数学技巧

目录

1 Wick 转动 **1**

2 Laplace 变换 **1**

2.1 d 维 Fourier 变换 2

2.2 Borel 变换 3

3 两个很重要的场论公式 **5**

---

1 Wick 转动

对于位置空间，有

$$x_E^0 \equiv -\mathrm{i}x^0,\ \vec{x}_E \equiv \vec{x},\ \mathrm{d}^4x \equiv \mathrm{i}\mathrm{d}^4x_E,\ x^2 = -x_E^2 \tag{1}$$

但是对于动量空间第 0 分量的转动刚好与位置空间相反，这能保证内积 $x \cdot p$ 不变，有

$$p_E^0 \equiv \mathrm{i}p^0,\ \vec{p}_E \equiv \vec{p},\ \mathrm{d}^4p \equiv \mathrm{i}\mathrm{d}^4p_E,\ p^2 = -p_E^2 \tag{2}$$

$$\int \mathrm{d}^dx = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^dx_E \quad \int \mathrm{d}^dp = +\mathrm{i}\int \mathrm{d}^dp_E \tag{3}$$

2 Laplace 变换

Laplace 变换的定义：

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) \equiv \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\ (\mathrm{Re}(s) > 0) \tag{4}$$

镜像函数记为 $F(s)$，有 $f(t) \risingdotseq F(s)$，$F(s) \fallingdotseq f(t)$ 一些性质：

1. 线性定理：$\mathcal{L}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)] = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$
2. 导数定理：$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$（注意：此处使用了分部积分的方法，要求 $f(t)\mathrm{e}^{-st} \to 0, t \to \infty$）
3. 积分定理：$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau] = \frac{1}{s}F(s)$
4. 相似定理：$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$
5. 位移定理：$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\lambda t}f(t)] = F(s+\lambda)$
6. 卷积定理：$\mathcal{L}[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau] = F_1(s)F_2(s)$

Laplace 逆变换（反演积分公式）为：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \tag{5}$$

其中反演积分公式的积分路径为 c 平面上的一条直线 $\mathrm{Re}(s = \beta)$，该直线处于 $F(s)$ 的存在域中。可以利用留数法或查表法来求 Laplace 逆变换。

定理：假设函数 $F(s)$ 除在半平面 $\mathrm{Re}(s) < c$ 内有有限个孤立奇点 $s_1, s_2, ..., s_n$ 外是解析的，且当 $s \to \infty$ 时，$F(s) \to 0$，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\beta - \mathrm{i}\infty}^{\beta + \mathrm{i}\infty} F(s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Residue}[F(s)\mathrm{e}^{st}, s_k],\ (t > 0) \tag{6}$$

对于 Fourier 变换：

$$\mathcal{F}[f(t)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t) \tag{7}$$

也有以上相似的性质，但是要求有以下变换：$p \to \mathrm{i}\omega$ 且积分下限变为 $-\infty$。

2.1 d 维 Fourier 变换

d 维的空间积分 $\mathrm{d}^d x$ 可以用广义球坐标,即 $\mathrm{d}^d x = r^{d-1}(\sin\theta_1)^{d-2}(\sin\theta_2)^{d-3}...(\sin\theta_{d-2})\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1...\mathrm{d}\theta_{d-1} = r^{d-1}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}r$。注意，有积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^d x \mathrm{e}^{-k^2} = \pi^{d/2}$，$\int \mathrm{d}\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$。其中 d 为目标积分对应的积分维度，一般地在场论中都是 $d=4$，对应四维空间。注意，一下的推导公式分类讨论，一类是 $d/2 > a$，另一类是 $d/2 \le a$，使用的时候不要混淆。

一、对于 $d/2 > a$，有

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^d x \frac{1}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} &= -\mathrm{i}(-1)^a 2^{d-2a}\pi^{d/2}(-p^2)^{a-d/2}\frac{\Gamma(d/2-a)}{\Gamma(a)} \\ \int \mathrm{d}^d p \frac{1}{(p^2)^a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} &= \mathrm{i}(-1)^a 2^{d-2a}\pi^{d/2}(-x^2)^{a-d/2}\frac{\Gamma(d/2-a)}{\Gamma(a)} \end{aligned} \tag{8}$$

