**操纵端与执行端映射关系建立：**

常见操作端为刚性连杆结构，而执行端为柔性结构，因此需要建立统一的运动学模型，并通过两个模型建立操纵端输入与执行端输出之间的映射关系，以下为该过程的数学推导过程：

**1.1 操作端运动学模型建立：**

通过设计的机械结构抽象出操纵端的机构运动简图，其中圆柱代表旋转关节，正方体代表平动关节，紫色箭头表明运动方向，每个运动关节根据DH坐标法配备了合适的坐标系。

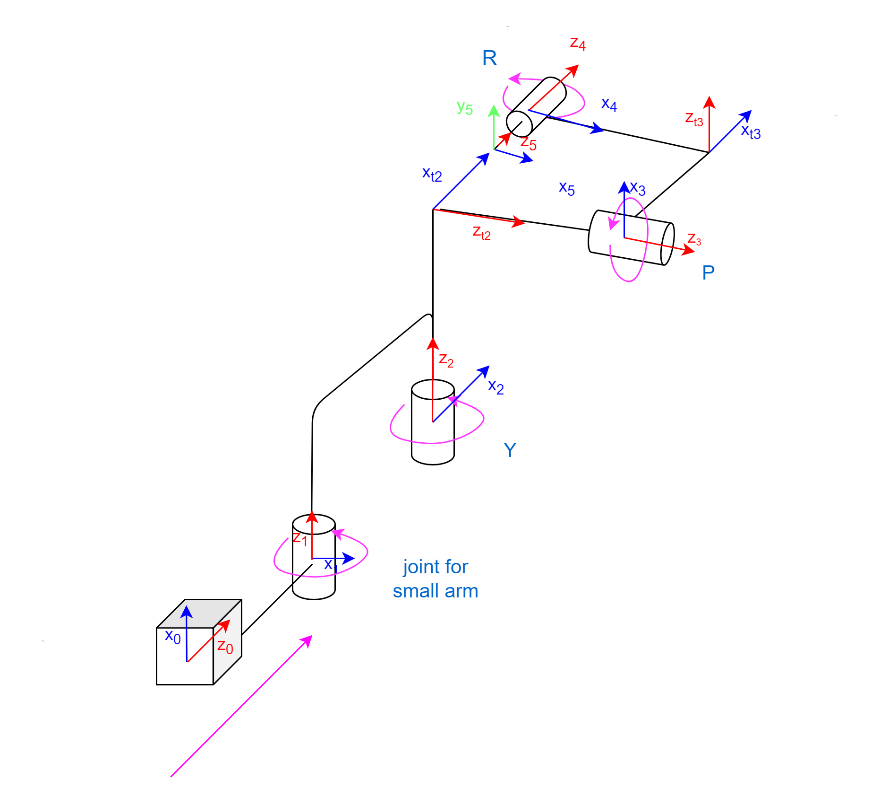
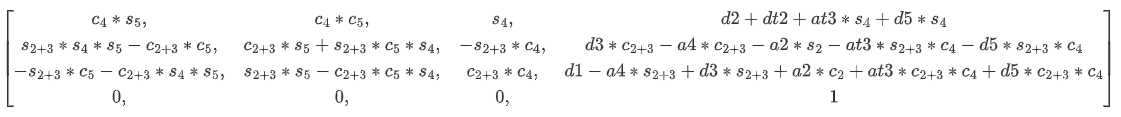


图1

其中由于坐标系2 和坐标系3之间无法建立满足DH准则（下一个坐标系的x轴要和z轴垂直相交）

根据DH建模方法得到DH表如下：

根据上表，借助Matlab计算操纵端世界坐标系和末端坐标系之间的齐次坐标变换矩阵如下：



矩阵1

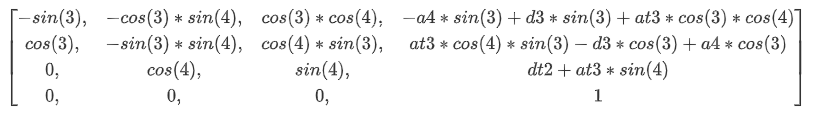
由于二连杆等效执行端柔性连续体结构（因为两者都是控制R-P-Y三个角度），所以也单独求解了二连杆的齐次变换矩阵：

