Chapitre 0 : Introduction à la modélisation sous forme de graphes

Cours Graphes & Applications

Unité Pédagogiques de Mathématiques,
École Supérieure PRivée d'Ingénierie et de Technologies (ESPRIT)

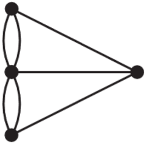
Année Universitaire : 2024-2025

Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Origine de la Théorie des graphes

En 1735, **Euler** a résolu le problème posé par les habitants de Königsberg (aujourd'hui **Kaliningrad**), qui se demandaient s'il était possible de traverser les sept ponts de la ville en ne passant qu'une seule fois sur chaque pont. Euler a démontré que cela était impossible, en utilisant une approche mathématique novatrice qui a marqué la naissance de la **théorie des graphes**. Il a montré que pour qu'un tel parcours soit possible, chaque sommet du graphe doit avoir un nombre pair d'arêtes (sauf deux au maximum, pour un parcours qui commence et se termine à des endroits différents). Dans le cas de Königsberg, tous les sommets avaient un nombre impair d'arêtes, rendant le parcours impossible.

Plan de la vieille ville



Le graphe de la situation

Objectifs

- Comprendre les concepts fondamentaux,
- Expliquer l'importance de Graphes,
- Explorer les représentations de Graphes,
- Introduire les types de Graphes,
- Comprendre les représentations numériques de Graphes.

Plan

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

- La **R**echerche **O**pérationnelle (**RO**), c'est un outil d'aide à la décision.
- La Recherche opérationnelle : ensemble des méthodes **mathématiques et algorithmiques** qui permettent de résoudre un problème donné **de la meilleure façon possible**.
- C'est la discipline de l'application des méthodes analytiques avancées pour aider à prendre de meilleures décisions.
- **L'objet** de cette discipline est de **fournir des bases rationnelles à la prise de décisions**, habituellement dans un but de **contrôle ou d'optimisation** (améliorer l'efficacité, diminuer les coûts, etc.).

Bref histoire: Origines militaire de la RO

- Création par le gouvernement britannique au début de la seconde guerre mondiale.
- **Objectif :** **optimisation** de la logistique militaire et du réapprovisionnement des troupes. (`http://www.phpsimplex.com/fr/histoire.htm`)
- A l'origine, le mot **Opérationnel** signifie donc en vue de **programmer des opérations militaires**.
- **R** de RO = **Recherche de solutions concrètes**.
- La science du : "*comment mieux faire avec moins. . . ?*"

Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

La RO en pratique

Sert à résoudre certains types de problèmes difficiles (issus de l'industrie ou de la finance) :

- Production,
- Problèmes de transport,
- Problèmes de télécommunications,
- Planification de projets,
- Gestion financière (banques et assurances)...

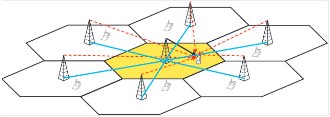


Figure: Allocation de fréquences dans les réseaux GSM.

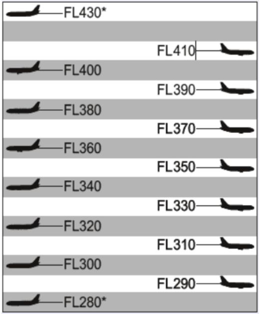


Figure: Allocation de niveaux de vol.

Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

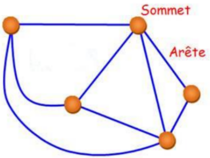
Plan

Se former autrement

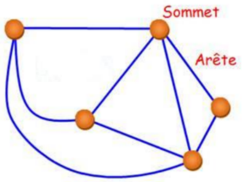
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Un graphe **non orienté** G est un couple formé de deux ensembles:

- Un ensemble $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**, avec la cardinalité $|V| = n$.
- Un ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ dont les éléments sont les relations entre les sommets et appelés **arêtes**, avec la cardinalité $|E| = p$, où $p \neq n$ en général (le nombre d'arêtes peut différer du nombre de sommets).
  On note : $G = (V, E)$
- Le nombre de sommets est **l'ordre** du graphe.
- Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits **adjacents** ou **voisins**.



