Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : 2 Bac Sciences Physiques
Durée totale : $5h$

Etapes	Contenu du cour	Durée

1. Les équations du deuxiéme degrée :

Proposition 1

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ où $a\neq 0$.
On pose $\Delta=b^2-4ac$ comme discriminant de cette équation. Les solutions possibles sont les suivantes :

- Si $\Delta<0$, l'équation n'admet pas de solution, et son ensemble de solutions est $S=\emptyset$.
- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution unique, $S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes, à savoir :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemple 1

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+4x-5=0$
2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2-3x-5=0$
3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+x+1=0$

Proposition 2

On considère le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ et soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta<0$, alors le signe de $P(x)$ est celui de a pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, alors le signe de $P(x)$ est celui de a pour tout $x\neq -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, alors le signe de $P(x)$:
  - est celui de a à l'extérieur des racines ;
  - est le signe contraire de a à l'intérieur des racines.

Exemple 2

1. Etudions le signe du trinôme $P(x)=-3x^2+x-2$

Application 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et étudier le signe de chaque trinôme sur $\mathbb{R}$:

1. $2x^2-x-1=0$
2. $x^2-6x+9=0$

2. Le domaine de définition d'une fonction :

Définition 1

Soit f une fonction numérique. Le domaine de définition de f, noté D_f, est l'ensemble des réels x pour lesquesls $f(x)$ est bien définie.
Autrement dit, D_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que l'expression de $f(x)$ existe et a un sens.

Exemple 3

1. L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
2. L'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathbb{R}^+$.

Proposition 3

Soient P et Q deux polynômes et f une fonction numérique.

1. Si $f(x) = P(x)$ alors, $D_f = \mathbb{R}$
2. Si $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ alors, $D_f = \{x \in \mathbb{R}\backslash\ Q(x) \neq 0\}$
3. Si $f(x) = \sqrt{P(x)}$ alors, $D_f = \{x \in \mathbb{R}\backslash\ P(x) \geq 0\}$
4. Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ alors, $D_f = \{x \in \mathbb{R}\backslash\ P(x) \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$
5. Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$ alors, $D_f = \{x \in \mathbb{R}\backslash\ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ et } Q(x) \neq 0\}$

Application 2

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 5$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 8x + 9}{x^2 - 4x}}$

3. Limite d'une fonction numérique :

3.1. Limites usuelles : :

Proposition 4

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Proposition 5

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ g) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

i) Si n est paire et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

j) Si n est impaire et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

Proposition 6

Soit n un entier naturel non nul. Alors :

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ b) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ d) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$

e) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

f) Si n est paire et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

g) Si n est impaire et $n \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

Théorème 1

Soit f une fonction numérique.

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

3.2. Limite d'une fonction polynômiale - Limite d'une fonction rationnelle :

Proposition 7

Soit P et Q deux fonctions polynômes et x_0 un réel. alors :

a) $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ b) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ si $Q(x_0) \neq 0$

Si ax^n et bx^m sont respectivement les termes du plus haut degré des polynômes P et Q, alors :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$

Application 3

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + 1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^4 + 4x - 10}{3x^5 - x}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^6 + 4x - 10}{3x^6 + 2x + 1}$

3.3. Opérations sur les limites :

Proposition 8

Dans tout ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;\ +\infty\}$); l et l' sont des nombres réels. Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée	

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)]$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$ ou $l<0$	$+\infty$ ou $l>0$	$+\infty$ ou $l>0$	$-\infty$ ou $l<0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	

Application 4

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt{x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)\dfrac{1}{x}$

3.4. Limites d'une fonction irrationnelle :

Proposition 9

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ (où a est un réel) telle que:

$$\forall x \in [a;+\infty[,\ f(x) \geq 0$$

Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ et $\ell \geq 0$, alors:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$$

Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, alors:

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$$

Application 5

Calculer les limites suivantes :

a) $\sqrt{2x^2+x+1}$ b) $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$ c) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+4}}$

3.5. Limite de fonctions trigonométriques :

Proposition 10

On a les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

b) Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

d) Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

f) Pour tout réel a, $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Application 6

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{5x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\tan x}$

3.6. Limite et ordre :

Proposition 11

Soit a et l deux réels et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Soit f, u et v des fonction numériques définie sur un voisinage de x_0 I.

1. Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

2. Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = -\infty \end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

3. Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0 \end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

4. Si $\begin{cases} (\forall x \in I);\ u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = l \end{cases}$ alors, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Application 7

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x + \cos^2(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(\dfrac{1}{x})$ c) $\lim\limits_{x\to 0} 1 + x^2 \cos\dfrac{1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$