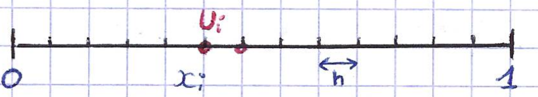
EDP : Équations aux dérivées partielles

Introduction :

EDP 1A : $\begin{cases} -U''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega :]0,1[\\ U(x) = 0 & \forall x \in \Gamma \quad (u(0) = u(1) = 0) \end{cases}$

→ On suppose l'existence / unicité de solution dans des espaces fonctionnelles (à définir). On se donne un maillage, de pas uniforme h, de Ω $(x_i)_{i \in [\![0,N+1]\!]}$ avec $x_i = ih$



→ On cherche $(U_i)_{i\in[\![0,N+1]\!]}$ Une approximation de U sur les noeuds du maillage.

$U_i \simeq U(x_i) \quad \forall i \in [\![0,N+1]\!]$

→ Les conditions aux limites donnent $U_0 = U_{N+1} = 0$

→ $\forall i \in [\![1,N]\!]$, on approxime $U''(x_i)$ par $\dfrac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$

→ On cherche $(U_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ solution de $-\dfrac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + c(x_i)\,v_i = f(x_i) \quad \forall i \in [\![1,N]\!]$

EDP 2A :

① Redéfinir le problème pour obtenir existence et éventuellement unicité de solutions au sens "faible" : On cherche $u \in \mathcal{F}_1$ solution de $\forall v \in \mathcal{F}_2$

$$\underbrace{\int_\Omega -U''v\,dx}_{} + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

Quid de $\mathcal{F}_1$ $\mathcal{F}_2$? → intégrales
→ "réduire" les hypothèses de régularité sur u par rapport à EDP 1A.

Quid de l'existence et unicité de solution ?

② Résolution numérique :
→ Solution sur des espaces de dimensions finies (choix des bases)
→ Approximation d'intégrales "Eléments finis"

I / Rappels sur les distributions

A - Espace des fonctions $D(\Omega)$

Définition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$D(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, C^∞ sur Ω et à support compact. C'est un espace vectoriel.

0177 9103
6284 6367

Remarque : i) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega \; f(x) \neq 0\}}$

De manière équivalente, supp f est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle.

($\bar{A}$: fermeture de A)

ii) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors toutes ses dérivées sont dan $\mathcal{D}(\Omega)$.

Définition : Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
On dit que $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

i) $\exists K$ Compact de $\mathbb{R}^n$, $K \subset \Omega$, tq $\forall p \in \mathbb{N}$ $\text{supp } \varphi_p \subset K$ et tq $\text{supp } \varphi \subset K$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, multi indice, $(D^\alpha \varphi_p)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$.

avec $D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall p \geq p_0 \; \forall x \in \Omega \; |D^\alpha \varphi_p(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon$$

Remarque : i) Il suffit que i) soit vraie à partir d'un certain rang

ii) $(D^\alpha \varphi_p)$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$

$$\iff \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_p(x) - D^\alpha \varphi(x)| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

Lemme 1 : $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, +\infty[$

La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ implique celle dans $L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, +\infty[$

Remarque : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\varphi \in L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, +\infty[$

Lemme 2 : Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\int_\Omega f\varphi = 0$ alors $f = 0$

Remarque : $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables intégrables sur tout compact inclus dans Ω.

Soit la relation d'équivalence $\sim$: $\forall (f, g) \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, $f \sim g \iff f = g$ p.p.

On pose $L^1_{loc}(\Omega) = \dfrac{\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)}{\sim}$ $\forall \dot{f} \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\dot{f} = \{g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \text{ tq } f = g \text{ p.p.}\}$

Idem : $\mathcal{L}^p(\Omega)$, $L^p(\Omega)$.

B - L'espace des distributions sur Ω : $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition : Une distribution T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ $T(\varphi + \lambda\psi) = T(\varphi) + \lambda T(\psi)$

ii) $\forall (\varphi_p) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, $T(\varphi_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$

EDP
CTD1.2

ex 1 : Soit $a \in \Omega$
On définit δ_a par $\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$
δ_a est une distribution appelée distribution de Dirac

- linéarité : claire
- $\forall (\varphi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 dans $D(\Omega)$

$|\delta_a(\varphi_p)| = |\varphi_p(a)|$

or $\varphi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{D(\Omega)} 0$ d'où (φ_p) converge uniformément vers 0 :

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq p_0$ $\forall x \in \Omega$ $|\varphi_p(x)| < \varepsilon$.

Fixons p_0. En particulier, pour $x = a \in \Omega$ $|\varphi_p(a)| < \varepsilon$.

Et $\varphi_p(a) \longrightarrow 0$ D'où $\delta_a(\varphi_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Et δ_a continue en 0, donc continue sur $D(\Omega)$

ex2 : Soit $f \in L^2(\Omega)$

On pose $T_f : \begin{cases} D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi \to \int_\Omega f\varphi \, dx \end{cases}$ i) T_f est une distribution sur Ω ($T_f \in D'(\Omega)$)

$\forall \varphi \in D(\Omega)$, alors $\varphi \in L^2(\Omega)$ et $f \times \varphi \in L^1(\Omega)$

- linéarité : linéarité de l'intégrale
- continuité : Soit $(\varphi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 dans $D(\Omega)$

On a $\forall p \in \mathbb{N}$ $\varphi_p \in L^2(\Omega)$ et $|\langle T_f, \varphi_p \rangle| = |\int_\Omega f\varphi_p \, dx|$

$= |(f, \varphi_p)_{L^2(\Omega)}| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi_p\|_{L^2(\Omega)}$

or $\varphi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{D(\Omega)} 0 \Rightarrow \varphi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{L^2(\Omega)} 0$

D'où $\|\varphi_p\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Donc T_f est continue en 0, et donc continue sur $D(\Omega)$. T_f est une distribution s[…]

ii) On a de plus $L^2(\Omega) \longrightarrow D'(\Omega)$ linéaire injective
$f \longrightarrow T_f$

- linéaire : claire
- injectivité : Soit $f \in L^2(\Omega)$ tq $T_f = 0$

$\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\langle T_f, \varphi \rangle = 0$

$D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$: $\exists (f_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tq $f_p \xrightarrow{L^2(\Omega)} f$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\langle T_f, f_p \rangle = 0$ par hypothèse or $\langle T_f, f_p \rangle = \int_\Omega f f_p \, dx$.

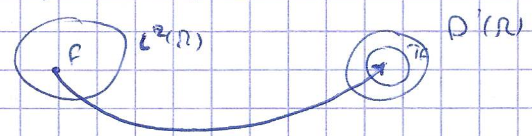
$f_p \in D(\Omega) \Rightarrow f \in L^2(\Omega)$ d'où $\langle T_f, f_p \rangle = (f, f_p)_{L^2(\Omega)}$

$\xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$ par continuité du p.s.

D'où $\|f\|_{L^2(\Omega)} = 0$ $L^2(\Omega) \to D'(\Omega)$ $\Rightarrow f = 0$

$f \to T_f$ est injective.

En pratique, on identifie $L^2(\Omega)$ à un s.e.v. de $D'(\Omega)$



Par abus de langage, on utilisera la notation f pour $f \in L^2(\Omega)$ ou $T_f \in D'(\Omega)$

ex 3 : Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

i) $T_f : \begin{cases} D(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \varphi \to \int_\Omega f\varphi \, dx \end{cases}$ est une distribution de Ω.

ii) $\begin{matrix} L^1_{loc}(\Omega) \to D'(\Omega) \\ f \to T_f \end{matrix}$ est linéaire et injective

De nouveau, on identifiera L^1_{loc} à un s.e.v de $D'(\Omega)$

C- Convergence des distributions.

Définition : Soit $T \in D'(\Omega)$

On dit que $(T_p) \in D'(\Omega)^{\mathbb{N}}$ converge vers T dans $D'(\Omega)$

si $\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\langle T_p, \varphi \rangle \xrightarrow[p \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

D- Dérivation des distributions

ex 1 : Soit $f \in C^1(]a,b[)$

$\forall \varphi \in D(]a,b[)$, $\exists (a_0, b_0) \in]a,b[^2$ tq $supp\, \varphi \subset [a_0, b_0]$
$a_0 < b_0$ $supp\, \varphi' \subset [a_0, b_0]$

$$\int_{]a,b[} f\varphi' dx = \int_{[a_0,b_0]} f\varphi' dx$$

or $f\varphi'$ continue sur $[a_0,b_0]$, elle est Riemann intégrable sur $[a_0,b_0]$ et on a,

$$\int_{[a_0,b_0]} f\varphi' dx = \int_{a_0}^{b_0} f(x)\varphi'(x)dx.$$

$$\int_{]a,b[} f\varphi' dx \overset{IPP}{=} [\, f(b_0)\overbrace{\varphi(b_0)}^{=0} - f(a_0)\overbrace{\varphi(a_0)}^{=0}] - \int_{a_0}^{b_0} f'(x)\varphi(x)dx.$$

$$= -\int_{[a_0,b_0]} f'\varphi \quad \text{(Riemann-intégrable sur un compact).}$$

$$= -\int_{]a,b[} f'\varphi\, dx. \quad \text{car } supp\, \varphi \subset [a_0, b_0]$$

" $\langle T_f, \varphi' \rangle = -\langle DT_f, \varphi \rangle$ "

EDP
CTD 1.3

Définition : Soit T une distribution sur Ω
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice
On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

On appelle dérivée α-ième d'une distribution T, notée $D^\alpha T$, la distribution de Ω définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{avec } \forall f \; D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Remarque : $D^\alpha T$ est bien une distribution sur Ω.

i) linéarité : claire

ii) continuité : $\forall (\varphi_p) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

D'où $\forall p \in \mathbb{N}$ $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi_p \rangle$.

On a $\forall p \in \mathbb{N}$ $D^\alpha \varphi_p \in \mathcal{D}(\Omega)$
De plus, $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$ $(D^\beta \varphi_p)$ converge uniformément vers 0.