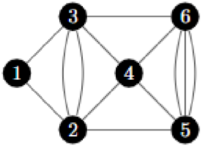
- Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe est dit **isolé**.
- Une arête e est **incidente** à un sommet v si v est **une extrémité** de e.
- Deux arêtes incidentes à un même sommet sont adjacentes.
- Une arête dont les extrémités sont égales est appelée **boucle**.
- Une arête e s'appelle **multiple** s'il existe une autre arête $e' \neq e$ reliant les mêmes sommets que e; dans ce cas on dira aussi que e et e' sont **parallèles**.



Quelques types de graphes non orientés

- **Sous-graphe** : $G' = (V'; E')$ est un sous-graphe de $G = (V; E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.
- **Graphe partiel** : $G' = (V'; E')$ est un graphe partiel de $G = (V; E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.
- Un graphe est dit **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.
- A l'inverse du graphe simple, le **multigraphe** est un graphe qui autorise des arêtes **multiples**. En d'autres termes, dans un multigraphe, deux sommets peuvent être connectés par plus une arête.

Considérons le multigraphe ci-bas :



Quelques types de graphes non orientés

Un graphe est un **pseudographe** si :

- Il peut contenir des **boucles**, c'est-à-dire des arêtes reliant un sommet à lui-même.
- Il peut également avoir des **arêtes multiples**, c'est-à-dire plusieurs arêtes reliant la même paire de sommets.

Formellement, un pseudographe $G = (V, E)$ est un couple où :

- V est un ensemble de sommets.
- E est un ensemble d'arêtes où chaque arête est une paire ordonnée (ou non ordonnée) de sommets, avec possibilité de boucles ($e_i = (v_i, v_i)$) et d'arêtes multiples ($e_i = e_j$ avec $i \neq j$).

Remarque

Dans ce cours, nous n'utilisons que des **graphes simples**. Un graphe simple est un graphe **non orienté**, qui ne contient ni **boucles** ni **arêtes multiples**.

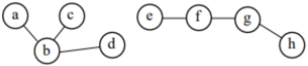
esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Graphes : Définitions et terminologies

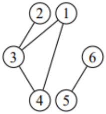
Terminologies

- **Une chaîne** est une suite finie de sommets reliés entre eux par une arête.
- **Un cycle** est une chaîne fermée dont toutes les arête sont distinctes.
- **Graphe connexe** : un graphe G est dit connexe s'il est non orienté et quelque soient les sommets x et y de V , il existe une chaîne de x vers y.
- **Un graphe non connexe** est dit disconnexe. Il est alors une réunion de sous-graphes connexes, appelés **composantes connexes**.
- Un sous-graphe connexe maximal d'un graphe non orienté quelconque est une **composante connexe** de ce graphe.

Exemple 1 : Graphe non connexe avec deux composantes connexes :



Exemple 2 : Sur le graphe non connexe ci-dessous, les composantes connexes sont $\{1; 2; 3; 4\}$ et $\{5; 6\}$:



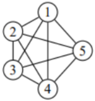
Graphe non connexe

$V = \{1,2,3,4,5,6\}$

$E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\},\{5,6\}\}$

Terminologies

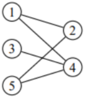
- Un graphe est **complet** si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets. On appelle un tel graphe K_n, où $n \geq 1$ est le nombre de sommets.. Le nombre total d'arêtes dans un graphe complet K_n est donné par la formule : $\frac{n(n-1)}{2}$



Graphe complet K_5

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$

- Un graphe est **biparti** si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles V_1 et V_2, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans V_1 à un sommet dans V_2 (dans l'exemple ci-dessous, on a $V_1 = \{1; 3; 5\}$ et $V_2 = \{2; 4\}$, ou vice versa).



Graphe biparti

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$

Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Degré d'un sommet

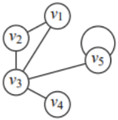
- On appelle **degré du sommet** v_i, et on note $d(v_i)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

Attention !

