1.

Turingin kone aloittaa alkutilasta ja lukee merkin 0 ja merkkaa sen tilalle a ja liikkuu yhden oikealle → a111

Kone siirtyy tilaan 1 ja liikkuu merkkejä oikealle kunnes vastaan tulee tyhjä merkki, jolloin se liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 2

Kone lukee merkin 1 ja merkkaa sen tilalle B ja liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 3 → a11B

Kone lukee merkin 1 ja liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 4

Kone jatkaa vasemmalle liikkumista, kunnes vastaan tulee a tai b, jolloin kone liikkuu yhden oikealle ja siirtyy tilaan 0

Kone lukee merkin 1 ja merkkaa sen tilalle b ja siirtyy tilaan 1 → ab1B

Kone jatkaa oikealle liikkumista, kunnes vastaan tulee tyhjä merkki, tai A tai B. Vastaan tulee B, jolloin kone liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 2

Kone lukee merkin 1 ja merkkaa sen tilalle B ja liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 3 → abBB

Kone lukee merkin b ja liikkuu yhden oikealle ja siirtyy tilaan 5

Kone jatkaa oikealle liikkumista, kunnes vastaan tulee tyhjä merkki, jolloin kone liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 6

Kone lukee merkin B, merkkaa sen tilalle X ja liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 9 → abBX

Kone jatkaa vasemmalle siirtymistä, kunnes vastaan tulee b, jolloin kone merkkaa sen tilalle X, liikkuu yhden oikealle ja siirtyy tilaan 10 → aXBX

Kone lukee merkin B ja liikkuu yhden oikealle ja siirtyy tilaan 8

Kone lukee merkin X ja liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 6

Kone lukee merkin B, merkkaa sen tilalle X ja liikkuu yhden vasemmalle ja siirtyy tilaan 9 → aXXX

Kone jatkaa vasemmalle siirtymistä, kunnes vastaan tulee b, mutta b ei tule koskaan vastaan, jolloin kone jää jumiin tilaan 9. Kone ei siis hyväksy merkkijonoa 0111

2.

1. Ensimmäiseksi kone tarkistaa alkaako merkkijono merkillä 0 tai onko merkkijono tyhjä, jos kumpikaan → hylkää, jos ei → jatka
2. Kone liikkuu merkkijonon oikeaan päätyn ja löytää ensimmäisen merkin 1 oikealta laskettuna ja vaihtaa sen merkiksi 0.
3. Kone liikkuu yksitellen oikealle ja vaihtaa jokaisen merkin merkiksi 1, kunnes tulee tyhjä merkki vastaan.
4. Tämän jälkeen kone palauttaa kyseisen jäljelle jääneen merkkijonon.

3.

Osoitetaan että kieli A = { ⟨ M, w, q ⟩ | M on Turingin kone, joka syötteellä w menee ainakin kerran tilaan q } on Turing tunnistettava.

On siis oltava Turingin kone T joka tunnistaa kielen A. T tarkastaa jatkuvasti onko M tilassa q. Jos M on tilassa q, T hyväksyy syötteen ja pysähtyy, eli syöte kuuluu kieleen A. Jos M ei koskaan saavuta tilaa q, kone M on joko pysähtynyt ennen sen saavuttamista tai jäänyt silmukkaan, jolloin T jää ikuiseen silmukkaan. Kone T hyväksyy aina, kun syöte kuuluu kieleen A, ja jää ikuiseen silmukkaan tai hylkää, kun syöte ei kuulu kieleen A. Tämä täyttää Turingin koneen molemmat ehdot, jolloin kieli A on Turing tunnistettava.

