Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025

Niveau : Tronc commun scientifique

Durée totale : $\boldsymbol{5h}$

✍ Contenus du programme :

- Le repère : coordonnées d'un point, coordonnées d'un vecteur;
- Condition de colinéarité de deux vecteurs;
- Détermination d'une droite définie par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur;
- Représentation paramétrique d'une droite;
- Équation cartésienne d'une droite;
- Positions relatives de deux droites.

✍ Les capacités attendues :

- Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie affine et de la géométrie vectorielle à l'aide des coordonnées.
- Utiliser l'outil analytique dans la résolution de problèmes géométriques.

✍ Recommandations pédagogiques :

- Il faudra habituer les élèves à l'utilisation des différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs.

1. Repère : Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur :

1.1. Repère :

Définition 1

Soit $(O;I;J)$ un repère du plan.
On pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

- Le triplet $(O;I;J)$ s'appelle repère du plan.
- $(O;I;J)$ est un repère orthogonal si $(OI)\perp(OJ)$.
- $(O;I;J)$ est un repère orthonormal (ou orthonormé) si $||\vec{i}||=||\vec{j}||=1$ (c'est-à-dire $OI=OJ=1$).
- La droite (OI) est appelée axe des abscisses.
- La droite (OJ) est appelée axe des ordonnées.

1.2. Coordonnées d'un point - Coordonnées d'un vecteur :

Proposition 1

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

- Pour tout point M du plan, il existe un couple unique $(x;y)$ de nombres réels tel que :

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

  Le couple $(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du point M. On écrit $M(x;y)$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un couple unique $(x;y)$ de nombres réels tel que :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

  Le couple $(x;y)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $M\vec{u}$. On écrit $u(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Proposition 2

- Égalité de deux vecteurs : Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs.
  $\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x;y)$ signifie que $x=x'$ et $y=y'$
- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.
- Coordonnées de la somme de deux vecteurs : $(\vec{u}+\vec{v})(x+x';y+y')$.
- Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel : $k\vec{u}(kx,ky)$ où $k\in\mathbb{R}$.
- Colinéarité de deux vecteurs non nuls :
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que : $x'=kx$ et $y'=ky$.
- Milieu d'un segment : Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Distance de deux points : Dans un repère orthonormal, $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_B)^2}$

2. Condition de colinéarité de deux vecteurs :

Définition 2

On considère deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$. Le nombre $xy'-yx'$ s'appelle déterminant des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et se note $det(\vec{u};\vec{v})$. On écrit $det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}=xy'-yx'$.

Exemple 1

On considère les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.
On a $det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times (-4) = 6 + 4 = 10$

Proposition 3

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$.
- Les points $A,$ B et C sont alignés si et seulement si $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple 2

On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.
On considère les points $A(-1;2),$ $B(2;3)$ et $C\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

3. La droite dans le plan :

Définition 3

Soit A un point du plan et soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$, où $k \in \mathbb{R}$, est la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$. On la note $D(A,\vec{u})$.

Exemple 3

Construire la droite $D(A;\vec{u})$, avec $A(1;2)$ et $\vec{u}(-1;1)$.

4. Représentation paramétrique d'une droite :

Définition 4

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient $A(x_0;y_0)$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases} x = x_0 + k\alpha \\ y = y_0 + k\beta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
s'appelle représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0;y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha;\beta)$.

Remarque :
La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 4

- Soit (D) la droite passant par le point $A(2;-3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=(3;-5)$.
  (D) est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=2+3k \\ y=-3-5k \end{cases} \qquad (k\in\mathbb{R})$$

  Le nombre k est le paramètre dépendant du point M.

  - Si on prend $k=0$, on obtient le point $A(2;-3)$ qui est évidemment un point de (D).
  - Si on prend $k=1$, on obtient le point $B(5;-8)$ appartenant à (D).
  - Si on prend $k=\frac{1}{2}$, on obtient le point $C\left(\frac{7}{2};-\frac{11}{2}\right)$ qui appartient donc à la droite (D).

- Le système

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-4t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

  détermine une représentation paramétrique de la droite (E) de point $A(1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(2;-4)$.