En particulier $(D^\beta D^\alpha \varphi_p)$ converge uniformément vers 0, et $\exists K$ compact, $K \in \Omega$, tq $\forall p$ $\operatorname{supp} D^\alpha \varphi_p \subset K$

D'où $(D^\alpha \varphi_p)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$ par continuité de T, distribution sur Ω $\langle T, D^\alpha \varphi_p \rangle \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$
D'où $\langle D^\alpha T, \varphi_p \rangle \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ et $D^\alpha T$ continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

Lemme : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(T_f) = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$

preuve : Formule de Green

Remarque : Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors sa dérivée (au sens des distributions) n'est pas nécessairement dans $L^1_{loc}(\Omega)$. $\to$ Heaviside

Lemme : Soit $(f_p) \in L_2(\Omega)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha f_p \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha f \qquad \left(\text{« } D^\alpha T_{f_p} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha T_f \text{ »}\right)$$

preuve : Soient $(f_p) \in L^2(\Omega)^{\mathbb{N}}$, $f \in L^2(\Omega)$ tq $f_p \xrightarrow{L^2(\Omega)} f$.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $|\langle D^\alpha f_p, \varphi \rangle - \langle D^\alpha f, \varphi \rangle| =$

$$| (-1)^{|\alpha|} (\langle f_p, D^\alpha \varphi \rangle - \langle f, D^\alpha \varphi \rangle |$$

$$= \left| \int_\Omega (f_p - f) D^\alpha \varphi \, dx \right| \quad \text{or } D^\alpha \varphi \in L^2(\Omega)$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \underbrace{\|f_p - f\|_{L^2(\Omega)}}_{\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

Et $\langle D^\alpha f_p, \varphi \rangle \xrightarrow[p \to +\infty]{} \langle D^\alpha f, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad D^\alpha f_p \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha f$

II / Introduction aux espaces de Hilbert

Soit E un evn.

A - Suite de Cauchy, espace complet

Définition : Soit (u_n) suite de E. (U_n) est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geq n_0,\ q \geq n_0 \quad \|U_p - U_q\| < \varepsilon.$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \|U_{n+p} - U_n\| < \varepsilon.$

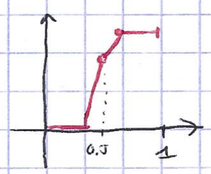
Propriété : i) Soit (u_n) suite de E qui converge. Alors (U_n) est de Cauchy.

ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

Remarque : Une suite de Cauchy n'est pas necessairement convergente

ex : $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de $\|.\|_1$ (norme sur E) : $\forall f \in E \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$

Alors (f_p) définie par



Définition : Une partie de X de E est dite complète si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

Définition : Si E est complet, alors E est dit "Banach"

ex1 : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sont complets

Propriété : Tout evn de dimension finie est complet

Propriété : $\forall p \in [1, +\infty[$, $L^p(\Omega)$ est complet pour $\|.\|_p$.

Propriété : Toute partie compacte de E est complète.

B - Espaces de Hilbert

Définition : Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien (e.v. muni d'un produit scalaire) complet pour la norme induite par le p.s.

Propriété : $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le p.s $(\ ,\ )_{L^2(\Omega)}$.

Définition : Soit E Hilbert

Soit F une partie de E non vide. On appelle orthogonal de F dans E

$F^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall y \in F \ (x,y) = 0\}.$

Théorème : Soit H un Hilbert. Soit F un sev fermé de H

alors $H = F \oplus F^\perp$

Théorème : Représentation de Riesz

Soit H un espace de Hilbert.
Soit f une forme linéaire continue sur H.
$\exists!\ a \in H$ tq $\forall x \in H \quad f(x) = (x|a)_H$

De plus, $|||f||| = \|a\|_V$

C - Adjoint dans les espaces de Hilbert

Définition : Soient E, F deux espaces de Hilbert
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ $v \in \mathcal{L}(E,F)$.

v est appelée adjoint de u, si $\forall (x,y) \in E \times F$

$$(u(x), y)_F = (x, u(y))_E$$

Propriété : Soient E, F deux Hilbert
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue, alors $\exists!\ u^* \in \mathcal{L}(F,E)$, continue
tq $\forall (x,y) \in E \times F$

$$(u(x), y)_F = (x, u^*(y))_E$$

Propriété : Soient E,F Hilbert, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue

i) $[\mathrm{Im}\, u]^\perp = \ker u^*$. De plus si $\mathrm{Im}\, u$ est fermé $\mathrm{Im}\, u = [\ker u^*]^\perp$

ii) $[\mathrm{Im}\, u^*]^\perp = \ker u$. Si $\mathrm{Im}\, u^*$ fermé, alors $\mathrm{Im}\, u^* = [\ker u]^\perp$

III / Espace de Sobolev

idée : $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \quad (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (2) \end{cases}$ avec $f \in L^2(\Omega)$

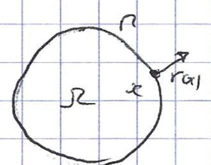
On suppose $u \in C^2(\bar{\Omega})$. On multiplie (1) par $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on intègre sur Ω.

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

Par la formule de Green,

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Gamma v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} r_i\, d\Gamma(x)$$

avec $r(x) = (r_i(x)) \in \mathbb{R}^n$ normale sortante unitaire en x à Γ



$$\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u^T \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx - \int_\Gamma v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} r_i\, d\Gamma(x) = \int_\Omega f v\, dx$$

$= v|\Gamma = 0$ car $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D'où trouver $u \in C^2(\Omega)$ tq $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$.

Peut-on relaxer l'hypothèse de régularité $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$?

A- Espace $H^1(\Omega)$ et généralisation

Définition : On appelle $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable sur Ω tq les dérivées partielles d'ordre 1 (au sens des distributions) sont également de carré intégrables

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tq } \forall i \in [\![1,n]\!] \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On munit du p.s.

$$\forall (u,v) \in H^1(\Omega) \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}}_{:= (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n}}$$

On note $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$ la norme induite sur $H^1(\Omega)$

$$\forall u \in H^1(\Omega) \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

Remarque : $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$?

Au sens des distributions : $\frac{\partial u}{\partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}(T_u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$\exists g \in L^2(\Omega)$ tq $T_g = \frac{\partial}{\partial x_i}(T_u) \iff \int_\Omega g v \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$

$\frac{\partial u}{\partial x_i} \sim g$ (abus de langage)

Propriété : $H^1(\Omega)$ muni de $(\ , \ )_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert

preuve : i) H^1 est un espace préhilbertien
ii) H^1 est complet pour $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$

Soit $(u_p) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ suite de Cauchy

$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p \geq p_0, q \geq p_0$

$\|u_p - u_q\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$

Par définition de $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$, $\|u_p - u_q\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \ \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u_q}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$

D'où (u_p) suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \right)$ suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$, or $L^2(\Omega)$ complet pour $\| \ \|_{L^2(\Omega)}$,

ces suites convergent dans $L^2(\Omega)$. D'où $\exists \omega \in L^2(\Omega)$ tq $u_p \xrightarrow{L^2(\Omega)} \omega$

$\forall i \in [\![1,n]\!], \exists \omega_i \in L^2(\Omega)$ tq $\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \omega_i$

or $u_p \to \omega$, d'après lemme $\forall i \in [\![1,n]\!] \ \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ (D^α avec $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\alpha_j \delta_{ij}$

$\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \omega_i$, d'après Lemme.

$\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{D'(\Omega)} \omega_i$ (D^α avec $\alpha = 0$).

par unicité de la limite dans $D'(\Omega)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \omega_i$

$\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\langle \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \varphi \rangle = \langle \omega_i, \varphi \rangle = \int_\Omega \underbrace{\omega_i}_{\in L^2(\Omega)} \varphi dx = -\int_\Omega \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$.

D'où $\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.

Bilan : $\omega \in H^1(\Omega)$

Et $\forall p \in \mathbb{N}$ $\|u_p - \omega\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_p - \omega\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}$

Or $\|u_p - \omega\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

$\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} = \|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \omega_i\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

D'où $\|u_p - \omega\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ la suite (u_p) converge vers $\omega \in H^1(\Omega)$

$\Rightarrow$ $H^1(\Omega)$ est complet

Remarque :
i) Si Ω est borné. $C^1(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$
ii) $H^1(\Omega) \not\subset C^1(\Omega)$
iii) $D(\Omega)$ est un sev de $H^1(\Omega)$

⚠ Mais $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

B- Espace $H_0^1(\Omega)$

Definition : On appelle $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tq } \exists (u_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ tq } \|u_p - u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0\}$$

Théorème : Inégalité de Poincaré

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante positive C_Ω tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,\Omega}$.

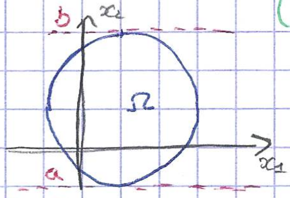
$$\text{avec } |v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{(\nabla v, \nabla v)_{(L^2(\Omega))^n}}$$

preuve : idée → Exploiter la définition de $H_0^1(\Omega)$
→ étude $\forall u \in D(\Omega)$
→ Passage à la limite (continuité des normes)

* Soit $u \in \mathcal{D}(\Omega)$

On prolonge u sur $\mathbb{R}^n$ par $\tilde{u}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on vérifie que $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$



* Ω est borné : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a<b$ tq

$\forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{\mathbb{R} \setminus [a,b]\}$ $(x', x_n) \notin \Omega$

et $\operatorname{supp} \tilde{u} \subset \Omega \not\subset \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a < x_n < b\}$.

