Lycée Qualifiant Zitoun

Année scolaire : 2024-2025

Niveau : Tronc commun scientifique

Durée totale : $6h$

✍ Contenus du programme :

- Ordre et opérations;
- La valeur absolue et ses propriétés;
- Intervalles;
- Encadrement, approximation et approximations décimales.

✍ Les capacités attendues :

- Maîtriser les différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions) et utiliser la technique convenable selon la situation étudiée ;
- Représenter sur la droite numérique les différentes relations liées à l'ordre ;
- Reconnaître et déterminer avec une précision donnée, une approximation d'un nombre (ou d'une expression) ;
- Effectuer des majorations ou des minorations d'expressions algébriques ;
- Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.

✍ Recommandations pédagogiques :

- On devra développer et consolider l'habilité d'utilisation de l'ordre pour comparer des nombres et pour prouver certaines relations.
- On devra entraîner les élèves à interpréter des relations de la forme $|x - a| \leq r$ et à majorer des expressions en utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés de la valeur absolue. Les élèves seront amenés à utiliser ces techniques fondamentales de manière progressive.
- La notion de la valeur absolue devra être liée à la distance de deux points sur la droite graduée.
- Les propriétés de l'encadrement et de l'approximation d'une somme et d'une différence de deux nombres peuvent être présentées dans le cas général, mais l'encadrement et l'approximation d'un produit et d'un quotient, devront être étudiés à partir d'exemples numériques bien choisis pour montrer aux élèves les précautions à prendre et les conditions à respecter, pour faire des raisonnements corrects.
- La calculatrice est un outil qui pourra aider dans l'approche des notions précédentes (approximation et encadrement...), on devra s'assurer que les élèves maîtrisent l'écriture scientifique d'un nombre et qu'ils sont conscients des limites de l'usage de la calculatrice qui donne en général une valeur approchée décimale du résultat. On devra donc permettre aux élèves de s'approprier la technique de la calculatrice scientifique (règles de priorités des opérations, fonctionnalités des touches ...).

1. Ordre dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

Définition 1

Soient a et b deux nombres réels.

1. On dit que a est inférieur ou égal à b, si $b - a \geq 0$, et on écrit $a \leq b$ ou $b \geq a$.
2. On dit que a est inférieur strictement à b, si $b - a > 0$, et on écrit $a > b$ ou $b > a$.

Remarque :

- $a \leq b$ signifie que $a < b$ ou $a = b$.
- Si $a < b$ alors $a \leq b$. (le contraire est faux).

Exemple 1

1. On a $\frac{3}{7} < \frac{5}{8}$ car : $\frac{5}{8} - \frac{3}{7} > 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$.

Application 1

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Comparer $a^2 + b^2$ et $2ab$.
2. En déduire que $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$.

2. Ordre et opérations :

2.1. Ordre et addition :

Proposition 1

Soient a, b, c et d des nombres réels.

- Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.
- Si $(a \leq b$ et $c \leq d)$, alors $a + c \leq b + d$.

Exemple 2

- Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq 3$ et $y \leq -10$.
  Alors $x + y \leq 3 + (-10)$ c'est-à-dire $x + y \leq -7$.
- Soit a un nombre réel tel que $a + 5 \leq 6$, donc $a + 5 + (-5) \leq 6 + (-5)$ c'est-à-dire $a \leq 1$.

Application 2

Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq -\frac{5}{3}$ et $y \leq \frac{7}{4}$.

Montrer que $x + y \leq \frac{1}{12}$.

Remarque :

- Si $a \leq b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.
- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ et $a + b = 0$, alors $(a = 0$ et $b = 0)$.
- Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

2.2. Ordre et multiplication :

Proposition 2

Soient a, b, c et d des nombres réels.

- Si $(a \leq b$ et $c \geq 0)$, alors $ac \leq bc$.
- Si $(a \leq b$ et $c \leq 0)$, alors $ac \geq bc$.
- Si $(ac \leq bc$ et $c > 0)$, alors $a \leq b$.
- Si $(ac \leq bc$ et $c < 0)$, alors $a \geq b$.
- Si $(0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d)$, alors $ac \leq bd$.

Exemple 3

- Soit $x \leq \frac{1}{2}$, alors $2 \times x \leq 2 \times \frac{1}{2}$ (car $2 > 0$) c'est-à-dire $2x \leq 1$.
- Soit $x < \frac{1}{2}$, alors $(-2) \times x > (-2) \times \frac{1}{2}$ (car $-2 < 0$) c'est-à-dire $-2x > -1$.
- Soit $3x < 5$, alors $\left(\frac{1}{3}\right) \times (3x) < \left(\frac{1}{3}\right) \times 5$ (car $\frac{1}{3} > 0$) c'est-à-dire $x < \frac{5}{3}$.
- Soit $0 \leq x \leq 4,5$ et $0 \leq y \leq 2$, alors $xy \leq 4,5 \times 2$ c'est-à-dire $xy \leq 11$.

