Chapitre 3 : Flots sur les réseaux

Cours Graphes & Applications

Unité Pédagogiques de Mathématiques,
Ecole Supérieure PRivée d'Ingénierie et de Technologies (ESPRIT)

Année Universitaire : 2024-2025

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Objectifs du cours

A la fin de ce chapitre, l'étudiant sera capable de :

1. Identifier des problèmes dont les solutions sont données via une maximisation de flots dans un réseau de transport.
2. Modéliser des situations réelles par des réseaux de transport.
3. Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour la détermination d'un flot maximal.
4. Déterminer une coupe minimale et identifier les arcs bloquants dans un réseau de transport.

Exemple introductif

Considérons un système de canalisations d'eau dans lequel notre objectif est de transférer le maximum d'eau d'une station de pompage S vers une zone résidentielle P. Le système est constitué de plusieurs réservoirs intermédiaires A, B, C et D.
Chaque canalisation reliant ces réservoirs a une capacité maximale d'écoulement, mesurée en litres par seconde.

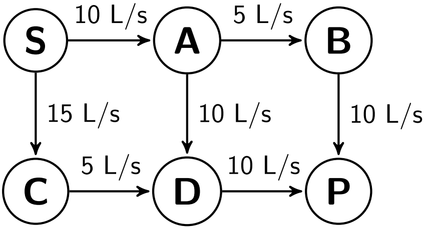
Exemple introductif

Les capacités maximales des canalisations entre les différentes parties du système sont données dans le tableau ci-dessous :

Connexion	**Capacité (litres/seconde)**
$S \rightarrow A$	10
$S \rightarrow B$	15
$A \rightarrow C$	5
$B \rightarrow C$	10
$C \rightarrow D$	7
$D \rightarrow P$	20

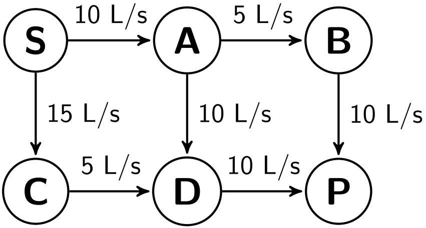
Exemple introductif

Modélisation sous forme d'un graphe:



Exemple introductif

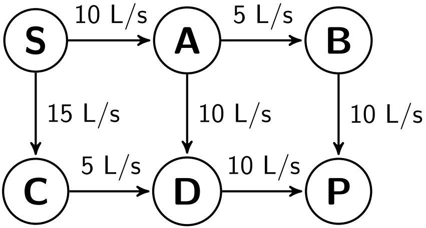
Modélisation sous forme d'un graphe:



Question : Comment déterminer la meilleure répartition de l'eau à travers les différents réservoirs intermédiaires A, B, C et D,tout en respectant les capacités maximales de chaque canalisation ?

Exemple introductif

Modélisation sous forme d'un graphe:



Question : Comment déterminer la meilleure répartition de l'eau à travers les différents réservoirs intermédiaires A, B, C et D,tout en respectant les capacités maximales de chaque canalisation ?

Objectif: Maximiser la quantité d'eau acheminée de la station de pompage S à la zone résidentielle P.

Plan

esprit Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Définitions & Notions de Base

Définition: Réseau de transport

Un réseau de transport est un graphe orienté sans circuit $G = (V, E)$, où chaque arc $e \in E$ est valué par un nombre positif C_e, appelé la capacité de transport de l'arc e. Ce réseau comporte un sommet sans prédécesseurs appelé $\ll$ l'entrée du réseau $\gg$ ou $\ll$la source$\gg$ et un autre sommet sans successeurs appelé $\ll$ la sortie du réseau $\gg$ ou $\ll$ le puits $\gg$.