注意，当 $a \le 0$ 且为非正整数的时候，由于分母 Γ 函数为无穷大，故积分为零。如果需要含分量 x_μ 或 p_μ 的 Fourier 变换（例如含 Dirac slashed），则可以作用一个偏导算符 ∂_{p^μ} 或 ∂_μ。

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^d x \frac{x_\mu}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} &= (-1)^{a-1} 2^{d-2a+1}\pi^{d/2}(-p^2)^{a-d/2-1}p_\mu\frac{\Gamma(d/2-a+1)}{\Gamma(a)} \\ \int \mathrm{d}^d p \frac{p_\mu}{(p^2)^a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} &= (-1)^{a-1} 2^{d-2a+1}\pi^{d/2}(-x^2)^{a-d/2-1}x_\mu\frac{\Gamma(d/2-a+1)}{\Gamma(a)} \end{aligned} \tag{9}$$

二、对于 $0 < d/2 \le a$，可以利用展开式

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{x+n} - \gamma_E + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} + \mathcal{O}(x+n)\right], \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n), n \in \mathbb{R} \\ a^x &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^i}{i!} \end{aligned} \tag{10}$$

来处理发散的 Γ 函数，一般都会有（**注意：这里 ε 定义的顺序为** $d/2-a$，实际应用中可以有其他定义）

$$(-p^2)^{-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon) \overset{\textbf{finite\_term}}{=} -\ln(-p^2) \tag{11}$$

丢掉发散项（以及欧拉常数 γ_E）并留下有限的项，重整化使用 MS 方案会干掉这个发散项。其中 $\gamma_E = -\lim_{x\to 1}\Gamma'(x)$ 为欧拉 Euler 常数。另取一阶小量则有

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon),\ a^\varepsilon = 1 + \varepsilon\ln a + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

注意有

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(0)}{(-)^n\Gamma(n+1)} \tag{12}$$

从 $(-p^2)^n$ 中提取一个 $(-p^2)^{-\varepsilon}=(-p^2)^0=1$（之所以是 $-\varepsilon$ 是因为在右边 $(-p^2)$ 幂次是 $(-p^2)^{a-d/2-1}$，顺序不是 $d/2-a$。那么，则凑够了 $(-p^2)^{-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)$。对于 $0<d/2\leq a$ 有

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^d x\frac{1}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} &\overset{\textbf{finite\_term}}{=} \frac{+\mathrm{i}(-1)^{d/2}2^{d-2a}\pi^{d/2}}{\Gamma(a)\Gamma(a-d/2+1)}(-p^2)^{a-d/2}\ln{(-p^2)}\\ \int \mathrm{d}^d p\frac{1}{(p^2)^a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} &\overset{\textbf{finite\_term}}{=} \frac{-\mathrm{i}(-1)^{d/2}2^{d-2a}\pi^{d/2}}{\Gamma(a)\Gamma(a-d/2+1)}(-x^2)^{a-d/2}\ln{(-x^2)}\end{aligned} \tag{13}$$

注意，上式仅仅是积分取了有限项的结果，其积分本质上还是发散的。同理可以作用 ∂_μ 或者 ∂_{p^μ} 得到带分量的积分。

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^d x\frac{x_\mu}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} &\overset{\textbf{finite\_term}}{=} \frac{(-1)^{d/2+1}2^{d-2a+1}\pi^{d/2}}{\Gamma(a)\Gamma(a-d/2+1)}(-p^2)^{a-d/2-1}p_\mu[1+(a-d/2)\ln{(-p^2)}]\\ \int \mathrm{d}^d p\frac{p_\mu}{(p^2)^a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} &\overset{\textbf{finite\_term}}{=} \frac{(-1)^{d/2+1}2^{d-2a+1}\pi^{d/2}}{\Gamma(a)\Gamma(a-d/2+1)}(-x^2)^{a-d/2-1}x_\mu[1+(a-d/2)\ln{(-x^2)}]\end{aligned} \tag{14}$$