Application 1

On considère les points $E(-1;2)$, $F(2;3)$ et $G(1;-1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EF).
2. Le point G appartient-il à la droite (EF)?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite G passant par le point L et dirigée par le vecteur $\vec{w}=3\vec{i}+\vec{j}$.

5. Équation cartésienne d'une droite :

Définition 5

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Toute droite, dans le plan, admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax+by+c=0 \text{ où } (a;b)\neq(0;0)$$

Exemple 5

Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par $A(-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3;4)$.

Application 2

On considère les deux points $B(1;-1)$ et $C(-2;3)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC).

Proposition 4

Soient $a,$ b et c des nombres réels avec $(a;b)\neq(0;0)$.
L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b;a)$.

Exemple 6

Soit (Δ) la droite d'équation : $2x - y + 1 = 0$. La droite (Δ) est la droite passant par $A(-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2)$.

Application 3

Soit (L) la droite d'équation : $3x + 4y - 5 = 0$.

1. Déterminer un point appartenant à la droite (L).
2. Déterminer un directeur de la droite (L).
3. Le point $B\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$ apparitent-il à (L)?

6. Droites particulières :

6.1. Droite parallèle à l'axe des ordonnées :

Proposition 5

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour qu'une droite soit parallèle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $x = c$.

6.2. Droite parallèle à l'axe des abscisses :

Proposition 6

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour qu'une droite soit parallèle à l'axe des abscisses, il faut et il suffit qu'elle ait une équation cartésienne de la forme : $y = c$.

Exemple 7

Construire les droites d'équation $x = 1$ et $y = -2$.

7. Équation d'une droite et son coefficient directeur :

Proposition 7

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour qu'une droite (D) ne soit pas parallèle à l'axe des ordonnées, il faut et il suffit qu'elle ait une équation de la forme : $y = mx + p$.

- Le nombre réel m s'appelle coefficient directeur de la droite (D).
- Le nombre réel p s'appelle l'ordonnée à l'origine de (D).
- L'équation $y = mx + p$ est l'équation réduite de la droite (D).

Proposition 8

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
La droite passant par le point $A(x_0;y_0)$ et de coefficient directeur m a une équation cartésienne de la forme : $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Exemple 8

Déterminons une équation de la droite passant par $A(-1;2)$ et de coefficient directeur 2.

8. Positions relatives de deux droites :

8.1. Parallélisme de deux droites définies par leurs équations cartésiennes :

Théorème 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour que deux droites d'équation cartésienne respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ (où $(a;b)\neq(0;0)$ et $(a';b')\neq(0;0)$) soient parallèles, il faut et il suffit que : $ab'-ba'=0$ c'est-à-dire $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$.

Exemple 9

On considère les deux droites $\begin{cases}(D): 2x-y+3=0\\(D'): 3x+4y-1=0\end{cases}$

8.2. Parallélisme de deux droites définies par leurs équations réduites :

Théorème 2

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.
Pour que deux droites d'équations respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ soient parallèles, il faut et il suffit que $m=m'$.

Exemple 10

On considère la droite (D) d'équation : $y=-\dfrac{1}{2}x+3$. Déterminons une équation de la droite (Δ) passant par $A(3;-1)$

8.3. Intersection de deux droites :

Théorème 3

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.

- Pour que les droites (D) et (D') d'équations respectives : $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ soient sécantes, il faut et il suffit que $ab'-ba'\neq 0$.

  Le couple de coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est la solution du système : $\begin{cases}ax+by+c=0\\a'x+b'y+c'=0\end{cases}$

- Pour que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives : $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ soient sécantes, il faut et il suffit que $m\neq m'$.

  Le couple de coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ') est la solution du système : $\begin{cases}y=mx+p\\y=m'x+p'\end{cases}$

Exemple 11

Étudions l'intersection des droites (D) et (D') d'équations respectives :

$$2x + y + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y - 5 = 0$$

On a : $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$ Puisque $5 \neq 0$, les droites (D) et (D') sont sécantes; le couple de coordonnées du point I d'intersection de (D) et (D') est la solution du système :

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x + 4y - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

La solution de ce système est $(x; y)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{9}{5} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{13}{5}$$