Application 3

Soit $0 \leq 2x \leq 3$ et $0 \leq 5y \leq 75$. Montrer que $xy \leq \frac{45}{2}$.

2.3. Ordre et inverse :

Proposition 3

Soient a et b deux nombres réels.

- $0 < a \leq b$ signifie que $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
- $a \leq b < 0$ signifie que $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.

Exemple 4

- $0 < x \leq 5$, donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x}$.
- $-\frac{2}{3} \leq x < 0$, donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{-\frac{2}{3}}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x} \leq -\frac{3}{2}$.

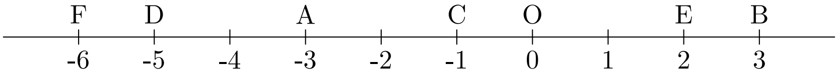
Application 4

Soit x un nombre réel tel que : $0 < \frac{1}{2x+1} < \frac{3}{2}$. Montrer que $-\frac{1}{6} < x$.

2.3. Valeur absolue et propriétés :

Activité 1

On considère les points A, B, C, D, E et F représentés sur (Δ) ci-dessous :



1. Déterminer les distances OB, OC, OD, OE et OF.

Définition 2

Sur un axe normé, x est l'abscisse d'un point M. La valeur absolue de x est la distance entre l'origine du repère et le point M; on la note $|x|$.
En d'autre termes : $OM = |x|$ (où O est l'origine du repère).

Exemple 5

- $|4| = 4$ et $|-3| = 3$ et $|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.
- $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$.

Proposition 4

Soit x un nombre réel. On a $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

Définition 3

Si a et b sont les abscisses respectives de deux points A et B sur un axe normé (droite graduée), alors la distance entre a et b est la distance AB et on a : $AB = |a-b|$.

Proposition 5

Soient x et y deux nombres réels. On a :

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x-y| = |y-x|$
4. $|x^2| = |x|^2 = x^2$
5. $\sqrt{x^2} = |x|$
6. $|x \times y| = |x||y|$
7. si $y \neq 0$, alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
8. $|x+y| \leq |x| + |y|$
9. $|x-y| \geq |x| - |y|$
10. $|x| = |y|$ signifie que $x = y$ ou $x = -y$.

Remarque :

$$\begin{cases} |x| = r \\ r > 0 \end{cases} \quad \text{signifie que } (x = r \text{ ou } x = -r)$$

Exemple 6

- $|x| = 4$ signifie que ($x = 5$ ou $x = -5$).
- $|x| = -4$ est impossible car $|x| \geq 0$ et $-4 < 0$.
- $|x-1| = 3$ signifie que ($x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$) c'est-à-dire ($x = 4$ ou $x = -2$)

Application 5

Soit $x; y \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq 2$ et $y \geq 3$. Simplifier le nombre A tel que $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(y-3)^3}$.

Proposition 6

Soit $x; y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

1. $|x| \leq r$ signifie que $-r \leq x \leq r$
2. $|x| \geq r$ signifie que $x \geq r$ ou $x \leq -r$.

Application 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|3x - 5| = 4$
2. $|5x - 8| = 7$
3. $|x - 2| \leq 1$
4. $|x - 2| < 1$
5. $|3 - x| > 2$
6. $|x| \geq 1$

3. Intervalles :

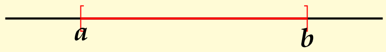
Activité 2

Représenter chaque fois sur une droite graduée $D(O; I)$ l'ensemble des nombres réels x dans les cas suivants :

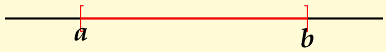
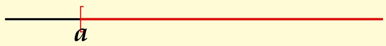
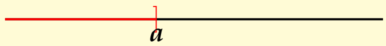
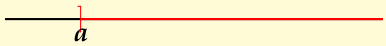
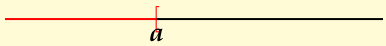
$$2 \leq x \leq 5 \;\; ; \;\; -2 \leq x \leq -5 \;\; ; \;\; 0 \leq x < 1 \;\; ; \;\; 2 < x < 3$$

Définition 4

Soient $a;b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.
L'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x \leq b$ est appelée l'intervalle d'extrémités a et b, on le note $[a;b]$.



