Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025

Niveau : 2 Bac Sciences Physiques

Durée totale : $2h$

✍ Contenus du programme :

- Fonctions primitives d'une fonction continue sur un intervalle;
- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions; fonctions primitives du produit d'une fonction par un nombre réel.

✍ Les capacités attendues :

- Déterminer les fonctions primitives des fonction usuelles;
- Utiliser les formules de dérivation pour déterminer les fonctions primitives d'une fonction sur un intervalle.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On déterminera les fonctions primitives des fonctions usuelles à partir de la lecture croisée du tableau des dérivées de ces fonctions.

Contenu du cour	Durée

1. Primitive d'une fonction sur un intervalle :

Definition 1

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur I si :

$$F \text{est dérivable sur } I \text{et pour tout } x \in I \ : \ F'(x) = f(x)$$

Exemple 1

On considére les fonctions f et F définies sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } F(x) = x + x^2 + 2\sqrt{x}$$

La fonction F est une primitive de la fonction f sur I car F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = (x + x^2 + 2\sqrt{x})' = 1 + 2x + \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

2. Primitive d'une fonction continue :

Proposition 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur cet intervalle.

Proposition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si F est une primitive de la fonction f sur I, alors les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto F(x) + c$ où c est une constante réelle.
- Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant : $G(x_0) = y_0$.

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. On a la fonction F défnine sur I par : $F(x) = x + x^2 + 2\sqrt{x}$ est une fonction dérivable de f sur I.
Donc les primitives de la fonction f sur l'intervalle I sont les fonction $x \mapsto x + x^2 + 2\sqrt{x} + c$ où c une constante réel. Soit G la primitive de la fonction f sur I qui s'annule en 1.
Donc $G(x) = x + x^2 + 2\sqrt{x} + c$ avec $G(1) = 0$.
On a alors $G(1) = 0 \iff 1 + 1^2 + 2\sqrt{1} + c = 0 \iff 4 + c = 0 \iff c = -4$.
Ainsi :

$$(\forall x \in]0; +\infty[); G(x) = x + x^2 + 2\sqrt{x} - 4$$

3. Opérations sur les primitives :

Proposition 3

Si F et G sont respectivement des primitives des fonction f et g sur un intervalle I alors :

- $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur l'intervalle I.
- Pour tout $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur l'intervalle I.

4. Primitives usuelles :

La fonction f	Les primitives F de f'	L'intervalle I
0	$c \ \ (c \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a \ (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto x^r \ (n \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$x \mapsto \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sqrt[n]{x} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + c$	$\mathbb{R}^+$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[\ \ (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \ (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \ (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$u'v + uv'$	$uv + c$	Intervalle où u et v sont dérivables
$\dfrac{-u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u} + c$	Intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + c$	Intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}^* - \{1\})$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1} + c$	Intervalle où u est dérivable et u^r est définie
$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v} + c$	Intervalle où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas