Übungsblatt 03

1. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen über Sprachen.

- a) $\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1 \cup L_2)L_3 = L_1L_3 \cup L_2L_3$
  -> wahr, Distributivität
  Konkatination: $L_1L_2 = \{w \in \Sigma^* | x \in L_1 \wedge y \in L_2 \rightarrow w = yx\}$
  Vereinigung: $L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* | w \in L_1 \vee w \in L_2\}$
  $(L_1 \cup L_2)L_3$
  $= \{w \in \Sigma^* | w_1 \in \Sigma^*(w_1 \in L_1 \vee w_1 \in L_2) \wedge w_2 \in \Sigma^*(w_2 \in \Sigma^*) \rightarrow w = w_1w_2\}$
  $= \{w \in \Sigma^* | (w_1 \in L_1 \wedge w_1 \in L_3) \vee (w_1 \in L_2 \wedge w_2 \in L_3) \rightarrow w = w_1w_2\}$
  $= L_1L_3 \cup L_2L_3$
- b) $\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1 \cap L_2)L_3 = L_1L_3 \cap L_2L_3$
  -> falsch
  Gegenbeispiel:
  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{aa\}, L_3 = \{\varepsilon, a\}$
  $l.S. : (L_1 \cap L_2)L_3 = \emptyset * L_3 = \{a\}$
  $r.S. : L_1L_3 \cap L_2L_3 = \{a, aa\} \cap \{aa, aaa\} = \{aa\}$
- c) $\forall L_1, L_2 : (L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$
  -> falsch
  Gegenbeispiel:
  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$
  $(L_1 \cup L_2)^*$ -> abab ist möglich
  $L_1^* \cup L_2^*$ -> abab nicht möglich
- d) $\forall L_1, L_2 : (L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$
  -> falsch
  Gegenbeispiel:
  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$
  $(\{a, b\})^* \neq \{a\}^*\{b\}^*$

---

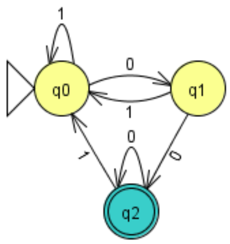
2. Welche der folgenden Behauptungen über Sprachen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $\forall L : (L^+)^* = L^*$
  -> wahr, da $L^+ = L^* \cap \{\varepsilon\}$
- b) $\forall L_1, L_2 : (L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1^* = L_2^*)$
  -> wahr
- c) $\forall L_1, L_2 : L_1L_1^*L_2 \subseteq L_1^*L_2$
  -> falsch
  $L_1^{n+1}L_2 \subseteq L_1^nL_2 \; n \in \mathbb{N}_0$
  Gegenbeispiel:
  $L_1 = \{a\}L_2 = \{b\}$
  $ab \subseteq b$
- d) $\forall L_1, L_2 : L_1^*L_2 \subseteq L_1L_1^*L_2$
  -> wahr
  $L_1^nL_2 \subseteq L_1^{n+1}L_2 \; n \in \mathbb{N}_0$

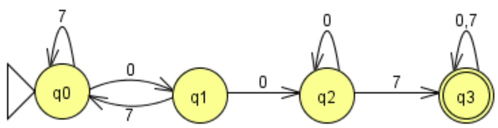
---

3. Geben Sie jeweils Zustandsdiagramme deterministischer endlicher Automaten an, die die folgenden Sprachen akzeptieren.

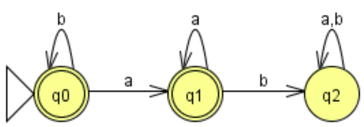
- a) $\{w \in \{0,1\}^* | w \text{ hat das Suffix 00}\}$



- b) $\{w \in \{0,7\}^* | w \text{ enthaelt das Teilwort 007}\}$

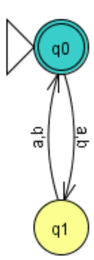


- c) $\{w \in \{a,b\}^* | w \text{ enthaelt das Teilwort ab nicht}\}$

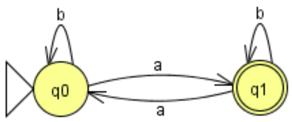


4. Geben Sie das Zustandsdiagramm eines deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache $\{w \in \{a,b\}^* | w \text{ hat gerade Laenge und enthaelt ungeradzahlig viele a}\}$ akzeptiert.

