

## Cours de Graphes &amp; Applications (G&amp;A)

## Chapitre 1 : Coloration des sommets d'un graphe

Nehla DEBBABI

Année Universitaire : 2023-2024

30 septembre 2023

## Plan

## Francis GUTHERIE & la coloration des graphes : 1852



Figure – Les comtés de l'Angleterre 1890-1965 [Angleterre, 1890-1965]

[Angleterre, 1890-1965] Comté d'Angleterre. Wikipédia, l'encyclopédie libre. Page consultée le 13/05/2020 à partir de <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Comté%27Angleterre&oldid=172848749>

## Francis GUTHERIE & la coloration des graphes : 1852

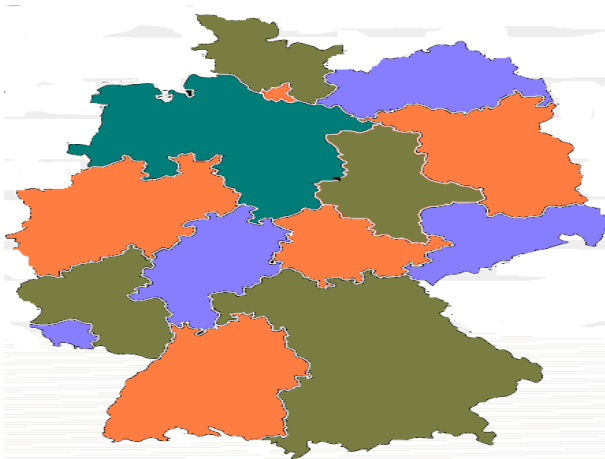


Figure – Carte de l'Allemagne [German, 2020]

## Francis GUTHERIE & la coloration des graphes : 1852

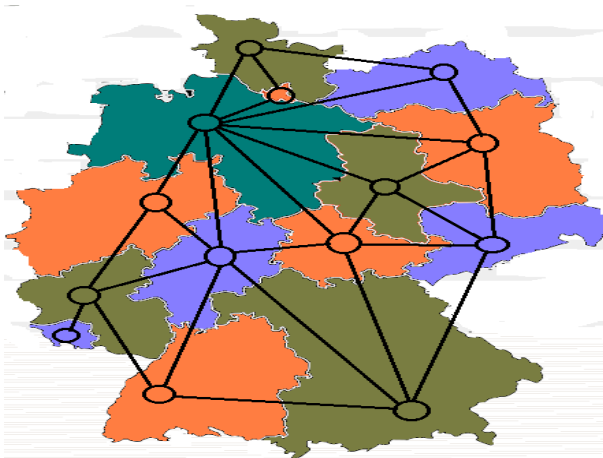


Figure – Carte de l'Allemagne [German, 2020]

## Francis GUTHERIE & la coloration des graphes : 1852

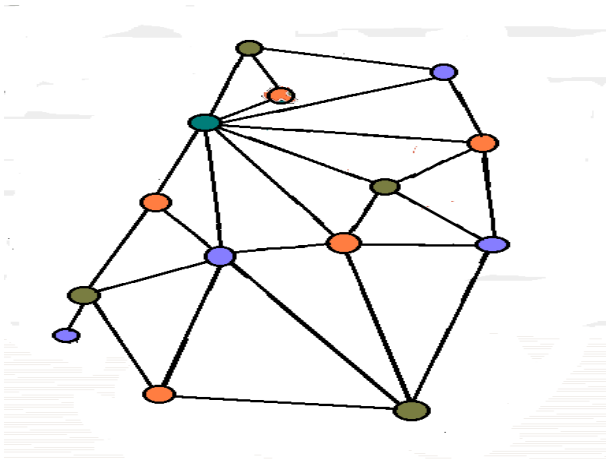


Figure – Carte de l'almagne [German, 2020]

