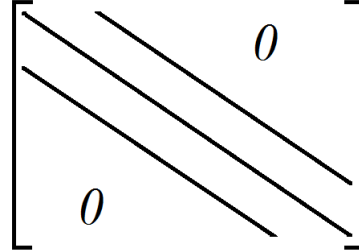


Рис. 3: Структура трехдиагональной матрицы

## 2.4 Разностная аппроксимация начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим различные варианты разностной аппроксимации линейного одномерного по пространству уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \quad (2.15)$$

где  $T > 0$  — некоторая константа. Введем в области  $\overline{D} = \{0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T\}$  равномерную сетку:

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau} = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\},$$

где

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N_1, \quad hN_1 = l\}, \quad \overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau; j = 0, 1, \dots, N_2, \quad \tau N_2 = T\}.$$

Свойства разностных схем для уравнения (2.15) зависят от того, на каком слое  $j$  по времени аппроксимируется выражение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Рассмотрим возможные варианты.

*Вариант 1: явная схема.*

Для аппроксимации оператора  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  в уравнении (2.15) используем шаблон, приведенный на рис. 4. Соответствующий разностный оператор  $L_{h\tau}^{(0)}u$  имеет вид:

$$L_{h\tau}^{(0)}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

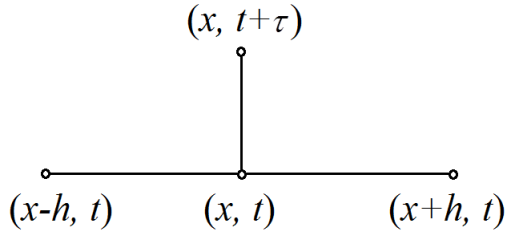


Рис. 4: Шаблон явной схемы для уравнения теплопроводности

Далее для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$u = u(x, t); \quad \hat{u} = u(x, t + \tau); \quad \check{u} = u(x, t - \tau).$$

Тогда:

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad L_{h\tau}^{(0)} u = u_t - u_{\bar{x}x}.$$

Найдем погрешность аппроксимации разностным оператором  $L_{h\tau}^{(0)}$  исходного дифференциального оператора  $L$  в точках  $(x, t)$  и  $(x, t + \frac{\tau}{2})$ . В случае достаточно гладкой функции  $u(x, t)$  имеем:

$$u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}}_{=O(\tau)} + O(\tau^2) = \frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} + O(\tau^2), \quad (2.16)$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t}}_{=O(\tau + h^2)} + O(h^2 + \tau^2). \quad (2.17)$$

Следовательно, разностный оператор  $L_{h\tau}^{(0)}$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$  с погрешностью  $O(\tau + h^2)$  как в точке  $(x, t)$ , так и в точке  $(x, t + \frac{\tau}{2})$ :

$$L_{h\tau}^{(0)} u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t)]} + O(\tau + h^2) = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \frac{\tau}{2})]} + O(\tau + h^2).$$

Введем сеточную функцию  $\varphi = \varphi(x_i, t_j)$ , аппроксимирующую правую часть  $f(x, t)$  уравнения (2.15) на всех внутренних узлах  $(x_i, t_j)$  сетки  $\omega_{h\tau}$  с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ . В качестве  $\varphi$  можно взять, например  $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j)$ . Тогда разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(0)} y = \varphi$$

будет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение теплопроводности (2.15) с первым порядком по  $\tau$  и вторым по  $h$ .

*Вариант 2. Чисто неявная схема.*

Используем для аппроксимации оператора  $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  в уравнении (2.15) шаблон, приведенный на рис. 5. Тогда разностная аппроксимация оператора  $L$  уравнения теплопроводности будет выглядеть следующим образом:

$$L_{h\tau}^{(1)}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t + \tau) - 2u(x, t + \tau) + u(x - h, t + \tau)}{h^2} = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x}.$$

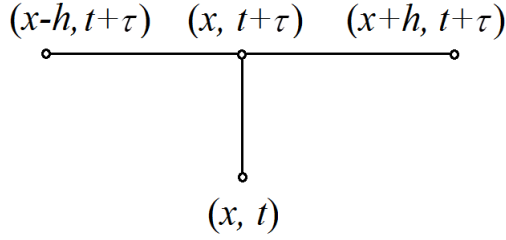


Рис. 5: Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности

Рассмотрим погрешность аппроксимации разностным оператором  $L_{h\tau}^{(1)}$  исходного дифференциального оператора  $L$  в точках  $(x, t)$ ,  $(x, t + \tau)$  и  $(x, t + \frac{\tau}{2})$ . Так как для достаточно гладкой функции  $u(x, t)$  справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \\ &= \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t}}_{=O(\tau + h^2)} + O(\tau^2 + h^2), \end{aligned} \quad (2.18)$$

то с учетом (2.16) получаем, что оператор  $L_{h\tau}^{(1)}$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$  в уравнении (2.15) с погрешностью  $O(\tau + h^2)$  в точках  $(x, t)$ ,  $(x, t + \tau)$  и  $(x, t + \frac{\tau}{2})$ :

$$\begin{aligned} L_{h\tau}^{(1)}u &= \underbrace{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t)]} + O(\tau + h^2) = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \tau)]} + O(\tau + h^2) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \frac{\tau}{2})]} + O(\tau + h^2). \end{aligned}$$



Беря в качестве сеточной аппроксимации правой части уравнения (2.15), например, функцию  $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_{j+1})$ , получим разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(1)}y = \varphi,$$

аппроксимирующее (2.15) с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ .

*Вариант 3. Неявная схема с весами.*

Используем шаблон, приведенный на рис. 6, и линейную комбинацию операторов  $L_{h\tau}^{(0)}$  и  $L_{h\tau}^{(1)}$  для аппроксимации дифференциального оператора  $L$ :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = \sigma L_{h\tau}^{(1)}u + (1 - \sigma)L_{h\tau}^{(0)}u = \sigma u_t - \sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma)u_t - (1 - \sigma)u_{\bar{x}x} = u_t - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma)u_{\bar{x}x}),$$

где  $\sigma \in (0, 1]$ .

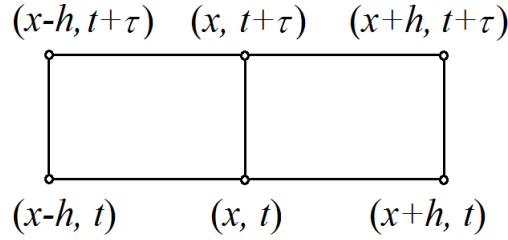


Рис. 6: Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности

Пользуясь равенствами (2.16), (2.17) и (2.18), получаем, что при  $\sigma \neq 0.5$  оператор  $L_{h\tau}^{(\sigma)}$  аппроксимирует исходный дифференциальный оператор  $L$  с погрешностью  $O(\tau + h^2)$  на любой достаточно гладкой функции  $u(x, t)$ , а при  $\sigma = 0.5$  в точке  $(x, t + \frac{\tau}{2})$  оператор  $L_{h\tau}^{(0.5)}$  аппроксимирует  $L$  со вторым порядком погрешности аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)}u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \frac{\tau}{2})]} - \frac{\tau}{2} \underbrace{(2\sigma - 1)}_{0 \text{ при } \sigma=0.5} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2).$$

Следовательно, если взять в качестве сеточной аппроксимации правой части уравнения (2.15) функцию  $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j + 0.5\tau)$ , то разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(0.5)}y = \varphi$$

будет аппроксимировать уравнение (2.15) со вторым порядком погрешности по  $\tau$  и  $h$ .

**Пример 2.2.** Постройте явную, чисто неявную и симметричную (с весом  $\sigma = 0.5$ ) разностные схемы для следующей начально-краевой задачи на отрезке  $x \in [0, 1]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha u(0, t) - \mu_0(t), \quad \alpha > 0, \\ u(1, t) = \mu_1(t). \end{array} \right. \quad (2.19)$$

**РЕШЕНИЕ.** Рассмотрим сначала явную схему. Введем равномерную сетку  $\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$ , где

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N_1, hN_1 = 1\}, \quad \overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau; j = 0, 1, \dots, N_2, \tau N_2 = T\},$$

и будем для краткости использовать обозначения  $u_i^j = u(x_i, t_j)$ ,  $y_i^j = y(x_i, t_j)$ . Уравнение

$$L_{h\tau}^{(0)} y = \varphi,$$

где  $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j)$  необходимо дополнить соответствующими начальными и граничными условиями на сетке. Начальное условие и граничное условие Дирихле при  $x = 1$  аппроксимируются точно:

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N_1,$$

$$y_{N_1}^j = \mu_1(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, N_2.$$

Граничное условие при  $x = 0$  содержит производную  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Если ее просто заменить односторонней разностной производной, то порядок аппроксимации граничного условия, а значит и всей схемы, по  $h$  будет первым. Если мы хотим, чтобы схема аппроксимировала исходную задачу с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ , то можно использовать тот же прием, который применялся в разделе 2.3 для аппроксимации граничного условия в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (2.19). Рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = \\ &= \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - f(x, t) \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Заменяя в нем производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$  конечной разностью:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u_{\bar{t}} + O(\tau),$$

где

$$u_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau} (u(x, t) - u(x, t - \tau)),$$

получим

$$u_x = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} (u_{\bar{t}} - f(x, t)) + O(\tau + h^2).$$

Переходя в полученном равенстве к пределу при  $x \rightarrow 0$  и учитывая, что по условию

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha u(0, t) - \mu_0(t), \quad (2.20)$$

находим:

$$u_x|_{x=0} = \alpha u(0, t) - \mu_0(t) + \frac{h}{2} (u_{\bar{t}}|_{x=0} - f(0, t)) + O(\tau + h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение

$$\frac{y_1^j - y_0^j}{h} = \alpha y_0^j - \mu_0(t_j) + \frac{h}{2} \left( \frac{y_0^j - y_0^{j-1}}{\tau} - f(x_0, t_j) \right)$$

аппроксимирует граничное условие (2.20) с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ .

Введем обозначения:

$$y_{x,0} = \frac{y_1^j - y_0^j}{h}, \quad y_{\bar{t},0} = \frac{y_0^j - y_0^{j-1}}{\tau}.$$

Тогда явная схема, аппроксимирующая задачу (2.19) на ее решении  $u(x, t)$  с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ , может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}; \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \overline{\omega_h}; \\ y_{x,0} = 0.5h y_{\bar{t},0} + \alpha y_0 - \tilde{\mu}_0, & t \in \overline{\omega_\tau}; \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \overline{\omega_\tau}; \end{cases} \quad (2.21)$$

где  $\varphi_i^j = f(x_i, t_j)$ ,  $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + 0.5hf(0, t)$ , или же в явном виде:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + \varphi_i^j, & i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1; \\ y_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, 1, \dots, N_1; \\ \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = 0.5h \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} + \alpha y_0^{j+1} - \tilde{\mu}_0(t_{j+1}), & j = 0, 1, \dots, N_2 - 1; \\ y_{N_1}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), & j = 0, 1, \dots, N_2 - 1. \end{cases} \quad (2.22)$$

При  $j = 0$  значения  $y_i^j$  известны из начального условия. Следовательно, при каждом фиксированном  $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$  неизвестными являются  $y_i^{j+1}$ .

Схема решения системы (2.22) следующая:

1) при  $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$  из первого уравнения находим:

$$y_i^{j+1} = y_i^j + \frac{\tau}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \tau \varphi_i^j;$$

2) при  $i = 0$  и  $i = N_1$  пользуемся граничными условиями, учитывая, что  $y_1^{j+1}$  и  $y_{N_1-1}^{j+1}$  уже известны:

$$y_0^{j+1} = \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} + \frac{2\tau\alpha}{h}\right)^{-1} \left(\frac{2\tau}{h^2} y_1^{j+1} + y_0^j + \frac{2\tau}{h} \tilde{\mu}_0(t_{j+1})\right),$$

$$y_{N_1}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1});$$

3) переходим на новый слой по времени, увеличивая  $j$  на единицу и повторяем действия 1) и 2).

Аналогично можно получить чисто неявную схему для задачи (2.19):

$$\begin{cases} y_t = \hat{y}_{xx} + \hat{\varphi}, & (x, t) \in \omega_{h\tau}; \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \overline{\omega_h}; \\ \hat{y}_{x,0} = 0.5h y_{t,0} + \alpha \hat{y}_0 - \hat{\tilde{\mu}}_0, & t \in \overline{\omega_\tau}; \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \overline{\omega_\tau}; \end{cases} \quad (2.23)$$

где  $\varphi_i^j = f(x_i, t_j)$ ,  $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + 0.5h f(0, t)$ ,

$$\hat{y}_{x,0} = \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h}, \quad \hat{\tilde{\mu}}_0(t) = \tilde{\mu}_0(t + \tau).$$

Погрешность аппроксимации этой схемы на решении задачи (2.19), как и в случае явной схемы, имеет вид  $O(\tau + h^2)$ .

Перепишем систему (2.23) в явном виде:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^{j+1}, & i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1; \\ y_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, 1, \dots, N_1; \\ \frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} = 0.5h \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} + \alpha y_0^{j+1} - \tilde{\mu}_0(t_{j+1}), & j = 0, 1, \dots, N_2 - 1; \\ y_{N_1}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), & j = 0, 1, \dots, N_2 - 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Как и в случае явной схемы, при каждом фиксированном  $j$  неизвестными являются значения  $y_i^{j+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1$ , которые удовлетворяют системе с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} y_0^{j+1} \left( 1 + \frac{2\tau}{h^2} + \frac{2\tau\alpha}{h} \right) = \frac{2\tau}{h^2} y_1^{j+1} + \left( y_0^j + \frac{2\tau}{h} \tilde{\mu}_0(t_{j+1}) \right), \\ \frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left( 1 + \frac{2\tau}{h^2} \right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = - (y_i^j + \tau \varphi_i^{j+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \\ y_{N_1}^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}). \end{cases}$$

Эта система может быть решена методом прогонки. Достаточные условия устойчивости прогонки для нее выполнены (см. Приложение).

Рассмотрим симметричную разностную схему для задачи (2.19), то есть схему с весами при  $\sigma = 0.5$ . Если взять  $\varphi_i^j = f(x_i, t_j + 0.5\tau)$ , то уравнение  $L_{h\tau}^{(0.5)} y = \varphi$  будет аппроксимировать исходное уравнение с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$ . Построим аппроксимацию граничного условия при  $x = 0$  со вторым порядком по координате и времени. Для этого воспользуемся равенством

$$u_x = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - f(x, t) \right) + O(h^2)$$

при  $t = t_j + 0.5\tau$ . Так как

$$u_x(x, t_j + 0.5\tau) = 0.5(u_x + \hat{u}_x) + O(\tau^2), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j+0.5\tau} = \frac{\hat{u} - u}{\tau} + O(\tau^2),$$

