Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : $5h$

✍ Contenus du programme :

- Ecriture et notations;
- Exemples des nombres irrationnels;
- Opérations dans $\mathbb{R}$, propriétés;
- Les puissances et leurs propriétés;
- Puissance de 10; écriture d'un décimal;
- Les identités remarquables : $(a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^3-b^3$ et a^3+b^3;
- développement et factorisation.

✍ Les capacités attendues :

- Reconnaître les relation entre les nombres et distinguer les différents ensembles de nombres;
- Déterminer l'écriture convenable d'une expression algébrique selon la situation étudiée.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On fera la synthèse des connaissances acquises par les élèves à propos des nombres puis on introduira les symboles relatifs aux ensembles de nombres et on fera la distinction entre ces ensembles ;
- On introduira, à partir d'activités et d'exercices, la racine carrée d'un entier naturel qui n'est pas un carré parfait comme exemple de nombre irrationnel ;
- On rappellera, à partir d'activités, les propriétés des opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ et les différentes identités remarquables qui doivent être renforcées par les deux identités a^3-b^3 et a^3+b^3 ;
- On devra renforcer et soutenir les propriétés et les techniques relatives aux opérations dans $\mathbb{R}$ chaque fois que l'occasion se présente dans les différents chapitres du programme.

Contenu du cours	Durée

1. Ensembles des nombres :

1.1. L'ensembles des entiers naturels $\mathbb{N}$:

Définition 1

Les nombres entiers naturels forment un ensemble que l'on note $\mathbb{N}$.
On écrit : $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5;\ldots;101;\ldots;4678;\ldots;8999;\ldots\}$

Notation :
78 est un entier naturel, alors 78 est un élément de $\mathbb{N}$, on dit que 16 appartient à $\mathbb{N}$. On écrit $78 \in \mathbb{N}$.
-78 n'est pas un entier naturel, alors -78 n'est pas un élément de $\mathbb{N}$, on dit que -78 n'appartient pas à $\mathbb{N}$. On écrit $16 \notin \mathbb{N}$.

1.2. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$:

Définition 2

Les nombres entier relatifs forment un ensemble que l'on note $\mathbb{Z}$.
On écrit $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\ldots\}$

Notation :
Tout élément de $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ ou que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$. On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemple 1

$$15 \in \mathbb{N} \quad ; \quad 1,5 \notin \mathbb{Z} \quad ; \quad \sqrt{9} \in \mathbb{N} \quad ; \quad \frac{10}{2} \in \mathbb{N} \quad ; \quad -\sqrt{25} \notin \mathbb{N}$$

1.3. L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$:

Définition 3

Les nombres décimaux forment un ensemble que l'on note $\mathbb{D}$.
On a $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^p}; a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N}\right\}$.

Exemple 2

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D} \quad ; \quad 7 = \frac{7}{10^0} \in \mathbb{D} \quad ; \quad 4.29 = \frac{429}{10^2} \in \mathbb{D} \quad ; \quad -4.059 = \frac{4059}{10^3} \in \mathbb{D}$$

Remarque :
Tout nombre entier relatif a s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^0}$ $(p = 0)$, donc appartient à $\mathbb{D}$. Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1.4. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$:

Définition 4

Les nombres rationnels forment un ensemble que l'on note $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} ; \quad a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Exemple 3

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \quad ; \quad \frac{-5}{11} \in \mathbb{Q} \quad ; \quad \frac{9}{11} \in \mathbb{Q} \quad ; \quad \frac{-49}{37} \in \mathbb{Q}$$

.