## Francis GUTHERIE & la coloration des graphes : 1852

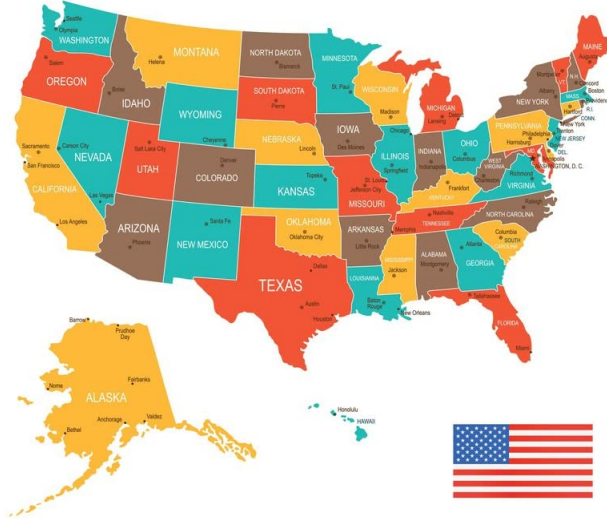


Figure – Coloration de la carte des états unis (source de l'image : internet)

## Plan

- 1 Histoire
- 2 Définitions & Propriétés
- 3 Algorithme de GLOUTON
- 4 Algorithme de WELSCH & POWELL
- 5 Applications



## Coloration d'un graphe & nombre chromatique

## Coloration d'un graphe

La coloration d'un graphe consiste à affecter à chacun des sommets d'un graphe une couleur de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de même couleur.

## Coloration d'un graphe & nombre chromatique

### Coloration d'un graphe

La coloration d'un graphe consiste à affecter à chacun des sommets d'un graphe une couleur de sorte que deux sommets adjacents de ne soient pas de même couleur.

Rappel : nous sommes encore dans le cas des graphes simples.

## Coloration d'un graphe & nombre chromatique

### Coloration d'un graphe

La coloration d'un graphe consiste à affecter à chacun des sommets d'un graphe une couleur de sorte que deux sommets adjacents de ne soient pas de même couleur.

Rappel : nous sommes encore dans le cas des graphes simples.

### Nombre chromatique d'un graphe

Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  (orienté ou non orienté) est le plus petit nombre de couleurs suffisant pour colorer le graphe  $G$ . Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est en général noté  $\chi(G)$ .

## Coloration d'un graphe & nombre chromatique

### Coloration d'un graphe

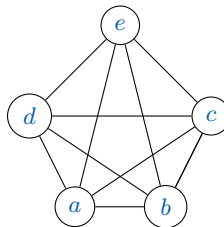
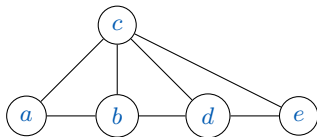
La coloration d'un graphe consiste à affecter à chacun des sommets d'un graphe une couleur de sorte que deux sommets adjacents de ne soient pas de même couleur.

Rappel : nous sommes encore dans le cas des graphes simples.

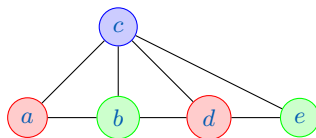
### Nombre chromatique d'un graphe

Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  (orienté ou non orienté) est le plus petit nombre de couleurs suffisant pour colorer le graphe  $G$ . Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est en général noté  $\chi(G)$ .

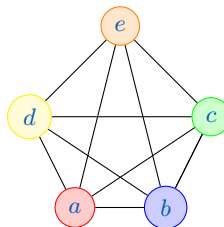
## Exemples de coloration d'un graphe



## Exemples de coloration d'un graphe



$$\chi(G) = 3$$



$$\chi(G) = 5$$

## Propriétés du nombre chromatique

Graphe complet  $K_n, n \geq 1$

Le nombre chromatique d'un graphe complet  $K_n$ ,  $n \geq 1$  est :  $\chi(K_n) = n$ .







## Propriétés du nombre chromatique

### Graphe complet $K_n$ , $n \geq 1$

Le nombre chromatique d'un graphe complet  $K_n$ ,  $n \geq 1$  est :  $\chi(K_n) = n$ .

