Calcul vectoriel dans le plan

Exercice 1 :
Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Simplifier les écritures vectorielles suivantes : $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$

Exercice 2 :
Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ signifie que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 :
Soient A, B, C et D quatre points distincts. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.

Construire les vecteurs :
$2\vec{u}$; $\frac{1}{3}\vec{u}$; $-\vec{u}$; $-3\vec{u}$; $\frac{3}{4}\vec{u}$; $\frac{6}{5}\vec{u}$
$\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}-\vec{v}$; $2\vec{u}+\vec{v}$; $\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}$

Exercice 4 :
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Montrer que tous ces vecteurs sont nuls :

1. $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$
2. $\vec{v}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{DO}$
3. $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

Exercice 5 :
Soient A, B, C, M quatre points du plan et soit $\vec{u}$ le vecteur défini par :

$$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$$

1. Montrer que : $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
2. Soit $\vec{v}$ le vecteur défini par : $\vec{v}=2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BC}$
   Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 6 :
$ABCD$ est un parallélogramme et M le point du plan tel que :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$$

1. Montrer que B, C, M sont alignés.
2. En déduire que C est le milieu du segment $[BM]$.

Exercice 7 :
ABC est un triangle et I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement.
Montrer que :

$$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{JI}$$

Exercice 8 :
ABC est un triangle. On considère I et J les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement.

1. Montrer que : $\overrightarrow{BJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Soient M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CI}$.
   (a) Montrer que la nature du quadrilatère $ABCN$ est $ABCM$.
   (b) Montrer que les points A, M, N sont alignés.

Exercice 9 :
$ABCD$ est un parallélogramme et M et N deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AD}$$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que : $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}$.
3. Montrer que C, M, et N sont alignés.
4. Soit E le milieu de $[DN]$ et soit F le point du plan tel que : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BF}$.
5. Montrer que C est le milieu de $[EF]$.
6. Montrer que $(\overrightarrow{BD})//(\overrightarrow{EF})$.