Übung 4

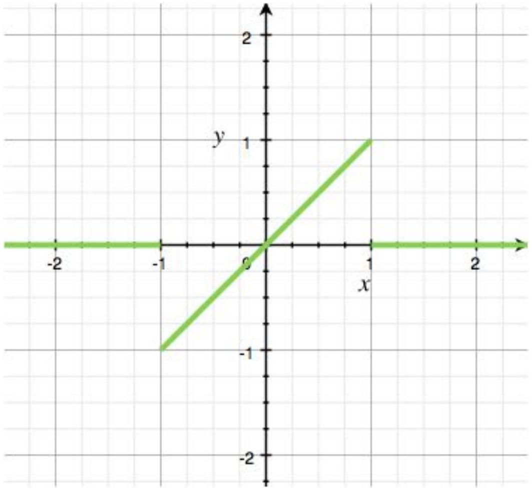
Aufgabe 4.1

Gegeben sei eine Funktion $f : R \to R$ mit

f(x) =	$1 - \lvert x-1 \rvert$	**für** $-1 <= x <= 1$
	0	**sonst**

(a) **Zeigen Sie, dass f Dichtefunktion einer Verteilungsfunktion ist.**

f(x) ist für $-1 <= x < 0$ negativ, somit keine gültige Dichtefunktion!



(b) **Bestimmen Sie Erwartungswert und Median**

nicht möglich, da keine gültige Dichtefunktion

Aufgabe 4.2

Gegeben sei eine Funktion $f : R \to R$ mit

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

(a) Zeigen Sie, dass f Dichtefunktion einer Verteilungsfunktion ist (Hilfreich konnte die Aufgabe 7.4 aus Mathematik II des letzten Semesters sein.).

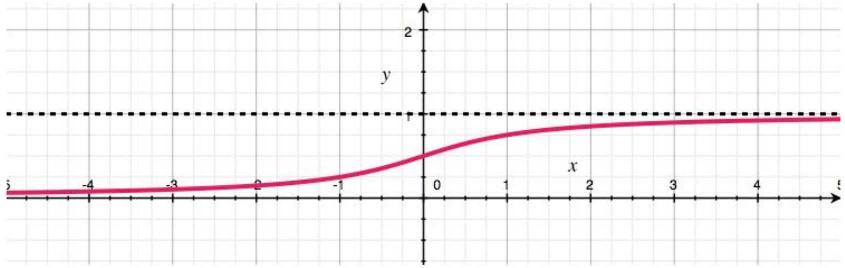
$$F(x) = \frac{1}{\pi} arctan(x)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = [\frac{1}{\pi}arctan(x)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}(lim_{a\to\infty}(arctan(x)) - lim_{a\to-\infty}(arctan(x)))$
$= \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1$

-> ja Dichtefunktion

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und skizzieren Sie den Graphen der Verteilungsfunktion.

$F(t) = [\frac{1}{\pi}arctan(x)]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{\pi}lim_{a\to-\infty}[arctan(x)]_a^t =$
$= \frac{1}{\pi}lim_{a\to-\infty}(arctan(t) - arctan(a)) = \frac{1}{\pi}(arctan(t) - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}arctan(t) - \frac{1}{2}$



-> Hierfür gäbe es gibt keinen Erwartungswert

Aufgabe 4.3

Die Lebensdauer X (in Zeiteinheiten) eines Speichermedium seines Computers kann durch die Dichtefunktion

$f(x) =$	0	**für** $x <= 0$
	$0,06x^2e^{-0,02x^3}$	für $x > 0$

beschrieben werden.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X.

$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

$= \int_0^t f(x)dx$

- *SUBSTITUIEREN:*
- $z = -0,02x^3$
- $\frac{dz}{dx} = -0.06x^2$
- $\frac{dz}{-0.06x^2} = dx$

$= \int_0^t 0.06x^2e^z\frac{dz}{-0.06x^2} = \int_0^t -e^z dz = [-e^z]_0^t$

rücksubstituieren:

$= [-e^{-0.02x^3}]_0^t = -e^{-0.02x^3} + e^0 = 1 - e^{-0.02x^3}$

$F(x) =$	0	**für** $x <= 0$
	$1 - e^{-0.02x^3}$	für $x > 0$

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solches Bauelement mindestens 2 Zeiteinheiten ausfallfrei arbeitet?

$P(X >= 2) == 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-0.02*2^3}) = 1 - (1 - e^{-0,16}) = e^{-0,16} \approx 0,852$

(c) Welche Zeit überleben ungefähr 90% der Bauelemente?

$P(X >= x) = 0.9$

$1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-0.02x^3}) = e^{-0.02x^3} = 0.9$

$$e^{-0.02x^3} = 0.9$$

$$-0.02x^3 = ln(0.9)$$

$$x^3 = -ln(0.9)/0.02$$

$$x = \sqrt[3]{-ln(0.9)/0.02}$$

$$x_1 = 1.74; x_{2,3} \text{ n.def. in R}$$

Aufgabe 4.4

Es sei f eine durch

$f(x) =$	$\alpha x^2(1-x)$	**für**	$0 <= x <= 1$
	0	für	$-\infty < x < 0$ und $1 < x < \infty$

gegebene Funktion mit $\alpha \in R$.

