Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : $5h$

✍ Contenus du programme :

- Egalité de deux vecteurs; somme de deux vecteurs; relation de Chasles.
- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
- Colinéarité de deux vecteurs, alignement de trois points.
- Définition vectorielle du milieu d'un segment. premiers

✍ Les capacités attendues :

- Construire un vecteur de la forme $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}$;
- Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine en utilisant l'outil vectoriel et réciprequement;
- Résoudre des problèmes géométriques en utilisant l'outil vectoriel.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On rappellera les définitions de la somme de deux vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, on introduira ensuite, à travers des activités simples, les propriétés : $(a+b)\overrightarrow{u}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{u}$ et $a(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{u}$ et $a.(b\overrightarrow{u})=(ab).\overrightarrow{u}$.
- La multiplication d'un vecteur par un nombre réel doit être liée d'une part, au point M de la droite (AB) qui a pour abscisse x dans le répere (A,B) c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$, et d'autre part à l'interprétation vectorielle de l'alignement de trois points.

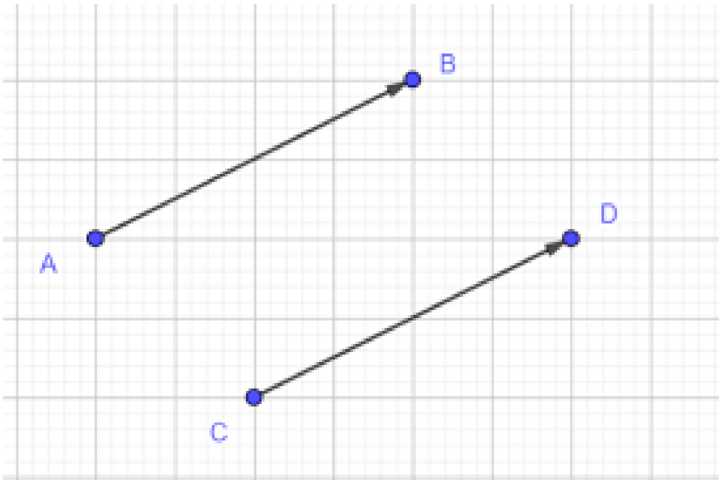
1. Egalité de deux vecteurs :

Définition 1

Soient A, B, C et D quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
On dit que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux et on écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ lorsque ces deux vecteurs ont :

- la même direction, c'est-à-dire $(AB)//(DC)$
- le même sens
- la même norme, c'est-à-dire $AB = DC$.

Exemple 1



On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$.

Proposition 1

Soient A, B, C et D quatre points du plan $\mathcal{P}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Exemple 2

Soient A, B, C et D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifie que $ABCD$ est un parallélogramme.
Donc $BADC$ et $ADCB$ et $DCBA$ sont des parallélogrammes.
D'où $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Proposition 2

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et tout point A du plan $\mathcal{P}$, il existe un point B tel que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

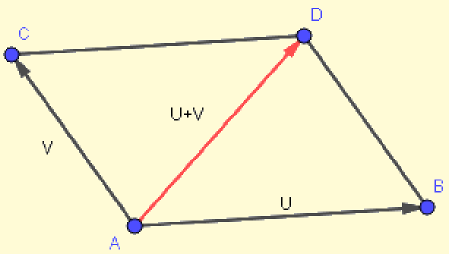
Remarque :
Il existe une infinité de vecteurs égaux à un vecteur donné $\overrightarrow{u}$.
Conséquences : Quels que soient les points A, M et N du plan, on a :

- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ signifie que $M = N$.
- $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MA}$.
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ signifie que $M = A$.
  Le vecteur $\overrightarrow{0}$ est dit vecteur nul.

2. Somme de deux vecteurs :

Définition 2

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et définie par $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ tel que $ABCD$ est un parallélogramme.



Proposition 3

Relation de Chasles
Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exemple 3

Soient A, B, C, D et O cinq points du plan $\mathcal{P}$.

