Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : ***7h***

✍ Contenus du programme :

- Les nombres pairs et les nombres impairs
- Multiples d'un nombre, le plus petit multiple commun de deux nombres
- Diviseurs d'un nombre, le plus grand diviseur commun de deux nombres
- Nombres premiers, décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

✍ Les capacités attendues :

- Utiliser la parité et la décomposition en produit de facteurs premiers pour résoudre des problèmes simples portant les entiers naturels.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On introduira les symboles : $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\cup$, $\cap$
- l'objectif de la présentation de "notions en arithmétique" est d'initier les élèves à des modes de démonstration à travers l'utilisation des nombres pairs et des nombres impairs sans excès.

1. Nombres pairs et nombres impaires :

Activité 1

1. Parmi les nombres suivants, déterminer les entiers naturels :

$$10 \qquad \frac{3}{2} \qquad -5 \qquad \frac{10}{2} \qquad \sqrt{2} \qquad \sqrt{25} \qquad -1$$

2. Parmi les entiers naturels suivantes, déterminer les multiples du nombre 2 :

$$4 \qquad 19 \qquad 15+25 \qquad 2^3-1 \qquad 44 \qquad 3^3+1$$

Définition 1

- Tout entier naturel multiple de 2 est appelé nombre pair.
- Tout entier naturel qui n'est pas pair est dit impair.
- Les nombres pairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2k$ où k est un nombre entier naturel.
- Les nombres impairs sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $2k+1$ où k est un nombre entier naturel, ou sous la forme $2k-1$ où k est un nombre entier naturel non nul.

Exemple 1

1. 2004 est un nombre pair.
2. 2005 est un nombre impair.
3. Soit x un entier naturel non nul et différent de 1. $A = 2x-3$ et $B = 4x+2$

Application 1

Soit n un entier naturel. Etudier la parité de A et B tels que : $A = 2n^2+6$ et $B = 8n+3$

Remarque :

Pour qu'un entier naturel soit pair, il suffit que son chiffre d'unités soit 0, 2, 4, 6 ou 8.

2. Opérations sur les nombres pairs et impairs :

Proposition 1

Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \geq b$.

- Si a et b sont pairs, alors $a+b$ et $a-b$ sont pairs.
- Si a et b sont impairs, alors $a+b$ et $a-b$ sont pairs.
- Si l'un des deux nombres a et b pair et l'autre impair, alors $a+b$ et $a-b$ sont impairs.
- Si l'un des deux nombres a et b pair, alors ab est pair (quelle que soit la parité de l'autre).
- Si a et b sont impairs, alors ab est impair.

Application 2

Soit n un entier naturel. Etudier la parité des entiers naturels suivants :
$A = 4n^2+19$, $B = 10n^3+5n^2+1$ et $C = n(n+1)$

3. Multiples d'un nombre entier naturel :

Activité 2

Cocher les réponses justes :

	6	21	14	111	15	18
Multiple de $\mathbf{3}$						
Multiple de $\mathbf{5}$						
Multiple de $\mathbf{7}$						

Définition 2

Soient $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ deux entiers naturels. On dit que $\boldsymbol{m}$ est un multiple de $\boldsymbol{n}$ si $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{k}$ où $\boldsymbol{k}$ un entier naturel.

Exemple 2

- $\mathbf{42}$ est un multiple de $\mathbf{21}$ car $\mathbf{42 = 2 \times 21}$
- $\mathbf{55}$ est un multiple de $\mathbf{11}$ car $\mathbf{55 = 5 \times 11}$

Remarque :

- Tout entier naturel $\boldsymbol{a}$ est un multiple de lui-même et de $\boldsymbol{a}$.
- $\mathbf{0}$ est un multiple de tous les entiers naturels.
- Les multiples d'un entier naturel $\boldsymbol{a}$ sont : $\mathbf{0}, \boldsymbol{a}, \mathbf{2}\boldsymbol{a}, \mathbf{3}\boldsymbol{a}, \ldots, \mathbf{100}\boldsymbol{a}, \ldots$

Application 3

1. Montrer que $\mathbf{15 \times 18}$ est un multiple de $\mathbf{30}$.
2. Déterminez les multiples de $\mathbf{7}$ inférieurs à $\mathbf{60}$.

4. Diviseurs d'un entier naturel :

Définition 3

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux entiers naturels. On dit que $\boldsymbol{a}$ est un diviseur de $\boldsymbol{b}$ si $\boldsymbol{b}$ est un multiple de $\boldsymbol{a}$ c'est-à-dire $\boldsymbol{b = ak}$ où $\boldsymbol{k}$ un entier naturel.
Si $\boldsymbol{a}$ est un diviseur de $\boldsymbol{b}$, on dit aussi :

- $\boldsymbol{a}$ divise $\boldsymbol{b}$.
- $\boldsymbol{b}$ est divisible par $\boldsymbol{a}$.
- $\boldsymbol{b}$ est un multiple de $\boldsymbol{a}$.

Exemple 3

- $\mathbf{6}$ est un diviseur de $\mathbf{24}$ car $\mathbf{24 = 6 \times 4}$
- $\mathbf{7}$ est un diviseur de $\mathbf{77}$ car $\mathbf{77 = 7 \times 11}$

Remarque :

- $\mathbf{1}$ est un diviseur de tout entier.
- Si un entier $\boldsymbol{a}$ divise un entier $\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{a \leq b}$.