Un graphe complet  $K_n$ ,  $n \geq 1$ , est un graphe de  $n$  sommets qui sont tous inter-connectés entre eux.

### Théorème des 4-couleurs, Appel & Haken, 1977

Le nombre chromatique d'un graphe planaire  $G$  est :  $\chi(G) \leq 4$ .

Un graphe est planaire s'il peut être tracé dans un plan sans qu'aucune de ses arêtes en croise une autre.



### Exercice :

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4. Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

## Exercice :

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4. Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

11 / 33

## Exercice : contraintes & objectif

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes :

**Contrainte 1 :** les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble

**Contrainte 2 :** il en est de même pour les deux derniers

**Contrainte 3 :** au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4

**Objectif :** Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes

## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets :

## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

## choix 2 : les incompatibilités

## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

## choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓

## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur :



## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** nuit (ressource)

## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** nuit (ressource)

représentation graphique :

## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

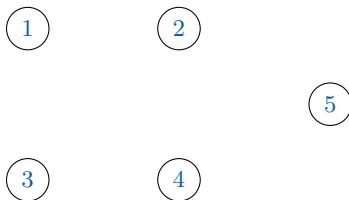
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

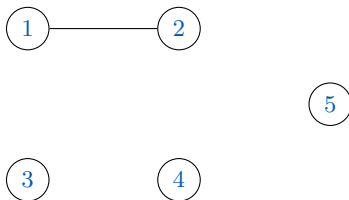
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

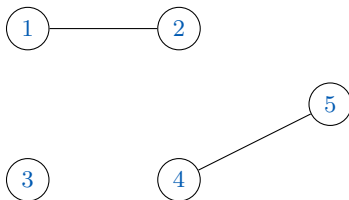
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

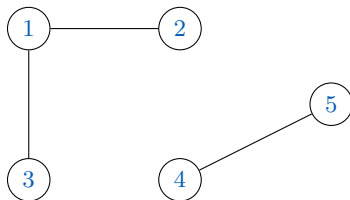
les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

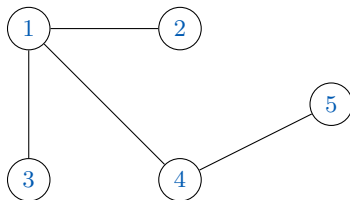
les liens :

## choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

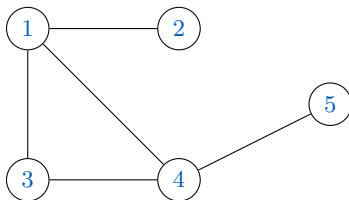
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :





## Exercice : modélisation

### Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

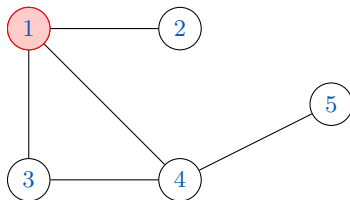
les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

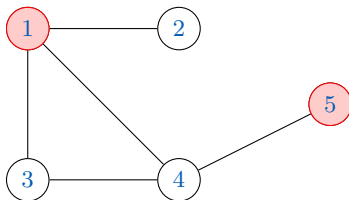
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

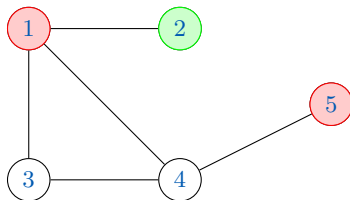
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

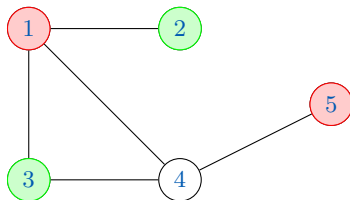
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

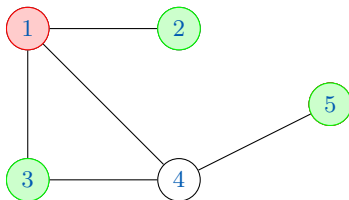
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



## Exercice : modélisation

Modélisation du problème par un graphe :

les sommets : les magasins

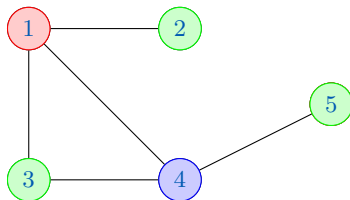
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : nuit (ressource)

représentation graphique :



### Exercice : réponse

### Exercice : réponse

Trois nuits sont suffisantes pour ouvrir les 5 magasins.