* $\forall (x', x_n') \in \mathbb{R}^{n-1} \times [a,b]$

$x_n \longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n)$ est Riemann intégrable sur $[a, x_n']$ car $\tilde{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

et $$\int_{[a,x_n']} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n = \int_a^{x_n'} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n$$
$$= \tilde{u}(x', x_n') - \underbrace{\tilde{u}(x', a)}_{=0 \text{ car } (x',a) \notin \Omega}$$

D'où $$|\tilde{u}(x', x_n')|^2 = \left| \int_{[a,x_n']} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n \right|^2$$
$$\overset{C.S.}{\leq} \sqrt{\int_{[a,x_n']} 1\, dx_n}^{\,2} \times \sqrt{\int_{[a,x_n']} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n}^{\,2}$$

1 et $\begin{array}{l} [a, x_n'] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x_n \longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \end{array}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$.

$$|\tilde{u}(x', x_n')|^2 = \underbrace{(x_n' - a)}_{\leq b-a} \underbrace{\int_{[a,x_n']} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n}$$
$$\leq \int_{[a,b]} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n \quad \text{car } \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 \geq 0 \ \forall x_n \in [a,b].$$

On intègre par rapport à x' sur $\mathbb{R}^{n-1}$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{u}(x', x_n')|^2 dx' \leq (b-a) \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg(\underbrace{\int_{[a,b]} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n}_{\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n \text{ car } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \text{ à supp compacte}} \Bigg) dx'$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{u}(x', x_n')|^2 dx' \leq (b-a) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x', x_n) \right|^2 dx_n \right) dx'$$

par Fubini-Tonelli
$$\leq (b-a) \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x) \right|^2 dx \quad (\text{"}x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n\text{"}).$$

car $\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x) \right|^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\leq (b-a) \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

On intègre par rapport à x_n' sur $[a,b]$

EDP
CTD 1.6

$$\int_{[a,b]}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\tilde{u}(x',x_n')|^2 dx'\right) dx_n' \leq (b-a)^2 \left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Par Fubini-Tonelli: $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{[a,b]} |\tilde{u}(x',x_n')|^2 dx_n'\right) dx' \leq (b-a)^2 \left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Or $\int_{[a,b]} |\tilde{u}(x',x_n')|^2 dx_n' = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}(x',x_n')|^2 dx_n'$ car supp $\tilde{u} \subset \Omega$

D'où $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}(x',x_n')|^2 dx_n'\right) dx' \leq (b-a)^2 \left\|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Par Fubini-Tonelli ($|\tilde{u}(x)|^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(x)\right|^2 dx \quad \text{or } \tilde{u} = u 1_\Omega, \ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n} 1_\Omega$$

D'où $\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \underbrace{\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right|^2 dx}_{\leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx}$

d'où $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}} \leq (b-a)\, |u|_{1,\Omega}$

* Soit $u \in H_0^1(\Omega)$: $\exists (u_p) \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tq $\|u_p - u\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Par définition de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, $\|u_p - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ $\quad u_p \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \left\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|u_p\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)\sqrt{\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}$ par continuité de $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$
$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)\, |u|_{1,\Omega}$

On pose $C_\Omega = b-a > 0$ pour avoir le résultat

Remarque: i) Si Ω est borné, alors $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$
ii) De même, si Ω est borné, l'inégalité de Poincaré n'est pas vraie $\forall u \in H^1(\Omega)$.
ex: $\forall x \in \Omega$, $u(x) = 1$.

Corollaire: Soit Ω un ouvert borné, alors $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$.

De plus $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega) \quad (u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2_{L^2(\Omega)}} := (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n}$$

est un Hilbert

preuve: Soit $u \in H_0^1(\Omega)$

* Par définition de $\|\ \|_{H^1(\Omega)}$ $\quad |u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$

* De plus, par inégalité de Poincaré, $\exists C_\Omega \geq 0$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega^2 |u|^2_{1,\Omega}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{1,\Omega}}_{= \|u\|^2_{H^1(\Omega)}} \leq (1 + C_\Omega^2) |u|^2_{1,\Omega}$$

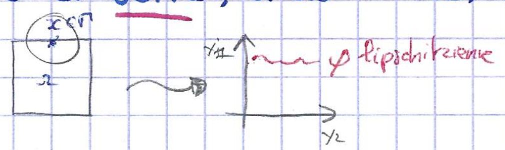
$$\Rightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_\Omega^2}\, |u|_{1,\Omega}$$

Bilan : $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ $|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_\Omega^2}\, |u|_{1,\Omega}$

Ces normes sont équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$.

Lemme : Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, à savoir un ouvert de frontière lipschitzienne et borné, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$

preuve : admis



C- $H^m(\Omega)$

Définition : On note $H^m(\Omega)$ l'ensemble

$$H^m(\Omega) = \{ v \text{ tq } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ |\alpha| \leq m \ \ D^\alpha v \in L^2(\Omega) \}$$

$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$\forall (u,v) \in H^m(\Omega)$ $(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$ est un Hilbert

Propriété : Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$

D- Trace sur Γ de fonction de $H^1(\Omega)$

Théorème : Soit Ω un ouvert de frontière lipschitzienne Γ. Il existe une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, notée γ_0, telle que $\forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ $\gamma_0(v) = v_{|\Gamma}$

On a de plus :

i) $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$

ii) γ_0 n'est pas nécessairement surjective sur $H^1(\Omega)$. Son image $\gamma_0(H^1(\Omega))$, notée $H^{1/2}(\Gamma)$, est dense dans $L^2(\Gamma)$

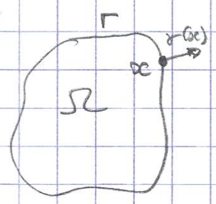
Prop : Formules de Green

Soit Ω domaine de $\mathbb{R}^n$.

EDP
CTD 1.7

On a : i) $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \gamma_0(u)\gamma_0(v)\nu_i \, d\Gamma(x)$$



ii) $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) \, d\Gamma(x)$$

avec $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\nu_i$ où $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ normale sortante à Γ en x.

exercice : Démontrer la proposition précédente

i) Formules de Stokes :

Soit $\omega \in C^1(\bar\Omega)$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\int_\Omega \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma \omega \nu_i \, d\Gamma(x)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} \omega \, dx = \int_\Gamma \omega . \nu \, d\Gamma(x) = \int_\Gamma \sum_{i=1}^n \omega_i \nu_i \, d\Gamma(x).$$

Mtq $\forall u \in C^2(\bar\Omega)$ $\forall v \in C^1(\bar\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Gamma v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, d\Gamma(x)$$

ii) Mtq $\forall u \in H^2(\Omega)$ $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) \, d\Gamma(x).$$

i) $\forall u \in C^2(\bar\Omega)$ $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}$

Soit $\omega = v \nabla u$

D'où $\operatorname{div}(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i^2} \right) = \nabla u . \nabla v + v \Delta u.$

$\omega \in C^1(\bar\Omega)$ D'où par Stokes

$$\int_\Omega (\nabla u . \nabla v + v \Delta u) dx = \int_\Gamma v \nabla u \, \nu \, d\Gamma(x).$$

$$\Leftrightarrow \int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, d\Gamma(x)$$

Formules de Green

- $\forall u \in C^2(\bar\Omega)$, $\forall v \in C^1(\bar\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \, d\Gamma(x)$$

avec $\nu(x)$ = normale unitaire sortante en x à Γ $\quad \|\nu(x)\|_2 = \sqrt{\nu(x)^T \nu(x)} = 1$

- $\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u) \, d\Gamma \quad \text{avec } \gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\nu_i$$

$\left(\forall u,v \in H^2(\Omega)^2 \ \forall i \in [\![1,n]\!] \ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma \gamma_0(u)\gamma_0(v) \nu_i d\Gamma \right)$

Ω domaine de $\mathbb{R}^n$, il vient $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ avec $m \geq 1$.

D'où $\exists (u_p) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^{\mathbb{N}}$ tq $u_p \xrightarrow{H^2(\Omega)} u$: $\|u_p - u\|_{H^2(\Omega)} \to 0$

$\exists (v_p) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})^{\mathbb{N}}$ tq $v_p \to v$: $\|v_p - v\|_{H^1(\Omega)} \to 0$

D'où $\forall p \in \mathbb{N}$ $u_p \in C^2(\bar{\Omega})$ $v_p \in C^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \Delta u_p v_p \, dx = -\int_\Omega \nabla u_p \nabla v_p \, dx + \int_\Gamma v_p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \, d\Gamma.$$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\|v_p - v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v_p - v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v_p}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

D'où $\|v_p - v\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \left\| \frac{\partial v_p}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$: $\frac{\partial v_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial v}{\partial x_i}$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\|u_p - u\|^2_{H^2(\Omega)} = \|u_p - u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$

$+ 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

D'où $\|u_p - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$: $u_p \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ $\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$\left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

- $\int_\Omega \Delta u_p v_p \, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} v_p \, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} v_p \, dx$

or $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega)$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $v_p \in L^2(\Omega)$.

D'où $\int_\Omega \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} v_p \, dx = \left(\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}, v_p \right)_{L^2(\Omega)}$

Par continuité du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$

$\int_\Omega \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} dx \to \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx$

$\int_\Omega \Delta u_p v_p \, dx \to \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx = \int_\Omega \Delta u v \, dx.$

On montre de même que $\int_\Omega \nabla u_p \nabla v_p \, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx$

$\to \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$

EDP
CTD 1.8

- $\int_\Gamma v_p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \, d\Gamma = \int_\Gamma \gamma_0(v_p) \sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i \, d\Gamma$

par définition de γ_0 et car $v_p \in D(\bar{\Omega})$ $\frac{\partial v_p}{\partial x_i} \in D(\bar{\Omega})$

$= \int_\Gamma \gamma_0(v_p)\, \gamma_1(u_p)\, d\Gamma$

Par définition de γ_0 : $\gamma_0(v_p) \in L^2(\Gamma)$

$\gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \in L^2(\Gamma) \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$

$|\gamma_1(u_p)|^2 = \left|\sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i\right|^2$

On pose $a \in \mathbb{R}^n$ tq $a_i = \gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right)$

$= |a^T \nu|^2 \leq \|a\|^2 \underbrace{\|\nu\|^2}_{=1}$ car ν normale sortante unitaire

$|\gamma_1(u_p)|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left|\gamma_0 \frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right|^2$ or $\gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \in L^2(\Gamma)$

D'où $\int_\Gamma |\gamma_1(u_p)|^2 d\Gamma \leq \sum_{i=1}^n \int_\Gamma \left|\gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right)\right|^2 d\Gamma < +\infty$

donc $\gamma_1(u_p) \in L^2(\Gamma)$

D'où $\int_\Gamma v_p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} d\Gamma = (\gamma_0(v_p), \gamma_1(u_p))_{L^2(\Gamma)}$

$\longrightarrow (\gamma_0(v), \gamma_1(u))_{L^2(\Gamma)}$

par continuité du p.s. $(\,)_{L^2(\Gamma)}$ et de γ_0 (donc γ_1)

$\int_\Gamma v_p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} d\Gamma \longrightarrow \int_\Gamma \gamma_0(v)\, \gamma_1(u)\, d\Gamma$

IV / Théorème de Lax-Milgram

A - Cadre du problème

Soit V un Hilbert

Soient a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V
ℓ une forme linéaire continue sur V.