то имеет место равенство

$$0.5(u_x + \hat{u}_x) = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{t=t_j+0.5\tau} + \frac{h}{2} (u_t - f(x, t_j + 0.5\tau)) + O(\tau^2 + h^2). \quad (2.25)$$

Перейдем в равенстве (2.25) к пределу при  $x \rightarrow 0$ , учитывая, что

$$\left. \frac{\partial u(x, t_j + \frac{\tau}{2})}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha u(0, t_j + 0.5\tau) - \mu_0(t_j + 0.5\tau) = \frac{\alpha}{2} (u(0, t_j) + u(0, t_{j+1})) - \mu_0(t_j + 0.5\tau) + O(\tau^2).$$

В результате получим:

$$\frac{u_{x,0} + \hat{u}_{x,0}}{2} = \frac{\alpha}{2} (u_0 + \hat{u}_0) - \mu_0(t_j + 0.5\tau) + \frac{h}{2} (u_{t,0} - f(0, t_j + 0.5\tau)) + O(\tau^2 + h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение

$$\frac{y_{x,0} + \hat{y}_{x,0}}{2} = \frac{\alpha}{2} (y_0 + \hat{y}_0) - \mu_0(t_j + 0.5\tau) + \frac{h}{2} (y_{t,0} - f(0, t_j + 0.5\tau))$$

аппроксимирует граничное условие при  $x = 0$  задачи (2.19) со вторым порядком по координате и времени.

Соответствующую разностную схему можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} y_t = 0.5(\hat{y}_{\bar{x}x} + y_{\bar{x}x}) + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}; \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h; \\ 0.5(\hat{y}_{x,0} + y_{x,0}) = 0.5h y_{t,0} + 0.5\alpha(\hat{y}_0 + y_0) - \tilde{\mu}_0, & t \in \bar{\omega}_\tau; \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau; \end{cases} \quad (2.26)$$

где  $\varphi_i^j = f(x_i, t_j + 0.5\tau)$ ,  $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t + 0.5\tau) + 0.5hf(0, t + 0.5\tau)$ . На решении задачи (2.19) схема (2.26) имеет второй порядок аппроксимации по координате и времени.

Как и в случае чисто неявной схемы, при каждом  $j = 0, 1, \dots, N_2 - 1$  неизвестными в системе (2.26) являются значения  $y_i^{j+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1$ . Система для  $y_i^{j+1}$  при каждом фиксированном  $j$  решается методом прогонки. Достаточные условия устойчивости прогонки при  $\alpha > 0$  выполнены для любых шагов  $\tau$  и  $h$ .

## 2.5 Разностная аппроксимация начально-краевой задачи для уравнения колебаний

Рассмотрим несколько вариантов разностной аппроксимации линейного одномерного по пространству уравнения колебаний:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.27)$$

на равномерной сетке:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad t_j = j \cdot \tau \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

1) *Схема «крест»*. Используем для разностной аппроксимации дифференциального оператора в уравнении (2.27) шаблон, приведенный на рис. 7.

Дифференциальный оператор  $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  аппроксимируем с помощью разностного оператора  $L_{h\tau}$ , имеющего вид:

$$L_{h\tau}u = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x},$$

где

$$u_{\bar{t}t} = \frac{\hat{u} - 2u + \check{u}}{\tau^2}, \quad u_{\bar{x}x} = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}.$$

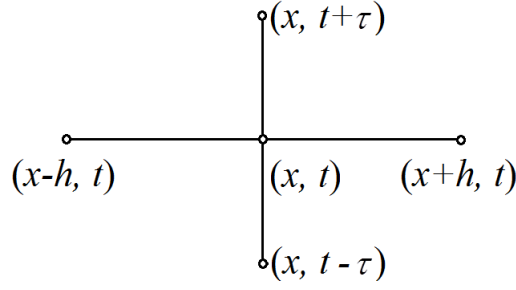


Рис. 7: Шаблон схемы «крест» для уравнения колебаний

Разностный оператор  $L_{h\tau}$  аппроксимирует исходный дифференциальный оператор  $L$  в точке  $(x, t)$  со вторым порядком погрешности аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ . В самом деле, для любой достаточно гладкой функции  $u(x, t)$  имеет место равенство:

$$L_{h\tau}u = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = Lu(x, t) + O(\tau^2 + h^2).$$

Аппроксимируем на сетке разностное уравнение (2.27). Для этого выберем в качестве сеточной аппроксимации правой части уравнения функцию  $\varphi_i^j = \varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j)$ . В результате получим разностное уравнение:

$$L_{h\tau}y = \varphi, \quad (2.28)$$

аппроксимирующее исходное уравнение (2.27) с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$ .

2) *Неявная схема.* Используем для аппроксимации дифференциального оператора в уравнении (2.27) шаблон, приведенный на рис. 8.