### Planification 1 :

nuit 1	nuit 2	nuit 3
1	2	4
	3	
	5	



## Exercice : réponse

Trois nuits sont suffisants pour ouvrir les 5 magasins.

Planification 1 :

nuit 1	nuit 2	nuit 3
1	2	4
	3	
	5	

Planification 2 :

nuit 1	nuit 2	nuit 3
1	2	4
5	3	

# Plan

- 1 Histoire
- 2 Définitions & Propriétés
- 3 Algorithme de GLOUTON
- 4 Algorithme de WELSCH & POWELL
- 5 Applications

## Principe & Algorithmme

**Principe :** Un algorithme de Glouton dit aussi en anglais *Greedy algorithm* ou encore *First fit algorithm* est un algorithme basé sur le fonctionnement par approches progressives : étape par étape mais sans revenir sur ses décisions. En chaque étape, l'algorithme glouton fait le choix qui semble le meilleur (optimum local) en espérant avoir un optimum global.

## Principe & Algorithme

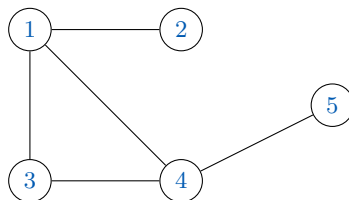
**Principe :** Un algorithme de Glouton dit aussi en anglais *Greedy algorithm* ou encore *First fit algorithm* est un algorithme basé sur le fonctionnement par approches progressives : étape par étape mais sans revenir sur ses décisions. En chaque étape, l'algorithme glouton fait le choix qui semble le meilleur (optimum local) en espérant avoir un optimum global.

**Pseudo-code :** Pour la coloration d'un graphe  $G = (x, A)$  avec  $|X| = n$ .

### Algorithme de Glouton

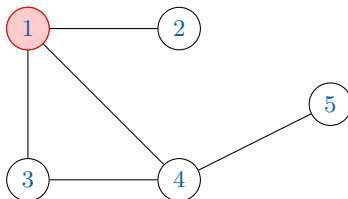
- liste ordonnée de sommets  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ .
- liste ordonnée de couleurs  $C$ .
- Pour  $i$  de 1 à  $n$  faire
  - $Sommet = x_i$
  - $Couleur$  = la couleur minimale de  $C$  non utilisée par les voisins de  $Sommet$
  - Affecter à  $Sommet$  la couleur  $Couleur$ .
- fin pour
- Afficher le nombre de couleur utilisées.

## Application sur l'exemple de l'ouverture des magasins



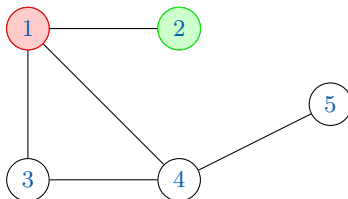
Numéro	Couleur
$c_1$	red
$c_2$	green
$c_3$	blue

## Application sur l'exemple de l'ouverture des magasins



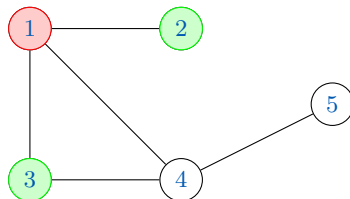
Numéro	Couleur
$c_1$	red
$c_2$	green
$c_3$	blue

