Probabilités II
Chaînes de Markov à temps discrets

4 ème année Data Science

A.U.2019-2020

Plan

Matrice de transition d'une chaîne de Markov

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus à valeurs dans un espace E discret, c.à.d que l'ensemble E est fini ou dénombrable.

Définition

Soit E un espace fini ou dénombrable. On dit que:

$$(P(x,y), x \in E, y \in E),$$

est une matrice de transition d'une chaîne de Markov si

1. $P(x,y) \geq 0$ pour tout x et y dans E,
2. $\sum_{y\in E} P(x,y) = 1.$

Pour tout x, on peut définir une probabilité sur E, en posant:

$$P(x,A) = \sum_{y\in A} P(x,y)$$

Matrice de transition d'une chaîne de Markov

Exemple: Matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaîne de Markov

Définition

On dit qu'un processus $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov sur un espace E de matrice de transition P si l'on a, $\forall n \geq 0$, et $\forall x_0, x_1 \cdots, x_n, x_{n+1}$ éléments de E:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) &= \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \\ &= P(x_n, x_{n+1})\end{aligned}$$

☛ Conditionnellement au présent, le futur ne dépend pas du passé.

c.à.d la loi conditionnelle du futur X_{n+1} sachant le passé $X_0, X_1 \cdots, X_n$, ne dépend que du présent X_n, et éventuellement de l'instant n.

Un exemple générique de chaîne de Markov

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur l'espace F, ayant toutes la même loi.
Soit $H : E \times F \to E$ une application. On pose $X_0 = x_0$ un point fixé et on définit X_n par la formule de récurrence:

$$X_{n+1} = H(X_n, U_{n+1}),$$

Alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par:

$$P(x, y) = \mathbf{P}(H(x, U_1) = y).$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

En effet:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
&= \mathbf{P}(H(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
&= \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)
\end{aligned}$$

Mais $H(x_n, U_{n+1})$ est indépendante du vecteur $(U_1, \cdots, U_n)$ et $X_0, \cdots X_n$ s'écrivent comme des fonctions de $(U_1, \cdots, U_n)$. Donc $H(x_n, U_{n+1})$ est indépendante du vecteur $X_0, \cdots X_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
&= \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)
\end{aligned}$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(X_{n+1}=x_{n+1} \middle| X_n=x_n, \cdots, X_0=x_0\right) \\
= \quad & \frac{\mathbf{P}\left(X_{n+1}=x_{n+1}, X_n=x_n, \cdots, X_0=x_0\right)}{\mathbf{P}\left(X_n=x_n, \cdots, X_0=x_0\right)}
\end{aligned}
$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
= \quad & \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \quad & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}
\end{aligned}
$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \ & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})
\end{aligned}$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \ & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \times \mathbf{P}(X_n = x_n)}{\mathbf{P}(X_n = x_n)}
\end{aligned}
$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
= \; & \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \; & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \; & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \\
= \; & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \times \mathbf{P}(X_n = x_n)}{\mathbf{P}(X_n = x_n)} \\
= \; & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \big| X_n = x_n) = \mathbf{P}(H(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \big| X_n = x_n)
\end{aligned}
$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
= \; & \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \; & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \; & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \\
= \; & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \times \mathbf{P}(X_n = x_n)}{\mathbf{P}(X_n = x_n)} \\
= \; & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \big| X_n = x_n) = \mathbf{P}(H(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \big| X_n = x_n) \\
= \; & \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n)
\end{aligned}
$$

Un exemple générique de chaîne de Markov

Par définition du conditionnement par un ensemble, on a:

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}, X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1})\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)}{\mathbf{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0)} \\
= \ & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \\
= \ & \frac{\mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1}) \times \mathbf{P}(X_n = x_n)}{\mathbf{P}(X_n = x_n)} \\
= \ & \mathbf{P}(H(x_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \big| X_n = x_n) = \mathbf{P}(H(X_n, U_{n+1}) = x_{n+1} \big| X_n = x_n) \\
= \ & \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \big| X_n = x_n) \\
= \ & P(x_n, x_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Exemples

Exemple 1 : Nombre de piles consécutifs dans un jeu de pile ou face

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires tq. $\forall n \geq 1$, $\mathbf{P}(U_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(U_n = -1) = 1 - p,\ p \in [0, 1]$.

