Laboratorio 2

Ottavia M. Epifania
University of Trento
ottavia.epifania@unitn.it

A.A. 2025/2026

1 Binomiale

2 Poisson

Somma di n variabile casuali (v.c.) Bernoulliane, indipendenti tra loro e con lo stesso parametro p (probabilità di osservare un successo ad ogni singola prova).

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

dove

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

p: probabilità di successo

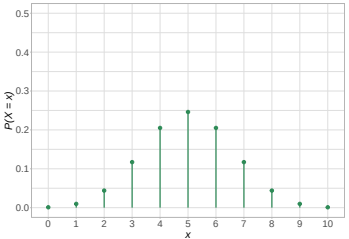
$1-p$: probabilità di insuccesso

$P(X = x)$: Probabilità di osservare x successi

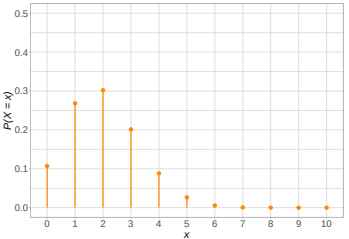
n: numero di prove

$$\mu = np$$

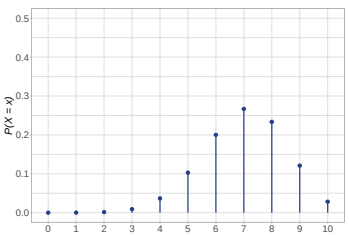
$$\sigma^2 = np(1-p)$$



(a) $p = .50$

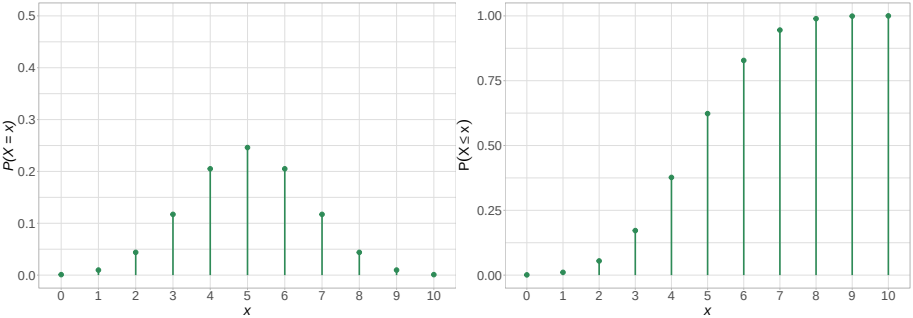


(b) $p = .20$



(c) $p = .70$

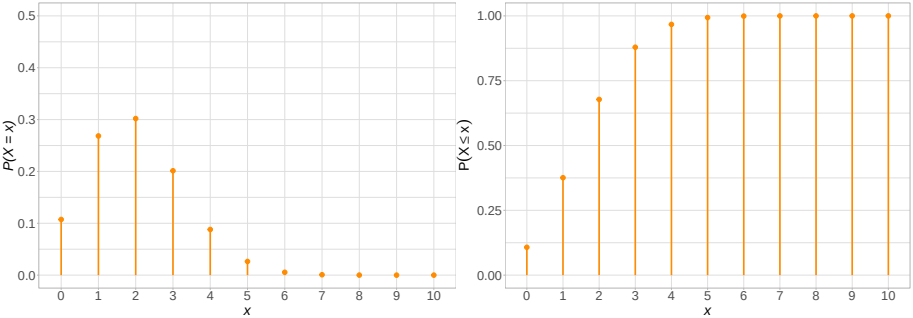
Figure 1: Distribuzione binomiale considerando $n = 10$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