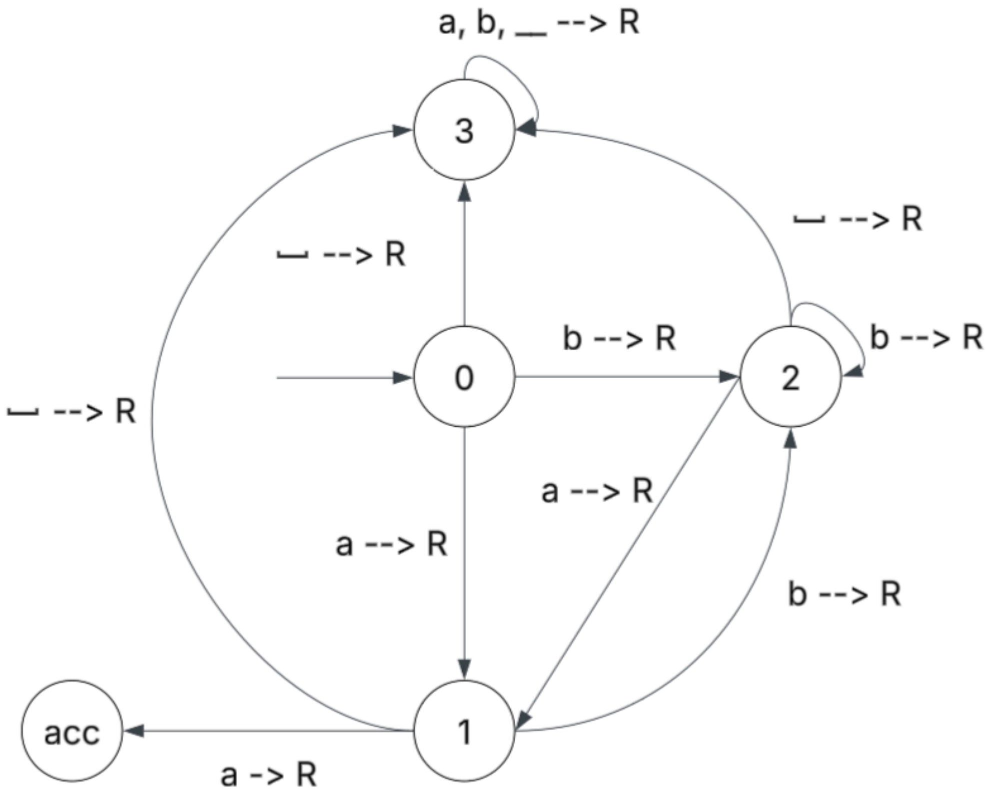
4.

Osoitetaan että kieli T = { ⟨ M, w ⟩ | M on Turingin kone, joka syötteellä w käy jossain tilassa vähintään kahdesti } on ratkeava.

Kieli on ratkeava, jos Turingin kone antaa kielelle hylkäävän tai hyväksyvän lopputuloksen, eikä jää ikuiseen silmukkaan. Pitää siis olla olemassa tällainen Turingin kone K, joka ratkaisee kielen T. K voi toimia siten, että se pitää laskua jokaisen koneen M tilojen käyntikerrasta. Suoritetaan yksitellen askelia koneessa M ja jokaisen askeleen jälkeen K tarkistaa M:n nykyisen tilan ja kasvattaa laskuria sille tilalle yhdellä. Jos minkään tilan laskuri saavuttaa arvon 2, K pysähtyy ja hyväksyy syötteen. Jos taas M pysähtyy jossain vaiheessa, eli päätyy hyväksyvään tai hylkäävään tilaan ennen kuin minkään tilan laskuri koneessa K saavuttaa arvon 2, K pysähtyy ja hylkää syötteen. Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan, jokin M:n tiloista saavuttaa arvon 2 jossain vaiheessa jos M ei ikinä pysähdy. Koska K pysähtyy kaikissa tapauksissa, se ratkaisee kielen T, jolloin kieli T on ratkeava.

5.

a)

