Compléments analyse factorielle, ACP, AFC, ACM

OUATTARA Mory

CNAM

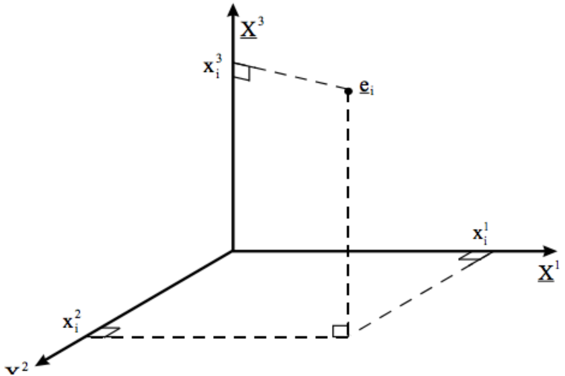
11 novembre 2020

1. Analyse en composantes principales (ACP)
   - Lien entre η_j et ξ_i
   - Disque de corrélation
   - Individus et variables supplémentaires
2. L'Analyse des Correspondances Simples (AFC)
   - Test Khi2
   - L'analyse des correspondances simples
   - ACP du nuage des profils lignes-profils colonnes
   - Cas pratique
3. Analyse des correspondances multiples (ACM)
   - Présentation Formelle
   - Aspects pratiques

Données Multivariées

A chaque individu noté e_i, on peut associer un point dans R^p = espace des individus.

A chaque variable du tableau X est associé un axe de R^p.



Impossible à visualiser dès que p > 3.

Données Multivariées

Soit $x \in \mathbb{R}^p$ un vecteur aléatoire :

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)^T$$

où v^T désigne la transposée du vecteur v avec ξ_j est une variable aléatoire

Un échantillon multidimensionnel est une suite $x_1, \ldots, x_n$ de réalisations aléatoires du vecteur x.

x_{ij} désignera la j ème composante du vecteur x_i

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{pmatrix}$$

Statistiques

1. Les moyennes empiriques

$$\bar{x_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ki} \;\; k = 1, \ldots, p$$

qui forment le vecteur

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i = \frac{1}{n}\,\mathbf{X}^T\mathbf{1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

2. Les covariances empiriques

$$s_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} x_{ij}x_{ik} - \bar{x_j}\bar{x_k} \;\; k, j = 1, \ldots p$$

qui forment la matrice covariance empirique $S = (S_{kj})$

Statistiques

3 Les corrélations empiriques

$$r_{jk} = \frac{s_{jk}}{\sqrt{s_{jj} s_{kk}}} \; k, j = 1, \ldots p$$

qui forment la matrice de corrélation empirique

$$R = (r_{jk})_{k,j=1,\ldots p}$$

Statistiques

Il est facile de voir que

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i {x_i}^T - \bar{x}\bar{x}^T = \frac{1}{n}XX^T - \frac{1}{n^2}X\mathbf{1}\ \mathbf{1}^T X^T = \frac{1}{n}X^T HX$$

où

$$H = I_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}\ \mathbf{1}^T$$

est la matrice de centrage

1. *Montrer que H est un projecteur, i. e. $H = H^2$ et $H^T = H$. Sur quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ projette-t-il ?*
2. *Montrer la matrice de covariance empirique S est positive, en effet pour tout vecteur R^p.*

lAnalyse en Composantes Principales (ACP)

LAnalyse en composantes principales (ACP) est une méthode de traitement des données multidimensionnelles qui poursuit les deux objectifs suivants :

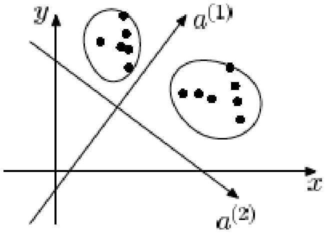
1. Visualiser les données (**Notion de distances entre individus**)
2. Réduire la dimension effective des données **(en fonction de leurs corrélations)**.

Lidée de lAnalyse en composantes principales (ACP)

si $a = (a_1, \ldots, a_p)^T \in R^p$ est une direction de projection.

- Les données projetées $(a^T x_1, ..., a^T x_n)$ forment un échantillon de dimension 1.
- que lon peut visualiser et qui est donc plus facile à interpréter que léchantillon de départ $(x_1, \ldots, x_n)$.

Lidée de lAnalyse en composantes principales (ACP)

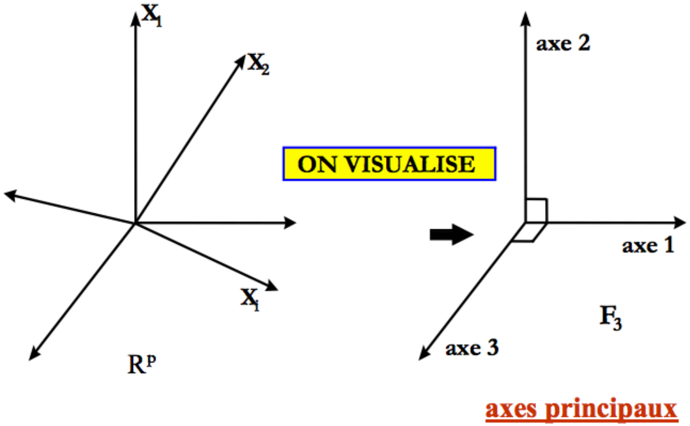


Bonne et mauvaise directions de projection.

LACP a pour objectif de trouver un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p* << p$ tel que la projection sur ce sous-espace capte presque toute la structure des données.

Lidée de lAnalyse en composantes principales (ACP)

LAnalyse en composantes principales (ACP) est une méthode de traitement des données multidimensionnelles qui poursuit les deux objectifs suivants :



Lidée de lAnalyse en composantes principales (ACP)

LAnalyse en composantes principales (ACP) est une méthode de traitement des données multidimensionnelles qui poursuit les deux objectifs suivants :

① F_k devra être « ajusté » le mieux possible au nuage des individus: la somme des carrés des distances des individus à F_k doit être minimale.

② F_k est le sous-espace tel que le nuage projeté ait une **inertie** (dispersion) maximale.

