强子试探流
Interpolating Current

目录

---

1 旋量场 CP 变换的几个重要的关系式

$$
\begin{aligned}
&P^{-1}\psi(x)P = D(\mathcal{P})\psi(\mathcal{P}x), \quad P^{-1}\bar{\psi}(x)P = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\\
&C^{-1}\psi(x)C = \zeta_C^*\psi^C(x), \quad \psi^C(x) \equiv \mathcal{C}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x), \quad C^{-1}\bar{\psi}(x)C = \zeta_C\bar{\psi}^C(x), \quad \bar{\psi}^C(x) \equiv \psi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\\
&D(\mathcal{P}) = \zeta_P^*\gamma^0, \quad D^{-1}(\mathcal{P}) = D^{\dagger}(\mathcal{P}) = \zeta_P\gamma^0, \quad \zeta_P^*\zeta_P = 1\\
&\mathcal{C} = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^2, \quad \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^{\dagger} = \mathcal{C}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}, \quad \zeta_C^*\zeta_C = 1\\
&D(\mathcal{T}) \equiv \zeta_T^*\mathcal{C}\gamma^5, \quad \zeta_T^*\zeta_T = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{0,2,5}^{\mathrm{T}} = \gamma_{0,2,5}，\gamma_{1,3}^{\mathrm{T}} = -\gamma_{1,3}，\gamma_{0,5}^{\dagger} = \gamma_{0,5}，\gamma_i^{\dagger} = -\gamma_i(i=1,2,3)，(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0\\
&C(\gamma^{\mu})^{\mathrm{T}}C = \gamma^{\mu}，\mathcal{C}\gamma^5 = \gamma^5\mathcal{C}
\end{aligned}
$$

注意，作用有

$$
\begin{aligned}
D^{-1}(\mathcal{P})\gamma_{\mu}D(\mathcal{P}) &= (P^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\gamma_{\nu}\\
\mathcal{P}^{-1}\partial_{\mu}\mathcal{P} &= (P^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\partial_{\nu}
\end{aligned}
$$

2 试探流（Interpolating Current）

流类似“场算符”。根据量子力学基本原理之一——自旋统计原理，仅由夸克组成的体系的总波函数要满足全反对称（antisymmetric）：$\mathcal{A}\{Flavor\otimes Color\otimes Spin\otimes Orbital\}$，场算符对应的物理态为 $\phi(x)|0\rangle$（这是标量场的例子），因此，构造的算符也要满足以上的反对称性，以保证总的态具有反对称性。

2.1 介子（mesons）流

参考文章 https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90065-1

以下的流量子数分别为 $0^{++},0^{-+},1^{--},1^{++},1^{+-},2^{++},2^{-+}$。

1. $j_S=\bar{q}_iq_i,\quad J^{PC}=0^{++}$
   P 宇称：$P^{-1}\bar{q}_i(x)q_i(x)P=P^{-1}\bar{q}_i(x)PP^{-1}q_i(x)P=\bar{q}_i(\mathcal{P}x)q_i(\mathcal{P}x)$
   C 宇称：$C^{-1}\bar{q}_i(x)q_i(x)C=C^{-1}\bar{q}_i(x)CC^{-1}q_i(x)C=\bar{q}_i(x)q_i(x)$

2. $j_P=\mathrm{i}\bar{q}_i\gamma_5q_i,\quad J^{PC}=0^{-+}$
   P 宇称：$P^{-1}j_PP=\mathrm{i}\bar{q}_i(\mathcal{P}x)D^{-1}(\mathcal{P})\gamma_5D(\mathcal{P})q_i(\mathcal{P}x)=-\mathrm{i}\bar{q}_i(\mathcal{P}x)\gamma_5q_i(\mathcal{P}x)$
   C 宇称：$C^{-1}j_PC=\mathrm{i}\bar{q}_i(x)\gamma_5q_i(x)$

3. $j_V=\bar{q}_i\gamma_\mu q_i,\quad J^{PC}=1^{--}$，这里 P 宇称严格来说应该是 $[-]^\mu$，但是看空间部分也没啥问题（**注：这里 $[-]^0=+1,[-]^{1,2,3}=-1$，这里只是个记号，不要看成是-1 的 μ 次幂**）
   P 宇称：$P^{-1}\bar{q}_i(x)\gamma_\mu q_i(x)P=(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\bar{q}_i(\mathcal{P}x)\gamma_\nu q_i(\mathcal{P}x)$
   C 宇称：$C^{-1}\bar{q}_i(x)\gamma_\mu q_i(x)C=-\bar{q}_i(x)\gamma_\mu q_i(x)$

4. $j_A=\eta_{\mu\nu}\bar{q}_i\gamma_\nu\gamma_5q_i,\quad \eta_{\mu\nu}=\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}-g_{\mu\nu},\quad J^{PC}=1^{++}$，同理，P 宇称应该是 $-[-]^\mu$，此处看空间部分
   P 宇称：$P^{-1}\eta_{\mu\nu}\bar{q}_i(x)\gamma_\nu\gamma_5q_i(x)P=-(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu\mathcal{P}^\nu{}_\beta(\mathcal{P}^{-1})^\sigma{}_\nu\eta_{\alpha\beta}\bar{q}_i(\mathcal{P}x)\gamma_\sigma\gamma_5q_i(\mathcal{P}x)=-(\mathcal{P}^{-1})^\rho{}_\mu\eta_{\rho\nu}\bar{q}_i\gamma_\nu\gamma_5q_i$
   C 宇称：$C^{-1}\eta_{\mu\nu}\bar{q}_i(x)\gamma_\nu\gamma_5q_i(x)C=\eta_{\mu\nu}\bar{q}_j(x)\gamma_\nu\gamma_5q_i(x)$

5. $j_{A'}=\bar{q}_i\partial_\mu\gamma_5q_i,\quad J^{PC}=1^{+-}$（**注意**，转置两个旋量场会交换两者的位置，为了与反对易关系相匹配，必须引进一个额外的负号）
   P 宇称：$P^{-1}\bar{q}_i(x)\partial_\mu\gamma_5q_i(x)P=-(\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu\bar{q}_i(\mathcal{P}x)\partial_\nu\gamma_5q_i(\mathcal{P}x)$
   C 宇称：$C^{-1}\bar{q}_i(x)\partial_\mu\gamma_5q_i(x)C=-q_i^{\mathrm{T}}\partial_\mu\gamma_5\bar{q}_i^{\mathrm{T}}=-\partial_\mu(q_i^{\mathrm{T}}\gamma_5q_i^{\mathrm{T}})+(\partial_\mu q_i^{\mathrm{T}})\gamma_5\bar{q}_i^{\mathrm{T}}=-\bar{q}_i(x)\gamma_5\partial_\mu q_i(x)$