Définitions & Notions de Base

Terminologie

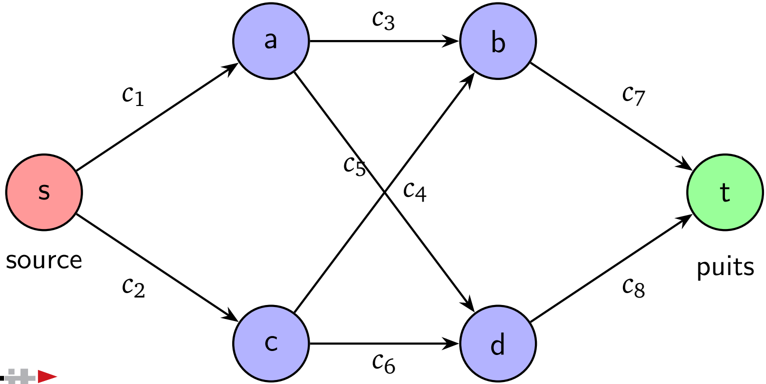
Dans un réseau de transport $G = (V, E)$ l'ensemble des sommets V est composé de:

- Un sommet de degré intérieur nul, appelé source s du réseau G.
- Un sommet de degré extérieur nul, appelé sortie, destination ou puits t dans un réseau G.
- Les autres sommets du réseau sont appelés noeuds de transits ou intermédiaires.

Définitions & Notions de Base

Exemple d'un réseau de transport

nœuds de transit : a, b, c, d / capacités : $c_i \quad 1 \leq i \leq 8$



Définitions & Notions de Base

On considère le réseau de transport $G = (V, E)$ avec $|V| = n$.

Définition: Flux

La quantité de la matière circulant du noeud i vers le noeud j $(1 \leq i,j \leq n)$ est notée φ_e avec $e = (i,j)$. φ_e est appelée flux sur l'arc e.

Définition: Flot

Un flot est défini comme étant un vecteur
$\varphi = (\varphi_{e_1}, \varphi_{e_2}, ..., \varphi_{e_n})^t \in \mathcal{R}^n$.
φ est un vecteur dont les composantes sont les flux sur les arcs du graphes.

Propriété: Flot réalisable

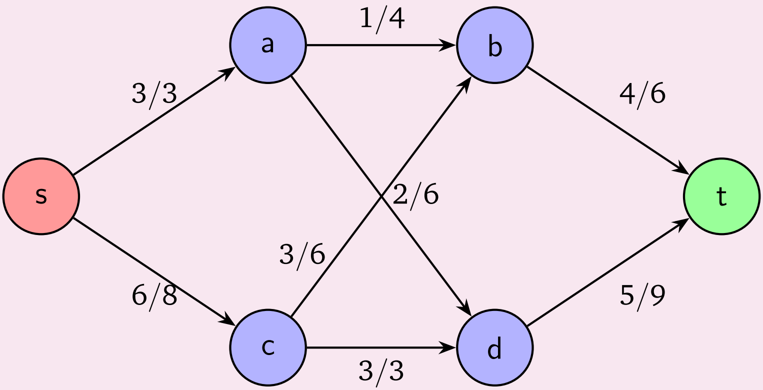
φ est dit flot réalisable ou flot admissible s'il vérifie les deux relations suivantes:

- $0 \leq \varphi_e \leq C_e \; \forall e \in E$: contrainte de capacité.
- $\sum_{i \in P(j)} \varphi(i,j) = \sum_{i \in S(j)} \varphi(j,i), \; \forall i,j \in V$: Contrainte de conservation de flux.

$P(j)$: Flux entrant au sommet j et $S(j)$: Flux sortant du sommet j. C'est ce qu'on appelle la loi de conservation de la matière à travers un noeud de transit.

