

# Indici di Variabilità e di Posizione

## Test per le organizzazioni

Ottavia M. Epifania

[ottavia.epifania@unipd.it](mailto:ottavia.epifania@unipd.it)

Margherita Calderan

[margherita.calderan@unipd.it](mailto:margherita.calderan@unipd.it)

Università di Padova

## 1 Indici di variabilità

## 2 Gli indici di posizione

## 1 Indici di variabilità

- Campo di variazione
- La varianza
- La deviazione standard
- Il coefficiente di variazione
- La differenza interquartilica

## 2 Gli indici di posizione

## Indici di variabilità

- Il concetto di variabilità si riferisce a quanto i punteggi di una distribuzione sono sparsi ovvero quanto siano simili o dissimili tra loro
- Il ricorso ad un indice di tendenza centrale comporta una forte semplificazione, e da solo non fornisce informazioni esaurienti sulla distribuzione.
- E' fondamentale capire quanto i dati siano dispersi intorno all'indice di tendenza centrale.
- La variabilità è una caratteristica fondamentale delle distribuzioni "*Variability is the essence of statistics*" (Cobb, 1992)

Consideriamo i risultati dei compiti di Psicometria ottenuti dagli studenti di tre diversi Professori:

```
prof1 = c(18, 22, 24, 16, 19, 22, 18, 21)  
mean(prof1)
```

```
[1] 20
```

```
prof2 = c(10, 10, 12, 10, 30, 28, 30, 30)  
mean(prof2)
```

```
[1] 20
```

```
prof3 = c(20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20)  
mean(prof3)
```

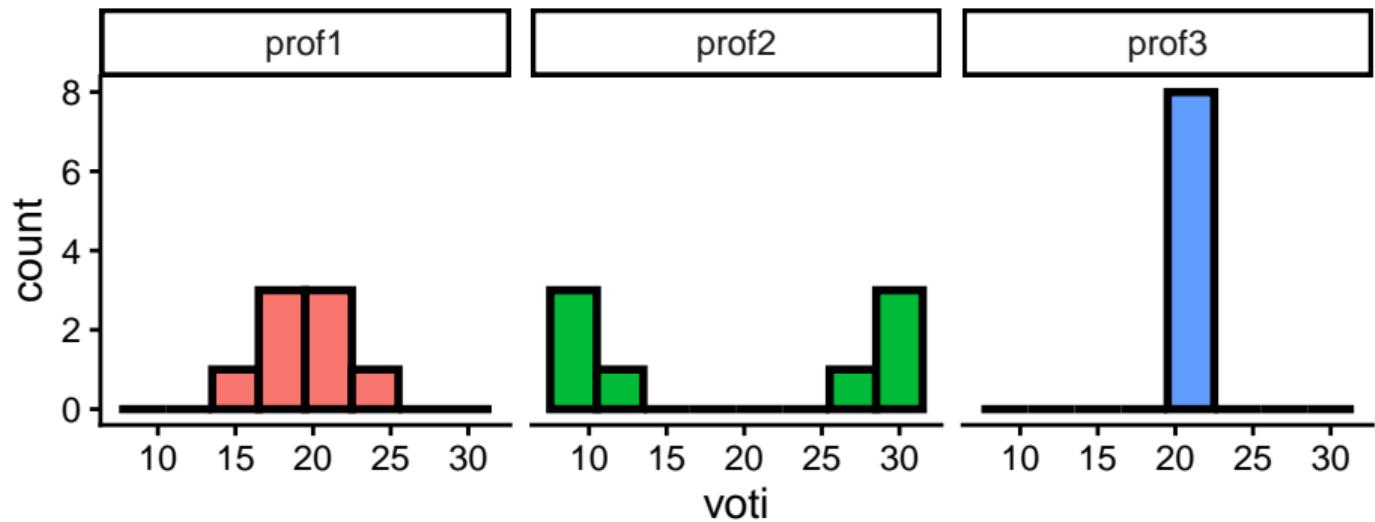
```
[1] 20
```

In ciascun gruppo di studenti la media dei voti è pari a 20, ma è evidente una diversa dispersione intorno a tale valore.