① **et** ② sont basées sur les notions de :

distance

Critère de l'ACP

Lidée de base de lACP est de chercher la direction $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$ qui maximise en $\boldsymbol{a}$ la variance empirique de léchantillon unidimensionnel $(a^T x_1, ..., a^T x_n)$

$$s_a^2 \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^T \mathbf{x}_i)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^T \mathbf{x}_i)\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} a^T \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T\right) a - \frac{1}{n^2} a^T \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^T\right) a = a^T S a,$$

la direction la plus intéressante $\hat{a}$ est une solution de

$$\max_{a \in \mathbb{R}^p : \|a\|=1} a^T S a = \hat{a}^T S \hat{a}$$

ou

$$\hat{a} = \arg \max_{a \in \mathbb{R}^p : \|a\|=1} a^T S a$$

Décomposition spectrale

Nous nous intéressons à la solution du problème suivant :

$$a^* = \underset{a \in \mathbb{R}^p : \|a\|=1}{arg\ \ max}\ Var(a^T X)\ avec\ E(\| X \|^2) < \infty$$

Soit

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma^T$$

une décomposition spectrale de covariance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \left(\gamma_{(1)}, \ldots, \gamma_{(p)}\right)$$

Où les λ_i sont les valeurs propres de Σ rangées dans l'ordre croissant et

$$\| \gamma_{(i)} \| = 1\ avec\ \gamma_{(i)}^T \gamma_{(k)} = 0\ pour\ i \neq k$$

Les Composantes principales $\eta_{(j)}$

Composante principale $\eta_{(j)}$

La variable aléatoire $\eta_{(j)} = \gamma_{(i)}^T (x - \mu)$ est dite j ème composante principale du vecteur aléatoire $x \in R^p$.

Les $\gamma_{(j)}$ sont les vecteurs propres de la matrice de covariance Σ du vecteur aléatoire x, on obtient :

$$\mathrm{Var}[\eta_j] = E[\gamma_{(j)}^T (\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^T \gamma_{(j)}] = \gamma_{(j)}^T \Sigma \gamma_{(j)} = \gamma_{(j)}^T \lambda_j \gamma_{(j)} = \lambda_j,$$

$$\mathrm{Cov}(\eta_j, \eta_k) = E[\gamma_{(j)}^T (\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)^T \gamma_{(k)}] = \gamma_{(j)}^T \Sigma \gamma_{(k)} = \gamma_{(j)}^T \lambda_k \gamma_{(k)} = 0,$$

ACP

Soit x un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de moyenne nulle et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Exemple ACP

EXEMPLE 7.1. Soit **x** un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de moyenne nulle et de matrice de covarian

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Considérons les vecteurs propres orthonormés de cette matrice

$$\gamma_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc si les coordonnées de **x** sont ξ_1 et ξ_2, les composantes principales de x valent

$$\eta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \eta_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}.$$

Exemple ACP

Théorème

Soit $x \in R^p$ un vecteur aléatoire tel que $E(\| x \|) < \infty$. Alors $\hat{a} = \gamma_{(1)}$ est vérifie :

$$Var(\hat{a}^T X) = \max_{a \in \mathbb{R}^p : \|a\| = 1} (a^T X) = \max_{a \in \mathbb{R}^p : \|a\| = 1} (a^T (X - \mu))$$

ACP

Preuve. La décomposition spectrale de la matrice Σ est de la forme

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma^T = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \gamma_{(j)} \gamma_{(j)}^T.$$

On a donc

$$\mathrm{Var}[a^T \mathbf{x}] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j (a^T \gamma_{(j)})(\gamma_{(j)}^T a) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j^2,$$

où $c_j = a^T \gamma_{(j)}$ est la projection du vecteur a sur la direction $\gamma_{(j)}$. Puisque les vecteurs $\gamma_{(j)}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$, on a $c_1^2 + \cdots + c_p^2 = \|a\|^2$. Comme $\lambda_j \leq \lambda_1$, on en déduit que

$$\mathrm{Var}[a^T \mathbf{x}] = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j^2 \leq \lambda_1 \sum_{j=1}^{p} c_j^2 = \lambda_1 \|a\|^2 = \lambda_1.$$

Par ailleurs, si $a = \hat{a} = \gamma_{(1)}$, les coefficients c_j sont tous nuls sauf le premier $c_1 = 1$. On a donc $\mathrm{Var}[\hat{a}^T \mathbf{x}] = \lambda_1$. Par conséquent, $\hat{a}$ est une solution du problème de maximisation (7.2) et $\mathrm{Var}[\hat{a}^T \mathbf{x}] = \lambda_1 = \mathrm{Var}[\eta_1]$. ∎

Étude des corrélations

On définit la variance totale de x par

$$E(\| X-\mu \|^2) = E(X-\mu)^T(X-\mu) = E(X-\mu)^T\Gamma\Gamma^T(X-\mu)$$

avec

$$\Gamma^T(\mathbf{x}-\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_{(1)}^T(\mathbf{x}-\mu) \\ \vdots \\ \gamma_{(p)}^T(\mathbf{x}-\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_p \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{y}.$$

Compte tenu de ces notations et de légalité $E(\eta_i^2) = \lambda_i$, on obtient

$$E(\| X-\mu \|^2) = E(\eta_1^2 + \ldots + \eta_p^2)$$

ACP

Donc : Comment détermine t-on le meilleur sous espace de projection ?

Part de variance expliqué

Part de variance expliqué

On appelle part de la variance totale de x expliquée par les k premières composantes principales $(\eta_1, \ldots, \eta_k)$ la
quantité

$$\frac{\sum_{j=1}^{K} \lambda_j}{\sum_{j=1}^{p} \lambda_j}$$

Choix du bon nombre d'axe

Combien d'axes ?

Différentes procédures sont complémentaires:

① Pourcentage d'inertie souhaité : a priori

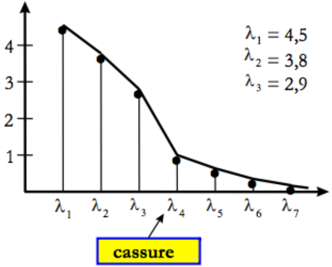
② Diviser l'inertie totale par le nombre de variables initiales

⇨ inertie moyenne par variable : I.M.

Conserver tous les axes apportant une inertie supérieure à cette valeur (inertie > 1 si variables centrées réduites).

③ Histogramme

Conserver les axes associés aux valeurs propres situées avant la cassure.



