Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : 2 Bac Sciences Physiques
Durée totale : $\mathbf{10}h$

✍ Contenus du programme :

- Continuité et dérivabilité.
- Dérivabilité de la composée de deux fonctions dérivables.
- Dérivée de la fonction réciproque.
- Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \geq 1)$.
- Exemples d'études de fonctions.

✍ Les capacités attendues :

- Calculer les dérivées des fonctions usuelles.
- Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa représentation graphique.
- Résoudre graphiquement des équations de la forme $f(x) = g(x)$ et des inéquations de la forme $f(x) \leq g(x)$.
- Déterminer la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone et représenter graphiquement la fonction réciproque.
- Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque d'une fonction en un point.
- Résoudre des problémes concernant les valeurs miminales et valeurs maximales.
- Étudier et représenter des fonctions ratinnelles et des fonctions trigonométriques.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On rappellera la notion de dérivation et ses applications à partir d'activités variées faisant apparaître son importance dans l'étude locale et globale des fonctions au programme surtout l'approximation locale d'une fonction, l'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, la détermination des extrema et l'étude du signe d'une fonction ou d'une égalité algébrique sur un intervalle ou la concavité de la courbe d'une fonction numérique..., ce sera également une occasion pour rappeler la propriété caractéristique d'une fonction constante ou strictement monotone sur un intervalle.
- Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques usuelles sont hors programme.
- À partir de l'étude d'exemples de fonctions polynômes, de fonctions rationnelles, de fonctions trigonométriques et de fonctions irrationnelles on maintiendra les acquis des élèves relatifs à la dérivation, aux limites, à l'approximation par une fonction linéaire, aux éléments de symétrie de la courbe d'une fonction, à l'étude des branches infinies et à la résolution graphique de quelques équations et inéquations ....
- On se limitera à l'étude de quelques exemples de fonctions irrationnelles dont le signe de la dérivée ne pose pas de difficulté; à cette eccasion on abordera les équations irrationnelles à partir d'exemples.
- Utiliser l'écriture différentielle $dy = f'(x)dx$.
- L'étude des fonctions de la forme $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ où $(n \geq 3)$ et u une fonction positive, est hors programme, toutefois on se limitera à la détermination de leurs dérivées.

Contenu du cour	Durée

1. Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels) :

1.1. Dérivabilité d'une fonction en un point :

Definition 1

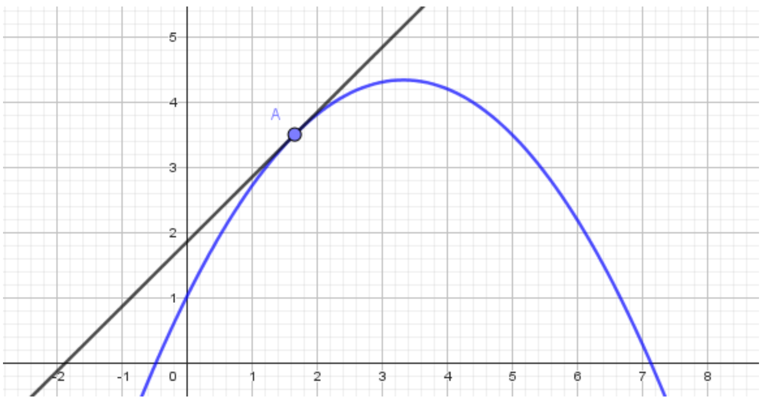
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel l tel que : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$.
Le nombre l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Remarque :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definition 2

Soit f une fonction dérivable en x_0.
La droite (T) d'équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse x_0.
La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de x_0.
On écrit alors : $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ au voisinage de x_0.



1.2. Dérivation à droite - Dérivation à gauche :

Definition 3

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

  On dit que f est dérivable à droite de x_0 s'il existe un réel l_1 tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_1$.

  On note $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - r, x_0]$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

  On dit que f est dérivable à gauche de x_0 s'il existe un réel l_2 tel que : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2$.

  On note $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.
La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, et dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 1

On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 3\sqrt[3]{x-1} & ; \quad x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = 1$.

1.3. Les interprétations géométriques :

Limite	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ au point d'abscisse x_0.
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$ au point d'abscisse x_0.
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$ au point d'abscisse x_0.
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse x_0.
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente vertical dirigée vers le haut au point d'abscisse a.
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente vertical dirigée vers le bas au point d'abscisse a.
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente vertical dirigée vers le haut au point d'abscisse a.
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente vertical dirigée vers le bas au point d'abscisse a.

