Dérivation et étude de fonctions numériques

Exercice 1 : Étudier la dérivabilité de la fonction f en a dans les cas suivants :

1. $f(x) = 5x + 1$ et $a = 1$
2. $f(x) = \sqrt{4x-5}$ et $a = 2$
3. $f(x) = x^3$ et $a = -2$
4. $\begin{cases} f(x) = 1 - \cos(x) \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \sin(x) \text{ si } x < 0 \end{cases}$ et $a = 0$

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1+x)^3$$

Donner l'approximation affine de f au voisinage de 0 et en déduire une valeur approchée du nombre $b = (1,0004)^3$.

Exercice 3 : Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer f' lorqu'il existe dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
2. $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$
4. $f(x) = x^4\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{3\sin(x) - 1}{\sin(x) - 1}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x^2+3x+1}\right)^2$
7. $f(x) = x^3 - \sqrt{x}\tan(x) + \dfrac{\sin(x)}{x}$
8. $f(x) = \cos\left(\sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}}\right)$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. En déduire l'pproximation affine de la fonction f au voisinage de 0.
3. Déterminer des valeurs approchées des nombres : $\sqrt[3]{0,991}$ et $\sqrt[3]{1,007}$.

Exercice 5 : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-2)^{1986} - 1}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to 2} \frac{x\sqrt{x+7} - 6}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

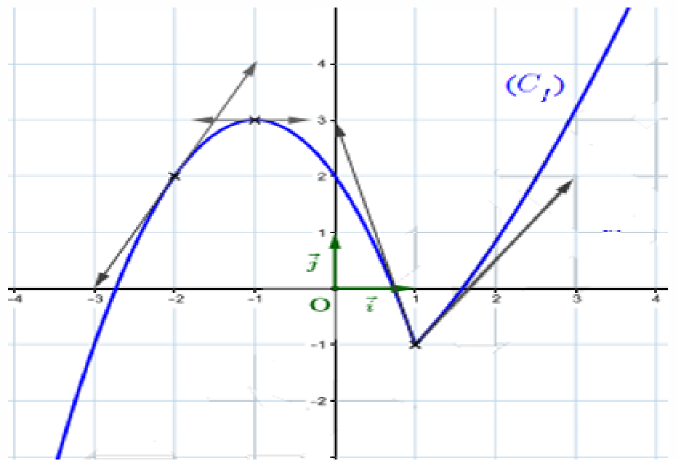
$$\lim_{x\to -1} \frac{\frac{1}{x+2} - 1}{x+1} \; ; \; \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x) - 1}{\tan(x) - \sqrt{3}} \; ; \; \lim_{x\to 1} \frac{x^4\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

Exercice 6 : Dresser le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \; ; \; f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1 \; ; \; f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x+1}$$

Exercice 7 : Dans la figure ci-après $(\mathscr{C}_f)$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le repére orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



1. Déterminer graphiquement $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.
2. Déterminer graphiquement $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$.
3. En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$ (on donne $f(3) = \dfrac{25}{8}$).
5. En déduire le tableau de signe de f' sur $[-3;3]$.

Exercice 8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
3. Calculer $f(1)$ et $f(-2)$. En déduire $\left(f^{-1}\right)'(3)$ et $\left(f^{-1}\right)'(-9)$

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan(x)$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1}.
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 10 : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$$

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et $-1 < \alpha < 0$.
3. Donner le tableau de sign de g.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x$$

4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. En déduire les variations de f.
6. Écrire une équation de la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

Exercice 11 : Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - 1 + \sqrt{x-1}$$

1. Vérifier que : $D_f = [1;+\infty[$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
3. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.
5. (a) Montrer que
$$(\forall x \in D_f - \{1\});\ f'(x) = \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}}$$
   (b) En déduire les variations de f.
6. Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe la première bissectrice du repère en un unique point à déterminer.
7. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
8. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.
9. Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

Exercice 12 : Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$.

1. Vérifier que : $D_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Déterminer les deux branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$.
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.
4. (a) Montrer que $\forall x \in D_f - \{0\}$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
5. Étudier la concavité de f.
6. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
   Soit g la restriction de la fonction f sur l'intevalle $[0;1[$.
7. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
8. Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$.

Exercice 13 : Soit f la fonction numérique définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x\sqrt{x-1}$.

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Étudier la continuité de f sur $[1,+\infty[$.
3. Déterminer la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.
5. (a) Montrer que
$$(\forall x \in]1,+\infty[);\ f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$
   (b) En déduire les variations de f.
6. (a) Montrer que
$$(\forall x \in]1,+\infty[);\ f''(x) = \frac{3x-4}{4\sqrt{(x-1)^3}}$$
   (b) En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet un point dinflexion A dont on déterminera ses coordonnées.
7. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.
8. Tracer $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
9. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 2, puis déterminer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.
10. Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$.

