Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : $8h$

✍ Contenus du programme :

- Équations et inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Équations et inéquations du second degré à une inconnue ;
  - Forme canonique d'un trinôme ;
  - Équations du second degré à une inconnue ;
- Signe d'un trinôme du second degré ;
- Inéquations du second degré à une inconnue ;
- Les systèmes :
  - Équations du premier degré à deux inconnues ;
  - Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues ;
  - Régionnement du plan.

✍ Les capacités attendues :

- Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier ou du second degré à une inconnue ;
- Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues en utilisant différentes méthodes (combinaison linéaire, substitution, déterminant) ;
- Mathématiser, en utilisant des expressions, des équations, des inéquations, des inégalités ou des systèmes, une situation faisant intervenir des quantités variables ;
- Représenter graphiquement les solutions d'inéquations ou de systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues, et utiliser cette représentation dans le régionnement du plan et dans la résolution de problèmes.

✍ Recommandations pédagogiques :

- Les techniques de résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue ont été étudiées au collège, il faudra renforcer cette pratique par l'étude de quelques exemples simples faisant intervenir la valeur absolue et les équations paramétriques simples, dans le but de développer la capacité des élèves à utiliser le raisonnement par disjonction des cas.
- Il faudra habituer les élèves à résoudre des équations du second degré sans recours au discriminant (racines évidentes, techniques de factorisation,...).
- Les équations et inéquations paramétriques du second degré sont hors programme ;
- Des problèmes, issus de la vie quotidienne ou des autres matières, devront être proposés dans le but d'habituer les élèves à mathématiser des situations et de les résoudre ;

1. Équations du premier degré à une inconnue :

Rappel 1:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivants :

$$(E_1) : 2x - 3 = 0 \ ; \ (E_2) : 4x + 1 = 0 \ ; \ (E_3) : 2x - 3 - 3(1 - x) = 0$$

$$(E_4) : 2x - 1 - \frac{1}{2}(2 + x) = 4x - 9 \ ; \ (E_5) : 2x - 1 = 2(x + 1) \ ; \ (E_6) : \frac{x - 1}{2} - \frac{2x + 5}{3} = 4 - \frac{x}{6}$$

$$(E_7) : (2x - 3)(\frac{3}{2}x + 5) = 0 \ ; \ (E_8) : (3x - 4)(5x + 1) - 2(3x - 4)(1 - x) = 0$$

2. Inéquations du premier degré à une inconnue :

Rappel 2:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivants :

$$(I_1) : 2x - 6 \leq 0 \ ; \ (I_2) : 4x + 5 \geq 0 \ ; \ (I_3) : \frac{1}{2}x - 1 \leq 1 \ ; \ (I_4) : 3x + 1 \leq 0$$

3. Signe du binôme $ax + b$: :

Proposition 1

On considère le binôme $ax + b$ où $a \neq 0$.

- Si $x \geq -\frac{b}{a}$, alors $ax + b$ et a ont le même signe.
- Si $x \leq -\frac{b}{a}$, alors $ax + b$ et a sont de signes contraires.

Tableau de signe du binôme $ax + b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		signe de a	0	signe de $-a$	

Exemple 1

1. Tableau de signe de $2x + 5$ et $-3x + 7$.
2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x - 3)(-5x + 3) \leq 0$.

Application 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations :

1. $5x^2 - 25 \geq 0$
2. $(4x - 5)(2x + 7)(x - 1)$

4. Système de deux équations du premier degré :

Proposition 2

On considère le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, on pose $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$ le determinant de système (S).

1. Le système (S) admet une solution unique si et seulement si $\Delta \neq 0$

   Dans ce cas, la solution est le couple (x, y) défini par : $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$

Exemple 2

Résolvons les systèmes suivants :

1. $(S_1) : \begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

2. $(S_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

5. Équations du second degré à une inconnue :

Définition 1

- Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de cette équation ou discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple 3

- L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ admet 1 et 3 comme solutions.
- L'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$ admet 2 comme solution.
- Le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ est ...

Application 2

Calculer le discriminant de chacune des équations suivantes :

1. $-2x^2 + x + 1 = 0$
2. $x^2 + x + 2 = 0$
3. $25x^2 - 10x + 1 = 0$

Proposition 3

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.
et soit S son ensemble de solutions.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution et on a : $S = \emptyset$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique $-\dfrac{b}{2a}$ et on a : $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes à savoir : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a $S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Application 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2 + 4x - 5 = 0$
2. $2x^2 + 5x + 7 = 0$
3. $x^2 - 6x + 8 = 0$
4. $3x^2 + 2x + 1 = 0$

6. Factorisation d'un trinôme du second degré :

Proposition 4

On considère le trinôme ax^2+bx+c. Soit Δ son discriminant.

- Si Δ, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distincts x_1 et x_2 et on a :

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

- Si $\Delta=0$, alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$
- Si $\Delta<0$, alors le trinôme $ax^2+bx+c=0$ ne peut pas être factorisé de polynômes du premier degré.

Exemple 4

Factorisons les trinômes suivants :

- $P(x)=2x^2-x-1$
- $Q(x)=-4x^2+4\sqrt{3}x-3$
- $R(x)=x^2+x+1$

Application 4

Factoriser les polynômes suivants :

1. $L(x)=4x^2+5x+1$
2. $H(x)=25x^2-10\sqrt{2}x+2$
3. $K(x)=-3x^2+2x-7$

7. Somme et produit des solutions d'une équation du second degré :

Proposition 5

Si le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est strictement positif (Δ), alors les deux solutions x_1 et x_2 de cette équation vérifiant les deux égalités :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Exemple 5

- $-2x^2+x+\sqrt{3}=0$
- En notant que 1 est une solution de l'équation $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ déterminons l'autre solution.

8. Signe d'un trinôme du second degré :

Proposition 6

On considère le trinôme $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ et soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta<0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x différent du réel $\dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, alors le signe de $P(x)$ est :
  - le signe de a à l'extérieur des racines ;
  - le signe contraire de a à l'intérieur des racines.

Exemple 6

Étudions le signe des trinômes suivants :

1. $P(x) = -3x^2 + x - 2$
2. $Q(x) = 2x^2 - x - 1$
3. $R(x) = 16x^2 - 8\sqrt{3}x + 3$

9. Inéquations du second degré :

Définition 2

On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.
Tout inéquation de la forme $P(x) \geq 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ ou $P(x) < 0$ est appelée inéquation du second degré.

Application 5

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2 - 7x + 12 \geq 0$
2. $-3x^2 + x - 1 \leq 0$
3. $16x^2 + 8\sqrt{2}x + 3 < 0$