

# Projet Radar

Amine OUASFI  
Jean GUILLAUME  
Lorraine LESTIENNE  
Alice DUMAY

March 2019

## 1 Introduction

Le sujet traite de la problématique suivante: **Comment choisir pour un radar la puissance de son signal émis et son seuil de détection pour garantir une PFA<sup>1</sup> et une PDC<sup>2</sup> données ?**

Pour y répondre la voie choisie par le sujet est celle de comparer l'amplitude complexe du signal reçu avec le seuil T.

## 2 Modélisation du signal

Soit les variables aléatoires suivantes :

- Y signal complexe reçu.
- W le bruit (gaussien )
- X le signal utile .

**1.a.** Il faut faire un calcul théorique basé sur un modèle du radar puis construire le radar car pour garantir une puissance seuil satisfaisante il d'abord faut fixer les paramètres fondamentaux du radar.

**1.b.** Avec les notations précédentes on a

$$Y = W + X \quad (\text{H1})$$

$$Y = W \quad (\text{H0})$$

En posant  $Y = \epsilon.X + W$  avec  $\epsilon$  une variable de Bernoulli de paramètre p indépendante de X et de W et qui indique si la cible est présente ou pas. Par conséquent,

$$P_{DC} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 1)$$

---

<sup>1</sup>Probabilité de fausse alerte

<sup>2</sup>probabilité de détection

$$P_f = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 0)$$

1.c.

- **Quand T tend vers  $+\infty$  :** Dans ce cas l'ensemble  $\{|Y| > T\}$  est vide. Par conséquent l'ensemble  $\{|Y| > T\} \cap \{e=1\}$  l'est également. D'où,

$$P_{DC} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 1) = \frac{\mathbb{P}(\{|Y| > T\} \cap \{e = 1\})}{\mathbb{P}(e = 1)} = 0$$

et de même,

$$P_{FA} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 0) = \frac{\mathbb{P}(\{|Y| > T\} \cap \{e = 0\})}{\mathbb{P}(e = 0)} = 0$$

- **Quand T tend vers 0 :** Dans ce cas l'ensemble  $\{|Y| > T\} = \Omega$ . Par conséquent,

$$\{|Y| > T\} \cap \{e = 1\} = \{e = 1\}$$

Donc,

$$P_{DC} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 1) = \frac{\mathbb{P}(\{|Y| > T\} \cap \{e = 1\})}{\mathbb{P}(e = 1)} = \frac{P(e = 1)}{P(e = 1)} = 1$$

et de même,

$$P_{FA} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 0) = \frac{\mathbb{P}(\{|Y| > T\} \cap \{e = 0\})}{\mathbb{P}(e = 0)} = \frac{P(e = 0)}{P(e = 0)} = 1$$

Il est souhaitable que la courbe ROC passe au dessus de la diagonale  $P_{FA} = P_{DC}$ , c'est à dire que pour un radar il est préférable que la probabilité de détection soit plus grande que la probabilité de fausse alerte.

### 3 Analyse empirique

2.a. Avec une loi de probabilité uniforme on obtient l'estimation suivante :

$$P_{DC} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 1) = \frac{|\{|Y| > T\} \cap \{e = 1\}|}{|\{e = 1\}|}$$

En fixant un seuil T on a :

- $|\{e = 1\}|$  est déterminé a partir de la colonne vérité terrain. C'est le nombre de 1 dans cette colonne.
- $|\{|Y| > T\} \cap \{e = 1\}|$  est le nombre de fois où  $\sqrt{Y_R^2 + Y_I^2} > T$  avec un 1 dans la colonne vérité terrain. De la même façon on détermine  $P_{FA}$  qui vaut :

$$P_{FA} = \mathbb{P}(|Y| > T/e = 0) = \frac{|\{|Y| > T\} \cap \{e = 0\}|}{|\{e = 0\}|}$$

