UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

EP2 - MAP3121

UM PROBLEMA INVERSO PARA OBTENÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA

MAP3121

Nome	NUSP
Otavio Henrique MONTEIRO	10774159

10 de Julho de 2020

Conteúdo

1 Introdução e Objetivos

A distribuição de temperatura numa barra foi estudada no EP1, utilizando métodos numéricos para a determinação do problema direto, que é dado pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{aligned} &u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + f(t,x) \text{ em } [0,T]\times[0,1] \\ &u(0,x) = u_0(x) \text{ em } [0,1] \\ &u(t,0) = g_1(t) \text{ em } [0,T] \\ &u(t,1) = g_2(t) \text{ em } [0,T] \end{aligned} \tag{1}$$

Na segunda parte do exercício programa iremos desenvolver a solução do problema inverso da equação do calor, ou seja, determinar as intensidades de fontes de calor a partir dos valores finais da temperatura (em tempo T). Pelo método de Cranck-Nicolson (desenvolvido no EP1) iremos encontrar vetores referentes à distribuição de temperatura para diferentes forçantes (cada em um ponto p_k, k de 1 a nf). Iremos então montar o sistema linear correspondente à solução pelo método dos Mínimos Quadrados, que sera solucionado por meio do uso da decomposição LDL^t. Realizados os testes de funcionamento, utilizaremos uma distribuição final de temperatura fornecida, $u_T(x)$, para determinar os valores de intensidade das fontes em pontos já conhecidos (sem e com ruído).

2 Desesenvolvimento

2.1 Tarefas

2.1.1 Item (a)

Para os diferentes pontos $p_1, \cdot, p_k$ temos fontes descritas por $f(t,x) = r(t)g_h^k(x)$, $k = 1, \cdot, nf$, onde definimos $g_h^k(x) = \frac{1}{h}$, se $p_k - \frac{h}{2} \leq x \leq p_k + \frac{h}{2}$ e $g_h^k(x) = 0$ caso contrário e escolhemos $r(t) = 10(1 + \cos(5t))$. Escolhemos também $u_0(x) = 0$ e $g_1(t) = g_2(t) = 0$. Assim, utilizando o método de Cranck-Nicolson desenvolvido no EP1 e descrito na equação 2.1.1 encontramos os vetores $u_k(T, x_i), i = 1, \cdots, N-1$, considerando que $M = N$.

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{N-2}^{k+1} \\ u_{N-1}^{k+1} \end{bmatrix} = b$$

$$b = \begin{bmatrix} u_1^k + \frac{\lambda}{2}(u_0^k - 2u_1^k + u_2^k) + \frac{\Delta t}{2}(f_1^k + f_1^{k+1}) + \lambda g_1(t^{k+1}) \\ u_2^k + \frac{\lambda}{2}(u_1^k - 2u_2^k + u_3^k) + \frac{\Delta t}{2}(f_2^k + f_2^{k+1}) \\ \vdots \\ u_{N-2}^k + \frac{\lambda}{2}(u_{N-3}^k - 2u_{N-2}^k + u_{N-1}^k) + \frac{\Delta t}{2}(f_{N-2}^k + f_{N-2}^{k+1}) \\ u_{N-1}^k + \frac{\lambda}{2}(u_{N-2}^k - 2u_{N-1}^k) + \frac{\Delta t}{2}(f_{N-1}^k + f_{N-1}^{k+1}) + \lambda g_2(t^{k+1}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

2.1.2 Item (b)

Devemos então montar o sistema linear correspondente à solução do problema de mínimos quadrados, descrito pela equação 3. Sabendo que o produto interno pode ser descrito por $< u, v >= \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i)v(x_i)$.

$$\begin{bmatrix} < u_1, u_1 > & < u_2, u_1 > & \cdots & < u_{nf}, u_1 > \\ < u_1, u_2 > & < u_2, u_2 > & \cdots & < u_{nf}, u_2 > \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ < u_1, u_{nf} > & < u_2, u_{nf} > & \cdots & < u_{nf}, u_{nf} > \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{nf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < u_T, u_1 > \\ < u_T, u_2 > \\ \vdots \\ < u_T, u_{nf} > \end{bmatrix} \quad (3)$$

