**操纵端与执行端映射关系建立：**

常见操作端为刚性连杆结构，而执行端为柔性结构，因此需要建立统一的运动学模型，并通过两个模型建立操纵端输入与执行端输出之间的映射关系，以下为该过程的数学推导过程：

**1.1 操作端运动学模型建立：**

通过设计的机械结构抽象出操纵端的机构运动简图，其中圆柱代表旋转关节，正方体代表平动关节，紫色箭头表明运动方向，每个运动关节根据DH坐标法配备了合适的坐标系。

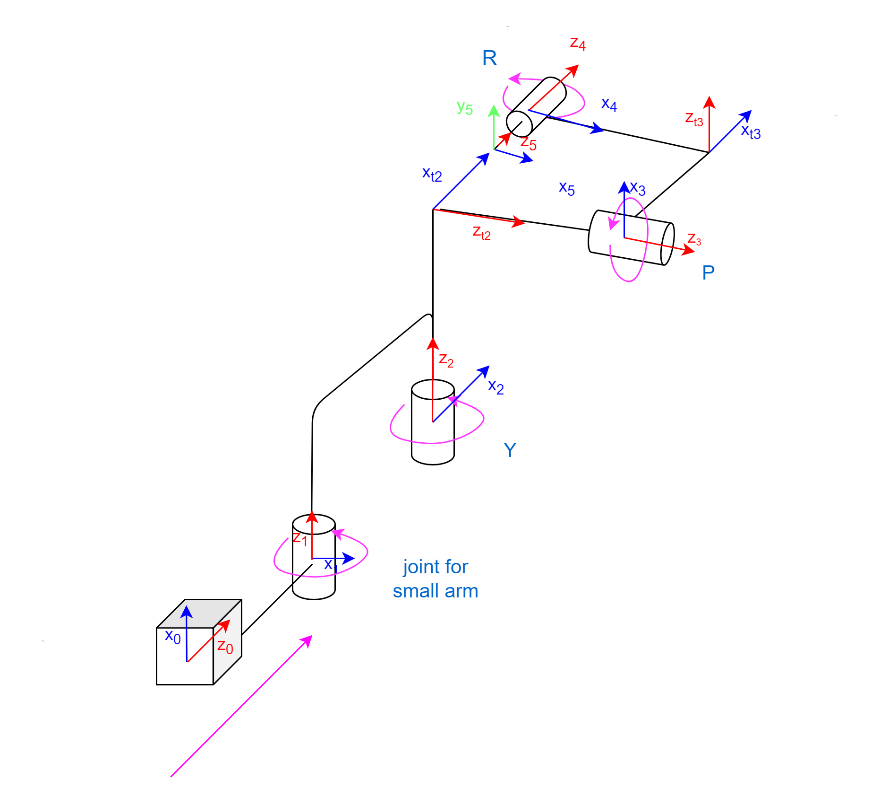
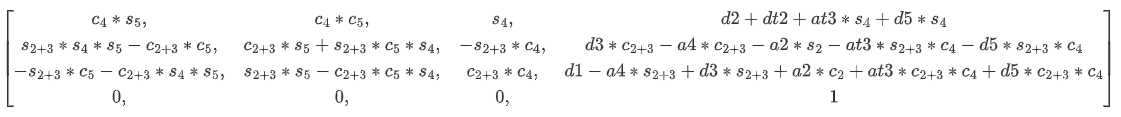


图1

其中由于坐标系2 和坐标系3之间无法建立满足DH准则（下一个坐标系的x轴要和z轴垂直相交），因此中间添加了一个过渡的坐标系，同理于

根据DH建模方法得到DH表如下：

根据上表，借助Matlab计算操纵端世界坐标系和末端坐标系之间的齐次坐标变换矩阵如下：



矩阵1

整体的正运动学其实也没用上

由于二连杆等效执行端柔性连续体结构（因为两者都是控制R-P-Y三个角度），所以也单独求解了二连杆的齐次变换矩阵：

图示, 示意图

描述已自动生成图示

描述已自动生成

图2

矩阵2

**1.2 执行端运动学模型建立：**

由于执行端为柔性的连续体，该结构没有显示的关节结构，因此无法直接对该结构使用DH方法直接建模分析，在这里引用论文[1]中的方法，将一段曲率恒定的柔性机构等效为含有刚性关节的机构，从而适应传统机器人运动学。

图示, 工程绘图

描述已自动生成图示

描述已自动生成

图3

如上图所示，该假设将一段柔性连续体看作是四个转动关节+一个平动关节的刚性机构，位于柔性体部分起始端的前两个旋转关节将局部坐标系（坐标系1）指向该部分的尖端。接下来，棱柱关节将局部坐标系平移到柔性体的尖端（坐标系2）。**最后两个旋转关节然后将局部坐标系旋转至末端切线方向。**（这里是我之前觉得最难理解的，以下阐述我的理解）