## Indici di variabilità o disperisione

- Dobbiamo quindi considerare la la variabilità (o dispersione) di una distribuzione di dati.
- Gli indici di variabilità possono assumere solo valori positivi (non ha senso parlare di dispersione negativa) o nulli (quando i dati osservati hanno tutti lo stesso valore).
- La variabilità minima possibile è 0 e si riferisce a distribuzioni in cui tutti i punteggi sono uguali e dunque non c'è variabilità nei dati.

Quale gruppo è più variabile?



## Campo di variazione

## Campo di variazione

Campo di variazione (o gamma) di una distribuzione di dati è la differenza tra il valore massimo e il valore minimo osservato:

$$\text{gamma} = X_{max} - X_{min}$$

```
prof1
```

```
[1] 18 22 24 16 19 22 18 21
```

```
max(prof1) - min(prof1)
```

```
[1] 8
```

## Campo di variazione

## Esempio 2:

```
x1 = c(10, 10, 27, 29, 30, 28, 30, 30)  
x2 = c(10, 10, 16, 17, 30, 20, 21, 30)  
  
max(x1) - min(x1)
```

```
[1] 20
```

```
max(x2) - min(x2)
```

```
[1] 20
```

Commenti?

## La varianza

## La varianza

- La varianza  $\sigma^2$  di un insieme di dati è la media degli scarti al quadrato tra i dati e la media dei dati stessi:

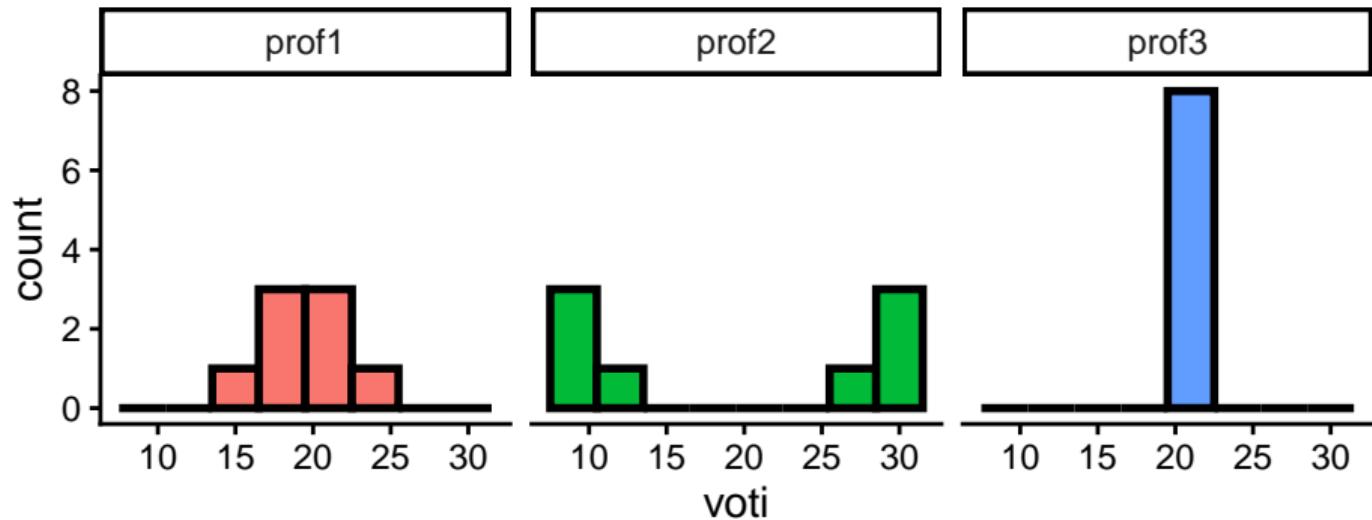
$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

La varianza assume valore minimo 0 quando tutti i dati sono uguali tra loro e aumenta all'aumentare della dispersione dei dati rispetto alla media:

$$\sigma^2 \geq 0$$

## La varianza

Qual'è la varianza maggiore? Quant'è la varianza di prof3?