On cherche $u \in V$ tq $\forall v \in V \quad a(u,v) = \ell(v)$.

A-t-on existence / unicité de solution ?

B - Enoncé

Théorème : Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert
Soient a une forme bilinéaire continue et coercive sur V.
ℓ une forme linéaire continue sur V.

Alors $\exists !\, u \in V$ tq $\forall v \in V$ $a(u,v) = \ell(v)$.

preuve : utiliser • le thm de représentation de Riesz
• décomposition de $V = F \oplus F^\perp$ avec F sev de V fermé

Corollaire : La solution u dépend continûment de la donnée ℓ.
preuve : Soient (ℓ_1, ℓ_2) 2 formes linéaires continues sur V.
Soient $(u_1, u_2) \in V^2$ les solutions associées, alors on montre que

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \underset{c>0}{C} \||\ell_1 - \ell_2\|| \to 0$$

→ a forme bilinéaire continue coercive sur V :

(continuité) $\exists M \geq 0$ tq $\forall (u,v) \in V^2$ $|a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$

(coercivité) $\exists \alpha > 0$ tq $\forall v \in V$ $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$

Prop : Sous les hypothèses précédentes, et si de plus a est symétrique, alors on a équivalence entre les problèmes

1| Trouver $u \in V$ tq $a(u,v) = \ell(v)$ $\forall v \in V$.

2| Trouver $u \in V$ solution de $\min\limits_{v \in V} \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$

C- Exemples

ex 1 : Chercher u solution de :

$$(P_{DH}) \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u(x) = 0 & \forall x \in \Gamma \quad \text{(Dirichlet Homogène)} \end{cases}$$

avec $c \in L^\infty(\Omega)$ tq $\exists c_0 > 0$ tq $c(x) \geq c_0$ p.p.
$f \in L^2(\Omega)$.

a| Formulation variationnelle du problème
"(P_{FV}) $u \in V$ tq $\forall v \in V$ $a(u,v) = \ell(v)$"

b| Etude du problème (P_{FV}).

c| Interprétation.

a| Formulation variationnelle

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (P_{DH})
$\forall v \in H^1(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u\, v\, dx + \int_\Omega c u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

EDP
CTD 1.9

$\Longleftrightarrow$ (formule de Green) $\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx - \int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u)\,d\Gamma + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$

or $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\gamma_0(v) = 0$ et $\int_\Gamma \gamma_0(v)\gamma_1(u)\,d\Gamma = 0$

On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx. \quad (\gamma_0(u) = 0).$$

Le problème s'écrit :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$.

avec $a : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (u,v) \to \int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega cuv\,dx. \end{cases}$

$\ell : \begin{cases} H_0^1 \to \mathbb{R} \\ v \to \int_\Omega f v\,dx \end{cases}$

Rem. Choix $\gamma_0(u) = 0$? Ω domaine d'où $\mathcal{D}(\bar\Omega)$ dense dans $H^1(\Omega)$
D'où $\forall u \in H^1(\Omega)$ $\exists (u_p) \in \mathcal{D}(\bar\Omega)^{\mathbb{N}}$ tq $\|u_p - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$
D'où $\|\gamma_0(u_p) - \gamma_0(u)\|_{L^2(\Omega)} = \|u_{p|\Gamma} - \gamma_0(u)\|_{L^2(\Gamma)}$ car $\forall v \in \mathcal{D}(\bar\Omega)$ $\gamma_0(v) = v_{|\Gamma}$

par continuité de γ_0 $\|\gamma_0(u_p) - \gamma_0(u)\|_{L^2(\Gamma)} \to 0.$

$\|u_{p|\Gamma} - \gamma_0(u)\|_{L^2(\Gamma)} \to 0.$

Si $u \in H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$ $\|u_{p|\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \to 0.$

Modélisation : Dérivées au sens des distributions

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \\ \gamma_0(u) = 0 \end{cases}$$

b) Existence / unicité de solution à (P_{FV}).

Remarque : Poly d'Analyse Hilbertienne → Moodle SN, 2A, S8, B.

- Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^2$: $H_0^1(\Omega)$ muni de $(\ )_{1,\Omega}$ est un Hilbert

avec $(\ )_{1,\Omega} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$
$(u,v) \to \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]}.$

Mq : ℓ linéaire continue

+ ℓ linéaire par linéarité de l'intégrale.

+ ℓ est continue : Idée → Mq $\exists M \geq 0$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $|\ell(v)| \leq M |v|_{1,\Omega}$

or $f \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$ donc $|P(v)| = |(f,v)_{L^2(\Omega)}|$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Cauchy-Schwarz

or Ω est un ouvert borné, d'où par inégalité de Poincaré

$\exists\, C_\Omega \geq 0$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,\Omega}$

D'où $|P(v)| \leq \underbrace{C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}}_{:= M \geq 0} |v|_{1,\Omega}$

$\Rightarrow P$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$

- a est bilinéaire, continue et coercive.

+ bilinéarité : claire

+ continue : Idée : $\exists\, M \geq 0$ tq $\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$ $|a(u,v)| \leq M |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$ (C)

$\exists\, \alpha > 0$ tq $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ $a(u,u) \geq \alpha |u|_{1,\Omega}^2$ (coercivité).

- continue : $|a(u,v)| = |\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx|$

$$\leq |\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx| + |\int_\Omega c u v \, dx|$$

$$|\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx| = |\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx| = |(u,v)_{1,\Omega}|$$

Remarque : $|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_\Omega^2}\, |u|_{1,\Omega}$ $u \in H_0^1(\Omega)$ avec Ω ouvert borné.

Par Cauchy-Schwarz ($(\;)_{1,\Omega}$ est un p.s. sur $H_0^1(\Omega)$ car Ω ouvert borné

$$|\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx| \leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$$

De plus, $|\int_\Omega c u v \, dx|$

or $\int_\Omega |cu|^2 dx \leq \int_\Omega \|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2 |u|^2 dx$

$$\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \underbrace{\int_\Omega |u|^2 dx}_{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2} \quad (*)$$

car $u \in L^2(\Omega)$

$< \infty$

d'où $cu \in L^2(\Omega)$

et $|\int_\Omega c u v \, dx| = |(c u, v)_{L^2(\Omega)}|$ car $v \in L^2(\Omega)$

$$\leq \|cu\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Cauchy-Schwarz.

$$\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

par $(*)$.

EDP
CTD 1.10

Par inégalité de Poincaré $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |u|_{1,2}$

$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,2}$

d'où $\left|\int_\Omega cuv\,dx\right| \leq C_\Omega^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{1,2} |v|_{1,2}$.

Bilan : $|a(u,v)| \leq |u|_{1,2}|v|_{1,2} + C_\Omega^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{1,2}|v|_{1,2}$.

$\leq (1 + C_\Omega^2 \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) |u|_{1,2} |v|_{1,2}$ et $\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega)^2$

d'où a est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

- coercive $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a(v,v) = \underbrace{\int_\Omega \nabla v \nabla v\,dx}_{\substack{= (v,v)_{1,2} \\ = \|v\|_{1,2}^2}} + \int_\Omega cv^2 dx$

par hypothèse $\int cv^2 dx \geq 0$ car $c \geq 0$ p.p

et $a(v,v) \geq |v|_{1,2}^2$ D'où a est coercive

Bilan : • $H_0^1(\Omega)$ muni de $(\ )_{1,2}$ est un Hilbert
- a bilinéaire, continue coercive
- ℓ linéaire continue

Par le théorème de Lax-Milgram $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$.

Autrement dit, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

c) Interprétation de (P_{fv})

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_{fv})

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx$

En particulier $\forall v \in D(\Omega)$ $\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Omega cuv\,dx = \int_\Omega fv\,dx$.

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ ($u \in H_0^1(\Omega)$)

$cu \in L^2(\Omega)$ (cf $\star\star$)

$f \in L^2(\Omega)$ par hypothèse

ceci s'écrit au sens des distributions :

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle}_{-\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right\rangle} + \langle cu, v \rangle = \langle f, v \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \underbrace{-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}_{=\Delta u} + cu - f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in D(\Omega).$$

$$\Leftrightarrow \quad -\Delta u + cu = f \text{ dans } D'(\Omega)$$

De plus, $\Delta u = cu - f$ dans $D'(\Omega)$ avec $cu - f \in L^2(\Omega)$.

D'où $\Delta u \in L^2(\Omega)$ $\left(\exists g \in L^2(\Omega) \text{ tq } \langle \Delta u, v \rangle = \langle g, v \rangle \ \forall v \in D(\Omega)'' \right)$

$$\Rightarrow -\Delta u + cu = f \text{ dans } L^2(\Omega).$$

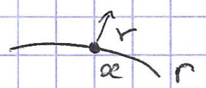
exercice 2 : Chercher u solution de :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{sur } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ tq $c \geq c_0 > 0$ p.p.

et $g \in L^2(\Omega)$.