Exercice 14 : **Partie A :**

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$u(x) = 3 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

1. Calculer $u'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Calculer $u(1)$.
   (b) En déduire que $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1;+\infty[$ et que $u(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0;1]$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(x) = 4\sqrt{x} - 3x - \frac{1}{x}$$
et soit $\mathscr{C}_f$, sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

a) Calculer les limites : $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2) a) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que :
$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ f'(x) = -u(x)$$
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
   c) En déduire que :
$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ 4\sqrt{x} \leq 3x + \frac{1}{x}$$

4) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 15 :

Partie A :

Soit g la fonction numérique sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

1. Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que léquation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$, et que : $-1 < \alpha < 0$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit f la fonction numérique définie par :
$$f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer D_f, puis calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudier la continuité de f sur D_f.
3. Montrer que : $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$.
4. Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variations.
5. Vérifier que la première bissectrice du repère est lasymptote oblique de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et la première bissectrice du repère.
7. Soit h la restriction de f sur lintervalle $I = [0, +\infty[$.
   (a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

Exercice 16 **:** Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x - 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ et soit $\mathscr{C}_f$, sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Vérifier que : $D_f =]-\infty;0] \cup]1;+\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat obtenu.
3. (a) Montrer que la droite $(D) : y = x-2$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (D).
4. Étudier la dérivabilité à gauche en 0 de la fonction f, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
6. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
7. (a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un unique point et dont l'abscisse α appartient à l'intervalle $\left]2;\dfrac{5}{2}\right[$.
   (b) Montrer que : $\alpha - \sqrt[3]{\alpha} = 1$.
8. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.
9. Soit g la restriction de la fonction f sur $]1;+\infty[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J.
   (c) Montrer que $(g^{-1})'(0) = \dfrac{2(\alpha-1)^3}{1+2(\alpha-1)^3}$.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

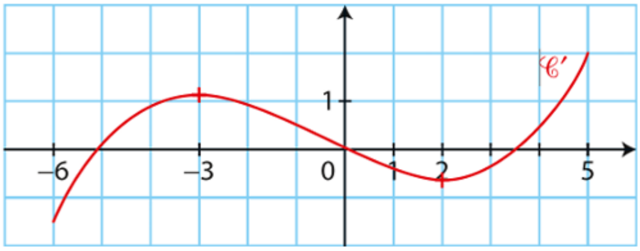
Exercice 17 **:** Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 + 2\sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^3-1}{x^3+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

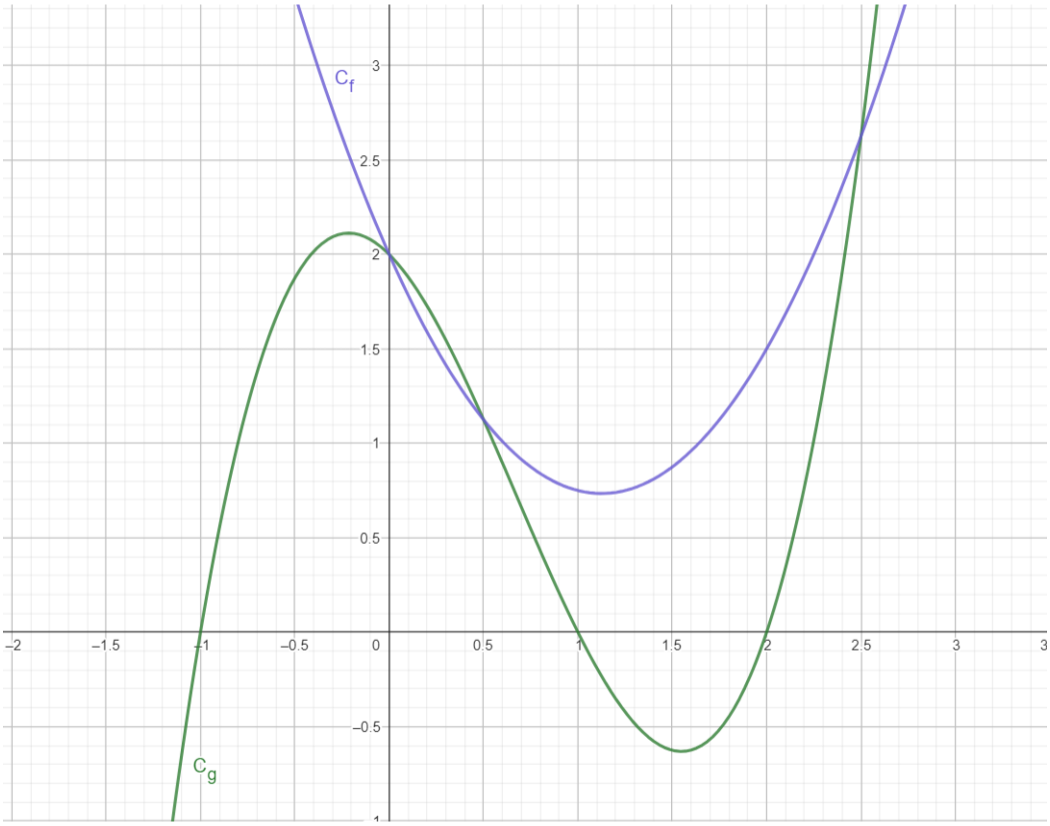
1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que la fonction f est continue en 1.
   (b) Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de la fonction f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty;1[$:
   $$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$$
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.
6. Soit g la restriction de la fonction f sur $[1;+\infty[$.
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   (b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 18 : Soit f une fonction deux fois dérivables sur l'intervalle $[-6;5]$.
On donne dans le repère ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}'$, représentative de la fonction f', dérivée de f.



1. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-6;5]$.
2. Étudier la concavité de f sur l'intervalle $[-6;5]$ et préciser les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

Exercice 19 : La figure en-dessous représente les courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions numériques f et g respectivement.



1. Résoudre graphiquement l'équation
   $g(x) = 0$.
2. Résoudre graphiquement les inéquation
   $g(x) \geq 0$; $g(x) \leq 0$; $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.
3. Résoudre graphiquement l'équation
   $f(x) = g(x)$.
4. Résoudre graphiquement les inéquation
   $f(x) \geq g(x)$ et $f(x) \leq g(x)$.