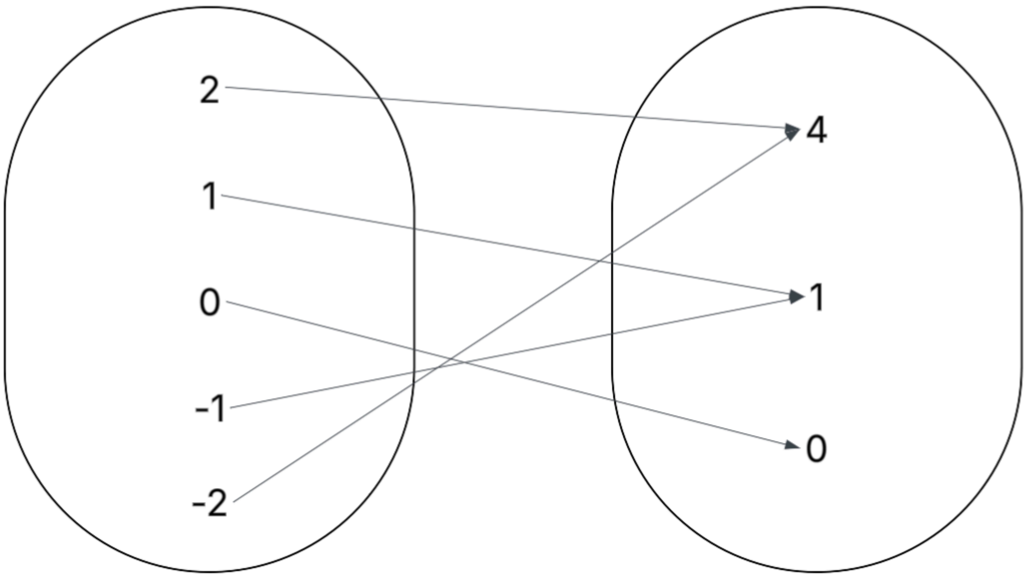
1.

a) $[\frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{6}]$
b) $[\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$
c) [0, 1]
d) $[\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$

2.
{-2, 4}, {-1, 1}, {0, 0}, {1, 1}, {2, 4}



3.

a) Ei, esim -1 → 1, -1 ≠ 1
b) Ei, esim 1 → 1, 1 = 1
c) Ei, esim 2 → 4, 4 ↛ 2
d) Kyllä, esim 1 → 1, 1 → 1 ja 1 = 1
e) Ei, esim 1 → 1, 1 → 1
f) Ei, esim -2 → 4, 2 → 4, -2 ↛ 2
g) Kyllä.
h) Ei, koska se ei ole refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