On suppose que le jeu est **infini** et pose la v.a. N_n le nombre de 1 consècutifs jusqu'au $n^{ième}$ tirage. Par convention $N_0 = 0$ et $N_n = 0$ si le $n^{ième}$ tirage est 0. Il est alors, facile de vérifier que pour $n \geqslant 0$:

$$N_{n+1} = (N_n + 1)1_{\{U_{n+1}=1\}}.$$

$(N_n, n \geqslant 0)$ est donc une chaîne de Markov de probabilité de transition:

$$\begin{cases} P(n, n+1) &= p,\ n \geqslant 0 \\ P(n, 0) &= 1 - p,\quad n \geqslant 0, \\ P(x, y) &= 0,\ \text{sinon (dans tous les autres cas.)} \end{cases}$$

Exemples

Suite de l'exemple 1

D'une façon générale, comme $E = \mathbb{N}$, alors la matrice de transition P s'écrit:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & ... & ... & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & .... & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 & .... \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & .... \end{pmatrix}$$

Exemples

Exemple 2 : Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Soit $(V_n, n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(V_n = u) = p$ et $\mathbf{P}(V_n = d) = 1 - p$, avec $p \in [0, 1]$, $u, d \geqslant 0$. Posons $X_0 = x$ et définissons par récurence X_n par:

$$X_{n+1} = X_n V_{n+1}.$$

$(X_n, n \geqslant 0)$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par:

$$\begin{cases} P(x, xu) & = & p, \quad x \in \mathbb{R} \\ P(x, xd) & = & 1 - p, \quad x \in \mathbb{R}, \\ P(x, y) & = & 0, \quad \text{sinon (dans tous les autres cas.)} \end{cases}$$

Exemple 3 : Marches aléatoires

Soit $(X_n, n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la même loi, alors si $S_0 = 0$ et

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

$(S_n, n \geqslant 0)$ est une chaîne de Markov de matrice de transition donnée par:

$$\mathbf{P}(S_{n+1} = y | S_n = x) = P(x, y) = \mathbf{P}(X_n = y - x) = \mathbf{P}(X_1 = y - x).$$

Plan

Calcul de lois

Exercice:

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace E, de matrice de transition P et de loi intiale μ. Vérifier que la loi du vecteur $(X_0, \ldots, X_n)$ est égale:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0) \times P(x_0, x_1) \times \ldots \times P(x_{n-1}, x_n)$$

☛ On désigne par la loi intiale μ c'est la loi de v.a X_0
Autrement dit c'est la famille de nombres:

$$\boxed{\mu(x) = \mathbf{P}(X_0 = x)}$$

Calcul de lois

Correction:
Par définition de la probabilité conditionnelle, on a:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1})$$

$$= \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)$$

Comme $(X_n)_{n \geq 0}$ est une **chaîne de Markov**, on en déduit que:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1})$$

$$= \mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \times P(x_n, x_{n+1})$$

À l'aide d'une récurrence on obtient alors:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1})$$

$$= \mathbf{P}(X_0 = x_0)P(x_0, x_1) \times \ldots \times P(x_n, x_{n+1})$$

Calcul de lois

Proposition : À retenir

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace E de matrice de transition P et de loi intiale μ. La loi du vecteur $(X_0, \ldots, X_n)$ se calcule par la formule suivante:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0) \times P(x_0, x_1) \times \ldots \times P(x_{n-1}, x_n)$$

Calcul de lois

Proposition : À retenir

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace E de matrice de transition P et de loi intiale μ. La loi du vecteur $(X_0, \ldots, X_n)$ se calcule par la formule suivante:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mu(x_0) \times P(x_0, x_1) \times \ldots \times P(x_{n-1}, x_n)$$

$\Rightarrow$ La loi du vecteur $(X_0, \ldots, X_n)$ ne dépend que de la matrice de transition P et de la loi initiale μ.

