强子谱理论

目录

---

1 两点关联函数

这一节来自**知乎**答主**東雲正樹**（中山大学陈伟教授课题组研究生刘正树，2022 学年成为博士研究生）

1.1 单粒子态

完备性关系式

$$I = \sum_X \int \mathrm{d}\Pi_X |X\rangle\langle X| \equiv \sum_X \int \prod_{i\in X} \frac{\mathrm{d}^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} |X\rangle\langle X| \tag{1}$$

其中单粒子态 $|X\rangle$ 是 Poincaré 群平移生成元 P 的本征态，也是粒子的动量本征态，即 $P^\mu|X\rangle = p^\mu|X\rangle, q^0 > 0, q^2 \geq 0$。其中上式可简写，$\int \mathrm{d}\Pi_X = \int \prod_{i\in X} \frac{\mathrm{d}^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$ 是对相空间的积分。

1.2 物理质量谱密度的导出

首先给出一条公式

$$\delta(q^2-m^2)\theta(q^0)=\delta(q^{02}-\vec{q}^2-m^2)\theta(q^0)=\frac{\delta(q^0-\sqrt{\vec{q}^2+m^2})}{2\sqrt{\vec{q}^2+m^2}} \tag{2}$$

那么，由于 $\mathcal{O}(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Px}\mathcal{O}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Px}$ 且 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Px}|\Omega\rangle=|\Omega\rangle$，可知

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(y)|\Omega\rangle=\langle\Omega|\mathcal{O}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P(x-y)}\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle=\sum_X\int\mathrm{d}\Pi_X\langle\Omega|\mathcal{O}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}P(x-y)}|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle\\
&=\sum_X\int\mathrm{d}\Pi_X\left[\int\mathrm{d}^4q\delta^{(4)}(q-p_X)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_X(x-y)}\langle\Omega|\mathcal{O}(0)|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_X(x-y)}\theta(q^0)\rho(q^2)=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}q^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_X(x-y)}\theta(q^0)\left[\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\delta(q^2-m^2)\right]\rho(q^2)\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\mathrm{d}q^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_X(x-y)}\delta(q^2-m^2)\\
&=\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\mathrm{d}q^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_X(x-y)}\frac{\delta(q^0-\sqrt{\vec{q}^2+m^2})}{2\sqrt{\vec{q}^2+m^2}}\\
&=\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{q}}(x^0-y^0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_{\vec{q}}}
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\rho(q^2)$ 被称为物理质量谱密度，第四步定义了一个仅依赖于 q^2 的 Lorentz 不变量，即

$$\theta(q^0)\rho(q^2)=\sum_X\int\mathrm{d}\Pi_X(2\pi)^3\delta^{(4)}(q-p_X)\langle\Omega|\mathcal{O}(0)|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle \tag{4}$$

当 $q^2>0$ 时 $\rho(q^2)\geq 0$，$|X\rangle$ 是实粒子的动量本征态，对应的 p_X 都是在壳的，即 $p_X^2\geq 0,p_X^0>0$。$\theta(q^0)$ 的存在是提示性的，可有可无，因为由于 $\delta^{(4)}(q-p_X)$ 的存在，自然地只有 $q^2\geq 0,q^0>0$ 的部分才有贡献，因此 $\theta(q^0)$ 仅仅作为提示而存在。第七步用到了 δ 函数的性质 $\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$。

注意，如果系统含有奇数个费米子（系统整体是个费米子），那么 $\bar{\mathcal{O}}(x)=\mathcal{O}^\dagger(x)\gamma^0$，类似费米子算符构造拉氏量的方法；如果系统含有偶数个费米子（系统整体是个玻色子），那么 $\bar{\mathcal{O}}(x)=\mathcal{O}^\dagger(x)$，类似反物质的算符。

1.3 动量空间关联函数的导出

两点关联函数为 $\langle\Omega|\mathsf{T}[\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(y)]|\Omega\rangle$，其中 $|\Omega\rangle$ 是相互作用理论下的真空态, 而 T 与 $\mathcal{O}(x)$ 则分别是时序算符与任意场算符。根据公式 $-\frac{1}{2E}[\theta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}+\theta(-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2-E^2+\mathrm{i}\varepsilon}$ 将公式 3代入下式

$$\begin{aligned}
&\langle\Omega|\mathsf{T}[\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(y)]|\Omega\rangle=\langle\Omega|\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(y)|\Omega\rangle\theta(x^0-y^0)+\langle\Omega|\bar{\mathcal{O}}(y)\mathcal{O}(x)|\Omega\rangle\theta(y^0-x^0)\\
&=\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{\vec{q}}(x^0-y^0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_{\vec{q}}}\theta(x^0-y^0)\\
&\qquad+\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_{\vec{q}}(x^0-y^0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{2E_{\vec{q}}}\theta(y^0-x^0)\\
&=\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int\mathrm{d}q^0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}q^0(x^0-y^0)}}{(q^0)^2-E_{\vec{q}}^2+\mathrm{i}\varepsilon}\\
&=\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)}}{q^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}=\int_0^\infty\mathrm{d}m^2\rho(m^2)D_F(x-y)\\
&=-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q(x-y)}\Pi(q^2)
\end{aligned} \tag{5}$$