Remarque : $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \gamma_i$ avec $\gamma(x) = (\gamma_i(x)) \in \mathbb{R}^n$ normale unitaire sortante en x à Γ



a/ Formulation variationnelle

Modélisation par la dérivée au sens des distributions.

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{sur } \Omega \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} \gamma_i}_{:= \gamma_1(u)} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de $(**)$
$\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v) \underbrace{\gamma_1(u)}_{=g} \, d\Gamma(x).$$

par formule de Green.

$$= -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\Gamma$$

D'où $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\Gamma$$

Le problème s'écrit : Chercher $u \in H^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$.

(P_{FV})

avec $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$
$(u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx$.

et $\ell : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.
$v \mapsto \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \, \gamma_0(v) \, d\Gamma$

b) Existence / Unicité de solution.

- $H^1(\Omega)$ muni du p.s. $\forall (u,v) \in H^1(\Omega)^2$ $(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u|v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$
  est un Hilbert

Mq ℓ linéaire continue :

- linéarité : claire (linéarité de $\int$ et $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ est linéaire)
- Continuité : Idée : mq $\exists M \geq 0$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$ $|\ell(v)| < M \|v\|_{H^1(\Omega)}$

$\forall v \in H^1(\Omega)$, $|\ell(v)| = \left| \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v) g \, d\Gamma(x) \right|$
$\leq \left| \int_\Omega f v \, dx \right| + \left| \int_\Gamma \gamma_0(v) g \, d\Gamma(x) \right|$

or $f \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$

d'où $\left| \int_\Omega f v \, dx \right| = |(f,v)_{L^2(\Omega)}|$
$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\|v\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \text{ par définition de } \| \|_{H^1(\Omega)}}$
$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

et $\left| \int_\Gamma \gamma_0(v) g \, d\Gamma(x) \right| = |(\gamma_0(v), g)_{L^2(\Gamma)}|$ car $g \in L^2(\Gamma)$ et $\gamma_0(v) \in L^2(\Gamma)$ par déf.
$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}$.

or γ_0 continue sur $H^1(\Omega)$: $\exists M_\gamma > 0$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$
$\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq M_\gamma \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

$\left| \int_\Gamma \gamma_0(v) g \, d\Gamma(x) \right| \leq M_\gamma \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Bilan : $|\ell(v)| \leq \underbrace{\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + M_\gamma \|g\|_{L^2(\Gamma)} \right)}_{:= M \geq 0} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

D'où ℓ est continue sur $H^1(\Omega)$.

• a est bilinéaire, continue et coercive.

+ a est bilinéaire : linéarité de l'intégrale

+ a est continue : idée : $\exists M \geq 0$ tq $\forall (u,v) \in H^1(\Omega)$ $|a(u,v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Soient $(u,v) \in H^1(\Omega)$.

$$|a(u,v)| \leq \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx\right| + \left|\int_\Omega cuv \, dx\right|$$

or $\left|\int_\Omega cuv\,dx\right| \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \underbrace{\|u\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}} \underbrace{\|v\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|v\|_{H^1(\Omega)}}$ (cf exercice 1). (par déf de $H^1(\Omega)$).

$$\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, $\left|\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx\right| = |(u,v)_{1,\Omega}|$ pas p.s. sur $H^1(\Omega)$.

$$= \left|\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\right|$$

or $(u,v) \in H^1(\Omega)^2 \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!]$ $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.

$$\left|\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx\right| \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)}}_{\leq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}}$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

"$\sum a_i b_i$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^n$" $= a^T b \leq \|a\|_2 \|b\|_2$ par Cauchy-Schwarz ($\mathbb{R}^n$).

$$\left|\int_\Omega \nabla u \nabla v\,dx\right| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}}_{=|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}} \times \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}}_{=|v|_{1,\Omega} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

$$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'où $|a(u,v)| \leq \underbrace{(\|c\|_{L^\infty(\Omega)} + 1)}_{\geq 0} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

+ a est coercive : idée : $\exists \alpha > 0$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$, $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$

$\forall v \in H^1(\Omega)$ $a(v,v) = \underbrace{\int_\Omega \nabla v \nabla v\,dx}_{=|v|^2_{1,\Omega}} + \int_\Omega c v^2\,dx$

$$= |v|^2_{1,\Omega} + \int_\Omega c v^2\,dx$$

EDP
CTD 1.12

or $c(x) \geq c_0$ p.p. , D'où $\int_\Omega c v^2 dx \geq c_0 \underbrace{\int_\Omega v^2 dx}_{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}$

$a(v,v) \geq |v|^2_{1,\Omega} + c_0 \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$

$\geq \underbrace{\min(1, c_0)}_{:= \alpha > 0} \underbrace{\left(|v|^2_{1,\Omega} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)}_{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}$

$\geq \alpha \left(|v|^2_{1,\Omega} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$

$\Rightarrow$ a est coercive.

Bilan : a est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

Finalement : + $H^1(\Omega)$ muni de $(\, , \,)_{H^1(\Omega)}$ est un Hilbert.
+ ℓ linéaire continue
+ a bilinéaire, continue, coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

D'après Lax-Milgram,

$\exists ! u \in H^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$

$\Leftrightarrow \exists ! u \in H^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \underbrace{\int_\Gamma \gamma_0(v) g \, d\Gamma(x)}_{=0 \ \forall v \in D(\Omega)}$

c/ Interprétation :

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (P_{FV}).

On a en particulier $\forall v \in D(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$

On a $v \in H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0$ D'où $\gamma_0(v) = 0$

De même que pour l'exercice 1, on montre que

$-\Delta u + cu = f$ dans $D'(\Omega)$

- On suppose que $u \in H^2(\Omega)$

$\forall v \in H^1(\Omega)$ $a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v) g \, dx$ (s° de P_{FV})

$\underset{\text{formule de Green}}{=} \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0(v) \gamma_1(v) \, dx$

D'où $\forall v \in H^1(\Omega)$ $\int_\Gamma \gamma_0(v) (g - \gamma_1(v)) \, d\Gamma = 0$

or $H^{1/2}(\Gamma) \{ := \operatorname{Im} \gamma_0 , \gamma_0 \in H^1(\Omega) \}$ est dense dans $L^2(\Gamma)$

$\forall w \in L^2(\Gamma) \ \exists (w_p) \ H^{1/2}(\Gamma)^{\mathbb{N}}$ tq $\|w_p - w\|_{L^2(\Gamma)} \to 0$

or $g - \gamma_1(u) \in L^2(\Gamma)$. Soit (w_p) une telle suite de $H^{1/2}(\Gamma)$.

$\forall p \in \mathbb{N}$ $w_p \in H^{1/2}(\Gamma) \Rightarrow \exists \tilde{w}_p \in H^1(\Omega)$ tq $w_p = \gamma_0(\tilde{w}_p)$.

d'où $\|g-\gamma_1(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \left|\int_\Gamma (g-\gamma_1(u))^2 d\Gamma\right|$

$= \left|\int_\Gamma (g-\gamma_1(u))^2 d\Gamma - \underbrace{\int_\Gamma \gamma_0(\hat{w}_p)(g-\gamma_1(u)) d\Gamma}_{=0 \text{ par } (*)}\right|$

$\|g-\gamma_1(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \left|\int_\Gamma \underbrace{(g-\gamma_1(u))}_{\in L^2(\Gamma)} \underbrace{(g-\gamma_1(u) - \gamma_0(\hat{w}_p))}_{\in L^2(\Gamma)} d\Gamma\right|$

$\underset{\text{Cauchy-Schw}}{\leq} \|g-\gamma_1(u)\|_{L^2(\Gamma)} \underbrace{\|g-\gamma_1(u) - \gamma_0(\hat{w}_p)\|_{L^2(\Gamma)}}_{\xrightarrow{p\to+\infty} 0}$.

si $g \neq \gamma_1(u)$.

alors $\|g-\gamma_1(u)\| \leq \|g-\gamma_1(u) - \gamma_0(\hat{w}_p)\|_{L^2(\Omega)}$

Encore vraie si $g = \gamma_1(u)$.

D'où $\|g-\gamma_1(u)\|_{L^2(\Gamma)} = 0 \Rightarrow \gamma_1(u) = g$ dans $L^2(\Gamma)$

V / Résolution numérique par la méthode des éléments finis

A- Principe de la méthode de Galerkin

Soit le problème : chercher $u \in V$ tq $a(u,v) = l(v)\ \forall v \in V$

Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (P_{FV})

On va chercher à approximer la solution en se ramenant sur des espaces de dimensions finies

Définition : On dit que les espaces V_h, $h>0$, forment une approximation interne de V si : i) $\forall h>0 \quad V_h \subset V$

ii) $\forall h>0$, $\exists v_h \in V_h$ tq $\|v-v_h\|_V \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ sev de V.

Typiquement, on cherche une solution sur V_h de dimension finie un problème :

trouver $u \in V_h$ tq $a(u_h, v_h) = l(v_h)$ (P_{FV_h})

Soit u_h une telle solution : $\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$

Or $V_h \subset V$, donc $a(u, v_h) = l(v_h)$ avec $u \in V$ solution de P_{FV}.

$\Rightarrow a(u-u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$

Sous les hypothèses de Lax-Milgram, a est bilinéaire, continue, coercive.

On suppose de plus a symétrique, de sorte que a définit un p.s. sur V

D'où u_h est la projection orthogonale de u sur V_h, pour le p.s. a.

EDP
CTD 1.13

Rappel :

(P_{FV}) : trouver $u \in V$ tq $\forall v \in V$ $a(u,v) = \ell(v)$ avec V Hilbert.
a forme bilinéaire, continue, coercive
ℓ forme linéaire continue.

Le thm de Lax-Milgram garantit existence/unicité d'une solution.

Pour la résolution numérique, on se ramène à un sev de V de dim $< +\infty$, noté V_h !