1.4. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle :

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto c \ (c \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi; \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\ (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \ (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \ (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

1.5. Opérations sur les fonctions dérivables :

Proposition 2

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(f+g)' = f' + g' \quad ; \quad (\alpha.f)' = \alpha.f' \quad ; \quad (f.g)' = f'.g + f.g' \quad ; \quad (f^n)' = n.f'.f^{n-1}$$

Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$

Si f est strictement positive sur I, alors : $(f)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

2. Complément sur la dérivation :

2.1. Dérivabilité et continuité :

Proposition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque :

La réciproque de la proposition 3 est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.2. Dérivée de la fonction composée :

Proposition 4

Soit I et J deux intervalles ouverts, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g :\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, avec $f(I) \subset J$. Soit x_0 un élément de I. Si :

- la fonction f est dérivable en x_0,
- la fonction g est dérivable en $f(x_0)$,

alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et de plus : $(g \circ f)'(x_0) = f' \times g'(f(x_0))$.

Corollaire :

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin(x^2 + 2x + 1)$. Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Application 1

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos x^2 + \sin \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Étudier la continuité et dérvabilité de la fonction h en 0.

   (b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.3. Dérivée de la fonction réciproque :

Proposition 5

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et de plus :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Corollaire :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus, on a pour tout $x \in J$: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Application 2

1. Soit f la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]2\sqrt{2}; +\infty[$
   (c) Calculer $(f^{-1})'(3)$.
2. Soit f la fonction définie sur $\left]0; \dfrac{1}{4}\right[$ par : $f(x) = (1 - 2\sqrt{x})^3$
   (a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Calculer $f\left(\dfrac{1}{16}\right)$ et en déduire $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

2.4. Dérivée de la fonction racine n^{ime} :

Proposition 6

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

- Si u est une fonction dérivable st strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ ets dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{1}{n} u'(x).(u(x))^{\frac{1}{n}-1} = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$$

Exemple 3

1. La fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$.
2. Calculons la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{3x-2}$ sur l'inervalle $\left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$

Application 3

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'inervalle I :

$$f(x) = \sqrt[5]{3 + \cos^2(x)} \text{ et } I = \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = x^2.\sqrt[9]{x^2 + x} \text{ et } I =]0; +\infty[$$

Proposition 7

Soit r un nombre rationnel non nul.

- La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r.x^{r-1}$.
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par la formule :

$$((u(x))^r)' = r.u'(x).(u(x))^{r-1}$$

.

Exemple 4

On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x + 1)^{-\frac{7}{8}}$.
La fonction $x \mapsto x^2 - x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Application 4

Pour chacun des fonctions suivantes, déterminer les intervalles où elles sont dérivables puis donner leurs fonctions dérivées :

$$f(x) = (1 - \cos(3x+1))^{\frac{4}{3}} \quad ; \quad g(x) = (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2+1})^{-\frac{3}{5}}$$

3. Étude des fonctions numériques (Rappels) :

3.1. monotonie d'une fonction numérique :

Proposition 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est canstante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I);\ f(x) = 0$
- La fonction f est croissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I);\ f(x) \geq 0$
- La fonction f est canstante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I);\ f(x) \leq 0$

Remarque :

- Les resultats de la proposition **8** ne sont valables que sur un intervalle.
- Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple 5

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R});\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Application 5

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+x}}$.

Étudier les variations de la fonction f.

3.2. Extremums d'une fonction dérivable sur un intervalle :

Proposition 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$j.

- Si f admet un extremum local au point x_0, alors : $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.

3.3. Axe de symétrie - Centre de symétrie :

Proposition 10

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repére orthogonal.
Pour que la droite (Δ) d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$, il faut et il suffit que :

$$(\forall x \in D_f) : \ (2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$

Exemple 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x(x+4)}$.
Montrons que la droite (Δ) d'équation $x = -4$.

Proposition 11

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repére donné.
Pour que le point $\Omega(a; b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$, il faut et il suffit que :

$$(\forall x \in D_f) : \ (2a - x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(2a - x) + f(x) = 2b$$

Exemple 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.
Montrons que le point $\Omega(1; 0)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque :

- Si f est une fonction paire, alors sa courbe $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathcal{C}_f$ admet l'origine du repére comme centre de symétrie.
- Si la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées $(a; b)$ comme centre de symétrie, alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{tude} = D_f \bigcup [a; +\infty[$.

3.4. Étude de la concavité d'une courbe :

Definition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repére.

- On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ est convexe si elle entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes, et on dit qu'elle est concave si elle est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.
- On dit que le point $M_0(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ si, en M_0, la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.

Proposition 12

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I) \quad f''(x) \geq 0$
- Pour que la courbe $\mathcal{C}_f$ de f soit concave sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I) \quad f''(x) \leq 0$
- Pour que le point $M_0(x_0; f(x_0))$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

3.5. Étude des branches infinies :