La varianza

## Calcolo della varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

prof1

```
[1] 18 22 24 16 19 22 18 21
```

Il divisore è il numero di osservazioni:  $n = 8$

```
divisore = length(prof1) # numero di osservazioni
```

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^8 (X_i - \bar{X})^2}{8}$$

La varianza

# Calcoliamo la **media** $\bar{X}$

```
media = mean(prof1)  
media
```

```
[1] 20
```

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^8 (X_i - 20)^2}{8}$$

## La varianza

Il dividendo è dato dalla **somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica**:

$$(18 - 20)^2 + (22 - 20)^2 + (24 - 20)^2 + (16 - 20)^2 + (19 - 20)^2 + (22 - 20)^2 + (18 - 20)^2 + (21 - 20)^2$$

```
prof1
```

```
[1] 18 22 24 16 19 22 18 21
```

```
media
```

```
[1] 20
```

# ad ogni elemento di prof1 viene sottratta la media  
 $(prof1 - \text{media})^2$

```
[1] 4 4 16 16 1 4 4 1
```

```
dividendo = sum((prof1 - \text{media})^2)
```

## La varianza

La varianza è la **media dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica**:

```
dividendo # 4 + 4 + 16 + 16 + 1 + 4 + 4 + 1
```

```
[1] 50
```

```
divisore
```

```
[1] 8
```

```
varianza = dividendo/divisore # varianza descrittiva
```

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i^8 (X_i - 20)^2}{8}$$

## Varianza descrittiva vs. inferenziale

- **Descrittiva:** descrive la dispersione dei dati osservati (come se fossero la popolazione).
- **Inferenziale:** stima la varianza della popolazione a partire da un campione.

## La varianza

## Varianza Descrittiva (Popolazione)

Se i tuoi dati rappresentano *tutta* la popolazione (o vuoi solo descriverli):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

- Denominatore: **n** (tutti i dati)
- Obiettivo: descrivere la dispersione osservata

## La varianza

## Varianza Inferenziale (Campione)

Se hai un campione e vuoi stimare la varianza della popolazione:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

- Denominatore: **n - 1** (correzione di Bessel)
- Obiettivo: stima non distorta della varianza di popolazione

## La varianza

Perché  $n - 1$ ?

Per definizione, la somma degli scarti dalla media è sempre zero:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$$

Se conosci **n - 1** scarti, l'ultimo è automaticamente determinato (deve far sommare tutto a zero).

## La varianza

## Perché $n - 1$ corregge il bias

Quando usi  $\bar{X}$  invece della “vera” media  $\mu$ :

- $\bar{X}$  è “ottimizzata” per i tuoi dati specifici, è la media del campione non della popolazione ( $\mu$ )
- Gli scarti ( $X_i - \bar{X}$ ) sono più piccoli di quelli che otterresti con  $\mu$
- Dividere per **n** sottostima la vera varianza
- Dividere per **n - 1** (numero più piccolo) aumenta il risultato

## La varianza

```
x = c(2, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 9)
```

**Usa  $\sigma^2$  (n) quando:**

- Fai solo descrizione/esplorazione

```
# Varianza campionaria (n-1) - default  
var(x)
```

```
[1] 4.571429
```

**Usa  $s^2$  (n - 1) quando:**

- Hai un campione
- Vuoi stimare parametri della popolazione o fare test statistici

```
# Varianza descrittiva (n) - manuale  
sum((x - mean(x))^2) / length(x)
```

```
[1] 4
```

## La deviazione standard

## La deviazione standard

La deviazione standard (o scarto quadratico medio) è la radice della varianza:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Riporta l'indice di varibilità sulla scala della variabile.

Es. In campione di 20 soggetti è stata rilevata la variabile peso. In tale campione la media è pari a  $70kg$  e la deviazione standard è pari a  $10.7$ . Si potrà affermare che i soggetti **differiscono mediamente** di  $10.7kg$  **dal peso medio** di  $70kg$ .

## Il coefficiente di variazione

## Il coefficiente di variazione

Il coefficiente di variazione è dato dal rapporto tra la **deviazione standard** e il **valore assoluto della media** dei dati:

$$CV = \frac{\sigma}{|\bar{X}|}$$

Il **CV** è un indice di variabilità relativa che **tiene conto**, oltre che della **deviazione standard** dei dati, anche della **media**. Per questo motivo è molto utile per eseguire dei confronti in termini di **variabilità tra fenomeni “diversi” tra loro**.

