Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025
Niveau : Tronc commun scientifique
Durée totale : $4h$

✍ Contenus du programme :

- Ensemble de définition d'une fonction numérique ; Égalité de deux fonctions numériques ;
- Représentation graphique d'une fonction numérique ;
- Fonction paire et fonction impaire (interprétation graphique) ;
- Variations d'une fonction numérique ;
- Maximum, minimum d'une fonction numérique sur un intervalle ;
- Représentation graphique et variations des fonctions suivantes : $x \mapsto ax^2$; $x \mapsto \frac{a}{x}$; $x \mapsto ax^2 + bx + c$; $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$; $x \mapsto \sin(x)$; $x \mapsto \cos(x)$

✍ Les capacités attendues :

- Reconnaître la variable et le domaine de définition de cette variable pour une fonction définie par un tableau de données ou une courbe ou une expression ;
- Déterminer graphiquement l'image d'un nombre ;
- Déterminer graphiquement un nombre dont l'image est connue à partir de la représentation graphique d'une fonction ; Déduire les variations d'une fonction ou les valeurs maximales ou minimales à partir de la représentation graphique de cette fonction ;
- Résoudre graphiquement des équations et des inéquations ;
- Tracer la courbe d'une fonction polynôme du second degré ou d'une fonction homographique sans utiliser un changement de repère ;
- Exprimer, en utilisant la notion de fonction, des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines.

✍ Recommandations pédagogiques :

- Pour approcher la notion de fonction et sa représentation graphique, on pourra utiliser, dans la mesure du possible, des logiciels qui permettent de construire les courbes de fonctions, on pourra également faire cette approche à partir de situations bien choisies de la géométrie, de la physique, de l'économie ou de la vie courante
- Il faudra entraîner les élèves à mathématiser des situations et à résoudre des problèmes divers lors de l'étude des extrémums d'une fonction ;
- Toutes les fonctions traitées dans ce chapitre ainsi que les fonctions cos et sin sont considérées comme fonctions de référence ;
- On pourra utiliser les calculatrices scientifiques pour déterminer des images ou les calculatrices programmables pour construire des courbes (ou signaler cette possibilité aux élèves) ;
- On proposera des problèmes conduisant à des équations dont la résolution algébrique s'avère difficile et on en déterminera graphiquement des solutions approchées.

1. Généralités :

1.1. Fonction numérique d'une variable réelle :

Activité 1

Considérons un rectangle de longueur $(x-3)$ cm et de largeur $(x-2)$ cm tel que x un réel supérieur à 3.
On désigne par $f(x)$ la surface de ce rectangle.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$.
2. Déterminer la surface de ce triangle si $x=4$ et si $x=5$.
3. Déterminer les valeurs possibles de x si $f(x)=12$ puis si $f(x)=20$.

Définition 1

Soit D un ensemble de nombre réels. Définir une fonction numérique f sur D revient à associer, à chaque réel x de D, au plus un seul réel, appelé image de x.

Exemple 1

- On pose $f(x)=x^3-2$, alors f est une fonction numérique de la variable réelle x.
- On pose $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$, alors f est une fonction numérique de la variable réelle x.
- On pose $f(x)=\sqrt{x^2+x-1}$, alors f est une fonction numérique de la variable réelle x.

Remarque :

- L'image du nombre a par la fonction f est unique et se note $f(a)$.
- $f(a)$ se lit f de a. La notation suivante se rencontre également $f : x \mapsto f(x)$.
- Une fonction f se note par $f : x \mapsto f(x)$.
- Si b est l'image de a, on a l'égalité $f(a)=b$ et a s'appelle un antécédent de b par la fonction f.

Application 1

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-3$.

1. Déterminer les images de -2, 0 et 2 par f.
2. Déterminer les antécédents, si existent, des nombres 0, 5 et -4.

1.2. Ensemble de définition à une fonction numérique :

Activité 2

Considérons f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$.
Déterminer les images, si possible, des nombres 0, 1 et -1.
On dit que 1 et -1 n'appartiennent pas au domaine de définition de f.
On écrit : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et se lit « $\mathbb{R}$ privé de -1 et 1».

Définition 2

L'ensemble de définition d'une fonction f, noté souvent D_f, est l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est bien définie. On écrit : $D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}$.

Exemple 2

- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\sqrt{x+6}$. Déterminons les réels qui appartient à D_f parmi les nombres suivants : 3, -2, -6 et -7.
- Soit h la fonction numérique définie par : $g(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$. Déterminons les réels qui appartient à D_g parmi les nombres suivants : 0, 1 et -1.

Remarque :

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction il faut éliminer tous les nombre pour lesquels le dénominateur est nul et ce qui est sous le symbole de la racine carrée est négatif.

Proposition 1

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes, on a :

La fonction f	Ensemble de définition
$x\mapsto P(x)$	$D_f=\mathbb{R}$
$x\mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)\neq 0\}$
$x\mapsto \sqrt{P(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\geq 0\}$
$x\mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)> 0\}$
$x\mapsto \dfrac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\geq 0 \text{ et } Q(x)\neq 0\}$
$x\mapsto \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0 \text{ et } Q(x)\neq 0\}$
$x\mapsto \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\geq 0 \text{ et } Q(x)> 0\}$

Exemple 3

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$.

Application 2

Déterminer l'ensemble de définition de fonctions suivantes :

1. $f_1: x\mapsto x^3+12x-5$
2. $f_2: x\mapsto \dfrac{-2x+4}{5x+3}$
3. $f_3: x\mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x-2}$
4. $f_4: x\mapsto \dfrac{4x^2-5}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$
5. $f_5: x\mapsto \dfrac{x+4}{|x|-3}$
6. $f_6: x\mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{|x+2|-1}$
7. $f_7: x\mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$
8. $f_8: x\mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{4x+2}}$

1.3. Égalité de deux fonctions numériques :

Définition 3

Soient f et g deux fonctions et D_f et D_g ses ensembles de définitions respectifs.
On dit que f et g sont égales et on écrit $f=g$ si :

- $D_f=D_g$ (On pose $D=D_f=D_g$)
- $f(x)=g(x)$ pour tout x de D.

Exemple 4

- Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$. Montrons que $f = g$.
- Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$. Montrons que $f \neq g$.

Application 3

Montrer que les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ sont égales.

1.4. Représentation graphique d'une fonction numérique :

Activité 3

Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1$. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé.

Définition 4

Dans un repère du plan, la courbe représentative de la fonction f , noté souvent (C_f), est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition D_f de la fonction f.

Application 4

Considérons f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Parmi les points $A(0;0)$, $B(-1;2)$, $C\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$, $D(-2;-4)$ et $E(2;4)$ déterminer ceux appartient à C_f.

Application 5

Considérons f la fonction définie par sa courbe C_f représentée ci-contre :

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les images par f des nombres suivants : -5, -4, -3.
3. Par f, quels sont les antécédents de 3 et de 5.
4. Déterminer les points d'intersection de C_f avec les axes du repère .

Remarque :

Soit f une fonction et (C_f) sa courbe dans un repère du plan.

- Pour déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses, on résoudre l'équation $f(x) = 0$ tel que $x \in D_f$.
- Si $0 \in D_f$, alors le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $A(0; f(0))$.

Application 6

Considérons f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x - 8$. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.