Théorème de Gauss-Markov

Démonstration

Cadre théorique du modèle linéaire gaussien : $Y = T\beta + e$ (T matrice $n_x q$ de rang q)
avec $e \sim N_n(0,\sigma^2 I_n)$ → $Y \sim N_n(T\beta, \sigma^2 I_n)$

L'objectif est de montrer que, parmi tous les estimateurs linéaires sans biais de β, l'estimateur des moindres carrés noté ici $\hat{\beta} = ({}^tTT)^{-1}\,{}^tTY$, est celui qui mène aux variances les plus faibles.

Calculons sa matrice de variance ; la matrice $({}^tTT)^{-1}$ étant symétrique et $V[Y]=\sigma^2 I_n$, on obtient :

$$V[\hat{\beta}] = ({}^tTT)^{-1}\,{}^tTV[Y]T({}^tTT)^{-1} = \sigma^2({}^tTT)^{-1}$$

Montrons que pour tout autre estimateur linéaire et sans biais de β , $\tilde{\beta} = AY$ avec $E[\tilde{\beta}] = \beta$,

avec A matrice $q_x n$, on a, pour i=1,…,q : $V[\tilde{\beta}_i] \geq V[\hat{\beta}_i]$

Décomposons la matrice de variance-covariance de $\tilde{\beta}$:

$$V[\tilde{\beta}] = V[\tilde{\beta} - \hat{\beta} + \hat{\beta}] = V[\tilde{\beta} - \hat{\beta}] + V[\hat{\beta}] + 2COV[\tilde{\beta} - \hat{\beta}, \hat{\beta}]$$

Il suffit alors de montrer que la matrice de covariance est nulle pour démontrer le résultat.

$$E[\tilde{\beta}] = E[AY] = AE[Y] = AT\beta = \beta \quad \rightarrow \quad AT = I_q$$

Et donc, en utilisant le fait que, avec A et B matrices $q_x n$: $COV[AY, BY] = AV[Y]{}^tB$

$$COV[\tilde{\beta} - \hat{\beta}, \hat{\beta}] = COV[\tilde{\beta}, \hat{\beta}] - V[\hat{\beta}] = COV[AY, ({}^tTT)^{-1}\,{}^tTY] - V[\hat{\beta}] = \sigma^2 AT({}^tTT)^{-1} - \sigma^2({}^tTT)^{-1} = 0$$

Parmi les estimateurs linéaires sans biais des composantes de β, les q estimateurs obtenus par la méthode des moindres carrés, composantes du vecteur $\hat{\beta} = ({}^tTT)^{-1}\,{}^tTY$, ont donc les variances les plus faibles . Pour i=1,…,q on a : $V[\tilde{\beta}_i] \geq V[\hat{\beta}_i]$.