

Année scolaire : 2024-2025

Niveau : Tronc commun scientifique

Durée totale : **5h**

### **Contenus du programme :**

- La projection sur une droite, la projection orthogonale, la projection sur un axe.
- Théorème de Thalés : sens direct et sens réciproque.
- Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

### **Les capacités attendues :**

- Traduire vectoriellement le théorème de Thalés.

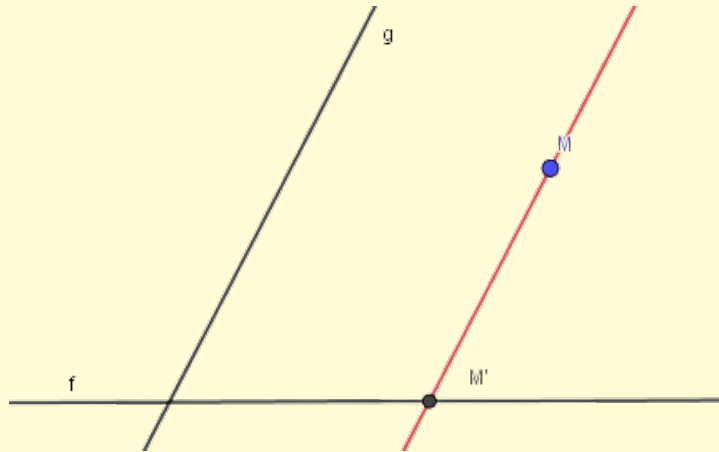
### **Recommandations pédagogiques :**

- On évitera toute construction théorique de la notion de projection.
- On rappellera le théorème de Thalés (sens direct et sens réciproque) puis on introduira, à partir d'activités, la propriété de la conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs par la projection.

## 1. Projection sur une droite :

### Définition 1

Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites sécantes du plan  $\mathcal{P}$ . Soit  $M$  un point de  $\mathcal{P}$ .

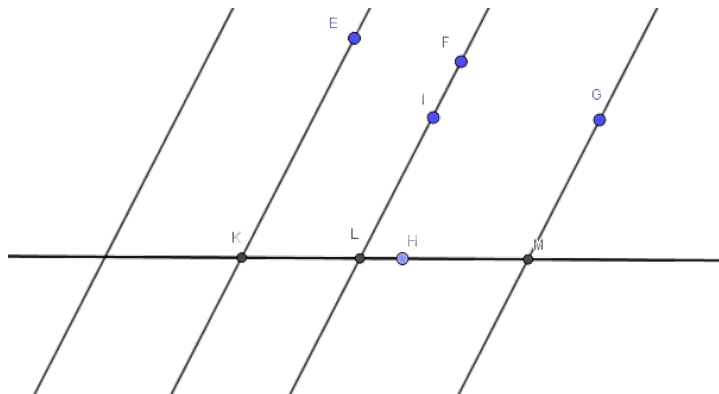


La droite parallèle à  $(\Delta)$  et issue de  $M$  coupe la droite  $(D)$  en un point  $M'$ .

Le point  $M'$  est appelé **projeté** du point  $M$  sur la droite  $(D)$  **parallèlement** à la droite  $(\Delta)$ . On écrit :  $p(M) = M'$ .  
 $p$  est appelée **projection** sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$ .

### Exemple 1

On considère la figure suivante :

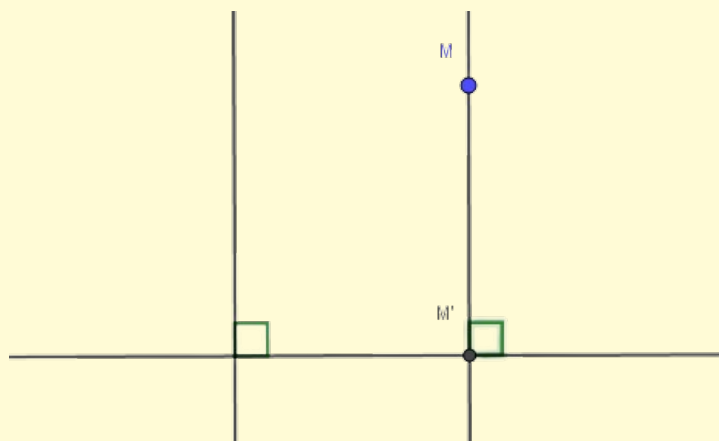


## 2. Projection orthogonale :

### Définition 2

Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites perpendiculaires du plan  $\mathcal{P}$ .

