Übung 7

Aufgabe 1:

Sei $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache

$$\{x^R\#y | x, y \in \{0,1\}^*, x \text{ ist ein Teilwort von y}\}$$

erzeugt.

$G = \{\{S, A, B\}, \{0, 1, \#\}, \{S \to AB, A \to 0A0|1A1|\#B, B \to 0B|1B|\varepsilon\}, S\}$

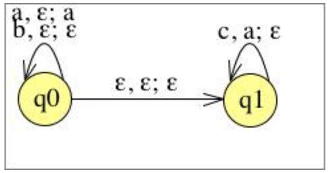
Varianten:

$G = \{\{S, A, B\}, \{0, 1, \#\}, \{S \to S0|S1|0S0|1S1|\#\}, S\}$

$G = \{\{S, A, B\}, \{0, 1, \#\}, \{S \to S0|S1|X, X \to 0X0|1X1|Y, Y \to Y0|Y1|\#\}, S\}$

Aufgabe 2:

Geben Sie für die Sprache
$\{xc^n | x \in \{a, b\}^* \text{ und die Anzahl der Vorkommen von a in x ist n}\}$ **einen Kellerautomaten an, der die Sprache akzeptiert.**



q1 ist Endzustand

Aufgabe 3:

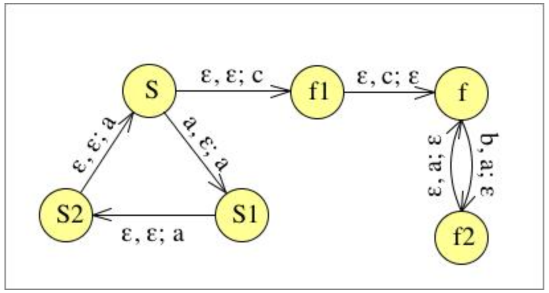
Sei $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ **ein Kellerautomat mit**
$K = \{s, f\}, \Sigma = \Gamma = \{a, b\}, F = \{f\}$ **und**

$$\Delta = \{((s, a, \varepsilon), (s, aaa)), ((s, \varepsilon, \varepsilon), (f, \varepsilon)), ((f, b, aa), (f, \varepsilon))\}$$

a) **Welche Sprache wird von M akzeptiert?**

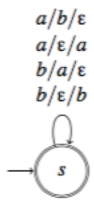
$\{w \in \{a, b\}^* | 2 * |w|_a = 3 * |w|_b\}$

b) **Transformieren Sie M in einen äquivalenten Kellerautomaten M′ in Normalform.**
Übergange zu dreifach a trennen in einzelne Übergänge



Aufgabe 4:

Sei $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ **der durch nebenstehendes Zustandsübergangsdiagramm gegebene Kellerautomat. M ist in Normalform. In der Vorlesung haben wir ein Konstruktionsverfahren kennengelernt, um eine kontextfreie Grammatik G zu erzeugen, so dass** $L(G) = L(M)$**. Geben Sie eine Ableitung für das Wort** $aababb \in L(G)$ **an. Sie brauchen hier nur jene Produktionsregeln der Grammatik zu erzeugen, die Sie für die Ableitung benötigen.**



$\Delta = \{((s, a, b), (s, \varepsilon)), ((s, a, \varepsilon), (s, a)), ((s, b, a), (s, \varepsilon)), ((s, b, \varepsilon), (s, b))\}$

$A_{pq} \Rightarrow^* w' \Leftrightarrow (p, w, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$

$A_{ss} \to aA_{ss}b | A_{ss}A_{ss} | \varepsilon | bA_{ss}a$

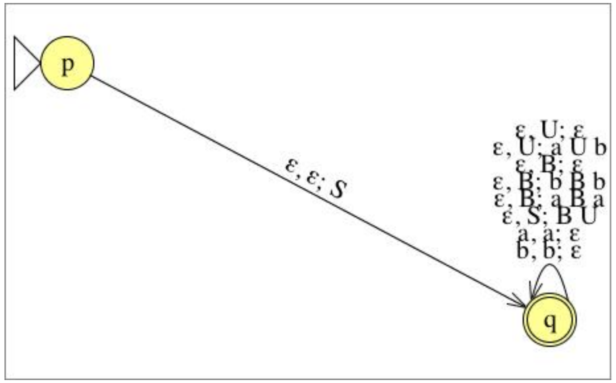
Ableitung von aababb:

A_{ss}	$\Rightarrow aA_{ss}b$
	$\Rightarrow aaA_{ss}bb$
	$\Rightarrow aabA_{ss}abb$
	$\Rightarrow aababb$