Inferimos, desse modo, que $u_T(x) = \sum_{k=1}^{nf} a_k u_k(T, x)$, pois podemos verificar na primira linha do sistema 3 que:
$< u_T, u_1 >= \sum_{i=1}^{N-1} u_T(x_i)u_1(x_i) = a_1 \cdot [\sum_{i=1}^{N-1} u_1(x_i)u_1(x_i)] + a_2 \cdot [\sum_{i=1}^{N-1} u_2(x_i)u_1(x_i)] + \cdots + a_{nf} \cdot [\sum_{i=1}^{N-1} u_{nf}(x_i)u_1(x_i)]$.
Podemos colocar os coeficientes a_k dentro das somatórias e simplificá-las temos:
$\sum_{i=1}^{N-1} u_T(x_i)u_1(x_i) = \sum_{i=1}^{N-1}[a_1u_1(x_i)u_1(x_i) + a_2u_2(x_i)u_1(x_i) + \cdots + a_{nf}u_{nf}(x_i)u_1(x_i)]$
Observando a presença de $u_1(x_i)$ em ambos os lados da equação, é trivial notar a relação apontada anteriormente entre u_T, a_k e $u_k(T, x_i)$.

2.1.3 Item (c)

Diferentemente dos sistemas lineares do EP1, o sistema correspondente ao problema dos mínimos quadrados não gera uma matriz esparsa nem tridiagonal. Desse modo, foi necessário readaptar o código utilizado no EP1 de modo a, utilizando o método de decomposição de matrizes simétricas de Cholesky e solucionando os sistemas encontrados, encontrar as intensidades do sistema linear referente ao problema de mínimos quadrados. Inicialmente decompomos a matriz da forma de A da equação 3 em LDL^t, solucionando como: $Ax = b \rightarrow LDL^t x = b$, $LDy = b$, $L^t x = y$.

2.2 Testes

Para todos os testes foram utilizados $T = 1$ e $r(t) = 10(1 + \cos 5t)$.

2.2.1 Item (a)

Utilizamos para esse item as seguintes definições:

- $N = 128$
- $nf = 1$
- $p_1 = 0.35$
- $u_T(x_i) = 7u_1(T, x_i)$

Desse modo o programa encontrou $a_1 = 7$, sendo a solução trivial de $[164.171][a_1] = [1149.2]$. Para tal foi utilizada a hipótese de que $< u_T, u_1 >=< 7u_1, u_1 >= 7 < u_1, u_1 >$, verificável pelo produto interno analisado anteriormente. O mesmo raciocínio foi aplicado ao Item (b), que define u_T como uma combinação linear de $u_{1,\cdots,nf}$.

2.2.2 Item (b)

Utilizamos para esse item as seguintes definições:

- $N = 128$
- $nf = 4$
- $p_1 = 0.15$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.7$, $p_4 = 0.8$
- $u_T(x_i) = 2.3u_1(T, x_i) + 3.7u_2(T, x_i) + 0.3u_3(T, x_i) + 4.2u_4(T, x_i)$

Encontramos assim o sistema de equações da problema de mínimos quadrados para o calculo das intensidades:

$$\begin{bmatrix} 58.4773 & 83.9374 & 51.9131 & 36.2994 \\ 83.9374 & 141.673 & 99.6944 & 70.2609 \\ 51.9131 & 99.6944 & 141.673 & 109.786 \\ 36.2994 & 70.2609 & 109.786 & 91.2151 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 613.097 \\ 1042.25 \\ 991.872 \\ 759.493 \end{vmatrix}$$

Derradeiramente, achamos os valores das intensidades (como esperado, são os mesmos valores de intensidade fornecidos anteriormente):

- $a_1 = 2.3$, $a_2 = 3.7$, $a_3 = 0.3$ e $a_4 = 4.2$

2.2.3 Item (c)

Para esse item, os dados são adquiridos do arquivo *teste.txt*, que contém os pontos em que existem fontes, bem como a temperatura final para 2048 pontos. Temos assim, as seguintes considerações:

- $N = 128, 256, 512, 1024$ e 2048
- $nf = 10$
- $p_1 = 0.14999999999999999$, $p_2 = 0.20000000000000001$, $p_3 = 0.29999999999999999$, $p_4 = 0.34999999999999998$, $p_5 = 0.50000000000000000$, $p_6 = 0.59999999999999998$, $p_7 = 0.69999999999999996$, $p_8 = 0.72999999999999998$, $p_9 = 0.84999999999999998$, $p_{10} = 0.90000000000000002$

O valor de N a ser utilizado será selecionado em tempo de execução pelo usuário, e os pontos serão escolhidos de acordo com a relação de N com 2048 (i.e. tomam-se os valores de $\frac{2048}{N}$ em $\frac{2048}{N}$).

Assim, chegamos aos valores de a_k, com $k = 1, \cdots, nf$ para os diferentes valores de N escolhidos.

[a]	N=128	N=256	N=512	N=1024	*N=2048*
a1	2,78	1,65	1,25	1,11	*1,00*
a2	3,89	4,64	4,86	4,93	*5,00*
a3	2,06	2,16	2,07	1,99	*2,00*
a4	1,33	1,30	1,42	1,50	*1,50*
a5	2,41	2,32	2,23	2,20	*2,20*
a6	3,00	3,05	3,07	3,09	*3,10*
a7	0,44	0,53	0,65	0,66	*0,60*
a8	1,43	1,36	1,26	1,25	*1,30*
a9	4,77	4,34	4,04	3,93	*3,90*
a10	-1,20	-0,35	0,21	0,42	*0,50*

Tabela 1: Intensidades encontradas para diferentes valores de N, com u_T original fornecido (item c)

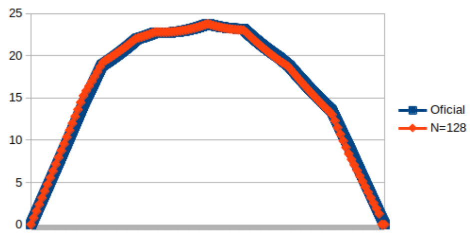
Após encontrados os valores de intensidade, podemos calcular os valores de temperatura final (para as intensidades encontradas) por: $\sum_{k=1}^{nf} a_k u_k(T, x_i)$, como verificada anteriormente. Definimos o erro quadrático discreto pela equação 4, calculando seu valor para cada N.

$$E = \sqrt{\Delta x \sum_{i=1}^{N-1} \left(u_T(x_i) - \sum_{k=1}^{nf} a_k u_k(T, x_i) \right)^2} \tag{4}$$

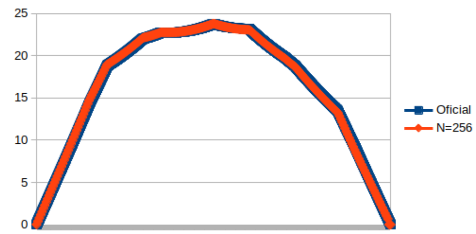
	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
E	0,1714230	0,0842522	0,0361489	0,0124500	0,0009696

Tabela 2: Erro quadrático calculado para diferentes valores de N, entre as temperaturas encontradas e as temperaturas originais fornecidas.

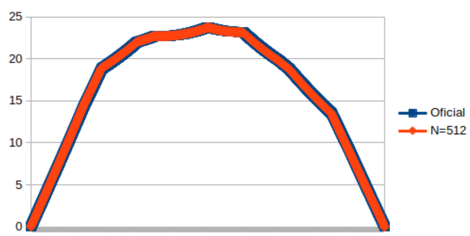
Podemos ver que o valor de temperatura final encontrada converge para a original com o aumento no valor de N, minimizando o erro, que tem seu menor valor para N= 2048. Isso pode ser visto também nos gráficos correspondentes à reconstrução do valor final com as intensidades encontradas em comparação com o valor oficial.



