Exercice 4.34 dans la page 69

Solution n°34 :

1. Estimation de μ et σ

Estimation de μ

La moyenne échantillonnale $\bar{x}$ est un estimateur non biaisé de μ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{520}{100} = 5.2 \text{ minutes}$$

Estimation de σ

L'écart-type échantillonnal s est un estimateur de σ :

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{99}(2912 - 100 \cdot 5.2^2) \\
&= \frac{1}{99}(2912 - 2704) \\
&= \frac{208}{99} \\
&\approx 2.101
\end{aligned}$$

Donc, $s = \sqrt{2.101} \approx 1.45$ minutes

2. Intervalle de confiance à 95% pour μ

Pour un grand échantillon (n $\geq$ 30), l'intervalle de confiance est donné par :

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ici :

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 5.2 \\
z_{\alpha/2} &= 1.96 \\
s &\approx 1.45 \\
n &= 100
\end{aligned}$$

L'intervalle de confiance est donc :

$$\begin{aligned}
5.2 \pm 1.96 \cdot \frac{1.45}{\sqrt{100}} &= 5.2 \pm 1.96 \cdot 0.145 \\
&= 5.2 \pm 0.2842 \\
&= [4.9158, 5.4842]
\end{aligned}$$

Exercice 4.34 dans la page 69

3. Test d'hypothèse

Hypothèses :

$$H_0 : \mu = 5$$
$$H_1 : \mu \neq 5$$

Statistique de test :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{5.2 - 5}{1.45/\sqrt{100}} \approx 1.379$$

Valeur critique : $z_{\alpha/2} = 1.96$
Comme $|z| < z_{\alpha/2}$, on ne peut pas rejeter H_0 au niveau de signification 0.05.

Conclusion

— La moyenne estimée du temps passé sur le site est de 5.2 minutes, avec un écart-type estimé de 1.45 minutes.
— L'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne est [4.9158, 5.4842] minutes.
— Le test d'hypothèse ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle que la moyenne est de 5 minutes.

Ces résultats suggèrent que, bien que l'échantillon montre une moyenne légèrement supérieure à 5 minutes, cette différence n'est pas statistiquement significative au niveau 0.05.

Exercice 4.35 dans la page 69

Solution n°35 :

1. Fonction de vraisemblance

La fonction de vraisemblance est le produit des densités de probabilité pour chaque observation :

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2. Estimateur du maximum de vraisemblance

Pour trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance, nous maximisons le logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dérivons par rapport à λ et égalisons à zéro :

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Résolvons pour λ :

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

C'est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour λ.

Exercice 4.35 dans la page 69

3. Valeur estimée de λ

Calculons la somme des observations :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.1 + 3.5 + 1.8 + 4.2 + 2.7 + 3.9 + 1.5 + 5.1 + 2.3 + 3.2 = 30.3$$

Maintenant, calculons $\hat{\lambda}$:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{10}{30.3} \approx 0.3300$$

4. Estimation de la durée de vie moyenne

La durée de vie moyenne estimée est l'inverse de $\hat{\lambda}$:

$$\text{Durée de vie moyenne estimée} = \frac{1}{\hat{\lambda}} = \frac{1}{0.3300} \approx 3.0303 \text{ années}$$

5. Intervalle de confiance à 95% pour λ

L'intervalle de confiance basé sur l'information de Fisher est donné par :

$$\hat{\lambda} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{I(\hat{\lambda})}}$$

où $I(\hat{\lambda}) = \frac{n}{\hat{\lambda}^2}$ est l'information de Fisher évaluée à $\hat{\lambda}$.

Calculons d'abord $\sqrt{\frac{1}{I(\hat{\lambda})}}$:

$$\sqrt{\frac{1}{I(\hat{\lambda})}} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}^2}{n}} = \frac{\hat{\lambda}}{\sqrt{n}} = \frac{0.3300}{\sqrt{10}} \approx 0.1044$$

Maintenant, calculons l'intervalle de confiance :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{1}{I(\hat{\lambda})}} &= 0.3300 \pm 1.96 \cdot 0.1044 \\ &= 0.3300 \pm 0.2046 \\ &= [0.1254, 0.5346] \end{aligned}$$

Conclusion

- L'estimateur du maximum de vraisemblance pour λ est $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.
- La valeur estimée de λ pour l'échantillon donné est environ 0.3300.
- La durée de vie moyenne estimée des composants est d'environ 3.0303 années.
- L'intervalle de confiance à 95% pour λ est [0.1254, 0.5346].

Ces résultats permettent au modèle d'IA de faire des prédictions plus précises sur la durée de vie des composants du robot, en tenant compte de l'incertitude associée à l'estimation. Par exemple, on peut affirmer avec 95% de confiance que le taux de défaillance λ se situe entre 0.1254 et 0.5346 par an, ce qui correspond à une durée de vie moyenne entre 1.87 et 7.97 ans.