Projet MAP 411

Une méthode de résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Question 1 :

Problème (1) : " trouver $u \in C^2(\bar{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$ "

Problème (2) : " trouver $u \in V$ tel que

pour tout $v \in V$, $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v$

où $V = \{ v \in C^1(\bar{\Omega})$ tel que $v = 0$ sur $\partial\Omega \}$ "

Soit u solution de (1). Montrons que u est solution de (2). Soit $v \in V$.

$\forall (x,y) \in \Omega$, $-v(x,y) \cdot \Delta u(x,y) = v(x,y) \cdot f(x,y)$

donc $\int_\Omega -v(x,y)\, \Delta u(x,y)\, dxdy = \int_\Omega v(x,y) f(x,y)\, dxdy$

i.e. $\int_\Omega dxdy\, \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) v(x,y)\, dxdy = \int_\Omega v(x,y) f(x,y)\, dxdy$

(intégration par parties, légitime car $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et

$v \in C^1(\Omega)$.)

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$; d'où la formulation variationnelle :

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v$$

, et $u \in V$ car u est de classe C^1 et nulle sur $\partial\Omega$.

Réciproquement, soit $u \in V$ solution de (2) et supposons u de classe C^2. Alors en intégrant par parties dans le sens inverse :

pour tout $v \in V$, $\displaystyle\int_\Omega v(\Delta u + f) = 0$

Puis V contient l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, et par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ on obtient

$$-\Delta u = f \text{ sur } \Omega$$

Comme $u \in V$ on a de plus $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Donc le problème (1) est équivalent à sa formulation variationnelle (2).

Question 2 :

Les problèmes (1) et (2) étant équivalents, on cherche une discrétisation de (2), c'est à dire une fonction $u_h \in V_h$ telle que :

$$\text{pour tout } v_h \in V_h, \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h = \int_\Omega f \cdot v_h \quad (2\text{-approx})$$

Puis pour tout $(k,l) \in [\![1, I]\!]$,

$$\nabla \phi_k \otimes \phi_l = \begin{bmatrix} \phi_k' \otimes \phi_l \\ \phi_k \otimes \phi_l' \end{bmatrix}$$

On cherche u_h sous la forme $u_h = \sum_{i,j=1}^{I} U_{ij} \phi_i \otimes \phi_j$, et on prend comme fonction test les $\phi_k \otimes \phi_l$.

Soit $(k,l) \in [\![1, I]\!]^2$: on doit avoir

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{I} U_{ij} \left((\phi_i' \otimes \phi_j) \cdot (\phi_k' \otimes \phi_l) + (\phi_i \otimes \phi_j') (\phi_k \otimes \phi_l') \right) \right]$$

$$= \int_\Omega f \, \phi_k \otimes \phi_l$$

ce qui peut se réécrire :

$$F_{k,l} = \sum_{i,j=1}^{I} U_{ij} \left(\int_\Omega \phi_i' \otimes \phi_k' \int_\Omega \phi_j \phi_l + \int_\Omega \phi_i \otimes \phi_k \int_\Omega \phi_j' \otimes \phi_l' \right)$$

Le problème est donc équivalent au problème (3) :

" trouver $U \in \mathbb{R}^{I \times I}$ tel que

$$\forall (k,l) \in [\![1,I]\!]^2, \sum_{i,j=1}^{I} U_{ij} (D_{ik} M_{jl} + M_{ik} D_{jl}) = F_{kl} \text{ "}$$

Caractère bien posé de (3) :

On considère V muni de la norme $\|-\| : v \longmapsto \|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2}$.

$\|-\|$ est bien une norme

- les caractères homogène et positif, l'inégalité triangulaire s'héritent de celles de la norme L^2

- étant donnée $v \in V$ tel que $\|v\| = 0$, comme v est de classe C^1, $\nabla v = 0$ sur Ω donc v est constante égale à sa valeur aux limites. comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $v = 0$. d'où la séparation.

Il est alors immédiat que la forme bilinéaire $u, v \longmapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ est coercive pour $\|-\|$

Le lemme 3.1.12 du livre garantit alors l'existence et l'unicité de sa solution de l'approximation variationnelle (3). En outre, cette solution est obtenue par résolution d'un système linéaire : on en déduit la continuité de la solution $U \in \mathbb{R}^{I \times I}$ par rapport au vecteur

$$\begin{bmatrix} \int_\Omega f\, \phi_1 \otimes \phi_1 \\ \vdots \\ \int_\Omega f\, \phi_I \otimes \phi_I \end{bmatrix}$$

, qui dépend lui même continûment de f (ex pour la norme L^2).
Par conséquent le problème (3) est bien posé.