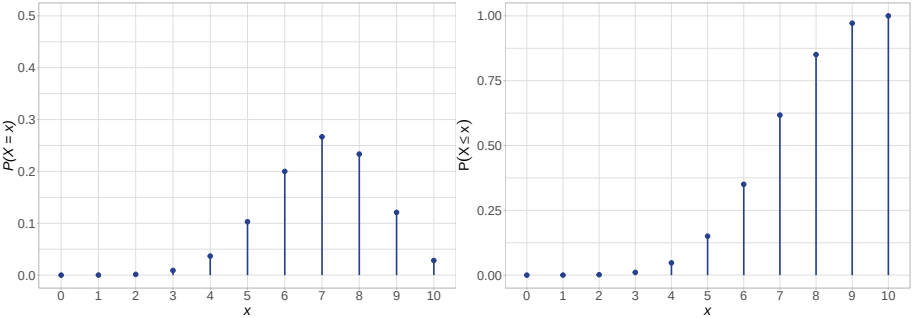
Figure 2: $p = .50$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

Figure 3: $p = .50$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

Figure 4: $p = .50$

1 Binomiale

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esempio
- Esercizio tipo esame 1
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3

2 Poisson

`dbinom(x, size, prob)`: Permette di ottenere la distribuzione di probabilità di massa dato x (`x`), n (`size`) e p (`prob`)

`pbinom(q, size, prob)`: Calcola la probabilità cumulate di osservare $P(X \leq x)$ massa dato x (`q`), n (`size`) e p (`prob`)

`pbinom(q, size, prob)`: Funzione inversa di `pbinom()` (permette di ritrovare il numero di x data la probabilità cumuluta)

`rbinom(n, size, prob)`: simula dei dati con probabilità binomiale

1 Binomiale

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esempio
- Esercizio tipo esame 1
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3

2 Poisson

10 Persone sono collegate a un sito di acquisti per acquistare un prodotto. La probabilità che ciascuno dei 10 soggetti acquisti effettivamente il prodotto (indipendentemente l'uno dall'altra) è pari a $.20$. Calcolare:

1. Probabilità che NESSUN soggetto acqusiti l'articolo
2. Probabilità che almento due soggetti acquistino l'articolo
3. Sia X il numero di soggetti che acquistano l'articolo. Calcolare valore atteso e varianza di X

Esempio

10 Persone sono collegate a un sito di acquisti per acquistare un prodotto. La probabilità che ciascuno dei 10 soggetti acquisti effettivamente il prodotto (indipendentemente l'uno dall'altra) è pari a $.20$. Calcolare:

1. Probabilità che NESSUN soggetto acqusiti l'articolo
2. Probabilità che almento due soggetti acquistino l'articolo
3. Sia X il numero di soggetti che acquistano l'articolo. Calcolare valore atteso e varianza di X

$n = 10$

$p = 0.20$; $1 - p = 0.80$

```r
x = 0:10 # supporto della variabile
dx = dbinom(x, 10, prob = 0.20) # probabilità
plot(x, dx, cex = 2, pch = 19)
```

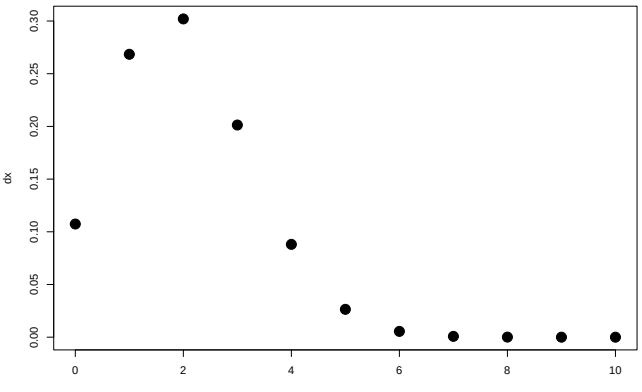


Figure 5: Rappresentazione grafica della probabilità

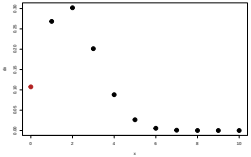
Esempio

$P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.20^0 + 0.80^{10-0} = 0.1074$$
$$P(X = 0) = \frac{10!}{0!(10!)} 0.20^0 + 0.80^{10-0} = 0.1074$$

```
dbinom(0, 10, prob = .20)
```

```
[1] 0.1073742
```