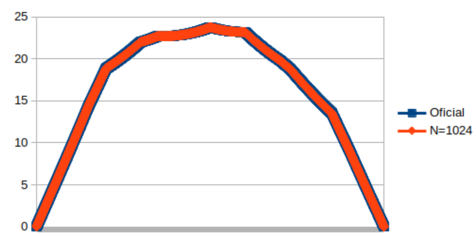
(a) N=128



(b) N=256



(c) N=512



(d) N=1024

(e) N=2048

Figura 1: Comparação entre o valor Oficial de u_T e o encontrado para diferentes valores de N

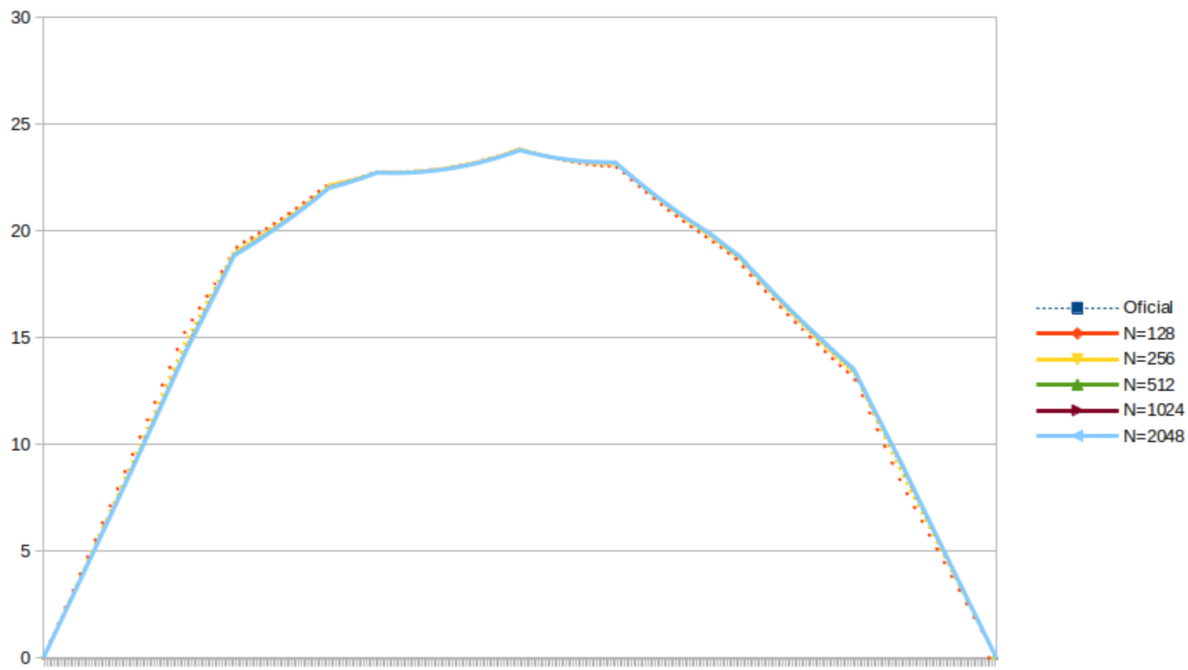


Figura 2: Comparações de u_T para os diferentes valores de N

2.2.4 Item (d)

Nesse teste as considerações são as mesmas do item anterior, porém os dados de temperatura final foram tratados com um ruído aleatório, descrito pela equação:
$u_{T\_ruido}(x_i) = u_T(x_i) \cdot (1. + r\epsilon)$, onde $\epsilon = 0.01$ e r é um número randômico entre -1 e 1.

[a]	**N=128**	**N=256**	**N=512**	**N=1024**	***N=2048***
a1	2,86	1,62	1,19	1,11	*0,98*
a2	3,85	4,66	4,96	4,93	*5,03*
a3	1,87	2,11	1,99	1,99	*1,97*
a4	1,55	1,37	1,47	1,50	*1,52*
a5	2,28	2,32	2,21	2,20	*2,20*
a6	3,16	3,00	3,08	3,09	*3,09*
a7	-0,14	0,57	0,56	0,66	*0,59*
a8	1,96	1,38	1,36	1,25	*1,31*
a9	4,71	4,22	4,01	3,93	*3,93*
a10	-1,18	-0,25	0,22	0,42	*0,48*

Tabela 3: Intensidades encontradas para diferentes valores de N, com u_T tratado com ruído (item d)

Do mesmo modo que no item anterior podemos calcular o erro quadrático para cada valor de N segundo a equação 4. "E"foi calculado com os valores de u_T originais do arquivo, já "E_ruido"com u_{T_ruido} definido anteriormente.