(a) **Bestimmen Sie α so, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße ist.**

Gesucht α für: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx <=> \int_0^1 f(x)dx = 1$

$\int_0^1 (\alpha x^2(1-x))dx = \alpha \int_0^1 x^2(1-x)dx = \alpha \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \alpha(\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx)$
$= \alpha([\frac{x^3}{3}]_0^1 - [\frac{x^4}{4}]_0^1) = \alpha(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \alpha\frac{1}{12}$

$$\rightarrow \alpha = 12$$

mit $\alpha = 12$ $f(x) >= 0 \rightarrow$ passt

(b) **Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert E(X).**

Verteilungsfunktion aus Zeile bei a: $\alpha([\frac{x^3}{3}]_0^1 - [\frac{x^4}{4}]_0^1)$

$F(t) =$	0	**für**	$0 < t$
	$4x^3 - 3x^4$	für	$0 <= t <= 1$
	1	für	$t > 1$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 12\int_0^1 (x^3 - x^4)dx = 12[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5]_0^1 = \frac{3}{5}$

Median bei F(x) = 1/2:

$$12x^3(\frac{1}{3} - \frac{x}{4}) = 0.5$$

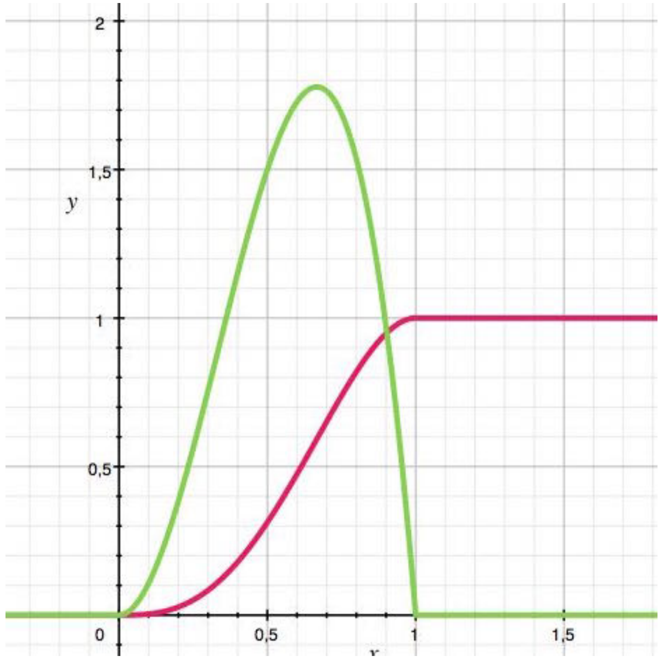
$$x_1 = 0.613272$$

$$x_2 = 1.24748 (\text{nicht im Intervall})$$

$$x_{3,4} \text{ n.d. in R}$$

$$\rightarrow \text{ Median bei } x = 0.613272$$

(c) **Skizzieren Sie die Graphen der Dichte- und der Verteilungsfunktion.**



(d) **Berechnen Sie $P(X < \frac{1}{2})$ und $P(X < E(X))$.**

$P(X < \frac{1}{2}) = \int_0^{0.5} 12x^2(1-x)dx = \frac{5}{16}$

$P(X < E(X)) = \int_0^{\frac{3}{5}} 12x^2(1-x)dx = 0.4752$

Aufgabe 4.5

Die ausfallfreie Arbeitszeit X (in Zeiteinheiten) einer Art von Computerbauteilen hat die folgende Verteilungsfunktion $F(t)$:

$F(t) =$	0 **für** $t < 0$
	$1 - e^{-0,5t}$ für $t >= 0$

(a) **Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein solches Bauteil mindestens eine Zeiteinheit ohne Ausfall arbeitet.**

$P(X >= 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - (P(X <= 1) - P(X = 1))$
$= 1 - F(1) = e^{-0.5} (\approx 0.303)$

(b) **Bestimmen Sie die zugehörige Dichtefunktion $f(x)$ der Verteilungsfunktion F und die mittlere ausfallfreie Arbeitszeit.**

$f(t) = F'(t) = -e^{-0.5t}(-0.5) = 0,5e^{-0.5t}$

$f(t) =$	0 **für** $t < 0$
	$0.5e^{-0,5t}$ für $t >= 0$

mittlere ausfallfreie Arbeitszeit E(x) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)dx = \int_0^{\infty} x * f(x)dx =$

$\int x * 0,5e^{-0,5x}dx = 0,5 \int x * e^{-0,5x}dx =$

partielle Integration

$$v = x; u' = -e^{-0,5x}$$

$$v' = 1; u = 0,5 * e^{-0,5x}$$

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

---

das hier stimmt nicht:

TODO: Partiell Ableituen

$[0,5 * x * (-0,5) * e^{-0,5x}] - \int(0,5 * (-0,5) * e^{-0,5x}) =$
$[-0.25x * e^{-0,5x}] - [-0.5e^{-0.5x}]$

$E(X) = [-0.25x * e^{-0.5x}]_0^{\infty} - [-0.5e^{-0.5x}]_0^{\infty} =$

$= lim_{x \to \infty}(-0.25x * e^{-0,5x} + 0.5e^{-0.5x}) =?$

---

es sollte rauskommen: (Bestätigt durch Wolfram Alpha) $= 2$