Übung 02

1. Es seien die Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ sowie die Relation $R \subseteq M_2$, definiert durch $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, c), (d, e)\}$, gegeben.

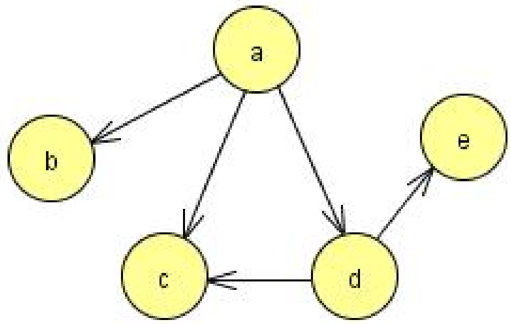
Reflexiv:
$\forall a \in A : (a, a) \in R$

Symmetrie:
$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

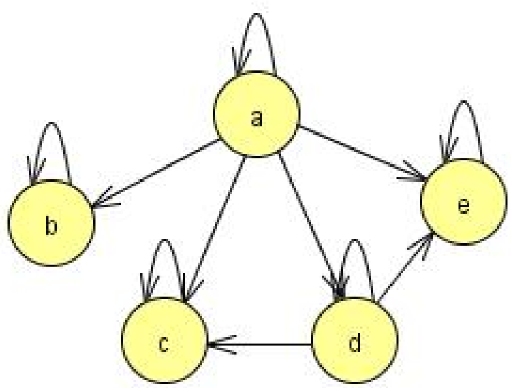
Transitivität:
$\forall a, b, c \in A : aRb \land bRc \Rightarrow aRc$

- a) Bestimmen Sie die reflexive und transitive Hülle R^* der Relation R.
  $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (d, c), (d, e)\}$
- b) Zeichnen Sie die gerichteten Graphen $G = (M, R)$ und $G^* = (M, R^*)$.

$$G = (M, R)$$



$$G^* = (M, R^*)$$



2.

- **a) Beweisen Sie, dass die Menge der Wörter über einem Alphabet abzählbar unendlich ist.**
- **b) Beweisen Sie, dass die Menge der Sprachen über einem Alphabet überabzählbar unendlich ist.**

---

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Ungleichung $n^2 > 2n + 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt.

es soll gelten: $n^2 > 2n + 1$

- Indunktionsanfang:
  für $n = 3$
  $3^2 > 2 * 3 + 1$
  $9 > 7$ -> w.A
- Indunktionsbehauptung:
  $n^2 > 2n + 1$
- Induktionsschritt $n \rightarrow (n + 1)$
  $(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1$
  $n^2 + 2n + 1 > 2n + 2 + 1$
  $n^2 + 2n + 1 > 2n + 3| - 2n - 1$
  $n^2 > 2$ w.A für $n \geq 3$

---

4. Es sei $\sum = \{a, b\}$. Wir definieren eine Sprache L über $\sum$ induktiv wie folgt.

(1) ε gehört zu L.
(2) Falls $x \in L$ ist, dann gehört auch abxb zu L.
(3) Falls $x \in L$ ist, dann gehört auch bxba zu L.
(4) Falls $x \in L$ und $y \in L$,dann gehört auch xy zu L.

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass alle Wörter in L doppelt so viele b wie a enthalten.

Beweis durch struktuelle Induktion:

- IA: $\varepsilon \in L, |\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$
- IV: $x, y \in L, |x|_a = |x|_b, |y|_a = |y|_b$

- IB:
    - 1. $axb \in L, |axb|_a = |axb|_b, \text{da } w = axb$
      $|w|_a = |axb|_a = 1 + |x|_a = 1 + |x|_b = \text{(laut IV)}|axb|_b = |w|_b$
    - 2. $bxa \in L, |bxa|_a = |bxa|_b \rightarrow \text{analog zu 1)}$
    - 3. $xy \in L, |xy|_a = |xy|_b$
      $|xy|_a = |x|_a + |y|_a = \text{(laut IV)}|x|_b + |y|_b = |xy|_b$

---

5. In der Vorlesung sitzen n Studenten, n ≥ 2, die sich teilweise gegenseitig kennen. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Studenten gibt, die mit gleich vielen anderen Studenten bekannt sind.