三、其实总的来说含有 **finite term** 的都是发散的，在处理的时候通过公式 12取了有限项。（看起来确实有点流氓的感觉）

如果做 Fourier 变换的函数有多个下标，则求导算符多作用几次在公式 8和公式 13，例如作用 $\partial_{p^\mu}\partial_{p^\nu}$ 得到

$$\int \mathrm{d}^d x\frac{x_\mu x_\nu}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\begin{cases} = \mathrm{i}(-1)^{a-1}2^{d-2a+1}\pi^{d/2}(-p^2)^{a-d/2-2}[2(a-d/2-1)p_\mu p_\nu+p^2 g_{\mu\nu}]\dfrac{\Gamma(d/2-a+1)}{\Gamma(a)}, & d/2>a\\ \overset{\textbf{finite\_term}}{=} \dfrac{\mathrm{i}(-1)^{d/2+1}2^{d-2a+1}\pi^{d/2}}{\Gamma(a)\Gamma(a-d/2+1)}(-p^2)^{a-d/2-2}\{2(a-d/2)[1+\ln{(-p^2)}]p_\mu p_\nu & \\ \qquad +[1+(a-d/2)\ln{(-p^2)}]p^2 g_{\mu\nu}\}, & d/2\leq a\end{cases} \tag{15}$$

四、以下给出部分函数的的变换式（含有 i）

原式 $\frac{1}{(x^2)^a}$	$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^d x\frac{1}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$	$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^d x\frac{x_\mu}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$	$\mathrm{i}\int \mathrm{d}^d x\frac{x_\mu x_\nu}{(x^2)^a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$
x^{10}	0	0	0
x^8	0	0	0
x^6	0	0	0
x^4	0	0	0
x^2	0	0	0
1	0	0	0
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{4\pi^2}{p^2}$	$\frac{8\mathrm{i}\pi^2 p_\mu}{p^4}$	$\frac{8\pi^2(p^2 g^{\mu\nu}-4p^\mu p^\nu)}{p^6}$
$\frac{1}{x^4}$	$-\pi^2\log{(-p^2)}$	$\frac{2\mathrm{i}\pi^2 p_\mu}{p^2}$	$\frac{2\pi^2 g^{\mu\nu}}{p^2}$
$\frac{1}{x^6}$	$\frac{\pi^2 p^2\log{(-p^2)}}{8}$	$-\frac{\mathrm{i}\pi^2[\log{(-p^2)}+1]p_\mu}{4}$	$-\frac{\pi^2\{p^2[\log{(-p^2)}+1]g^{\mu\nu}+2p^\mu p^\nu[\log{(-p^2)}+1]\}}{4p^2}$
$\frac{1}{x^8}$	$-\frac{\pi^2 p^4\log{(-p^2)}}{192}$	$\frac{\mathrm{i}\pi^2 p^2[2\log{(-p^2)}+1]p_\mu}{96}$	$\frac{\pi^2\{p^2[2\log\left(-p^2\right)+1]g^{\mu\nu}+4p^\mu p^\nu[\log\left(-p^2\right)+1]\}}{96}$
$\frac{1}{x^{10}}$	$\frac{\pi^2 p^6\log{(-p^2)}}{9216}$	$-\frac{\mathrm{i}\pi^2 p^4[3\log{(-p^2)}+1]p_\mu}{4608}$	$-\frac{\pi^2 p^2\{p^2[3\log{(-p^2)}+1]g^{\mu\nu}+6p^\mu p^\nu[\log{(-p^2)}+1]\}}{4608}$

(16)

2.2 Borel 变换

Borel 变换是 Laplace 逆变换。即 $f(p^2)=f_1(-p^2)\leftrightarrow F_1(\frac{1}{M^2})=F(M^2)$。

$$F(M^2)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}+\infty}\mathrm{e}^{-p^2/M^2}f(p^2)\,\mathrm{d}\left(-p^2\right) \tag{17}$$

其反变换为 Laplace 变换

$$f(p^2)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{p^2/M^2}F(M^2)\mathrm{d}\frac{1}{M^2} \tag{18}$$

定义 Borel 变换算子 $\mathcal{B}_{M^2}$ 定义为

$$\Pi(M^2) \equiv \mathcal{B}_{M^2}\left[\Pi(p^2)\right] = \lim_{\substack{-p^2, n\to\infty \\ -p^2/n = M^2}} \frac{(-p^2)^{n+1}}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}\right)^n \Pi(p^2) \tag{19}$$