上式即为 Källén–Lehmann 谱表示。上式第二步将 $\vec{q}$ 积分换成 $-\vec{q}$。第四、五步中发现隐藏的传播子 $D_F(x-y)$。第六步中有

$$\Pi(q^2) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}m^2 \frac{\rho(m^2)}{m^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon} \tag{6}$$

$\Pi(q)$ 被称作动量空间的关联函数，即 $\langle\Omega|\mathsf{T}[\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(y)]|\Omega\rangle$ 的 Fourier 变换（以下令 $y=0$）。

$$\Pi(q^2) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\langle\Omega|\mathsf{T}[\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(0)]|\Omega\rangle \tag{7}$$

1.4 色散关系

已知 $\mathrm{Im}\frac{1}{m^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon} = \pi\delta(m^2-q^2)$，代入公式 6可得

$$\mathrm{Im}\Pi(q^2) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}m^2 \mathrm{Im}\frac{\rho(m^2)}{m^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon} = \int_0^\infty \mathrm{d}m^2 \pi\delta(m^2-q^2)\rho(m^2) = \pi\rho(q^2)$$

因此，有

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}m^2 \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(m^2)}{m^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon} \tag{8}$$

其中，在强子层次，有（上面推导过的）

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Im}\Pi(q^2) = 2\pi\rho(q^2) &= \sum_X \int \mathrm{d}\Pi_X (2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_X)\langle\Omega|\mathcal{O}(x)|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle \\
&= \sum_X \int \frac{\mathrm{d}^3p_X}{(2\pi)^3 2E_X}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_X)\langle\Omega|\mathcal{O}(x)|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle \\
&\overset{q_X^0=E_X,\vec{p}=\vec{p}_X}{=} 2\pi\sum_X \int \frac{\delta(q^0-p_X^0)}{2E_X}\langle\Omega|\mathcal{O}(x)|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle \\
&\overset{\text{将公式 2代入}}{=} 2\pi\sum_X \int \delta(q^2-p_X^2)\langle\Omega|\mathcal{O}(x)|X\rangle\langle X|\bar{\mathcal{O}}(0)|\Omega\rangle
\end{aligned} \tag{9}$$

当然，一般地要求 m^2 有下阈值，即上面对于 m^2 的积分下限有要求，一般不是 0，即

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi}\int_{lower\ integral\ limit}^\infty \mathrm{d}m^2 \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(m^2)}{m^2-q^2-\mathrm{i}\varepsilon} \tag{10}$$

1.4.1 减除方案 [3]

色散关系的另外一种推导方式如下：

一、**(无减除的色散关系)** 如果复变函数 $\Pi(s)$ 满足：(1) 在 $|s|\to\infty$ 时，$\Pi(s)\to 0$；(2) 除了在正半实轴 $s>s_c$ 处有极点外，其余处处解析；(3) 满足 Schwarz 反射性质 $\Pi(s^*)=\Pi^*(s)$，那么有 Cauchy 定理可以推出

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \mathrm{d}s\frac{\Pi(s)}{s-q^2} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=R}\mathrm{d}s\frac{\Pi(s)}{s-q^2} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^R \mathrm{d}s\frac{\Pi(s+\mathrm{i}\epsilon)-\Pi(s-\mathrm{i}\epsilon)}{s-q^2} \\
&\overset{\text{第一项为零},\Pi(s+\mathrm{i}\epsilon)-\Pi(s-\mathrm{i}\epsilon)=2\pi\,\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^\infty \mathrm{d}s\frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon}
\end{aligned} \tag{11}$$

上式是做围道，一个大圈，但是避开正实轴的极点。

二、**(减除的色散关系)** 如果在实际计算中某些物理过程的关联函数 $\Pi(s)$ 在 s 复平面上并不满足当 $|s|\to\infty$ 时趋于零的要求，色散积分发散，则可以通过减除方案来解决

$$\begin{aligned}
\Pi'(q^2) &= \Pi(q^2)-\Pi(0) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^\infty \mathrm{d}m^2\,\mathrm{Im}\,\Pi(s)\left(\frac{1}{s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{s-\mathrm{i}\varepsilon}\right) \\
&= \frac{q^2}{\pi}\int_{s_0}^\infty \mathrm{d}m^2\frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{s(s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon)}
\end{aligned} \tag{12}$$

因此有

$$\Pi(q^2)=\frac{q^2}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}m^2\frac{\operatorname{Im}\Pi(s)}{s(s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon)}+\Pi(0) \tag{13}$$

如果已知 $q^2\to\infty$ 时，$\Pi(q^2)\to(q^2)^N$，那么可以作 N 次检出使得色散积分收敛而获得 N 次减除的色散关系

$$\Pi(q^2)=\frac{(q^2)^N}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}m^2\frac{\operatorname{Im}\Pi(s)}{s^N(s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon)}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\Pi^{(n)}(0)}{n!}(q^2)^n \tag{14}$$