On se place maintenant dans $\Omega =]0,1[^d$.
Choisissons pour commencer $d=3$, on cherche u_h sous la forme $\sum_{i,j,k=1}^{I} U_{ijk}\, \phi_i \otimes \phi_j \otimes \phi_k$.

avec pour tout $1 \leq i, j, k \leq I$, $\nabla \phi_i \otimes \phi_j \otimes \phi_k = \begin{bmatrix} \phi_i' \otimes \phi_j \otimes \phi_k \\ \phi_i \otimes \phi_j' \otimes \phi_k \\ \phi_i \otimes \phi_j \otimes \phi_k' \end{bmatrix}$

puis la formulation variationnelle devient :

pour tout $1 \leq l, m, n \leq I$:

$$\sum_{i,j,k=1}^{I} \int_\Omega U_{ijk} \Big[(\phi_i' \otimes \phi_l') \cdot (\phi_j \otimes \phi_m) \cdot (\phi_k \otimes \phi_n)$$
$$+ (\phi_i \otimes \phi_l) \cdot (\phi_j' \otimes \phi_m') \cdot (\phi_k \otimes \phi_n) +$$
$$(\phi_i \otimes \phi_l) \cdot (\phi_j \otimes \phi_m) \cdot (\phi_k' \otimes \phi_n') \Big]$$

l'équivalent de (3) est donc

"trouver $U \in \mathbb{R}^{I \times I \times I}$ tel que

pour tout $1 \leq l, m, n \leq I$,

$$F_{lmn} = \sum_{i,j,k=1}^{I} U_{ijk} \left(D_{il} M_{jm} N_{kn} + D_{jm} M_{il} M_{kn} + D_{kn} M_{il} M_{jm} \right)"$$

les coefficients D_{ij} et M_{ij} ne changent pas, il faut toujours stocker $2I^2$ données (ou I^2 si on utilise la symétrie)

Toutefois, le stockage des $F_{l,m,n}$ requiert un espace mémoire de I^3.

Plus généralement pour $\Omega =]0,1[^d$ la résolution de (3) implique l'utilisation d'un espace mémoire exponentiel en d afin de stocker les $\int_\Omega f(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d})$.

Question 3 : le problème (4) est équivalent à :

"trouver $u_h \in V_h \otimes V_h$ tel que $u_h = \underset{v_h \in V_h \otimes V_h}{\arg\min} \ \mathcal{E}(v_h)$"

Montrons que cette formulation est équivalent au problème (2-approx) : "trouver $u_h \in V_h \otimes V_h$ tel que pour tout $v_h \in V_h \otimes V_h$ on ait

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h}_{\text{noté } a(u_h, v_h)} = \underbrace{\int_\Omega f v_h}_{\text{noté } L(v_h)}.$$

(2-approx) est la formulation approchée associée à la formulation variationnelle (2).

Soit u_h solution de (2-approx) et montrons que u_h minimise $\mathcal{E}$ sur $V_h \otimes V_h$: soit $w_h \in V_h \otimes V_h$ et posons $v_h = w_h - u_h$. On a :

$$\mathcal{E}(w_h) = \mathcal{E}(u_h + v_h) = a(u_h + v_h, u_h + v_h) - L(u_h + v_h)$$

Donc $\mathcal{E}(w_h) = \mathcal{E}(u_h) + \underbrace{[a(u_h, v_h) - L(v_h)]}_{\substack{=0 \\ \text{car } u \text{ solution de} \\ (2\text{-approx})}} + \underbrace{\frac{1}{2} a(v_h, v_h)}_{\geq 0}$

Ainsi $\mathcal{E}(w_h) \geq \mathcal{E}(u_h)$ donc $u_h = \underset{w_h \in V_h \otimes V_h}{\operatorname{argmin}} \mathcal{E}(w_h)$

Réciproquement, soit u_h un minimum de $\mathcal{E}$ sur $V_h \otimes V_h$. Soit $v_h \in V_h \otimes V_h$ et montrons que $a(u_h, v_h) = L(v_h)$.

On considère la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathcal{E}(u_h + t v_h). \end{array}$

Par minimalité de u_h, f est minimale en 0. Or f est un trinôme du 2^{nd} degré :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \mathcal{E}(u_h) + t\left[a(u_h, v_h) - L(v_h)\right] + \frac{t^2}{2} a(v_h, v_h)$$

Puis $f'(0) = 0$ donc $a(u_h, v_h) = L(v_h)$

Donc u_h est solution de (2-approx)

Finalement il y a équivalence entre (4) et (2-approx). Comme il y a équivalence entre (2-approx) et (3), les problèmes (3) et (4) sont équivalents.