## Il coefficiente di variazione

A un gruppo di 15 studenti viene somministrato un test che valuta le conoscenze informatiche generali (20 domande, del tipo *giusto/sbagliato*). I 15 studenti seguono un corso di informatica generale organizzato dal Comune e a fine corso viene somministrato loro un test sulle conoscenze informatiche. Il test prevede 40 domande del tipo *giusto/sbagliato*. I risultati dei due test, in termini di media e deviazione standard di risposte corrette, sono presentati nella seguente tabella:

Test	media	deviazione standard
Pre-test	9	5
Post-test	30	8

C'è più variabilità tra i soggetti al pre-test o al post-test?

## Il coefficiente di variazione

- Naturalmente confrontare le deviazioni standard non è di grande aiuto. Esse dipendono fortemente dalle media dei dati su cui sono state calcolate.
- Per poter operare un confronto sulla variabilità dei punteggi ottenuti ai due test è opportuno calcolare i rispettivi coefficienti di variazione:

$$CV_{\text{pre-test}} = \frac{5}{9} = .56$$

$$CV_{\text{post-test}} = \frac{8}{30} = .27$$

Osservando i risultati si può concludere che le conoscenze informatiche dei soggetti sono più omogenee al post-test.

## La differenza interquartilica

## La differenza interquartilica

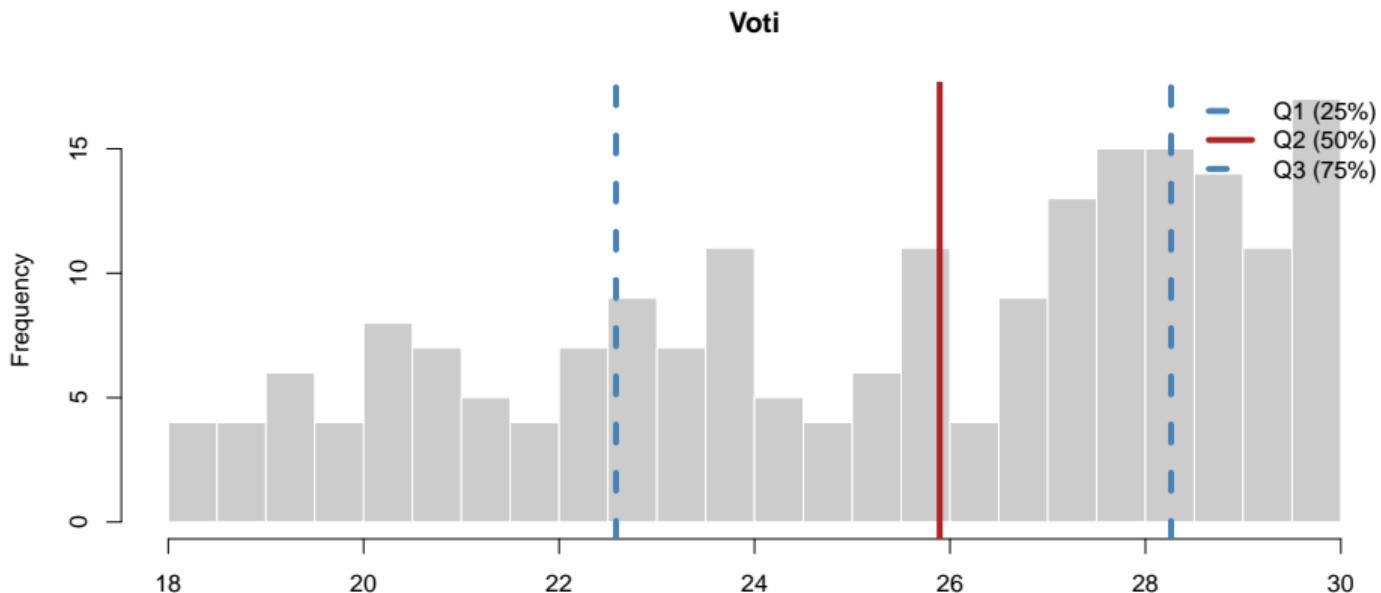
La differenza interquartilica di una distribuzione è la differenza tra il terzo e il primo quartile (o equivalentemente tra il 75-esimo e il 25-esimo percentile) dei dati:

$$IQR = Q_{75} - Q_{25}$$

Cosa vuol dire?

## La differenza interquartilica

Immaginiamo di avere i voti di 200 studenti:



## La differenza interquartilica

- Q1 (25%) indica una soglia sotto cui cade circa un quarto della classe;
- Q2 (50%) indica una soglia sotto cui cade la metà della classe;
- Q3 (75%) lascia sotto di sé circa tre quarti dei voti.