Chercher $u_h \in V_h$ tq $\forall v_h \in V_h$ $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ (P_{FV_h})

Soit u_h une solution de ce pb (existence plus tard)

$\forall v_h \in V_h$ $a(u - u_h, v_h) = 0$

Si on rajoute l'hypothèse a symétrique, alors a définit un p.s. sur V, et u_h est alors la pj orthogonale de u sur V_h pour le p.s. a.

1.1 Existence / Unicité d'une solution au problème (P_{FV_h})

Proposition : Soit V Hilbert.
Soient a une forme bilinéaire, continue et coercive, ℓ une forme linéaire continue, de sorte que le problème (P_{FV}) trouver $u \in V$ tq $\forall v \in V$ $a(u,v) = \ell(v)$ admet une unique solution.
Soit V_h un s.e.v de V de dimension finie.

Alors le problème (P_{FV_h}) Trouver $u_h \in V_h$ tq $\forall v_h \in V_h$ $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$ admet une unique solution.

Soit $u_h \in V_h$, solution de (P_{FV_h}), alors $\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$

avec M et α les constantes de continuité et coercivité de a.

preuve : * V_h est un fermé de V, comme s.e.v de V de dim $< +\infty$
Donc V_h est complet pour la norme $\|\ \|_V$ induite sur V_h.
Et V_h est un Hilbert pour a produit scalaire induit
D'après le théorème de Lax-Milgram, (P_{FV_h}) admet une unique solution

* Soit $u_h \in V_h$ solution de (P_{FV_h})
a est coercive donc $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h)$ avec $\alpha > 0$
D'où $\forall v_h \in V_h$, $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h)$
$\leq a(u - u_h, u - v_h) + \underbrace{a(u - u_h, v_h - u_h)}_{=0}$
or $v_h \in V_h$ et $u_h \in V_h$ donc $v_h - u_h \in V_h$
$\Rightarrow a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$

D'où $\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$ par continuité de a avec $M > 0$.

Si $u \neq u_h$, $\|u - u_h\|_V^{\cancel{2}} \leq \frac{M}{\alpha} \cancel{\|u - u_h\|_V} \|u - v_h\|_V$

(Encore vraie si $u = u_h$)

Donc $\forall v_h \in V_h$, $\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V$

$\Rightarrow \|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$

2./ Calcul effectif de $u_h \in V_h$.

Soit $N_h = \dim V_h$ $(< +\infty)$
Soit $(\varphi_i)_{i \in [\![1,N_h]\!]} \in V_h^{N_h}$ une base de V_h.
$\forall v_h \in V_h \ \exists ! (u_i)_{i \in [\![1,N_h]\!]} \in \mathbb{R}^{N_h}$ tq $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i$

u_h solution de (P_{FVH}) $\iff \forall v_h \in V_h \ , a(u_h, v_h) = l(v_h)$

$$\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!] \ a(u_h, \varphi_i) = l(\varphi_i)$$

$$\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!] \ a\left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j , \varphi_i\right) = l(\varphi_i)$$

$$\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!] \sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = l(\varphi_i).$$

$$\iff Ax = b$$

avec $A \in \mathcal{M}_{N_h}(\mathbb{R})$ tq $\forall (i,j) \in [\![1, N_h]\!]^2 \ a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$
$b \in \mathbb{R}^{N_h}$ tq $\forall i \in [\![1, N_h]\!] \ b_i = l(\varphi_i)$
$x = (u_i)_{i \in [\![1,N_h]\!]}$

$\implies$ Système linéaire à résoudre

De plus A est définie positive : $\forall x \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\} \ x^T A x > 0$

$$x^T A x = \sum_{(i,j) \in [\![1,N_h]\!]^2} A_{ij} x_i x_j = \sum_{(i,j) \in [\![1,N_h]\!]^2} a(\varphi_j, \varphi_i) x_i x_j$$

$$= a\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{N_h} x_j \varphi_j}_{:= \tilde{x} \in V_h} , \sum_{i=1}^{N_h} x_i \varphi_i\Big) = a(\tilde{x}, \tilde{x}) \geq \alpha \|\tilde{x}\|_V^2 \text{ par cont. de } a$$

Et $\|\tilde{x}\|_V = 0 \implies \tilde{x} = 0$

$$\implies \forall i \in [\![1, N_h]\!] \ x_i = 0$$

$$\implies x = 0$$

D'où $x^T A x > 0$, et le système admet une unique solution.

B - Exemple d'application.

1. / Principes

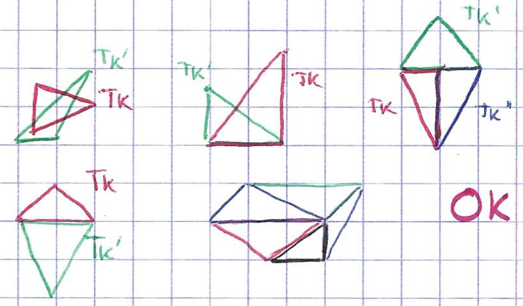
On cherche à recouvrir Ω par des éléments $(T_K)_{K \in [\![1,N_T]\!]}$ de formes simples (triangle, rectangle ...) Dans la suite, on travaillera avec des triangles (sans perte de généralité).
On note $\mathcal{T}_h = (T_K)_{K \in [\![1,N_T]\!]}$ la triangulation de Ω avec $h = \max_{K \in [\![1,N_T]\!]} h(T_K)$, où $h(T_K)$ est le diamètre du triangle T_K, à savoir la plus grande distance entre deux point du triangle.

EDP
CTD 1.11

Définition : Une triangulation $\mathcal{T}_h$ est admissible si :

i) L'intersection de deux élément est soit vide, soit un point, soit un côté tout entier.
ii) Les "coins" de Γ sont des sommets de $\mathcal{T}_h$.
iii) On pose $\Omega_h = \bigcup_{k \in [1,N_h]} T_k$, les sommets sont $\Gamma_h = \partial \Omega_h$, sont également sur Γ.
iv) Les éléments $T_k \in \mathcal{T}_h$ sont non dégénérés ($\text{Aire}(T_k) \neq 0$)

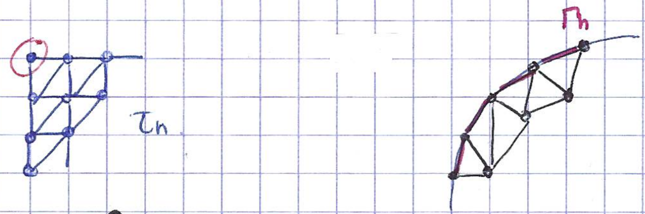
ex : i)



NON ADMISSIBLE

OK

ii) et iii)



2./ Exemple applicatif

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$

La formulation variationnelle s'écrit :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$.

(P_{FV}) avec $a : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx. \end{cases}$ bilinéaire, continue, coercive.

$\ell : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longrightarrow \int_\Omega fv \, dx \end{cases}$ linéaire continue.

D'après Lax-Milgram, $\exists ! u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_{FV})

3./ Espace variationel discret

On suppose avoir N_T triangles $(T_k)_{k\in[1,N_T]}$ recouvrant le domaine, de diamètre maximal égal à h.
On a ainsi un maillage constitué des N_s sommets $(q_i)_{i\in[1,N_s]}$ de ces triangles.
Soit $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées du plan. On note P_1
On note $P_1 = \mathbb{R}_1[x_1,x_2]$ les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 en les variables x_1, x_2.
On a $\dim P_1 = 3$ et $(1, x_1, x_2)$ forme une base de $\mathbb{R}_1[x_1,x_2]$.
On pose $V_h = \{v_h \in \overline{V_h} \text{ tq } v_h|_\Gamma = 0\}$. Avec $\overline{V_h} = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tq } v_h|_{T_k} \in P_1 \ \forall k \in [1,N_T]\}$.

$\overline{V_h}$ représente les fonctions de $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, affines par morceaux sur les éléments $(T_k)_{k\in[1,N_T]}$

Proposition : **i)** $\forall v_h \in \overline{V_h}$, v_h est définie par ses valeurs prises en les sommets $(q_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$

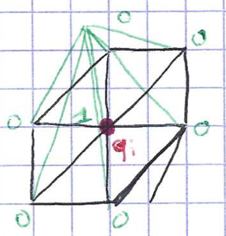
ii) On a $\dim \overline{V_h} = N_S$
Une base est donnée par $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$
$\forall i \in [\![1,N_S]\!], \forall j \in [\![1,N_S]\!] \quad \varphi_i(q_j) = \delta_{ij}$.

iii) $\overline{V_h} \subset H^1(\Omega)$

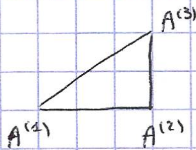
iv) On a $\dim V_h = N_I$ avec N_I le nombre de sommets intérieurs au domaine (qui ne sont pas sur Γ)

v) $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

Remarque :



preuve : **i)** Soit $v_h \in \overline{V_h}$
Soit T_K un triangle de $\mathcal{T}_h$:



$A^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \quad \forall i \in [\![1,3]\!]$

$v_h \in \overline{V_h} \Rightarrow \exists (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^3$ tq $v_{h|T_K} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

D'où $v_{h|T_K}(A^{(i)}) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} \quad \forall i \in [\![1,3]\!]$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{h|T_K}(A^{(1)}) \\ v_{h|T_K}(A^{(2)}) \\ v_{h|T_K}(A^{(3)}) \end{pmatrix}$$

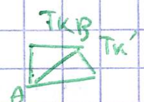
or $\det A = (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) - (x_1^{(3)} - x_1^{(1)})(x_2^{(2)} - x_2^{(1)})$

$= \| \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} \| = 2 \times \text{aire}(T_K) \neq 0$ par hyp sur T_K.

