# *Chapitre III*: Martingales à temps discrets

**Probabilités II**

*5$^{\text{ème}}$ année DS*
*A.U:2021-2022*

# Introduction à la notion de martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace muni d'une tribu et d'une probabilité. On se donne $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit alors que $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est une **filtration** sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

**Définition 1 :**

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires. On dit que $(X_n, n \geq 0)$ est adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ si pour tout $n$, la variable aléatoire $X_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

# Introduction à la notion de martingale

## Définition 2 :

Soit $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(M_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelle. On dit que $(M_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale si :

- $(M_n, n \geq 0)$ est $\mathcal{F}_n$-adapté,
- pour tout $n \geq 0$, $E[|M_n|] < +\infty$,
- pour tout $n \geq 0$ :

$$\mathbb{E}\Big(M_{n+1}|\mathcal{F}_n\Big) = M_n.$$

"la meilleure prévision de $M_{n+1}$ compte tenu de l'information disponible à l'instant $n$ est donnée par $M_n$."

# Introduction à la notion de martingale

**Conséquence 1 :**

Pour tout $p \geq 0$ :

$$\mathbb{E}\Big(M_{n+p}|\mathcal{F}_n\Big) = M_n.$$

# Introduction à la notion de martingale

## Conséquence 1 :

Pour tout $p \geq 0$ :

$$\mathbb{E}\Big(M_{n+p}|\mathcal{F}_n\Big) = M_n.$$

## Conséquence 2 :

Si $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale alors :

$$\mathbb{E}(M_{n+1}) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(M_{n+1}|\mathcal{F}_n\Big)\Big) = \mathbb{E}(M_n).$$

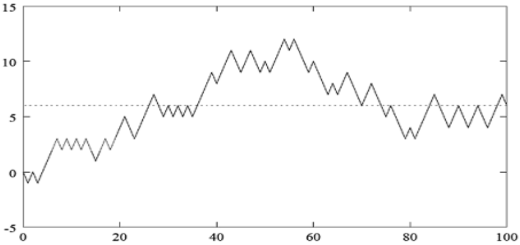
L'espérance d'une martingale est constante au cours du temps.

# Exemple - Marche aléatoire

- Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = X_1 + ... + X_n \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

- On dit que $(S_n, n \geq 0)$ est une marche aléatoire.
- On note par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\forall n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n) = \sigma(S_0, ..., S_n)$.




Trajectoire de la marche aléatoire symétrique

**Proposition 1 :**

Si $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$, alors

$$(S_n, n \geq 0) \text{ est une } \mathcal{F}_n - \text{martingale.}$$

# Exemple - Marche aléatoire

**Proposition 2 :**

Si $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$,alors

$$(V_n = S_n^2 - nE(X_1^2), n \geq 0),$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

# Exemple - Marche aléatoire

## Proposition 3 :

Soit $\lambda$ un réel tel que

$$\phi(\lambda) := log\left(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\right) < +\infty,$$

Alors

$$(Z_n^\lambda = e^{\lambda S_n - n\phi(\lambda)}, n \geq 0),$$

est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

# Un exemple générique de martingale

**Proposition 4 :**

Soit $(M_n, n \geq 0)$ une $\mathcal{F}_n$-martingale. Soit $(H_n, n \geq 0)$ un processus tel que $H_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable et borné. On se donne une variable aléatoire $G_0$ intégrable et $\mathcal{F}_0$-mesurable. Pour $n \geq 1$, on pose :

$$G_n = G_0 + \sum_{k=0}^{n-1} H_k(M_{k+1} - M_k),$$

ou, de façon équivalente, pour $n \geq 0$,

$$G_{n+1} - G_n = H_n(M_{n+1} - M_n)$$

Alors $(G_n, n \geq 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

# Exemple : gain d'une stratégie dans un jeu de hasard équilibré

On note $(H_n, n \geq 0)$ une suite de montants que l'on va parier sur une suite de tirages qui rapportent $(X_{n+1})_{n\geq 0}$ par unité pariée. On suppose que les $H_n$ s'écrivent sous la forme $H_n = f(n, X_1, ..., X_n)$ (en particulier $H_0$ est déterministe) et sont des variables aléatoires bornées. Si l'on note $G_n$ le gain cumulé à l'instant $n$ , on a :

$$G_{n+1} - G_n = H_n X_{n+1} = H_n(S_{n+1} - S_n)$$

Si $(X_n, n \geq 1)$ est une suite iid de variables aléatoires intégrables centrées $(E(X_1) = 0)$, $(G_n, n \geq 0)$ est une martingale. On pose $M_n = S_n = X_1 + ... + X_n$. $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. L'espérance d'une martingale étant constante on en déduit que :

- Le gain moyen au bout d'un nombre fini de tirages dans un jeu équilibré est nul.

