Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025

Niveau : Tronc commun scientifique

Durée totale : $7h$

✍ Contenus du programme :

- Notion de polynôme, égalité de deux polynômes;
- Somme et produit de deux polynômes;
- Racine d'un polynôme, division par $x - a$;
- Factorisation d'un polynôme. premiers

✍ Les capacités attendues :

- Maitriser la technique de la division euclidienne par $x - a$ et reconnaitre la divisibilité par $x - a$.

✍ Recommandations pédagogiques :

- Il faudra écarter toute construction théorique de la notion de polynôme. ON se basera pour son introduction sur des exemples simples en indiquant les élément caractéristique de la division euclidienne par $x - a$ (degré, termes, coefficient)
- La technique de la division euclidien par $x - a$ joue un rôle dans la factorisation d'un polynôme dont une racine est a, toutefois une importance devra être accordée aux autres techniques de factorisation.

Etapes	Contenu du cours	Durée

1. Polynôme :

Définition 1

On appelle polynôme toute expression $P(x)$ qui s'écrit sous la forme :

$$P(x) = ax^n + bx^m + cx^p + \dots$$

où n, m et p sont des entiers naturels et a, b et c sont des nombres réels.
Les nombres a, b et c sont appelés coefficient du polynôme $P(x)$.

Exemple 1

1. $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 3x + 1$ est un polynôme dont les coefficient sont -2, 7, -3 et 1.
2. $Q(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x - 5$ est un polynôme dont les coefficient sont 4, 7, -3 et 1.

Définition 2

Le degré d'un polynôme P est la puissance la plus élevée de ses termes, on le note par : $deg(P)$.

Exemple 2

1. $P(x) = x^3 - x^2 + \sqrt{3}x + \dfrac{1}{2}$ est un polynôme de degré 3 ($deg(P) = 3$).
2. $Q(x) = 2x + 1$ est un polynôme de degré 1 ($deg(Q) = 1$).

2. Égalité de deux polynômes :

Proposition 1

- On dit qu'un polynôme $P(x)$ est nul si tous ses coefficients sont nuls. On écrit $P(x) = 0$.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si, ils ont le même degré et les coefficient des termes de même degré sont égaux.

Exemple 3

1. On pose $P(x) = -2x^4 + 4x^2 + 5x - 1$ et $Q(x) = 5x + 2 - 2(x^2 - 1)^2 - 1$. Montrons que $P(x) = Q(x)$.
2. On pose $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5x + -1$ et $Q(x) = ax^4 + (a+b)x^3 + cx^2 + (2c + d)x - 1$.
   Déterminons a, b, c et d sachant que $P(x) = Q(x)$.

Application 1

On pose $P(x) = 3x^2 + (b-3)x + 4$ et $Q(x) = (a-1)x^2 + c$.
Déterminer a, b et c sachant que $P(x) = Q(x)$.

3. Opérations sur les polynômes :

3.1. Somme de deux polynômes :

Exemple 4

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 6 \text{ et } Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9$$

Calculons $P(x) + Q(x)$ et $deg(P(x) + Q(x))$.

Application 2

Calculer la somme des deux polynômes et déterminer le degré de la somme, dans chacun des cas suivants :

$$\begin{cases} P(x) = 7x^6 - 6x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4 \\ Q(x) = 8x^7 - 6x^6 + 7x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 11 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 13x + 1 \\ H(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x^5 - 9x \end{cases}$$

3.2. Produit d'un nombre réel par un polynôme :

Exemple 5

On considère le polynôme : $P(x) = 4x^5 - 3x^2 + x + 1$.
Calculons $3P(x)$.

Application 3

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8x + 6 \text{ et } Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 9$$

Calculer $2P(x) - 3Q(x)$.

3.3. Produit de deux polynômes :

Exemple 6

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1 \text{ et } Q(x) = 2x^2 - 3x + x - 9$$

Calculons $P(x) \times Q(x)$ et $deg(P(x) \times Q(x))$.

4. Division par $(x - \alpha)$:

Proposition 2

Soit $P(x)$ un polynôme de degré non nul.
Soit α un nombre réel.
Il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$.

- $Q(x)$ est appelé quotient de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.
- $P(\alpha)$ est appelé reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x - \alpha)$.

Exemple 7

- Déterminions le quotient et le reste de la division euclidien du polynôme : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 2$ par $x - 3$.
- Déterminions le quotient et le reste de la division euclidien du polynôme : $T(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 52$ par $x + 3$.

Remarque :
Si le reste de la division euclidienne de du polynôme $P(x)$ par $x - \alpha$ égale 0, on dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$.

Application 4

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidien du polynôme $P(x)$ par $x - \alpha$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 36 \quad ; \quad \alpha = -2$.
2. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5x + 15 \quad ; \quad \alpha = 3$.
3. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 24x - 12 \quad ; \quad \alpha = -\frac{1}{2}$.

5. Racine d'un polynôme :

Définition 3

Soit $P(x)$ un polynôme et soit α un nombre réel.
On dit que α est une racine (ou un zéro) du polynôme $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$.

Exemple 8

On considère le polynôme $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 45$.

- On a : $P(1) = 2 - 3 - 4 - 45 = -50$.
  Donc 1 n'est pas une racine de $P(x)$, car $P(1) \neq 0$.
- On a $P(3) = 0$.
  Donc 3 est une racine du polynôme $P(x)$.

Proposition 3

Soit α un nombre réel. Alors : α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$.

Exemple 9

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - (3 + \sqrt{2})x^2 + (2 + \sqrt{3})x - 2\sqrt{2}$.
On a $P(2) = 0$, alors 2 est une racine du polynôme $P(x)$.
Donc le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - 2)$.