Une boucle sur un sommet compte double.

- Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage).

Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés:



$$d(v_1) = 2$$
$$d(v_2) = 2$$
$$d(v_3) = 4$$
$$d(v_4) = 1$$
$$d(v_5) = 3$$

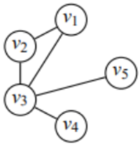
Théorème 1.1 : Lemme des poignées de mains

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes...

Degré d'un graphe

Le degré d'un graphe est le **degré maximum** de tous ses sommets.

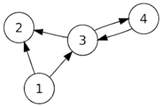
Dans l'exemple ci-dessous, le degré du graphe est **4**, à cause du sommet v_3.



Un graphe dont **tous les sommets** ont le **même degré** est dit **régulier**.

Plan

- En donnant **un sens aux arêtes** d'un graphe, on obtient **un graphe orienté**.
- Un graphe orienté fini $G = (V; E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**, et par l'ensemble fini $E = \{e_1; e_2; \ldots; e_m\}$ dont les éléments sont appelés **arcs**.
- Un arc e de l'ensemble E est défini par une paire ordonnée de sommets. Lorsque $e = (u; v)$, on dit que u est l'extrémité initiale et v l'extrémité finale de e.



Dans un **graphe orienté**, les notions de **successeur** et de **prédécesseur** se réfèrent à la relation entre les sommets par rapport aux arêtes orientées.

- Un **successeur** d'un sommet v_i est un sommet v_j tel qu'il existe un arc allant de v_i à v_j. En d'autres termes, si $(v_i, v_j) \in E$, alors v_j est un successeur de v_i.
- Un **prédécesseur** d'un sommet v_j est un sommet v_i tel qu'il existe un arc allant de v_i à v_j. Ainsi, si $(v_i, v_j) \in E$, alors v_i est un prédécesseur de v_j.

Degré d'un sommet d'un graphe orienté

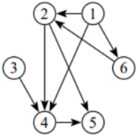
Soit v un sommet d'un graphe orienté.

- On note $d^+(v)$ **le degré extérieur** du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité initiale.
- On note $d^-(v)$ **le degré intérieur** du sommet v, c'est-à-dire le nombre d'arcs ayant v comme extrémité finale.
- On définit le degré :

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

Exercice

Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets du graphe ci-dessous :



Chemins et circuits

- **Un chemin** est une succession de sommets adjacents.
- **Un circuit** est un chemin fermé dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes.
- Un **graphe orienté** est dit **fortement connexe** si, pour chaque paire de sommets u et v du graphe, il existe un chemin orienté allant de u à v et un chemin orienté allant de v à u. En d'autres termes, il est possible d'atteindre tout sommet à partir de n'importe quel autre sommet.
- Si un graphe orienté n'est pas fortement connexe, il est dit **faiblement connexe** si, en ignorant les orientations des arêtes, il existe un chemin entre chaque paire de sommets. Cela signifie que, même si certains sommets ne sont pas accessibles dans le sens de l'orientation des arcs, il existe néanmoins un chemin reliant ces sommets lorsque l'on considère les arêtes comme non orientées.

Remarque

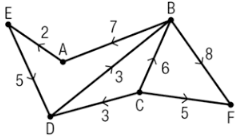
Les notions de **chemins et de circuits** sont analogues à celles des **chaînes et des cycles** pour les **graphes non orientés**.

Plan

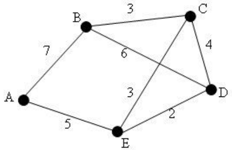
Graphe valué

Un **graphe valué** est un graphe dont chaque arête est associée à une valeur ou un poids. Ces valeurs peuvent représenter des coûts, des distances, des capacités ou toute autre mesure pertinente pour le problème à modéliser.

- Un **graphe orienté valué** est un graphe orienté dans lequel chaque arête $(u, v) \in E$ est associée à une valeur $w(u, v)$, représentant le poids de l'arête allant de u à v.