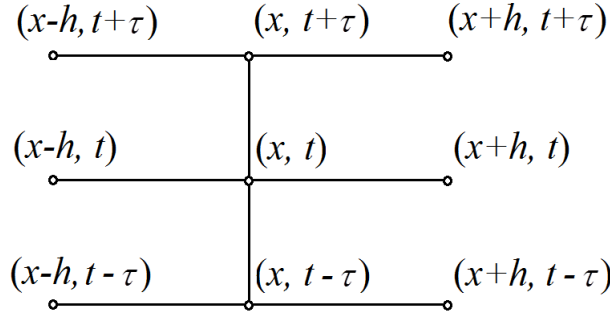


Рис. 8: Шаблон неявной схемы для уравнения колебаний

Аппроксимируем вторую производную по времени ее разностным аналогом, построенным на узлах  $(x, t - \tau)$ ,  $(x, t)$ ,  $(x, t + \tau)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow u_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{u(x, t + \tau) - 2u(x, t) + u(x, t - \tau)}{\tau^2},$$

а вторую производную по координате  $x$  — линейной комбинацией вторых разностных производных  $\check{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ ,  $u_{\bar{x}\bar{x}}$  и  $\hat{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ , построенных на слоях  $t - \tau$ ,  $t$  и  $t + \tau$  соответственно. При этом,

если мы хотим получить второй порядок аппроксимации по  $\tau$ , слои  $t - \tau$  и  $t + \tau$  должны входить в соответствующее разностное выражение с одинаковым весом, то есть:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \sigma \ddot{u}_{\bar{x}x} + \sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)u_{\bar{x}x},$$

где  $\sigma > 0$  — некоторое число.

Покажем, что разностный оператор

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} = u_{\bar{t}t} - (\sigma \ddot{u}_{\bar{x}x} + \sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)u_{\bar{x}x})$$

аппроксимирует оператор  $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  в точке  $(x, t)$  с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$  при любом  $\sigma$ . В самом деле, для достаточно гладкой функции  $u(x, t)$  справедливо равенство:

$$\begin{aligned} L_{h\tau}^{(\sigma)} u &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) - \left( \sigma \frac{\partial^2 u(x, t - \tau)}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + (1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \left( \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \tau \sigma \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \tau \sigma \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2\sigma) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2) \right) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Если взять в качестве аппроксимации правой части уравнения (2.27) значения функции  $f(x, t)$  в узлах  $(x_i, t_j)$ , то есть ввести сеточную функцию  $\varphi(x_i, t_j) = f(x_i, t_j)$ , то разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} y = \varphi \tag{2.29}$$

будет аппроксимировать исходное дифференциальное уравнение (2.27) с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$  при любом  $\sigma > 0$ . Заметим, что при  $\sigma = 0$  уравнение (2.29) совпадает с уравнением (2.28), получаемым при использовании схемы «крест».

**Пример 2.3.** Постройте схему «крест» и неявную схему для следующей начально-краевой задачи на отрезке  $x \in [0, 1]$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \\ u(0, t) = \mu_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \mu_1(t). \end{cases} \tag{2.30}$$

**РЕШЕНИЕ.** Рассмотрим сначала схему «крест» для задачи (2.30). Введем в области  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 1]$  равномерную сетку:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad N \cdot h = 1; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad M \cdot \tau = 1.$$



На внутренних узлах сетки аппроксимируем уравнение следующим образом:

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1.$$

Начальное условие  $u(x, 0) = \varphi(x)$  задается на сетке точно:

$$y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Аппроксимирует начальное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \quad (2.31)$$

Для этого рассмотрим выражение  $u_t$  в произвольном внутреннем узле сетки:

$$u_t = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=t_j} + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right|_{t=t_j} + O(\tau^2), \quad (2.32)$$

где использованы обозначения:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right| = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=x_i}, \quad \left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right| = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x=x_i}.$$

Из равенства (2.32) видно, что если начальное условие (2.31) заменить разностным уравнением:

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \psi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

то мы получим лишь первый порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Воспользуемся тем, что в равенстве (2.32) функция  $u(x, t)$  — это решение задачи (2.30), и выразим  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  из уравнения. При этом получим:

$$u_t = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=t_j} + \frac{\tau}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{t=t_j} + f(x, t_j) \right) \Big|_{x=x_i} + O(\tau^2). \quad (2.33)$$

Переходя в равенстве (2.33) к пределу при  $t_j \rightarrow 0$ , получаем:

$$u_{t,0} = \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0} + \frac{\tau}{2} \left( \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{t=0} + f(x, 0) \right) \Big|_{x=x_i} + O(\tau^2) = \psi(x_i) + \frac{\tau}{2} (\varphi''(x_i) + f(x_i, 0)) + O(\tau^2),$$

где

$$u_{t,0} = \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}.$$

Следовательно, начальное условие (2.31) можно аппроксимировать следующими способами:

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \psi(x_i) + \frac{\tau}{2} (\varphi''(x_i) + f(x_i, 0)), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

или

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \psi(x_i) + \frac{\tau}{2} (\varphi_{\bar{x}x,i} + f(x_i, 0)), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

В обоих случаях имеет место второй порядок аппроксимации по  $\tau$ .