6. $j_T=\mathrm{i}\bar{q}_i(\gamma_\mu\partial_\nu+\gamma_\nu\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\not{\partial})q_i,\quad J^{PC}=2^{++}$
   P 宇称：$P^{-1}\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\mu\partial_\nu+\gamma_\nu\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\not{\partial})q_i(x)P=(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\nu\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\alpha\partial_\beta+\gamma_\beta\partial_\alpha+\frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\not{\partial})q_i(x)$
   C 宇称：$C^{-1}\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\mu\partial_\nu+\gamma_\nu\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\not{\partial})q_i(x)C=\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\mu\partial_\nu+\gamma_\nu\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\not{\partial})q_i(x)$

7. $j_{T'}=\mathrm{i}\bar{q}_i(\gamma_\mu\gamma_5\partial_\nu+\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\gamma_5\not{\partial})q_i,\quad J^{PC}=2^{-+}$
   P 宇称：$P^{-1}\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\mu\gamma_5\partial_\nu+\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\gamma_5\not{\partial})q_i(x)P=-(\mathcal{P}^{-1})^\alpha{}_\mu(\mathcal{P}^{-1})^\beta{}_\nu\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\alpha\gamma_5\partial_\beta+\gamma_\beta\gamma_5\partial_\alpha+\frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\gamma_5\not{\partial})q_i(x)$
   C 宇称：$C^{-1}\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\mu\gamma_5\partial_\nu+\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\gamma_5\not{\partial})q_i(x)C=\mathrm{i}\bar{q}_i(x)(\gamma_\mu\gamma_5\partial_\nu+\gamma_\nu\gamma_5\partial_\mu+\frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\gamma_5\not{\partial})q_i(x)$

其中 $i=1,2,3$ 是色指标。介子流的形式为 $\bar{\psi}\Gamma\psi$，其中 Γ 可以是局域算符（Local Operaters）的结构：

$$\Gamma=1,\gamma^5,\gamma_\mu,\gamma^5\gamma_\mu,\sigma_{\mu\nu},\gamma^5\sigma_{\mu\nu}\tag{1}$$

也可以是非局域算符（Non-local Operaters）的结构：

$$\overleftrightarrow{D}_\mu,\gamma_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu,,\gamma^5\gamma_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu,\{\overleftrightarrow{D}_\mu,\overleftrightarrow{D}_\nu\}\tag{2}$$

其中 $D_\mu\equiv\partial_\mu-\mathrm{i}g_sA_\mu^a\frac{\lambda^a}{2}$，$\frac{\lambda^a}{2}$ 为 Gellmann 矩阵。

简述 ∂_μ 与 γ_μ 的作用：这两者都具有一阶张量的形式，对于 P 字称 $P^{-1}\partial_\mu P = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu$ 与 $D^{-1}(\mathcal{P})\gamma_\mu D(\mathcal{P}) = (\mathcal{P}^{-1})^\nu{}_\mu \gamma_\nu$ 相似，但是具体 P 字称是什么还要取决于 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 中的 Γ。但是对于 C 字称 $C^{-1}\partial_\mu C = \partial_\mu$ 与 $(\gamma_\mu)^C = \mathcal{C}^{-1}(\gamma_\mu)^{\mathrm{T}}\mathcal{C} = -\gamma_\mu$，看似可以通过替换得到一对 $C = \pm 1$ 的流，但还要取决于 $\bar{\psi}\Gamma\psi$ 中的 Γ。

γ_5 的作用：由于 γ_5 与 $\mathcal{C}$ 对易，但是 $\mathcal{P}^{-1}\gamma_5\mathcal{P} = -\gamma_5$，增加一个 γ_5 不会改变 C 字称，但是会改变 P 字称。

留下疑问：

1. 有没有 $j = \bar{q}_i\mathcal{C}q_i$？$J^{PC} = 0^{--}$？（$C^{-1}\bar{q}_i\mathcal{C}q_iC = -q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\bar{q}_i^{\mathrm{T}} = \bar{q}_i\mathcal{C}^{\mathrm{T}}q_i = -\bar{q}_i\mathcal{C}q_i$）

   那么有没有 $j = \bar{q}_iD(\mathcal{T})q_i = \zeta_T^*\bar{q}_i\mathcal{C}\gamma^5q_i$ 呢？$J^{PC} = 0^{+-}$？

2. $j = \bar{q}_i\partial_\mu\mathcal{C}\gamma_5q_i$，$J^{PC} = 1^{-+}$？

3. $2^{+-}, 2^{--}$ 如何做出？

表 1: 介子流

$\bar{q}\Gamma q$	J^{PC}
$j_S = \bar{q}_iq_i$	0^{++}
$j_P = \mathrm{i}\bar{q}_i\gamma^5q_i$	0^{-+}
$(j_V)_\mu = \bar{q}_i\gamma_\mu q_i$	1^{--}
$(j_A)_\mu = \bar{q}_i\gamma_\mu\gamma^5q_i$	1^{++}
$(j_{A'})_\mu = \bar{q}_i\partial^\mu\gamma^5q_i$	1^{+-}
$(j_T)_{\mu\nu} = \mathrm{i}\bar{q}_i(\gamma_\mu\partial_\nu + \gamma_\nu\partial_\mu + \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\partial\!\!\!/)q_i$	2^{++}
$(j_{T'})_{\mu\nu} = \mathrm{i}\bar{q}_i(\gamma_\mu\gamma^5\partial_\nu + \gamma_\nu\gamma^5\partial_\mu + \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\gamma^5\partial\!\!\!/)q_i$	2^{-+}

