四元数

目录

---

1 四元数

1.1 四元数的定义与运算

四元数含有四个基 $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$，后三个基平方为零且相互之间满足反对易，即

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1,\ \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},\ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j},\ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i},\ \mathrm{ijk} = -1 \tag{1}$$

四元数集合 $\mathbb{H} = \{A = (a_0, \mathbf{a}) | a_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ 中，任意一个四元数 a 记为

$$A = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k} = (a_0, \mathbf{a}),\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \tag{2}$$

其中，矢量 $\mathbf{a}$ 为简化记法。加法和乘法定义为

$$A + B = (a_0 + b_0, \mathbf{a} + \mathbf{b}) \tag{3}$$

$$AB = (a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, a_0\mathbf{b}, b_0\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{4}$$

可见，加法满足结合律和交换律 $(A + B) + C = A + (B + C)$，$A + B = B + A$，乘法满足结合律和分配律 $(AB)C = A(BC)$，$A(B + C) = AB + AC$。但是乘法一般不满足结合律 $AB \neq BA$。但是当 $\mathbf{a}//\mathbf{b}$ 或者 $\mathbf{a} = 0$ 或者 $\mathbf{b} = 0$ 的时候，满足乘法交换律 $AB = BA$。

小练习：

$$(0, \mathbf{a})^n = \begin{cases} (-)^{n/2} a^n, & (n = 0, 2, 4, ... \in even) \\ (-)^{(n-1)/2} a^n \hat{\mathbf{a}}, & (n = 1, 3, 5, ... \in odd) \end{cases} \tag{5}$$

1.2 四元数的模与逆

定义 $A = a_0 + \mathbf{a}$ 的模和模方分别为

$$|A| = \sqrt{a_0^2 + |\mathbf{a}|^2},\ |A|^2 = a_0^2 + |\mathbf{a}|^2 \tag{6}$$

有常用公式

$$|AB| = |A||B| \tag{7}$$

定义共轭为 $= a_0 - \mathbf{a}$，因此有

$$|A|^2 = A\tilde{A} = \tilde{A}A \tag{8}$$

因此，当 $A \neq 0$ 的时候，A 的逆 A^{-1} 可以唯一地取为

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|^2},\ AA^{-1} = A^{-1}A = 1 \tag{9}$$

易证

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{10}$$

1.3 四元数的指数表示

定义对于四元数 $A = a_0 + \mathbf{a}$ 有指数表示

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \tag{11}$$

由于四元数的基 1 与其他三个基 i, j, k 对易，有（使用了公式 5）

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{a_0}\mathrm{e}^{\mathbf{a}} = \mathrm{e}^{a_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{a}^n}{n!} = \mathrm{e}^{a_0}(\cos a + \hat{\mathbf{a}}\sin a) \tag{12}$$

由于两个四元数之间的对易关系为 $[A, B] = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$，且有 $[A, [A, B]] = [[A, B], B] = 0$，因此有 Baker–Campbell–Hausdorff 公式（BCH 公式）

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}\mathrm{e}^{[A,B]/2} = \mathrm{e}^{A+B+[A,B]/2} = \mathrm{e}^{A+B+\mathbf{a}\times\mathbf{b}} \tag{13}$$

1.4 四元数的共轭与转置

若不要求四元数 a_0, a_1, a_2, a_3 为实数，则有：
四元共轭定义为：$\tilde{A} = a_0 - a_1\mathrm{i} - a_2\mathrm{j} - a_3\mathrm{k}$
反共轭：$A^{\mathrm{C}} = a_0^* + a_1^*\mathrm{i} + a_2^*\mathrm{j} + A_3^*\mathrm{k}$
转置为：$A^{\mathrm{T}} = a_0 + a_1\mathrm{i} - a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$
复共轭为：$A^* = a_0^* - a_1^*\mathrm{i} + a_2^*\mathrm{j} - a_3^*\mathrm{k}$
厄密共轭：$A^\dagger = a_0^* - a_1^*\mathrm{i} - a_2^*\mathrm{j} - a_3^*\mathrm{k}$
若要求四元数 a_0, a_1, a_2, a_3 为实数，则四元共轭等于厄密共轭。

1.5 四元数的矩阵表示

将四元数的四个基 1, i, j, k 分别对应以下四个矩阵

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{i} \leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_1 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{j} \leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_2 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{k} \leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_3 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