Diese Sprache ist der Schnitt zweier regulärer Sprachen. Konstruieren Sie zunächst deterministische endliche Automaten für diese Teilsprachen und kombinieren Sie dann die beiden Automaten wie in der Vorlesung angegeben.

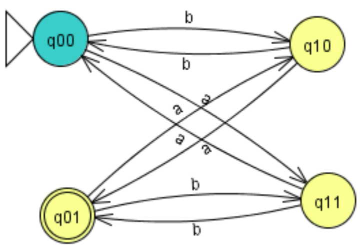


q_0		q_1	q_1
q_1		q_0	q_0



q_0		q_1	q_0
q_1		q_0	q_1

$q_{ij} = (q_i, q_j):$



q_{00}		q_{11}	q_{10}
q_{01}		q_{10}	q_{11}
q_{10}		q_{01}	q_{00}
q_{11}		q_{00}	q_{01}

---

5. Geben Sie jeweils Zustandsdiagramme (nichtdeterministischer) endlicher Automaten an, die die folgenden Sprachen akzeptieren.

Def. $NEA = (\{K, \Sigma, \Delta, s, F\})$

- K ist endliche Menge an Zuständen
- Σ ist ein Alphabet
- $s \in K$ ist der Startzustand
- Δ ist die Überführungsfunktion
- $F \subseteq K$ ist die Menge der Endzuständen

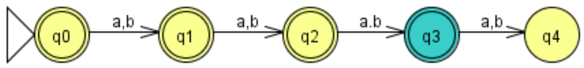
Wir erlauben nun,

- dass es keinen Nachfolgezustand für ein Symbol gibt
- dass es mehr als einen Nachfolgezustand für ein Symbol gibt
- dass es Übergänge gibt, ohne dass ein Symbol gelesen wird

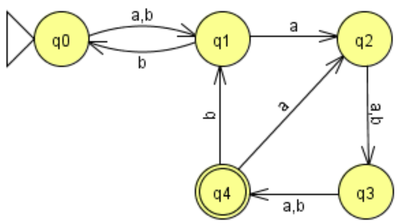
Die Klasse der von nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptierten Sprachen ist abgeschlossen unter

- Vereinigung,
- Konkatenation
- Kleene-Star

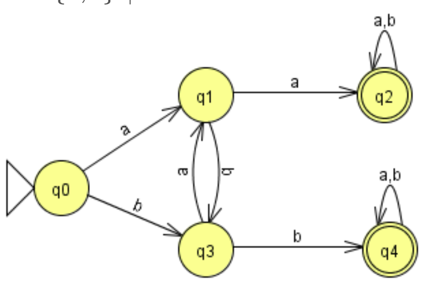
- a) $\{w \in \{a,b\}^* | |w| \leq 3\}$



- b) $\{w \in \{a,b\}^* || w| \geq 3 \wedge \text{ das drittletzte Symbol in w ist ein a}\}$



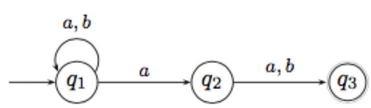
- c) $\{w \in \{a,b\}^* | w \text{ enthaelt das Teilwort aa oder das Teilwort bb}\}$



---

6. Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus dem Beweis der Äquivalenz von NEA und DEA zu dem nichtdeterministischen endlichen Automaten, der durch den folgenden Zustandsgraphen gegeben ist, einen äquivalenten deterministischen Automaten.

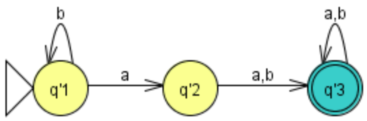
Sie brauchen dabei nicht alle Zustände, die sich aus der Potenzmengenkonstruktion ergeben, zu konstruieren, sondern nur die vom Startzustand aus erreichbaren.



$NEA = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{a,b\}, \Delta, q_1, \{q_3\})$

q_1		$\{q_1, q_2\}$	q_1
q_2		q_3	q_3
q_3		$\emptyset$	$\emptyset$

q_1'		q_2'	q_1'
q_2'		q_3'	q_3'
q_3'		q_3'	q_3'


b
a
a,b
a,b
q'1
q'2
q'3