以下部分为解释部分，后续会删掉的

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

坐标系3绕z轴转动角度比较好理解，就是使得沿着连续体切线方向，正如现实中末端的器械是绕着末端切线轴旋转的；关于为什么还要绕着转动 ，可以看下面这张图，两张图都是绕坐标系0中旋转一周的结果：

左边是未旋转处理的，选取其对称的一组，也即角度相差180°的两组，左侧坐标系x，y轴分别对应4、1侧，而经过旋转180°后，x、y分别对应了3、2侧，现实中表示末端器械也随着旋转了180°，因此需要一个反向的绕旋转180°抵消这个结果；

造成这个现象的原因是，连续体模型在绕旋转时，实际柔性臂并不是旋转，而是偏转，显示中如果使柔性臂绕z轴旋转会发生扭转的情况，因此另一个意义上绕的反向旋转也是抵消这个扭转。

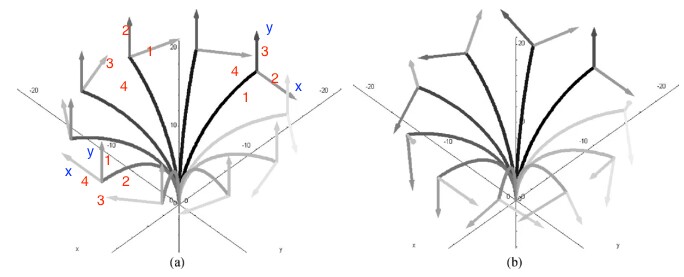
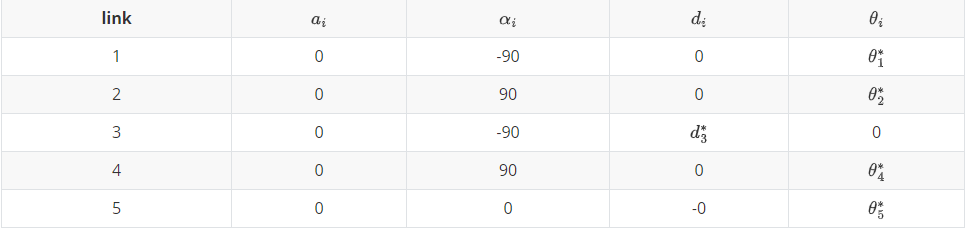


图4

——————————————————————————————————————————

根据上述DH模型，可以得到对应的DH表：



其中为绕主轴z“旋转角度”，k为曲率，反映弯曲程度，s为连续体长度，可以直接测得；

上述关系是通过集合关系得到的，较为直接未作详细说明；

通过上述DH表，借助matlab计算得到单个连续体齐次变换矩阵如下：

文本

描述已自动生成

矩阵3

**1.3 操纵端与执行端映射关系推导**

根据直觉式控制方式的需求，主从系统之间需要满足以下约束：

* 约束一：在标定模式（不进行运动缩放）从端柔性手术机械臂带朝向要时刻主端手指的朝向保持一致
* 约束二：从端沿内窥镜通道轴向方向的伸缩运动与主端小臂前后的运动呈比例缩放关系

根据上述两个约束条件可以建立两个等式关系如下：

根据约束一中关系，我们需要根据主端手指朝向，计算该朝向下齐次变换中的旋转矩阵，由于主从两端朝向相同，因此在初始末端坐标系和世界坐标系相同的情况下，主从两边旋转矩阵部分应该相同。由于最终的旋转矩阵只有三个偏转关节决定，因此只需要考虑从坐标系 与 坐标系 之间的关系。其中坐标 对应的小臂偏转与手腕偏转完全独立，因此可以分开分析，以下推导主端关节变量 与 从端两端连续体变量上述主端变量如图\_\_ 所示，其中从端变量 分别表示近端连续体曲率和长度，由于近端只有在一个平面的自由度，因此对应的偏转角度为0，同理后面三个参数分别对应远端连续体偏转角度，曲率和长度。

#### 小臂偏转关节与近端连续体：

单独考虑小臂只有一个旋转过程，对应的旋转矩阵为 ，

根据前文中连续体运动学建模结构，近端平面连续体齐次变化矩阵中的旋转矩阵

由于两者坐标系刚好差，因此只需满足

#### 手腕偏转关节与远端连续体：

为了使得初始状态下末端与起始段坐标系关系一致，在现有坐标系基础上添加两个额外坐标系如下图：

图示, 示意图

描述已自动生成

构造新的DH表格：

表格

描述已自动生成

计算坐标系 在坐标系 下的齐次变换矩阵

同样根据之前连续体模型，可以得到远端连续体末端坐标系与起事端坐标系 之间的齐次变化矩阵 如下:

通过观察 和 ，其中旋转矩阵部分无法保证恒相等。为了解决该问题，对主从两端坐标系变换进行分析：为了便于理解，以下用欧拉角的方式对旋转变换进行描述。

#### 小以下为第一次错误结论：

由上图可以看出，主端二连杆的运动是由绕轴偏航()和 绕轴俯仰 组合而成；而连续体的坐标变换是由绕轴滚动 后绕 偏航 ，再绕 滚动 。通过上述分析，可以知道主端只有俯仰和偏航的旋转，而从端只有滚动和偏航的旋转，两者无法等效。这里提出的解决方法是将主端的两次旋转分作两步分析，主端单独的偏航()可以借助从端偏航描述，而主端的俯仰 可以通过从端绕滚动90°后再绕 偏航 偏航。从端需要进行两次坐标变换才能实现与主端同步，两次变换的参数需要满足以下关系：

正负号规定：所有旋转角度正负号均遵守右手定则；

注：由于曲率只能是正数，因此当 为负数时，

经过反思，上述“两步走”的方法中，第二次是在第一次的基础上进行了，也就是第二次旋转矩阵右乘 ，这样等价于两个串联单自由度连续体共同作用的结果，而实际上，我们这里只讨论一个具有双自由度的连续体，因此上述结论错误。

经过重新分析，我提出了两种解决方法：

* “两步走”的思路应该是可行的，但是两步应该都是在连续体的世界坐标系下进行变换，这个也是我先用第二种思路做出来后才想清楚的，结果和思路二一样，但是不如思路二简洁，这里不多做描述
* 另一个思路是末端朝向相同的硬约束其实只有z轴重合，x,y可以通过后续绕z轴的旋转来调整

#### 正确思路

下图描述了二连杆先绕 旋转后，再绕 旋转后得到最终二连杆末端坐标系的过程，观察下图可以发现，该结果同样可也通过先绕旋转 角度后得到坐标系，再绕 旋转得到坐标系 该坐标系满足于坐标系z轴同向，但是x-y存在一个偏置需要弥补；这里主要的问题是如何借助几何关系，根据已知的 求解

[三余弦定理](https://zhuanlan.zhihu.com/p/401766934)描述的是空间中满足投影关系的三个角满足以下关系:

![fig:](data:application/octet-stream;base64,)

借助图中两组投影关系：在上的投影为，在上的投影为

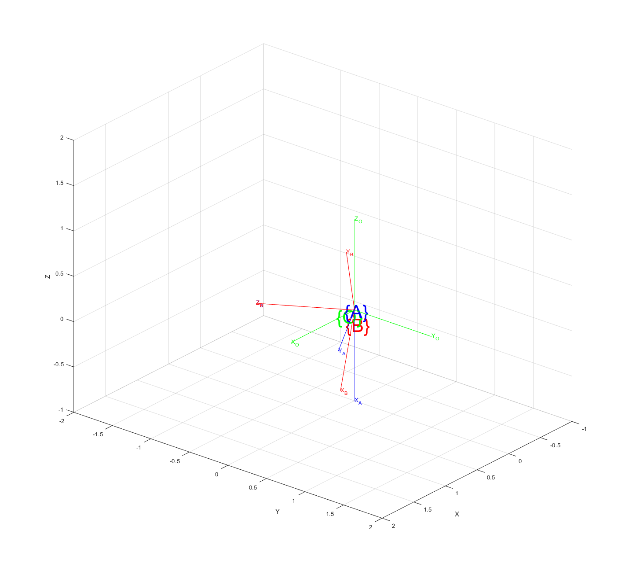
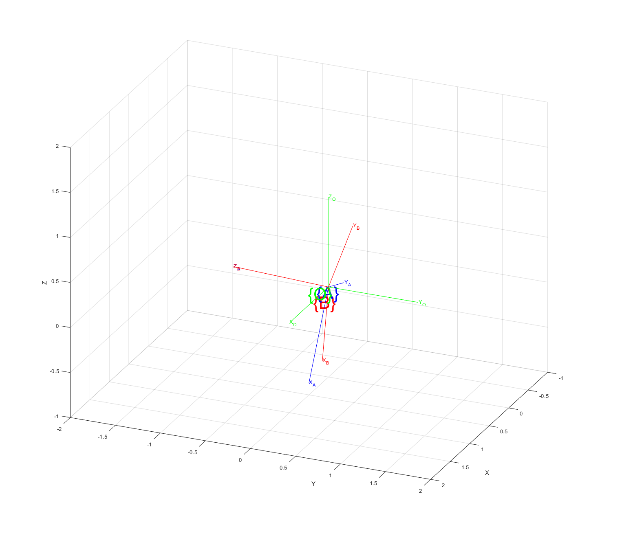
三余弦组合1:

三余弦组合2：

三余弦组合3：

由等式联立求解可得

使用matlab验证上述结论:



其中绿色坐标系为世界坐标系，红色坐标系为主端二连杆末端朝向，蓝色坐标系为连续体末端朝向，通过可视化坐标系变换可以验证该公式可以满足z轴同一朝向，但是x-y平面存在一个偏置。通过寻找新的几何关系：

这个部分的公式也求出来了，但是验证不正确，我暂时找不到问题出在哪里？

由此可以得到主端驱动空间 到从端构型空间 之间的映射关系：

公式

### 从端构型空间与驱动空间映射