其中 $\eta_{\mu\nu} = q_\mu q_\nu/q^2 - g_{\mu\nu}$

表 2: 其他可能的介子流

$\bar{q}\Gamma q$	J^{PC}
$\bar{q}_i\sigma_{\mu\nu}q_i$	$1^{+-}, 1^{--}$
$\bar{q}_i\overleftrightarrow{D}_\mu q_i$	$0^{+-}, 1^{--}$
$\bar{q}_i(\gamma_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu - \gamma_\nu\overleftrightarrow{D}_\mu)q_i$	$1^{++}, 1^{-+}$
$\bar{q}_i(\gamma_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu\overleftrightarrow{D}_\mu)q_i$	$0^{++}, 1^{-+}, 2^{++}$
$\bar{q}_i(\gamma^5\gamma_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma^5\gamma_\nu\overleftrightarrow{D}_\mu)q_i$	$0^{--}, 1^{+-}, 2^{--}$
$\bar{q}_i(\overleftrightarrow{D}_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu + \overleftrightarrow{D}_\nu\overleftrightarrow{D}_\mu)q_i$	$0^{++}, 1^{-+}, 2^{++}$
$\bar{q}_i(\gamma^5\overleftrightarrow{D}_\mu\overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma^5\overleftrightarrow{D}_\nu\overleftrightarrow{D}_\mu)q_i$	$0^{-+}, 1^{++}, 2^{-+}$

其中 $\psi\overleftrightarrow{D}_\mu\phi \equiv \psi(D_\mu\phi) - (D_\mu\psi)\phi \equiv \psi\phi_{;\mu} - \psi_{;\mu}\phi$，$D_\mu \equiv \partial_\mu - \mathrm{i}g_sA_\mu^a\frac{\lambda^a}{2}$，$\frac{\lambda^a}{2}$ 为 Gellmann 矩阵

2.2 混杂态（hybrid）流

这里混杂态流的讨论仅包含正反夸克加上一个胶子的情况。

看懂了但是不会算，先不写了，会了再写。

2.3 双夸克（diquark）流

对于双夸克流算符，味道和颜色结构是纠缠在一起的。双夸克流算符的性质如表 3。

表 3: 双夸克流的性质

$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma q_j, \bar{q}_i\Gamma\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	J^P	States	(Flavor, Color)
$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 q_j, \bar{q}_i\gamma^5\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	0^+	${}^1S_0$	$(6_f,6_c),(\overline{3}_f,\overline{3}_c)$
$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}q_j, \bar{q}_i\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	0^-	${}^3P_0$	$(6_f,6_c),(\overline{3}_f,\overline{3}_c)$
$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\gamma^5 q_j, \bar{q}_i\gamma_\mu\gamma^5\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	1^-	${}^3P_1$	$(6_f,6_c),(\overline{3}_f,\overline{3}_c)$
$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu q_j, \bar{q}_i\gamma_\mu\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	1^+	${}^3S_1$	$(6_f,\overline{3}_c),(\overline{3}_f,6_c)$
$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\sigma_{\mu\nu}q_j, \bar{q}_i\sigma_{\mu\nu}\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	$\begin{cases} 1^-,\ for\ \mu,\nu=1,2,3 \\ 1^+,\ for\ \mu=0,\nu=1,2,3 \end{cases}$	$\begin{cases} {}^1P_1 \\ {}^3S_1 \end{cases}$	$(6_f,\overline{3}_c),(\overline{3}_f,6_c)$
$q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\sigma_{\mu\nu}\gamma^5 q_j, \bar{q}_i\sigma_{\mu\nu}\gamma^5\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}}$	$\begin{cases} 1^+,\ for\ \mu,\nu=1,2,3 \\ 1^-,\ for\ \mu=0,\nu=1,2,3 \end{cases}$	$\begin{cases} {}^3S_1 \\ {}^1P_1 \end{cases}$	$(6_f,\overline{3}_c),(\overline{3}_f,6_c)$

其中下标 i,j 为色指标。注意，以上的 $6_f,\overline{3}_f,6_c,\overline{3}_c$ 分别代表着全对称（两个杨图格子在同一行）味道结构、全反对称（两个杨图格子在同一列）味道结构、全对称颜色结构、全反对称颜色结构。颜色和味道的纠缠对称性可以通过转置算符得到，例如 $(q_i^{\mathrm{T}}\Gamma q_j)^{\mathrm{T}} = -q_j^{\mathrm{T}}\Gamma^{\mathrm{T}}q_i = \pm q_j^{\mathrm{T}}\Gamma q_i$，其中 “+” 代表颜色和味道的对称性直积为对称，“$-$” 则为反对称。其中以上讨论的双夸克流中的两个夸克味道是相同的，因此只有夸克味道对称态 6_f，以及反夸克味道反对称态 $\overline{3}_f$。另外要注意的是第一列和最后一列虽然每个空格都有两列，但是对应关系是 $q_i^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\Gamma q_j \to (6_f,6_c),(\overline{3}_f,\overline{3}_c)$ 同时 $\bar{q}_i\Gamma\mathcal{C}\bar{q}_j^{\mathrm{T}} \to (6_f,6_c),(\overline{3}_f,\overline{3}_c)$，意味着正反夸克都一样。

2.3.1 四夸克（tetraquark）流

四夸克态的流中双夸克 qq 必须与反双夸克 $\bar{q}\bar{q}$ 的颜色结构保持一致，目的是构造**色单态**算符。（The diquark qq and anti-diquark $\bar{q}\bar{q}$ fields should have the same color structure to compose a color singlet tetraquark operator）

以下是给出四夸克态流。

对于算符 $\mathcal{O}_{ij} = q_i^{\mathrm{T}}\Gamma q_j$，有 C 变换

$$C^{-1}\mathcal{O}_{ij}C = \mathcal{O}_{ji} \tag{3}$$

即算符转置 $C^{-1}\mathcal{O}C = \mathcal{O}^{\mathrm{T}}$。

定义味道对称部分 $\mathcal{S}$ 和反味道对称部分 $\mathcal{A}$：

$$\mathcal{S} = \mathcal{O} + \mathcal{O}^{\mathrm{T}},\ \mathcal{A} = \mathcal{O} - \mathcal{O}^{\mathrm{T}} \begin{cases} \mathcal{S}^6 = \mathcal{O}^6 + \mathcal{O}^{6\mathrm{T}},\ \mathcal{S}^3 = \mathcal{O}^3 + \mathcal{O}^{3\mathrm{T}} \\ \mathcal{A}^6 = \mathcal{O}^6 - \mathcal{O}^{6\mathrm{T}},\ \mathcal{A}^3 = \mathcal{O}_3 - \mathcal{O}^{3\mathrm{T}} \end{cases} \tag{4}$$