Calcul de lois

Notations:

Posons pour ce qui suit les notations suivantes:

1. $(Pf)(x) := \sum_{y \in E} P(x,y)f(y)$, f est fonction de E dans $\mathbf{R}$
2. $(\mu P)(y) := \sum_{x \in E} \mu(x)P(x,y)$, μ une loi de probabilité sur E.
3. $(PQ)(x,y) := \sum_{z \in E} P(x,z)Q(z,y)$, P et Q deux matrices de transition.
4. P^n est définie par récurrence par:

$$P^{n+1}(x,y) = \sum_{z \in E} P(x,z)P^n(z,y)$$

$\Rightarrow$ Pf est une fonction sur E, PQ est une matrice de transition et μP une loi de probabilité sur E.

Calcul de lois

Proposition : **À retenir**

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace E de matrice de transition P et de loi intiale μ, alors:

$$\mathbf{P}(X_n = x_n) = \sum_{x_0 \in E, x_1 \in E, \ldots, x_{n-1} \in E} \mu(x_0) P(x_0, x_1) \times \ldots \times P(x_{n-1}, x_n)$$

Autrement, à l'aide des notations précédentes:

$$\mathbf{P}(X_n = x_n) = (\mu P^n)(x_n)$$

Calcul de lois

Exercice:

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de celà, une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?
3. Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), déterminer la matrice de transition de la nouvelle chaîne ainsi obtenue.

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".
   L'espace d'états est donné par
   $E = \{\mathbf{B}eau, \mathbf{P}luie, \mathbf{N}eige\} = \{B, P, N\}$.

Calcul de lois

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".
   L'espace d'états est donné par
   $E = \{\mathbf{B}eau, \mathbf{P}luie, \mathbf{N}eige\} = \{B, P, N\}$.
   La matrice de transition:

Calcul de lois

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".
   L'espace d'états est donné par
   $E = \{\mathbf{B}eau, \mathbf{P}luie, \mathbf{N}eige\} = \{B, P, N\}$.
   La matrice de transition:
   - Il ne fait jamais beau deux jours de suite. $\Rightarrow P(B, B) = 0$.

Calcul de lois

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".
   L'espace d'états est donné par
   $E = \{\mathbf{B}eau, \mathbf{P}luie, \mathbf{N}eige\} = \{B, P, N\}$.
   La matrice de transition:
   - Il ne fait jamais beau deux jours de suite. $\Rightarrow P(B, B) = 0$.
   - Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. $\Rightarrow P(B, P) = P(B, N) = \frac{1}{2}$.

Calcul de lois

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".
   L'espace d'états est donné par
   $E = \{\mathbf{B}eau, \mathbf{P}luie, \mathbf{N}eige\} = \{B, P, N\}$.
   La matrice de transition:
   - Il ne fait jamais beau deux jours de suite. $\Rightarrow P(B,B) = 0$.
   - Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. $\Rightarrow P(B,P) = P(B,N) = \frac{1}{2}$.
   - Si un jour il **pleut** ou il **neige**, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain. $\Rightarrow P(P,P) = P(N,N) = \frac{1}{2}$.

Calcul de lois

Correction:

1. On note par $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. qui modélise la condition météorologique pour une journée "n".
   L'espace d'états est donné par
   $E = \{\mathbf{B}eau, \mathbf{P}luie, \mathbf{N}eige\} = \{B, P, N\}$.
   La matrice de transition:
   - Il ne fait jamais beau deux jours de suite. $\Rightarrow P(B,B) = 0$.
   - Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. $\Rightarrow P(B,P) = P(B,N) = \frac{1}{2}$.
   - Si un jour il **pleut** ou il **neige**, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain. $\Rightarrow P(P,P) = P(N,N) = \frac{1}{2}$.
   - s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.
     $\Rightarrow P(P,B) = P(P,N) = \frac{1}{4}$. et $P(N,B) = P(N,P) = \frac{1}{4}$.

Suite de la correction:

Par la suite la matrice de transition de $(X_n)_{n\geq 1}$ est donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2- Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?