Cos'è Q2?

## 1 Indici di variabilità

## 2 Gli indici di posizione

## 1 Indici di variabilità

## 2 Gli indici di posizione

- I quantili
- Rango percentile

## I quantili

# I quantili

Data una distribuzione di dati, si definisce come **Quantile di indice p** e si indica con  $Q_p$ , il dato al di sotto del quale si situa una percentuale **p** di dati.

Ad esempio, la mediana può essere considerata come il quantile  $Q_{50}$ , e cioè il dato al di sotto del quale si situa il **50%** dei dati.

## I quantili

- Esistono diverse tipologie di quantili.
- Rispetto all'utilizzo nelle applicazioni in psicologia, i più importanti sono i **Quartili** e i **Percentili**.

## I quartili

I quartili dividono in 4 parti uguali la distribuzione dei dati. Essi sono:

- Il primo quartile  $Q_{25}$ : il dato al di sotto del quale si situa il **25%** dei dati.
- Il secondo quartile (o mediana)  $Q_{50}$ : il dato al di sotto del quale si situa il **50%** dei dati.
- Il terzo quartile  $Q_{75}$ : il dato al di sotto del quale si situa il **75%** dei dati.

I quartili vengono rappresentati all'interno di un grafico molto utile per descrivere i dati detto diagramma a scatola (boxplot).

I quantili

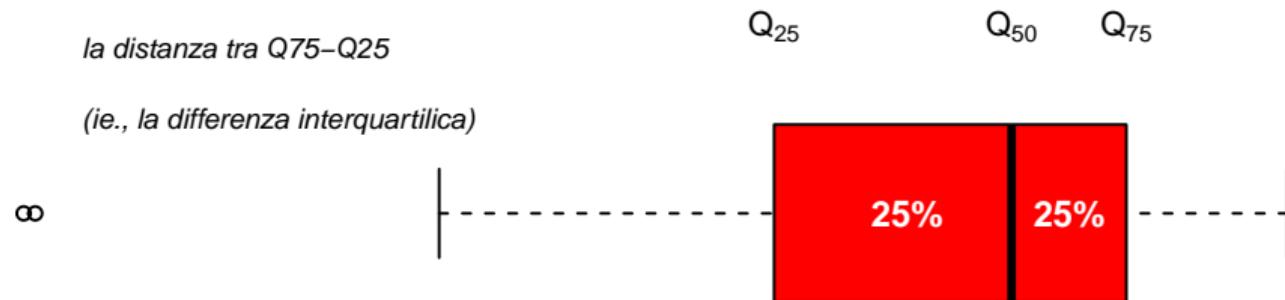
## Boxplot

*Outlier: valori che distano da Q25*

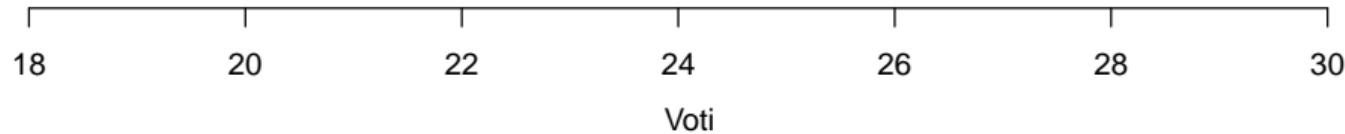
*più di una volta e mezzo*

*la distanza tra Q75–Q25*

*(ie., la differenza interquartilica)*



**il 50% dei dati sta tra il primo e il terzo quartile**



## I quantili

## La differenza interquartilica

La differenza interquartilica (IQR) misura la dispersione del 50% centrale dei dati (tra primo e terzo quartile), quindi i valori estremi incidono poco o per nulla sul suo valore. Per questo è chiamato un indice di variabilità robusto.

```
IQR(voti) # funzione per il calcolo automatico
```

```
[1] 3.235585
```

## Outlier

- I baffi si estendono fino all'ultimo dato entro 1.5 volte l'IQR dai quartili. Tutto ciò che sta oltre i baffi è un outlier.
- Un outlier è un valore che dista dai quartili ( $Q_1$  o  $Q_3$ ) più di 1.5 volte la differenza interquartile (IQR).
- È un outlier qualsiasi osservazione che cade fuori dall'intervallo  $[Q_1 - 1.5 \times IQR ; Q_3 + 1.5 \times IQR]$ .

