多元函数可导不一定连续

多元函数连续的充要条件

多元函数 $f(x, y)$ 在某点 (a, b)
处连续的充要条件是其在该点处的极限存在且与路径无关。形式化地说，$f(x, y)$ 在 (a, b)
处连续的充要条件是：

$$
\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = f(a, b)
$$

多元函数可导的充要条件

多元函数可导的充要条件可以用偏导数来表述。设 $f(x, y)$ 是定义在某个区域内的二元函数，那么 $f(x, y)$ 在某点 (a, b) 处可导的充要条件是：

1. 存在偏导数 $f_x(a, b)$ 和 $f_y(a, b)$；
2. $f(x, y)$ 在 (a, b) 处沿任意方向的方向导数存在且连续，即沿任意单位向量 $(\cos \theta, \sin \theta)$，$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos \theta, b + h\sin \theta) - f(a, b)}{h}$ 存在且与方向 θ 无关。

多元函数可微的充要条件

多元函数可微的充要条件可以使用偏导数和全微分来表述。设 $f(x, y)$
是定义在某个区域内的二元函数，那么 $f(x, y)$ 在某点 (a, b) 处可微的充要条件是：

1. 存在偏导数 $f_x(a, b)$ 和 $f_y(a, b)$；
2. $f(x, y)$ 在 (a, b) 处沿任意方向的方向导数存在。
3. 存在常数 A 和 B 使得在 (a, b) 附近有以下成立：

$$\lim_{（x,y）\to (a,b)}
f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + A(x-a) + B(y-b) \quad \
$$

多元函数可微的证明方法

证明多元函数 $f(x, y)$ 在某点 (a, b) 处可微的一个常见方法如下：

已知全微分为
$$
df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy
$$

这里，$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 分别表示 f 对 x 和 y
的偏导数，dx 和 dy 分别表示自变量 x 和 y 的微小变化量。

我们又知道，当使用 Δx 和 Δy 表示自变量的微小变化时，函数 $f(x, y)$
的增量可以表示为：

$$
\Delta z = A\Delta x+B\Delta y+o(ρ)
$$

因此，满足如下公式的时候，多元函数可微分：

$$
\lim_{（x,y）\to (a,b)}\frac{df}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy-f(a,b)}{\sqrt{x^2 + y^2}}=0
$$

多元函数偏导数

对于多元函数 $f(x, y)$，其偏导数连续、可导、可微的充要条件可以总结如下：

偏导数连续的充要条件：

充分条件：

如果 $f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在某个区域内连续，则 $f(x, y)$ 在该区域内偏导数连续。

必要条件：

如果 $f(x, y)$ 在某点处可微分，则该点的偏导数存在且连续。

可导的充要条件：

充分条件：

如果 $f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在某个区域内存在且连续，则 $f(x, y)$ 在该区域内可导。

必要条件：

如果 $f(x, y)$ 在某点处可导，则该点的偏导数存在。

可微的充要条件：

充分条件：

如果 $f(x, y)$ 在某点处的偏导数存在且连续，那么 $f(x, y)$ 在该点处可微。

必要条件：

如果 $f(x, y)$ 在某点处可微，则 $f(x, y)$ 在该点处可导，且偏导数存在且连续。