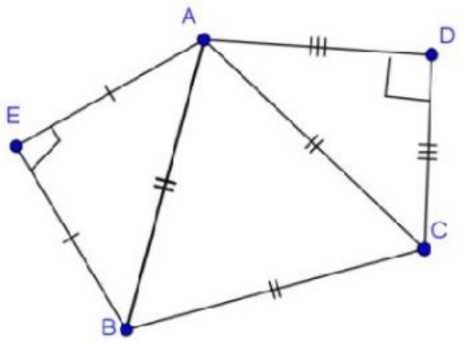
Calcul trigonométrique

Exercice 1 :

1. Convertir en radian les mesures suivantes :
   15° ; 100° ; 172° ; 400° ; 500° ; 2025°
2. Convertir en degré les mesures suivantes :
   $\frac{\pi}{9}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{15}$; $\frac{5\pi}{9}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{12}$

Exercice 2 : On considère la figure ci-contre,



Donner la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right);\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AC}\right);\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}\right);\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{EB}\right);\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$$

Exercice 3 : Soit ABC un triangle dans le plan tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\alpha[2\pi]$. Calculer en fonction de α les mesures des angles orientés suivants :

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right);\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right);\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}\right)\text{ et }\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$$

Exercice 4 : Soient $\overrightarrow{U}$, ‘$\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{K}$ des vecteurs dans le plan tels que :

$$\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi];\left(\overrightarrow{W},\overrightarrow{V}\right)=-\frac{\pi}{3}[2\pi];\left(\overrightarrow{K},\overrightarrow{W}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Déterminer les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{K}\right)$.

Exercice 5 :

1. Calculer $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sachant que :
   $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.
2. Calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sachant que :
   $\tan(x)=2\sqrt{3}$ et $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$.
3. Calculer $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sachant que :
   $\tan(x)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ et $x\in]-\pi;0[$.
4. Calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sachant que :
   $\cos(x)=-\frac{3}{4}$ et $-\pi<x<0$.

Exercice 6 : Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que :
   $$(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=2$$
2. On suppose que : $\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}$.
   (a) Montrer que $\cos(x)+\sin(x)=0$
   (b) Déduire les valeurs de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 7 : Simplifier les expression suivantes :

1. $A=(\cos(x)+\sin(x))^2-(\cos(x)-\sin(x))^2$
2. $B=\cos^4(x)-\sin^4(x)+\sin^2(x)-\cos^2(x)$
3. $C=\sin^4(x)-\cos^4(x)+2\cos^2(x)$

Exercice 8 : Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que : $\cos(x)\neq 0$.
Montrer que :

1. (a) $\tan^2(x)-\sin^2(x)=\tan^2(x).\sin^2(x)$
   (b) Déduire que : $\sin^2(x)=\dfrac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$
2. $\dfrac{\sin^2(x)-\sin^4(x)}{\cos^2(x)-\cos^4(x)}=1$

Exercice 9 : Soit x un nombre réel.

1. Simplifier :
   $\sin(30\pi + x)$; $\cos(400\pi + x)$; $\sin(3\pi + x)$; $\cos(51\pi + x)$; $\sin(17\pi - x)$; $\cos(45\pi - x)$; $\sin(102\pi + x)$; $\cos(40\pi + x)$.

2. Simplifier :
   $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$; $\cos\left(\frac{51\pi}{2}-x\right)$

Exercice 10 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier :

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin(5\pi-x)-\cos(3\pi-x)$$
$$B = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(x+3\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)$$

Exercice 11 : Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
Soit $A(x) = \sin(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x))$

1. Calculer $A(0), A\left(\frac{\pi}{4}\right), A\left(\frac{\pi}{3}\right), A\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
2. Montrer que : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Exercice 12 : Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
Soit $A(x) = \frac{1}{2}\left[(\cos^2(2x)-\sin^2(2x))-1\right]$

1. Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Montrer que : $A(x) = \sin(2x)\cos(2x)$.
3. Montrer que : $A(-x) = -A(x)$
4. Calculer : $A(x) + A\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 13 : Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations et les inéquations suivantes :
$\bullet \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\bullet 2\cos(x)+\sqrt{2}=0$ $\bullet \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$
$\bullet \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\bullet 2\cos(x)+\sqrt{2}<0$ $\bullet \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{1}{2}$

Exercice 14 : Résoudre dans $]0,2\pi]$ les équations et les inéquations suivantes :
$\bullet \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\bullet 2\sin(x)+\sqrt{3}=0$ $\bullet \sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$\bullet \sin(x) \geq \frac{1}{2}$ $\bullet 2\sin(x)+\sqrt{3}<0$ $\bullet \sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice 15 : Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ les équations et les inéquations suivantes :
$\bullet \tan(x) = \sqrt{3}$ $\bullet \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$ $\bullet \tan(x) > \sqrt{3}$
$\bullet \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>0$

Exercice 16 : Soit x un nombre réel.
On pose : $A(x) = 2\cos^2(x)+\sin(x)-1$.

a) Calculer $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

b) Vérifier que : $A(x) = (1-\sin(x))(1+2\sin(x))$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$.

Exercice 17 : Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I :

- $2\cos^2(x)-\cos(x)=0$, $I =]-\pi,\pi]$
- $\sin^2(x)-\sin(x)=0$, $I =]-\pi,\pi]$
- $2\cos^2(x)-3\cos(x)=0$, $I =]-2\pi,\pi]$
- $\sin^2(x)-3\sin(x)=0$, $I =]-\pi,\pi]$
- $\tan^2(x)-\sqrt{3}\tan(x)=0$, $I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$