Обратимся теперь к аппроксимации граничных условий. Условие Дирихле при  $x = 0$  аппроксимируется на сетке точно:

$$y_0^j = \mu_0(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Граничное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \mu_1(t) \quad (2.34)$$

можно аппроксимировать различными способами. Если положить

$$\frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} = \mu_1(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

то мы получим только первый порядок аппроксимации по  $h$ . Для того, чтобы схема обладала вторым порядком аппроксимации по  $\tau$  и  $h$ , можно, например, использовать несимметричную трехточечную разностную производную для аппроксимации условия (2.34):

$$\frac{3y_N^j - 4y_{N-1}^j + y_{N-2}^j}{2h} = \mu_1(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

При этом получим следующую разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1; \\ y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N; \\ \frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \psi_i + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} + f_i^0 \right), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M-1; \\ y_N^{j+1} = \frac{4}{3}y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3}y_{N-2}^{j+1} + \frac{2h}{3}\mu_1(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Разностная схема (2.35) является явной: при каждом фиксированном  $j = 1, 2, \dots, M-1$  неизвестными являются  $y_i^{j+1}$ , которые могут быть найдены по формуле:

$$y_i^{j+1} = 2y_i^j - y_i^{j-1} + \frac{\tau^2}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \tau^2 f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.36)$$

Алгоритм решения системы (2.35) следующий:

1) Зная значения  $y_i^0$  при  $i = 0, 1, \dots, N$  из начального условия, находим  $y_i^1$  при  $i = 1, \dots, N-1$

по формуле:

$$y_i^1 = y_i^0 + \tau \psi_i + \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} + f_i^0 \right).$$

2) Пользуясь граничными условиями и тем, что во внутренних точках  $y_i^1$  уже известны, находим  $y_0^1$  и  $y_N^1$ :

$$y_0^1 = \mu_0(t_1), \quad y_N^1 = \frac{4}{3}y_{N-1}^1 - \frac{1}{3}y_{N-2}^1 + \frac{2h}{3}\mu_1(t_1).$$

В результате функция  $y$  на слое  $j = 1$  будет найдена полностью.

3) По формуле (2.36) находим значения  $y_i^{j+1}$  при  $j = 1$  для всех  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ .

4) Пользуясь граничными условиями и тем, что во внутренних точках  $y_i^{j+1}$  уже известны, находим  $y_0^{j+1}$  и  $y_N^{j+1}$ :

$$y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = \frac{4}{3}y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3}y_{N-2}^{j+1} + \frac{2h}{3}\mu_1(t_{j+1}).$$

5) Увеличиваем  $j$  каждый раз на единицу и повторяем действия 3 и 4, пока  $y_i^{j+1}$  не будут найдены для всех  $j = 1, 2, \dots, M - 1$ .

Рассмотрим теперь неявную схему для задачи (2.30). Уравнение аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} &= \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \sigma \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} + \\ &+ (1 - 2\sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1. \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия аппроксимируем также, как в предыдущем случае при использовании схемы «крест». В результате придем к следующей системе,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} = \sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + F_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1; \\ y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N; \\ \frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = \psi_i + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} + f_i^0 \right), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1; \\ y_N^{j+1} = \frac{4}{3}y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3}y_{N-2}^{j+1} + \frac{2h}{3}\mu_1(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M - 1. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

где для краткости введено обозначение:

$$F_i^j = \sigma \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} + (1 - 2\sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j.$$

Как и в случае схемы «крест», если значения  $y_i^j$  при  $j = 0$  и  $j = 1$  найдены из начальных условий, то при каждом фиксированном  $j = 1, 2, \dots, M - 1$  неизвестными будут значения  $y_i^{j+1}$ . Матрица системы для них не является трехдиагональной, так как уравнение, аппроксимирующее граничное условие при  $x = 1$ , содержит три неизвестных, но ее легко можно преобразовать к системе с трехдиагональной матрицей. В самом деле, при  $i = N - 1$  имеет место уравнение:

$$\frac{y_{N-1}^{j+1} - 2y_{N-1}^j + y_{N-1}^{j-1}}{\tau^2} = \sigma \frac{y_N^{j+1} - 2y_{N-1}^{j+1} + y_{N-2}^{j+1}}{h^2} + F_{N-1}^j,$$

из которого находим:

$$y_{N-2}^{j+1} = -y_N^{j+1} + \left(2 + \frac{h^2}{\sigma\tau^2}\right) y_{N-1}^{j+1} - \underbrace{\frac{h^2}{\sigma\tau^2} (F_{N-1}^j\tau^2 + 2y_{N-1}^j - y_{N-1}^{j-1})}_{\tilde{F}_{N-1}^j}.$$

Подставляя это выражение в уравнение, аппроксимирующее граничное условие при  $x = 1$ , получаем:

$$y_N^{j+1} = \left(1 - \frac{h^2}{2\sigma\tau^2}\right) y_{N-1}^{j+1} + \frac{1}{2}\tilde{F}_{N-1}^j + h\mu_1(t_{j+1}).$$

