Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : 2 Bac Sciences Physiques
Durée totale : $15h$

✍ Contenus du programme :

- Continuité en un point ; continuité à droite ; continuité à gauche ; continuité sur un intervalle (cas de fonctions polynômes ; de fonctions rationnelles ; de fonctions trigonométriques et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$).
- Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue;
- Théorème des valeurs intermédiaires; cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.
- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

✍ Les capacités attendues :

- Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle :
  - Par une fonction continue.
  - Par une fonction continue et strictement monotone.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour l'étude de quelques équations ou inéquations ou pour l'étude du signe de quelques expressions ...
- Utiliser la dichotomie pour déterminer des valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ ou pour encadrer ces solutions.
- Applique le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la fonction réciproque dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On adoptera la définition suivante : « f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ».
- On admettra les résultats concernant la continuité des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles, des fonctions trigonométriques et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, en mettant l'accent sur les applications de ces résultats.
- On admettra que que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment ainsi que l'image d'un intervalle est un intervalle et aprés on en déduira le théorème des valeurs intermédiaires.
- On admettra que $f + g$ et $f \times g$ et λf sont des fonctions continues sur un intervalle I si f et g sont continues sur I.
- On admettra que $g \circ f$ est une fonction continue sur un intervalle I si f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$.

Contenu du cour	Durée

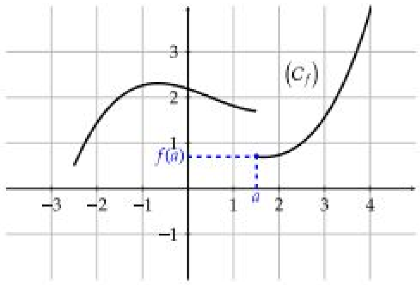
1. Continuité d'une fonction numérique :

1.1. Continuité d'une fonction en un point :

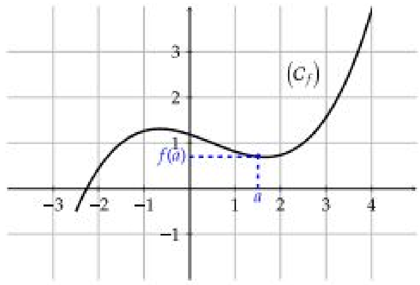
Definition 1

Soit f une fonction numérique definie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
On dit que la fonction f est continue au point a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Interprétation graphique :



f n'est pas continue au point a



f est continue au point a

Exemple 1

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 5 \end{cases}$$

Montrons que la fonction f est continue au point $a = 2$.

Application 1

Dans chacun des cas suivants, étudier le continuité de la fonction f au point a :

1. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad a = 0$$

2. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2x^2 - x + 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad a = -1$$

1.2. Continuité à droite - continuité à gauche :

Definition 2

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + \alpha[$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   On dit que f est continue à droite en a si : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a]$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   On dit que f est continue à gauche en a si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemple 2

Etudions la continuité à droite et à gauche des fonctions suivantes au point a :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2 & \text{si } \ x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-1} & \text{si } \ x > 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|} & \text{si } \ x \neq 1 \\ g(1) = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Proposition 1

Une fonction numérique f est continue au point a si, et seulement si elle est continue à droite et à gauche au point a. En d'autres termes :

$$(f \text{ continue au point } a) \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Application 2

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point a :

1. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-7x-6}{|x-3|} & \text{si } \ x \neq 3 \\ f(3) = 20 \end{cases} \quad \text{et } a = 3$$

2. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+8} & \text{si } \ x > -2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} & \text{si } \ -6 \leq x < -2 \\ f(-2) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad \text{et } a = -2$$

1.3. Continuité d'une fonction sur un intervalle :

Definition 3

1. Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I.
   En particulier f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$.
2. Une fonction f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.
3. Une fonction f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a.
4. Une fonction f est continue sur $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b.

Proposition 2

1. Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
4. Les fonction $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
5. la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

1.4. Fonction partie entiére :

Activité 1

La fonction partie entiére E est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$, où n est l'entier relatif tel que : $n \leq x < n+1$.
Par exemple : $E(0.47) = 0$, $E(5.8) = 5$, $E(-0.4) = -1$.

1. Remplir le tableau suivant :

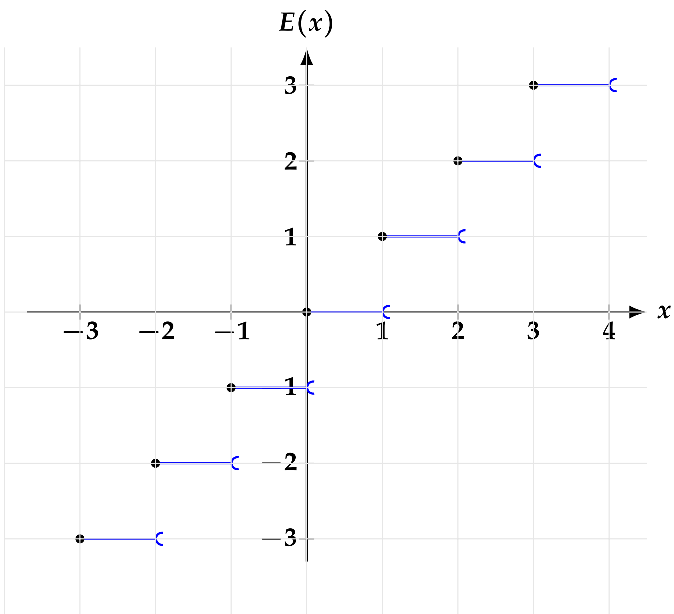
x	3.5	-5	1.23	π	$-\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$
$E(x)$						

2. Que vaut $E(x)$ quand $x \in \mathbb{Z}$?
3. Déterminer $E(x)$ pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout $x \in [1,2[$.
4. La fonction $E(x)$ est-elle continue en 1?

Definition 4

Soit x un nombre réel.
La partie entiére de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x. On la note : $E(x)$.

Courbe représentative de la fonction partie entière :



Proposition 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $x-1 < E(x) \leq x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$.

1.5. Opérations sur les fonctions continues :

Proposition 4

Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et k un nombre réel. Alors :

1. Les fonctions $f+g$, $k.f$ et $f \times g$ sont continues sur I.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f^n : x \longmapsto (f(x))^n$ est continue sur I.
3. Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur I.
4. La fonction $|f|$ est continue sur I.
5. Si la fonction f est positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemple 3

1. La fonction f définie par $f(x) = x^2 + 5x + \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui sont : $x \longmapsto x^2 + 5x$ et $x \longmapsto \cos x$.
2. La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. $g(x) = \sqrt{x}(x^5 + 4x^3 + x + 2)$

Application 3

1. On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - \dfrac{5}{2} & \text{si } x \leq -3 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+10} - 2}{x+3} & \text{si } x > -3 \end{cases}$$
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Image d'un intervalle par une fonction continue :

2.1. Image d'un segment par une fonction continue :

Proposition 5

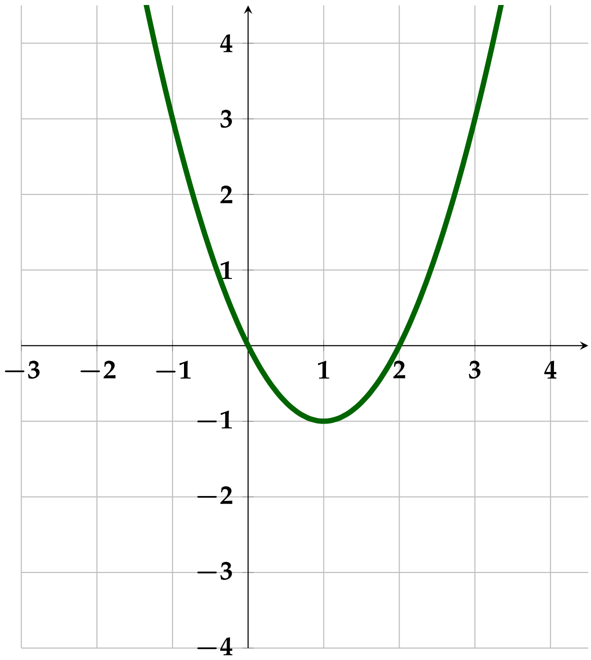
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Autrement dit :
$$(\text{la fonction } f \text{ est continue sur } [a;b]) \Longrightarrow f([a;b]) = [m;M]$$
Avec $m = f(\alpha)$ est le minimum de f sur $[a;b]$ et $M = f(\beta)$ est le maximum de f sur $[a;b]$.

Proposition 6

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple 4

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x$.



À partir du graphe de la fonction f, on déduit que :

- $f([-1;2]) = [-1;3]$; $f([0;2]) = [-1;0]$
- $f([-1;0]) = [0;3]$; $f([2;+\infty[) = [0;+\infty[$
- $f(]-\infty;1]) = [-1;+\infty[$; $f(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$

2.2. Image d'un intervelle par une fonction continue et strictement monotone :

Proposition 7

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
On a alors les résultats suivants :

L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); f(a)\right]$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x); f(a)\right]$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x); \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Exemple 5

Soit f une fontion continue sur les deux intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

On a :

- $f(]-\infty;-3]) =$
- $f(]-3;1[) =$
- $f(]1;4]) =$
- $f(]4;+\infty[) =$

Application 4

Soi f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
Déterminer les images des intervalles suivants par la fonction f :

$I =]-\infty;-2]$ $\qquad$ $I = [0;1]$ $\qquad$ $I = \left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ $\qquad$ $I = [2;5]$

2.3. Continuté de la composée de deux fonctions :

Proposition 8

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, et soit a un élément de I.

1. Si f est continue au point a et g continue au point $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.
2. Si f est continue sur I et g continue sur J alors $g \circ f$ continue sur l'intervalle I.

Exemple 6

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos(\frac{1}{\sqrt{x}})$.
   On a la fonction $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et $f_2 : x \longmapsto \cos x$ continue sur $\mathbb{R}$ et $f_1(]0;+\infty[) \subset \mathbb{R}$, alors la fonction $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur $]0;+\infty[$.
2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{1 - \sin x}$.
   On a la fonction $g_1 : x \longmapsto 1 - \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g_2 : x \longmapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^+$, alors la fonction $g = g_2 \circ g_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.4. Théorème des valeurs intermédiaires :

Proposition 9

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
En d'autre termes : l'équation $f(x) = \lambda$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a;b]$ pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 10

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ tel que $f(a)\times f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins solution dans l'intervalle $[a;b]$. Si de plus, la fonction f est strictement monotone, cette solution est unique.

Exemple 7

1. Montrons que l'équation $8x^3-6x-1=0$ admet une solution dans chacun des intervalles $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right[$, $\left]-\dfrac{1}{2};0\right[$, $]0;1[$.

Application 5

1. Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution dans l'intevalle I :

   (a) $2\cos x-x=0$ et $I=[0;\pi]$

   (b) $\sin x=x^2$ et $I=\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution unique dans I :

   (a) $x^3-6x^2+6=0$ et $I=[-2;0]$

   (b) $x+\sin x=1$ et $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

2.5. Principe de la méthode de Dichotomie :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que l'équation $f(x)=0$ admette une solution unique α dans $[a;b]$.

Étape de la méthode : on commence en calculant le milieu du segment $[a,b]$, à savoir $m=\frac{a+b}{2}$, puis son image par f, c'est-à-dire $f(m)$.

- Cas où $f(m)=0$: on a trouvé la solution $r=m$.
- Cas où $f(m)\neq 0$:
  - Si $f(a)\cdot f(m)<0$, la racine est dans $[a,m]$. On reprend la méthode sur cet intervalle en posant $b=m$, puis on continue comme précédemment.
  - Si $f(m)\cdot f(b)<0$, la racine est dans $[m,b]$. On reprend la méthode en posant $a=m$, puis on continue comme précédemment.

Exemple 8

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=x^3+x^2+x-2$.
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$ et on a $f(0)\times f(1)<0$. Donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $0<\alpha<1$. Déterminons un encadrement de α de longeur $0,25$.
Le centre de $[0;1]$ est $\dfrac{1}{2}$ et on a $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{8}$. Donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\times f(1)<0$ et $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$. (Longeur: $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$)
Le centre de $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ est $\dfrac{3}{4}$ et on a $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{17}{64}$. Donc $f\left(\dfrac{3}{4}\right)\times f(1)<0$ et $\dfrac{3}{4}<\alpha<1$. (Longeur : $1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$). Alors $\dfrac{3}{4}<\alpha<1$

3. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone :

3.1. Théorème de la fonction réciproque :

Proposition 11

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un itervalle I et soit $J = f(I)$.
pour tout $y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique x dans l'intervalle I.
La fonction qui à chaque élément y de J associe l'élément unique x de I tel que $f(x) = y$ est appelée la fonction réciproque de la fonction f et est notée f^{-1}.

Remarque :

- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $J = f(I)$, et si f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction f, alors :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \iff \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

- Pour tout $x \in J$: $f \circ f^{-1}(x) = x$.
- Pour tout $x \in I$: $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Exemple 9

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5$$

Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

Application 6

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$:

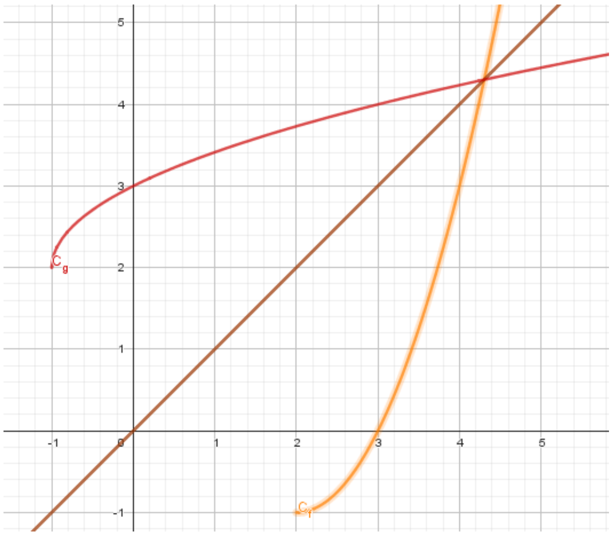
- $f(x) = 4x - x^2$ et $I =]-\infty; 2[$
- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ et $I = [-1; 1]$

3.2. Propriétés de la fonction réciproque :

Proposition 12

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

1. La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que la fonction f.
2. Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un répere orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$)



4. Fonction racine $n^{\text{iéme}}$ Puissances rationnelle :

4.1. Fonction racine $n^{\text{iéme}}$:

Soit n un entier naturel non nul.
La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$; donc elle admet une fonction réciproque définie sur l'inetrvalle $f(\mathbb{R}^+) = [f(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= \mathbb{R}^+$.

Definition 5

Soit n un entier naturel non nul.
La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \longmapsto x^n$ admet une foction réciproque définie sur $\mathbb{R}^+$. Cette fonction est appelée fonction racine $n^{\text{iéme}}$ et est notée $\sqrt[n]{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit «racine $n^{\text{iéme}}$ de x»

Proposition 13

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

- $\sqrt[n]{x} = y \Longleftrightarrow y^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x < y$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$
- La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Remarque :
Pour tout $x \geq 0$: $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

Proposition 14

Soient a et b deux réels positifs, et p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On a alors les propriétés suivantes :

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ (avec $a > 0$)
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

Exemple 10

1. Simplifions le nombre : $A = \sqrt{\sqrt{3}} + 2\sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{81}$
2. Comparons les deux nombres $a = \sqrt[5]{3}$ et $b = \sqrt[4]{4}$
3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sqrt[4]{4-x} = 2$ et $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}$

Application 7

1. Simplifier les nombres suivants : $A = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{64}}}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$ et $B = \dfrac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}}}{\sqrt[5]{729}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

2. Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\sqrt[12]{9}$; $\sqrt[6]{10}$; $\sqrt[4]{7}$; $\sqrt{3}$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   $16x^4 - 81 = 0 \quad ; \quad \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12 \quad ; \quad 64 + 125x^3 = 0 \quad ; \quad (x-1)^3 + 2 = 0$

4. Résoudre les inéquations suivantes :

   $x^3 - 8 \geq 0 \quad ; \quad \sqrt[5]{x+2} < 2 \quad ; \quad \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 8}$

Proposition 15

Soit f une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

Exemple 11

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x - 9}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x} - 2x$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x} - x$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Application 8

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+3} - 2}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ f(5) = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction f est continue sur l'intervalle $[-3; \infty[$.

   (b) Calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Calculer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{1 - x^3} + 2x \quad ; \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x} - 2}{\sin x} \quad ; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}} \quad ;$

4.2. Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif :

Definition 6

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel. On pose $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle du nombre a d'exposant r.

Remarque :

Soit a un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^* - 1$.
On a $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{a} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. De façon générale, on a l'égalité : $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 16

Soit r et r' deux nombres rationnels, et a et b deux réels strictement positifs.
Alors on a les égalités suivantes :
$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$; $(ab)^r = a^r.b^r$; $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$; $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$; $\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

Exemple 12

Simplifions le nombre $A = \dfrac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

Application 9

1. Simplifier les nombres suivants :

$$A = 27^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[4]{8^{-2}}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}} \text{ et } B = \frac{125^{\frac{2}{9}} \times 625^{\frac{1}{4}} \times 25^{\frac{5}{2}}}{5^{\frac{17}{3}}}$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} - 3x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - 8}{x}$$