2 关联函数在强子层次的计算 [2]

2.1 关联函数的张量结构与流自旋

真空态 $\langle\Omega|$ 记为 $\langle 0|$。所谓强子层次的计算就是推导关联函数的过程中插入强子态 $1=\sum_X|X\rangle\langle X|$。

一、如果算符没有 Lorentz 指标，那么它只会耦合到 0 自旋的粒子，此时只有 $J^{PC}=0^{++},0^{-+}$，没有其他量子数的粒子。此时记流为 $J(x)$，关联函数写作

$$\begin{aligned}\Pi(q^2)&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\mathrm{T}[J(x)J^\dagger(0)]|0\rangle\\&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\sum_X\langle 0|J(x)|X\rangle\langle X|J^\dagger(0)|0\rangle\\&\equiv\Pi_0(q^2)\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\Pi_0(q^2)$ 为 Lorentz 不变量。

二、对于只有一个洛伦兹指标的流来说，它可以耦合到自旋为 0 和 1 的态上。将含有一个 Lorentz 指标的流记作 $J_\mu(x)$，有关联函数

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2)=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\sum_X\langle 0|J_\mu(x)|X\rangle\langle X|J_\nu^\dagger(0)|0\rangle \tag{16}$$

如果这个流会耦合到自旋为 0 的态，那么有关联函数

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q^2)&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\sum_X\langle 0|J_\mu(x)|X\rangle\langle X|J_\nu^\dagger(0)|0\rangle\\&=\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\Pi_0(q^2)\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\Pi_0(q^2)$ 为关于 0 自旋态的 Lorentz 不变量。如果这个流耦合到自旋为 1 的态，那么有关联函数

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(q^2)&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\sum_X\langle 0|J_\mu(x)|X\rangle\langle X|J_\nu^\dagger(0)|0\rangle\\&=(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}-g_{\mu\nu})\Pi_1(q^2)\end{aligned} \tag{18}$$

三、对于具有两个 Lorentz 指标的流来说，它可以耦合到自旋为 0，1，2 的态上。将含有两个 Lorentz 指标的流记作 $J_{\mu\nu}(x)$，关联函数记作

$$\Pi_{\mu\nu,\rho\sigma}(q^2)=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\sum_X\langle 0|J_{\mu\nu}(x)|X\rangle\langle X|J_{\rho\sigma}^\dagger(0)|0\rangle \tag{19}$$

定义张量

$$\eta_{\mu\nu}=\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}-g_{\mu\nu},\ T_{\mu\nu}=\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}-\frac{g_{\mu\nu}}{4},\ T^{\pm}_{\mu\nu\rho\sigma}=\left(\frac{q_\mu q_\rho}{q^2}\eta_{\nu\sigma}\pm(\mu\leftrightarrow\nu)\right)\pm(\rho\leftrightarrow\sigma)$$

注意 $T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=0$，即它是无迹的、关于 $\mu\nu$ 对称的。使用这些张量，我们可以统一构造含有不同道（channel）的关联函数。$\Pi_{\mu\nu,\rho\sigma}(q^2)$ 含有关于 $\mu\nu$ 或 $\rho\sigma$ 无迹对称（S）部分、反对称（A）部分以及迹/对角元（T）部分：

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu,\rho\sigma}(q^2)=&\frac{1}{16}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\Pi_0(q^2) && (J=0,T)\\
&+\frac{1}{4}[T_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}+T_{\rho\sigma}g_{\mu\nu}]\Pi_0(q^2) && (J=0,ST)\\
&+T_{\mu\nu}T_{\rho\sigma}\Pi_0(q^2) && (J=0,S)\\
&+T^-_{\mu\nu\rho\sigma}\Pi_1(q^2) && (J=1,A)\\
&+2[\frac{q_\mu q_\rho}{q^2}\eta_{\nu\sigma}-\frac{q_\nu q_\sigma}{q^2}\eta_{\mu\rho}]\Pi_1(q^2) && (J=1,AS)\\
&+T^+_{\mu\nu\rho\sigma}\Pi_1(q^2) && (J=1,S)\\
&+[\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}-\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}]\Pi_1(q^2) && (J=1,A)\\
&+[\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}+\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}-\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}]\Pi_2(q^2) && (J=2,S)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中 $(J=n,symmetric)$ 中 n 代表粒子自旋。每个分关联函数左边的张量系数叫投影算符。以上式子每项相互正交，这是投影算符保证的。（投影算符怎么搞出来的我不太了解，一个张量形式的关联函数为什么能提取一个张量结构出来变成标量的分关联函数？这我也没搞懂，是动力学原因?）