## Application sur l'exemple de l'ouverture des magasins



Numéro	Couleur
$c_1$	red
$c_2$	green
$c_3$	blue

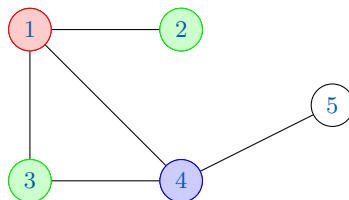
## Application sur l'exemple de l'ouverture des magasins



Numéro	Couleur
$c_1$	red
$c_2$	green
$c_3$	blue

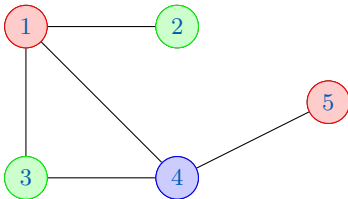


## Application sur l'exemple de l'ouverture des magasins



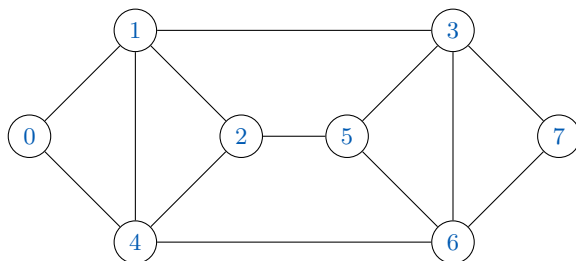
Numéro	Couleur
$c_1$	red
$c_2$	green
$c_3$	blue

## Application sur l'exemple de l'ouverture des magasins



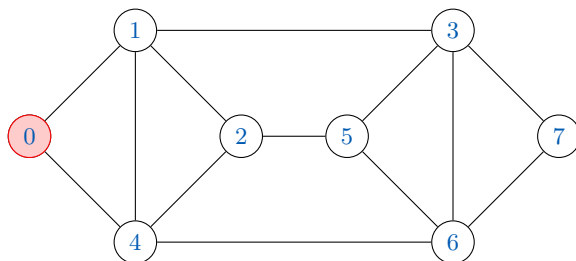
Numéro	Couleur
$c_1$	red
$c_2$	green
$c_3$	blue

## Application de l'algorithme GLOUTON sur un autre exemple



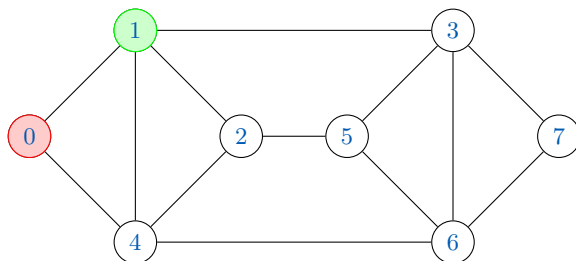
Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

## Application de l'algorithme GROUTON sur un autre exemple



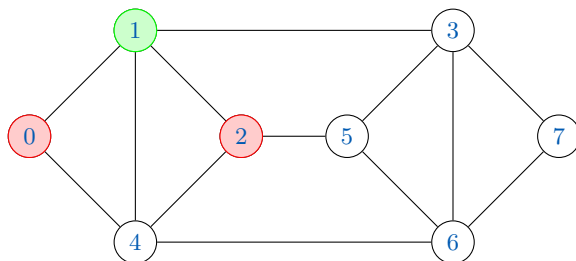
Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

## Application de l'algorithme GLOUTON sur un autre exemple



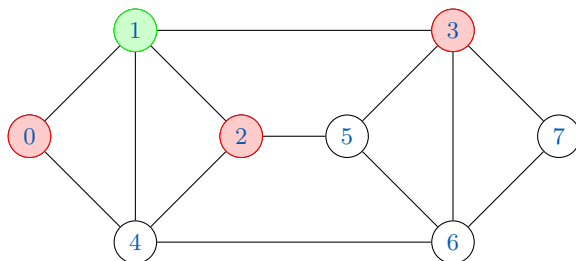
Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

