Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : $4h$

✍ Contenus du programme :

- Notion de polynôme, égalité de deux polynômes;
- Somme et produit de deux polynômes;
- Racine d'un polynôme, division par $x - a$;
- Factorisation d'un polynôme. premiers

✍ Les capacités attendues :

- Maitriser la technique de la division euclidienne par $x - a$ et reconnaitre la divisibilité par $x - a$.

✍ Recommandations pédagogiques :

- Il faudra écarter toute construction théorique de la notion de polynôme. ON se basera pour son introduction sur des exemples simples en indiquant les élément caractéristique de la division euclidienne par $x - a$ (degré, termes, coefficient)
- La technique de la division euclidien par $x - a$ joue un rôle dans la factorisation d'un polynôme dont une racine est a, toutefois une importance devra être accordée aux autres techniques de factorisation.

1. Polynôme :

Définition 1

On appelle polynôme toute expression $P(x)$ qui s'écrit sous la forme :

$$P(x) = ax^n + bx^m + cx^p + \dots$$

où n, m et p sont des entiers naturels et a, b et c sont des nombres réels.
Les nombres a, b et c sont appelés coefficient du polynôme $P(x)$.

Exemple 1

1. $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ est un polynôme dont les coefficient sont -2, 7, -3 et 1.
2. $Q(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x - 5$ est un polynôme dont les coefficient sont 4, 7, -3 et 1.

Définition 2

Le degré d'un polynôme P est la puissance la plus élevée de ses termes, on le note par : $deg(P)$.

Exemple 2

1. $P(x) = x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + \frac{1}{2}$ est un polynôme de degré 3 ($deg(P) = 3$).
2. $Q(x) = 2x + 1$ est un polynôme de degré 1 ($deg(Q) = 1$).

2. Égalité de deux polynômes :

Proposition 1

- On dit qu'un polynôme $P(x)$ est nul si tous ses coefficients sont nuls. On écrit $P(x) = 0$.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si, ils ont le même degré et les coefficient des termes de même degré sont égaux.

Exemple 3

1. On pose $P(x) = -2x^4 + 4x^2 + 5x - 1$ et $Q(x) = 5x + 2 - 2(x^2 - 1)^2 - 1$. Montrons que $P(x) = Q(x)$.
2. On pose $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5x + -1$ et $Q(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + cx^2 + (2c+d)x - 1$.
   Déterminons a, b, c et d sachant que $P(x) = Q(x)$.

Application 1

On pose $P(x) = 3x^2 + (b-3)x + 4$ et $Q(x) = (a-1)x^2 + c$.
Déterminer a, b et c sachant que $P(x) = Q(x)$.

3. Opérations sur les polynômes :

3.1. Somme de deux polynômes :

Exemple 4

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 6 \text{ et } Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9$$

Calculons $P(x) + Q(x)$ et $deg(P(x) + Q(x))$.

Application 2

Calculer la somme des deux polynômes et déterminer le degré de la somme, dans chacun des cas suivants :

$$\begin{cases} P(x) = 7x^6 - 6x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \\ Q(x) = 8x^7 - 6x^6 + 7x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 11 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} G(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 13x + 1 \\ H(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x^5 - 9x \end{cases}$$

3.2. Produit d'un nombre réel par un polynôme :

Exemple 5

On considère le polynôme : $P(x) = 4x^5 - 3x^2 + x + 1$.
Calculons $3P(x)$.

Application 3

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 6 \text{ et } Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9$$

Calculer $2P(x) - 3Q(x)$.

3.3. Produit de deux polynômes :

Exemple 6

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1 \text{ et } Q(x) = 2x^2 - 3x + x - 9$$

Calculons $P(x) \times Q(x)$ et $deg(P(x) \times Q(x))$.

4. Division par $(x - \alpha)$:

Proposition 2

Soit $P(x)$ un polynôme de degré non nul.
Soit α un nombre réel.
Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$.

- $Q(x)$ est appelé quotient de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.
- $P(\alpha)$ est appelé reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.

Exemple 7

- Déterminions le quotient et le reste de la division euclidien du polynôme : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 2$ par $x - 3$.
- Déterminions le quotient et le reste de la division euclidien du polynôme : $T(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 52$ par $x + 3$.

Remarque :

Si le reste de la division euclidienne de du polynôme $P(x)$ par $x - \alpha$ égale 0, on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$.

Application 4

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidien du polynôme $P(x)$ par $x-\alpha$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 36 \quad ; \quad \alpha = -2$.
2. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15 \quad ; \quad \alpha = 3$.
3. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 24x - 12 \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{2}$.

5. Racine d'un polynôme :

Définition 3

Soit $P(x)$ un polynôme et soit α un nombre réel.
On dit que α est une racine (ou un zéro) du polynôme $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 8

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 45$.

- On a : $P(1) = 2 - 3 - 4 - 45 = -50$.
  Donc 1 n'est pas une racine de $P(x)$, car $P(1) \neq 0$.
- On a $P(3) = 0$.
  Donc 3 est une racine du polynôme $P(x)$.

Proposition 3

Soit α un nombre réel. Alors : α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x-\alpha)$.

Exemple 9

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - (3+\sqrt{2})x^2 + (2+\sqrt{3})x - 2\sqrt{2}$.
On a $P(2) = 0$, alors 2 est une racine du polynôme $P(x)$.
Donc le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-2)$.