那么，可以构造 $J^{PC} = 0^{-+}, 0^{--}$ 的流。考虑到表 4中有六个 $J^P = 0^+, 0^-$ 的态，那么可以构造

$$\begin{aligned} J_1 &= \mathcal{S}^6_{21}(\text{ or } \mathcal{A}^6_{21}) \\ J_2 &= \mathcal{O}^3_{56} \\ J_3 &= \mathcal{S}^6_{43}(\text{ or } \mathcal{A}^6_{43}) \\ J_4 &= \mathcal{S}^3_{43}(\text{ or } \mathcal{A}^3_{43}) \\ J_5 &= \mathcal{S}^3_{21}(\text{ or } \mathcal{A}^3_{21}) \\ J_6 &= \mathcal{O}^6_{56} \end{aligned} \tag{5}$$

表 4: 部分四夸克流的性质

两个夸克的算符之间轨道角动量为 $L=0$，因此总宇称是两个算符直接相乘

			1	2	3	4	5	6
	$\mathcal{O}=\mathcal{X}_{ij}\bar{\mathcal{X}}_{ij}$	$\bar{\mathcal{X}}_{ij}$	${\bar{q}^1}_i\gamma^5\mathcal{C}{\bar{q}^2}_j^{\mathrm{T}}$	${\bar{q}^1}_i\mathcal{C}{\bar{q}^2}_j^{\mathrm{T}}$	${\bar{q}^1}_i\gamma_\mu\gamma^5\mathcal{C}{\bar{q}^2}_j^{\mathrm{T}}$	${\bar{q}^1}_i\gamma_\mu\mathcal{C}{\bar{q}^2}_j^{\mathrm{T}}$	${\bar{q}^1}_i\sigma_{\mu\nu}\mathcal{C}{\bar{q}^2}_j^{\mathrm{T}}$	${\bar{q}^1}_i\sigma_{\mu\nu}\gamma^5\mathcal{C}{\bar{q}^2}_j^{\mathrm{T}}$
	$\mathcal{X}_{ij}$	J^P	0^+	0^-	1^-	1^+	1^-	1^+
1	$q_i^{1\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 q_j^2$	0^+	0^+	0^-	1^-	1^+	$-$	$-$
2	$q_i^{1\mathrm{T}}\mathcal{C} q_j^2$	0^-	0^-	0^+	1^+	1^-	$-$	$-$
3	$q_i^{1\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\gamma^5 q_j^2$	1^-	1^-	1^+	0^+	0^-	1^+	1^-
4	$q_i^{1\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu q_j^2$	1^+	1^+	1^-	0^-	0^+	1^-	1^+
5	$q_i^{1\mathrm{T}}\mathcal{C}\sigma_{\mu\nu} q_j^2$	1^-	$-$	$-$	1^+	1^-	0^+	0^-
6	$q_i^{1\mathrm{T}}\mathcal{C}\sigma_{\mu\nu}\gamma^5 q_j^2$	1^+	$-$	$-$	1^-	1^+	0^-	0^+

其中 q^1, q^2 可以代表不同味道的夸克场算符。双夸克算符 $\bar{\mathcal{X}}_{ij}$（第一行），等价于 $\pm\mathcal{X}_{ji}^\dagger$（算符头上加横杠的操作一开始是对费米子算符来说的，就是那些形式上不是数（如偶数个夸克的流 $\mathcal{O}=\bar{q}q\bar{q}q$），而是旋量的那种（如奇数个夸克的流 $\mathcal{O}=\bar{q}qq$）来说的，但是这里不管了，统一都加横杠，因为目的都一样，都是要构成厄密的可观测量 $\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}}$ 或者 $\mathcal{X}\mathcal{X}^\dagger$）。

2.3.2 四夸克分子模型

基本思想是将正反夸克流（类似介子）乘在一起。

2.3.3 重子（baryon）的 Ioffe 流

Ioffe currents, also interpolating current. 其中一种是 $L=0, J^P=\frac{1}{2}^+$ 的 $\eta(x)=\epsilon^{abc}[q_1^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu q_2^b(x)]\gamma^\mu\gamma^5 q_3^c(x)$，另一种是 $L=0, J^P=\frac{3}{2}^+$ 的 $\eta_\mu(x)=\epsilon^{abc}[q_1^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu q_2^b(x)]q_3^c(x)$。

以下给出重子（baryon）的 Ioffe 流，但是**注意，以下仅每组同位旋多重态中第三分量最大的粒子的流结构，其他粒子需按照夸克组分重新推导。**

命名：三个 u 夸克或 d 夸克为 Δ。一个 s 夸克为 Σ，两个 s 夸克为 Ξ，三个 s 夸克为 Ω。

对于 $L=0, J^P=\frac{1}{2}^+$ 重子八重态 octet，有

1. pn 质子中子 $I=\frac{1}{2}, I_3=-1,+\mathbf{1}$：$J^N(x)=\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu d^c(x)$
2. $\Sigma^{-,0,+}$ 粒子 $I=1, I_3=-1,0,+\mathbf{1}$：$J^\Sigma(x)=\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu s^c(x)$
3. $\Xi^{-,0}$ 粒子 $I=\frac{1}{2}, I_3=-1,+\mathbf{1}$：$J^\Xi(x)=-\epsilon^{abc}[s^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu s^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu u^c(x)$
4. Λ 粒子 $I, I_3=\mathbf{0}$：$J^\Lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{3}}\epsilon^{abc}\{[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu s^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu d^c(x)-[d^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu s^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu u^c(x)\}$

对于 $L=0, J^P=\frac{3}{2}^+$ 的重子十重态 decuplet，有

1. $\Delta^{-,0,+,++}$ 粒子 $I=\frac{3}{2}, I_3=-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},+\mathbf{\frac{3}{2}}$：$J_\mu^\Delta(x)=\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]u^c(x)$
2. $\Sigma^{-,0,+}$ 粒子 $I=1, I_3=-1,0,+\mathbf{1}$：$J_\mu^{\Sigma^*}(x)=\sqrt{\frac{1}{3}}\epsilon^{abc}\{2[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu s^b(x)]u^c(x)+[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]s^c(x)\}$
3. $\Xi^{-,0}$ 粒子 $I=\frac{1}{2}, I_3=-\frac{1}{2},+\mathbf{\frac{1}{2}}$：$J_\mu^{\Xi^*}(x)=\sqrt{\frac{1}{3}}\epsilon^{abc}\{2[s^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]s^c(x)+[s^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu s^b(x)]u^c(x)\}$
4. Ω^- 粒子 $I, I_3=\mathbf{0}$：$J_\mu^\Omega(x)=\epsilon^{abc}[s^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu s^b(x)]s^c(x)$