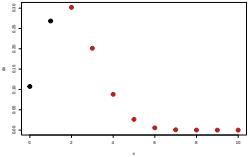
Esempio

$P(X >= 2)$

$P(X >= 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + ... + P(X = 10)$
$P(X >= 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$
$P(X >= 2) = 1 - (0.1074 + 0.2684)$

```
1 - (dbinom(0, 10, .20) + dbinom(1, 10, .20))
```

```
[1] 0.6241904
```



Valore atteso e varianza

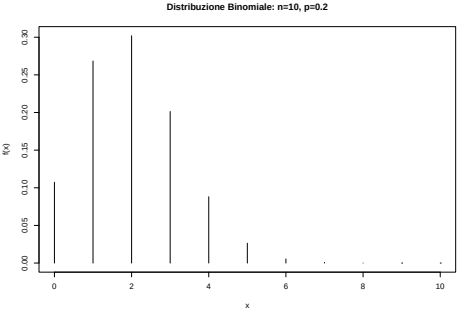
$\mu = np = 10 * 0.20 = 2$
$\sigma^2 = np(1-p) = 10 * 0.20 * 0.80 = 1.60$

```r
library(rmf)
Binomiale(10, 0.20, grafico = FALSE, dettaglio = TRUE)
```

```
-----------------------------------------------------------------------
Distribuzione Binomiale
-----------------------------------------------------------------------
Numero delle prove      : 10
Probabilita' di successo: 0.2
Valore atteso (media)   : 2
Varianza                : 1.6
Somma delle probabilita': 1
       x         f(x)      F(x)
 [1,]  0 0.1073741824 0.1073742
 [2,]  1 0.2684354560 0.3758096
 [3,]  2 0.3019898880 0.6777995
 [4,]  3 0.2013265920 0.8791261
 [5,]  4 0.0880803840 0.9672065
 [6,]  5 0.0264241152 0.9936306
 [7,]  6 0.0055050240 0.9991356
 [8,]  7 0.0007864320 0.9999221
 [9,]  8 0.0000737280 0.9999958
[10,]  9 0.0000040960 0.9999999
[11,] 10 0.0000001024 1.0000000
```

Esempio

```
-----------------------------------------------------------------------
Distribuzione Binomiale
-----------------------------------------------------------------------
Numero delle prove      : 10
Probabilita' di successo: 0.2
Valore atteso (media)   : 2
Varianza                : 1.6
Somma delle probabilita': 1
```



Esempio

```r
distBinom = Binomiale(10, 0.20, grafico = FALSE, dettaglio = TRUE)
```

```r
str(distBinom)
```

```
 num [1:11, 1:3] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...
 - attr(*, "dimnames")=List of 2
  ..$ : NULL
  ..$ : chr [1:3] "x" "f(x)" "F(x)"
```

```r
ex = sum(distBinom[,1] * distBinom[,2]); ex
```

```
[1] 2
```

1 Binomiale

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esempio
- Esercizio tipo esame 1
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3

2 Poisson

Esercizio tipo esame 1

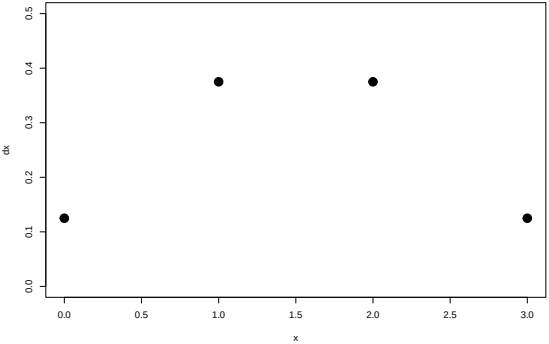
Una moneta bilanciata (onesta) viene lanciata 3 volte. Si indichi con X il numero di croci.