Question 4 : l'algorithme fonctionne de manière itérative : il produit à chaque étape le terme u_m d'une suite dont on espère qu'elle converge vers le minimum de $\mathcal{E}$.

À chaque itération, l'algorithme effectue un choix localement optimal en cherchant le couple $r, s \in V_h^2$ qui rendra $\mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s)$ minimal.

C'est pourquoi on dit que l'algorithme est glouton.

En dimension d l'algorithme devient : pour tout $m \geq 1$ trouver $r_m^{(1)}, \dots, r_m^{(d)} \in V_h$ de telle sorte que

$$\left(r_m^{(1)}, \dots, r_m^{(d)}\right) \in \arg \min_{\substack{s_1, \dots, s_d \\ \in V_h}} \mathcal{E}\left(u_{m-1} + s_1 \otimes \dots \otimes s_d\right)$$

avec $u_{m-1} := \sum_{k=1}^{m-1} r_k^{(1)} \otimes \dots \otimes r_k^{(d)}$ et $\sum_{k=1}^{0} = 0$ par convention.

Données à stocker

- il faut être en mesure de stocker les $r_k^{(1)}, \dots, r_k^{(d)}$, c'est à dire leurs I coefficients dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq I}$ ce qui donne déjà ndI données à stocker.

- pour pouvoir calculer les $\mathcal{E}(u_k)$ à chaque étape, il faut :

  * pour le terme en $\int_\Omega |\nabla u|^2$, il suffit d'avoir accès aux D_{ij} et M_{ij}, ce qui représente $2I^2$ données à stocker (I^2 par symétrie).

  * pour le terme en $\int_\Omega f u$, c'est plus délicat. Dans le cas le plus général, (f quelconque) il faudrait disposer des

$$\int_\Omega f \, \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_d} \qquad \text{pour tout } (i_1, \dots, i_d) \in [\![1, I]\!],$$

soit I^d données, ce qui n'est pas plus intéressant que l'algorithme précédent.

Cependant, pour f de la forme :

$$f = \sum_{p=1}^{P} f_1^p \otimes \dots f_d^p$$

$$\int_\Omega f u = \sum_{p=1}^{P} \int_\Omega u \, f_1^p \otimes \dots \otimes f_d^p$$

puis $\displaystyle\int_\Omega f \, r_1 \otimes s_2 \dots \otimes r_d = \sum_{p=1}^{P} \left(\int_{\Omega_1 =]0,1[} f_1^p \otimes r_1^p \right) \times \dots \times \left(\int_{\Omega_d =]0,1[} f_d^p \otimes r_d^p \right)$

où chacun des facteurs peut s'obtenir si on connaît les $\int_0^1 f_i^l \cdot \phi_j$, ce qui représente en tout un espace de $P \times I \times d$ entrées, ce qui est de loin préférable. Disposer d'une représentation séparée de f est donc nettement plus intéressant si l'on souhaite utiliser cette méthode globalement.

5. Existence d'un minimum

* Montrons que l'ensemble des factorisables de $V_h \otimes V_h$ est fermé. Soit K cet ensemble.

On munit V_h et $V_h \otimes V_h$ de leurs normes L^1 respectives. Soit $(r_n \otimes s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $K^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $f \in V_h \otimes V_h$ avec :

$$r_n \otimes s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f.$$

Cas n°1 : $Z := \{n\in\mathbb{N} : r_n = 0\}$ est infini. Dans ce cas 0 est valeur d'adhérence de $r_n \otimes s_n$ qui converge, donc $f = 0 \in K$.

Cas n°2 : $Z = \{n\in\mathbb{N} : r_n = 0\}$ est fini. On considère dans la suite $n \geq n_0$ avec $n_0 = \max(Z)$. Puis pour tout n :

$$r_n \otimes s_n = \left(\frac{r_n}{\|r_n\|}\right) \otimes (\|r_n\| s_n)$$

Sans perte de généralité on suppose donc $\|r_n\| = 1$. Puis pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$\|r_n \otimes s_n\|_1 = \int_\Omega |r_n(x)|\cdot|s_n(y)|\,dx\,dy = \|r_n\|_1 \cdot \|s_n\|_1 = \|s_n\|_1$$

Comme $(r_n \otimes s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée : il en va donc de même pour $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En dimension finie les boules sont compactes donc on peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il $\exists$ existe φ et ψ extractions telles que $(r_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Soit r_∞ et s_∞ les limites

En particulier :
$$\begin{cases} r_{(\varphi\circ\psi)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} r_\infty \in V_h \\ s_{(\varphi\circ\psi)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} s_\infty \in V_h \end{cases}$$

Puis $(x,y) \longmapsto x\otimes y$ est bilinéaire entre espaces de dimension finie donc continue.