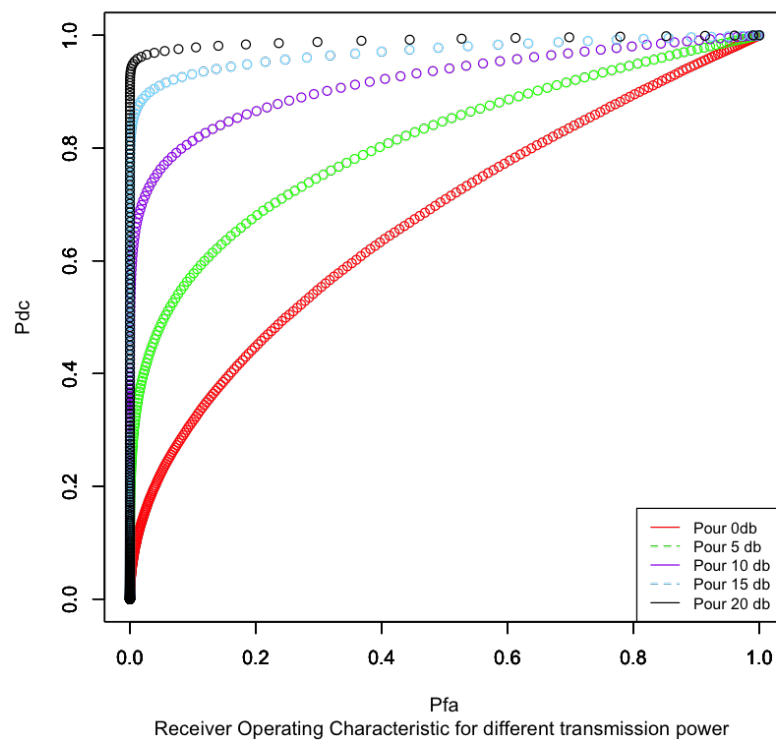


Figure 1: **Les courbes ROC expérimentales**

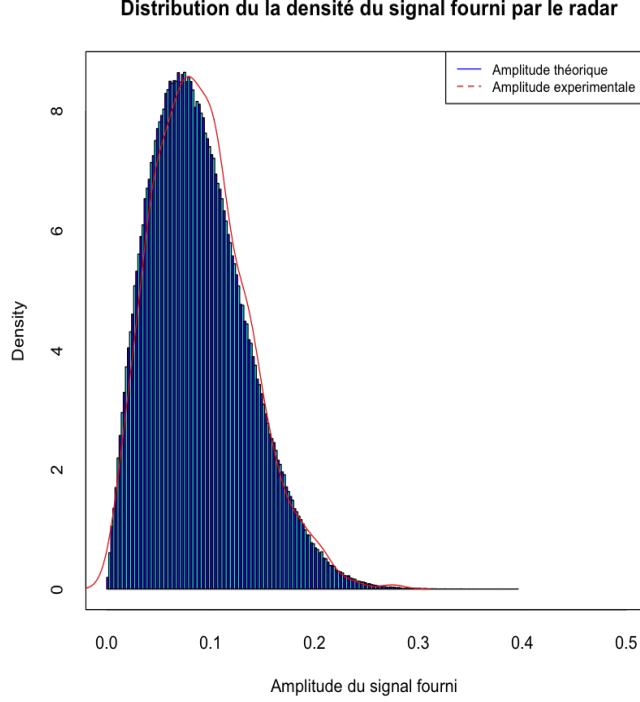


Figure 2: **Distribution de l'amplitude du signal fourni:** L'amplitude du signal n'est pas déterministe. Elle suit une loi de Rayleigh dont la densité est représenté en rouge ( Amplitude théorique).