On défini les intervalles de l'ensemble $\mathbb{R}$ par la manière suivante :

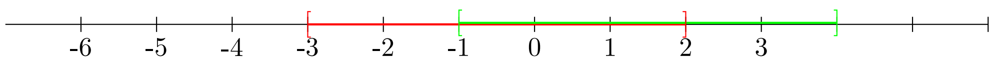
Ensemble des nombres réels qui vérifiant	Représentation sur la droite numérique	Notation	L'intervalle
$a \leq x \leq b$		$[a;b]$	Intervalle fermé $[a;b]$
$a < x < b$		$]a;b[$	Intervalle ouvert $]a;b[$
$a \leq x < b$		$[a;b[$	Intervalle semi-ouvert à droite $[a;b[$
$a < x \leq b$		$]a;b]$	Intervalle semi-ouvert à gauche $]a;b]$
$x \geq a$		$[a;+\infty[$	Intervalle fermé $[a;+\infty[$
$x \leq a$		$]-\infty;a]$	Intervalle fermé $]-\infty;a]$
$x > a$		$]a;+\infty[$	Intervalle ouvert $]a;+\infty[$
$x < a$		$]-\infty;a[$	Intervalle ouvert $]-\infty;a[$

Remarque :

- $a \leq x \leq b$ signifie que $x \in [a;b]$ et $a < x \leq b$ signifie que $x \in]a;b]$.
- Les symboles $+\infty$ (plus l'infinie) et $-\infty$ (moins l'infini) ne sont pas des nombres réels.
- Le crochet est toujours ouvert du côté de $+\infty$ et $-\infty$ dans les intervalles de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé l'ensemble vide on le note par : $\emptyset$.
- $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$; $\mathbb{R}^*_+ =]0;+\infty[$; $\mathbb{R}^*_- =]-\infty;+\infty[$.

Exemple 7

La représentation des deux intervalles $[-3;2]$ et $[-1;4]$ sur une droite numérique est la suivante :



Application 7

Représenter chacun des deux intervalles $I = [2;+\infty[$ et $J =]-5;7]$ sur une droite numérique.

Définition 5

Soit I et J deux intervalles.

- L'ensemble des éléments communs de I et J se note $I \cap J$ et se lit I inter J.
- L'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou à J se note $I \cup J$ et se lit I union J.

Exemple 8

Déterminer $[3;5] \cap [2;4]$ et $[3;5] \cup [2;4]$.

Application 8

Ecrire si possible sous forme d'un intervalle les ensembles suivants :

1. $[2;6] \cap [-1;3]$ et $[2;6] \cup [-1;3]$
2. $[2;+\infty[\cap]-\infty;1]$ et $[2;+\infty[\cup]-\infty;1]$
3. $[3;7[\cap [5;+\infty[$ et $[3;7[\cup [5;+\infty[$
4. Écrire $\mathbb{R}^*$ sous forme d'une union de deux intervalles.

Application 9

Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient :

1. $-1 \leq x < 0$
2. $x > -1$
3. $|x| \leq 1$
4. $|x| < 5$
5. $|x| > 1$
6. $|x| \geq 3$

4. Encadrement :

Définition 6

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Toute double inégalité (parmi les doubles inégalités suivantes) $a < x < b$ $a < x \leq b$ $a \leq x < b$ $a \leq x \leq b$ est appelée encadrement, de x, d'amplitude $b - a$.

Exemple 9

- $3,14 < x < 3,15$ est un encadrement de π d'amplitude $3,15 - 3,14 = 0,01$.
- $1 < \frac{3}{2} < 2$ est un encadrement de $\frac{3}{2}$ d'amplitude $2 - 1 = 1$.

Application 10

1. Déterminer un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude 1.
2. Déterminer un encadrement de $\frac{9}{8}$ d'amplitude 2 et un autre encadrement de $\frac{9}{8}$ d'amplitude $0,02$.

4.1. Encadrement de la somme de deux nombres :

Proposition 7

Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq x \leq d$ sont des encadrements des deux nombres réels x et y, alors : $\begin{cases} a+c \leq x+y \leq b+d \\ a-d \leq x-y \leq b-c \end{cases}$ son des encadrement des réels $x+y$ et $x-y$.

Exemple 10

- On a : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.
  Donc $3,142 < \sqrt{3} + x < 3,153$ est un encadrement de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ d'amplitude $3,153 - 3,142 = 0,011$.
- On a : $1,732 - 1,42 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1,733 - 1,41$ c'est-à-dire : $0,312 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,323$ est un encadrement de $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ d'amplitude de $0,01$.

4.2. Encadrement du produit de deux nombres :

Proposition 8

Soient a, b, c et d des nombres réels positifs.
Si $a \leq x \leq b$ et $x \leq y \leq d$ sont deux encadrement de x et y, alors $ax \leq xy \leq bd$ est encadrement de xy.