Ainsi $r_{(\varphi\circ\psi)(n)} \otimes s_{(\varphi\circ\psi)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} r_\infty \otimes s_\infty$.

Or $r_{(\varphi\circ\psi)(n)} \otimes s_{(\varphi\circ\psi)(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$

Par unicité de la limite :

$$f = r_\infty \otimes s_\infty \in K$$

Ainsi l'ensemble K des factorisables est un fermé de $V_h \otimes V_h$.

5. • <u>Le problème (5) admet une solution</u> : en effet :

- On considère la fonction $\tilde{\mathcal{E}} : \begin{cases} K \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \mathcal{E}(u_{n-1} + v) \end{cases}$

avec $K = \{ r \otimes s \mid (r, s) \in V_h \times V_h \}$ l'ensemble des factorisables, muni de la norme L^2. K est alors <u>fermé</u> et <u>non vide</u> $(\phi_1 \otimes \phi_1 \in K)$.

↖ cf ci-dessus

- Pour tout $u \in V_h \otimes V_h$, $\mathcal{E}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu$

<u>inégalité de Poincaré</u> : il existe C_Ω tel que pour tout $u \in V_h \otimes V_h$: $C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}$.

D'où $\mathcal{E}(u) \geq \frac{\|u\|_{L^2}^2}{C_\Omega^2} - \int_\Omega fu$

$$\mathcal{E}(u) \geq \|u\|_{L^2}^2 \cdot \frac{1}{C_\Omega^2} - \|f\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2} \quad \text{(Cauchy Schwarz)}$$

$$\mathcal{E}(u) \geq \|u\|_{L^2} \left(\frac{\|u\|_{L^2}}{C_\Omega^2} - \|f\|_{L^2} \right)$$

Donc $\mathcal{E}(u) \xrightarrow[\|u\|_{L^2} \to +\infty]{} +\infty$

Ainsi $\tilde{\mathcal{E}}(v) \xrightarrow[\|v\|_{L^2} \to +\infty]{} +\infty$: <u>$\tilde{\mathcal{E}}$ est infinie à l'infini.</u>

Comme $\tilde{\mathcal{E}}$ est de plus <u>continue</u> pour la norme L^2, $\tilde{\mathcal{E}}$ admet un minimum.

On en déduit que <u>le problème (5) admet une solution.</u>

- <u>Equations d'Euler associées au problème (S).</u>

On considère la fonction

$$J : (r,s) \in V_h \times V_h \longmapsto \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s).$$

On a

$$\begin{tikzcd} (r,s) \arrow[r, mapsto, "\text{tens}"] \arrow[rr, bend right, "J"'] & r\otimes s \arrow[r, mapsto, "\tilde{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E}(u_{n-1} + r\otimes s) \end{tikzcd}$$

et J est minimale en $(r_n, s_n) \in V_h \times V_h$, avec
- J différentiable comme composée d'une fonction différentiable et d'une application bilinéaire.
- J définie sur tout $V_h \times V_h$.

Donc $dJ(r_n, s_n)[\delta r, \delta s] = 0$ pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$.

Puis (différentielle d'une composée) on a pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$:

$$dJ(r_n, s_n)[\delta r, \delta s] = d\tilde{\mathcal{E}}(r_n \otimes s_n)[r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_n]$$

différentielle de $-\otimes-$, bilinéaire.

Ainsi $0 = \int_\Omega \nabla(u_{n-1} + r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_n) - \int_\Omega f(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_n)$

Donc $\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_n) = \int_\Omega f(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_n) - \int_\Omega \nabla u_{n-1} : \nabla(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_n)$

Question n°6 :

d'après (6), comme $u_m = u_{m-1} + r_m \otimes s_m$

On a $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla(r_m \otimes \delta_s + \delta r \otimes s_m) = \int_\Omega f(r_m \otimes \delta_s + \delta r \otimes s_m)$

pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$.