- Montrons que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
- Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

3. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel :

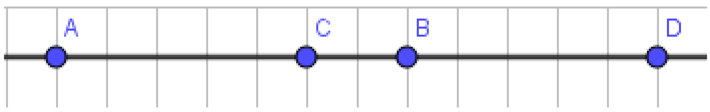
Définition 3

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et k un nombre réel.
Le produit du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le nombre réel k, que l'on note $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u}$, est défini par :

- Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul :
  - Si $k = 0$, alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ (c'est-à-dire $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$).
  - Si $k > 0$, alors $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ ont la même direction, le même sens et $\|\overrightarrow{w}\| = k\|\overrightarrow{u}\|$.
  - Si $k < 0$, alors $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ ont la même direction, des sens contraires, et $\|\overrightarrow{w}\| = -k\|\overrightarrow{u}\|$.
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ (c'est-à-dire $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$).

Exemple 4

On considére la figure suivante :



- Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont la même direction, des sens opposés et $CA = 2.5CB$, donc $\overrightarrow{CA} = -2.5\overrightarrow{CB}$
- Les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ ont la même direction, le même sens et $DA = \frac{12}{5}DB$, donc $\overrightarrow{DA} = \frac{12}{5}\overrightarrow{DB}$.

Application 1

Soient A, B, C et D quatre points.
Construire les points M, N, P définie par :

1. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$
2. $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BM}$
3. $\overrightarrow{CD} = 2.5\overrightarrow{CP}$

Activité 1

On considère un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ et on pose $\|\overrightarrow{u}\| = k$.
Soient a et b deux nombres réels tels que $a > 0$, $b < 0$ et $a + b < 0$.
A, B et C sont des points tels que $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC} = b\overrightarrow{u}$.

1. Calculer la norme $\|\overrightarrow{AC}\|$ en fonction de a, b et k.
2. Montrer que : $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$.

Proposition 4

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et les réels a, b et k, on a :

- $a(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$
- $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$
- $a(b\overrightarrow{u}) = (ab)\overrightarrow{u}$
- Si $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Exemple 5

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_1} &= 4(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - 2\overrightarrow{u} \\
&= 4\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u} \\
&= 4\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} \\
&= 2\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} \\
&= 2(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

Application 2

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

1. $\vec{V_1} = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v})$
2. $\vec{V_2} = \vec{u} + 2(\vec{u} - \vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v})$
3. $\vec{V_3} = 3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5(\vec{v} - \vec{u})$
4. $\vec{V_4} = \frac{1}{2}(4\vec{u} + 5\vec{v}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

4. Colinéarité de deux vecteurs : :

Définition 4

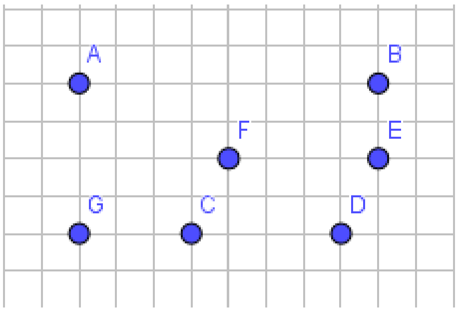
On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Proposition 5

Soient $A,\ B,\ C$ et D quatre points du plan $\mathcal{P}$.

- Les points $A,\ B$ et C sont alignés si et seleument si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites $(AB)//(CD)$ sont paralléles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple 6



Déterminer tous les vecteurs qui sont colinéaires.

Application 3

Soient $ABCD$ un parallélogramme, E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$$

1. Construire la figure.
2. Montrer que les points $A,\ C$ et F sont alignés.

5. Milieu d'un segment : :

Proposition 6

Pour qu'un point I soie le milieu du segment $[AB]$, il faut et il suffit que l'une des relations suivantes soit réalisée :

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA}$
2. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$
3. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Exemple 7

Soit ABC un triangle.
Construisons les points E et F définis par : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Montrons que C est le milieu de $[EF]$.