Définitions & Notions de Base

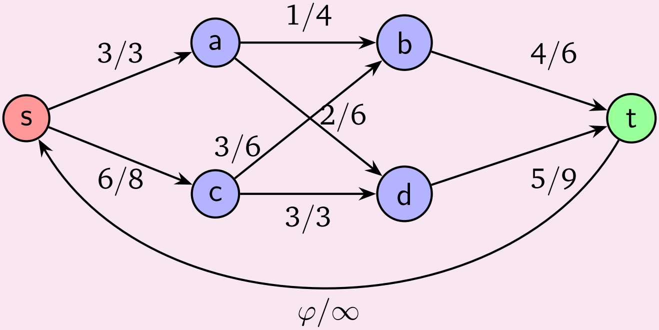
Exemple: Flot réalisable



Définitions & Notions de Base

Définition: Arc de retour

On introduit l'arc fictif (t, s) de capacité infinie, dont la valeur de flot φ sera appelée valeur de retour. Ainsi, la conservation de la matière sera valable pour tout noeud de ce réseau.



Définitions & Notions de Base

Définition: Valeur du flot

On appelle valeur du flot la quantité totale qui transverse le réseau.

Définition: Arc saturé

Un arc e est dit saturé si la valeur de flux est égale la capacité de l'arc.

Définition: Chemin saturé

Un chemin est dit saturé lorsqu'il passe au moins par un arc saturé.

Définition: Flot complet

Un flot φ est dit complet si tout chemin de la source s vers la destination t est saturé.

Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Problème du flot maximal

Définition: Problème du flot maximal

Le problème du flot maximal consiste à trouver la quantité maximale de flot réalisable à acheminer de la source s au puits t, tenant compte des capacités de transport et de la quantité disponible en s.

Problème du flot maximal

Définition: Problème du flot maximal

Le problème du flot maximal consiste à trouver la quantité maximale de flot réalisable à acheminer de la source s au puits t, tenant compte des capacités de transport et de la quantité disponible en s.

Exemples d'applications:

- **Distribution d'eau:** Maximiser le débit d'eau fourni à un réservoir tout en respectant les capacités des tuyaux.
- **Réseaux de Communication**: Maximiser le volume de données qui peuvent être transmises entre deux centres tout en respectant les capacités des lignes de communication.
- **Réseaux de Production**: Maximiser la quantité de produit fini qui peut être acheminée d'une usine à un entrepôt.

Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Algorithme de FORD-FULKERSON: Démarche

Algorithme de FORD-FULKERSON

Etape 1 : Recherche du flot complet : Saturation de tous les chemins de la source s vers la destination t.

Etape 2 : Recherche des chaines améliorantes : Saturation de toutes les chaines de la source s vers la destination t.

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Algorithme de FORD-FULKERSON: Pseudo-code

Définition : Graphe Résiduel

On considère un réseau de transport $G = (X, E)$ avec $|X| = n$ et $C : A \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction coût associée. On appelle Graphe Résiduel (GR) associé à G le graphe défini par :

- Si (x_i, x_j) est un arc direct : nous lui associons la capacité résiduelle : $C_{i,j} - f_{i,j}$
- Si (x_i, x_j) est un arc inverse : nous créons cet arc de façon fictive et nous lui associons le flux $f_{i,j}$.

Algorithme de FORD-FULKERSON: Pseudo-code

Etape 0: Initialisation

- pour $k = 0$: φ_0 =Flot initial.

Etape 1: Recherche du flot complet

- Recherche en profondeur d'un chemin non saturé (augmentant) p_k de s vers t dans le Graphe Résiduel (GR).
- Si p_k existe alors :
  - Mise à jour de la valeur du flot : $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta_k$ avec, Δ_k : capacité résiduelle.
  - Mise à jour du (GR) : $\forall e$ arc de p_k, mise à jour du flux résiduel $r_{k,e}$ associé à e : $r_{k+1,e} = r_{k,e} - \Delta_k$
  - $k = k + 1$
- Sinon : $k = k + 1$ et aller l'étape 2.