Lien entre η_j et ξ_i

Calculons dabord la matrice de covariance des vecteurs aléatoires x et y.

$$C(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E[(\mathbf{x}-\mu)\mathbf{y}^T] = E[(\mathbf{x}-\mu)(\mathbf{x}-\mu)^T\Gamma] = \Sigma\Gamma = \Gamma\Lambda\Gamma^T\Gamma = \Gamma\Lambda.$$

Comme $\mathrm{Cov}(\xi_i,\eta_j)$ est le $(i,j)^{\text{ème}}$ élément de cette matrice, on obtient

$$\mathrm{Cov}(\xi_i,\eta_j) = \gamma_{ij}\lambda_j.$$

La corrélation $\tilde{\rho}_{ij} = \mathrm{Corr}(\xi_i,\eta_j)$ entre ξ_i et η_j vaut

$$\tilde{\rho}_{ij} = \frac{\mathrm{Cov}(\xi_i,\eta_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi_i)\mathrm{Var}(\eta_j)}} = \gamma_{ij}\sqrt{\frac{\lambda_j}{\sigma_{ii}}}.$$

Lien entre η_j et ξ_i

Proposition

Soit $x \in R^p$ un vecteur aléatoire, tel que $E(\| x \|^2) < \infty$ et $\sigma_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, p$.
Alors,

$$\sum_{j=1}^{p} \tilde{\rho}_{ij}^2 = 1$$

On appelle $\tilde{\rho}_{ij}^2$ part de variance de la variable ξ_i expliquée par la j ème composante principale η .
Pour tout sous-ensemble J de $1, ..., p$,

$$\sum_{j \in J} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \sigma_{ii} \tilde{\rho}_{iJ}^2 \; avec \; \tilde{\rho}_{iJ}^2 = \sum_{j \in J} \rho_{ij}^2$$

Lien entre η_j et ξ_i

Preuve.

$$\sum_{i=1}^{p} \sigma_{ii}\tilde{\rho}_{iJ}^2 = \sum_{i=1}^{p} \sigma_{ii} \sum_{j\in J} \gamma_{ij}^2 \frac{\lambda_j}{\sigma_{ii}} = \sum_{j\in J} \lambda_j \sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij}^2.$$

Le résultat de la proposition découle du fait que la dernière somme vaut 1, car $\|\gamma_{(j)}\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_{ij}^2 = 1$. ∎

Disque des corrélations

Proposition

Soient ξ_i et ξ_k deux variables entièrement expliquées par les deux premières composantes principales, i.e.

$$\tilde{\rho_{i1}}^2 + \tilde{\rho_{i2}}^2 = 1 \; et \; \tilde{\rho_{k1}}^2 + \tilde{\rho_{k2}}^2 = 1$$

Alors, la corrélation de ξ_i et ξ_k est donnée par la formule

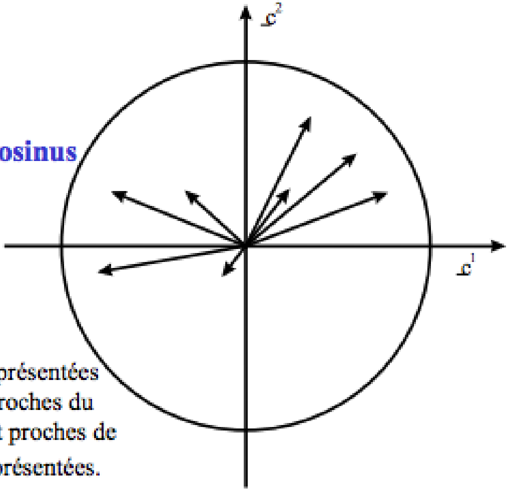
$$\rho_{ik} = \tilde{\rho_{i1}}\tilde{\rho_{k1}} + \tilde{\rho_{i2}}\tilde{\rho_{k2}} = cos(\varphi),$$

où φ est l'angle formé par les vecteurs $(\tilde{\rho_{i1}}, \tilde{\rho_{i2}})$ et $(\tilde{\rho_{k1}}, \tilde{\rho_{k1}})$.

Disque des corrélations

Le cercle des corrélations est la projection du nuage des variables sur le plan des composantes principales.

corrélation = cosinus



Les variables bien représentées sont celles qui sont proches du cercle, celles qui sont proches de l'origine sont mal représentées.

Variables

- On calcule le coefficient de corrélation entre la variable supplémentaire et les composantes principales.
- Ceci permet sa représentation sur le cercle des corrélations.

Individus

- Individu de poids nul ne participant pas à lanalyse
- Appliquer aux coordonnées de lindividu les expressions définissant les composantes principales.

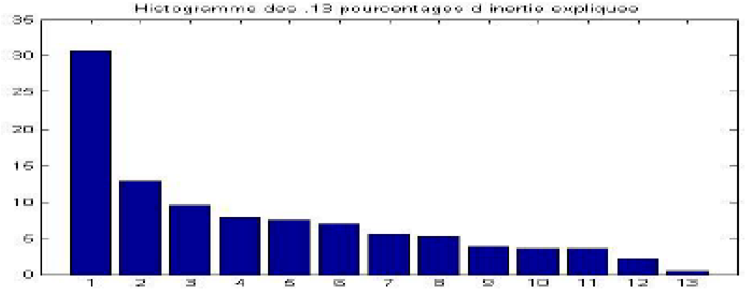
Cas pratique : Campagne CNL 2005

VARIABLE QUANTITATIVES		VARIABLES QUALITATIVES	
HABITUDE DU MENAGE			
ICOS1	Utilisation de déodorant dans le ménage	QOM1	Vous sortez les ordures à l'extérieur
ICOS2	Utilisation d'eau de toilette dans le ménage	TMG6	Bricolage du mois
ICOS3	Utilisation des produits de soins dans les cheveux	TMG7	Jardinage du mois
ICOS4	Utilisation des produits de soins visage et corps	DGG3n	Nombre de Voitures dans le garage
ICOS5	Utilisation des vernis à ongle et dissolvants	FUMEUR	Dans le logement
QPD2b	Utilisation d'autre type de désodorisant	QPV	Nombre de Plantes à l'intérieur
CARACTERISTIQUES DU LOGEMENT			
HSRF	surface du logement en dehors des annexes	CHEM1	Equipé d'une cheminée ou pas
		DGG2b	Existence d'un garage
NIACe1	Ancienneté de l'immeuble ou du logement	FC3	Type de logement
		DCa3	Existence d'une cave
MENAGE			
Age	Personnes	DIPLOM2	Diplômes
REV3	revenus du ménage	PROFES	Profession
FC10	Nombre de personnes dans le ménage	NOCCUA	Occupation actuelle
FC11	Nombre d'enfant de moins de 10 ans dans le ménage	REV1	Ressource principales du ménage
FC11b	Nombre d'enfants de plus de 10 ans dans le ménage	STRMEN	Structure du ménage