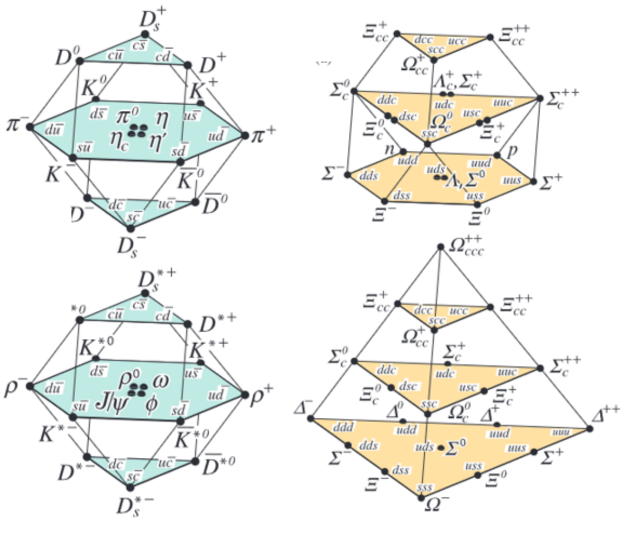

图 1: 强子多重态

3 关于试探流的讨论

可以说，其实“流”这个词就是多夸克“场算符”的别称，按理来说“流”一般会具有目标粒子类型（玻色子、费米子；标量、旋量等等）场算符的性质（P、C 变换）。但是根据杨梓桁师兄说的

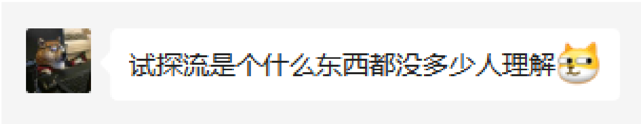

图 2: 来自杨梓桁师兄的评价

Ioffe 流的讨论如下：

首先要保证构造出来的多夸克态“场算符”有类似费米子/玻色子（根据需要）场算符的性质，现在有的东西是夸克（费米子）的算符。

3.1 角动量

由于只能通过夸克场算符构造，最熟悉的方法便是两个夸克场算符之间构造狄拉克场双线性型（$\bar{\psi}\Gamma\psi$，就是标量、赝标量、矢量、赝矢量、二阶张量）。如果目标场算符是玻色子（偶数个夸克）的话，就直接把两个两个地构造 $\bar{\psi}\Gamma\psi$；如果目标是是费米子的话会使用 $\bar{\psi^C}\Gamma\psi$，$\bar{\psi^C}=\psi^{\mathrm{T}}\mathcal{C}$，但是裸露一个夸克场（据陈绪梁学长说这是因为之前也有人用双线性型构造，如 $\epsilon^{abc}u^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^\mu u^b\gamma^5\gamma_\mu d^c$，也能保证角动量、P 宇称、C 宇称等量子数，但是这一类的流的计算结果与实验吻合得不好，另外一个原因是 Ioffe 一开始用的就是这样的构造，大家习惯了）。要注意，狄拉克场双线性型在位置空间是个 1×1 的“数”，计算的时候可以随便挪动。（如 $[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]\gamma^0=\gamma^0[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]$）

（这样的流不被推荐：$\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\sigma_{\mu\nu}u^b(x)]\gamma^5\sigma^{\mu\nu}d^c(x)$。Finally, it is possible to choose currents in such a way that the two-point functions are dominated by the perturbative contribution, with the condensate terms producing a hierarchical set of corrections. This last requirement suggests to use the current $\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu d^c(x)$, instead of $\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\sigma_{\mu\nu}u^b(x)]\gamma^5\sigma^{\mu\nu}d^c(x)$, to interpolate the proton.）

※ 轨道 orbit 角动量 L：由于自旋角动量已经使用了 Dirac 矩阵的 Lorentz 指标，因此轨道角动量只能使用 $1(L=0),\partial_\mu(L=1),\partial_\mu\partial_\nu(L=2)$ 等等来表示角动量的大小。

暴力计算。根据 $S^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$，$(\gamma^\mu)^\dagger=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$，$(\gamma^\mu)^{\mathrm{T}}=\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}$ 先证明两个关系

$$
\begin{aligned}
D(\Lambda)&=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n(S^{\mu\nu})^n\\
D^\dagger(\Lambda)&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n[(S^{\mu\nu})^n]^\dagger=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n(-\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^\dagger)^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu})^n(\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger}-\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{\nu\dagger})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu})^n\gamma^0(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)^n\gamma^0\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n\gamma^0(S^{\mu\nu})^n\gamma^0=\gamma^0\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\gamma^0=\gamma^0D^{-1}(\Lambda)\gamma^0 \qquad (6)\\
D^{\mathrm{T}}(\Lambda)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n[(S^{\mu\nu})^n]^{\mathrm{T}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n(\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]^{\mathrm{T}})^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu})^n(\gamma^{\nu\mathrm{T}}\gamma^{\mu\mathrm{T}}-\gamma^{\mu\mathrm{T}}\gamma^{\nu\mathrm{T}})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu})^n\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)^n\mathcal{C}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu})^n\mathcal{C}^{-1}(S^{\mu\nu})^n\mathcal{C}=\mathcal{C}^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}\mathcal{C}=\mathcal{C}^{-1}D^{-1}(\Lambda)\mathcal{C}=\mathcal{C}D^{-1}(\Lambda)\mathcal{C}^{-1}
\end{aligned}
$$

注意关系 $\psi'_a(x') = U^{-1}(\Lambda)\psi_a(x')U(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda)\psi_b(x)$，$x' = \Lambda x$，注意，如果该式左边的指标看作行指标则右边也要看成行指标，若是列指标则右边要转置，把列指标放最右边，即 $U^{-1}(\Lambda)\psi(x)U(\Lambda) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x), U^{-1}(\Lambda)\psi^\dagger(x)U(\Lambda) = \psi^\dagger(\Lambda^{-1}x)D^\dagger(\Lambda), U^{-1}(\Lambda)\psi^{\mathrm{T}}(x)U(\Lambda) = \psi^{\mathrm{T}}(\Lambda^{-1}x)D^{\mathrm{T}}(\Lambda)$。旋量空间的"Lorentz"变换可以看作是 $D^{-1}(\Lambda)\Gamma D(\Lambda)$，例如 $D^{-1}(\Lambda)\mathbf{1}D(\Lambda) = \mathbf{1}, D^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, D^{-1}(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}D(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta\sigma^{\alpha\beta}$ 等等，注意 γ^5 与 $S^{\mu\nu}$ 或 $D(\Lambda)$ 对易（这说明了 γ^5 不提供角动量）。