## Application de l'algorithme GLOUTON sur un autre exemple



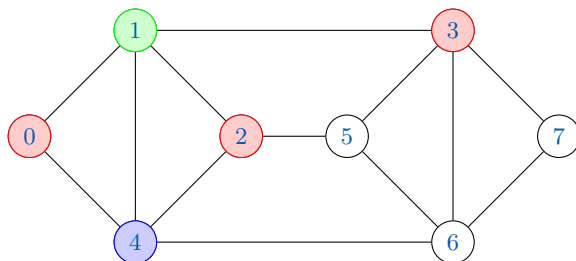
Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

## Application de l'algorithme GLOUTON sur un autre exemple



Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

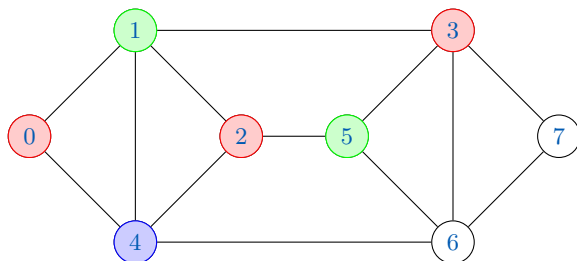
## Application de l'algorithme GLOUTON sur un autre exemple



Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

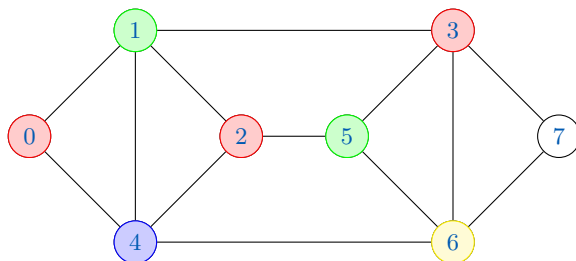


## Application de l'algorithme GROUTON sur un autre exemple



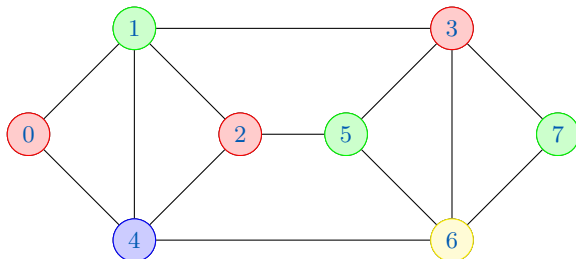
Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

## Application de l'algorithme GROUTON sur un autre exemple



Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

## Application de l'algorithme GROUTON sur un autre exemple



Numéro	Couleur
$c_1$	rouge
$c_2$	vert
$c_3$	bleu
$c_4$	jaune

# Plan

- 1 Histoire
- 2 Définitions & Propriétés
- 3 Algorithme de GROUTON
- 4 Algorithme de WELSCH & POWELL
- 5 Applications

## Principe de l'algorithme de WELSCH & POWELL

**Début :** On considère un graphe non-orienté  $G = (X, A)$ , avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $n = |X|$ .

## Principe de l'algorithme de WELSCH & POWELL

**Début :** On considère un graphe non-orienté  $G = (X, A)$ , avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $n = |X|$ .

**Etape 1 :** Trier les sommets  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  par ordre décroissant des degrés.  
Notons par  $L$  la liste des sommets ainsi ordonnés.

## Principe de l'algorithme de WELSCH & POWELL

**Début :** On considère un graphe non-orienté  $G = (X, A)$ , avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $n = |X|$ .

**Etape 1 :** Trier les sommets  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  par ordre décroissant des degrés.  
Notons par  $L$  la liste des sommets ainsi ordonnés.

**Etape 2 :** Affecter une couleur  $c_1$  au premier sommet  $A$  de  $L$  et colorer avec la même couleur les sommets non encore colorés et non adjacents à  $A$  d'une manière cumulative selon l'ordre décroissant des degrés.