对于具体应用，有（以下都可以暴力证明）

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{M^2}\left[(p^2)^k\right] = 0,\ k\in\mathbb{N} \\
&\mathcal{B}_{M^2}\left[\frac{1}{(m^2-p^2)^k}\right] = \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{e}^{-m^2/M^2}}{M^{2(k-1)}},\ k>0 \\
&\mathcal{B}_{M^2}\left[(p^2)^k \ln\frac{1}{(-p^2)}\right] = k!(M^2)^{k+1} \\
&\mathcal{B}_{M^2}\left[f(p^2)\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}s\ \mathrm{Im}(f(s))\mathrm{e}^{-s/M^2},\ \text{if } f(p^2) \text{ can be written as a dispersion integral.} \\
&\qquad\qquad f(p^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}m^2 \frac{\mathrm{Im}\, f(m^2)}{m^2-p^2-\mathrm{i}\varepsilon} \\
&\mathcal{B}_{M^2}\left[(\frac{1}{-p^2})^k(\frac{1}{\ln(-p^2/\mu^2)})^\varepsilon\right] = \frac{1}{(k-1)!(M^2)^{k-1}}\left[\frac{1}{\ln(M^2/\mu^2)}\right]^\varepsilon \times \left[1+\mathcal{O}(\frac{1}{\ln(M^2/\mu^2)})\right]
\end{aligned} \tag{20}$$

第二条证明的时候注意凑出 $\mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$，这条公式说明了可以把传播子分母中的质量提取到指数上来。第四条公式的证明：

$$\mathcal{B}_{M^2}[\Pi(p^2)] = \mathcal{B}_{M^2}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-p^2-\mathrm{i}\epsilon}\mathrm{d}s\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\Pi(s)\mathcal{B}_{M^2}\left[\frac{1}{s-p^2}\right]\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s$$

验证 Borel 变换是 Laplace 逆变换：对公式 27中的第二、第三条公式的 Laplace 变换则可得到等式左边。

$$\begin{aligned}
\int_\infty^0 \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{e}^{-m^2/M^2}}{M^{2(k-1)}}\mathrm{e}^{-(-p^2)/M^2}\mathrm{d}\frac{1}{M^2} &\overset{t\equiv 1/M^2}{=} \int_0^\infty \frac{1}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-m^2 t}t^{(k-1)}\mathrm{e}^{-(-p^2)t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(m^2-p^2)^k},\ (\text{if } k>0 \text{ and } \mathrm{Re}(m^2-p^2)>0)
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\int_\infty^0 k!(M^2)^{k+1}\mathrm{e}^{-(-p^2)/M^2}\mathrm{d}\frac{1}{M^2} &\overset{t\equiv 1/M^2}{=} \int_0^\infty \Gamma(k+1)\frac{1}{t^{k+1}}\mathrm{e}^{-(-p^2)t}\mathrm{d}t \\
&= (-p^2)^k\Gamma(-k)\Gamma(k+1) = (p^2)^k\ln(\frac{1}{-p^2})
\end{aligned} \tag{22}$$

以上最后一步使用了两个公式：公式 12和公式 11。可见，在这里，Borel 变换其实是 $-p^2 \leftrightarrow \frac{1}{M^2}$ 的对偶。

另外一种 Borel 变换的定义（黄涛《量子色动力学专题》和 QCD 求和规则创始人 M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, and V.I.Zakharov 的定义）：

$$\tilde{\Pi}(M^2) \equiv \mathbb{B}_{M^2}\left[\Pi(p^2)\right] = \lim_{\substack{-p^2, n\to\infty \\ -p^2/n = M^2}} \frac{(-p^2)^n}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}\right)^n \Pi(p^2) \tag{23}$$

这种定义方法的 Borel 变换算符是**无量纲**的。要注意，此时 Borel 变换是特殊的 Laplace 逆变换。$\frac{\tilde{f}(p^2)}{-p^2} = \tilde{f}_1(-p^2) \leftrightarrow \tilde{F}_1(\frac{1}{M^2}) = \tilde{F}(M^2)$

$$\tilde{F}(M^2) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}+\infty} \mathrm{e}^{-p^2/M^2}\frac{\tilde{f}(p^2)}{-p^2}\mathrm{d}(-p^2) \tag{24}$$