※ 对于介子流 $J(x) = \bar{\psi}_i(x)\Gamma\psi_j(x)$ 有

$$\begin{aligned}
&U^{-1}(\Lambda)J(x)U(\Lambda) = J(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[J(x), J^{\mu\nu}] \\
&= U^{-1}(\Lambda)\bar{\psi}_i(x)U(\Lambda)\Gamma U^{-1}(\Lambda)\psi_j(x)U(\Lambda) = \psi_i^\dagger(\Lambda^{-1}x)D^\dagger(\Lambda)\gamma^0\Gamma D(\Lambda)\psi_j(\Lambda^{-1}x) \\
&= \psi_i^\dagger(\Lambda^{-1}x)\gamma^0(D(\Lambda)\Gamma D(\Lambda))\psi_j(\Lambda^{-1}x)
\end{aligned} \tag{7}$$

对于标量介子，$\Gamma = \mathbf{1}$，因此有 $U^{-1}(\Lambda)J(x)U(\Lambda) = J(\Lambda^{-1}x) = J(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}J(x)$，去空间分量有 $[J(x), J^{\mu\nu}] = L^{\mu\nu}J(x) \Rightarrow [J(x), \mathbf{J}] = \mathbf{L}J(x)$，因此这是 0 自旋的流。对于矢量介子，$\Gamma = \gamma^\alpha$，有

$$\begin{aligned}
&U^{-1}(\Lambda)J^\alpha(x)U(\Lambda) = \Lambda^\alpha{}_\beta J^\beta(\Lambda^{-1}x) = (g^\alpha{}_\beta - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}(\mathcal{J}^{\gamma\delta})^\alpha{}_\beta)[J^\beta(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}J^\beta(x)] \\
&= J^\alpha(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[L^{\mu\nu}J^\alpha(x) + (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta)J^\beta(x)]
\end{aligned} \tag{8}$$

取空间分量有 $[J(x), J^{\mu\nu}] = L^{\mu\nu}J(x) + (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta J^\beta(x) \Rightarrow [J^\alpha(x), \mathbf{J}] = \mathbf{L}J^\alpha(x) + (\mathcal{J})^\alpha{}_\beta J^\beta(x)$，因此，这是自旋为 1 的流。

※ 对于重子流 $J(x) = \epsilon^{abc}[\psi^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\Gamma_1\psi^b(x)]\Gamma_2\psi^c(x)$ 有

$$\begin{aligned}
&U^{-1}(\Lambda)J(x)U(\Lambda) = J(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[J(x), J^{\mu\nu}] \\
&= \epsilon^{abc}[U^{-1}(\Lambda)\psi^{a\mathrm{T}}(x)U(\Lambda)\mathcal{C}\Gamma_1U^{-1}(\Lambda)\psi^b(x)U(\Lambda)]\Gamma_2U^{-1}(\Lambda)\psi^c(x)U(\Lambda) \\
&= \epsilon^{abc}[\psi^{a\mathrm{T}}(\Lambda^{-1}x)D^{\mathrm{T}}(\Lambda)\mathcal{C}\Gamma_1D(\Lambda)\psi^b(\Lambda^{-1}x)]\Gamma_2D(\Lambda)\psi^c(\Lambda^{-1}x) \\
&= \epsilon^{abc}[\psi^{a\mathrm{T}}(\Lambda^{-1}x)\mathcal{C}D^{-1}(\Lambda)\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\Gamma_1D(\Lambda)\psi^b(\Lambda^{-1}x)]D(\Lambda)D^{-1}(\Lambda)\Gamma_2D(\Lambda)\psi^c(\Lambda^{-1}x) \\
&= D(\Lambda)\epsilon^{abc}[\psi^{a\mathrm{T}}(\Lambda^{-1}x)\mathcal{C}(D^{-1}(\Lambda)\Gamma_1D(\Lambda))\psi^b(\Lambda^{-1}x)](D^{-1}(\Lambda)\Gamma_2D(\Lambda))\psi^c(\Lambda^{-1}x)
\end{aligned} \tag{9}$$

对于 $\frac{1}{2}^+$ 的粒子，有 $\Gamma_1 = \gamma^\mu$，$\Gamma_2 = \gamma^5\gamma_\mu$，因此有

$$\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda)J(x)U(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\beta{}_\mu D(\Lambda)\epsilon^{abc}[\psi^{a\mathrm{T}}(\Lambda^{-1}x)\mathcal{C}\gamma^\alpha\psi^b(\Lambda^{-1}x)]\gamma_\beta\psi^c(\Lambda^{-1}x) \\
&= D(\Lambda)J(\Lambda^{-1}x) = (1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})[J(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}J(x)] \\
&= J(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})J(x)
\end{aligned} \tag{10}$$

取空间分量，有 $[J(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})J(x) \Rightarrow [J(x), \mathbf{J}] = (\mathbf{L} + \mathbf{S})J(x)$，所以这是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的流。

对于 $\frac{3}{2}^+$ 的粒子，有 $\Gamma_1 = \gamma^\alpha$，$\Gamma_2 = \mathbf{1}$，因此有

$$\begin{aligned}
U^{-1}(\Lambda)J^\alpha(x)U(\Lambda) &= \Lambda^\alpha{}_\beta D(\Lambda)\epsilon^{abc}[\psi^{a\mathrm{T}}(\Lambda^{-1}x)\mathcal{C}\gamma^\beta\psi^b(\Lambda^{-1}x)]\psi^c(\Lambda^{-1}x) = \Lambda^\alpha{}_\beta D(\Lambda)J^\beta(\Lambda^{-1}x) \\
&= (g^\alpha{}_\beta - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\gamma\delta}(\mathcal{J}^{\gamma\delta})^\alpha{}_\beta)(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})[J^\beta(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}J^\beta(x)] \\
&= J^\alpha(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}[(L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu})J^\alpha(x) + (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta J^\beta(x)]
\end{aligned} \tag{11}$$

取空间分量，有 $[J^\alpha(x), J^{\mu\nu}] = (L^{\mu\nu}+S^{\mu\nu})J^\alpha(x)+(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta J^\beta(x) \Rightarrow [J^\alpha(x), \mathbf{J}] = (\mathbf{L}+\mathbf{S})J^\alpha(x)+(\mathcal{J})^\alpha{}_\beta J^\beta(x)$，因此这是自旋为 $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ 的流。