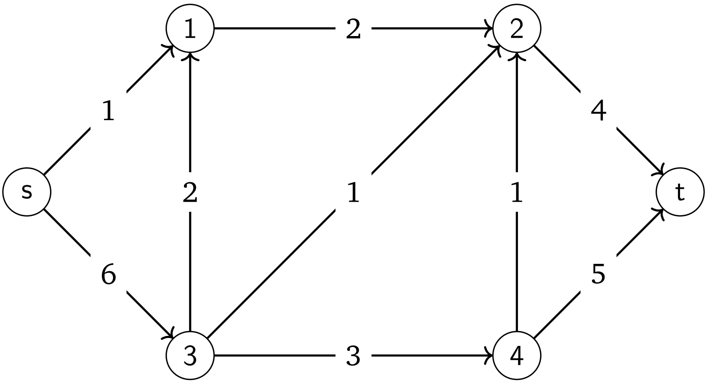
Algorithme de FORD-FULKERSON: Pseudo-code

Etape 2: Recherche de chaines améliorantes

- Recherche d'une chaine améliorante p_k de s vers t dans le (GR).
- Si p_k existe alors :
  - Mise à jour de la valeur du flot : $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \Delta_k$ avec, Δ_k : capacité résiduelle.
  - Mise à jour du (GR) : $\forall e$ arc de p_k, mise à jour du flux résiduel $r_{k,e}$ associé à e :
    - $r_{k+1,e} = r_{k,e} - \Delta_k$: si e est un arc direct.
    - $r_{k+1,e} = r_{k,e} + \Delta_k$: si e est un arc inverse.
  - $k = k + 1$
- Sinon: Fin de l'algorithme : le flot est maximal. .

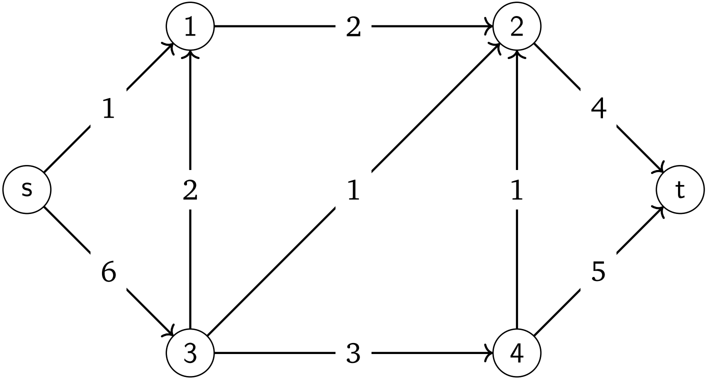
Exemples illustratifs

Exemple 1: Déterminer un flot de valeur maximale dans le réseau suivant:



Itération 0:

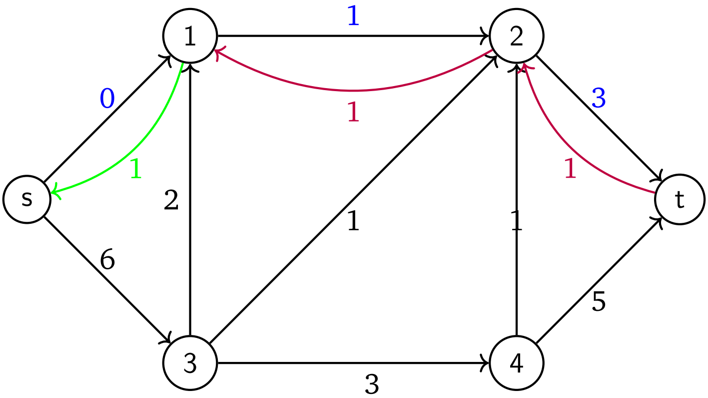
- $\varphi_0 = 0$: Flot initial réalisable.
- Graphe Résiduel $GR(0)$:



- Un chemin non saturé (augmentant) de s à t est le suivant: $s - 1 - 2 - t$: $\Delta_0 = \min\{1, 2, 4\} = 1$.

