

Carré magique

On considère un entier n strictement positif. Un **carré magique** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n (n lignes et n colonnes), qui contient des nombres entiers strictement positifs. Ces nombres sont disposés de sorte que les sommes sur chaque ligne, les sommes sur chaque colonne et les sommes sur chaque diagonale principale soient égales. La valeur de ces sommes est appelée : **constante magique**.

Exemple :

Carré magique d'ordre **3**, sa constante magique **45**

21	7	17	→ 45
11	15	19	→ 45
13	23	9	→ 45
45 ←	↓ 45	↓ 45	↓ 45

Représentation d'une matrice carrée en Python :

Pour représenter une matrice carrée d'ordre n (n lignes et n colonnes), on utilise une liste qui contient n listes, toutes de même longueur n .

Exemple :

4	7	10	3
3	2	9	6
13	0	5	8
7	1	6	25

Cette matrice carrée d'ordre **4** est représentée par la liste **M**, composée de **4** listes de taille **4** chacune :

M = [[4, 7, 10, 3], [3, 2, 9, 6], [13, 0, 5, 8], [7, 1, 6, 25]]

M[i] est la liste qui représente la ligne d'indice i dans **M**.

Exemples :

- **M[0]** est la liste [4, 7, 10, 3]
- **M[2]** est la liste [13, 0, 5, 8]

M[i][j] est l'élément à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne, dans **M**

Exemples :

- **M[0][1]** est l'élément 7
- **M[2][1]** est l'élément 0

I.- Opérations sur une matrice carrée

Q.1- Écrire la fonction `somme_ligne(M, i)`, qui reçoit en paramètres une matrice carrée **M** contenant des nombres, et un entier **i** qui représente l'indice d'une ligne dans **M**. La fonction retourne la somme des nombres de la ligne d'indice **i** dans **M**.

Exemple :

La fonction `somme_ligne(M, 1)` retourne la somme $3+2+9+6 = 20$

Q.2- Écrire la fonction `somme_colonne(M, j)`, qui reçoit en paramètres une matrice carrée **M** contenant des nombres, et un entier **j** qui représente l'indice d'une colonne dans **M**. La fonction retourne la somme des éléments de la colonne d'indice **j** dans **M**.

Exemple :

La fonction `somme_colonne(M, 0)` retourne la somme $4+3+13+7 = 27$

Q.3- Écrire la fonction `somme_diag1(M)`, qui reçoit en paramètre une matrice carrée **M** contenant des nombres, et qui retourne la somme des éléments de la première diagonale principale dans **M**.

Exemple :

La fonction `somme_diag1(M)` retourne la somme $4+2+5+25 = 36$

Q.4- Écrire la fonction `somme_diag2(M)`, qui reçoit en paramètre une matrice carrée **M** contenant des nombres, et qui retourne la somme des éléments de la deuxième diagonale principale dans **M**. (La deuxième diagonale principale part du coin en haut à droite, jusqu'au coin en bas à gauche)

Exemple :

La fonction `somme_diag2(M)` retourne la somme $3+9+0+7 = 19$

II- Carré magique

Q.5- Écrire la fonction `carre_magique(C)`, qui reçoit en paramètre une matrice carrée **C** contenant des entiers strictement positifs, et qui retourne :

- ✓ **True**, si la matrice **C** est un carré magique : les sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale principale sont toutes égales
- ✓ **False**, sinon.

Exemples :

$A =$

21	7	17
11	15	19
13	23	9

$B =$

7	1	6
1	15	9
3	2	4

- La fonction `carre_magique(A)` retourne **True**
- La fonction `carre_magique(B)` retourne **False**

III- Carré magique normal

Un **carré magique normal** d'ordre **n** est un carré magique d'ordre **n**, constitué de tous les nombres entiers positifs compris entre **1** et **n²**.

Exemple :

Carrée magique normal d'ordre **4**, composé des nombres entiers : **1, 2, 3, ..., 15, 16**.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

NB : Il n'existe pas de carré magique normal d'ordre **2**.

Q.6.a- Écrire la fonction **magique_normal(C)**, qui reçoit en paramètre une matrice carrée **C** qui représente un carré magique. La fonction retourne **True** si le carré magique **C** est normal, sinon, elle retourne **False**.

Exemples:

- La fonction **magique_normal** ([[8, 1, 6] , [3, 5, 7] , [4, 9, 2]]) retourne **True**
- La fonction **magique_normal** ([[21, 7, 17] , [11, 15, 19] , [13, 23, 9]]) retourne **False**

Q.6.b- Déterminer la complexité de la fonction **magique_normal(C)**.

IV- Construction d'un carré magique normal d'ordre impair

La méthode **siamoise est** une méthode qui permet de construire un carré magique normal d'ordre **n** impair.

Le principe de cette méthode est le suivant :

1. Créer une matrice carrée d'ordre **n**, remplie de **0**.
2. Placer le nombre **1** au milieu de la ligne d'indice **0**.
3. Décaler d'une case vers la droite puis d'une case vers le haut pour placer le nombre **2**, et faire de même pour le nombre **3**, puis le nombre **4**, ... jusqu'au nombre **n²**.

Le déplacement doit respecter les deux règles suivantes (voir l'exemple dans la page suivante) :

- Si la pointe de la flèche sort du carré, revenir de l'autre côté, comme si le carré était enroulé sur un tore.
- Si la prochaine case est occupée par un entier non nul, alors il faut décaler d'une case vers le bas.

Exemple :

Construction d'un carré magique normal d'ordre 5

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Q.7- Écrire la fonction **matrice_nulle(n)**, qui reçoit en paramètre un entier **n** strictement positif, et qui retourne une liste qui représente la matrice carrée d'ordre **n**, remplie de **0**.

Exemple :

La fonction **matrice_nulle(5)** retourne la matrice suivante :

[[0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0]]

Q.8- Écrire la fonction **siamoise(n)**, qui reçoit en paramètre un entier positif **n** impair. En utilisant le principe de la méthode siamoise, la fonction retourne la matrice carrée qui représente le carré magique normal d'ordre **n**.

Exemple :

La fonction **siamoise(7)** retourne la matrice carrée qui représente le carré magique normale d'ordre **7** suivant :

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Q.9- Écrire la fonction, de complexité constante, **constante_magique(n)**, qui reçoit en paramètre un entier positif **n** impair, et qui retourne la valeur de la constante magique du carré magique normal d'ordre **n**.

~~~~~ FIN DE L'ÉPREUVE ~~~~~