2.2 夸克-强子对偶性

一、连续态

以电磁流为例。在物理区域内，**矢量流**首先贡献到虚部的是矢量介子态 V，**定义** $\langle 0|J_\mu|V^\lambda(p_V)\rangle=\sqrt{2}f_Vm_V\epsilon^\lambda_\mu$（其中，$m_V,f_V,\epsilon^\lambda_\mu$ 分别是矢量介子的质量、衰变常数和极化矢量，$V^\lambda(p_V)$ 为粒子态 X），参考式子 9（注意张量结构），得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Pi_{\mu\nu}(q^2)=&\frac{1}{2}\sum_X\int \mathrm{d}\Pi_X(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_X)\langle 0|J_\mu(x)|X\rangle\langle X|J^\dagger_\nu(0)|0\rangle\\
\overset{X_1=V}{=}&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2E_q}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_V)\langle 0|J_\mu(x)|V^\lambda(p_V)\rangle\langle V^\lambda(p_V)|J^\dagger_\nu(0)|0\rangle+...\\
\overset{\delta[f(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{f'(x_i)}}{=}&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2E_q}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_V)\langle 0|J_\mu(x)|V^\lambda(p_V)\rangle\langle V^\lambda(p_V)|J^\dagger_\nu(0)|0\rangle+...\\
=&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2E_q}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-p_V)(\sqrt{2}f_Vm_V)^2\epsilon^\lambda_\mu\epsilon^\lambda_\nu+...\\
=&(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})2\pi f_V^2\delta(q^2-m_V^2)+...
\end{aligned}
\tag{21}
$$

省略号代表强子高激发态和连续态的贡献，同时可知 $\Pi(q^2)=2\pi f_V^2\delta(q^2-m_V^2)+...$。对于一般情况（不限于矢量电磁流），有 $\Pi(q^2)=2\pi f_X^2\delta(q^2-m_X^2)+...$

二、强子窄宽度共振态近似

由于强子高激发态越来越密集而且宽度不能以强子“窄宽度共振态近似”而区域连续谱，以最低连续态阈值 s_0^h 为起点表示高激发态和连续态的贡献（或者说对于一个单共振态 a single resonance state 来说有下式）

$$
\mathrm{Im}\Pi(q^2)=2\pi f_V^2\delta(q^2-m_V^2)+\pi\rho^h(q^2)\theta(q^2-s_0^h)
\tag{22}
$$

高能下多强子连续态的复杂性很难找到核力的表达式。**夸克-强子对偶性**（quark-hadron duality）假定将强子谱函数积分近似地以夸克相互作用微扰论计算（包括 QCD 辐射修正）给出的虚部 $\mathrm{Im}\Pi^{pert}(s)$ 的积分表示。其主要思想为：在低能部分以相应具有与构成关联函数流算符相同量子数的一系列强子窄宽度共振态做近似，高能部分不能做该近似，因为强子共振态越来越密集而且宽度更宽而趋于连续谱。例如可

以近似地假定关联函数为

$$\mathrm{Im}\Pi_{duality}(q^2) = 2\pi f_V^2 \delta(q^2 - m_V^2) + \mathrm{Im}\Pi^{pert}(q^2)\theta(q^2 - s_0) \quad \text{or} \quad \int_{s_0^h}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{\rho^h(s)}{s - q^2} \approx \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} \mathrm{d}s \frac{\mathrm{Im}\Pi^{pert}(s)}{s - q^2} \tag{23}$$

其中，$\mathrm{Im}\Pi^{pert}(s)$ 是 QCD 微扰计算得到的强关联函数 $\Pi^{pert}(s)$ 的虚部，即正负电子湮灭为夸克 QCD 树图近似以及高阶辐射修正计算给出的正负电子湮灭衰变为强子的总截面。上式称为夸克-强子对偶性假定。s_0 是 QCD 微扰计算中相应的夸克图的阈值，它不需要与 s_0^h 一致，但是为了简便，可以令 $s_0 = s_0^h$。

另有 Mandelstam 变量 $s = q^2$，这是全文通用的，尤其在积分变量替换的过程中。

3 关联函数在夸克-胶子层次的计算

3.1 OPE 算符乘积展开

根据背景场方法，一般对于很小的 x，有

$$\mathsf{T}[J(x)J^\dagger(0)] = \sum_x C_n(x)\mathcal{O}_n(0) \tag{24}$$

其中 $\mathcal{O}_n$ 是由夸克场和胶子场构成的局域规范不变量，由其量纲（维度）d_n 排序。$C_n(x)$ 为 Wilson 系数，其量纲为 $C_n(x) \sim 1/q^{d_n}\ x^{d_n}$，随着 q 变大、x 变小而被压低。其中部分算符 $\mathcal{O}_n$ 和量纲 d_n：$1, 0$，两夸克凝聚 $m\rangle\bar{\psi}\psi\langle, 4$，双胶子凝聚 $\rangle G^a_{\mu\nu}G^a_{\mu\nu}\langle, 4$。关联函数与算符真空期望值的关系是 Fourier 变换。因此关联函数 $\Pi(q^2)$ 可以展开为

$$\Pi(q^2) = \sum_n C_n(q^2)\langle 0| : \mathcal{O}_n(0) : |0\rangle \tag{25}$$

其中，$\langle 0| : \mathcal{O}_n : |0\rangle$ 为凝聚量，$C_n(q^2)$ 为 Wilson 系数。Other operators can be reduced to these operators by using the equations of motion. So the physical meaning of the Wilson expansion is well known: the Wilson coefficients $C_n(x)$ determine the short distance behaviour and the large distance part is contained in the matrix elements of the operators $\mathcal{O}_n$.