## 4 La puissance de bruit est connue

**3.a** On peut écrire la PFA de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 P_{FA} &= \mathbb{P}(|W| > T) \\
 &= \mathbb{P}(\sqrt{W_R^2 + W_I^2} > T) \\
 &= 1 - \iint_{\sqrt{W_R^2 + W_I^2} < T} f_{W_R}(w_R) \cdot f_{W_I}(w_I) dw_R dw_I \\
 (Par \text{ indépendance}) \quad &= 1 - \iint_{\sqrt{W_R^2 + W_I^2} < T} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(w_R)^2}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(w_I)^2}{\sigma^2}\right) dw_R dw_I \\
 &= 1 - \iint_{\sqrt{W_R^2 + W_I^2} < T} \frac{1}{\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{(w_R^2 + w_I^2)}{\sigma^2}\right) dw_R dw_I
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ce calcul est justifié par le fait que  $W$  suit une loi Normale centrée de variance  $\sigma^2$  et par conséquent sa partie réelle et sa partie imaginaire suivent la

même loi de variance  $\sigma^2/2$ . Elles sont par ailleurs indépendantes. Pour calculer cette double intégral qui apparaît nous choisissons de passer en coordonnées polaires. Pour cela il suffit de poser  $w_R = r \cos(\theta)$ , et  $w_I = r \sin(\theta)$  avec  $r \in [0, +\infty]$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Avec ce changement de variable on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_{FA} &= 1 - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^T \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp^{-\left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right)} r dr \right) d\theta \\ &= 1 - \int_0^T \frac{r}{\sigma^2} \exp^{-\left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right)} dr \\ &= 1 - \left[ -\exp^{-\left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right)} \right]_0^T = \exp^{-\left(\frac{T^2}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \quad (2)$$

**3.b** Avec l'indication de l'énoncé on a :

$$P_{DC} = \mathbb{P}(|X+W| > T) = \int_{\frac{T^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} \frac{1}{\rho+1} \cdot \exp\left(-\frac{u}{\rho+1}\right) du = \left[ \exp\left(-\frac{u}{\rho+1}\right) \right]_{\frac{T^2}{2\sigma^2}}^{+\infty} = \exp^{-\left(\frac{T^2}{2(\sigma^2+A_0^2)}\right)}$$

Car,

$$\mathbb{P}(|X+W| > T) = \mathbb{P}\left(U > \frac{T^2}{\sigma^2}\right)$$

avec  $U = \frac{|X+W|^2}{\sigma^2}$  et  $\rho = \frac{A_0^2}{\sigma^2}$

**3.c.** On a,

$$P_{DC} = \exp^{-\left(\frac{T^2}{(\sigma^2+A_0^2)}\right)} = \exp^{-\left(\frac{\frac{T^2}{\sigma^2}}{(\rho+1)}\right)} = (P_{FA})^{\frac{1}{\rho+1}}$$

(3)