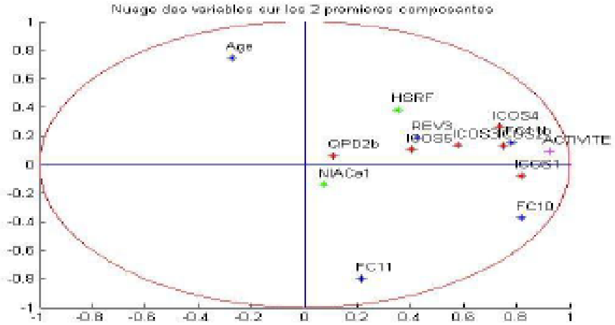
Cas pratique : Corrélation entre variables

	ICOS1	ICOS2	ICOS3	ICOS4	ICOS5	QPD2b	Age	REV3	FC10	FC11	FC11b	HSRF	NIACe1
ICOS1	1,00												
ICOS2	0,62	1,00											
ICOS3	0,38	0,40	1,00										
ICOS4	0,56	0,52	0,42	1,00									
ICOS5	0,28	0,20	0,20	0,27	1,00								
QPD2b	0,06	0,05	0,06	0,07	0,04	1,00							
Age	-0,33	-0,12	-0,12	-0,04	-0,06	-0,01	1,00						
REV3	0,23	0,27	0,15	0,25	0,24	0,03	0,02	1,00					
FC10	0,60	0,50	0,34	0,45	0,22	0,06	-0,34	0,29	1,00				
FC11	0,10	0,00	0,00	-0,06	0,05	0,01	-0,42	0,07	0,59	1,00			
FC11b	0,62	0,54	0,37	0,54	0,20	0,05	-0,07	0,20	0,68	-0,07	1,00		
HSRF	0,15	0,25	0,19	0,33	0,17	0,09	0,25	0,41	0,36	0,07	0,28	1,00	
NIACe1	0,08	0,08	0,09	0,05	-0,01	0,05	-0,01	0,12	0,13	0,06	0,08	0,02	1

Cas pratique : Inertie des axes



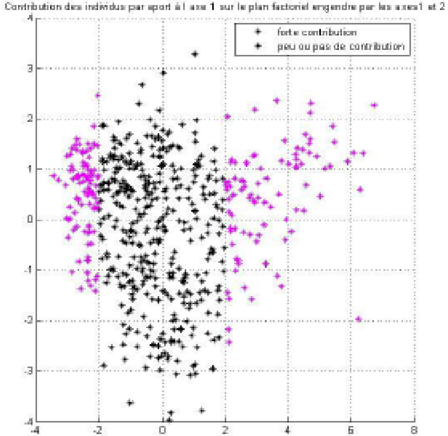
Cas pratique : Variables dans le 1er Plan

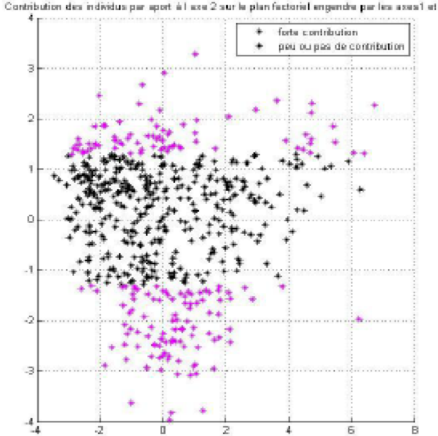


Cas pratique : $\tilde{\rho}_{ij}$

		CP1=30.70	CP2=12.97	CP3=9.51	CP4=7.78	CP5=7.52	CP6=7.02	CP7=5.9
habitude	ICOS1	0,817	-0,080	-0,213	0,115	-0,092	-0,011	0,196
	ICOS2	0,751	0,134	-0,192	0,049	0,011	0,079	0,147
	ICOS3	0,579	0,135	-0,193	-0,032	-0,087	-0,048	-0,679
	ICOS4	0,734	0,265	-0,150	0,036	-0,044	-0,006	-0,009
	ICOS5	0,404	0,105	0,212	0,165	-0,104	-0,768	-0,095
	QPD2b	0,110	0,062	0,115	-0,715	-0,661	-0,051	0,126
Logement	HSRF	0,351	0,382	0,620	-0,105	0,082	0,293	-0,216
	NIACe1	0,071	-0,140	-0,433	-0,626	0,557	-0,195	-0,059
ménage	Age	-0,275	0,748	0,106	-0,162	0,233	0,121	-0,027
	REV3	0,425	0,189	0,470	-0,097	0,342	-0,276	0,295
	FC10	0,820	-0,373	0,177	-0,060	0,099	0,203	0,015
	FC11	0,216	-0,797	0,408	-0,112	0,114	0,071	-0,142
	FC11b	0,780	0,155	-0,190	0,032	0,011	0,227	0,152

Cas pratique : Contribution des individus





L'Analyse des Correspondances Simples
A F C

Structure de base des données

Objective : mesurer des liaisons entre deux variables qualitatives :Khi-deux
exemple : Il sagit de tester lindépendance de deux variables qualitatives. Y a-t-il indépendance entre :

- la catégorie socioprofessionnelle et le vote à l'élection présidentielle ?
- le niveau détudes et les journaux lus ?
- Que pensez vous de cette affirmation : *On en a assez de ceux qui bloquent la vie du pays par leurs revendications par les armes.*
  1. pas du tout d'accord
  2. pas tellement d'accord
  3. bien d'accord
  4. entièrement d'accord

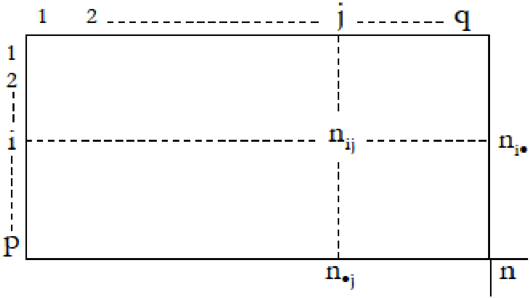
Structure de base des données

Existe-t- il un lien entre les réponses et la tendance politique ?

Tendance Politique	1	2	3	4	5	Total
PIT	714	71	0	143	71	1000
FPI	284	216	199	174	127	1000
MFA	87	106	228	335	244	1000
RDR	16	86	156	271	471	1000
PDCI	71	71	0	214	643	1000
Indifférent	82	120	244	301	263	1000
Non Reponse	88	124	269	285	233	1000

Le tableau de contingence

Croisement de deux variables qualitatives I et J à p et q modalités.



