PROVA A1 – CÁLCULO I – EPGE

10 de abril de 2021

QUESTÃO 1

a) Para $x<2$, $f(x)=3x^2$ e, portanto, $f'(x)=6x$.

Para $x>2$, $f(x)=x^3+1$ e, portanto, $f'(x)=3x^2$.

0,75

Para $x=2$, tem-se:
$$\begin{cases} f(2)=3\cdot 2^2=12 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=3\cdot 2^2=12 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=2^3+1=9 \end{cases}$$

Não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ e, portanto, $f(x)$ NÃO É contínua em $x=2$.
Se $f(x)$ NÃO é contínua, então NÃO É DIFERENCIÁVEL em $x=2$.
Logo, $f'(x)$ não é contínua em $x=2$.

b) Tem-se: $\frac{d}{dx}[f(3x+1)]=2x-3 \Rightarrow$

$$f'(3x+1)\cdot 3 = 2x-3 \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(3x+1)=\frac{2x-3}{3}}$$

Para obter-se $f'(0)$ deve-se fazer $3x+1=0$, isto é, $x=-\frac{1}{3}$. Assim: $f'(0)=\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-3}{3}=\boxed{\frac{-11}{9}}$

0,75

QUESTÃO 2

$$y''-y'+y=2x^2+1$$

a) Se $y=4x+2x^2$, então $\begin{cases} y'=4+4x \\ y''=4 \end{cases}$. Assim:

$$y''-y'+y=4-(4+4x)+(4x+2x^2)=2x^2\neq 2x^2+1.$$

Logo, $y=4x+2x^2$ NÃO SATISFAZ a equação dada.

0,5

②

b) Para $y = A + Bx + Cx^2$, tem-se: $\begin{cases} y' = B + 2Cx \\ y'' = 2C \end{cases}$

Assim: $y'' - y' + y = 2x^2 + 1 \iff 2C - (B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) = 2x^2 + 1$

$\iff (2C - B + A) + (B - 2C)x + Cx^2 = 2x^2 + 1$

$\iff \begin{cases} 2C - B + A = 1 \Rightarrow 4 - 4 + A = 1 \Rightarrow \boxed{A = 1} \\ B - 2C = 0 \Rightarrow \boxed{B = 4} \\ \boxed{C = 2} \end{cases}$

0,5

QUESTÃO 3

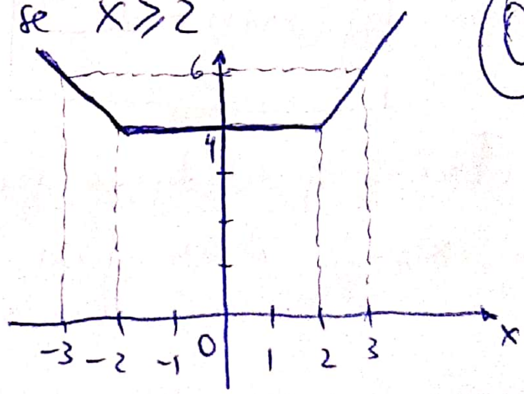
$f(x) = |x-2| + |x+2|$

a) Tem-se: $|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{se } x < 2 \end{cases}$ e $|x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

Assim: $f(x) = \begin{cases} (-x+2) + (-x-2), & \text{se } x < -2 \\ (-x+2) + (x+2), & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ (x-2) + (x+2), & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, isto é:

0,5

$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{se } x < -2 \\ 4, & \text{se } -2 \leq x < 2 \\ 2x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$



b) Para $x = -1$, tem-se $-2 \leq x < 2$. Assim: $f(x) = 4 \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{f'(-1) = 0}$

0,5

c) Para $x < -2$, $f'(x) = -2$

Para $-2 < x < 2$, $f'(x) = 0$

Para $x > 2$, $f'(x) = 2$

0,5

Pelo gráfico de $f(x)$ vê-se que $f(x)$ NÃO É DERIVÁVEL em $x = -2$ e em $x = 2$.

QUESTÃO 4

a) $h(x) = \frac{f(x)}{x+1} \Rightarrow h(2) = \frac{f(2)}{2+1} = \boxed{\frac{-4}{3}} \Rightarrow$ ponto de tangência $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

$h'(x) = \frac{(x+1)f'(x) - f(x)\cdot 1}{(x+1)^2} \Rightarrow h'(2) = \frac{3\cdot f'(2) - f(2)}{3^2} = \frac{3\cdot 3 - (-4)}{9} = \boxed{\frac{13}{9}}$

Logo, a equação da reta tangente é $\boxed{y - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{9}(x-2)}$ ou

0,5 $\boxed{13x - 9y - 38 = 0}$

b) A reta $x + 8y - 4 = 0$ (ou $y = -\frac{x}{8} + \frac{1}{2}$) tem inclinação $= -\frac{1}{8}$.