Suite de la correction:
Par la suite la matrice de transition de $(X_n)_{n\geq 1}$ est donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2- Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain?
Si un jour il fait beau $\Rightarrow$ la loi initiale est $\mu_0 = (1, 0, 0)$.
Donc le temps pour le surlendemain est: $\mu_2 = \mu_0 P^2$.

$$or\ \mu_0 P^2 = (1, 0, 0) \times \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/16 & 7/16 & 3/8 \\ 3/16 & 3/8 & 7/16 \end{pmatrix} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$$

Donc si un jour il fait beau,le temps le plus probable pour le surlendemain est qu'il **pleut** ou qu'il **neige.**

Suite de la correction:

3- Si on suppose que l'on a que deux états (beau temps et mauvais temps), alors $E' = \{B, M\}$ et dans ce cas:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Plan

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Définition

Soit μ une probabilité sur un ensemble fini E et P une matrice de transition sur E. On dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, si c'est un processus adapté à cette filtration tel que pour toute fonction f de E dans **R**, on a :

$$\mathbf{E}\Big(f(X_{n+1})\Big|\mathcal{F}_n\Big) = \big(Pf\big)\big(X_n\big),$$

où $\big(Pf\big)(x) = \sum_{y\in E} P(x,y)f(y).$

Exercice:

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$. Montrer que

$$\mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \Big| X_n = x_n, ..., X_0 = x_0\Big) = P\big(x_n, x_{n+1}\big).$$

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Correction:
On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$.

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Correction:

On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$. Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, ..., X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big|\mathcal{F}_n\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Correction:

On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$. Donc

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big) \\ = \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big) \\ = \quad & \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big) \\ = \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big) \end{aligned}$$

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Correction:

On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$. Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big)
\end{aligned}$$

D'après la dernière définition on obtient:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(X_n, x_{n+1})\Big)
\end{aligned}$$

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Correction:

On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$. Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big)
\end{aligned}$$

D'après la dernière définition on obtient:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(X_n, x_{n+1})\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(x_n, x_{n+1})\Big)
\end{aligned}$$

Correction:

On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$. Donc

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, ..., X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} \Big| \mathcal{F}_n\Big)\Big)
\end{aligned}$$

D'après la dernière définition on obtient:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, ..., X_0 = x_0\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(X_n, x_{n+1})\Big) \\
= \quad & \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(x_n, x_{n+1})\Big) \\
= \quad & P(x_n, x_{n+1}) \mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big)
\end{aligned}$$

Chaîne de Markov et espérance conditionnelle

Correction:

On rappelle que pour tout évènement A, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{E}\left[1_A\right]$. Donc

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big)\\
= \quad &\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big)\\
= \quad &\mathbf{E}\Big(\mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}} 1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big|\mathcal{F}_n\Big)\Big)\\
= \quad &\mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} \mathbf{E}\Big(1_{\{X_{n+1}=x_{n+1}\}}\Big|\mathcal{F}_n\Big)\Big)
\end{aligned}$$

D'après la dernière définition on obtient:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} \cap X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big)\\
= \quad &\mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(X_n, x_{n+1})\Big)\\
= \quad &\mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}} P(x_n, x_{n+1})\Big)\\
= \quad &P(x_n, x_{n+1})\mathbf{E}\Big(1_{\{X_n=x_n,\ldots,X_0=x_0\}}\Big)\\
= \quad &P(x_n, x_{n+1})\mathbf{P}\Big(X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0\Big).
\end{aligned}$$

Proposition : À retenir

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$, alors on a:

$$\mathbf{P}\Big(X_{n+1} = x_{n+1} |\, X_n = x_n, ..., X_0 = x_0\Big) = P\big(x_n, x_{n+1}\big).$$

Bibliographie

J.F. Delmas, B.Jourdain, B.Lapeyre : Notes de cours "Processus aléatoires".

D. Coupier (Polytech' Lille): Notes de cours "Processus stochastiques".

Questions, Remarques, Suggestions !!!

Merci pour votre attention...

Probabilités II
Chaînes de Markov à temps discrets

4 ème année Data Science

A.U.2019-2020