一般来说，关联函数的形式为

$$\Pi(x - y) = \langle 0|\mathsf{T}[\mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)]|0\rangle \tag{26}$$

$$\Pi_{\mu\nu\ldots}(q^2) = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\mathsf{T}J(x)J^\dagger(0)|0\rangle = T_{\mu\nu\ldots}\Pi(q^2) \tag{27}$$

其中流 $J(x)$ 可以在夸克胶子层次探索短距离效应。对于介子流 $J = \bar{q}\Gamma q$，在很小的 x 处，关联函数近似有 $\Pi \sim S^2(x)$，$S(x) = \langle \bar{q}(x)q(0)\rangle$。对于介子流 $J(x) = \bar{q}_a(x)\Gamma q_a(x)$，在夸克层次有

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\mathsf{T}[J(x)J^\dagger(0)]|0\rangle = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\mathsf{T}[\bar{q}_a(x)\Gamma_1 q_a(x)\bar{q}_b(0)\Gamma_2 q_b(0)]|0\rangle \\
&\overset{\text{交换费米子场导致负号}}{=} -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\,\mathrm{Tr}[\langle 0|q_a(x)\bar{q}_b(0)|0\rangle\Gamma_2\langle 0|q_b(0)\bar{q}_a(x)|0\rangle\Gamma_1] \\
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\,\mathrm{Tr}[\mathrm{i}S_{ab}(x)\Gamma_2\mathrm{i}S_{ba}(-x)\Gamma_1]
\end{aligned} \tag{28}$$

其中，如果传播子是自由夸克传播子，那么（当然，实际上完整的夸克传播子含有凝聚量，这里只是简单举例，仅考虑微扰项，即 OPE 中的单位元对应的 Wilson 系数分量）

$$\mathrm{i}S_{ab}(x - y) = \langle 0|\,\mathrm{T}[q_a(x)\bar{q}_b(y)]|0\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{i}S_{ab}(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)},\ \mathrm{i}S_{ab}(p) = \frac{\mathrm{i}\delta_{ab}}{\not{p} - m + \mathrm{i}\epsilon} \tag{29}$$

我们常用维数正则化（dimensional regularization (D dimension)）的方法来处理紫外发散问题。

3.2 电磁流例子

考虑**矢量电磁流**的情况，若矢量电磁流为 $J_\mu(x)=\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$，对于两个电磁流情况 $\langle\Omega|\mathsf{T}[J_\mu(x)J_\nu(0)]|\Omega\rangle$ 有关联函数

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2)=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|\mathsf{T}[J_\mu(x)J_\nu^\dagger(0)]|0\rangle=(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})\Pi(q^2) \tag{30}$$

其中 $(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})$ 是 Lorentz 协变性和电磁流守恒条件给出的一般张量结构（类似无质量矢量场的传播子）；$\Pi(q^2)$ 是 Lorentz 不变函数。**注意**，此时 $(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})$ 有量纲。

一般地，计算关联函数取量纲 $d\le 6$（可以取到 10），拉氏量按照背景场 Feynman 规则计算，考虑夸克凝聚、胶子凝聚、夸克胶子凝聚、四夸克凝聚、三胶子凝聚的图形，有

$$\Pi_{OPE}(q^2)\overset{Q^2=-q^2}{=}-\frac{1}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi})\log\frac{Q^2}{\mu^2}+\frac{1}{Q^4}\langle 0|m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d|0\rangle+\frac{1}{12Q^4}\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle-\frac{224\pi}{81Q^6}\alpha_s\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle^2+... \tag{31}$$

其中，有定义 $Q^2\equiv-q^2$，deep Euclidean region 为 $Q^2=-q^2\to\infty$。算符乘积展开的量纲 $d<12$ 则不会出现紫外发散（因此大部分人都只算到了量纲 $d=10$）：One can readily see that for a pure SU(3) Yang-Mills field, an ultraviolet divergence happens first for $d=12$ [i.e., when computing $\langle(G)^6\rangle$]. Up to this point the operator expansion is guaranteed.[1]

胶子凝聚量 $\langle G^2\rangle$ 的数值来源为电子湮灭产生粲夸克的实验：The vacuum expectation value of the gluonic field was extracted from the sum rules for charm production in e^+e annihilation.The sum rules relate integrals over the observable cross section $\sigma(e^+e\to charm)$ to a theoretical result which includes both an asymptotic-freedom term and the correction proportional to $\langle G^2\rangle$.[1]

至于凝聚量的数值、夸克质量的数值在每篇文献中（包括 Particle Data Group 手册）都不太一样，计算的时候可以参考一下（但是具体数值一般不会太影响结果）。

