# Übung 5

## Aufgabe 5.1

(a) **Ermitteln Sie Erwartungswert und Varianz zu den Aufgaben 2.5 sowie 3.4 und 3.5.**

| **aus Aufg 2.5** | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,024 | 0,188 | 0,452 | 0,336 |

$E(X) = 0.188 + 0.904 + 1.008 = 2.19$

$Var(X) = (0-2.19)^2 * 0.024 + (1-2.19)^2 * 0.188 + (2-2.19)^2 * 0.452 + (3-2.19)^2 * 0.336$
$= \_\_$

---

| **aus Aufg. 3.4** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **>4** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,5 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0 |

$E(X) = 0.2 + 0.2 + 0.3 + 0.4 = 1.1$

$Var(X) = \_\_$

---

| **aus Aufg. 3.5** | **2** | **1** | **0** |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,72 | 0,26 | 0,02 |

$E(X) = 1.42 + 0.26 = 1.68$

$Var(X) = \_\_$

---

(b) **Bestimmen Sie die Varianz zu den Aufgaben 4.1 und 4.4**

*aus Lösung 4.1*: Keine Dichtefunktion, daher kein Erwartungswert, also auch keine Varianz

---

*aus Lösung 4.4*:

$E(X) = \mu = \frac{3}{5}$

$Var(x) = \int (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-\frac{3}{5})^2(4x^3-3x^4)dx = \int_0^1 (x-\frac{3}{5})^2(4x^3-3x^4)dx$
$= [-\frac{3x^7}{7} + \frac{3x^6}{5} + \frac{73x^5}{125} - \frac{6x^4}{5} + + \frac{12x^3}{25}]_0^1 = 0.035..$

---

## Aufgabe 5.2

**Wir führen das Experiment durch "Dreimal hintereinander eine Münze werfen". Wir definieren zwei Zufallsvariablen $X$ und $Y$ zu diesem Zufallsexperiment wie folgt:**

| | |
|---|---|
| $X =$ | $0$ wenn im ersten Wurf "Kopf " geworfen wird |
| | $1$ sonst |

Varianz: $\sum(X-\mu) * P(X)$ oder $E(X^2) - E(X)^2$

**und $Y$ ="Anzahl Würfe, die "Kopf" zeigen".**

**Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $X; Y; X+Y$ sowie $XY$.**

| $X =$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$E(X) = 0.5 * 0 + 0.5 * 1 = 0.5$

$Var(X) = (0-0.5)^2 * 0.5 + (1-0.5)^2 * 0.5 = 0.25$

| $Y =$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

$E(Y) = \frac{3}{8} + 2 * \frac{3}{8} + 3 * \frac{1}{8} = 4 * \frac{3}{8} = 1.5$

$Var(Y) = \sum(x-\mu)^2 P(Y=x_i) = 0.75$

| $X =$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y =$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| $X*Y$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $0$ |

$E(XY) = \frac{2}{8} + 2 * \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

$Var(XY) = \sum(XY-\mu) * P(XY) = 0.5$

---

$COV(X,Y) = E(X*Y) - E(X) * E(Y) = 0.5 - 0.75 = -0.25$

*Gibts eine Vorraussetzung bzgl der Abhängigkeiten?*

$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0.5 + 1.5 = 2$

$Var(X+Y) = Var(X) + 2 * COV(X,Y) + Var(Y) = 0.25 + 2 - (-0.25) + 0.75 = 0.5$

## Aufgabe 5.3

**Ein Computerhersteller erhält regelmäßig Lieferungen, die aus jeweils $N = 100$ Erzeugnissen bestehen. Aus statistischen Unterlagen geht hervor, dass die Zahl der in einer Lieferung enthaltenen Ausschussstücke eine Zufallsvariable ist, die binomialverteilt ist mit den**

**Parametern $n = 2$ und $p = 0.1$. Einer Lieferung mit unbekanntem Ausschussanteil werden $m = 10$ Qualitatskontrollproben entnommen. Die gesamte Lieferung wird nur dann angenommen, wenn alle $m = 10$ Erzeugnisse qualitätsgerecht sind.**

(a) **Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung $k = 0, 1, 2$ Ausschussstücke enthält?**

$$P(E) = \binom{n}{k} * p^k q^{n-k}$$

$P(2) = \binom{2}{2} * 0.1^2 0.9^0 = 0.01$

$P(1) = \binom{2}{1} * 0.1^1 0.9^1 = 0.18$

$P(0) = \binom{2}{0} * 0.1^0 0.9^2 = 0.81$

sinnvoll??

(b) **Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Lieferung angenommen wird.**

für den Fall $k = 0$ 81%

(c) **Wie viel Sendungen muss der Computerhersteller durchschnittlich erhalten, damit insgesamt ein Ausschussstück erwartet werden muss?**

$E(X) = n * p = 2 * 0.1 = 0.2$ -> Durchschnittlich 5 Lieferungen erhalten

# Aufgabe 5.4

**In einer Werkstatt einer Computerfirma unterliege die zufällige Reparaturzeit eines Computers einer Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 0.5$.**

Das bedeutet laut Wikipedia:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ fur } x \geq 0 \\ 0 \text{ fur } x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ fur } x \geq 0 \\ 0 \text{ fur } x < 0 \end{cases}$$

$$E(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

(a) **Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Reparatur eines beliebigen Computers mindestens 3 Stunden aufgewendet werden müssen.**

$F(X >= 3) = 1 - F(3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-0.5*3} = 0.2231...$

(b) **Wie viele Stunden werden im Durchschnitt zur Reparatur eines Computers benötigt?**

$E(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda} = 2$

# Aufgabe 5.5

**Die Breite des Controllers auf einem USB-Stick *X* in mm lässt sich als Zufallsvariable auffassen. $X$ sei normalverteilt und habe den Mittelwert= 10mm und die Standardabweichung $\sigma = 0.02mm$.**

Normalverteilung:

$$F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} dt$$

Diese Aufgabestellung ist offensichtlich sehr ähnlich zu Aufgabe 10c und d der Uni Stuttgart

(a) **Wieviel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn die Breite um maximal $+/-0.03mm$ vom Sollwert $10mm$ abweichen soll?**

um aus der Tabelle ablesen zu können: $\Phi(z); z = \frac{k-\mu}{\sigma}$

Lösung aus Stuttgart:

$P(9.97 \leq X \leq 10.03) = P(X \leq 10.03) - P(X \leq 9.97) = \Phi(\frac{10.03-10.0}{0.02}) - \Phi(\frac{9.97-10.0}{0.02})$
$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.8664$

$$\rightarrow Ausschuss = 1 - P(...) = 0.1336$$

($\Phi(1.5) = 0.93319$ -> $2 * (1 - 0.93319) = 0.1336$)

(b) **Wie mussen die Toleranzgrenzen $10 - c$ und $10 + c$ gewählt werden, damit nicht mehr als 5% Ausschuss entstehen?**

*Lösung aus Stuttgart:*

Das Quantil der Standardnormalverteilung für 97.5% (beidseitig) ist 1.96. Daraus berechnen wir für das Quantil der Normalverteilung mit $\mu = 10$ und $\sigma = 0.02$ den Wert $10 + 1.96 * 0.02$. Die Grenzen sind also $10 - 0.039 \leq X \leq 10 + 0.039$.

*Eigene Lösung:*

(Einfach aus Tabelle gesucht wo 0.975 rauskommt -> 1.96)

$c = 1.96 * \sigma = 0.0392$

Neue Grenzen: $10mm + / - 0.0392mm$