Or pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$, $r_m \otimes \delta_s + \delta r \otimes s_m \in V_h$

donc d'après (2-approx),

$$\int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(r_m \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m) = \int_\Omega f(r_m \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m)$$

en faisant la différence dans les deux équations :

$$\int_\Omega \nabla g_m \cdot \nabla(r_m \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m) = 0.$$

Puis $\displaystyle\int_\Omega |\nabla g_{m-1}|^2 = \int_\Omega |\nabla g_m + \nabla \underbrace{(u_m - u_{m-1})}_{r_m \otimes s_m}|^2$

$$= \int_\Omega |\nabla g_m|^2 + \int_\Omega |\nabla r_m \otimes s_m|^2$$
$$+ \int_\Omega \nabla g_m \cdot \nabla\, 2 r_m \otimes s_m$$

Or $r_m \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m = 2 r_m \otimes s_m$ pour $\begin{cases} \delta r = s_m \\ \delta s = r_m \end{cases}$

Ainsi $\int_\Omega |g_{m-1}|^2 = \int_\Omega |g_m|^2 + \int_\Omega |\nabla r_m \otimes s_m|^2$

On a $E_m = \mathcal{E}(u_m) - \mathcal{E}(u_{m-1})$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{m-1}|^2$$

$$- \int_\Omega f u_m + \int f u_{m-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u_{m-1} + \nabla r_m \otimes s_m|^2 - \int_\Omega |\nabla u_{m-1}|^2\right)$$

$$- \int_\Omega f \, r_m \otimes s_m$$

$$= \int \nabla u_{m-1} \cdot \nabla r_m \otimes s_m + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla (r_m \otimes s_m)|^2$$

$$- \int_\Omega f(r_m \otimes s_m)$$

ainsi : $E_m = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla (r_m \otimes s_m)|^2 - \int_\Omega f(r_m \otimes s_m) + \int_\Omega \nabla u_{n-1} \cdot \nabla (r_m \otimes s_m)$

Puis en choisissant $\delta s = r_m$ et $\delta r = s_m$ dans (6) on trouve :

$$2\left(\int_\Omega f(r_m \otimes s_m) - \int_\Omega \nabla(r_m \otimes s_m) \nabla u_{m-1}\right) = 2\int |\nabla (r_m \otimes s_m)|^2$$

Finalement

$$E_m = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_m \otimes s_m)|^2 - \int_\Omega |\nabla(r_m \otimes s_m)|^2$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(r_m \otimes s_m)|^2$$

Puis la série de terme général $\int_\Omega |\nabla(r_m \otimes s_m)|^2$ est telescopique d'après :

$$\int_\Omega |\nabla(r_m \otimes s_m)|^2 = \int_\Omega |\nabla g_{m-1}|^2 - \int_\Omega |\nabla g_m|^2$$

Puis la suite $\left(\int_\Omega |\nabla g_{m-1}|^2\right)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive donc convergent.

Donc $$\sum_{m \geq 1} \int_\Omega |\nabla r_m \otimes s_m|^2 = \int_\Omega |\nabla g_0|^2 - \lim_{m \to +\infty}\left(\int_\Omega |\nabla g_m|^2\right)$$

Puis la série $-2\sum_{m \geq 1} E_m$ est aussi convergente (de même somme)

Question n°7 :

Pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{\int_\Omega |\nabla g_n|^2} \leq \sqrt{\int_\Omega |\nabla g_0|^2}$ (par décroissance, cf question précédente), donc (g_n) est bornée. Comme $V_h \otimes V_h$ est de dimension finie, d'après Bolzano Weierstrass il existe $g_\infty \in V_h \otimes V_h$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telles que :

$$g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} g_\infty$$

On a pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$,

$\mathcal{E}(U_n) \leq \mathcal{E}(U_{n-1} + \delta r \otimes \delta s)$ (par minimalité dans (5))

Donc $E_n = \mathcal{E}(U_n) - \mathcal{E}(U_{n-1})$

$$E_n \leq \mathcal{E}(U_{n-1} + \delta r \otimes \delta s) - \mathcal{E}(U_{n-1})$$

$$E_n \leq \int_\Omega \nabla U_{n-1} \cdot \nabla(\delta r \otimes \delta s) - \int_\Omega f \, \delta r \otimes \delta s$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(\delta r \otimes \delta s)|^2$$

Or d'après (2-approx) avec $\delta r \otimes \delta s$ comme fonction test :

$$\int_\Omega f \, \delta r \otimes \delta s = \int_\Omega \nabla U_h \nabla(\delta r \otimes \delta s).$$

Donc $E_m \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \otimes \delta s)|^2 - \int_\Omega \nabla g_{m-1} \nabla(\delta r \otimes \delta s)$.