---

6. Es seien die folgenden Zustandsdiagramme deterministischer endlicher Automaten M_1 und M_2 gegeben.

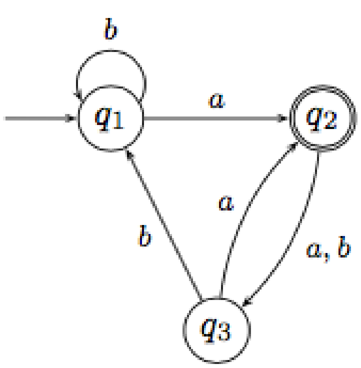


Abbildung 1: Automat M_1

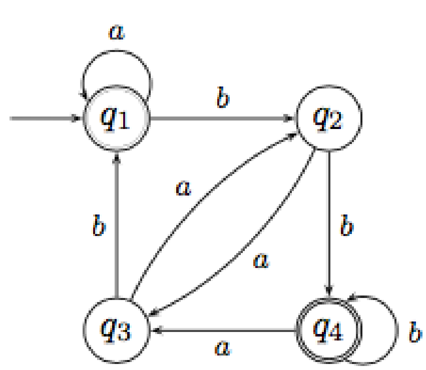


Abbildung 2: Automat M_2

- **a) Geben Sie formale Beschreibungen der Automaten M1 und M2 an.**
    - M - Automat
    - K - Menge der Zustände
    - F - Menge Endzustände ($F \subseteq K$)

- $\sum$ - Alphabet (nicht leere, engliche Menge von Zeichen)
- L - Sprache (Menge der Wörter)
- δ - Überführungsfunktion
- s - Startzustand ($s \in K$)
- $\vdash$ "überführt "

allg.: $M = (K, \sum, \delta, s, F)$

$M_1 = \{K_1, \sum, \delta_1, q_1, F_1\}$
$K_1 = \{q_1, q_2, q_3\}$
$F_1 = \{q_2\}$
$\sum = \{a, b\}$
Überführungsfunktion δ_1

q_1		q_2	q_1
q_2		q_3	q_3
q_3		q_2	q_1

$M_2 = \{K_2, \sum, \delta_2, q_1, F_2\}$
$K_2 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$s = q_1$
$F_2 = \{q_1, q_4\}$
$\sum = \{a, b\}$
Überführungsfunktion δ_2

q_1		q_1	q_2
q_2		q_3	q_4
q_3		q_2	q_1
q_4		q_3	q_4

- **b) Geben Sie für beide Automaten die Folge der Konfigurationen bei der Verarbeitung der Ein-
gabe aabb an.**

- $M_1 : (q1, aabb) \vdash_{M1} (q2, abb))$
  $\vdash_{M1} (q3, bb))$
  $\vdash_{M1} (q1, b))$
  $\vdash_{M1} (q1, \epsilon))$
  $\rightarrow$ nicht akzeptiert, da $q_1 \notin F$
- $M_2 : (q1, aabb) \vdash_{M2} (q1, abb))$
  $\vdash_{M2} (q1, bb))$
  $\vdash_{M2} (q2, b))$
  $\vdash_{M2} (q4, \epsilon))$
  $\rightarrow$ akzeptiert, da $q_4 \in F_2$

- **c) Wird jeweils das Wort aabb akzeptiert? Begründen Sie ihre Antwort.**
  M_1 : Nein, $q_1 \notin F$
  M_2 : Ja, $q_4 \in F$
- **d) Wird jeweils das leere Wort ε akzeptiert? Begründen Sie ihre Antwort.**
  Nur bei M_2 da Startzustand $q1$ auch Endzustand ist.