Application 4

Déterminer tous les diviseurs de $\mathbf{30}$.

Proposition 2

Soient a, b et c des entiers naturels.

- Si a divise b et c, et $b \geq c$ alors a divise $b + c$ et $b - c$.
- Si a divise b, alors a divise bc.

5. Nombres premier :

Activité 3

1. Déterminez les diviseurs des entiers naturels suivants :

$$\mathbf{2} \qquad \mathbf{3} \qquad \mathbf{5} \qquad \mathbf{7} \qquad \mathbf{11} \qquad \mathbf{13} \qquad \mathbf{41}$$

2. Que remarquez-vous?

Définition 4

Un entier naturel p est dit premier s'il admet exactement deux diviseurs différents.

Exemple 4

1. 31 est un nombre premier.

Remarque :

- 1 n'est pas un nombre premier parce qu'il n'admet qu'un seul diviseur.
- 2 est le seul nombre premier pair.
- Tout nombre premier différent de 2 est impair.

6. Décomposition d'un nombre non premier en produit de facteurs premiers :

Proposition 3

Tout entier naturel non premier et supérieur à 1 peut être décomposé en produit de facteurs premiers.

Exemple 5

1. L'écriture $\mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$ est la décomposition du nombre **60** en produit de facteurs premiers.

Application 5

Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers : **100**, **63**, **32**.

7. Diviseurs communs de deux entiers naturels :

Définition 5

On dit qu'un entier naturel d est un diviseur commun des deux entiers naturels a et b si d est un diviseur de a et b.

Exemple 6

Les diviseurs de **12** sont **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **12**.
Les diviseurs de **18** sont **1**, **2**, **3**, **6**, **9**, **18**.
Les nombres **1**, **2**, **3**, **6** sont les diviseurs communs de **12** et **18**.

Application 6

Déterminer les diviseurs communs de $\mathbf{18}$ et $\mathbf{150}$.

8. Plus grand diviseur commun de deux entiers naturels :

Définition 6

Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b est le plus grand entier parmi les diviseurs communs de a et b. On le note par $a \wedge b$ ou $a\Delta b$.

Remarque :

Pour dire que $a \wedge b$ est le plus grand commun diviseur de a et b, on dit que $a \wedge b$ est le pgcd de a et b.

Exemple 7

Les diviseurs de $\mathbf{30}$ sont $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{5}$, $\mathbf{6}$, $\mathbf{10}$, $\mathbf{15}$, $\mathbf{30}$.
Les diviseurs de $\mathbf{18}$ sont $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{6}$, $\mathbf{12}$.
Alors $a \wedge b = \mathbf{6}.$

Application 7

Déterminer $\mathbf{15} \wedge \mathbf{75}$, $\mathbf{13} \wedge \mathbf{14}$, $\mathbf{27} \wedge \mathbf{36}$.

9. Multiples communs de deux entiers naturels :

Définition 7

On dit qu'un entier naturel m est un multiple commun des deux entiers naturels a et b si m est un multiple de a et b.

Exemple 8

$\mathbf{36}$ est un multiple commun de $\mathbf{6}$ et $\mathbf{4}$ (car $\mathbf{36} = \mathbf{9} \times \mathbf{4}$ et $\mathbf{36} = \mathbf{6} \times \mathbf{6}$).

10. Plus petit multiple commun de deux entiers naturels :

Définition 8

Le plus petit multiple commun de deux entiers naturels a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b. On le note par : $a \vee b$ ou $M(a, b)$.

Remarque : Pour dire que $a \vee b$ est le plus petit multiple commun de a et b, on dit que $a \vee b$ est le ppcm de a et b.

Exemple 9

Les multiples non nuls de $\mathbf{4}$ sont $\mathbf{4}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{12}$, $\mathbf{16}$, $\mathbf{20}$, ... et les multiples non nuls de $\mathbf{6}$ sont $\mathbf{6}$, $\mathbf{12}$, $\mathbf{18}$, $\mathbf{24}$, $\mathbf{30}$, ..., alors $\mathbf{4} \vee \mathbf{6} = \mathbf{12}$.

Application 8

Déterminer $\mathbf{15} \vee \mathbf{25}$, $\mathbf{24} \vee \mathbf{18}$, $\mathbf{5} \vee \mathbf{7}$.

Activité 4

1. Déterminer les diviseurs de $\mathbf{100}$ et $\mathbf{120}$ puis déduire $\mathbf{100} \wedge \mathbf{120}$.
2. Décomposer $\mathbf{100}$ et $\mathbf{120}$ en produits de facteurs premiers.
3. Calculez le produit des facteurs premiers communs de $\mathbf{100}$ et $\mathbf{120}$ avec la plus petite puissance.
4. Que remarquez-vous?

Théorème 1

1. Le pgcd de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers communs de leurs décompositions affectés de leur plus petit exposant.
2. Le ppcm de deux entiers naturels est le produit des facteurs premiers communs et non communs de leurs décompositions affectés de leur plus grand exposant.

Exemple 10

$a = 2^4 \times 3 \times 5 \times 11$ et $b = 2^2 \times 5^2 \times 7$. $a \wedge b = 2^2 \times 5$ et $a \vee b = 2^4 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$.

Application 9

Déterminez $a \wedge b$ et $a \vee b$ dans les cas suivants :

1. $a = 14$ et $b = 26$.
2. $a = 252$ et $b = 313$.
3. $a = 14$ et $b = 26$.