# Notion de temps d'arrêt

**Définition 3 :**

On dit que $\tau$, une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, est un $\mathcal{F}_n$-temps d'arrêt si $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

**Remarque :**

$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ signifie que à l'instant $n$, on sait si $\{\tau \leq n\}$ ou pas.

# Notion de temps d'arrêt

## Exemples

1- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_n$-adapté, la v.a :

$$\tau = \inf\{n \geq 0, X_n \in [a,b],\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

est un $\mathcal{F}_n$-temps d'arrêt.
On dit que $\tau$ est le temps d'entrée du processus $(X_n, n \geq 0)$ dans l'intervalle $[a,b]$.

# Notion de temps d'arrêt

## Exemples

2- $\tau' = \sup\{n \geq 0, X_n \in [a, b], \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ n'est pas un temps d'arrêt.
$\tau'$ est le dernier temps où un processus est dans un ensemble.

# Notion de temps d'arrêt

## Exercice 1 :

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

# Notion de temps d'arrêt

**Exercice 1 :**

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

**Correction :** Montrons que $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

# Notion de temps d'arrêt

**Exercice 1 :**

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

**Correction :** Montrons que $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
On a $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\}$.

# Notion de temps d'arrêt

**Exercice 1 :**

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

**Correction :** Montrons que $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
On a $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\}$.
Or

- $\tau_1$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

# Notion de temps d'arrêt

## Exercice 1 :

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

**Correction :** Montrons que $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
On a $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\}$.
Or

- $\tau_1$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\tau_2$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

# Notion de temps d'arrêt

## Exercice 1 :

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

**Correction :** Montrons que $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
On a $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\}$.
Or

- $\tau_1$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\tau_2$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\mathcal{F}_n$ est une filtration (une famille croissante de tribu), donc elle est stable par réunion.

# Notion de temps d'arrêt

## Exercice 1 :

Soient $\tau_1$ et $\tau_2$ deux temps d'arrêt. Montrer que $\tau_1 \wedge \tau_2 = inf(\tau_1, \tau_2)$ est aussi un temps d'arrêt.

**Correction :** Montrons que $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
On a $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\}$.
Or

- $\tau_1$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\tau_2$ est un temps d'arrêt, donc $\{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
- $\mathcal{F}_n$ est une filtration (une famille croissante de tribu), donc elle est stable par réunion.

D'où $\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

# Processus arrêté

## Définition 4 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. On définit alors un nouveau processus par

$$N_n = M_{\tau \wedge n}.$$

On dit que $N$ est le processus $M$ arrêté au temps $\tau$.

**Remarque :**

$$N_n(\omega) = \begin{cases} M_n(\omega), & \mathrm{si} \tau(\omega) \geq n, \\ M_\tau(\omega), & \mathrm{si} \tau(\omega) \leq n \end{cases}$$

# Théorème d'arrêt

## Exercice 2 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau \wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

# Théorème d'arrêt

## Exercice 2 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau \wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

**Correction :**

On a $N_n = M_{\tau \wedge n}$.

# Théorème d'arrêt

## Exercice 2 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau \wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

**Correction :**

On a $N_n = M_{\tau \wedge n}$. Pn peut écrire :

$$N_{n+1} - N_n = 1_{\{\tau > n\}}(M_{n+1} - M_n)$$

# Théorème d'arrêt

## Exercice 2 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau\wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

**Correction :**

On a $N_n = M_{\tau\wedge n}$. Pn peut écrire :

$$N_{n+1} - N_n = 1_{\{\tau>n\}}(M_{n+1} - M_n)$$

On pose $H_n = 1_{\{\tau>n\}} = 1 - 1_{\{\tau\leq n\}}$.

# Théorème d'arrêt

## Exercice 2 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau \wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

**Correction :**

On a $N_n = M_{\tau \wedge n}$. Pn peut écrire :

$$N_{n+1} - N_n = 1_{\{\tau > n\}}(M_{n+1} - M_n)$$

On pose $H_n = 1_{\{\tau > n\}} = 1 - 1_{\{\tau \leq n\}}$.
$H_n$ est $F_n-$mesurable,

# Théorème d'arrêt

## Exercice 2 :

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau \wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

**Correction :**

On a $N_n = M_{\tau \wedge n}$. Pn peut écrire :

$$N_{n+1} - N_n = 1_{\{\tau > n\}}(M_{n+1} - M_n)$$

On pose $H_n = 1_{\{\tau > n\}} = 1 - 1_{\{\tau \leq n\}}$.
$H_n$ est $F_n-$mesurable,
et $N_{n+1} - N_n = H_n(M_{n+1} - M_n)$.