D'où (P_{T_K}) admet une unique solution

$\Rightarrow v_{h|T_K}$ définie depuis ses valeurs sur chacun des sommets du triangle
$\Rightarrow v_h$ entièrement déterminée par ses valeurs en les $(q_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$.

ii) On montre que $\forall i \in [\![1,N_S]\!]$, $\varphi_i \in \overline{V_h}$
- φ_i est continue sur T_K $\forall K \in [\![1,N_S]\!]$
- Soit 2 triangles T_K et $T_{K'}$ tq



$\forall v_h$ affine sur T_K et $T_{K'}$
$\left.\begin{array}{l} v_{h|T_K}(A) = v_h(T_{K'}(A)) \\ v_{h|T_K}(B) = v_h(T_{K'}(B)) \end{array}\right\}$ par i)

$\forall M \in [A,B] \quad M = \lambda A + (1-\lambda) B$.

$v_{h|T_K}(M) = v_{h|T_{K'}}(M)$.

EDP
CTD 1.15

• $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ famille libre de $\overline{V_h}$ Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ tq $\sum_{i=1}^{N_S}\lambda_i\varphi_i=0$

Soit $(\lambda_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ tq $\sum_{i=1}^{N_S}\lambda_i\varphi_i=0$

$\forall j\in[\![1,N_S]\!]\ \sum_{i=1}^{N_S}\lambda_i\underbrace{\varphi_i(q_j)}_{\delta_{ij}}=0 \Rightarrow \lambda_j=0$

D'où $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ libre dans $\overline{V_h} \Rightarrow \dim\overline{V_h}\geq N_S$

• $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ est génératrice de $\overline{V_h}$

Soit $v_h\in\overline{V_h}$ Posons $w=\sum_{i=1}^{N_S}v_h(q_i)\,\varphi_i\in\overline{V_h}$

$\forall j\in[\![1,N_S]\!]\ w(q_j)=\sum_{i=1}^{N_S}v_h(q_i)\underbrace{w(q_j)}_{=\delta_{ij}}=v_h(q_j)$

D'après ii) $w=v_h$ et $v_h\in\mathrm{Vect}(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$

Donc $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ génératrice de $\overline{V_h} \Rightarrow \dim\overline{V_h}\leq N_S$.

iii) $\overline{V_h}\subset H^1(\Omega)$. Soit $i\in[\![1,N_S]\!]$

• $\varphi_i\in L^2(\Omega)$ (continue sur Ω borné).

• $\forall j\in[\![1,2]\!]\ \forall v\in\mathcal{D}(\Omega)$

$$\left\langle\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j},v\right\rangle=-\int_\Omega\varphi_i\frac{\partial v}{\partial x_j}dx=-\sum_{T_K\in\mathcal{T}_h}\overline{\int_{T_K}\varphi_i\frac{\partial v}{\partial x_j}dx}$$

$$=\int_{\overset{\circ}{T_K}}\varphi_i\frac{\partial v}{\partial x_j}dx \quad (\text{mes}(\partial T_K)=0).$$

or $\underset{\varphi_i\in V_h}{\varphi_i\in C^1(\overset{\circ}{T_K})}$, $\underset{v\in\mathcal{D}(\Omega)}{\frac{\partial v}{\partial x_i}\in C^1(\overset{\circ}{T_K})}$.

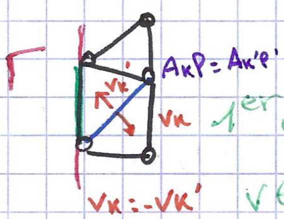
D'où par formule de Green (version "C^1")

$$-\int_{\overset{\circ}{T_K}}\varphi_i\frac{\partial v}{\partial x_j}=\int_{\overset{\circ}{T_K}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}v\,dx+\int_{\partial T_K}\varphi_i v(\nu_K)_j\,d\Gamma$$

avec $(\nu_K)_j$ les j-ème composantes de ν_K normale sortante unitaire en $x\in\Gamma$

$$\left\langle\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j},v\right\rangle=\sum_{T_K\in\mathcal{T}}\int_{\overset{\circ}{T_K}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}v\,dx-\sum_{T_K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial T_K}\varphi_i v(\nu_K)_j\,d\Gamma$$

On s'intéresse à $\sum_{T_K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial T_K}\varphi_i v(\nu_K)_j\,d\Gamma=\sum_{T_K\in\mathcal{T}_h}\sum_{\ell=1}^{3}\int_{A_{K\ell}}\varphi_i v(\nu_K)_j\,d\Gamma$



avec $(A_{K\ell})_{\ell\in[\![1,3]\!]}$ arêtes de T_K.

1^{er} cas : $A_{K\ell}\in\Gamma$

$v\in\mathcal{D}(\Omega)\Rightarrow v|_\Gamma=0 \quad \int_{A_{K\ell}}\varphi_i v(\nu_K)_j\,d\Gamma=0$

2^e cas : $A_{K\ell}\in\Omega$ — $\int_{A_{K\ell}}\varphi_i v(\nu_{K_j})\,d\Gamma+\int_{A_{K'\ell'}}\varphi_i v(\nu_{K'})_j\,d\Gamma=0$

Bilan $\sum_{T_K\in\mathcal{T}_h}\sum_{\ell=1}^{3}\int_{A_{K\ell}}\varphi_i v(\nu_K)_j\,d\Gamma=0 \quad \left\langle\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j},v\right\rangle=\sum_{T_K\in\mathcal{T}_h}\int_{\overset{\circ}{T_h}}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}v\,dx$

et $\left\langle \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, v \right\rangle = \int_\Omega \underbrace{\sum_{T_k \in T_h} \left(1_{\mathring{T}_k} \frac{\partial \varphi_i|_{\mathring{T}_k}}{\partial x_j}\right)}_{\in L^2(\Omega)} v\, dx$ $\quad$ ($\varphi_i|_{\mathring{T}_k}$ affine et donc borné)

$$= \left\langle \sum_{T_k \in T_h} \left(1_{\mathring{T}_h} \frac{\partial(\varphi(\mathring{T}_k))}{\partial x_j}\right), v \right\rangle$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \sum_{T_k \in T_h} \left(1_{\mathring{T}_k} \frac{\partial \varphi_i|_{\mathring{T}_k}}{\partial x_j}\right) \text{ dans } D'(\Omega)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall j \in [\![1,2]\!] \Rightarrow \underline{\varphi_i \in H^1(\Omega)}$$

4./ Construction de fonctions de base sur un triangle

(P_{Fvh}) trouver $u_h \in V_h$ tq $\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = f(v_h)$

$\Leftrightarrow$ iv) et v) $\forall i \in [\![1, N_I]\!]$ $\forall j \in [\![1, N_I]\!]$

$$\sum_{j=1}^{N_I} u_j\, a(\varphi_j, \varphi_i) = f(\varphi_i) \quad \text{avec } u_h = \sum_{j=1}^{N_I} u_j \varphi_j$$
et N_I les sommets à l'int. de Ω.

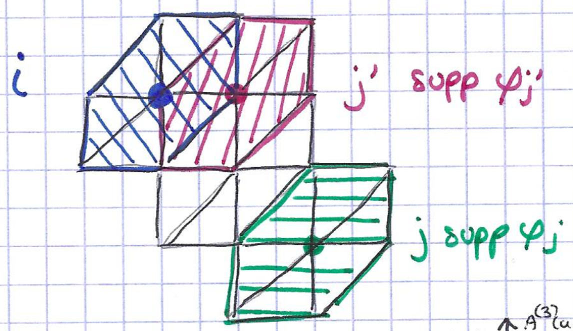
or $a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega \nabla\varphi_i . \nabla\varphi_j\, dx + \int_\Omega \varphi_i \varphi_j\, dx =$ "a_{ij}"

$$= \sum_{T_k \in T_h} \left(\int_{T_k} \nabla\varphi_i . \nabla\varphi_j\, dx + \int_{T_k} \varphi_i \varphi_j\, dx \right).$$

$$f(\varphi_i) = \int_\Omega f \varphi_i\, dx = \sum_{T_k \in T_h} \int_{T_k} f \varphi_i\, dx$$

$\Rightarrow$ calcul d'intégrales sur les triangles (T_k).

1er cas :

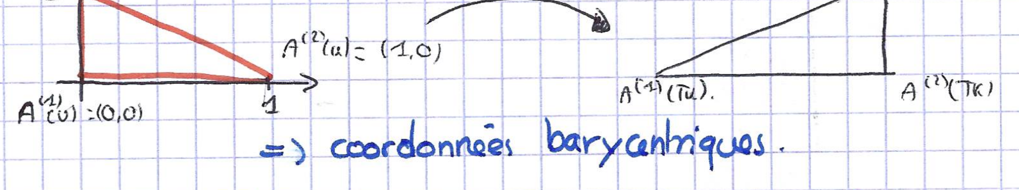


1er cas : mes (supp $\varphi_i \cap$ supp φ_j) $= 0$

alors $a_{ij} = 0$

2e cas : mes (supp $\varphi_i \cap$ supp φ_j) > 0

$\Rightarrow$ calcul des intégrales sur un triangle de référence.



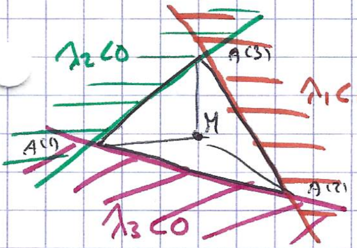
$\Rightarrow$ coordonnées barycentriques.

Proposition : Soit T_K un triangle non dégénéré (aire $\neq 0$) tq A^1, A^2, A^3 sont les sommets.

alors $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $\exists ! (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$
tq $M = \lambda_1 A^{(1)} + \lambda_2 A^{(2)} + \lambda_3 A^{(3)}$ et $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$.

CTD EDP
1.16

De plus, on a i) $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!] \quad \lambda_i(A^{(j)}) = \delta_{ij}$



ii) $M \in (A^{(i)} A^{(j)}) \Rightarrow \lambda_k = 0$ avec (i,j,k) les 3 indices des sommets du triangle

iii) $M \in T_K \iff \forall i \in [\![1,3]\!] \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1$.

preuve : i) Soit $M = (x_1, x_2)$ on pose $A^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$.