3.3 Borel 变换改善求和规则可靠性

[2] 这一小节的文字逻辑参考黄涛的《量子色动力学专题》，但是 Borel 变换的数学本身不参考该书，与该书的定义有出入（量纲不同）。

Borel 变换的定义为

$$\Pi(M^2)\equiv\mathcal{B}_{M^2}\left[\Pi(q^2)\right]=\lim_{\substack{-q^2,n\to\infty\\ -q^2/n=M^2}}\frac{(-q^2)^{n+1}}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^n\Pi(q^2) \tag{32}$$

定义 $Q^2=-q^2$。由于关联函数 $\Pi(q^2)$ 在复 q^2 平面上的解析性，公式组 23应该是等价的。由色散关系公式 8和算符乘积展开公式 31可知

$$\begin{aligned}\Pi_{OPE}(q^2)=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{d}s\frac{\operatorname{Im}\Pi(s)}{s-q^2-\mathrm{i}\varepsilon}&\overset{Q^2=-q^2}{=}-\frac{1}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi})\log\frac{Q^2}{\mu^2}+\frac{1}{Q^4}\langle 0|m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d|0\rangle\\&+\frac{1}{12Q^4}\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle-\frac{224\pi}{81Q^6}\alpha_s\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle^2+...\end{aligned} \tag{33}$$

其中 μ 是一些典型的强子质量，$\langle 0|...|0\rangle$ 为真空凝聚量。上式左边是无减除的色散关系，右边依赖于真空凝聚量（有无穷多个），随着凝聚量量纲增加，Q^2 压低的幂次也增加，因此当 Q^2 较大的时候取前几项近似就可以了。然而窄宽度共振态近似（公式 22）要求 Q^2 越小越好，因此希望公式左边的积分中被积函数 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中来自大 s 的贡献越小越好。

Borel 变换为（注意 Borel 变换前后量纲变化）

$$\mathcal{B}_{M^2}[\Pi(q^2)]=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \tag{34}$$

证明：$\mathcal{B}_{M^2}[\Pi(q^2)]=\mathcal{B}_{M^2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-q^2-\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{d}s\right]=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi(s)\mathcal{B}_{M^2}\left[\frac{1}{s-q^2}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s$。上式说明积分中来自大 s 的贡献被指数压低，从而压低了 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中连续谱的贡献（详见窄宽度共振态近似，公式 22)。将 Borel 变换应用到强子窄宽度共振态近似公式 22中，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{M^2}[\Pi_{duality}(q^2)]&=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{duality}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}[2\pi f_V^2\delta(s-m_V^2)+\pi\rho^h(s)\theta(s-s_0^h)]\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s\\&=2f_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2}+\int_{s_0^h}^{\infty}\rho^h(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s=2f_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2}+\text{excited states}\ +\ \text{the continuum}\end{aligned}\tag{35}$$

可见 Borel 变换可以压低连续谱的贡献（连续谱对应的 s 较大，而积分中 s 在指数衰减项）。将 OPE 公式 25进行 Borel 变换得到

$$\mathcal{B}_{M^2}[\Pi_{OPE}(q^2)]=\mathcal{B}_{M^2}\left[C_1\ln(-q^2/\mu^2)+\sum_{k=2}\frac{C_kO_k(-q^2)}{(-q^2)^k}\right]=-C_1M^2+\sum_{k=2}\frac{C_kO_k(M^2)}{(k-1)!(M^2)^{k-1}}\tag{36}$$

其中 C_1,C_k 为 OPE 中的系数，可以是通过式 31反过来凑出来（The expansion coefficients C_1,C_k can be found perturbatively since the effective coupling constant $\alpha_s(Q)$ is small.[1]）。可见分母中的 $(k-1)!$ 压低了高量纲凝聚量的贡献。

对于矢量电磁流的，有

$$\mathcal{B}_{M^2}[\Pi_{OPE}(q^2)]=\frac{1}{4\pi^2}M^2[1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi}+\frac{4\pi^2}{M^4}\langle0|m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d|0\rangle+\frac{\pi^2}{3M^4}\langle0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle-\frac{448\pi^3}{81M^6}\alpha_s\langle0|\bar{\psi}\psi|0\rangle^2+...]\tag{37}$$

然而这里存在对 Borel 参量 M 的选取问题，公式 3.3的右边的求和为了压低高量纲凝聚项的贡献要求 M 大，但公式左边为了压低高能 $\mathrm{Im}\Pi(s)$ 中连续谱的贡献尽量使基态贡献为主要 M 小，因而这两个要求就给出 M 取值的下、上限。在实际计算中 Borel 参量取值范围依赖于物理过程，在给定的物理过程中，物理结果不应依赖于 Borel 参量 M，方能使得理论预言有价值。由于 QCD 求和规则的近似性，实际计算中要求物理结果对 Borel 参量 M 的依赖性尽可能得小，或者说要寻找物理量对 Borel 参量 M 在取值范围内变动的变化曲线在合理的窗口内出现平台，平台所对应的物理量就是计算的结果。顺便指出所有过程的计算不仅 Borel 参量 M 而且阈参量 s_0^h 都是过程相关的参量。

