Limites et continuité

Exercice 1 :

Étudier la continuité de la fonction f en x_0:

1. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1, \\ f(1) = -3 \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

2. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12} & \text{si } x \neq 3, \\ f(3) = -4 \end{cases} \qquad x_0 = 3$$

3. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$

4. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+8x+12} & \text{si } x > -2, \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2} & \text{si } x < -2, \\ f(-2) = \dfrac{1}{4} & \text{si } x = -2, \end{cases} \qquad x_0 = -2$$

5. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x^2-3x+2|}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2, \\ f(2) = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad x_0 = 2$$

6. $$\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{1}{|x-2|} & \text{si } x \neq 2, \\ f(2) = 1 \end{cases} \qquad x_0 = 2$$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f soit continue en x_0 :

1. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1, \\ f(1) = a \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

2. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ f(1) = a \end{cases} \qquad x_0 = 1$$

3. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\tan(x)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{3}, \\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = a \end{cases} \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{3}$$

4. $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax^2+(a+1)x+1}{2x^2+x-1} & \text{si } x \neq -1, \\ f(-1) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad x_0 = -1$$

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

1. $f(x) = x^2 + 3x + \cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$
3. $f(x) = \dfrac{3x^2+5x-4}{x^2+3}\sqrt{2x^2-x+3}$
4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2-3x+2}$
5. $f(x) = \cos(-3x^2+5)$

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = |x| + x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x}(x^2+2) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.
2. Montrer que f est continue en 1. Que déduit-on?

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-1$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

1. Dresser le tableau de varoations de f.

2. Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par ma fonction f :

   $I =]1;3]$; $J =]1;+\infty[$; $K = \mathbb{R}^-$

   $L =]-\infty;1[$

Exercice 6 :
Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans I :

1. $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$; $I = [2;3]$
2. $x^4 - 2x - \sqrt{x} + 1 = 0$; $I =]0;1[$
3. $x - 2\sin x = 0$; $I = \left]\dfrac{\pi}{3};\pi\right[$
4. $\dfrac{3}{2}x - \tan x = 0$; $I = \left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right[$

Exercice 7 :
Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet une solution unique dans I :

1. $2x^3 + 3x - 3 = 0$; $I = [0;1]$
2. $x^4 + 2x - 3 = 0$; $I = \left[\dfrac{1}{2};\sqrt{2}\right]$
3. $\tan x = x + 1$; $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 8 :
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

1. Calculer : $f(-1)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f(0)$; $f(1)$
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions dans l'intervalle $[-1;1]$.

Exercice 9 :
Soit f une fontion continue sur les deux intervalles $]-\infty;2[$ et $]2;+\infty[$ et dont le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

1. Déterminer :

   $f(]-\infty;0])$; $f([0;2[)$; $f(]2;+\infty[)$
   $f(]-\infty;2[)$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Même question pour les équations :

$$f(x) = 3 \quad ; \quad f(x) = -2 \quad ; \quad f(x) = 7$$

Exercice 10 :
Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1;1[$.
2. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,25$.

Exercice 11 :
Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ par : $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f^{-1}.
3. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 12 :
Dans chacun des cas suivants, montrer que f définie sur l'intervalle I admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer, puis donner une expression de $f^{-1}(x)$:

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$; $I = [5;+\infty[$
2. $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$; $I = [1;+\infty[$
3. $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $I =]-\infty;3]$
4. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $I = \mathbb{R}^+$
5. $f(x) = \left(\sqrt{3-x} + 1\right)^2$; $I =]-\infty;3]$
6. $f(x) = -\sqrt{x^2 - 2}$; $I = [1;+\infty[$

7. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$; $I = \left[0; \frac{1}{16}\right]$

Exercice 13 :

1. Simplifier les nombres suivants :

$$a = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{\sqrt[3]{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[6]{64 \times 10^6}}, \quad b = \frac{\sqrt[15]{3} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt{9})^3}{\sqrt[4]{27} \times \sqrt{\sqrt{3}}}$$

$$c = \frac{\sqrt[4]{2048} \times \sqrt[4]{160000}}{\sqrt[8]{4096} \times \sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt{512}}$$

2. Simplifier les nombres suivants :

$$x = (27)^{\frac{2}{3}} \times (16)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[3]{8^{-2}}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$$

$$y = \frac{(81)^{\frac{2}{9}} \times (27)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{14}{3}}}$$

$$z = \frac{a^{\frac{5}{3}} \times \left(\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}}\right)^3 \times b^{\frac{5}{2}}}{\left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[5]{b^{-\frac{3}{4}}}}$$

(ici $a, b \in \mathbb{R}_+^*$).

3. Comparer les deux nombres : $\sqrt[5]{91}$ et $\sqrt[3]{15}$

4. Ordonner dans lordre croissant les nombres :

$$A = \sqrt{2}, \quad B = \sqrt[3]{4}, \quad C = \sqrt[6]{5}, \quad D = \sqrt[4]{3}$$

5. Écrire les dénominateurs des nombres suivants sous la forme dun nombre rationnel :

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}, \quad \frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1}, \quad \frac{\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{2}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$$

Exercice 14 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $x^8 - 9 = 0$
2. $8x^3 + 27 = 0$
3. $x^7 = \sqrt{2}$
4. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{7}$
5. $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$
6. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 12$
7. $4x^3 - 125 \geq 0$
8. $\sqrt{2x+1} < 3 + \sqrt{x+2}$
9. $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Exercice 15 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x} - 1}; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x - x^3}}{2 - x}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{\sin x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt[3]{x+6}}{3 - \sqrt{2x+5}}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt[4]{x} - 1}; \quad \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt[3]{5-x} - 1}{2 - \sqrt[3]{x+4}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}; \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x - 2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}}$$