## I quantili

## I percentili

I percentili, spesso indicati con la lettera maiuscola **P**, dividono in **cento parti** la distribuzione dei dati.

Alcuni percentili molto importanti, sia dal punto di vista statistico che rispetto alle applicazioni in psicologia, sono:

$$P_5 \quad P_{25} \quad P_{50} \quad P_{75} \quad P_{95}$$

## I quantili

Per parlare di percentili/quantili dobbiamo prima ordinare i voti dal più basso al più alto:

```
head(voti, n = 6) # primi 6 voti
```

```
[1] 23.91 23.54 22.50 29.89 20.12 27.76
```

```
tail(voti, n = 6) # ultimi 6 voti
```

```
[1] 28.30 28.55 29.54 27.17 28.66 29.06
```

## I quantili

Per parlare di percentili/quantili dobbiamo prima ordinare i voti dal più basso al più alto:

```
v_sorted = sort(voti) # riordino ?sort
```

```
head(v_sorted, n = 6) # primi 6 voti
```

```
[1] 18.13 18.50 18.63 18.77 18.82 18.84
```

```
tail(v_sorted, n = 6) # ultimi 6 voti
```

```
[1] 29.87 29.87 29.89 29.92 29.95 29.96
```

## I quantili

Trovare il valore sotto cui cade circa il 25% dei voti.

```
n = length(voti) # numero di osservazioni  
  
p = 0.25 # voglio il 25° percentile  
  
k = n * p # quanti voti rappresentano il 25% del totale  
#(25% di 200 = 50)  
  
Q_25 = v_sorted[k] # predo il voto in quella posizione  
Q_25
```

```
[1] 22.25
```

```
sum(voti <= Q_25) # quanti sono <= soglia
```

```
[1] 50
```

## I quantili

Fortunatamente esiste la funzione `quantile()` che permette di calcolare i quantili:

```
# probs specifica che quantili vogliamo
```

```
quantile(voti, probs = c(0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.95))
```

	5%	25%	50%	75%	95%
voti	18.9995	22.2800	26.4100	28.3800	29.7725

## I quantili

## Esempio: Workaholism (dipendenza da lavoro)

A 6 lavoratori adulti è stato somministrato un test standardizzato a livello nazionale sul workaholism (punteggio totale). Il punteggio di ciascun partecipante è riportato nella tabella seguente:

Codice partecipante	1	2	3	4	5	6
Punteggio (totale)	40	50	30	80	23	42

Valutare le prestazioni dei 6 partecipanti alla luce dei valori normativi del test:

Percentile	P5	P25	P50	P75	P95
Punteggio	31	42	51	68	78

## Rango percentile

# Rango percentile

Il **Rango percentile** ( $R_p$ ) indica la **percentuale di casi** che hanno un **valore uguale o inferiore** a un particolare punteggio  $X_i$

## Rango percentile

Supponiamo di disporre di un test, che misura la comprensione del testo nei bambini. Il punteggio di un soggetto al test è ottenuto come la somma di risposte corrette a 20 domande.

Per i bambini di 9 anni, al punteggio 15 è associato il rango percentile di 60 ( $Rp_{15} = 60$ ).

Il **60%** dei bambini italiani di 9 anni ottiene un punteggio al test inferiore o uguale a 15.

## Rango percentile

Supponiamo di aver somministrato il test ad un bambino di 9 anni e di aver verificato sul manuale che il suo punteggio equivale a un rango percentile pari a 5.

Come interpretare la sua performance?

## Rango percentile

## Calcolo dei ranghi percentili

Per calcolare un rango percentile, basta seguire questi semplici step:

- ① Determinare quanti casi sono nel gruppo.
- ② Determinare quanti casi cadono “sotto” o al punteggio di interesse
- ③ Dividere il numero di casi ottenuti allo step 2 per il numero totale di casi nel gruppo (step 1)
- ④ Moltiplicare il risultato dello step 3 per 100

## Rango percentile

$$P_r = \frac{B}{N} \times 100 = \text{rango percentile di } X_i$$

- $X_i$  = punteggio di interesse
- $N$  = numero totale di casi
- $B$  = numero di casi  $\leq X_i$
- $P_r$  = rango percentile