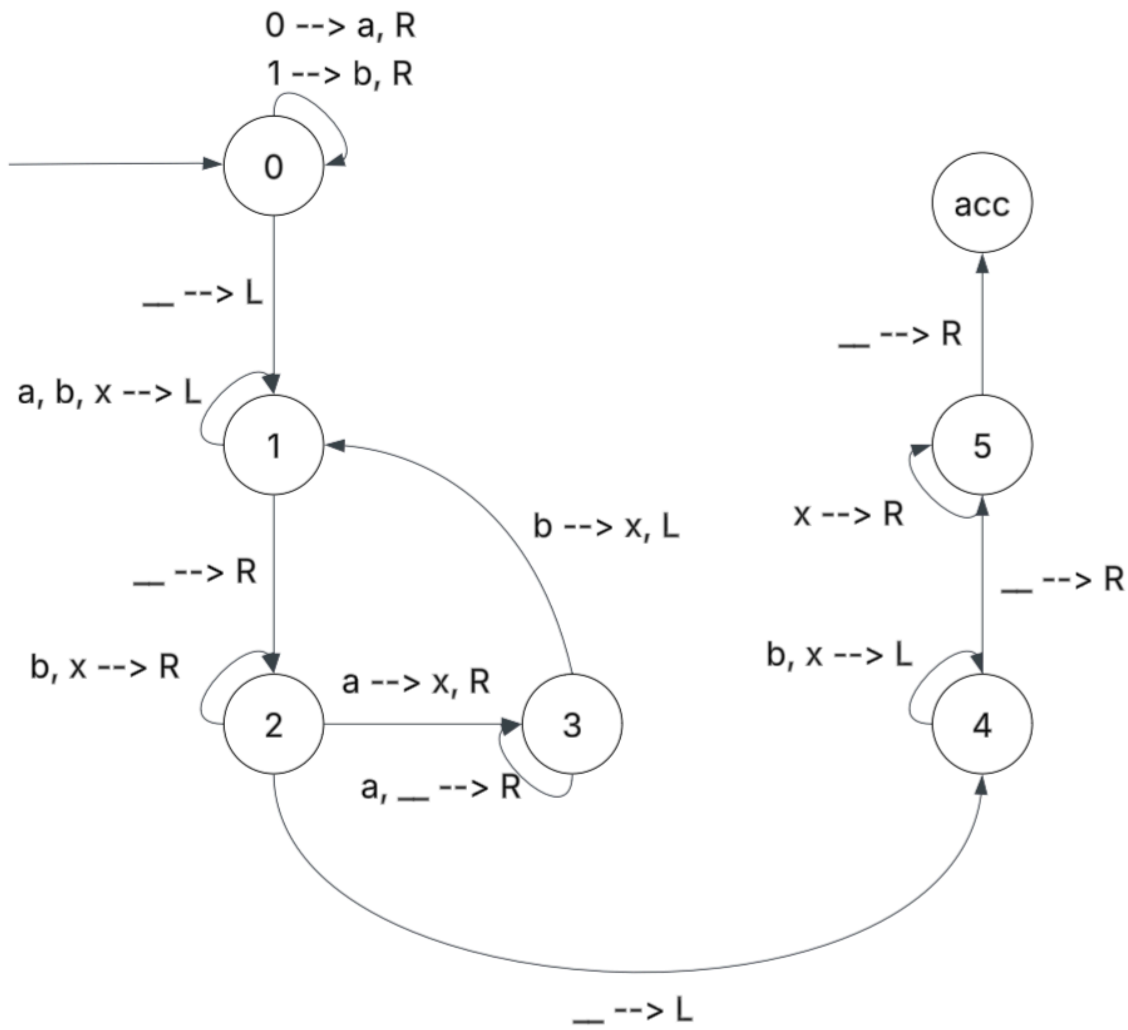


b)

Tässä koneen toiminta:

1. Vaihdetaan ensin merkkijonossa olevat merkit 0 → a ja 1 → b. Esim 001011 → aababb
2. Sitten tarkistetaan, että jokaista a:ta kohden on b. Merkataan vasemmanpuolimmaisimman a:n tilalle x. Liikutaan oikealle kunnes vastaan tulee ensimmäinen b ja merkataan sen tilalle x. Jos b:tä ei löydy, hylkää merkkijono. Toistetaan tätä vaihetta, kunnes ei enää löydetä merkkiä a.
3. Lopuksi luetaan merkkijono vasemmalta oikealle, ja jos yksikään luettu merkki ei ole x, hylkää merkkijono. Jos kaikki merkit ovat x, hyväksy merkkijono.

c)



6.

Osoitetaan, että kieli E={⟨A⟩|A on DFA ja L(A)=∅} on ratkeava.

Kieli on ratkeava, jos Turingin kone antaa kielelle hylkäävän tai hyväksyvän lopputuloksen, eikä jää ikuiseen silmukkaan. Muodostetaan Turingin kone K, joka tarkistaa, onko annetusta DFA:sta mahdollista siirtyä sen aloitustilasta mihinkään hyväksyvään tilaan. K käy läpi kaikki A:n tilat jotka ovat saavutettavissa alkutilasta ja kirjaa ne ylös. K tarkistaa kaikki hyväksyvät tilat. Jos hyväksyvä tila on kirjattuna muistiin tiloihin, joihin voi päästä alkutilasta, K pysähtyy ja hyväksyy syötteen. Jos taas mihinkään hyväksyvään tilaan ei voida päästä alkutilasta, K pysähtyy ja hylkää syötteen. Koska olemme rakentaneet toimivan Turingin koneen, joka ei jää ikuiseen silmukkaan, niin K ratkaisee kielen E. Tällöin kieli E on siis ratkeava.