

Übung 02

1. Es seien die Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ sowie die Relation $R \subseteq M_2$, definiert durch $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, c), (d, e)\}$, gegeben.

Reflexiv:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

Symmetrie:

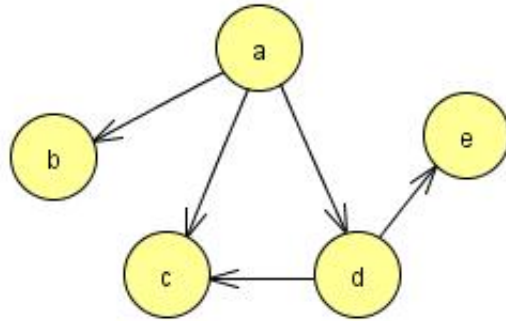
$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

Transitivität:

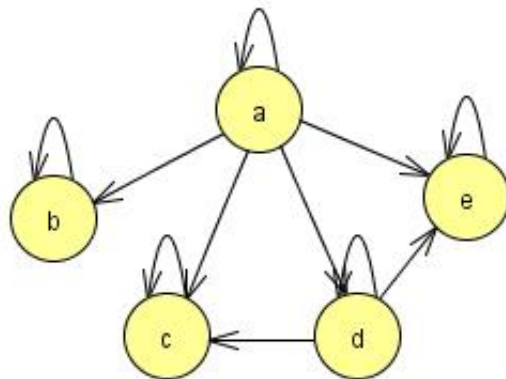
$$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$$

- a) Bestimmen Sie die reflexive und transitive Hülle R^* der Relation R .
 $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (d, c), (d, e)\}$
- b) Zeichnen Sie die gerichteten Graphen $G = (M, R)$ und $G^* = (M, R^*)$.

$$G = (M, R)$$



$$G^* = (M, R^*)$$



2.

- a) Beweisen Sie, dass die Menge der Wörter über einem Alphabet abzählbar unendlich ist.
 - b) Beweisen Sie, dass die Menge der Sprachen über einem Alphabet überabzählbar unendlich ist.
-

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Ungleichung $n^2 > 2n + 1$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt.

es soll gelten: $n^2 > 2n + 1$

- Induktionsanfang:
für $n = 3$
 $3^2 > 2 * 3 + 1$
 $9 > 7 \rightarrow \text{w.A}$
 - Induktionsbehauptung:
 $n^2 > 2n + 1$
 - Induktionsschritt $n \rightarrow (n + 1)$
 $(n + 1)^2 > 2(n + 1) + 1$
 $n^2 + 2n + 1 > 2n + 2 + 1$
 $n^2 + 2n + 1 > 2n + 3 \mid - 2n - 1$
 $n^2 > 2 \text{ w.A für } n \geq 3$
-

4. Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren eine Sprache L über Σ induktiv wie folgt.

- (1) ε gehört zu L .
- (2) Falls $x \in L$ ist, dann gehört auch $abxb$ zu L .
- (3) Falls $x \in L$ ist, dann gehört auch $bxba$ zu L .
- (4) Falls $x \in L$ und $y \in L$, dann gehört auch xy zu L .

Beweisen Sie durch strukturelle Induktion, dass alle Wörter in L doppelt so viele b wie a enthalten.

Beweis durch strukturelle Induktion:

- IA: $\varepsilon \in L, |\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$
- IV: $x, y \in L, |x|_a = |x|_b, |y|_a = |y|_b$

- IB:
 - 1. $axb \in L, |axb|_a = |axb|_b$, da $w = axb$
 $|w|_a = |axb|_a = 1 + |x|_a = 1 + |x|_b = (\text{laut IV}) |axb|_b = |w|_b$
 - 2. $bxa \in L, |bxa|_a = |bxa|_b \rightarrow \text{analog zu 1)}$
 - 3. $xy \in L, |xy|_a = |xy|_b$
 $|xy|_a = |x|_a + |y|_a = (\text{laut IV}) |x|_b + |y|_b = |xy|_b$

5. In der Vorlesung sitzen n Studenten, $n \geq 2$, die sich teilweise gegenseitig kennen. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Studenten gibt, die mit gleich vielen anderen Studenten bekannt sind.

6. Es seien die folgenden Zustandsdiagramme deterministischer endlicher Automaten M_1 und M_2 gegeben.

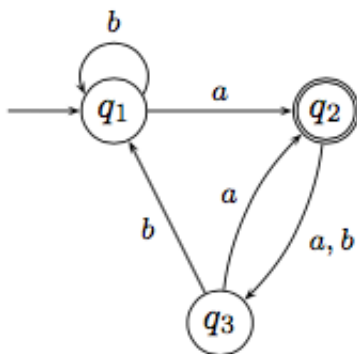


Abbildung 1: Automat M_1

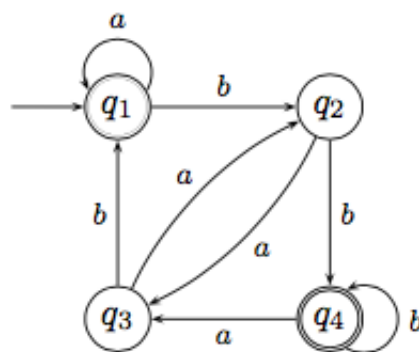


Abbildung 2: Automat M_2

- a) Geben Sie formale Beschreibungen der Automaten M_1 und M_2 an.
 - M - Automat
 - K - Menge der Zustände
 - F - Menge Endzustände ($F \subseteq K$)

- Σ - Alphabet (nicht leere, endliche Menge von Zeichen)
- L - Sprache (Menge der Wörter)
- δ - Überföhrungsfunktion
- s - Startzustand ($s \in K$)
- \vdash "überföhrt "

allg.: $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$

$$M_1 = \{K_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1\}$$

$$K_1 = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$F_1 = \{q_2\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Überföhrungsfunktion δ_1

q_1		q_2	q_1
q_2		q_3	q_3
q_3		q_2	q_1

$$M_2 = \{K_2, \Sigma, \delta_2, q_1, F_2\}$$

$$K_2 = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

$$s = q_1$$

$$F_2 = \{q_1, q_4\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

Überföhrungsfunktion δ_2

q_1		q_1	q_2
q_2		q_3	q_4
q_3		q_2	q_1
q_4		q_3	q_4

- **b) Geben Sie für beide Automaten die Folge der Konfigurationen bei der Verarbeitung der Eingabe aabb an.**

- $M_1 : (q_1, aabb) \vdash_{M_1} (q_2, abb)$
 $\vdash_{M_1} (q_3, bb)$
 $\vdash_{M_1} (q_1, b)$
 $\vdash_{M_1} (q_1, \epsilon)$
 \rightarrow nicht akzeptiert, da $q_1 \notin F$
- $M_2 : (q_1, aabb) \vdash_{M_2} (q_1, abb)$
 $\vdash_{M_2} (q_1, bb)$
 $\vdash_{M_2} (q_2, b)$
 $\vdash_{M_2} (q_4, \epsilon)$
 \rightarrow akzeptiert, da $q_4 \in F_2$
- **c) Wird jeweils das Wort aabb akzeptiert? Begründen Sie ihre Antwort.**
 M_1 : Nein, $q_1 \notin F$
 M_2 : Ja, $q_4 \in F$
- **d) Wird jeweils das leere Wort ϵ akzeptiert? Begründen Sie ihre Antwort.**
 Nur bei M_2 da Startzustand q_1 auch Endzustand ist.