以上四个矩阵的后三个为 $SU(2)$ 群生成元乘以 i，可以线性组合出任何二阶无迹反厄密矩阵。任何一个四元数 $A = a_0 + \mathbf{a}$ 都可以用矩阵表示

$$A = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 + \mathrm{i}a_3 & \mathrm{i}a_1 + a_2 \\ \mathrm{i}a_1 - a_2 & a_0 - \mathrm{i}a_3 \end{pmatrix} = M = a_0 I + \mathrm{i}Q,\ Q = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - \mathrm{i}a_2 \\ a_1 + \mathrm{i}a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

观察上式 Q 与 $SU(2)$ 群元素 U 很类似，如果要求 $a_0 = 0$ 且 $|A| = 1$（或者 $\det(Q) = 1$）则 $Q = U$。易证得

$$|A|^2 = \det(M) \tag{16}$$

易证四元数的加法和乘法同构于以上矩阵的加法和乘法。（但是注意，这一节的同构关系与下一节的没有关系）

1.6 四元数与三维旋转

模长为 1 的四元数组成的集合同构于 $SU(2)$ 群，因此模长为 1 的四元数与三维旋转 $SO(3)$ 存在 2:1 同态关系。

任何一个模一的四元数都可以表示为 $A=(\cos\frac{\theta}{2},\mathbf{n}\sin\frac{\theta}{2})$，$A^{-1}=\tilde{A}$。对于任何一个三维的矢量 $(0,\mathbf{x})$，绕旋转轴矢量方向 $\mathbf{n}$（满足归一化条件 $|\mathbf{n}|=1$）旋转 θ 角度（右手点赞式旋转）后的矢量 $(0,\mathbf{x}')$ 可以表示为

$$(0,\mathbf{x}')=A(0,\mathbf{x})A^{-1}=(0,R\mathbf{x}),\ \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \tag{17}$$

其中 $R=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}$，$\mathbf{J}=(J_1,J_2,J_3)$ 为三维矢量旋转矩阵。

以上的说法其实在群论中讲 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 存在 $2:1$ 的关系。只不过要看到这一点，还需要知道模长为 1 的四元数组成的集合与 $SU(2)$ 群的同构关系。在群论中有以下常见公式与上式对应

$$\mathbf{x}'=U\mathbf{x}\cdot\sigma U^{-1}=(R\mathbf{x})\cdot\sigma,\ \sigma=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z) \tag{18}$$

由同构关系可得 $A\leftrightarrow U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}$，$U\in SU(2)$，$(0,\mathbf{x})\leftrightarrow\mathbf{x}\cdot\sigma$，$(0,\mathbf{x}')\leftrightarrow\mathbf{x}'\cdot\sigma$，根据这些公式就不难看出上面的长篇大论了。

1.6.1 一些没什么用的补充资料

$R=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}$ 为三维矢量旋转矩阵，其中 $J_i^{ab}=-\mathrm{i}\epsilon^{iab}$，即

$$J_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\ J_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\ J_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{19}$$

根据公式（用于指数 e 的展开式，$m\geq 0$）

$$(-\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})^{2m+1}=(-)^m\begin{pmatrix}0&-n_z&n_y\\n_z&0&-n_x\\-n_y&n_x&0\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$(-\mathrm{i}\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})^{2m}=(-)^m\begin{pmatrix}1-n_x^2&-n_xn_y&-n_xn_z\\-n_xn_y&1-n_y^2&-n_yn_z\\-n_xn_z&-n_yn_z&1-n_z^2\end{pmatrix} \tag{21}$$

最终有

$$R=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}}=\begin{pmatrix}n_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta&n_xn_y(1-\cos\theta)-n_z\sin\theta&n_xn_z(1-\cos\theta)+n_y\sin\theta\\n_xn_y(1-\cos\theta)+n_z\sin\theta&n_y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta&n_yn_z(1-\cos\theta)-n_y\sin\theta\\n_xn_z(1-\cos\theta)-n_y\sin\theta&n_yn_z(1-\cos\theta)+n_x\sin\theta&n_z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta\end{pmatrix} \tag{22}$$

至于 $SU(2)$ 群元

$$U=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\sigma}=-\mathrm{i}(\mathbf{n}\cdot\sigma)\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}n_z\sin\frac{\theta}{2}&-\mathrm{i}n_x\sin\frac{\theta}{2}-n_y\sin\frac{\theta}{2}\\-\mathrm{i}n_x\sin\frac{\theta}{2}+n_y\sin\frac{\theta}{2}&\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}n_z\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{23}$$