1. Scrivere la distribuzione di probabilità della variabile casuale X indicando tutti i possibili valori di X e le probabilità corrispondenti.
2. Verificare che la somma delle probabilità sia uguale a 1.
3. Utilizzando le proprietà della distribuzione binomiale, indicare il valore atteso e la varianza di X.
4. Calcolare il valore atteso di X utilizzando la distribuzione di probabilità trovata al punto a)

Esercizio tipo esame 1

$$n = 3$$

$$p = \frac{1}{2} = 0.50 = q$$



Soluzione analitica

Punto 1:

$$P(X=0) = \binom{3}{0} = \frac{1}{2}^{0}\frac{1}{2}^{3} = \frac{3!}{0!(3-0)!}1\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1} = \frac{1}{2}^{1}\frac{1}{2}^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!}\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} = \frac{1}{2}^{2}\frac{1}{2}^{3-2} = \frac{3!}{2!(3-2)!}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} = \frac{1}{2}^{3}\frac{1}{2}^{3-3} = \frac{3!}{3!(3-3)!}\frac{1}{8}1 = \frac{1}{8}$$

Punto 2:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Punto 3:

$$\mu = n \cdot p = 3 \cdot 1/2 = 1.5;\ \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 3 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 0.75$$

Punto 4

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot p(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3\frac{1}{8}$$

Soluzione in R

```r
x = 0:3
dx = dbinom(x, 3, prob = .5) # la moneta è onesta

risultati = cbind(x, dx, cumsum(dx))
colnames(risultati) = c("x", "f(x)", "F(X)")
risultati
```

```
     x  f(x)  F(X)
[1,] 0 0.125 0.125
[2,] 1 0.375 0.500
[3,] 2 0.375 0.875
[4,] 3 0.125 1.000
```

la colonna f(x) riporta la probabilità di osservare il corrispetivo x successo

la colonna F(X) riporta la probabilità cumulata, la somma deve essere 1 e si vede che è così dall'ultima riga

```r
# calcolo valore attesso
3 * 1/2
```

```
[1] 1.5
```

```r
# calcolo varianza
3 * 1/2 * 1/2
```

```
[1] 0.75
```

```r
# calcolo valore atteso usando la distribuzione di
# probabilità
sum(risultati[,"x"] * risultati[, "f(x)"])
```

```
[1] 1.5
```

1 Binomiale

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esempio
- Esercizio tipo esame 1
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3

2 Poisson

Esercizio tipo esame 2

Una variabile casuale discreta assume i valori $0, 1, 2, 4$ rispettivamente con probabilità $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$.

1. Trovare il valore atteso della variabile.
2. Trovare la varianza e la deviazione standard della variabile.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{12} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 * \frac{1}{2} + 1^2 * \frac{1}{6} + 2^2 * \frac{1}{4} + 4^2 * \frac{1}{12} = 2.5$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.5 - 1 = 1.5$$

Soluzione in R

```r
# calcolo valore atteso
ex = 0 * 1/2 + 1 * 1/6 + 2 * 1/4 + 4 * 1/12; ex
```

```
[1] 1
```

```r
ex2 = 0^2 * 1/2 + 1^2 * 1/6 + 2^2 * 1/4 + 4^2 * 1/12
ex2
```

```
[1] 2.5
```

```r
varx = ex2 - ex^2
varx
```

```
[1] 1.5
```

1 Binomiale

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esempio
- Esercizio tipo esame 1
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3

2 Poisson

Esercizio tipo esame 3

Test a risposta multipla, 4 domande con 3 opzioni di risposta (solo una è corretta). Se le risposte vengono date a caso, calcolare:

1. La probabilità di rispondendere esattamente a 0, 1, 2, 3, 4 domande
2. Disegnare la distribuzione di probabilità del numero di risposte esatte
3. Calcolare il valore atteso del numero di risposet corrette

Usare R e il pacchetto `rmf`

Soluzione con rmf

```r
Binomiale(4, 1/3, grafico = FALSE)
```

```
---------------------------------------------------------------------------
Distribuzione Binomiale
---------------------------------------------------------------------------
Numero delle prove      : 4
Probabilita' di successo: 0.3333333
Valore atteso (media)   : 1.333333
Varianza                : 0.8888889
Somma delle probabilita': 1
     x       f(x)      F(x)
[1,] 0 0.19753086 0.1975309
[2,] 1 0.39506173 0.5925926
[3,] 2 0.29629630 0.8888889
[4,] 3 0.09876543 0.9876543
[5,] 4 0.01234568 1.0000000
```

