Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : ***5h***

✍ Contenus du programme :

- Le repère : coordonnées d'un point, coordonnées d'un vecteur;
- Condition de colinéarité de deux vecteurs;
- Détermination d'une droite définie par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur;
- Représentation paramétrique d'une droite;
- Équation cartésienne d'une droite;
- Positions relatives de deux droites.

✍ Les capacités attendues :

- Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle à l'aide des coordonnées.
- Utiliser l'outil analytique dans la résolution de problèmes géométriques.

✍ Recommandations pédagogiques :

- Il faudra habituer les élèves à l'utilisation des différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs.

Contenu du cours	Durée

1. Repère : Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur :

1.1. Repère :

Définition 1

Soit $(O;I;J)$ un repère du plan.
On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

- Le triplet $(O;I;J)$ s'appelle repère du plan.
- $(O;I;J)$ est un repère orthogonal si $(OI) \perp (OJ)$.
- $(O;I;J)$ est un repère orthonormal (ou orthonormé) si $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$ (c'est-à-dire $OI = OJ = 1$).
- La droite (OI) est appelée axe des abscisses.
- La droite (OJ) est appelée axe des ordonnées.

1.2. Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur :

Proposition 1

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

- Pour tout point M du plan, il existe un couple unique $(x;y)$ de nombres réels tel que :

  $$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

  Le couple $(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du point M. On écrit $M(x;y)$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un couple unique $(x;y)$ de nombres réels tel que :

  $$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

  Le couple $(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $M\vec{u}$. On écrit $u(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposition 2

- Egalité de deux vecteurs : Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.
  $\vec{u}(x;y) = \vec{v}(x;y)$ signifie que $x = x'$ et $y = y'$
- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- Coordonnées de la somme de deux vecteurs : $(\vec{u} + \vec{v})(x + x'; y + y')$.
- Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel : $k\vec{u}(kx, ky)$ où $k \in \mathbb{R}$.
- Colinéarité de deux vecteurs non nuls :
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $x' = kx$ et $y' = ky$.
- Milieu d'un segment : Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Distance de deux points : Dans un repère orthonormal, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_B)^2}$

2. Condition de colinéarité de deux vecteurs :

Définition 2

On considére deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$. Le nombre $xy'-yx'$ s'appelle déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $det(\vec{u};\vec{v})$. On écrit $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-yx'$.

Exemple 1

On considére les vecteurs $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$.
On a $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=3\times 2-1\times(-4)=6+4=10$

Proposition 3

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v})=0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$.
- Les points $A,\ B$ et C sont alignés si et seulement si $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$.

Exemple 2

On considére les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$.
On considére les points $A(-1;2)$, $B(2;3)$ et $C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

3. La droite dans le plan :

Définition 3

Soit A un point du plan et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$, où $k\in\mathbb{R}$, est la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. On la note $D(A,\vec{u})$.

Exemple 3

Construire la droite $D(A;\vec{u})$, avec $A(1;2)$ et $\vec{u}(-1;1)$.

4. Représentation paramétrique d'une droite :

Définition 4

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient $A(x_0;y_0)$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x=x_0+k\alpha \\ y=y_0+k\beta \end{cases}\quad (k\in\mathbb{R})$
s'appelle représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0;y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha;\beta)$.

Remarque :
La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 4

- Soit (D) la droite passant par le point $A(2;-3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=(3;-5)$.
  (D) est définie par la représentation paramétrique suivante :

  $$\begin{cases} x=2+3k \\ y=-3-5k \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{R})$$

  Le nombre k est le paramètre dépendant du point M.
  - Si on prend $k=0$, on obtient le point $A(2;-3)$ qui est évidemment un point de (D).
  - Si on prend $k=1$, on obtient le point $B(5;-8)$ appartenant à (D).
  - Si on prend $k=\frac{1}{2}$, on obtient le point $C\left(\frac{7}{2};-\frac{11}{2}\right)$ qui appartient donc à la droite (D).
- Le système

  $$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-4t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

  détermine une représentation paramétrique de la droite (E) de point $A(1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2;-4)$.