$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij} \quad \text{(total ligne)}$$

$$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij} \quad \text{(total colonne)}$$

$$n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} \quad \text{(total)}$$

Profils lignes - profils-colonnes - profils marginaux

- **p Profils des lignes** $\frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}}$

<u>profil de la ligne i</u> noté ℓ_i

$$\left(\frac{n_{i1}}{n_{i\bullet}} \;\; \frac{n_{i2}}{n_{i\bullet}} \;\; \cdots\cdots \;\; \frac{n_{iq}}{n_{i\bullet}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{f_{i1}}{f_{i\bullet}} \;\; \frac{f_{i2}}{f_{i\bullet}} \;\; \cdots\cdots \;\; \frac{f_{iq}}{f_{i\bullet}}\right)$$

- **q Profils des colonnes**

<u>profil de la colonne j</u>

noté c_j

$$\begin{pmatrix} \frac{n_{1j}}{n_{\bullet j}} \\ \frac{n_{2j}}{n_{\bullet j}} \\ \frac{n_{pj}}{n_{\bullet j}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{f_{1j}}{f_{\bullet j}} \\ \frac{f_{2j}}{f_{\bullet j}} \\ \frac{f_{pj}}{f_{\bullet j}} \end{pmatrix}$$

Profils lignes - profils-colonnes - profils marginaux

Si les deux variables qualitatives I et J étaient indépendantes, les profils lignes seraient tous identiques, et donc identiques au profil marginal correspondant.

$$Independance \Rightarrow \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} = \frac{n_{\bullet j}}{n} \Rightarrow n_{ij} = \frac{n_{\bullet j} * n_{i\bullet}}{n}$$

Profils lignes - profils-colonnes - profils marginaux

- On pouvait établir la relation précédente en raisonnant sur les profils colonnes.

$$\boxed{f_{ij} = f_{i\bullet}\, f_{\bullet j}}$$

$$\text{avec } f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \quad \text{et} \quad f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}$$

$$f_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$$

Elle exprime clairement que dans le cas de lindépendance le tableau de contingence est entièrement déterminé par ses marges

Khi-deux

- Pour chaque case, on peut donc calculer le nombre de cas attendus (sous hypothèse dindépendance) $n_{ij} = \frac{n_{\bullet j} * n_{i\bullet}}{n}$

- On peut comparer les nombres de cas attendus E_{ij} aux nombres observés.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \frac{\left(n_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}$$

Test Khi-deux

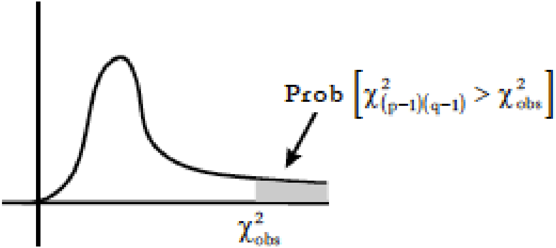
Si les deux variables sont réellement indépendantes, cette expression suit une distribution du Khi-deux avec un nombre de degrés de liberté égal à : $(p-1)(q-1)$

Dans une table on lit $\chi^2_{\alpha,k}$ valeur ayant une probabilité α dêtre dépassée pour une distribution du khi-deux avec $k=(p-1)(q-1)$ degrés de liberté.

1. Si $\chi^2 \leq \chi^2_{\alpha,k}$ On accepte H_o : independance
2. Si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,k}$ On rejette H_o : independance

Pratique sous logiciel statistique

- Calcul du χ^2 associé au tableau de contingence noté χ^2_{obs}.
- Probabilité pour une v.a. suivant une loi du khi-deux à $(p-1)(q-1)$ d.d.l. de dépasser χ^2_{obs}.



Si cette probabilité est faible (en général < 5 %), on rejette lhypothèse dindépendance entre les deux variables qualitatives.

Représentation des profils lignes

- Les profils lignes sont considérés comme des individus.
- Les p profils-lignes forment un nuage de p points dans R^q
- A chaque profil-ligne est associé un poids égal à sa fréquence marginale profil ligne poids $f_{i\bullet}$.

On note $N(I)$ le nuage de points formé des profils-lignes pondérés : $(l_i; f_{i\bullet})$
Le centre de gravité g est défini par :

$$g_I = \sum_{i=1}^{p} f_{i\bullet} l_i$$

La jième coordonnée de g_I vaut $f_{\bullet j}$

g_I = profil marginal de la variable J (à q modalités) $g_I = f_J$

Représentation des profils colonnes

$$N(J) = \text{nuage de points formé des q profils - colonnes pondérés } \left(c_j, f_{\bullet j}\right)$$

Le centre de gravité g_c est le profil marginal

de la variable I à p modalités.

$$g_c = f_I$$

Le problème qui se pose est **l'étude de la dépendance** entre les deux variables qualitatives.

Dans le cas où les deux variables sont **indépendantes**, on a identité des profils :

$$(1) \qquad \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}} = f_{\bullet j} \qquad \text{profil - ligne}$$

$$(2) \qquad \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}} = f_{i\bullet} \qquad \text{profil - colonne}$$

$$\boxed{f_{ij} = f_{i\bullet}\, f_{\bullet j}}$$

Dans le cas de l'indépendance, le nuage des profils-lignes se réduit à un point g_ℓ

De même, le nuage des profils-colonnes se réduit à un point g_c.

$\Longrightarrow$ L'étude de la dépendance consiste à étudier la **forme des nuages**.

$\Longrightarrow$ **Problème d'analyse en composantes principales.**

Quelle métrique ?

Métrique du $\chi 2$

- Pour les profils lignes :

$$d^2_{\chi^2}(l_i, l'_i) = \sum_{j=1}^{q} \frac{n}{n_{\bullet j}} (\frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} - \frac{n_{i'j}}{n_{i'\bullet}})^2$$

  - Donne un poids important aux différences portant sur les petits pourcentages.
  - Vérifie le principe déquivalence distributionnelle : si deux colonnes ont le même profil, on les réunit en une seule deffectif somme sans modifier les distances entre profils lignes.

- Pour les profils-colonnes :

$$d^2_{\chi^2}(c_j, c'_j) = \sum_{j=1}^{q} \frac{n}{n_{i\bullet}} (\frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} - \frac{n_{ij'}}{n_{\bullet j'}})^2$$

Inertie du nuage N(I)

$I_{N(I)}$ linertie du nuage$N(I)$ calculée par rapport au centre de gravité f_J vaut

$$\frac{\chi^2}{n}$$

où $\chi^2 =$ Khi-deux associé au tableau de contingence étudié.