Soluzione con R base

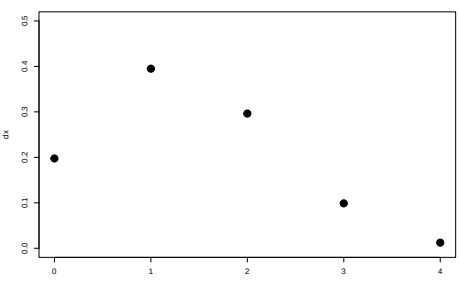
```
x = c(0,1,2,3,4)
dx = dbinom(x, 4, prob = 1/3); dx
```

```
[1] 0.19753086 0.39506173 0.29629630 0.09876543 0.01234568
```

```
ex = 4 * 1/3; ex
```

```
[1] 1.333333
```

```
plot(x, dx, pch = 19, cex = 2, ylim=c(0, 0.5))
```



1 Binomiale

2 Poisson

La v.c. di Poisson è il conteggio del numero di eventi che avvaengono in un determinato lasso di tempo (e.g., numero di telefonate, numero di nuovi nati) o in uno spazio definito (numero di errori in una pagina web)

Può assumuere i valori interi positivi, senza limite superiore $[0, +\infty)$

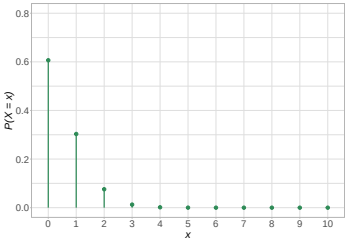
La distribuzione di Poisson è definita dal parametro mu

$$P(X = x) = \frac{e^{-\mu} \times \mu^x}{x!}$$

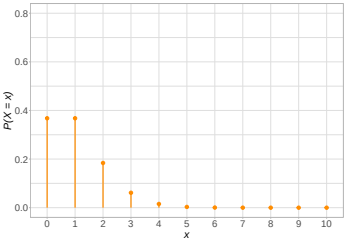
μ è sia la media sia la varianza della distribuzione di Poisson e ne distribuisce interamente la forma

Se μ è molto piccolo, sono più probabili i valori bassi dei conteggi

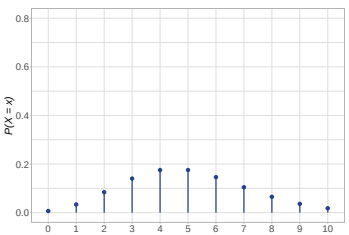
Viceversa, maggiore è μ, più sono probabili i valori alti della distribuzione



