Übung 1

1. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $\emptyset \subseteq \emptyset$
  -> wahr, weil beide kein Elemente haben (also jedes Element kommt in beiden vor)
  Ø ist Teilmenge jeder Mengr
- b) $\emptyset \in \emptyset$
  -> falsch, weil leere Menge enthält keine Elemente
- c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
  -> wahr, Leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
  -> wahr, $\{\} \in \{\{\}\}$ Menge enthält $\{\}$ als Element
- e) $\emptyset \in 2^{\emptyset}$
  -> wahr, laut Definition:
  Def. 2^A Potenzmenge: Menge aller Teilmengen von A
  Potenzmenge von $\emptyset$ umfasst nur $\emptyset$.
- f) $\emptyset \subseteq 2^{\emptyset}$
  -> wahr, siehe a)

---

2. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Anwort.

- a) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$
  -> wahr, a und b sind als Elemente in der Menge
- b) $\{a, b\} \in \{a, b, \{a, b\}\}$

-> wahr

- c) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a,b,\{a,b\}\}}$
  -> falsch, weil Element a,b nicht rechts als Element vorkommt, nur als Menge
  $2^{\{a,b,\{a,b\}\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a,b\}\}, \{a,b\}, \{a, \{a,b\}\}, \{b, \{a,b\}\}, \{a,b,\{a,b\}\}\}$
- d) $\{\{a, b\}\} \subseteq 2^{\{a,b,\{a,b\}\}}$
  -> wahr, weil Menge {a,b} als Element rechts vorkommt
- e) $\{\{a, b\}\} \in 2^{\{a,b,\{a,b\}\}}$
  -> wahr
- f) $\{a, \{a, b\}\} \subseteq 2^{\{a,b,\{a,b\}\}}$
  -> falsch, da a nicht als Element vorhanden ist sondern als Menge

---

3. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie Ihre Anwort.

- a) $\forall M_1, M_2 : (M_1 \cup M_2) = (M_2 \cup M_1)$
  -> wahr, $M_1 \cup M_2 = \{x | x \in M_1 \vee x \in M_2$
  $= \{x | x \in M_2 \vee x \in M_1\}$
  $= M_2 \cup M_1$
- b) $\forall M_1, M_2 : (M_1 - M_2) = (M_2 - M_1)$
  -> falsch, Gegenbeispiel:
  - $M_1 = \{a\}$
  - $M_2 = \{a, b\}$
  - $\{\} \neq \{b\}$
- c) $\forall M_1, M_2, M_3 : (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$
  -> wahr, $(M_1 \cap M_2) \cap M_3$
  $= \{x | x \in (M_1 \wedge M_2) \wedge x \in M_3\}$
  $= \{x | x \in M_1 \wedge x | x \in M_3 \wedge x \in M_3\}$
  $= \{x | x \in M_1 \wedge (x \in M2 \wedge M_3)\}$
  $= M_1 \cap (M_2 \cap M_3)$
- d) $\forall M_1, M_2, M_3 : (M_1 - M_2) - M_3 = M_1 - (M_2 - M_3)$
  -> falsch
  - Gegenbeispiel:
    $\{a\} - (\{a\} - \{a\}) = \{a\}$

$$(\{a\} - \{a\}) - \{a\} = \emptyset$$

---

4. Listen Sie jeweils alle Elemente der folgenden Mengen auf.

- a) $M_1 = \{5x | x \in \mathbb{N}_0, x \leq 4\}$
  -> $M_1 = \{0, 5, 10, 15, 20\}$
- b) $M_2 = \{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x^3 \leq 100\}$
  -> $M_2 = \{1, ..., 4\}$
- c) $M_3 = \{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N} : x = 6y \wedge 1 \leq x \leq 50$
  -> $M_3 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$
- d) $M_4 = \{x \in \mathbb{N} | \forall y \in \mathbb{N} : x = 6y \wedge 1 \leq x \leq 50$
  -> $M_4 = \{\}$

---

5. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, welche Elemente in den folgenden Mengen bezüglich des Universums $U = \{a, b, c, d\}$ enthalten sind.

- a) $M_1 = \{X \subseteq U | \exists Y \subseteq U : X \cup Y = \{a, b\}\}$
  -> Alle Teilmengen von $\{a, b\}$
- b) $M_1 = \{X \subseteq U | \exists Y \subseteq U : X \cap Y = \{a, b\}\}$
  -> Alle Obermengen von $\{a, b\}$ (alle Mengen, die a und b enthalten)

---

6. Geben Sie für die folgenden Mengen einen mathematischen Ausdruck an, der keine natürlichsprachlichen Wörter enthält.

- a) **Die Menge aller geraden natürlichen Zahlen.**

-> $M_1 = \{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N} : x = 2y\}$

- b) **Die Menge aller Mengen über $\{a, b, c, d\}$, die ein a enthalten.**
  -> $U = \{a, b, c, d\}$
  -> $M_2 = \{X \subseteq U | a \in X\}$