Решение системы уравнений с помощью QR-разложения

Воспользуемся QR-разложением матрицы A для решения системы уравнений $Ax=f$. Пусть $A=Q\cdot R$. Тогда система принимает вид $QRx=f$.

Умножим обе части слева на матрицу Q^*. В силу ортогональности матрицы Q приходим к системе уравнений с треугольной матрицей $Rx=Q^*f$. Прежде, чем решать эту систему, необходимо вычислить её правую часть $g=Q^*f$.

Вспомним, что $Q^*=P_{n-1}P_{n-2}\dots P_2P_1$, где P_k - матрица отражения, применяемая на k-ом шаге приведения матрицы A к треугольному виду, и сформулируем рекуррентное правило вычисления вектора g:

$$f^{(1)}=P_1 f$$

$$f^{(2)}=P_2 f^{(1)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$g=f^{(n-1)}=P_{n-1}f^{(n-2)}$$

Так как матрица P_1 - матрица отражения, определенная нормалью $p^{(1)}$, то вектор $f^{(1)}$ следует вычислять по формуле

$$f^{(1)} = f - 2\frac{(p^{(1)}, f)}{(p^{(1)}, p^{(1)})} \cdot p^{(1)},$$

или, в компонентной форме:

$$f_i^{(1)} = f_i - 2\frac{p_i^{(1)}}{\sum\limits_{l=1}^{n} (p_l^{(1)})^2} \cdot \sum_{l=1}^{n} p_l^{(1)} f_l, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Матрица P_2 определяется вектором нормали $p^{(2)}$, первая компонента которого равна нулю. Поэтому первая компонента $f^{(2)}$ совпадает с первой компонентой $f^{(1)}$, а остальные вычисляются по формулам

$$f_i^{(2)} = f_i^{(1)} - 2\frac{p_i^{(2)}}{\sum\limits_{l=2}^{n} (p_l^{(2)})^2} \cdot \sum_{l=2}^{n} p_l^{(2)} f_l^{(1)}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Матрица k-го шага P_k определяется нормалью $p^{(k)}$, первые $(k-1)$ компонент которой равны 0. Следовательно, первые $(k-1)$ компонент вектора $f^{(k)}$ совпадают с соответствующими компонентами вектора $f^{(k-1)}$, а остальные определяются формулами

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - 2\frac{p_i^{(k)}}{\sum\limits_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2} \cdot \sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)} \cdot f_l^{(k-1)}, \quad i = k, k+1, \dots, n$$

Выполнив вычисления по приведенным формулам для $k = 1, 2, \dots, n-1$, мы получим окончательно преобразованную правую часть g.