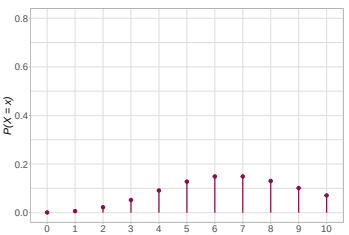
(a) $\mu = .50$



(b) $\mu = 1$

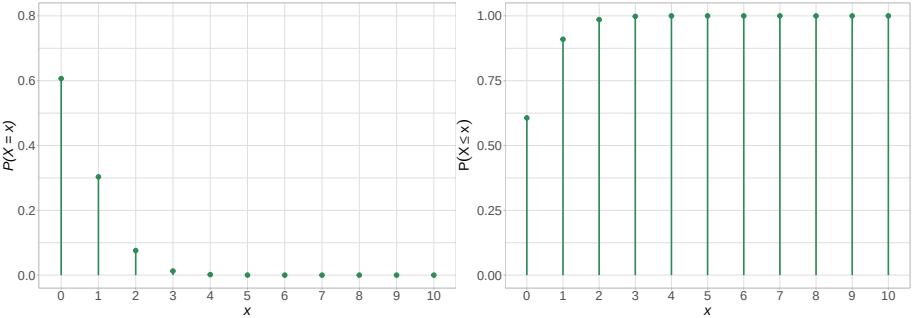


(c) $\mu = 4$



(d) $\mu = 7$

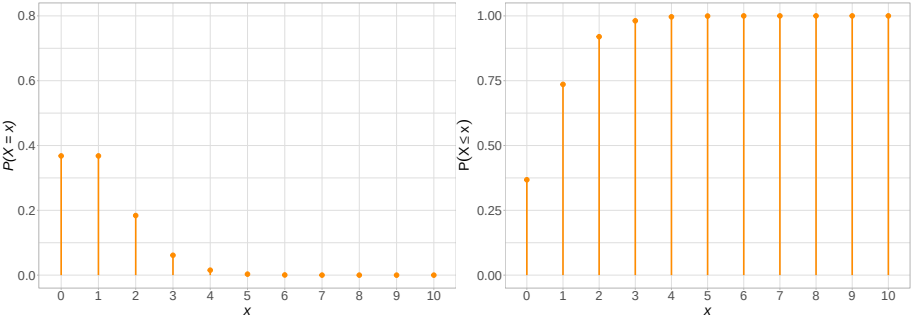
Figure 6: Distribuzione di Poisson considerando $n = 10$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

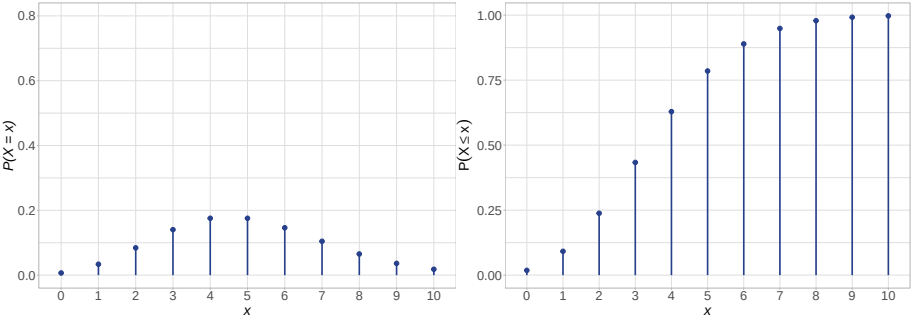
Figure 7: $\mu = .50$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

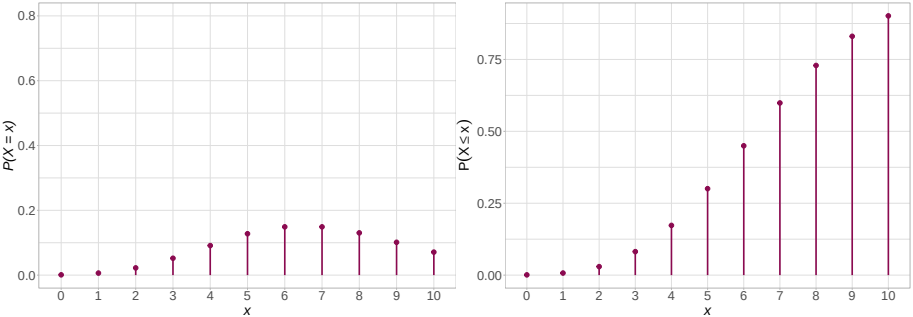
Figure 8: $\mu = 1$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

Figure 9: $\mu = 4$



(a) Probabilità di massa

(b) Probabilità cumulata

Figure 10: $\mu = 7$

1 Binomiale

2 Poisson

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esercizio tipo esame
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3
- Esercizio tipo esame 4

Funzioni distribuzione binomiale

`dpois(x, lambda)`: Permette di ottenere la distribuzione di probabilità di massa dato x (`x`) e μ (`lambda`)

`ppois(q, lambda)`: Calcola la probabilità cumulate di osservare $P(X \leq x)$ massa dato x (`q`) e μ (`lambda`)

`qpois(p, lambda)`: Funzione inversa di `ppois()` (permette di ritrovare il numero di x data la probabilità cumuluta)

`rpois(n, lambda)`: simula dei dati secondo la Poisson

1 Binomiale

2 Poisson

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esercizio tipo esame
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3
- Esercizio tipo esame 4

Esercizio tipo esame

Il numero X di denunce a una compagnia di assicurazioni per danni subiti durante i traslochi è distributio secondo una distribuzione di Poisson con $\mu = 3.1$.