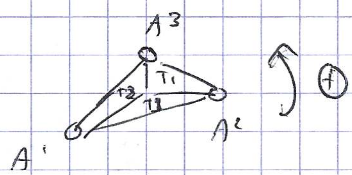
On cherche $(\lambda_i)_{i\in[\![1,3]\!]}$ tq

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_1^{(2)} + \lambda_3 x_1^{(3)} = x_1 \\ \lambda_1 x_2^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \lambda_3 x_2^{(3)} = x_2 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \qquad \det B = 2\,\text{aire}(T_K) \neq 0.$$

Remarque : $\lambda_i = \dfrac{\overrightarrow{MA^{(i+)}} \wedge \overrightarrow{MA^{(i++)}}}{\overrightarrow{A^{(1)}A^{(2)}} \wedge \overrightarrow{A^{(1)}A^{(3)}}} = \dfrac{\text{aire}(T_i)}{\text{aire}(T_K)}$ (! aires "signées")

avec $i+ = \begin{cases} i+1 \text{ si } i \in \{1,2\} \\ 1 \text{ si } i = 3 \end{cases}$



La transformation affine a telle que $\forall i \in [\![1,3]\!] \quad a(A^{(i)}(u)) = A^{(i)}(T_K)$.

Elle est donnée par $\forall M = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$a(M) = A^{(1)}(T_K) + x_1 \overrightarrow{A^{(1)}(T_K) A^{(2)}(T_K)} + x_2 \overrightarrow{A^{(1)}T_K A^{(3)}(T_K)}$$

$$= (1 - x_1 - x_2) A^{(1)}(T_K) + x_1 A^{(2)}(T_K) + x_2 A^{(3)}(T_K).$$

Sur le triangle unitaire, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1^{(u)}(M) = 1 - x_1 - x_2 & \text{avec } M = (x_1, x_2) \\ \lambda_2^{(u)}(M) = x_1 \\ \lambda_3^{(u)}(M) = x_2 \end{cases}$$

Et $M = (1 - x_1 - x_2) A^1(T_U) + x_1 A^2(T_U) + x_2 A^3(T_U)$.

$\Rightarrow \forall i \in [\![1,3]\!] \quad \lambda_i^{(T_K)}(a(M)) = \lambda_i^{(u)}(M)$.

Les coordonnées barycentriques restent inchangées par la transfo a.

De plus, $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2 \quad \lambda_i^{(u)}(A^{(j)}(T_U)) = \delta_{ij}$

D'où $\forall M \in T_U, \ \lambda^{(i)}(M) = \varphi_i(M) \quad = (1 - x_1 - x_2) A^{1}(T_K) + x_1 A^{(2)}(T_K) + x_2 A^{(3)}(T_K)$

De $\hat{m}$

Application $\int_{T_K} \varphi_i \varphi_j \, dx = \int_{T_K} \lambda_i^{(T_K)} \lambda_j^{(T_K)} \, dx = \int_{T_0} \lambda_i^{(u)} \lambda_j^{(u)} |J_a| \, dx$

avec $|J_a| = 2\,\text{aire}(T_K)$

$$= 2\,\text{aire}(T_K) \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_2} x_1 \, dx_1 \right) dx_2$$

$$= \frac{\text{aire}(T_K)}{12}$$

5./ Erreur sur la solution

On a déjà démontré que $\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$

D'où avec $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega}$$

Peut-on majorer $\inf_{v_h \in V_h} |u - v_h|_{1,\Omega}$?

Lemme : Relation sur les coordonnées barycentriques.

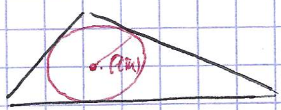
Soit T un triangle non dégénéré de sommets $(A^{(i)})_{i \in [\![1,3]\!]}$

On a $\forall x \in T_K$:

i) $\sum_{i=1}^{3} \nabla \lambda_i(x) = 0$

ii) $\sum_{i=1}^{3} \nabla \lambda_i(x) A^{(i)T} = I_2$ avec $A^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

iii) $\|\nabla \lambda_i(x)\|_2 \leq \frac{1}{\rho(T_K)}$ avec $\rho(T_K)$ le rayon du plus grand cercle inscrit à T_K.



preuve : i) $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \nabla \lambda_i(x) = 0$

ii) $M = \lambda_1(x) A^{(1)} + \lambda_2(x) A^{(2)} + \lambda_3(x) A^{(3)}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & A^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \\ \lambda_3(x) \end{pmatrix}$$

Par dérivation et transposition, $I_2 = \sum_{i=1}^{3} \nabla \lambda_i(x) A_i^T$

iii) Idée : • $\|\nabla \lambda_j(x)\|_2 = \sup_{u \in S(0,1)} |\nabla \lambda_i(x)^T u|$

• $\forall u \in S(0,1) \; \exists (x,y) \in T_K^2$ tq $(y-x) = \rho(T_K) u$

$\|\nabla \lambda_i(x)\|_2 \leq \sup \frac{|\nabla \lambda_i^T(x)(y-x)|}{\rho(T_K)}$

• λ_i affine + Taylor

$\forall (x,y) \in T_K^2 \; \lambda_i(x) - \lambda_i(y) = \nabla \lambda_i(x)^T (x-y)$

$\Rightarrow |\nabla \lambda_i(x)(x-y)| \leq 1 \; \forall (x,y) \in T_K^2$

CTD EDP
1.17

Théorème : Soit Ω un ouvert à frontière polygonale.
Soit u la solution de la formulation variationnelle (P_{FV}), supposée régulière, et soit u_h la solution du problème variationnel discrétisé (P_{FVh}).

On suppose $\exists \hat{c} \geq 0$ tq $\sup_{T_K \in \mathcal{T}_h} \frac{h(T_K)}{\rho(T_K)} \leq \hat{c}$

avec $h(T_K)$ le diamètre de T_K et $\rho(T_K)$ le rayon du plus grand cercle inscrit dans T_K.
Alors $\exists c \geq 0$ (dependant de u) tq $|u-u_h|_{1,\Omega} \leq ch$.

avec $h = \max_{T_K \in \mathcal{T}_h} h(T_K)$

preuve :

- $|u-u_h|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} |u-v_h|_{1,\Omega}$.
- Soit $v_h = \Pi_h(u) \in V_h$ qui coïncide avec u en les sommets $(q_i)_{i \in [\![1,N]\!]}$ des triangles

or $|u-\Pi_h(u)|^2_{1,\Omega} = \int_\Omega \|\nabla(u-\Pi_h(u))\|_2^2 \, dx$

$= \sum_{T_K \in \mathcal{T}_h} \int_{T_K} \|\nabla(u-\Pi_h(u))\|_2^2 \, dx$

or $\forall x \in T_K$ $x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) A^{(i)}(T_K)$.

or $\Pi_h(u) \in V_h \Rightarrow \Pi_h(u)$ affine.

d'où $\Pi_h(u)(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) \underbrace{\Pi_h(u) A^{(i)}}_{u(A^{(i)}) \text{ par déf de } \Pi_h(u)}$

$= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) u(A^{(i)})$

D'où $\nabla(\Pi_h(u)(x)) = \sum_{i=1}^{3} \nabla\lambda_i(x) u(A^{(i)})$

Par dvp de Taylor de u (supposée régulière) sous $[x, A^{(i)}[$

$\exists \xi_i \in]x, A^{(i)}[$ tq $u(A^{(i)}) = u(x) + \nabla u(x)^T (A^{(i)}-x)$

$+ \frac{1}{2} (A^{(i)}-x)^T \nabla^2 u(\xi_i)(A^{(i)}-x)$

D'où $\nabla \Pi_h(u)(x) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \nabla\lambda_i(x)\right)}_{=0} u(x) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \nabla\lambda_i(x) (A^{(i)}-x)^T\right)}_{=I_2} \nabla u(x)$

$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (A^{(i)}-x)^T \nabla^2 u(\xi_i)(A^{(i)}-x)^T)$.

par lemme : $\sum_{i=1}^{3} \nabla\lambda_i(x) = 0$.

$\sum_{i=1}^{3} \nabla\lambda_i(x) A^{(i)T} = I_2$.

D'où $\nabla\Pi_h(u)(x) = \nabla u(x) + \sum_{i=1}^{3} (A^{(i)}-x)^T \nabla^2 u(\xi_i)(A^{(i)}-x) \nabla\lambda_i(x)$.

$\Rightarrow \|\nabla u - \nabla\Pi_h(u)(x)\|_2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\|A^{(i)}-x\|_2^2}_{\leq (h(T_K))^2} \underbrace{\|\nabla^2 u(\xi_i)\|_2}_{\leq \sup_{x \in T} \|\nabla^2 u(x)\|_2} \underbrace{\|\nabla\lambda_i(x)\|}_{\leq \frac{1}{\rho(T_K)}}$

$\leq \frac{3}{2} \frac{h(T_K)^2}{\rho(T_K)} \sup_{x \in T} \|\nabla^2 u(x)\|_2$.

$$\Rightarrow |u - \Pi_h(u)(x)|_{1,\Omega}^2 \leq \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\int_{T_k} \|D(u - \Pi_h(u)(x))\|_2^2 \, dx}_{\leq \frac{9}{4} \underbrace{\frac{h(T_k)^2}{\rho(T_k)^2}}_{\leq \tilde{C}^2 h^2} \sup \|D^2 u(x)\|_2^2 \, mes(T_k)}$$

$$\Rightarrow |u - \Pi_h(u)(x)|_{1,\Omega} \leq \frac{3}{2} \tilde{C} \sup_{x \in \Omega} \|D^2(u(x))\|_2 \sqrt{mes(\Omega)} \times h.$$

$$\Rightarrow |u - u_h|_{1,\Omega} \leq \frac{3}{2} \frac{M}{\alpha} \tilde{C} \sup_{x \in \Omega} \|D^2(u)\| \sqrt{mes\,\Omega} \times h. \leq C(u)\, h.$$