Dérivation et étude de fonctions numériques

Exercice 1 : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3+\frac{3}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^8}+8$; $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3+6n^2-n+9$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2n+n^2+1}{n^3-6n^2+n-1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n-5\sqrt{n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+(-1)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+2\sqrt{n}}{2-3\sqrt{n}}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1}-n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-2)\frac{1}{\sqrt[5]{n^3}}$

Exercice 2 : Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0=-1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n}$$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}) : u_n<3$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}) : v_n=\frac{1}{u_n-3}$$

   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

1. Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$$

2. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+2}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ 1\leq u_n<2$.

2) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+2}$.

3) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.