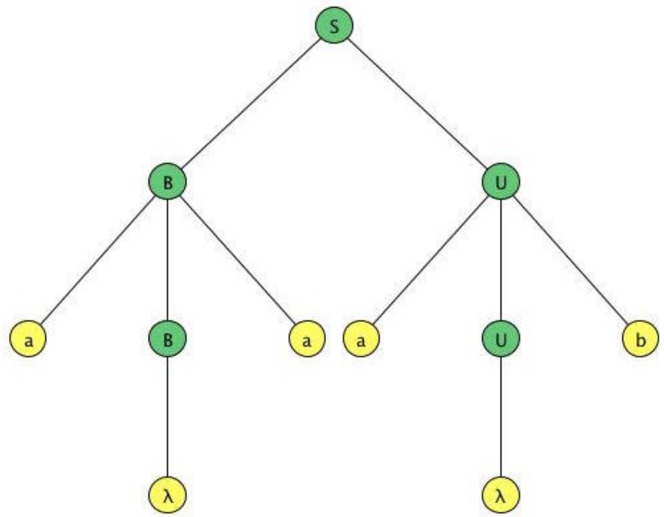
Aufgabe 5:

Sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ **eine kontextfreie Grammatik mit** $\Sigma = \{a, b\}, V = \{S, B, U\}$ **und** $R = S \to BU, B \to aBa|bBb|\varepsilon, U \to aUb|\varepsilon$

a) **Konstruieren Sie mit Hilfe des in der Vorlesung angegeben Verfahrens einen Kellerautomaten M, der L(G) akzeptiert.**



b) **Geben Sie einen Syntaxbaum für aaab an.**



c) **Geben Sie eine Linksableitung für aaab an.**

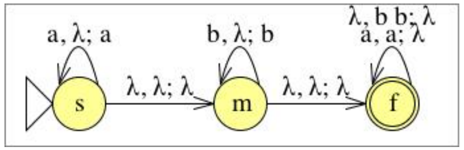
Regel	Ableitung
	S
$S \to BU$	$\Rightarrow BU$
$B \to aBa$	$\Rightarrow aBaU$
$B \to \varepsilon$	$\Rightarrow aaU$
$U \to aUb$	$\Rightarrow aaaUb$
$U \to \varepsilon$	$\Rightarrow aaab$

d) **Geben Sie eine akzeptierende Berechnung des Kellerautomaten M für das Eingabewort aaab an.**

$(p, aaab, \varepsilon)$	$\vdash_M (q, aaab, S)$
	$\vdash_M (q, aaab, BU)$
	$\vdash_M (q, aaab, aBaU)$
	$\vdash_M (q, aab, BaU)$
	$\vdash_M (q, aab, aU)$
	$\vdash_M (q, ab, U)$
	$\vdash_M (q, ab, aUb)$
	$\vdash_M (q, b, Ub)$
	$\vdash_M (q, b, b)$
	$\vdash_M (q, \varepsilon, \varepsilon)$

Aufgabe 6:

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache $\{a^n b^m a^n | n, m \leq 0 \text{ und m ist gerade}\} = \{a^n b^m a^n | n, m \leq 0\} \cap L(a^*(bb)^*a^*)$ **ist kontextfrei.**



Aufgabe 7:

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache $L = \{a^{3k} b a^{2k} b a^k | k \leq 0\}$ **ist kontextfrei.**

Widerlegen mit Pumping Lemma:

1) $\forall L \in CF$ (in Kontextfreie Spachen)

2) $\exists n \geq 1$

3) $\forall z \in L, |z| \geq n$

4) $\exists uvwxy \in \Sigma^*, (v * x) \neq \epsilon, |vwx| < n, z = uvwx$

5) $\forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L$

Beweis: Angenommen $L \in CF$. Dann existriert eine Konstante $h \geq 1$ wie im Punkpunt Lemma. Wähle $z = a^{3n} b a^{2n} b a^n \in L$ und es gilt $|z| = 6n + 2 \Rightarrow |z| \geq n$

Also existiert $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$, sodass $z = uvwxy, vx \neq \epsilon, |vwx| < n$

$z = a^{3n} b a^{2b} b a^n$

1. vwx liegt ersten a-Block.

   $vx = a^l, l \geq 1$

   wähle $i = 0 : uv^0 wx^0 y = a^{3n-l} b a^{2n} b a^n \notin L$ Wdspr.

2. vwx liegt ganz im zweiten a-Block.

   also in a^{3n}ba^2nba^n: analog zu 1.

3. vwx liegt im letzten a-Block (analog zu 1.)

4. vwx schneidet die ersten beiden a-Blöcke $vwx = a^k b a^l$

   Es ist ausgeschlossen, dass v oder x das b enthalten (dennd ann wäre $uv^0 wx^0 y \notin L$)

   Also v im ersten a-Block und x im zweite a-Block $v = a^{k'}, x = a^{l'}$ $k' + l' \geq 1$

   $uv^0 wx^0 y = a^{3n-k'} b a^{2n-l'} b a^n \notin L$

5. vwx schneidet zweiten und dritten a-Block Analog zu (4),

Das sind alle Fälle -> Wdspr.