On obtient le même résultat pour linertie du nuage N(J).

lA.C.P. du nuage des profils-lignes :

- Les données profils-lignes jouent le rôle d'individus

$$X = D_1^{-1} N$$

- La métrique utilisée pour le calcul des distances entre individus

$$M = nD_2^{-1} \text{ et le poids } D = \frac{D_1}{n}$$

- Les Facteurs principaux u_k du nuage des profils-lignes N(I) sont vecteurs propres de

$$MX'DX = (nD_2^{-1})(D_1^{-1}N)'(\frac{D_1}{n})(D_1^{-1}N) = D_2^{-1}N'D_1^{-1}N$$

On a donc pour chaque axe principal k

$$D_2^{-1}N'D_1^{-1}Nu_k = \lambda_k u_k$$

- La composante principale a_k associée au facteur u_k est vecteur propre de :

lA.C.P. du nuage des profils-colonnes :

Analyse des profils-colonnes on échange les indices 1 et 2 et on transpose N.
On notera b_k les composantes principales.

Comparaison Lignes-Colonnes

	ACP profils-lignes	ACP profils-colonnes
Facteurs principaux	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}$	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$
Composantes principales	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$ normalisés par $\operatorname{var}\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_k'\frac{\mathbf{D}_1}{n}\mathbf{a}_k = \lambda_k$	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}$ normalisés par $\operatorname{var}\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_k'\frac{\mathbf{D}_2}{n}\mathbf{b}_k = \lambda_k$

Abandon du principe barycentrique

Les modalités de chaque ensemble sont représentées par les :

$$a_i^k, i = 1, \ldots, p$$

$$b_j^k, j = 1, \ldots, q$$

Cette représentation permet de déterminer les proximités entre certains éléments de I et certains éléments de J (compte tenu de la qualité de la représentation).

Formules de transition

En notant b_j et a_i les j^{eme} et i^{eme} coordonnées des composantes principales b et a associées à la même valeur propre λ :

$$\sqrt{\lambda} b_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_{ij}}{n_{\bullet j}} a_i$$

$$\sqrt{\lambda} a_i = \sum_{j=1}^{q} \frac{n_{ij}}{n_{i\bullet}} b_j$$

À λ près, la coordonnée dune modalité i dune variable est la moyenne des coordonnées des catégories de lautre variable pondérées par les fréquences conditionnelles du profil de i.

Contributions

de la ligne i à l'axe k

$$\frac{f_{i\bullet}\left(a_i^k\right)^2}{\lambda_k} \qquad \text{avec } f_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}$$

de la colonne j à l'axe k

$$\frac{f_{\bullet j}\left(a_j^k\right)^2}{\lambda_k} \qquad \text{avec } f_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$$

Cosinus carrés

Modalité i représentée sur l'axe k

$$\frac{\left(a_i^k\right)^2}{d^2(i,G)}$$

Modalité j représentée sur l'axe k

$$\frac{\left(b_j^k\right)^2}{d^2(j,G)}$$

Aspects pratiques de linterprétation

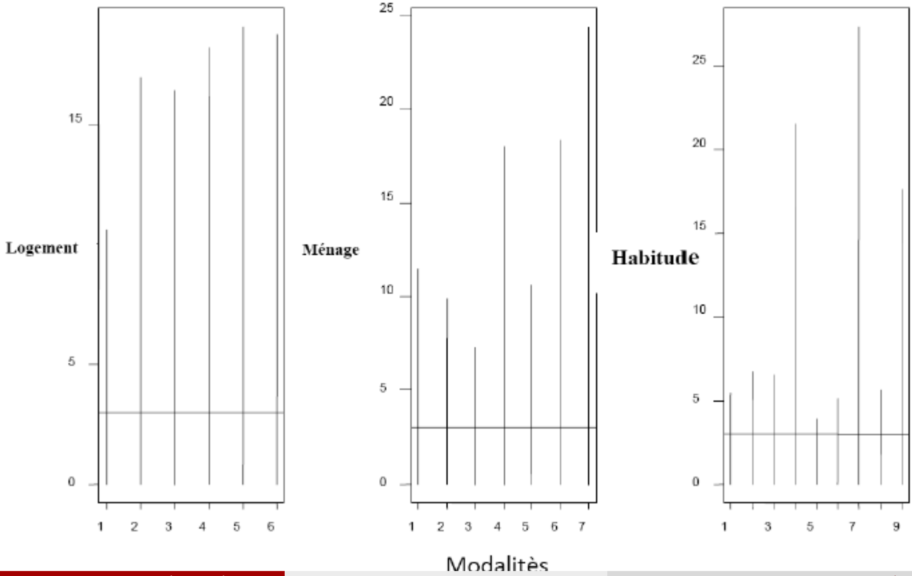
- Linterprétation peut se faire à partir des représentations graphiques (en sassurant de la qualité de représentation de chaque modalité à laide des cos2).

- Quand le nombre de modalités est élevé, il est conseillé déditer dabord le graphique des profils-lignes, puis celui des profilscolonnes, enfin la représentation simultanée.

- Les profils ayant des poids différents la lecture de leurs contributions à linertie de chaque axe savère très utile.

- On peut repérer les profils dont la contribution est supérieure au poids

Exemples : Données CNL 2005



Exemples : Test du Khi2

	α	p.value
Logement-ménage	114.4779	$(8.462)^{-12}$
Logement-habitude	172.6236	$(2.2)^{-16}$
Ménage-habitude	164.3131	$(1.214)^{-14}$

S'en suit l'étude des liens entre les modalités.

Analyse des Correspondances Multiples

- Étendre l'AFC au cas de $p \geq 2$ variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ à $m_1, \ldots, m_p$ modalités

$$\begin{array}{cccc} \xi_1 & \ldots & \xi_p & \text{variables} \\ m_1 & \ldots & m_p & \text{modalités} \end{array}$$

  Utile pour l'exploration d'enquêtes où les questions sont à réponses multiples.

- Lanalyse des correspondances utilise une table de contingence qui est difficilement généralisable au cas $p \geq 2$.

Trouver un moyen différent d'analyser $p > 2$ variables et vérifier que les résultats sont comparables à lAFC pour p $=$ 2.

Données

- **Données brutes** : chaque individu est décrit par les numéros des modalités quil possède pour chacune des p variables ξ_j..

  Impossible de faire des calculs sur ce tableau : valeurs arbitraires..