Le point  $M'$ , projeté de  $M$  sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$ , est appelé **projeté orthogonal** du point  $M$  sur la droite  $(D)$ .



### Proposition 1

Soient  $(D)$  et  $(\Delta)$  deux droites sécantes du plan.

Le projeté de tout point de la droite  $(D)$  est lui-même, par la projection sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$ .

## 3. Théorème de Thalès :

### Proposition 2

Soient  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites sécantes en un point  $A$ .

Soient  $M$  et  $B$  deux points de la droite  $(D_1)$ , distincts de  $A$ .

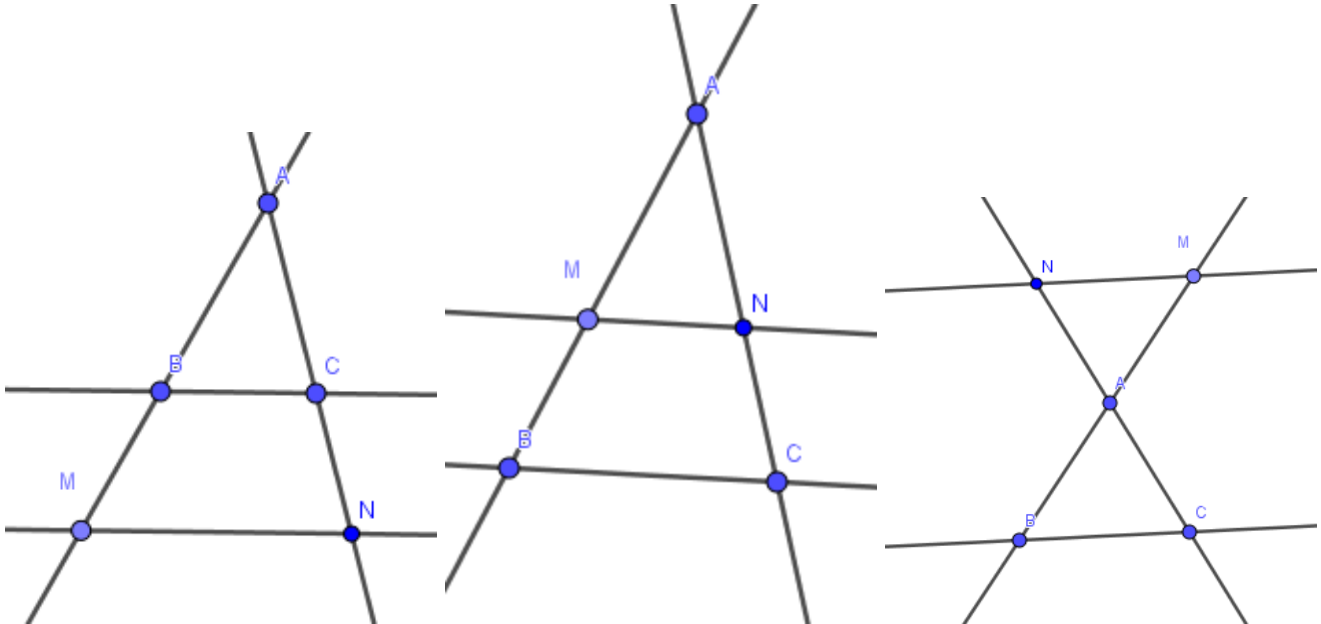
Soient  $N$  et  $C$  deux points de la droite  $(D_2)$ , distincts de  $A$ .

Si les deux droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles, alors :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

**Remarque :** Le théorème de Thalès est utilisé pour calculer des longueurs.

### Exemple 2

Dans les trois cas suivants, on a :  $\begin{cases} A, M, B \text{ sont alignés} \\ A, N, C \text{ sont alignés} \\ (MN) \parallel (BC) \end{cases}$



On en déduit :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

### Application 1

Soit  $ABC$  un triangle. Les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles telles que :  $AI = 13$ ,  $AJ = 5$ ,  $AC = 39$  et  $AB = x$ . Déterminer la valeur du réel  $x$ .