Soit $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$. En appliquant l'inégalité ci-dessus et en passant à la limite on obtient :

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \cdot \nabla(\delta r \otimes \delta s) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(\delta r \otimes \delta s)|^2$$

et ce pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$. En particulier en choisissant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta r' = \delta r \cdot 2^{-k}, \text{ on a :}$$

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \otimes \delta s) \leq 2^{-(k+1)} \int_\Omega |\nabla(\delta r \otimes \delta s)|^2$$

puis en faisant $k \longrightarrow \infty$ on obtient :

$$\int_\Omega \nabla g_\infty \nabla(\delta r \otimes \delta s) = 0.$$

Puis par linéarité en choisissant successivement pour δr et δs les $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$, on obtient

$$\int_\Omega |\nabla g_\infty|^2 = 0$$

Donc $\boxed{g_\infty = 0}$.

Donc $\forall h$ $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut avoir qu'une valeur d'adhérence, 0. Donc nécessairement.

$$g_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u_h}$. En outre on sait que pour h assez petit les u_h se rapprochent asymptotiquement de u, d'où la convergence de la méthode.

Question 8

- Rappelons les équations d'Euler (6) associées au problème (5) : pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$,

$$\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_m) \cdot \nabla(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m) = \int_\Omega f\,(r_m \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m)$$
$$- \int_\Omega \nabla U_{n-1} : \nabla(r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m)$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et réécrivons $\int_\Omega \nabla r_k \otimes s_k \cdot \nabla r_n \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m$.

Comme $u_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} (r_k \otimes s_k)$, cela permettra de réécrire le membre de gauche ainsi que le second terme du membre de droite.

- Notations : $\begin{cases} r_m : x \longmapsto \sum_{i=1}^{I} R_m^{(i)} \phi_i(x) = {}^t R_m \cdot \Phi(x) \\ s_m : y \longmapsto \sum_{i=1}^{I} S_m^{(i)} \phi_i(y) = {}^t S_m \, \Phi(y) \end{cases}$

avec $\Phi : z \longmapsto \begin{bmatrix} \phi_1(z) \\ \vdots \\ \phi_I(z) \end{bmatrix}$. Similairement on écrira $\begin{cases} \delta r = \delta R \cdot \Phi \\ \delta s = \delta S \cdot \Phi \end{cases}$

- Puis $\int_\Omega \nabla(r_k \otimes s_k) \cdot \nabla(r_m \otimes \delta s + \delta r \otimes s_m)$

$$= \int_{(x,y) \in \Omega} \begin{bmatrix} r_k'(x)\, s_k(y) & r_k(x)\, s_k'(y) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_m'(x)\, \delta s(y) + \delta r'(x)\, s_m(y) \\ r_m(x)\, \delta s'(y) + \delta r(x)\, s_m'(y) \end{bmatrix} dx\,dy$$

$$= \int_\Omega ({}^t R_k \, \Phi'(x)) \cdot ({}^t S_k \, \Phi(y)) \left[({}^t R_m \, \Phi'(x))({}^t \delta S \, \Phi(y)) + ({}^t \delta R \, \Phi'(x)) \cdot ({}^t S_m \, \Phi(y)) \right]$$

$$+\int_\Omega ({}^tR_k\underline{\Phi}(x))({}^tS_k\underline{\Phi}'(y))\left[({}^tR_m\underline{\Phi}(x))({}^t\delta S\,\underline{\Phi}'(y))+({}^t\delta R\,\underline{\Phi}(x))\cdot({}^tS_m\underline{\Phi}'(y))\right]$$

$$=\int_\Omega {}^tR_k\left[\underline{\Phi}'(x)\,{}^t\underline{\Phi}'(x)\right]R_m\cdot {}^tS_k\left[\phi(y)\,{}^t\phi(y)\right]\delta S$$

$$+\int_\Omega {}^tS_k\left[\underline{\Phi}(y)\,{}^t\underline{\Phi}(y)\right]S_m\cdot {}^tR_k\left[\underline{\Phi}'(x)\,{}^t\underline{\Phi}'(x)\right]\delta R$$

$$+\int_\Omega {}^tR_k\left[\underline{\Phi}(x)\,{}^t\underline{\Phi}(x)\right]R_m\cdot {}^tS_k\left[\underline{\Phi}'(y)\,{}^t\underline{\Phi}'(y)\right]\delta S$$

$$+\int_\Omega {}^tS_k\left[\underline{\Phi}'(y)\cdot{}^t\underline{\Phi}'(y)\right]S_m\cdot {}^tR_k\left[\underline{\Phi}(x)\,{}^t\underline{\Phi}(x)\right]\delta R.$$

$$=({}^tR_k D R_m)\times({}^tS_k M\delta S)+({}^tS_k M S_m)\times({}^tR_k D\delta R)$$

$$+({}^tR_k M R_m)\times({}^tS_k D\delta S)+({}^tS_k D S_m)\times({}^tR_k M\delta R)$$