Exemple 11

- Soit $1,3 \leq x \leq 1,4$ et $3,9 \leq y \leq 4$, alors $5,07 \leq xy \leq 5,6$.
- Soit $-17,4 \leq a \leq -14,3$ et $-22 \leq b \leq -21,9$...

Remarque :
Si $a \leq x \leq b$, alros $-b \leq -x \leq -a$.

Application 11

Donner un encadrement de $x + y$ et xy dans chacun des cas suivants :

1. $1,01 \leq x \leq 1,02$ et $1,9 \leq y \leq 2$
2. $-2 \leq x \leq -1$ et $4 \leq y \leq 4,5$
3. $-4 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 3$
4. $-1 \leq x \leq 1$ et $1 \leq y \leq 2$

4.3. Encadrement de l'inverse et du quotient :

Proposition 9

Soient a, b, c et d des nombres réels strictement positifs.
Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ sont deux encadrements des deux nombres réels x et y, alors : $\frac{1}{b} \leq x \leq \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{d} \leq y \leq \frac{1}{c}$ et $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$ sont deux encadrements des réels $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$.

Exemple 12

- Soit $2 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 3$.

  Alors $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$(encadrement de y) et $\frac{2}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 4$ (encadrement de $\frac{x}{y}$.
- $-4 \leq a \leq -2$ et $1 \leq b \leq 3$.

Application 12

1. Soit $3,95 \leq x \leq 4,01$ et $-2 \leq y \leq -1,2$. Donner un encadrement de $\frac{x}{y}$
2. Soit $0 \leq a \leq 3$ et $-4 \leq b \leq -2$. Donner un encadrement de chacun des deux nombres : $\frac{a}{b}$ et $\frac{2a+3b}{3a-2b}$.

5. Approximation :

5.1. Approximation par défaut et par excès :

Définition 7

Soit $a \leq x \leq b$ ($a < x < b$; $a < x \leq b$; $a \leq x < b$) un encadrement du nombre x d'amplitude $b - a$.

- Le nombre a est appelé approximation du nombre x à prés par défaut.
- Le nombre b est appelé approximation du nombre x à prés par excès.

Exemple 13

- On a $3,14 < \pi < 3,15$.

  Donc : $3,14$ est une approximation du nombre π à $0,01$ prés par défaut

  $3,15$ est une approximation du nombre π à $0,01$ prés par excès.
- On a $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$.

  Donc : $1,4142$ est une approximation du nombre $\sqrt{2}$ à $0,0001 = 10^{-4}$ près par défaut

  $1,4143$ est une approximation du nombre $\sqrt{2}$ à $0,0001$ prés par excès.

Application 13

1. Donner une approximation de $\frac{5}{4}$ à 10^{-1} près par excès.
2. Donner une approximation de $\frac{}{25}$ à 10^{-2} près par défaut.

5.2. Valeur approchée :

Définition 8

Soient x un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.
Tout nombre réel a qui vérifie l'une ou l'autre des deux inégalités $|x - a| < r$ ou $|x - a| \leq r$ est appelé valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r prés).

Exemple 14

On a : $|\sqrt{5} - 2,235| \leq 0,005$. Donc $2,235$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{5}$ à la précision $0,005$ (ou $0,005$ près).

Application 14

1. Déterminer une valeur approchée de $\frac{8}{7}$ à 10^{-2} près.
2. Soit $a \leq x \leq b$ un encadrement du nombre x.

   Montrer que b est une valeur approchée de x à $\frac{b-a}{2}$ près.

6. Approximation décimales :

Définition 9

Soit x un nombre réel tel que : $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$.

- Le nombre $N \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimales du nombre x à 10^{-p} prés par défaut.
- Le nombre $(N+1) \times 10^{-p}$ est appelé l'approximation décimales du nombre x à 10^{-p} prés par excès.

Exemple 15

On a : $0,62 < \frac{5}{8} < 0,63$ c'est-à-dire $62 \times 10^{-2} < \frac{5}{8} < (62+1) \times 10^{-2}$.
Donc : $62 \times 10^{-2} = 0,62$ est l'approximation décimale du nombre $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} près par défaut.
$63 \times 10^{-2} = 0,63$ est l'approximation décimale du nombre $\frac{5}{8}$ à 10^{-2} près par excès.

Application 15

1. Donner l'approximation décimale du nombre $\sqrt{3}$ à 10^{-2} prés par défaut.
2. Donner l'approximation décimale du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-2} prés par excès.
3. On pose $a = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$

   Sachant que $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$ et $2,64 < \sqrt{7} < 2,65$

   Donner les approximations décimales à 10^{-2} prés par défaut et par excès du nombre a.