- Un **graphe non orienté valué** est un graphe non orienté dans lequel chaque arête $\{u, v\} \in E$ est associée à une valeur $w(u, v)$, représentant le poids de l'arête reliant les sommets u et v.



Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Plan

Algorithmique

Dans **l'aspect algorithmique** de la théorie des graphes, on cherche à concevoir un processus efficace pour traiter un problème faisant intervenir un graphe.

- Les principaux **critères d'efficacités** d'un processus sont le **temps nécessaire** pour obtenir la réponse et **l'espace** que le processus consomme dans son travail.
- Un certain nombre de représentations existent pour décrire un graphe.
- On distingue principalement la représentation par **matrice d'adjacence**,par **matrice d'incidence sommets-arcs** (ou **sommets-arêtes** dans le cas non orienté) et par **listes d'adjacence**.

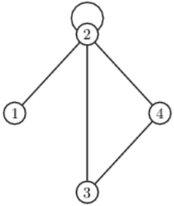
Matrice d'adjacence

Définition

La **matrice d'adjacence** d'un graphe non orienté est une matrice carrée de taille $n \times n$, où n est le nombre de sommets du graphe.

- L'élément $A[i][j]$ est égal à 1 si une arête existe entre les sommets v_i et v_j, et 0 sinon.
- La matrice est symétrique, c'est-à-dire que $A[i][j] = A[j][i]$.

Cette matrice permet de représenter les connexions entre les sommets et d'analyser les propriétés du graphe.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

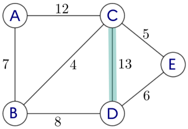
Matrice d'adjacence

Cas d'un graphe valué

La **matrice d'adjacence** d'un **graphe non orienté valué** est une matrice carrée de taille $n \times n$, où n est le nombre de sommets du graphe. Cette matrice représente les connexions entre les sommets ainsi que les poids associés aux arêtes.

- L'élément $A[i][j]$ de la matrice est égal au poids de l'arête entre les sommets v_i et v_j si une telle arête existe, et 0 sinon.
- La matrice est symétrique, c'est-à-dire que $A[i][j] = A[j][i]$ pour tous les sommets v_i et v_j.

La matrice d'adjacence permet d'analyser les propriétés du graphe, comme le poids total des chemins et la connectivité entre les sommets.



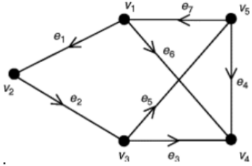
$$\begin{array}{c} \\ \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \\ \mathsf{D} \\ \mathsf{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathsf{A} & \mathsf{B} & \mathsf{C} & \mathsf{D} & \mathsf{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 12 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 13 & 5 \\ 0 & 8 & 13 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

esprit
Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Matrice d'incidence sommets-arcs

Définition

La matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe G est une matrice à coefficients entiers appartenant à l'ensemble $\{0; +1; -1\}$ telle que chaque colonne correspond à un arc e_i de G, et chaque ligne à un sommet v_i de G; Si $u = (i;j) \in U$, on notera : $a_{iu} = 1, a_{ju} = -1$ et tous les autres termes sont nuls.



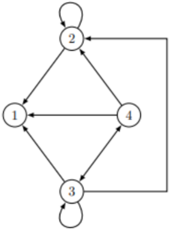
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Listes d'adjacences

Définition

Un graphe peut être représenté à l'aide de **listes d'adjacences**, qui est une **table à simple entrée** où chaque ligne correspond à un sommet et contient la liste de ses successeurs (ou prédécesseurs).

- Dans un **graphe orienté**, la liste d'adjacence d'un sommet v_i inclut les sommets v_j accessibles par un arc de v_i vers v_j.
- Dans un **graphe non orienté**, la liste d'adjacence d'un sommet v_i comprend les sommets v_j reliés à v_i par une arête, sans distinction de direction.
- Cette représentation est efficace pour les graphes avec un nombre d'arêtes relativement faible, facilitant les opérations de parcours et d'analyse.



Alors la liste d'adjacence associée à ce graphe est :

1	→				
2	→	2	1		
3	→	1	4	3	2
4	→	1	2	3	

A la prochaine !