另外一种 Borel 变换的定义：

$$\tilde{\Pi}(M^2)\equiv\mathbb{B}_{M^2}\left[\Pi(q^2)\right]=\lim_{\substack{-q^2,n\to\infty\\-q^2/n=M^2}}\frac{(-q^2)^n}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^n\Pi(q^2)\tag{38}$$

这种定义方法的 Borel 变换算符是无量纲的。要注意，此时 Borel 变换是特殊的 Laplace 逆变换。在这种变换中，公式 34有变换，导致公式 35和公式也变化：

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{M^2}[\Pi(q^2)]&=\frac{1}{\pi M^2}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s\\\mathbb{B}_{M^2}[\Pi(q^2)]&=\frac{f_V^2}{M^2}\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2}+\text{excited states}\ +\ \text{the continuum}\\\mathbb{B}_{M^2}[\Pi(q^2)]&=-C_1+\sum_{k=2}\frac{C_kO_k(M^2)}{(k-1)!(M^2)^k}\end{aligned}\tag{39}$$

可见，这两种定义对于关联函数 $\Pi(q^2)$ 来说仅仅是有没有分母因子 $\frac{1}{M^2}$ 而已。

3.3.1 关联函数的 $\not{p}$ 和 1 结构

将强子窄宽度共振态近似公式 22中的核子（nucleon)、激发态（excited states)，连续态（continuum）分开为

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\Pi(q^2)&=2\pi f_V^2\delta(q^2-m_V^2)+\pi\rho^h(q^2)\theta(q^2-s_0^h)\\&=2\pi f_V^2\delta(q^2-m_V^2)+\pi\theta(q^2-s_0^h)\mathrm{Im}\Pi_1(q^2)\not{p}+\pi\theta(q^2-s_0^h)\mathrm{Im}\Pi_2(q^2)\end{aligned}\tag{40}$$

其中 s_0^h 为连续态和激发态的阈值（同上文）。其中由于夸克传播子 $\mathrm{i}S^{ab}$ 中含有 $\not{x}$ 项，真空期待值 $\langle 0|\mathsf{T}[\mathcal{O}(x)\bar{\mathcal{O}}(0)]|0\rangle$ 作 Fourier 变换之后 $\Pi(q^2)$ 可能会含有 $\not{p}$ 项（一般会出现在夸克组分数目为奇数的流中），但是除了 $\not{p}$ 和 1 的结构外，其他项都是仅含有 q^2 的 Lorentz 不变量，可以分开做 Borel 变换。

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{M^2}[\Pi(q^2)] &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [2\pi f_V^2\delta(s-m_V^2)+\pi\theta(s-s_0^h)\mathrm{Im}\Pi_1(s)\not{p}+\pi\theta(s-s_0^h)\mathrm{Im}\Pi_2(s)]\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \\ &= 2f_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2}+\not{p}\int_{s_0}^\infty \mathrm{Im}\Pi_1(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s+\int_{s_0}^\infty \mathrm{Im}\Pi_2(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\not{p}$ 对应的 $\mathrm{Im}\,\Pi_1(s)$ 对应的求和规则亦称为第一求和规则；1 对应的 $\mathrm{Im}\,\Pi_2(s)$ 对应的求和规则称为亦第二求和规则。

4 强子的性质

4.1 强子的质量

一、**黄涛先生的写法**：不妨采用夸克-强子对偶性假定并分离出低能极点，以及用 QCD 微扰计算结果解析延拓表达高于阈值连续谱的贡献，采用夸克-强子对偶性假定并分离出低能极点，以及用 QCD 微扰计算结果解析延拓表达高于阈值连续谱的贡献，将公式 23近似表达为

$$\mathrm{Im}\,\Pi(s) = 2\pi f_\rho^2\delta(s-m_V^2)+\frac{1}{4\pi}(1+\frac{\alpha_s}{\pi})\theta(s-s_0^h) \tag{42}$$

将上式代入公式 34，那么有。

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{M^2}[\Pi(q^2)] = \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^\infty \mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s = 2f_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2}+\frac{M^2}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi})\mathrm{e}^{-s_0^h/M^2} \\ = \frac{M^2}{4\pi^2}[1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi}+\frac{4\pi^2}{M^4}\langle 0|m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d|0\rangle+\frac{\pi^2}{3M^4}\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle-\frac{448\pi^3}{81M^6}\alpha_s\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle^2+...]\end{aligned} \tag{43}$$

再有

$$\begin{aligned}M^4\frac{\partial}{\partial M^2}\frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^\infty \mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}s\mathrm{d}s = 2f_V^2m_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2}+\frac{M^2(s_0^h+M^2)}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi})\mathrm{e}^{-s_0^h/M^2} \\ = \frac{M^4}{4\pi^2}[1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi}-\frac{4\pi^2}{M^4}\langle 0|m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d|0\rangle-\frac{\pi^2}{3M^4}\langle 0|\frac{\alpha_s}{\pi}G^2|0\rangle+\frac{896\pi^3}{81M^6}\alpha_s\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle^2+...]\end{aligned} \tag{44}$$