- Une forme mathématique utile pour les calculs est alors le tableau disjonctif des indicatrices des p variables obtenu en juxtaposant les p tableaux d'indicatrices de chaque variable $\mathcal{X}_i$

- **Tableau disjonctif** : Remplacer la j-ième colonne par m_j colonnes d'indicatrices : mettre un zéro dans chaque colonne, sauf celle correspondant à la modalité de lindividu i qui reçoit 1.

Technique de description de données qualitatives

n individus décrits par p variables qualitatives

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{X}_1 & \dots & \mathcal{X}_p & \text{variables} \\ m_1 & \dots & m_p & \text{modalités} \end{array}$$

- L'A.C.M. décrit les relations deux à deux entre p variables qualitatives à travers une représentation des groupes d'individus correspondant aux diverses modalités. .
- Cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'exploration d'enquêtes.

Données

Exemple

On interroge 6 personnes sur la couleur de leurs cheveux (CB, CC et CR pour blond, châtain et roux), la couleur de leurs yeux (YB, YV et YM pour bleu, vert et marron) et leur sexe (H/F). Les tableaux brut (ci-dessous à gauche) sont équivalents aux tableaux disjonctifs (à droite).

$$\begin{pmatrix} CB \\ CB \\ CC \\ CC \\ CR \\ CB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} YB \\ YV \\ YB \\ YM \\ YV \\ YB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ H \\ F \\ H \\ F \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tableau disjonctif et tableau de contingence

A chaque variable ξ_j est associée un tableau disjonctif $X_j(n \times m_j)$.
Pour 2 variables ξ_j et ξ_l le tableau de contingence est donné par :

$\mathcal{X} = X_j \| X_l$	$N_{j'l} = X_j' X_l$	$X_j' X_j$	$X_l' X_l$
Disjonctifs	Contingence	Marge ξ_j	Marge ξ_l

$$\mathbf{N}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tableau disjonctif joint

$$\mathcal{X}(n \times m) = X_1 | X_2 \ldots | X_p$$
$$m = m_1 + \ldots + m_p$$

Exemple Pour les variables précédentes, on a le tableau disjonctif joint suivant

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Chaque somme de lignes vaut 3. Les sommes de colonnes valent

$$(3 \quad 2 \quad 1 | 3 \quad 2 \quad 1 | 3 \quad 3)$$

Le tableau de Burt

C'est un super-tableau de contingence des variables $X_1, ..., X_p$, formé de tableaux de contingence et de matrices d'effectifs marginaux. :

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_p \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_p'\mathbf{X}_1 & \cdots & & \mathbf{X}_p'\mathbf{X}_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{N}_{12} & \cdots & \mathbf{N}_{1p} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{D}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}_{p1} & \cdots & & \mathbf{D}_p \end{bmatrix}$$

Exemple Toujours pour les mêmes variables

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc} 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

L'ACM : une AFC sur tableau disjonctif

Chercher une représentation des $m_1 + \ldots + m_p$ catégories comme points d'un espace de faible dimension.

Méthode Faire une AFC sur le tableau disjonctif joint

$$\mathcal{X}(n \times m) = X_1|X_2|\ldots|X_p$$

L'ACM : une AFC sur tableau disjonctif

- **Les lignes** : La somme des éléments de chaque ligne de $\mathcal{X}$ est égale à p. Le **tableau des profils-lignes** est donc $\frac{1}{p}\mathcal{X}$
- **Les colonnes** : la somme des éléments de chaque colonne de $\mathcal{X}$ est égale à l'effectif marginal de la catégorie correspondante.

Le tableau des profils colonnes est donc $\mathcal{X}D^{-1}$ où D est la matrice diagonale par blocs.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{D}_p \end{pmatrix}$$

Les coordonnées factorielles des catégories

On note $a_k = (a_{1k}, \ldots, a_{pk})$ vecteur à $m_1 + \ldots + m_p$ composantes des coordonnées factorielles des catégories sur l'axe k.

Calcul de l'AFC sur $\mathcal{X}$

La matrice des profils lignes est

$$\frac{1}{p}\mathcal{X}$$

et celle des profils colonnes

$$\mathcal{X}D^{-1}$$

.

Les coordonnées factorielles des catégories

On note $a_k = (a_{1k}, \ldots, a_{pk})$ vecteur à $m_1 + \ldots + m_p$ composantes des coordonnées factorielles des catégories sur l'axe k.

a_k **est vecteur propre** de

$$(\mathcal{X} D^{-1})' \frac{1}{p} \mathcal{X} = \frac{1}{p} D^{-1} \mathcal{X}' \mathcal{X} = \frac{1}{p} D^{-1} B$$

léquation des coordonnées des catégories est donc

$$\frac{1}{p} D^{-1} B a_k = \mu_k a_k$$

Avec la convention de normalisation suivantes

$$\frac{1}{np} {a_k}' D a_k = \mu_k$$

Resolution cas p=2

On note $a = (a_1, a_2)$ vecteur à $m_1 + m_2$ composantes factorielles des catégorie et μ_k la valeur propre correspondante.

Calcul de l'AFC sur $\mathcal{X}$

$$\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_k\\ \mathbf{b}_k\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\\ \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}' & \mathbf{I}_{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_k\\ \mathbf{b}_k\end{bmatrix} = \mu_k\begin{bmatrix}\mathbf{a}_k\\ \mathbf{b}_k\end{bmatrix}$$

Resolution cas p=2

On note $a = (a_1, a_2)$ vecteur à $m_1 + m_2$ composantes factorielles et μ_k la valeur propre correspondante.

On obtient les équations

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{b}_k = (2\mu_k - 1)\mathbf{a}_k \\ \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k = (2\mu_k - 1)\mathbf{b}_k \end{cases}$$

et donc on retrouve les coordonnées des modalités de lignes et de colonnes dans l'AFC classique (avec $\mu_k = (2\lambda_k - 1)^2$)

$$\begin{cases} \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{b}_k = (2\mu_k - 1)^2\mathbf{b}_k \\ \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k = (2\mu_k - 1)^2\mathbf{a}_k \end{cases}$$

Différences ACM/AFC pour p = 2

- **Nombre de valeurs propres** : on a a priori $m_1 + m_2 - 2$ valeurs propres non nulles, En particulier pour chaque λ_k, on a deux μ_k possibles

$$\begin{cases} \mu_k = \frac{1+\sqrt{\lambda_k}}{2} & \text{associée à } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{b}_k \end{bmatrix} \\ \mu'_k = \frac{1-\sqrt{\lambda_k}}{2} & \text{associée à } \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k \\ -\mathbf{b}_k \end{bmatrix} \end{cases}$$

  On ne garde donc que les valeurs $\mu_k > 0.5$

- **Inertie** : l'interprétation de la part d'inertie expliquée par les valeurs propres est maintenant très différente.