图示, 示意图

描述已自动生成图示

描述已自动生成

图2



矩阵2

**1.2 执行端运动学模型建立：**

由于执行端为柔性的连续体，该结构没有显示的关节结构，因此无法直接对该结构使用DH方法直接建模分析，在这里引用论文[1]中的方法，将一段曲率恒定的柔性机构等效为含有刚性关节的机构，从而适应传统机器人运动学。

图示, 工程绘图

描述已自动生成图示

描述已自动生成

图3

如上图所示，该假设将一段柔性连续体看作是四个转动关节+一个平动关节的刚性机构，位于柔性体部分起始端的前两个旋转关节将局部坐标系（坐标系1）指向该部分的尖端。接下来，棱柱关节将局部坐标系平移到柔性体的尖端（坐标系2）。**最后两个旋转关节然后将局部坐标系旋转至末端切线方向。**（这里是我之前觉得最难理解的，以下阐述我的理解）

坐标系3绕z轴转动角度比较好理解，就是使得沿着连续体切线方向，正如现实中末端的器械是绕着末端切线轴旋转的；关于为什么还要绕着转动 ，可以看下面这张图，两张图都是绕坐标系0中旋转一周的结果：

左边是未旋转处理的，选取其对称的一组，也即角度相差180°的两组，左侧坐标系x，y轴分别对应4、1侧，而经过旋转180°后，x、y分别对应了3、2侧，现实中表示末端器械也随着旋转了180°，因此需要一个反向的绕旋转180°抵消这个结果；

造成这个现象的原因是，连续体模型在绕旋转时，实际柔性臂并不是旋转，而是偏转，显示中如果使柔性臂绕z轴旋转会发生扭转的情况，因此另一个意义上绕的反向旋转也是抵消这个扭转。

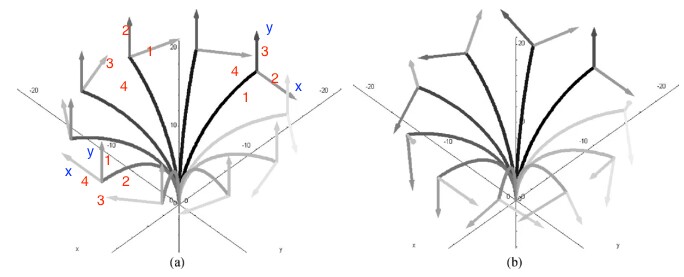


图4

根据上述DH模型，可以得到对应的DH表：

表格

描述已自动生成

其中

日历

中度可信度描述已自动生成

为绕主轴z“旋转角度”，k为曲率，反映弯曲程度，s为连续体长度，可以直接测得；

上述关系是通过集合关系得到的，较为直接未作详细说明；

通过上述DH表，借助matlab计算得到单个连续体齐次变换矩阵如下：

文本, 信件

描述已自动生成

文本

描述已自动生成

矩阵3

**1.3 操纵端与执行端映射关系推导**

根据直觉式控制方式的需求，主从系统之间需要满足以下约束：

* 约束一：在标定模式（不进行运动缩放）从端柔性手术机械臂带朝向要时刻主端手指的朝向保持一致
* 约束二：从端沿内窥镜通道轴向方向的伸缩运动与主端小臂前后的运动呈比例缩放关系

根据上述两个约束条件可以建立两个等式关系如下：

根据约束一中关系，我们需要根据主端手指朝向，计算该朝向下齐次变换中的旋转矩阵，由于主从两端朝向相同，因此在初始末端坐标系和世界坐标系相同的情况下，主从两边旋转矩阵部分应该相同。由于最终的旋转矩阵只有三个偏转关节决定，因此只需要考虑从坐标系1

【公式3】

具体的坐标系配给如下：

图示, 示意图

描述已自动生成图示

描述已自动生成

构造新的DH表格：

日历

中度可信度描述已自动生成

连续体的偏转只由yaw(Θ3)和pitch(Θ4)两个角决定，因此只需要计算操纵端坐标系4相对于坐标系e1的齐次变换矩阵 (e1 \_ 4) T，结果如下：

=

同时计算执行端连续体坐标系4相对于坐标系0的齐次变换矩阵结果如下：

=文本

描述已自动生成

如上两个齐次变化矩阵中旋转矩阵不相等