## 4. Réciproque du théorème de Thalès :

### Proposition 3

Soient  $(D_1)$  et  $(D_2)$  deux droites sécantes en un point  $A$ .

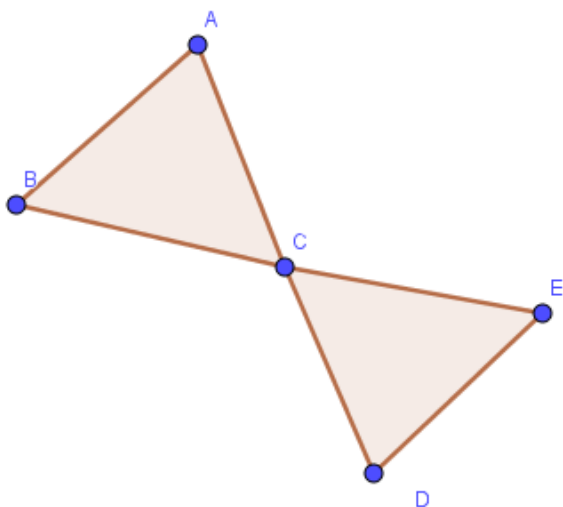
Soient  $M$  et  $B$  deux points de la droite  $(D_1)$ , distincts de  $A$ .

Soient  $N$  et  $C$  deux points de la droite  $(D_2)$ , distincts de  $A$ .

Si  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  et si les points  $A, B, M$  et les points  $A, C, N$  sont dans le même ordre, alors les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

## Application 2

On considère la figure ci-contre tel que :

$$\begin{cases} AB = 45 \\ AC = 30 \\ AD = 33 \\ AE = 22 \end{cases}$$


Montrer que :  $(BC) \parallel (DE)$ .

## 5. Théorème de Thalès par la projection :

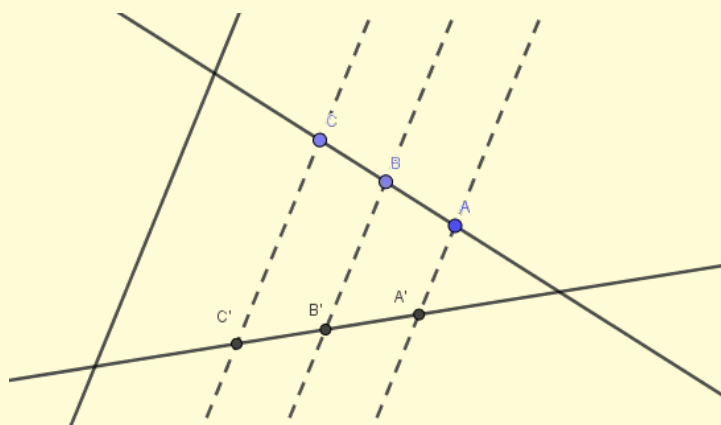
### Proposition 4

Soient  $(D)$  et  $(L)$  deux droites.

Soit  $(\Delta)$  une droite non parallèle à  $(D)$  et non parallèle à  $(L)$ .

Soient  $A, B, C$  des points de  $(L)$  tels que  $A$  et  $B$  soient distincts.

Si  $A', B', C'$  sont les projetés respectifs de  $A, B, C$  sur  $(D)$  parallèlement à  $(\Delta)$  alors :  $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$ .



## 6. Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

### Proposition 5

Soient  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  deux droites sécantes.

Soient  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  deux vecteurs colinéaires tels que  $\vec{CD} = k\vec{AB}$ .

Si  $A', B', C', D'$  sont les projetés respectifs des points  $A, B, C$  et  $D$  sur  $(\Delta')$  parallèlement à la droite  $(\Delta)$ , alors  $\vec{C'D'} = k\vec{A'B'}$ .

**Remarque :**

On exprime cette propriété en disant que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

### Application 3

Soit  $ABC$  un triangle,  $M$  et  $N$  les points définis par :

$$3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

Soient  $M'$  et  $N'$  les projetés respectifs de  $M$  et  $N$  sur la droite  $(AC)$  parallèlement à la droite  $(BC)$ .

Montrer que :  $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{NN'} = -2\overrightarrow{BC}$