Polynômes

Exercice 1 : Calculer $P(x) \times Q(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.
2. $P(x) = 2x^5 - \sqrt{2}x^4$ et $Q(x) = \sqrt{2}x^3 + \sqrt{3}x - 1$

Exercice 2 : Déterminer a et b sachant que $P(x) = Q(x)$ tel que :

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 \quad \text{et} \quad Q(x) = (x+1)(x-3)(ax+b)$$

Exercice 3 : On considère le polynôme

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

1. Vérifier que $-\frac{1}{2}$ est une racine de $P(x)$
2. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que
$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) Q(x)$$
3. En déduire une autre racine de $P(x)$

Exercice 4 : On considère le polynôme

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$$

1. Calculer $Q(2)$, le polynôme $Q(x)$ est-il divisible par $x - 2$?
2. Déterminer le polynôme $R(x)$ tel que
$$Q(x) = (x - 2)R(x)$$

Exercice 5 :

1. Montrer que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ dans les cas suivants :
   (a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ et $a = 2$
   (b) $P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ et $a = -2$
   (c) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ et $a = 3$
2. Déterminer a et b sachant que le polynôme :
$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + ax + b$$
est divisible par $x - 2$ et par $x + 3$

Exercice 6 :

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - a)$ dans les cas suivants :
   (a) $P(x) = x^3 - 3x - 2$ et $a = 1$
   (b) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ et $a = -3$
   (c) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 2$ et $a = \frac{1}{3}$
2. En utilisant la méthode de Horner, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - a)$ dans les cas suivants :
   (a) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x - 2$ et $a = 3$
   (b) $P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 52$ et $a = -2$
   (c) $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 3x - 11$ et $a = -4$

Exercice 7 : On considère le polynôme

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$$

1. Montrer que -2 est une racine de $P(x)$
2. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que
$$P(x) = (x + 2)Q(x)$$
3. Montrer que $Q(x)$ est divisible par $(x - 1)$
4. Factoriser le polynôme $Q(x)$
5. Donner une factorisation de $P(x)$ en produit de trois binômes.