Система

$$\begin{cases} \frac{\sigma\tau^2}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\sigma\tau^2}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma\tau^2}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -(\tau^2 F_i^j + 2y_i^j - y_i^{j-1}), & i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0^{j+1} = \mu_0(t_{j+1}); \\ y_N^{j+1} = \left(1 - \frac{h^2}{2\sigma\tau^2}\right) y_{N-1}^{j+1} + \frac{1}{2}\tilde{F}_{N-1}^j + h\mu_1(t_{j+1}) \end{cases}$$

уже имеет трехдиагональную матрицу. Достаточные условия устойчивости прогонки для этой системы:

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad |\varkappa_{1,2}| \leq 1, \quad |\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2,$$

где

$$A_i = B_i = \frac{\sigma\tau^2}{h^2}, \quad C_i = 1 + \frac{2\sigma\tau^2}{h^2}, \quad \varkappa_1 = 0, \quad \varkappa_2 = 1 - \frac{h^2}{2\sigma\tau^2},$$

выполнены, если

$$\frac{h^2}{2\sigma\tau^2} \leq 2.$$

Дополнительных условий на шаги  $\tau$  и  $h$  сетки можно избежать, если использовать еще один возможный способ аппроксимации граничного условия Неймана при  $x = 1$ . Для этого построим сетку по переменной  $x$  так, чтобы точка  $x = 1$  была в центре отрезка  $[x_{N-1}, x_N]$ :

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad N \cdot h = 1 + \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = \frac{2}{2N-1}.$$

Тогда разностное уравнение

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = \mu_1(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M-1$$

будет аппроксимировать граничное условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \mu_1(t)$$

с погрешностью  $O(h^2)$ .

### 3 Приложение: метод прогонки

Как было сказано выше, при построении разностных схем для дифференциальных уравнений второго порядка возникают системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами:

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \\ y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть  $A_n \neq 0$  и  $B_n \neq 0$  при  $n = 1, 2, \dots, N-1$ . Используем для решения системы метод Гаусса, позволяющий в результате линейных преобразований перейти к эквивалентной системе с треугольной (например, верхне-треугольной) матрицей. В данном случае мы должны перейти от системы (3.1) с трехдиагональной матрицей к системе с двухдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, & n = 0, 2, \dots, N-1, \\ y_N = \beta_N. \end{cases} \quad (3.2)$$

Прежде всего, найдем коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  в преобразованной системе (3.2). Заметим, что первое уравнение системы (3.1), соответствующее  $n = 0$ , уже имеет нужный вид:

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1 \Leftrightarrow y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0 \Rightarrow \alpha_0 = \varkappa_1, \beta_0 = \mu_1.$$

Рассмотрим теперь уравнения системы (3.1), соответствующие  $n = 1, 2, \dots, N-1$ :

$$y_{n-1} = \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} \alpha_n y_{n+1} + \alpha_{n-1} \beta_n + \beta_{n-1} \Rightarrow$$

$$(\alpha_n (A_n \alpha_{n-1} - C_n) + B_n) y_{n+1} + (\beta_n (A_n \alpha_{n-1} - C_n) + A_n \beta_{n-1} + F_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow \alpha_n(A_n\alpha_{n-1} - C_n) + B_n = 0, \quad \beta_n(A_n\alpha_{n-1} - C_n) + A_n\beta_{n-1} + F_n = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{B_n}{C_n - A_n\alpha_{n-1}}; \quad \beta_n = \frac{A_n\beta_{n-1} + F_n}{C_n - A_n\alpha_{n-1}}; \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Вычисление коэффициентов  $\alpha_n, \beta_n$  по рекуррентным формулам (3.3) называется *прямым ходом* прогонки. Будем считать, что все коэффициенты в преобразованной системе (3.2) найдены. Рассмотрим уравнение при  $n = N-1$ :

$$\begin{cases} y_{N-1} = \alpha_{N-1}y_N + \beta_{N-1} \\ y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \Rightarrow y_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2 \beta_{N-1}}{1 - \varkappa_2 \alpha_{N-1}}.$$

Обратный ход прогонки:

$$y_N = \beta_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2 \beta_{N-1}}{1 - \varkappa_2 \alpha_{N-1}};$$

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, \quad n = N-1, N-2, \dots, 0.$$

Достаточные условия устойчивости прогонки:

$$\begin{aligned} |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ |\varkappa_p| &\leq 1, \quad p = 1, 2; \quad |\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Докажем по индукции, что если выполнены условия (3.4), то  $|\alpha_n| \leq 1$  для всех  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . В самом деле:

$$|\alpha_0| = |\varkappa_1| \leq 1.$$

Пусть  $|\alpha_{n-1}| \leq 1$ . Из условий (3.4) следует, что

$$|C_n - A_n\alpha_{n-1}| - |B_n| \geq |C_n| - |\alpha_{n-1}||A_n| - |B_n| \geq |A_n|(1 - |\alpha_{n-1}|) \geq 0 \Rightarrow$$

$$|C_n - A_n\alpha_{n-1}| \geq |B_n| \Rightarrow |\alpha_n| = \frac{|B_n|}{|C_n - A_n\alpha_{n-1}|} \leq 1.$$