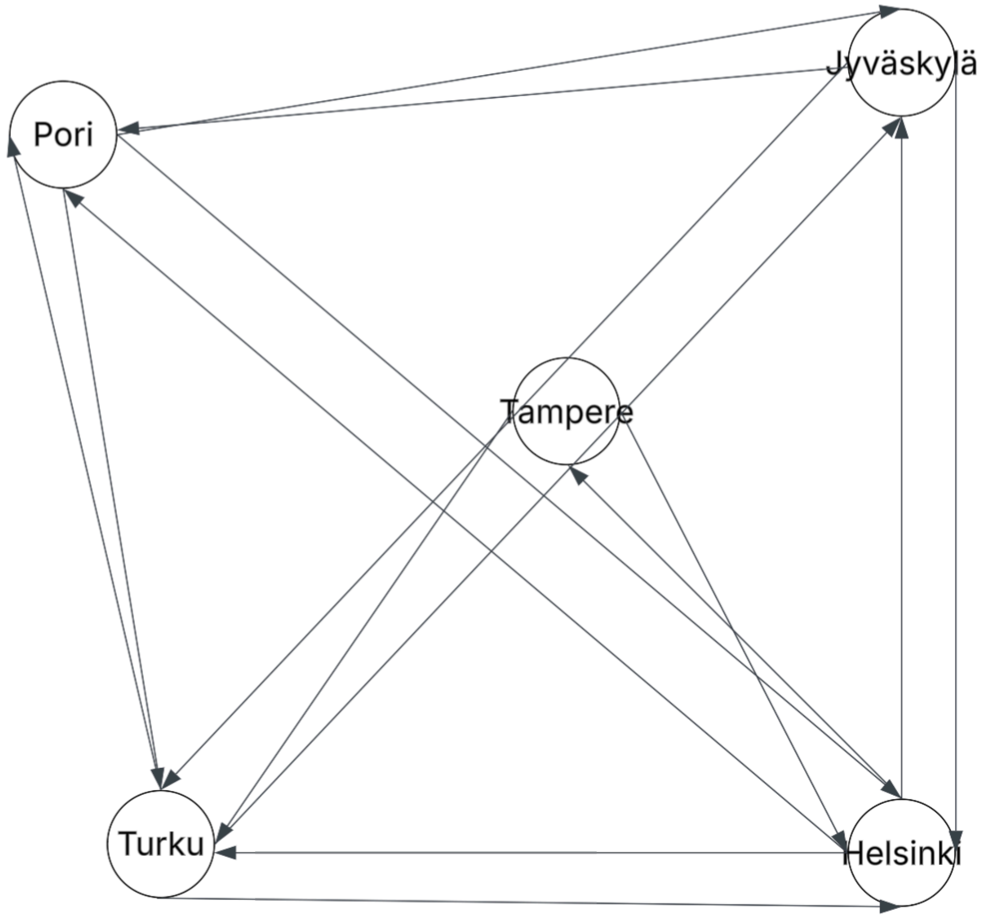
4.
Jotta relaatio ~ olisi ekvivalenssirelaatio, sen täytyy olla refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.
Osoitetaan, että relaatio ~ on refleksiivinen
Jotta relaatio on refleksiivinen, täytyy päteä x ~ x, eli x - x ∈ Q. Mikä tahansa luku erotettuna itsellään on 0. 0 ∈ Q, joten relaatio ~ on refleksiivinen
Osoitetaan, että relaatio ~ on symmetrinen
Jotta relaatio on symmetrinen x ~ y ⇒ y ~ x, eli x - y ∈ Q ⇒ y - x ∈ Q. Rationaalilukuihin Q kuuluu kaikki luvut jotka voidaan esittää muodossa x/y. Tässä tilanteessa jos x - y = a/b,

täytyy olla, että y - x = - a/b, jolloin myös - a/b täytyy kuulua rationaalilukuihin. Relaatio ~ on siis symmetrinen
Osoitetaan, että relaatio ~ on transitiivinen
Jotta relaatio on transitiivinen täytyy päteä x ~ y, y ~ z ja x ~ z. Erotusta x - y voidaan merkata a/b ja erotusta y - z voidaan merkata b/c.
Tällöin (x - y) + (y - z) = a/b + b/c
x - z = a/b + b/c
koska kahden rationaaliluvun summa on aina rationaaliluku, x - z on rationaaliluku, eli pätee x ~ z
Koska relaatio ~ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, sen täytyy olla ekvivalenssirelaatio.

5.
a)

	Pori	Turku	Helsinki	Tampere	Jyväskylä
Pori	0	1	0	1	0
Turku	1	0	1	0	0
Helsinki	0	1	0	1	0
Tampere	1	1	1	0	1
Jyväskylä	0	0	0	1	0

b)



6.

Osoitetaan, että jonossa $(a_n)^{\infty}_{n=0}$ $a_n \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ kaikilla n, kun n ≥ 0.

tehdään ensin alkuaskel, eli n = 0

jonon määrittelyssä n_0 = 1, 1 ≠ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, joten yhtälö pätee

sitten induktioaskel

n = k+1

jonossa $a_{(k+1)+1} = \frac{1+a_{k+1}}{a_{k+1}}$

jolloin $a_{k+1} = \frac{1+a_k}{a_k}$

tehdään vastaoletus, että a_{k+1} = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, jolloin

$\frac{1+a_k}{a_k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

kerrotaan molemmat puolet luvulla $2a_k$

$2(1 + a_k) = (1 + \sqrt{5})a_k$

$2 + 2a_k = (1 + \sqrt{5})a_k$

$2 = (1 + \sqrt{5})a_k - 2a_k$

$2 = (1 + \sqrt{5} - 2)a_k$

$2 = (\sqrt{5} - 1)a_k$

$a_k = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)}$

$a_k = \frac{2}{(\sqrt{5}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)}$

$a_k = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}^2 - 1^2}$

$a_k = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4}$

$a_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

koska $a_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, niin a_{k+1} ei voi olla $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, täten $a_{k+1} \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

jolloin $a_n \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ on todistettu induktiolla