  En particulier les valeurs propres qui étaient très séparées dans lAFC de N le sont beaucoup moins dans celle de X.

Formules barycentriques

- Les coordonnées des individus

$$\mathbf{c}_k = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \frac{1}{p} \mathbf{X} \mathbf{a}_k \quad \text{et donc} \quad c_{ik} = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \frac{1}{p} \sum_{j \text{ catégorie de } i} a_{jk}$$

Avec variance

$$\operatorname{var} \mathbf{c}_k = \frac{1}{n} \mathbf{c}_k' \mathbf{c}_k = \mu_k$$

- Les coordonnées des catégories

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{c}_k \quad \text{c-à-d} \quad a_{jk} = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \frac{1}{n_j} \sum_{i \text{ de catégorie } j} c_{ik}$$

Barycentres et représentation

- Les points représentatifs des catégories sont barycentres des groupes d'individus.
- Moyennes comme c_k est une variable de moyenne nulle, la formule de barycentre indique que pour chaque variable X_i les coordonnées de ses catégories sont de moyenne nulle.
- Pour que les catégories se trouvent visuellement au barycentre des individus qui les représentent on peut remplacer a_k

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{c}_k = \sqrt{\mu_k}\mathbf{a}_k$$

Sélection des axes

- règle courante : garder les axes tels que $\mu_k > \frac{1}{p}$ (la moyenne des valeurs propres est $\frac{1}{p}$).
- les axes intéressants sont ceux que l'on peut interpréter, en regardant les contributions des variables actives et les valeurs-tests associées aux variables supplémentaires.
- En pratique on se contente souvent dinterpréter le premier plan principal.

Sélection des axes

- Si n_j est leffectif de la catégorie j et a_{jk} sa coordonnée sur laxe factoriel k, alors

$$\text{var } \mathbf{a}_k = \sum_{j \in \text{catégories}} \frac{n_j}{np} (a_{jk})^2 = \mu_k$$

  - **Catégorie** La contribution de la catégorie j à laxe factoriel est :

$$\frac{n_j}{np} \frac{(a_{jk})^2}{\mu_k},$$

- **Variable :** la contribution totale de la variable ξ_v à l'axe factoriel est

$$\frac{1}{\mu_k} \frac{1}{np} \sum_{j \text{ modalité de } \mathcal{X}_v} n_j (a_{jk})^2$$

Contribution dun individu

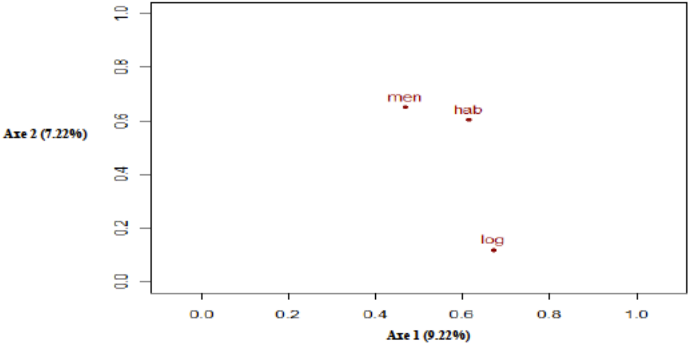
- Elle est égale pour l'individu i à

$$\frac{1}{n}\frac{(c_{ik})^2}{\mu_k}$$

- Qualité de la représentation pour le sous-espace formé par les premier axes, la qualité de la représentation de l'individu i est le cosinus carré habituel

$$\frac{\sum_{k=1}^{\ell}(c_{ik})^2}{\sum_{k=1}^{q}(c_{ik})^2}$$

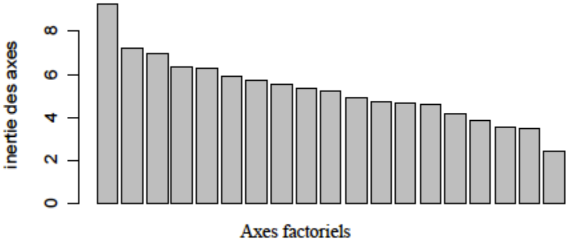
Exemple



Projection des variables qualitatives sur le premier plan

Que pensez vous de l'inertie porté par le premier plan ?

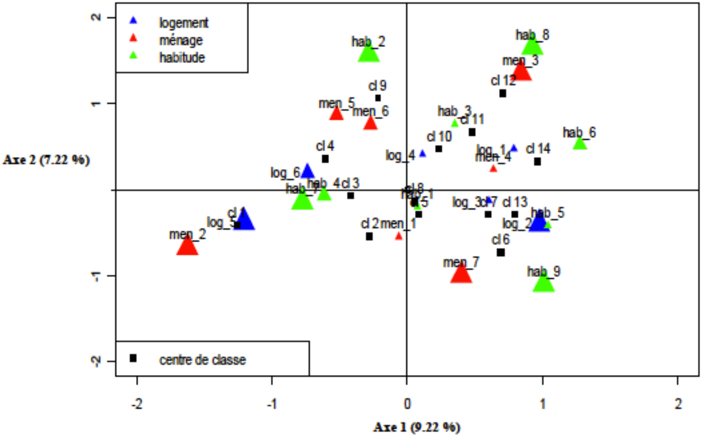
Exemple



Inertie des différents

Que pensez vous du nombre d'axes ?

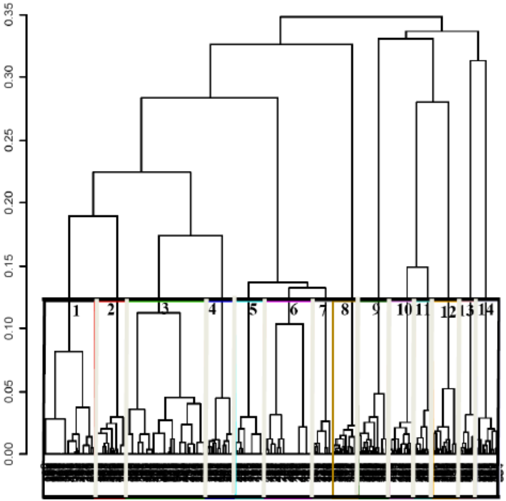
Exemple



Projection des modalités des variables qualitatives

Interprétez ?

Exemple : Utilisation des composantes factorielles



CAH sur les composantes factorielles