Qual è la probabilità di osservare:

1. meno di 3 denunce
2. esattamente 3 denunce
3. Tre o più denunce
4. Più di 3 denunce

Soluzione analitica

$$P(X = x) = \frac{e^{-3.1} \times 3.1^x}{x!}$$

Punto 1:

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$
$$\frac{e^{-3.1} \times 3.1^0}{0!} + \frac{e^{-3.1} \times 3.1^1}{1!} + \frac{e^{-3.1} \times 3.1^2}{2!} = 0.4012$$

Punto 2:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-3.1} \times 3.1^3}{3!} = 0.2237$$

Punto 3:

$$P(X \geq 3) = 1 - [(PX = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - 0.4012 = 0.5988$$

Punto 4:

$$P(X > 3) = 1 - [(PX = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)] = 0.3751$$

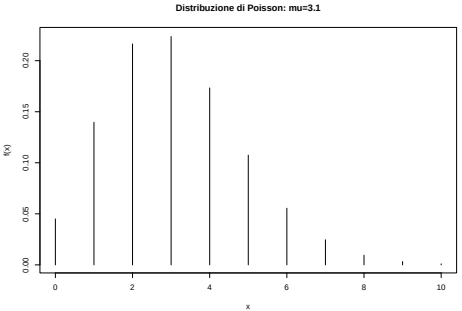
Soluzione con rmf

```r
library(rmf)
Poisson(mu  = 3.1, grafico = FALSE)
```

```
-----------------------------------------------------------------------
Distribuzione di Poisson
-----------------------------------------------------------------------
mu:  3.1
Valore atteso (media)   : 3.1
Varianza                : 3.1
Somma delle probabilita': 0.9996166
       x        f(x)      F(x)
 [1,]  0 0.045049202 0.0450492
 [2,]  1 0.139652527 0.1847017
 [3,]  2 0.216461418 0.4011631
 [4,]  3 0.223676798 0.6248399
 [5,]  4 0.173349519 0.7981895
 [6,]  5 0.107476701 0.9056662
 [7,]  6 0.055529629 0.9611958
 [8,]  7 0.024591693 0.9857875
 [9,]  8 0.009529281 0.9953168
[10,]  9 0.003282308 0.9985991
```

```r
Poisson(mu  = 3.1, grafico = TRUE)
```

```
-----------------------------------------------------------------------
Distribuzione di Poisson
-----------------------------------------------------------------------
mu:  3.1
Valore atteso (media)   : 3.1
Varianza                : 3.1
Somma delle probabilita': 0.9996166
```




```
      x         f(x)       F(x)
```

1 Binomiale

2 Poisson

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esercizio tipo esame
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3
- Esercizio tipo esame 4

Esercizio tipo esame 2

Il numero medio di errori in una pagina di libero è $\mu = 0.24$. Supponendo che il numero di errori sia una variabile distribuita secondo una Poisson, calcolare la probabilità di osservare **al massimo** 2 errori per ogni pagina in libro di 30 pagine

Esercizio tipo esame 2

Il numero medio di errori in una pagina di libero è $\mu = 0.24$. Supponendo che il numero di errori sia una variabile distribuita secondo una Poisson, calcolare la probabilità di osservare **al massimo** 2 errori per ogni pagina in libro di 30 pagine

Soluzione analitica:

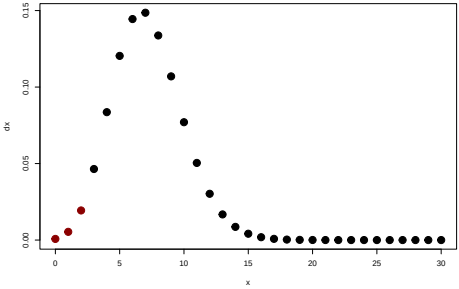
$\mu = 0.24$ su *una pagina* $\rightarrow 0.24 : 1 = x : 30 \rightarrow \mu^* = 0.24 * 30 = 7.20$

$$P(X = x) = \frac{e^{-7.20} \times 7.20^x}{x!}$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.02547$$