另外要注意，对于含有 ∂^μ 的流，有变换关系 $U^{-1}(\Lambda)\partial^\mu U(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\partial^\nu$ 与对易关系 $[L^{\mu\nu}, \partial^\rho] = g^{\rho\nu}\partial^\mu - g^{\rho\mu}\partial^\nu$。

但是要注意，根据连丁坤、杨梓桁学长的话，流的自旋和流的 Lorentz 变换没有必然关系（意味着要验证这个自旋态是否成立），流能耦合到那个自旋态取决于在色散关系中求得的 $\langle 0|J(x)|X\rangle$（其中 $J(x)$ 为

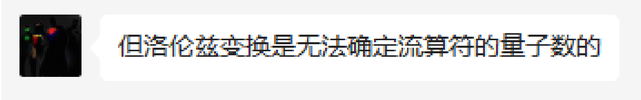

图 3: 来自连丁坤师兄的评价

流，$|X\rangle$ 为粒子态）是否不为 0。详细的计算结果见文献 Charmonium excited state spectrum in lattice QCD 中的 APPENDIX A: CONTINUUM OVERLAPS[2]。

3.2 宇称

3.2.1 P 宇称

宇称可以通过宇称变换求解。即 $\mathcal{P}^{-1}J(x)\mathcal{P}$，例如对于质子 $J^N(x)$ 有（以下的 ξ_P,ξ_C 均视作 1）：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-1}J^N(x)\mathcal{P} &= \epsilon^{abc}[\mathcal{P}^{-1}u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{P}\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{P}^{-1}u^b(x)\mathcal{P}]\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{P}^{-1}d^c(x)\mathcal{P}\\
&\overset{\gamma^{0\mathrm{T}}=\gamma^0}{=} \epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\gamma^0\mathcal{C}\gamma_\mu\gamma^0u^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu\gamma^0d^c(x)\\
&\overset{\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0=(\gamma^\mu)^\dagger,\mathcal{C}=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2}{=} \epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}(\gamma_\mu)^\dagger u^b(x)]\gamma^0\gamma^5(\gamma^\mu)^\dagger d^c(x)\\
&\overset{\gamma_0^\dagger=\gamma_0,\gamma_i^\dagger=-\gamma_i(i=1,2,3)}{=} \gamma^0\epsilon^{abc}[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]\gamma^5\gamma^\mu d^c(x) = D(\mathcal{P})J^N(x)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

要注意 $[u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^b(x)]$ 在计算中是标量，可以随便挪动。做出 $\bar{J^N}(x)$ 如下

$$
\begin{aligned}
\bar{J^N}(x) &= [J^N(x)]^\dagger\gamma^0 = \epsilon^{abc}u^{b\dagger}(x)\gamma_\mu^\dagger\mathcal{C}[u^{a\mathrm{T}}(x)]^\dagger d^{c\dagger}(x)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^5\gamma^0\\
&= \epsilon^{abc}u^{b\dagger}(x)\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0\mathcal{C}[u^{a\dagger}(x)]^\mathrm{T}d^{c\dagger}(x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^5\gamma^0\\
&= \epsilon^{abc}[\bar{u^b}(x)\gamma_\mu\mathcal{C}(\bar{u^a}(x))^\mathrm{T}]\bar{d^c}\gamma^\mu\gamma^5
\end{aligned}
\tag{13}
$$

那么有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}^{-1}\bar{J^N}(x)\mathcal{P} &= \epsilon^{abc}[\bar{u^b}(x)\gamma^0\gamma_\mu\mathcal{C}\gamma^0(\bar{u^a}(x))^\mathrm{T}]\bar{d^c}\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\\
&= \epsilon^{abc}[\bar{u^b}(x)(\gamma_\mu)^\dagger\gamma^0\mathcal{C}\gamma^0(\bar{u^a}(x))^\mathrm{T}]\bar{d^c}(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\gamma^5\\
&= \epsilon^{abc}[\bar{u^b}(x)(\gamma_\mu)^\dagger\mathcal{C}(\bar{u^a}(x))^\mathrm{T}]\bar{d^c}(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^5\gamma^0\\
&= \epsilon^{abc}[\bar{u^b}(x)\gamma_\mu\mathcal{C}(\bar{u^a}(x))^\mathrm{T}]\bar{d^c}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0 = \bar{J^N}(x)D^{-1}(\mathcal{P})
\end{aligned}
\tag{14}
$$

上式每一步的原因与式子 12的原因一致。从上面的式子可以看出，$J^N(x)$ 流的宇称变换类似费米子场算符的性质 $\mathcal{P}^{-1}\psi(x)\mathcal{P} = D(\mathcal{P})\psi(x)$，而电子为 $J^P = \frac{1}{2}^+$，因此这个态与费米子类似，因此 $J^N(x)$ 可以用来表示 $\frac{1}{2}^+$ 的粒子。

3.2.2 C 宇称

对流做 C 宇称变换可以知道它的性质

$$
\begin{aligned}
C^{-1}J^N(x)C &= \epsilon^{abc}[C^{-1}u^{a\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}C\gamma_\mu C^{-1}u^b(x)C]\gamma^5\gamma^\mu C^{-1}d^c(x)C\\
&= \epsilon^{abc}[\bar{u^a}(x)\gamma_\mu\mathcal{C}(\bar{u^b}(x))^\mathrm{T}]\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{C}(\bar{d^c}(x))^\mathrm{T} = \xi_C^*\mathcal{C}(\bar{J^N}(x))^\mathrm{T}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{-1}\bar{J^N}(x)C &= \epsilon^{abc}[C^{-1}\bar{u^b}(x)C\gamma_\mu C^{-1}\mathcal{C}(\bar{u^a}(x))^\mathrm{T}C]C^{-1}\bar{d^c}(x)C\gamma^\mu\gamma^5\\
&= \epsilon^{abc}[u^{b\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma_\mu u^a(x)]d^{c\mathrm{T}}(x)\mathcal{C}\gamma^\mu\gamma^5 = \xi_C(J^N(x))^\mathrm{T}\mathcal{C}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