其反变换为

$$\frac{\tilde{f}(p^2)}{-p^2} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{p^2/M^2}\tilde{F}(M^2)\mathrm{d}\frac{1}{M^2} \tag{25}$$

具体的的应用有

$$\mathbb{B}_{M^2}[\Pi(p^2)] = \frac{1}{\pi M^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\Pi(s)\mathrm{e}^{-s/M^2}\mathrm{d}s \tag{26}$$

注意，很多文章还使用 $Q^2=-p^2$ 代替 p^2。Borel 变换有（一下的公式摘录/修改自黄涛教材，本人仅证明了前两条，后面的慎用）：

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{B}_{M^2}\left[(p^2)^k\right]=0,\ k\in\mathbb{N}\\
&\mathbb{B}_{M^2}\left[\frac{1}{(m^2-p^2)^k}\right]=\frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{e}^{-m^2/M^2}}{(M^2)^k},\ k>0\\
&\mathbb{B}_{M^2}\left[(p^2)^k\ln\frac{1}{(-p^2)}\right]=k!(M^2)^k\\
&\mathbb{B}_{M^2}\left[f(p^2)\right]=\frac{1}{\pi M^2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\ \mathrm{Im}(f(s))\mathrm{e}^{-s/M^2},\ \text{if } f(p^2) \text{ can be written as a dispersion integral.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(p^2)=\frac{1}{\pi M^2}\int_0^\infty \mathrm{d}m^2\frac{\mathrm{Im}\, f(m^2)}{m^2-p^2-\mathrm{i}\varepsilon}\\
&\mathbb{B}_{M^2}\left[(\frac{1}{-p^2})^k(\frac{1}{\ln(-p^2/\mu^2)})^\varepsilon\right]=\frac{1}{(k-1)!(M^2)^k}\left[\frac{1}{\ln(M^2/\mu^2)}\right]^\varepsilon\times\left[1+\mathcal{O}(\frac{1}{\ln(M^2/\mu^2)})\right]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

3 两个很重要的场论公式

这一节来自**知乎**答主**東雲正樹**（中山大学陈伟教授课题组研究生刘正树，2022 学年博士研究生）

1. 第一条公式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2-E^2+\mathrm{i}\varepsilon}=-\frac{1}{2E}[\theta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}+\theta(-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}],\ \text{where }\varepsilon\to 0 \tag{28}$$

这是因为当 $t>0$，取在上半平面的，半径无限大的上半圆 Γ 为闭合路径，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2-E^2+\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}\omega\frac{1}{2E}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega-(E-\mathrm{i}\varepsilon)}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+(E-\mathrm{i}\varepsilon)}\right]\\
&=\int_\Gamma\mathrm{d}\omega\frac{1}{2E}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega-(E-\mathrm{i}\varepsilon)}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+(E-\mathrm{i}\varepsilon)}\right]=-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}}{2E}
\end{aligned}
$$

显然上式第一项由于无奇点而为零。同理，当 $t<0$ 时，取在下半平面的，半径无限大的下半圆 Γ^- 为闭合路径，有

$$\int_{\Gamma^-}\mathrm{d}\omega\frac{1}{2E}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega-(E-\mathrm{i}\varepsilon)}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega+(E-\mathrm{i}\varepsilon)}\right]=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}}{2E}$$

综上所述，有 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega^2-E^2+\mathrm{i}\varepsilon}=-\frac{1}{2E}[\theta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}+\theta(-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}]$，where $\varepsilon\to 0$。

2. 第二条公式

$$\mathrm{Im}\frac{1}{m^2-p^2-\mathrm{i}\varepsilon}=\pi\delta(m^2-p^2),\ \text{where }\varepsilon\to 0 \tag{29}$$

这是因为 $\mathrm{Im}\frac{1}{m^2-p^2-\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{(m^2-p^2)^2+\varepsilon^2}=\pi\delta(m^2-p^2)$，最后一步是数学物理方法中学过的 δ 函数的 Lorentz 分布取极限的定义 $\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$。这个极限当 $x\neq 0$ 时趋于零，在 $x\to 0$ 时为 $\frac{1}{0}$ 的无穷发散。对其进行积分有 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\mathrm{arctan}\frac{x}{\varepsilon}|_{-\infty}^{\infty}=1$，符合 $\delta(x)$ 函数的定义。