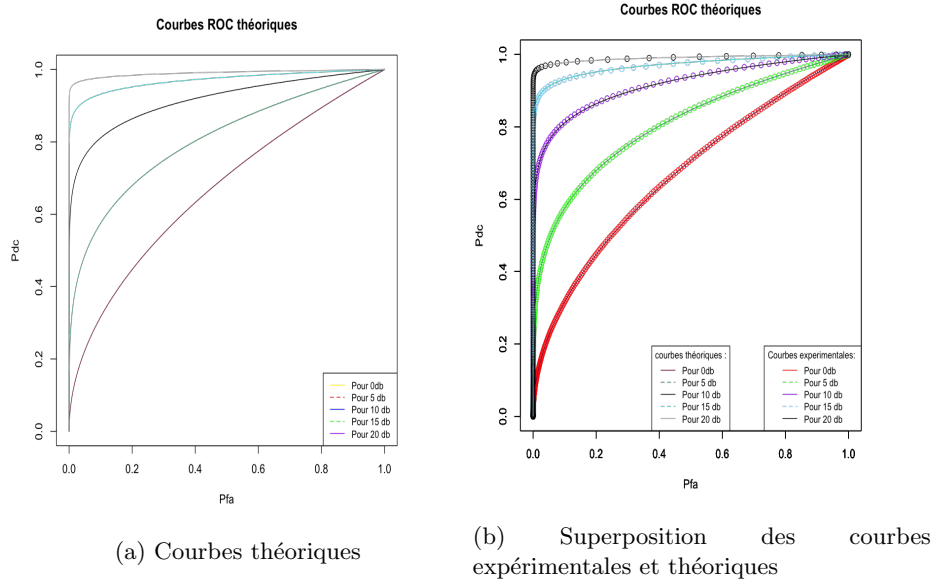


Figure 3: Courbes ROC pour les différentes puissances de transmission

**Commentaire:** On remarque que les courbes théoriques et expérimentales sont complètement superposées même avec un nombre de points très élevé : En effet, tout point, les points  $(P_{DC}, P_{FA})$  théoriques et expérimentales sont superposés ce qui un peu étrange.

## 5 La variance du bruit n'est pas parfaitement estimée

**4.a** Il s'agit ici d'estimer la variance à partir d'une estimée de la  $P_{FA}$ . Ce, afin de déterminer un rapport signal sur bruit nominal et donc un  $A_0$  nominal à partir de l'estimée de la variance et de  $P_{DC_{nominale}}$ . Posons  $\epsilon = 10^{-6}$ ,

$$P_{FA_{estimée}} = \epsilon \iff \exp\left(-\left(\frac{T^2}{\sigma_{estimé}^2}\right)\right) = \epsilon$$

$$d'où, \quad \sigma_{estimée}^2 = \frac{T^2}{\ln(\epsilon)}$$

Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\sigma_{réelle}^2 = \alpha \cdot \sigma_{estimée}^2$  alors ,

$$P_{FA_{réelle}} = \exp\left(-\left(\frac{T^2}{\sigma_{réelle}^2}\right)\right) = \exp\left(-\left(\frac{T^2}{\alpha \cdot \sigma_{estimé}^2}\right)\right) = (\epsilon)^{\frac{1}{\alpha}} = 10^{-\frac{6}{\alpha}}$$

Aussi , l'équation (3) donne :

$$P_{DC_{nominale}} = \epsilon^{\frac{1}{\rho_{nominale}+1}} = 0.9 \iff \rho_{nominale} = \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(0.9)} - 1$$

d'où

$$A_{0,nominale}^2 = \sigma_{estimee}^2 \cdot \left( \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(0.9)} - 1 \right)$$

Par conséquent,

$$P_{DC_{réelle}} = P_{FA_{réelle}}^{\frac{1}{\rho+1}} = 10^{-\frac{6}{\alpha \cdot (\rho+1)}}$$

Cela permet d'obtenir les résultats suivants :

$\hat{\sigma}^2_{\frac{T^2}{\sigma^2}}$	1	0.5	2
PFA	1E-06	1E-03	1E-12
PDC	0.9	0.95	0.81
Puissance	$A_0^2$	$2 * (A_0^2)$	$(A_0^2)/2$

**Commentaire:** On voit qu'en surestimant le bruit, on diminue la probabilité de fausse alerte mais cela se fait au prix d'une probabilité de détection correcte plus faible. En revanche, en sous estimant le bruit on détecte bien mais la probabilité de fausse alerte augmente. //

**4.b** On considère que variance du bruit est inconnue. On travaille à  $A_0$  fixé. Si l'on dispose d'une variance de bruit maximal  $\sigma_0$ , on a d'abord,

$$P_{FA} \leq \exp^{-\left(\frac{T^2}{(\sigma_0^2)}\right)} \leq \exp^{-\left(\frac{T^2}{(\sigma_0^2)}\right)} = P_{FA_0}$$

Ce calcul montre qu'en surestimant le bruit, la PFA est surestimée. Donc on pourra atteindre les probabilités de fausses alertes aussi faibles qu'on veut. Le problème est avec une telle surestimation les probabilités de détection au delà de la  $P_{DC_0}$  sont in-atteignables. En fait le point de fonctionnement voulue ne pourra pas être positionnée sur aucune des courbes ROC car on cherche PFA et PDC dans des zones disjointes.