Assim, para $y = \frac{x+1}{x-1}$, devemos ter $y' = -\frac{1}{8}$. Daí:

$y' = \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{8} \Rightarrow (x-1)^2 = 16$

0,5

$\Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 5} \Rightarrow y = \frac{5+1}{5-1} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{\left(5, \frac{3}{2}\right)}$

ou

$x - 1 = -4 \Rightarrow \boxed{x = -3} \Rightarrow y = \frac{-3+1}{-3-1} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\left(-3, \frac{1}{2}\right)}$

QUESTÃO 5

f é contínua em $[a,b]$ tal que $f(a) = f(b) > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Seja $g(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) - f(x)$, para $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Como f é contínua em $[a,b]$, então g é contínua em $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e

$$\begin{cases} g(a) = f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) - f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) < 0. \\ g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

1,0

Assim, pelo TVI, existe $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ tal que $g(x) = 0$, isto é,

$f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) - f(x) = 0$, ou seja, $\boxed{f\left(x + \frac{b-a}{2}\right) = f(x)}$

Logo, a função f tem uma "corda horizontal" de comprimento $\frac{b-a}{2}$.

QUESTÃO 6

$F(x) = f(x^2 f(x^2))$, sendo f diferenciável para todo x real.

a) $F'(x) = f'(x^2 f(x^2)) \cdot (x^2 f(x^2))'$ (Regra da Cadeia)

Mas: $(x^2 f(x^2))' = (2x) \cdot f(x^2) + x^2 \cdot f'(x^2) \cdot 2x$ (Regra do Produto)

Assim: $\boxed{F'(x) = f'(x^2 f(x^2))[2x f(x^2) + 2x^3 \cdot f'(x^2)]}$ ou

$\boxed{F'(x) = 2x \cdot f'(x^2 f(x^2)) \cdot (f(x^2) + x^2 f'(x^2))}$ 0,5

b) $F'(1) = 2 \cdot f'(f(1)) \cdot (f(1) + f'(1))$

Faltaram os valores de $f(1)$, $f'(1)$ e $f'(f(1))$.

0,5 para todos

QUESTÃO 7

$x^2 + xy + y^3 = 1$

a) $x = 1 \Rightarrow 1 + y + y^3 = 1 \Rightarrow y + y^3 = 0 \Rightarrow y(1 + y^2) = 0$ $\boxed{y = 0}$ ou $1 + y^2 = 0$ (impossível p/ y real) 0,5

b) Derivando implicitamente: $2x + xy' + 1 \cdot y + 3y^2 y' = 0 \Rightarrow$

$y'(x + 3y^2) = -2x - y \Rightarrow \boxed{y' = \dfrac{-2x - y}{x + 3y^2}}$ 0,5

Para $x = 1$, tem-se $y = 0$ e, portanto, $y' = \dfrac{-2 - 0}{1 + 0} \Rightarrow \boxed{y' = -2}$

c) Tem-se: $2x + xy' + y + 3y^2 y' = 0$. 0,5

Derivando implicitamente: $2 + xy'' + 1 \cdot y' + y' + 3(y^2 y'' + 2y y' \cdot y') = 0$

$\Rightarrow y''(x + 3y^2) = -2 - 2y' - 6y(y')^2 \Rightarrow \boxed{y'' = \dfrac{-2 - 2y' - 6y(y')^2}{x + 3y^2}}$

Para $x = 1$, $y = 0$ e $y' = -2 \Rightarrow y'' = \dfrac{-2 + 4 - 0}{1 + 0} = \boxed{2}$

QUESTÃO 8

$$f(x) = \text{arctg}\left(e^{\text{sen}(2x)}\right)$$

Para $\boxed{x=0}$: $f(0) = \text{arctg}\left(e^{\text{sen}(0)}\right)$

$$= \text{arctg}(e^0)$$

$$= \text{arctg}(1)$$

0,5

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \text{ponto de tangência } \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{2\,\text{sen}(2x)}} \cdot e^{\text{sen}(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

Para $x=0$: $f'(0) = \dfrac{1}{1+e^{2\,\text{sen}\,0}} \cdot e^{\text{sen}\,0} \cdot \cos 0 \cdot 2 \Rightarrow$

$f'(0) = \dfrac{1}{1+1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \boxed{1}$ (inclinação da reta tangente)

$\Downarrow$

inclinação da reta normal $= \boxed{-1}$

Logo: eq. da reta tangente: $y - \frac{\pi}{4} = 1 \cdot (x-0) \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{\pi}{4}}$ 0,5

eq. da reta normal: $y - \frac{\pi}{4} = (-1)(x-0) \Rightarrow \boxed{y = -x + \frac{\pi}{4}}$

0,5