联立上两式，可得到粒子的质量 m_V^2。

$$m_V = \sqrt{\frac{\text{公式 44最后一行} - \frac{M^2(s_0^h+M^2)}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi})\mathrm{e}^{-s_0^h/M^2}}{\text{公式 43最后一行} - \frac{M^2}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi})\mathrm{e}^{-s_0^h/M^2}}} \tag{45}$$

注意，这里的积分下限选为系统的物理阈值 M_V^2，而不是连续态阈值 s_0，例如，对于矢量介子 $q_1\bar{q}_2$，可以采用 $M_V^2=(m_1+m_2)^2$。

二、**我们组的写法**：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{M^2}[\Pi_{OPE}(q^2)] &= \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{OPE}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^{s_0}\mathrm{Im}\Pi_{OPE}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s + \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{OPE}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \\
= \mathcal{B}_{M^2}[\Pi_{duality}(q^2)] &= \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{duality}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^{s_0}\mathrm{Im}\Pi_{duality}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s + \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{duality}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \\
&= 2f_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2} + \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{duality}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{46}
$$

由于夸克-强子对偶性，我们认为上式中，$\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{OPE}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty}\mathrm{Im}\Pi_{duality}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s$。因此有

$$
2f_V^2\mathrm{e}^{-m_V^2/M^2} = \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^{s_0}\mathrm{Im}\Pi_{OPE}(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \tag{47}
$$

那么定义

$$
\mathcal{L}_k(s_0, M^2) = \frac{1}{\pi}\int_{M_V^2}^{s_0}\mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}s^k\mathrm{d}s = \int_{M_V^2}^{s_0}\rho(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}s^k\mathrm{d}s \tag{48}
$$

因此有

$$
m_V(s_0, M^2) = \sqrt{\frac{\mathcal{L}_1(s_0, M^2)}{\mathcal{L}_0(s_0, M^2)}} = \sqrt{M^4\frac{\partial}{\partial M^2}\ln\left[\mathcal{L}_0(s_0, M^2)\right]} = \sqrt{\frac{\partial}{\partial(-\frac{1}{M^2})}\ln\left[\mathcal{L}_0(s_0, M^2)\right]} \tag{49}
$$

这与黄涛先生的写法是一致的。(还是有点不一样，不过感觉差不多，黄涛的做法是把连续态强子谱用阶跃函数截断之后乘以辐射修正项，而我们组的做法是直接把连续态阈值以上的谱都近似看成相等从而抛弃，准确来说考虑了辐射修正项的结果更合理)

4.2 强子的衰变

注意，衰变常数指的是 $\langle 0|J_\mu|V^\lambda(p_V)\rangle = \sqrt{2}f_V m_V \epsilon_\mu^\lambda$ 中的 f_V，在矢量流的例子中，衰变宽度正比于衰变常数：$\Gamma_{V\to ee} = \frac{4}{3}\pi\alpha^2\frac{f_V^2}{m_V}$。

根据光学定理（optical theorem，量子力学那一套散射理论）：

$$
\mathrm{Im}\,\Pi_V(s) = \frac{1}{12\pi}\frac{\sigma(e^+e^-\to \text{强子（正反夸克对）})}{\sigma(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)} = \frac{s}{16\pi^2\alpha^2}\sigma(e^+e^-\to\text{强子}) \tag{50}
$$

既然已经得到了粒子的质量，那么根据公式 47，有

$$
f_V = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{m_V^2/M^2}}{2}\mathcal{L}_0(s_0, M^2)} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{m_V^2/M^2}}{2\pi}\int_{M_V^2}^{s_0}\mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s} \tag{51}
$$

好像是可以计算各种衰变道的，但是我还没学会。

衰变宽度（这个还没学明白，和流耦合到那个自旋态上有关系），感觉有点玄学。

5 QCD 求和规则误差来源 [3]

QCD 求和规则中理论的普遍性质有：真空凝聚、算符乘积展开、色散关系、Borel 变换；应用中不可避免地做了近似，因而存在不确定性的地方：

1. Borel 参量 M^2 和阈参量 s_0^h 的依赖性，寻找物理量相对于 Borel 参量的稳定平台并估算不确定性是很重要的；

2. 夸克、胶子等真空凝聚参量变化对物理量带来的不确定性；

3. 忽略高量纲真空凝聚项带来的误差；

4. 计算 QCD 微扰贡献的不确定性，包括 α_s 对标度的依赖性和忽略高阶修正对物理量带来的不确定性。

6 三点关联函数

从三点关联函数出发，可以进一步研究强子电磁形状因子和弱形状因子。

参考文献

[1] Shifman, M. A., Vainshtein, A. I., & Zakharov, V. I. (1979). Resonance properties in quantum chromodynamics. Physical review letters, 42(5), 297-300. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.42.297

[2] 黄涛, 王伟等. 量子色动力学专题 [M]. 北京: 科学出版社,2018.6:262-267.

[3] 黄涛. 量子色动力学引论 [M]. 北京: 北京大学出版社,2018.6:262-267.