这与费米子场的 C 宇称变化性质一致，因此可以当作费米子场。

3.3 颜色和味道

3.3.1 颜色

颜色波函数应该保证整体是颜色单态。对于三夸克的重子来说，流的颜色全反对称性可以由 Levi-Civita 保证。对于其他多夸克态，比如四夸克态 $cs\bar{c}\bar{s}$，有 molecular 模型 [1]

$$\begin{aligned} 3_c \otimes 3_s \otimes \bar{3}_{\bar{c}} \otimes \bar{3}_{\bar{s}} &= (3 \otimes 3)_{[cs]} \otimes (\bar{3} \otimes \bar{3})_{[\bar{c}\bar{s}]} = (6 \oplus \bar{3})_{[cs]} \otimes (3 \oplus \bar{6})_{[\bar{c}\bar{s}]} \\ &= (6_{[cs]} \otimes \bar{6}_{[\bar{c}\bar{s}]}) \oplus (\bar{3}_{[cs]} \otimes 3_{[\bar{c}\bar{s}]}) \oplus (6_{[cs]} \otimes 3_{[\bar{c}\bar{s}]}) \oplus (\bar{3}_{[cs]} \otimes \bar{6}_{[\bar{c}\bar{s}]}) \\ &= (\underline{1} \oplus 8 \oplus 27)_{[cs][\bar{c}\bar{s}]} \oplus (\bar{1} \oplus 8)_{[cs][\bar{c}\bar{s}]} \oplus (8 \oplus \underline{10})_{[cs][\bar{c}\bar{s}]} \oplus (8 \oplus \overline{10})_{[cs][\bar{c}\bar{s}]} \end{aligned} \tag{17}$$

（注意 $\underline{8} = \bar{8} = 8, \underline{27} = \overline{27} = 27$）那么可以看到色单态出现在部分色对称态 $(6_{[cs]} \otimes \bar{6}_{[\bar{c}\bar{s}]})$ 与色全反对称态 $(\bar{3}_{[cs]} \otimes 3_{[\bar{c}\bar{s}]})$ 中。

3.3.2 味道

味道的对称性可以通过交换流里面算符再求和的方式来实现。这里有一个技巧，$\psi_i^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\psi^b = -(\psi_i^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\psi_j^b)^\mathrm{T} = -\psi_j^{b\mathrm{T}}\gamma_\mu^\mathrm{T}\mathcal{C}^\mathrm{T}\psi_i^a = -\psi_j^{b\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\psi_i^a$（$a,b$ 为色指标，i,j 为味指标，转置时加负号是因为交换了费米子算符），因此有 $\epsilon^{abc}\psi_i^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\psi_j^b = \epsilon^{abc}\psi_j^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma_\mu\psi_i^b$，因此可知这样的（非完整的）结构是交换对称的。同理 $\psi_i^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5\psi_j^b = -(\psi_i^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5\psi_j^b)^\mathrm{T} = \psi_j^{b\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5\psi_i^a$，其他分析类似。

对于四夸克态 D-wave 的 $cs\bar{c}\bar{s}$ 有 $(\bar{3}_{[cs]} \otimes 3_{[\bar{c}\bar{s}]})$：

$$J^A_{1,\mu\nu} = (c^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 s^b)\{D_\mu, D_\nu\}[(\bar{c}^a\mathcal{C}\gamma^5\bar{s}^{b\mathrm{T}}) - (\bar{c}^b\mathcal{C}\gamma^5\bar{s}^{a\mathrm{T}})] + (\bar{c}^a\mathcal{C}\gamma^5\bar{s}^{b\mathrm{T}})\{D_\mu, D_\nu\}[(c^{a\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 s^b) - (c^{b\mathrm{T}}\mathcal{C}\gamma^5 s^a)]$$

其中 $\{D_\mu, D_\nu\} = D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu$。上面的式子对于 $[cs]$ 中的 cs 和 $[\bar{c}\bar{s}]$ 中的 $\bar{c}\bar{s}$ 交换对称。仅交换 cs 中的 a,b，反对称（暴力计算即可）；同理，交换 $\bar{c}\bar{s}$ 中的 a,b，亦反对称。该流 P、C 宇称均为正。但是由于流耦合到不同的自旋，该流 $J^{PC} = 1^{++}$。

3.4 波函数的对称

波函数为 $\psi_{total} = \psi_{orbit}\psi_{spin}\psi_{color}\psi_{flavor}$。对于上述的 1^{++} 的流，有 $S = 0, L = 0$，所以自旋、轨道波函数对称。又由于颜色波函数反对称，味道波函数交换对称，因此总波函数为交换反对称。

参考文献

[1] Z. Y. Yang and W. Chen, *D*-wave excited $cs\bar{c}\bar{s}$ tetraquark states with $J^{PC} = 1^{++}$ and 1^{+-}, [arXiv:2206.06051 [hep-ph]].

[2] Dudek, Jozef J. and Edwards, Robert G. and Mathur, Nilmani and Richards, David G., Charmonium excited state spectrum in lattice QCD[J], Phys. Rev. D, 2008, 22,034501

4 附录

Lorentz 群的矢量表示：$\Lambda = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu}}$，$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$，$(\mathcal{J}^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = \mathrm{i}(g^\mu{}_\alpha g^\nu{}_\beta - g^\nu{}_\alpha g^\mu{}_\beta)$，角动量理论中的本征值 $(\mathcal{J}^2)^i{}_j = 2\delta^i{}_j = s(s+1)\delta^i{}_j$，$s = 1$。

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

无穷小展开为 $\Lambda =$ Poincare 群和 Lorentz 群无限维幺正线性表示为 $\{U(\Lambda)\},\{U(\Lambda)\}$，无穷小展开 $U(\mathbf{1}+\omega)=1-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}-\mathrm{i}\epsilon_{\mu}P^{\mu}$，$J^{\mu\nu}\equiv 2\mathrm{i}\frac{\partial U(\Lambda)}{\partial\omega_{\mu\nu}}|_{\omega_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu}=0}$，$P^{\mu}\equiv 2\mathrm{i}\frac{\partial U(\Lambda,a)}{\partial\epsilon_{\mu}}|_{\omega_{\mu\nu}=\epsilon_{\mu}=0}$，微分算符轨道角动量为 $L^{\mu\nu}\equiv\mathrm{i}(x^{\mu}\partial^{\nu}-x^{\nu}\partial^{\mu})$。

$D(\Lambda)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$，$D^{-1}(\Lambda)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}}$，$S^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]=\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$。

对总角动量、轨道角动量、自旋角动量取空间部分为 $(J,L,S)^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(J,L,S)^{ijk}$