Soluzione con R

```
x = 0:30
dx = dpois(x, lambda = 7.2)
plot(x, dx, pch = 19, cex = 2)
sum(dx[x <= 2])
```



1 Binomiale

2 Poisson

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esercizio tipo esame
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3
- Esercizio tipo esame 4

Esercizio tipo esame 3

I down di un sito seguono una distribuzione di Poisson con $\mu = 2$ *all'anno* (ovvero, ci si aspetta che mediamente ci siano due down all'anno)

Calcolare:

1. La probabilità che in un anno non ci sia nessun down del sistema
2. La probabilità che in un anno ci siano 2 o più down
3. La probabilità che in due anni scelti a caso, non ci siano interruzioni in nessuno dei due anni considerati

Soluzione analitica

$$P(X = x) = \frac{e^{-2} \times 2^x}{x!}$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} \times 2^0}{0!} = 0.135$$

$$P(X >= 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0.406 = 0.594$$

Gli anni scelti a caso sono indipendenti: $0.135 \times 0.135 = 0.018225$

Soluzione con rmf

```r
Poisson(mu=2, grafico = FALSE)
```

```
-----------------------------------------------------------------------
Distribuzione di Poisson
-----------------------------------------------------------------------
mu:  2
Valore atteso (media)   : 2
Varianza                : 2
Somma delle probabilita': 0.9999917
       x         f(x)      F(x)
 [1,]  0 1.353353e-01 0.1353353
 [2,]  1 2.706706e-01 0.4060058
 [3,]  2 2.706706e-01 0.6766764
 [4,]  3 1.804470e-01 0.8571235
 [5,]  4 9.022352e-02 0.9473470
 [6,]  5 3.608941e-02 0.9834364
 [7,]  6 1.202980e-02 0.9954662
 [8,]  7 3.437087e-03 0.9989033
 [9,]  8 8.592716e-04 0.9997626
[10,]  9 1.909493e-04 0.9999535
[11,] 10 3.818985e-05 0.9999917
```

Soluzione con R base

```r
# Punto 1
dpois(0, 2)
```

```
[1] 0.1353353
```

```r
# Punto 2
1 - (sum(dpois(c(0,1), 2)))
```

```
[1] 0.5939942
```

```r
# Punto 3
dpois(0, 2) * dpois(0, 2)
```

```
[1] 0.01831564
```

1 Binomiale

2 Poisson

- Funzioni distribuzione binomiale
- Esercizio tipo esame
- Esercizio tipo esame 2
- Esercizio tipo esame 3
- Esercizio tipo esame 4

Esercizio tipo esame 4

I batteri sono distribuiti casualmente nelle acque di un fiume con una concentrazione di uno ogni 20cc di acqua. Considerando la distribuzione di Poisson, determinare:

1. La probabilità di trovare esattamente due batteri in 10cc
2. La probabilità di trovare almeno un batterio in 1cc

Soluzione analictica

Punto 1:

$\mu = 1$ ogni 20cc $\rightarrow 1 : 20 = x : 10 \rightarrow x = 10/20 = 0.50$

$$P(X = x) = \frac{e^{-0.50} \times 0.50^x}{x!} = \frac{e^{-0.50} \times 0.50^2}{2!} = 0.0758$$

Punto 2:

$\mu = 1$ ogni 20cc $\rightarrow 1 : 20 = x : 1 \rightarrow x = 1/20 = 0.05$

$$P(X > 0) = 1 - \frac{e^{-0.05} \times 0.05^0}{0!} = 1 - 0.9512 = 0.0488$$

Soluzione con R

```r
dpois(2, 0.50)
```

```
[1] 0.07581633
```

```r
1-dpois(0, 0.05)
```

```
[1] 0.04877058
```