Itération 1:

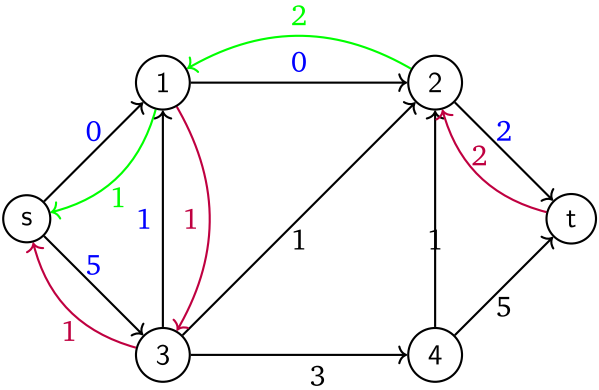
- $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta_0 = 1.$
- Graphe Résiduel $GR(1)$:



- Un chemin non saturé (augmentant) de s à t est le suivant:
  $s-3-1-2-t$: $\Delta_1 = \min\{6, 2, 1, 3\} = 1.$

Itération 2:

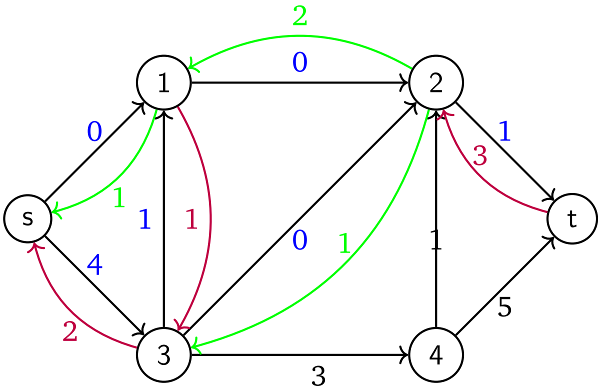
- $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta_1 = 1 + 1 = 2.$
- Graphe Résiduel $GR(2)$:



- Un chemin non saturé (augmentant) de s à t est le suivant: $s - 3 - 2 - t$: $\Delta_2 = \min\{5, 1, 2\} = 1$.

Itération 3:

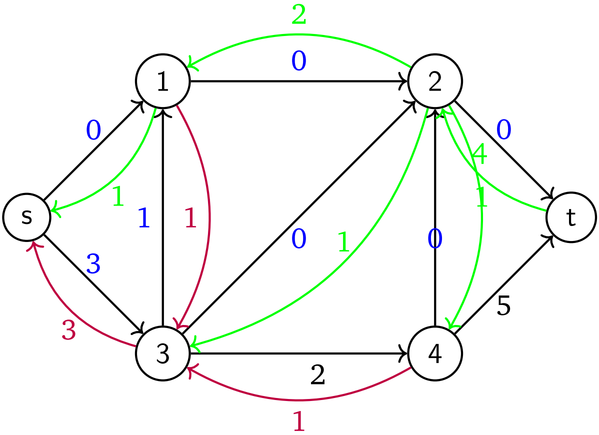
- $\varphi_3 = \varphi_2 + \Delta_2 = 2 + 1 = 3.$
- Graphe Résiduel $GR(3)$:



- Un chemin non saturé (augmentant) de s à t est le suivant: $s - 3 - 4 - 2 - t$: $\Delta_3 = \min\{4, 3, 1, 1\} = 1$.

Itération 4:

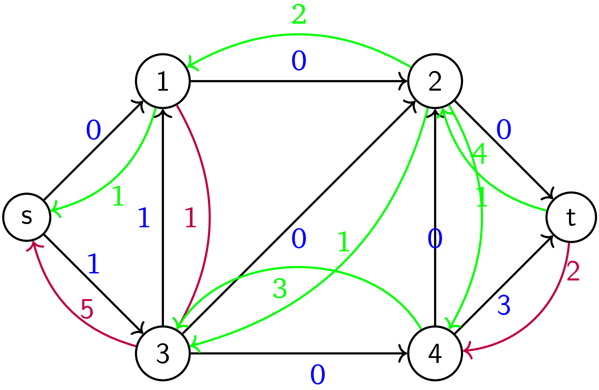
- $\varphi_4 = \varphi_3 + \Delta_3 = 3 + 1 = 4.$
- Graphe Résiduel $GR(4)$:



- Un chemin non saturé (augmentant) de s à t est le suivant: $s - 3 - 4 - t$: $\Delta_4 = \min\{3, 2, 5\} = 2$.

