Übung 10

Aufgabe 1:

Wir betrachten folgendes Problem:

Gegeben eine deterministische Turingmaschine M, ein Zustand q und ein Wort w, besucht M jemals den Zustand q, wenn M mit Eingabe w gestartet wird?

Formulieren Sie das Problem als Sprache und zeigen Sie, dass die Sprache nicht entscheidbar ist.

$L = \{< M, q, w > \mid \text{M eine Turingmaschine und erreicht q bei Eingabe von w}\}$

$\rightarrow$ Akzeptanzproblem A_{TM}

$X \in A_{TM}$

$f(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon & X \neq < M, w > \\ < M, q_{acc}, w > & X = < M, w > \end{Bmatrix}$

$X \in A_{TM} \Leftrightarrow f(X) \in L$

Aufgabe 2:

Wir betrachten folgendes Problem: Gegeben Turingmaschinen M1 und M2, gibt es ein Wort, bei dem beide halten?

Formulieren Sie das Problem als Sprache und zeigen Sie, dass die Sprache nicht entscheidbar ist.

$$L = \{< M_1, M_2 > | \exists w \in \Sigma^* \text{ und } M_1 \wedge M_2 \text{ halten bei Eingabe von w}\}$$

$A_{TM} = \{< M > |M$ hält bei Eingabe von $w\}$ ist unentscheidbar

Behauptung: $A_{TM} \leq L$

ges: $f \text{ mit } M \in A_{TM} \Leftrightarrow f(< M, w >) \in L$

$M_1 = M$

M_2 mit $L(M_2) = \Sigma^*$

$< M, w > \in A_{TM}$

$\Rightarrow M$ hält bei w

$\Rightarrow M_1 \wedge M_2$ halten bei w

$\Rightarrow < M_1, M_2 > \in L$

$< M_1, M_2 > \in L$

$\Rightarrow \exists w'$ und M_1, M_2 halten bei w

$\Rightarrow \exists w'$ bei dem M hält $w' = w$???

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie ihre Antworten.

- *(a) {⟨M⟩ | M besitzt geradzahlig viele Zustände}*

  ist entscheidbar, da abzählbar.

- *(b) {⟨M,w⟩ | M erreicht bei Eingabe w innerhalb der ersten 42 Schritte den Startzustand ein zweites Mal}*

  ist unentscheidbar

- *(c) {⟨M1,M2⟩ | M1,M2 sind Turingmaschinen und L(M1) ⊆ L(M2)}*

Übung 11

Aufgabe 1:

Besitzen die folgenden Postschen Korrespondenzsysteme eine Lösung? Besitzen sie eine spezielle Lösung?

- (a) ((a,ab),(b,ca),(ca,a),(abc,c))
- (b) ((001,01), (0011,111), (11,111), (101,010))

Allgemein:

- $((x_1, y_1)(x_2, y_2), ..., (x_n, y_n))$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^*$ Lsg.: nicht-leere Folge $(i_1, i_2, ..., i_k)$ von Indizes von $\{1, 2, ..., n\}$ falls

$$x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} = y_{i_1} y_{i_2} ... y_{i_k}$$

Spezielle Lsg.: $(i_1, i_2, ..., i_k)$ falls $i_1 = 1$

- a)

  $((a, ab), (b, ca), (ca, a), (abc, c))$

$x_1 = a$	$x_2 = b$	$x_3 = ca$	$x_4 = abc$
$y_1 = ab$	$y_2 = ca$	$y_3 = a$	$y_4 = c$

Lsg.: $I = (1, 2, 3, 1, 4)$ (spezielle Lsg., da $i_1 = 1$)

$abcaaabc = abcaaabc$

- b)

  $((001, 01), (0011, 111), (11, 111), (101, 010))$

  $11101001 = 11101001$

  Lsg.: $I = (3, 4, 1)$

Aufgabe 2:

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie ihre Antworten.

- (a) {⟨G⟩ | G ist eine Grammatik und L(G) ∈ P}
- (b) {⟨G⟩ | G ist eine kontextfreie Grammatik und L(G) ∈ NP}

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar, welche nicht? Begründen Sie ihre Antworten.

- (a) {⟨G1,G2⟩ | G1 und G2 sind kontextfreie Grammatiken und L(G1) = L(G2)}
- (b) {⟨G1,G2⟩ | G1 und G2 sind kontextfreie Grammatiken und L(G1)∪L(G2) ist kontextfrei}

Aufgabe 4:

Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, das die Beziehungen der Klassen der

- (a) regulären Sprachen,
- (b) kontextfreien Sprachen,
- (c) entscheidbaren Sprachen,
- (d) rekursiv aufzählbaren Sprachen und
- (e) Sprachen, deren Komplement rekursiv aufzählbar ist,

bezüglich Enthaltensein, Schnitt, ...widerspiegelt. Wo ist die Klasse P in diesem Diagramm einzuordnen?