# Théorème d'arrêt

**Exercice 2 :**

Soit $(M_n, n \geqslant 0)$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et soit $\tau$ un temps d'arrêt par rapport à la même filtration. Montrer que $(N_n = M_{\tau \wedge n}, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

**Correction :**

On a $N_n = M_{\tau \wedge n}$. Pn peut écrire :

$$N_{n+1} - N_n = 1_{\{\tau > n\}}(M_{n+1} - M_n)$$

On pose $H_n = 1_{\{\tau > n\}} = 1 - 1_{\{\tau \leq n\}}$.
$H_n$ est $F_n-$mesurable,
et $N_{n+1} - N_n = H_n(M_{n+1} - M_n)$.
D'après la proposition 4, $(N_n, n \geqslant 0)$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

# Theorème d'arrêt

Ce dernier résultat a été généralisé dans le théorème suivant :

**Theorème 1 :**

Si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $\tau$ est un temps d'arrêt par rapport à la même filtration alors $(N_n, n \geqslant 0)$ est encore une $\mathcal{F}_n$-martingale.

# Theorème d'arrêt

## Exercice 3 :

Si $\tau$ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq K$,presque surement avec K réel positif), par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à la même filtration alors :

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

# Theorème d'arrêt

## Exercice 3 :

Si $\tau$ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq K$,presque surement avec K réel positif), par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à la même filtration alors :

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

**Correction :**

# Theorème d'arrêt

## Exercice 3 :

Si $\tau$ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq K$,presque surement avec K réel positif), par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à la même filtration alors :

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

**Correction :**

On a $\tau$ est borné, donc il existe un réel positif $K$ tel que $\tau \leq K$, et donc

$$N_K = M_{\tau \wedge K} = M_\tau \text{ et } N_0 = M_{\tau \wedge 0} = M_0$$

# Theorème d'arrêt

## Exercice 3 :

Si $\tau$ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq K$,presque surement avec K réel positif), par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à la même filtration alors :

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

**Correction :**

On a $\tau$ est borné, donc il existe un réel positif $K$ tel que $\tau \leq K$, et donc

$$N_K = M_{\tau\wedge K} = M_\tau \text{ et } N_0 = M_{\tau\wedge 0} = M_0$$

Puisque $(N_n, n \geq 1)$ est une martingale, alors on a :

$$E[N_K] = E[N_0]$$

# Theorème d'arrêt

## Exercice 3 :

Si $\tau$ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq K$,presque surement avec K réel positif), par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à la même filtration alors :

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

**Correction :**

On a $\tau$ est borné, donc il existe un réel positif $K$ tel que $\tau \leq K$, et donc

$$N_K = M_{\tau \wedge K} = M_\tau \text{ et } N_0 = M_{\tau \wedge 0} = M_0$$

Puisque $(N_n, n \geq 1)$ est une martingale, alors on a :

$$E[N_K] = E[N_0]$$

Donc

$$E[M_\tau] = E[M_0]$$

# Theorème d'arrêt

**Proposition 5 :**

Si $\tau$ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq K$,presque surement avec K réel positif), par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ et si $(M_n, n \geqslant 0)$ est une martingale par rapport à la même filtration alors :

$$E[M_\tau] = E[M_0].$$

# Théorème de convergence des martingales

On cherche à travers le théorème suivant à voir sous quelles conditions une suite $(M_n, n \geq 1)$ converge lorsque $n$ tends vers $+\infty$.

**Théorème 2 :**

Supposons que $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ et que de plus :

$$\sup_{n \geq 0} E(M_n^2) < +\infty.$$

On dit que $(M_n, n \geq 0)$ est bornée en moyenne quadratique ( ou dans $L^2$).
Sous cette hypothèse il existe une variable aléatoire $M_\infty$ de $L^2$ telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = M_\infty,$$

au sens de la convergence en moyenne quadratique et presque sûre. Cela signifie que :

- convergence en moyenne quadratique : $\lim_{n \longrightarrow +\infty} E(|M_n - M_\infty|^2) = 0$.
- convergence presque sûre : $\mathbb{P}(\lim_{n \to +\infty} M_n = M_\infty) = 1$.