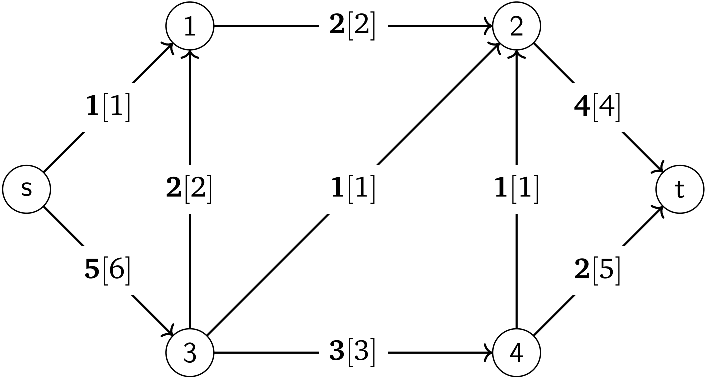
Itération 5:

- $\varphi_5 = \varphi_4 + \Delta_4 = 4 + 2 = 6.$
- Graphe Résiduel $GR(5)$:



- Il n'existe aucun chemin non saturé de s vers t: Le flot complet est $\varphi = \varphi_5 = 6.$

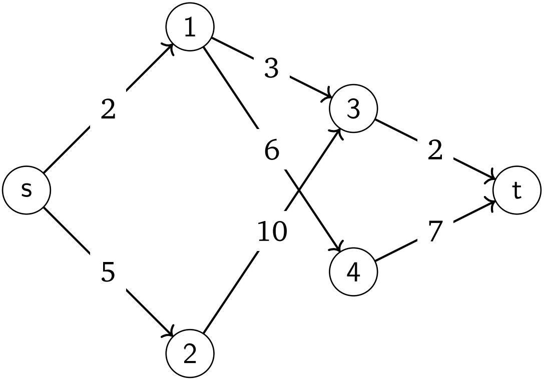
- Dans le Graphe Résiduel $GR(5)$, il n'existe aucune chaine améliorante. Donc, le flot maximal est donné par: $\varphi_{max} = \varphi_5 = 6$.



Se former autrement
HONORIS UNITED UNIVERSITIES

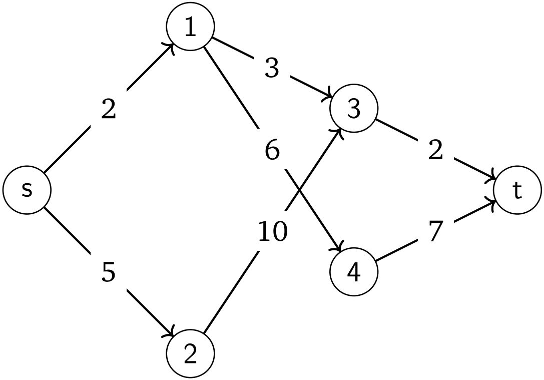
Exemples illustratifs

Exemple 2: Déterminer un flot de valeur maximale dans le réseau suivant:



Itération 0:

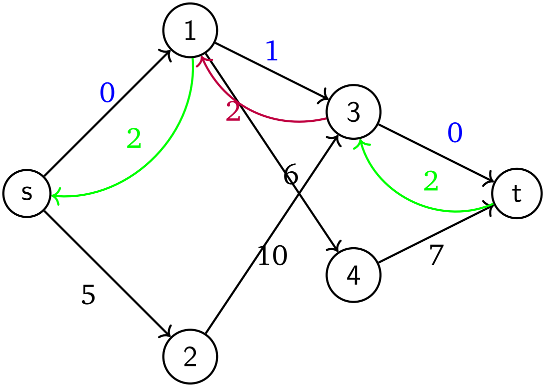
- $\varphi_0 = 0$: Flot initial réalisable.
- Graphe Résiduel $GR(0)$:



- Un chemin non saturé (augmentant) de s à t est le suivant: $s - 1 - 3 - t$: $\Delta_0 = \min\{2-0, 3-0, 2-0\} = 2$.

Itération 1:

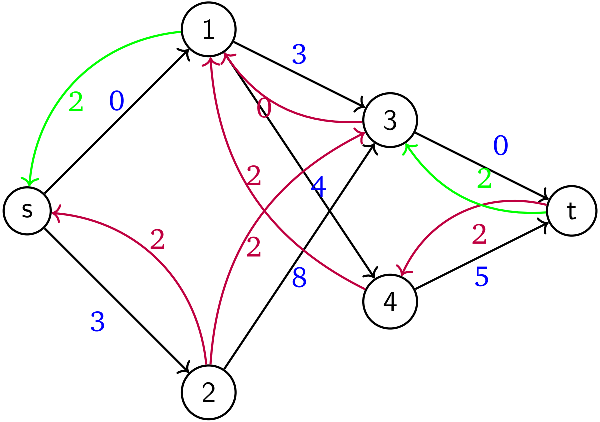
- $\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta_0 = 2.$
- Graphe Résiduel $GR(1)$:



Il n'existe plus de chemins augmentants. Mais, il existe une seule chaine améliorante donnée par:
$s - 2 - 3 - 1 - 4 - t : \Delta_1 = \min\{5, 6, 2, 10, 7\} = 2.$

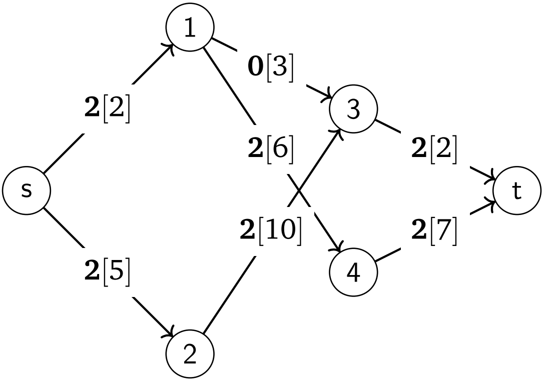
Itération 2:

- $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta_1 = 4$.
- Graphe Résiduel $GR(2)$:



- Détermination d'un chemin augmentant depuis $GR(2)$: Il n'existe plus de chemins augmentants.

le flot maximal est donné par: $\varphi_{max} = \varphi_2 = 4$..



Plan

Coupe Minimale

Définition: Coupe

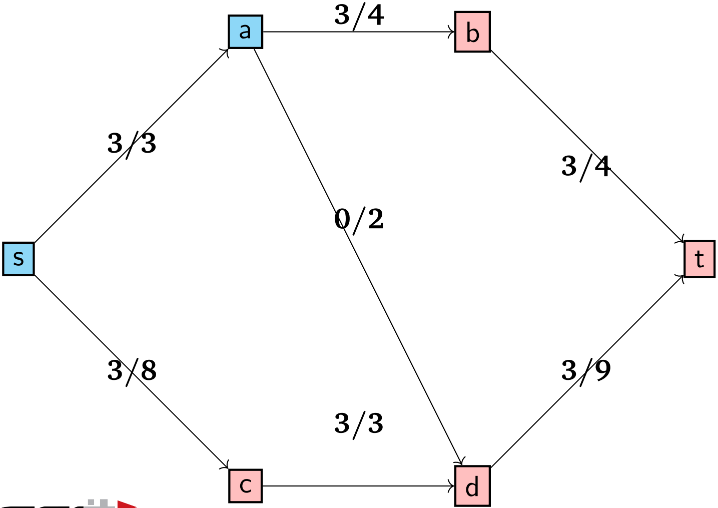
Une coupe $[S;T]$ dans un graphe orienté $G=(V,E)$ avec $|V|=n$ est définie par un ensemble S contenant la source (s) et un ensemble T contenant la destination (t), tels que $S \cap T = \emptyset$ et $S \cup T = V$. Les arêtes de E qui relient un sommet de S à un sommet de T forment la coupe.