Покажем, что если  $|\alpha_{n-1}| < 1$ , то и  $|\alpha_n| < 1$ . В самом деле, если  $|\alpha_{n-1}| < 1$ , то

$$|C_n - \alpha_{n-1}A_n| > |B_n| \Rightarrow |\alpha_n| < 1.$$

Если выполнены условия (3.4), то  $1 - \alpha_{N-1}\varkappa_2 \neq 0$ , то есть  $y_N$  определено:

$$\text{а) } |\varkappa_2| < 1 \Rightarrow |\varkappa_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_0| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{N-1}| \leq 1 \Rightarrow$$

$$|1 - \alpha_{N-1}\varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}||\varkappa_2| \geq 1 - |\varkappa_2| > 0;$$

$$\text{б) } |\varkappa_2| \leq 1 \Rightarrow |\varkappa_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_0| < 1 \Rightarrow |\alpha_{N-1}| < 1 \Rightarrow$$

$$|1 - \alpha_{N-1} \kappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}| |\kappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}| > 0.$$

При  $|\alpha_n| \leq 1$  возникающая при численном решении ошибка  $\delta y_{n+1} = \tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}$  округления не возрастает:

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, \quad \tilde{y}_n = \alpha_n \tilde{y}_{n+1} + \beta_n \Rightarrow \delta y_n = \alpha_n \delta y_{n+1} \Rightarrow |\delta y_n| = |\alpha_n| |\delta y_{n+1}| \leq |\delta y_{n+1}|.$$

Если в коэффициенты  $\alpha_n, \beta_n$  внесено возмущение, то  $\max_{1 \leq n \leq N} |\delta y_n| \approx \varepsilon_0 N^2$ , где  $\varepsilon_0$  — ошибка округления.

**Замечание 3.1** Если все коэффициенты  $A_n, B_n$  и  $C_n$  в системе (3.1) одного знака, то достаточные условия устойчивости прогонки (3.4) можно ослабить:

$$\begin{aligned} A_n > 0; B_n > 0; C_n \geq A_n + B_n; C_n \neq A_n + B_n; n = 1, 2, \dots, N-1; \\ 0 \leq \kappa_p \leq 1, p = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Число арифметических операций прогонки  $O(N)$ .

## 4 Контрольные вопросы

- 1) Дайте определение линейного разностного уравнения.
- 2) Приведите пример сеточной нормы.
- 3) Дайте определение разностной схемы.
- 4) Что такое аппроксимация, устойчивость и сходимость разностной схемы?
- 5) Почему в случае линейной схемы из аппроксимации и устойчивости следует сходимость и с каким порядком точности?
- 6) Аппроксимируйте уравнение  $(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x)$  со вторым порядком на равномерной сетке.
- 7) Напишите разностную схему, аппроксимирующую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in (0, l), t \in (0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma u \right|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=1} = \mu_2(t) \end{cases}$$

со вторым порядком по координате и времени.

- 8) Напишите схему «крест» и неявную схему для уравнения колебаний на равномерной сетке.

## 5 Задания для самостоятельного решения

1) Постройте разностные односторонние производные, аппроксимирующие  $u'(x)$  на неравномерной сетке  $\bar{\omega} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ .

2) Постройте разностную аппроксимацию второй производной  $u''(x)$  на неравномерной сетке  $\bar{\omega} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ .

3) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = 3, & u(1) = 5 \end{cases}$$

аналитически и численно с помощью разностной схемы на равномерной сетке, если:

а)  $f = 6x + 2$ ,

б)  $f = e^x$ .

Сравните численное решение с аналитическим. В случае а) убедитесь, что схема аппроксимирует задачу точно, а в случае б) используйте также процедуру повышения порядка аппроксимации.

4) Решите краевую задачу

$$\begin{cases} u'' + 4u = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = 0, & u(1) = 5. \end{cases}$$

аналитически и численно с помощью разностной схемы на равномерной сетке, если:

а)  $f = x - 1$ ,

б)  $f = \sin x$ .

Используйте схемы второго и четвертого порядка аппроксимации. Сравните численное решение с аналитическим.

5) Решите начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in (0, 1), t \in (0, 1]; \\ u(x, 0) = x, & x \in [0, 1]; \\ u(0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 1 \end{cases}$$

аналитически и численно с помощью явной и неявной схем, аппроксимирующих задачу с погрешностью  $O(\tau + h^2)$ , и симметричной схемы, имеющей погрешность аппроксимации  $O(\tau^2 + h^2)$ . Используя явную схему, соблюдайте условие  $\tau \leq \frac{h^2}{2}$  при выборе шагов. В каждом случае сравните численное решение с аналитическим.



6) Решите начально-краевую задачу для уравнения колебаний:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin t \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1]; \\ u(x, 0) = x + \cos \frac{\pi x}{2}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, 1]; \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 1, \quad u(1, t) = 1 \end{array} \right.$$

аналитически и численно с помощью схемы «крест» и неявной схем, аппроксимирующих задачу с погрешностью  $O(\tau^2 + h^2)$ . При использовании схемы «крест» соблюдайте условие  $\tau \leq h$  при выборе шагов. В каждом случае сравните численное решение с аналитическим.