. Réécrivons également le premier terme du membre de droite dans (5), en utilisant l'expression de f sous forme séparée.

$$\int_\Omega f(r_n\otimes\delta s+\delta r\otimes s_m)$$

$$=\int_\Omega\left(\sum_{p=1}^{P} f_1^p(x)f_2^p(y)\right)\cdot\left[({}^tR_m\underline{\Phi}(x)\cdot{}^t\delta S\,\underline{\Phi}(y))+({}^t\delta R\,\underline{\Phi}(x)\cdot{}^tS_m\underline{\Phi}(y))\right]$$

$$=\sum_{p=1}^{P}\Bigg(\int_\Omega (f_1^p(x)f_2^p(y))({}^tR_m\underline{\Phi}(x))({}^t\delta S\,\underline{\Phi}(y))$$

$$+\int_\Omega (f_1^p(x)f_2^p(y))({}^t\delta R\,\underline{\Phi}(x))({}^tS_m\underline{\Phi}(y))\Bigg)$$

$$= \sum_{p=1}^{P} \left[({}^tR_m F_1^p)({}^t\delta S F_2^p) + ({}^t\delta R F_1^p)({}^tS_m F_2^p) \right]$$

Puis (5) devient : pour tout $(\delta R, \delta S) \in (\mathbb{R}^I)^2$, on a :

$$({}^tR_m D R_m)({}^tS_m M \delta S) + ({}^tS_m M S_m)({}^tR_m D \delta R) + ({}^tR_m M R_m)({}^tS_m D \delta S)$$

$$+ ({}^tS_m D S_m)({}^tR_m M \delta R) = \sum_{p=1}^{P} \left[({}^tR_m F_1^p)({}^t\delta S F_2^p) + ({}^t\delta R F_1^p)({}^tS_m F_2^p) \right]$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \Big[({}^tR_k D R_m)({}^tS_k M \delta S) + ({}^tS_k M S_m)({}^tR_k D \delta R) + ({}^tR_k M R_m)({}^tS_k D \delta S)$$

$$+ ({}^tS_k D S_m)({}^tR_k M \delta R). \Big]$$

Choisissons $\delta S = 0$. Ainsi pour tout $\delta R \in \mathbb{R}^I$,

$$({}^tS_m M S_m)({}^tR_m D \delta R) + ({}^tS_m D S_m)({}^tR_m M \delta R) = \sum_{p=1}^{P} ({}^t\delta R F_1^p)({}^tS_m F_2^p)$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \left[({}^tS_k M S_m)({}^tR_k D \delta R) + ({}^tS_k D S_m)({}^tR_k M \delta R) \right]$$

(avec pour tout $1 \leq p \leq P$, ${}^t\delta R . F_1^p =$)

avec pour tout $1 \leq k \leq m$, $\underbrace{{}^tR_k D \delta R}_{\in \mathbb{R}} = {}^t({}^tR_k D \delta R)$

$= ({}^t\delta R)({}^tD)(R_k)$

$= {}^t\delta R . D . R_k$ } D symétrique

et similairement ${}^tR_k M \delta R = {}^t\delta R \cdot M \cdot R_k$.

Donc pour tout $\delta R \in \mathbb{R}^I$, on a :

$${}^t\delta R \left[({}^tS_m M S_m) D R_m + ({}^tS_m D S_m) M R_m \right] = {}^t\delta R \Big[\sum_{p=1}^{P} ({}^tS_m F_2^p) F_1^p$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \left(({}^tS_k M S_m) D R_k + ({}^tS_k D S_m) M R_k \right) \Big]$$

On en déduit avec les notations de l'énoncé que :

$$\mathcal{M}(S_m) R_m = \mathcal{F}_m(S_m) \qquad (7a)$$

Puis en choisissant $\delta R = 0$, on obtient de même l'équation

$$\mathcal{M}(R_m) S_m = \mathcal{G}_m(R_m) \qquad (7b)$$

Enfin en multipliant à gauche (7a) et (7b) par δR et δS et en remontant les calculs on retrouve (5) !