La capacité de la coupe $[S,T]$ est donnée par:

$$cap([S,T]) = \sum_{i \in S, j \in T} C_{ij} \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Coupe Minimale

Exemple



Coupe Minimale

$S = \{s, a\}$ et $T = \{b, c, b, d, t\}$ est une coupe $[S, T]$ sui sépare la source s et la destination t.

$$Cap[S, T] = C(a, b) + C(a, d) + C(s, c) = 4 + 2 + 8 = 14$$

Coupe Minimale

Proposition

On concidère le réseau $G(V,E)$. Pour toute coupe $[S,T]$ on a:

$$\varphi_{max} \leq Cap[S,T]$$

Coupe Minimale

Proposition

On concidère le réseau $G(V, E)$. Pour toute coupe $[S, T]$ on a:

$$\varphi_{max} \leq Cap[S, T]$$

Conséquence

Si $Cap([S, T]) = \varphi_{max}$, alors la coupe $[S, T]$ est minimale.

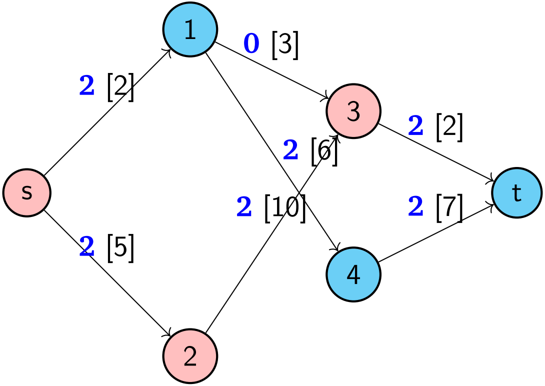
Coupe Minimale

Remarque

La coupe minimale $[S, T]$ est déterminée en calculant d'abord le flot maximal dans le réseau, puis en regroupant dans l'ensemble S le sommet source et les sommets connectés par des chemins (chaînes) non saturés, tandis que les autres sommets sont placés dans l'ensemble T.

Coupe Minimale

Exemple



La coupe minimale $[S, T]$ est donnée par:

$$S = \{s, 2, 3\} \quad et \quad T = \{1, 4, t\}$$

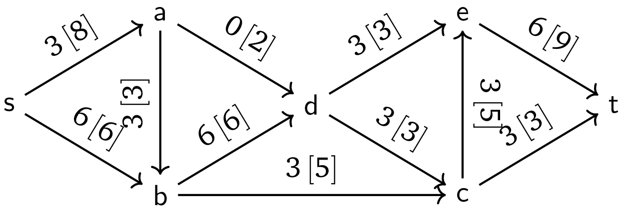
Plan

Se former autrement

HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Application

Soit le réseau de transport donné ci-dessous où l'on cherche à déterminer un flot de valeur maximale de la sourse s au puits t.



Chacun des arcs est caractérisé par un couple de valeurs $F[C]$, avec C désigne la capacité maximale et F la valeur du flux initial.

1. Donner la valeur du flot initial φ_0 qui circule de s à t. Le flot associé à φ_0 est-il réalisable ?
2. Appliquer l'algorithme de FORD-FULKERSON et donner la valeur du flot maximum qui circule de s à t.
3. Donner les ensembles S et T définissant la coupe $[S, T]$ minimale.