Application 1

On considère les points $E(-1;2)$, $F(2;3)$ et $G(1;-1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).
2. Le point G appartient-il à la droite (EF)?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite G passant par le point L et dirigée par le vecteur $\vec{w}=3\vec{i}+\vec{j}$.

5. Equation cartésienne d'une droite :

Définition 5

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Toute droite, dans le plan, admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+c=0 \text{ où } (a;b)\neq(0;0)$$

Exemple 5

Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3;4)$.

Application 2

On considére les deux points $B(1;-1)$ et $C(-2;3)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

Proposition 4

Soient $a,$ b et c des nombres réels avec $(a;b)\neq(0;0)$.
L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b;a)$.

Exemple 6

Soit (Δ) la droite d'équation : $2x-y+1=0$. La droite (Δ) est la droite passant par $A(-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2)$.

Application 3

Soit (L) la droite d'équation : $3x+4y-5=0$.

1. Déterminer un point appartenant à la droite (L).
2. Déterminer un directeur de la droite (L).
3. Le point $B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$ apparitent-il à (L)?

6. Droites particuliéres :

6.1. Droite paralléle à l'axe des ordonnées :

Proposition 5

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour qu'une droite soit paralléle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $x=c$.

6.2. Droite paralléle à l'axe des abscisses :

Proposition 6

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour qu'une droite soit paralléle à l'axe des abscisses, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $y=c$.

Exemple 7

Construire les droites d'équation $x=1$ et $y=-2$.

7. Équation d'une droite et son coefficient directeur :

Proposition 7

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour qu'une droite (D) ne soit pas paralléle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation de la forme : $y=mx+p$.

- Le nombre réel m s'appelle coefficient directeur de la droite (D).
- Le nombre réel p s'appelle l'ordonnée à l'origine de (D).
- L'équation $y=mx+p$ est l'équation réduite de la droite (D).

Proposition 8

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
La droite passant par le point $A(x_0;y_0)$ et de coefficient directeur m a une équation cartésienne de la forme : $y-y_0=m(x-x_0)$.

Exemple 8

Déterminons une équation de la droite passant par $A(-1;2)$ et de coefficient directeur 2.

8. Positions relatives de deux droites :

8.1. Parallélisme de deux droites définies par leurs équations cartésiennes :

Théorème 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour que deux droites d'équation cartésienne respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ (où $(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$) soient parallèles, il faut et il suffit que : $ab'-ba'=0$ c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$.

Exemple 9

On considére les deux droites $\begin{cases}(D) : 2x-y+3=0\\(D') : 3x+4y-1=0\end{cases}$

8.2. Parallélisme de deux droites définies par leurs équations réduites :

Théorème 2

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour que deux droites d'équations respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ soient paralléles, il faut et il suffit que $m=m'$.

Exemple 10

On considére la droite (D) d'équation : $y=-\frac{1}{2}x+3$. Déterminons une équation de la droite (Δ) passant par $A(3;-1)$

8.3. Intersection de deux droites :

Théorème 3

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.

- Pour que les droites (D) et (D') d'équations respectives : $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ soient sécantes, il faut et il suffit que $ab'-ba'\neq 0$.
  Le couple de coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est la solution du système : $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$
- Pour que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives : $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ soient sécantes, il faut et il suffit que $m\neq m'$.
  Le couple de coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ') est la solution du système : $\begin{cases}y=mx+p\\y=m'x+p'\end{cases}$

Exemple 11

Étudions l'intersection des droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$2x+y+1=0 \quad \text{et} \quad 3x+4y-5=0$$

On a : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8-3 = 5$ Puisque $5 \neq 0$, les droites (D) et (D') sont sécantes; le couple de coordonnées du point I d'intersection de (D) et (D') est la solution du système :

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 3x+4y-5=0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2x+y=-1 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$$

La solution de ce système est $(x;y)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{9}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{13}{5}$$