## Rango percentile

Il file `data_work.rda` contiene il numero di lavoratori che, su 1.000, subiscono un infortunio sul lavoro.

```
load("data/data_work.rda")
data_work
```

	Paese	Infortuni_ogni_1000_lavoratori
1	Singapore	2.06
2	Giappone	2.86
3	Francia	17.11
4	Spagna	3.86
5	Australia	4.10
6	Italia	20.01
7	Stati Uniti	12.68
8	Cina	2.26
9	Turchia	4.03
10	Marocco	5.12
11	Bolivia	27.21
12	Etiopia	32.10
13	Mozambico	33.44

## Rango percentile

Supponiamo che il nostro caso di interesse siano gli Stati Uniti. Prima di tutto riordiniamo i dati in ordine crescente.

```
data_sorted=data_work[order(data_work$Infortuni_ogni_1000_lavoratori), ]  
data_sorted
```

	Paese	Infortuni_ogni_1000_lavoratori
1	Singapore	2.06
8	Cina	2.26
2	Giappone	2.86
4	Spagna	3.86
9	Turchia	4.03
5	Australia	4.10
10	Marocco	5.12
7	Stati Uniti	12.68
3	Francia	17.11
6	Italia	20.01
14	Afghanistan	25.02
11	Bolivia	27.21
12	Etiopia	32.10

## Rango percentile

Determiniamo il numero di casi con tassi inferiori o uguali al nostro caso di interesse.

Il numero di casi con un tasso di infortuni inferiore a quello degli Stati Uniti (tasso migliore) sono 7 paesi: Marocco, Australia, Turchia, Spagna, Giappone, Cina, Singapore - hanno tassi inferiori a 12.68

```
data_sorted[data_sorted$Infortuni_ogni_1000_lavoratori <= 12.68,]
```

	Paese	Infortuni_ogni_1000_lavoratori
1	Singapore	2.06
8	Cina	2.26
2	Giappone	2.86
4	Spagna	3.86
9	Turchia	4.03
5	Australia	4.10
10	Marocco	5.12
7	Stati Uniti	12.68

## Rango percentile

Calcoliamo il rango percentile:

$$P_r = \frac{B}{N} \times 100 = \text{rango percentile di } X_i$$

```
# numero di casi minori o uguali al punteggio degli stati uniti  
(B = sum(data_sorted$Infortuni_ogni_1000_lavoratori <= 12.68))
```

```
[1] 8
```

```
#numero di casi totali  
(N = nrow(data_sorted))
```

```
[1] 14
```

```
(P = (B/N) * 100)
```

```
[1] 57.14286
```

Il 57.14286% per cento di casi ha valori uguali o inferiori agli Stati Uniti.

## Rango percentile

In R è possibile utilizzare direttamente la funzione `rank()` per ottenere l'indice di posizione per ciascun valore, e poi dividere per il numero totale per ottenere il rango percentile per ogni valore

```
data_work$Infortuni_ogni_1000_lavoratori
```

```
[1] 2.06 2.86 17.11 3.86 4.10 20.01 12.68 2.26 4.03 5.12 27.21 32.10  
[13] 33.44 25.02
```

```
rango = rank(data_work$Infortuni_ogni_1000_lavoratori)  
rango # indica l'ordine crescente
```

```
[1] 1 3 9 4 6 10 8 2 5 7 12 13 14 11
```

```
(N = nrow(data_work)) # quante osservazioni totali
```

```
[1] 14
```

## Rango percentile

```
# aggiungo la variabile Pr al dataset  
data_work$Pr = rango/N #divido l'indice di posizione per il valore totale  
  
data_work
```

	Paese	Infortuni_ogni_1000_lavoratori	Pr
1	Singapore	2.06	0.07142857
2	Giappone	2.86	0.21428571
3	Francia	17.11	0.64285714
4	Spagna	3.86	0.28571429
5	Australia	4.10	0.42857143
6	Italia	20.01	0.71428571
7	Stati Uniti	12.68	0.57142857
8	Cina	2.26	0.14285714
9	Turchia	4.03	0.35714286
10	Marocco	5.12	0.50000000
11	Bolivia	27.21	0.85714286
12	Etiopia	32.10	0.92857143
13	Mozambico	33.44	1.00000000
14	Afghanistan	25.02	0.78571429