Ainsi les équations d'Euler (6) s'écrivent bien sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{M}(S_m) R_m = \mathcal{F}_m(S_m) \\ \mathcal{M}(R_m) S_m = \mathcal{G}_m(R_m) \end{cases} \qquad (7)$$

Pour aller plus loin

Réécrivons le problème (5) pour pouvoir appliquer un algorithme de minimisation :

- étant donné $n \geq 1$, on cherche :

$$(r_n, s_n) \in \arg\min_{(r,s) \in V_h \times V_h} \mathcal{E}(U_{n-1} + r \otimes s)$$

avec $u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} r_k \otimes s_k$

- ce qui revient à chercher : (en décomposant dans $(\phi_i)_{1 \leq i \leq I}$)

$$(R_n, S_n) \in \arg\min_{(R,S) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I} \mathcal{E}\Big(u_{n-1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{I} R_i \phi_i}_{{}^tR\vec{\phi}} \otimes \sum_{j=1}^{I} S_j \phi_j\Big)$$

- Or pour tout $(R, S) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$:

$$\mathcal{E}(U_{n-1} + {}^tR\,\vec{\phi}(x) \otimes {}^tS\,\vec{\phi}(y))$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{n-1} + \nabla({}^tR\vec{\phi} \otimes {}^tS\vec{\phi})|^2 - \int_\Omega f(u_{n-1} + {}^tR\vec{\phi} \otimes {}^tS\vec{\phi})$$

$$= \mathcal{E}(u_{n-1}) + \int_\Omega (\nabla u_{n-1}) \cdot (\nabla [{}^tR\vec{\phi}(x)] \cdot [{}^tS\vec{\phi}(y)])$$

$$- \int_\Omega f[{}^tR\vec{\phi}(x)][{}^tS\vec{\phi}(y)] + \int_\Omega |\nabla({}^tR\vec{\phi}(x))({}^tS\vec{\phi}(y))|^2$$

avec $\vec{\phi} : x \longmapsto \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ | \\ \phi_I(x) \end{bmatrix}$

Puis il suffit de minimiser

$$(r,s) \longmapsto \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s) - \mathcal{E}(u_{n-1}).$$

- Soit $(x,y) \in \Omega^2$:

$$\nabla ({}^tR\vec{\phi} \otimes {}^tS\vec{\phi})[(x,y)]$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq I} R_i S_j \begin{bmatrix} \phi_i'(x)\, \phi_j(y) \\ \phi_i(x)\, \phi_j'(y) \end{bmatrix}$$

Donc $|\nabla({}^tR\vec{\phi} \otimes {}^tS\vec{\phi})|^2$

$$= \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq I} R_i S_j R_k S_l \big(\phi_i'(x)\phi_j(y)\phi_k'(x)\phi_l(y) + \phi_i(x)\phi_j'(y)\phi_k(x)\phi_l'(y) \big)$$

- d'où le dernier terme :

$$\int_\Omega |\nabla\, {}^tR\vec{\phi}(x)\, {}^tS\vec{\phi}(y)|\, dx\,dy = ({}^tRDR)({}^tSMS) + ({}^tRMR)({}^tSDS)$$

- puis de manière similaire en utilisant $u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (r_k \otimes s_k)$ et en décomposant les r_k et s_k dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq I}$ en $R^{(k)}$ et $S^{(k)} \in \mathbb{R}^I$:

$$\int_\Omega \nabla u_{n-1} \cdot \nabla ({}^tR\vec{\phi} \otimes {}^tS\vec{\phi})$$

$$= \int_\Omega \sum_{k=1}^{n-1} \Big[\sum_{1 \leq i,j,l,m \leq I} R_i S_j R_l^{(k)} S_m^{(k)} \big(\phi_i'(x)\phi_l'(x)\phi_j(y)\phi_m(y) + \phi_i(x)\phi_l(x)\phi_j'(y)\phi_m'(y) \big) \Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i,j,l,m \leq I} R_i S_j R_l^{(k)} S_m^{(k)} \left(D_{il} M_{jm} + M_{il} D_{jm} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[({}^tRDR^{(k)})({}^tSMS^{(k)}) + ({}^tRMR^{(k)})({}^tSDS^{(k)}) \right]$$

• Donc on minimise :

$$(R,S) \in (\mathbb{R}^I)^2 \longmapsto \sum_{k=1}^{n-1} \left[({}^tRDR^{(k)})({}^tSMS^{(k)}) + ({}^tRMR^{(k)})({}^tSDS^{(k)}) \right]$$

$$+ ({}^tRDR)({}^tSMS) + ({}^tRMR)({}^tSDS)$$

$$- \sum R_i S_j \underbrace{\left(\int_\Omega f(x,y) \phi_i(x) \phi_j(y) \, dx\, dy \right)}_{F_{ij}}$$

en utilisant une méthode d'optimisation sur Python.