Remarque :

- Tout nombre rationnel peut s'écrire sous forme d'un nombre à décimales périodiques après la virgule. Par exemple : $\frac{5}{11} = 0,454545\ldots$ (la période ici est 45).
- Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^p}$ (où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$), et appartient donc à $\mathbb{Q}$ (en prenant $b = 10^p$). Donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

1.5. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

Définition 5

- Tout nombre qui n'est pas rationnel est appelé nombre irrationnel.
- Les nombres rationnels les nombres irrationnels forment un ensemble que l'on note $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{\text{Les nombres rationnel et les nombres irrationnel}\}$$

Exemple 4

1. $\frac{4}{5} \in \mathbb{R}$; $1,556 \in \mathbb{R}$; $-8.33 \in \mathbb{R}$; $\frac{-58}{99}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$
2. Le nombre $x = 0,12345678910111213141516117\ldots$ est un nombre irrationnel, car les nombres aprés la virgule n'est pas périodique. ($x \notin \mathbb{Q}$)

Remarque :

- Tout élément de $\mathbb{Q}$ est un élément de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Tout nombre réel soit rationnel ou irrationnel.
- On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Opérations dans $\mathbb{R}$ et propriétés :

2.1. Règle fondamentales de dévellopement et de factorisation :

Proposition 1

Soient a, b et c des nombres réels. On a :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple 5

1. Dévellopement : $3(2x+5y)$ et $-\sqrt{2}(\sqrt{3}x-4y)$ et $4x(x^2+x-3)$
2. Factorisation : $13x+26$ et $\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ et $4(x-2)+(x-3)(x-2)$

2.2. Identités remarquables :

Activité 1

Soient a et b deux nombres réels.

1. Développer $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$

Proposition 2

Soient a et b deux nombres réels. On a :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Exemple 6

1. Développer : $(x+3)^2$; $(3a-5)^2$; $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$
2. Factoriser : $49x^2-25$; x^2+2x-y^2+1 ;

Application 1

1. Déveller : $A=(x+2)^3$; $B=(2x-3\sqrt{2})^3$
2. Factoriser : $C=x^3-8$; $D=8x^3+27$
3. Calculer sans utiliser calculatrice : 99^2 ; 101^2

3. Puissance d'un nombre :

3.1. Puissance d'un nombre réel :

Proposition 3

Soit a et b deux nombres réels non nuls et soit n et p deux entiers relatifs :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\dfrac{1}{a^p} = a^{-p}$
- $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{np}$
- $a^n \times b^n = (a\times b)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemple 7

1. $5^{-2} \times 5^{4} = 5^{-2+4} = 5^{2}$
2. $\dfrac{3^{4}}{3^{5}} = 3^{4-5} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$
3. $(2^{3})^{2} = 8^{2} = 64$
4. $2^{3} \times 3^{3} = (2 \times 3)^{3} = 6^{3} = 216$
5. $\dfrac{15^{3}}{5^{3}} = (\dfrac{15}{5})^{3} = 3^{3} = 27$

3.2. Puissance du nombre 10 :

Proposition 4

Pour tout entier naturel n, on a :

$$10^{n} = \underbrace{1000000000}_{n \text{ zéros}} \qquad \text{et} \qquad 10^{-n} = \underbrace{0.0000000001}_{n \text{ zéros}}$$

Exemple 8

1. $10^{5} = 100000$ (5 zéros)
2. $10^{-4} = 0.00001$ (4 zéros)
3. $10^{-7} = 0.00000001$ (7 zéros)

3.3. Écriture scientifique :

Définition 6

Tout nombre décimal positif peut s'écrire sous la forme $a \times 10^{p}$ où $a \in \mathbb{D}$ tel que $1 \leq a \leq 10$ et $p \in \mathbb{Z}$.
L'écriture $a \times 10^{p}$ s'appelle l'écriture scientifique.

Remarque :
Si le nombre est négatif, alors son écriture scientifique est : $-a \times 10^{p}$ où $a \in \mathbb{D}$ et $1 \leq a \leq 10$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Exemple 9

- L'écritute scientifique du nombre $124,55$ est $1,2455 \times 10^{2}$.
- L'écritute scientifique du nombre $0,00025$ est $2,5 \times 10^{-4}$.
- L'écritute scientifique du nombre $11,00007$ est $1,100007 \times 10^{1}$.