	N=128	N=256	N=512	N=1024	N=2048
E	0,1741790	0,0855369	0,0381527	0,0144684	0,0080491
E_ruido	0,2004690	0,1332570	0,1085960	0,1028760	0,1026950

Tabela 4: Erros quadráticos para diferentes valores de N. "E"corresponde ao erro calculado entre os valores encontrados (encontrados usando os valores tratados com ruído) e os valores originais fornecidos. "E_ruido"corresponde ao erro calculado entre os valores encontrados e os valores originais tratados com ruído.

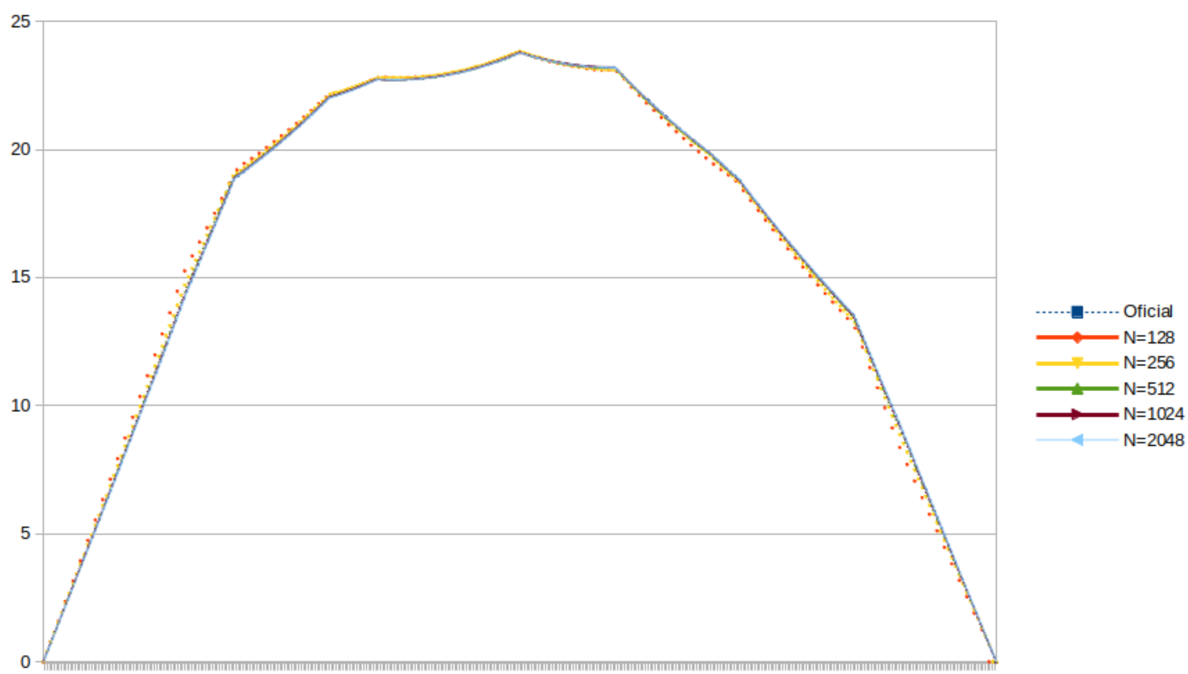


Figura 3: Comparações de u_T para os diferentes valores de N

Observamos que o valor das intensidades é ligeiramente diferente do obtido sem o tratamento com ruído, tendo erros quadráticos mais elevados. Desse modo podemos concluir que o sistema é robusto para pequenas variações, mas pode ter seu valor final de intensidades deslocado.

3 Referências

[1] Equipe de Métodos Numéricos. Um problema inverso para obtenção de distribuição de Temperatura - MAP3121, 2020.