## Principe de l'algorithme de WELSCH & POWELL

- Début :** On considère un graphe non-orienté  $G = (X, A)$ , avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $n = |X|$ .
- Etape 1 :** Trier les sommets  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  par ordre décroissant des degrés. Notons par  $L$  la liste des sommets ainsi ordonnés.
- Etape 2 :** Affecter une couleur  $c_1$  au premier sommet  $A$  de  $L$  et colorer avec la même couleur les sommets non encore colorés et non adjacents à  $A$  d'une manière cumulative selon l'ordre décroissant des degrés.
- Etape 3 :** Retirer les sommets colorés avec la couleur  $c_1$  de la liste  $L$ . Choisir une nouvelle couleur  $c_2$  et répéter l'étape 2 sur la liste résiduelle.



## Principe de l'algorithme de WELSCH & POWELL

**Début :** On considère un graphe non-orienté  $G = (X, A)$ , avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $n = |X|$ .

**Etape 1 :** Trier les sommets  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  par ordre décroissant des degrés. Notons par  $L$  la liste des sommets ainsi ordonnés.

**Etape 2 :** Affecter une couleur  $c_1$  au premier sommet  $A$  de  $L$  et colorer avec la même couleur les sommets non encore colorés et non adjacents à  $A$  d'une manière cumulative selon l'ordre décroissant des degrés.

**Etape 3 :** Retirer les sommets colorés avec la couleur  $c_1$  de la liste  $L$ . Choisir une nouvelle couleur  $c_2$  et répéter l'étape 2 sur la liste résiduelle.

**Condition d'arrêt :** Tous les sommets sont colorés ( $L$  est vide).

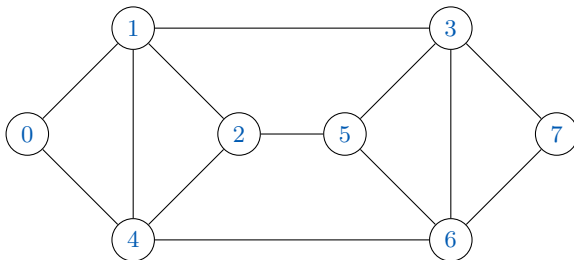
## Pseudo-code de l'algorithme de WELSCH & POWELL

### Pseudo-code

On considère un graphe non-orienté  $G = (X, A)$ , avec  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  et  $n = |X|$ .

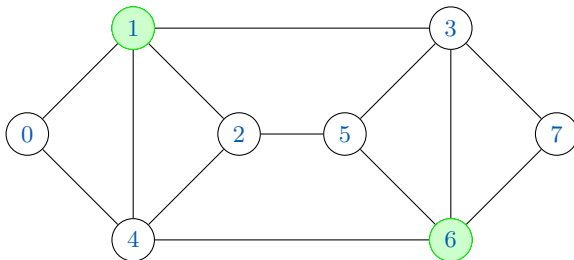
- $L$  : liste ordonnée des sommets de  $X$  ordonnés par ordre décroissant des degrés.
- $couleur \leftarrow 0$
- Tant que  $L \neq \emptyset$  faire
  - $couleur \leftarrow couleur + 1$
  - $s \leftarrow L[1]$  : le premier sommet de la liste  $L$
  - $couleur(s) \leftarrow couleur$  : colorer  $s$  par  $couleur$
  - $S_{couleur} = [s]$  : ensemble des sommets de couleur  $couleur$
  - Pour tout  $v \in L$  faire
    - Si  $v$  est non-adjacent à  $S_{couleur}$  faire
      - $couleur(v) = couleur$
      - $S_{couleur} = S_{couleur} \cup v$
    - fin Si
  - fin Pour
  - $L = L / S_{couleur}$  : retirer les sommets déjà colorés de  $L$
- fin Tant que
- Afficher le nombre de couleur utilisées.

## Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL



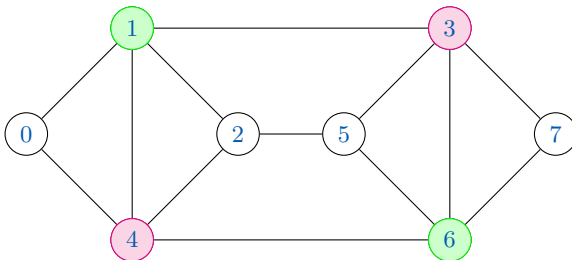
Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Itération 1								
Itération 2								
Itération 3								
Itération 4								

## Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL



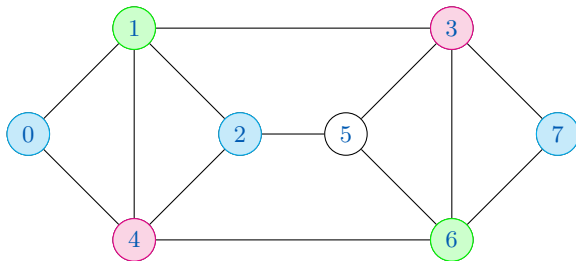
Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Itération 1	c <sub>1</sub>	-	-	c <sub>1</sub>	-	-	-	-
Itération 2								
Itération 3								
Itération 4								

## Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL



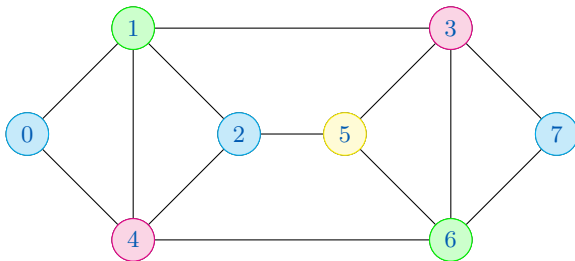
Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Itération 1	c <sub>1</sub>	-	-	c <sub>1</sub>	-	-	-	-
Itération 2	x	c <sub>2</sub>	c <sub>2</sub>	x	-	-	-	-
Itération 3								
Itération 4								

## Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL



Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Itération 1	$c_1$	-	-	$c_1$	-	-	-	-
Itération 2	x	$c_2$	$c_2$	x	-	-	-	-
Itération 3	x	x	x	x	$c_3$	-	$c_3$	$c_3$
Itération 4								

# Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL



Sommets	1	3	4	6	2	5	0	7
degrés	4	4	4	4	3	3	2	2
Itération 1	$c_1$	-	-	$c_1$	-	-	-	-
Itération 2	x	$c_2$	$c_2$	x	-	-	-	-
Itération 3	x	x	x	x	$c_3$	-	$c_3$	$c_3$
Itération 4	x	x	x	x	x	$c_4$	x	x

## Illustration de l'algorithme de WELSCH &amp; POWELL





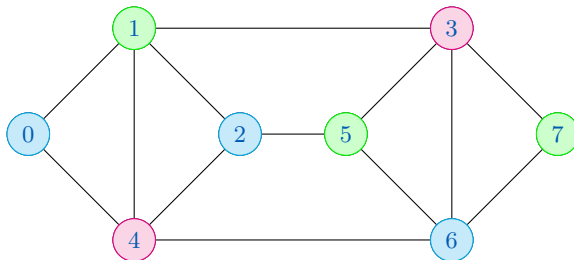
## Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL

- D'après la configuration considérée, 4 couleurs sont suffisants pour colorier le graphe.
- Attention ! il ne s'agit pas du nombre chromatique mais plutôt d'une majoration de ce dernier *i.e.*  $\chi(G) \leq 4$ .

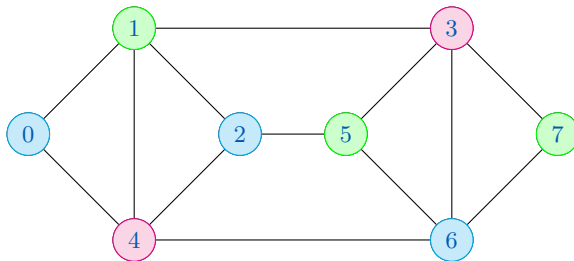
## Illustration de l'algorithme de WELSCH & POWELL

- D'après la configuration considérée, 4 couleurs sont suffisants pour colorier le graphe.
- Attention ! il ne s'agit pas du nombre chromatique mais plutôt d'une majoration de ce dernier *i.e.*  $\chi(G) \leq 4$ .

## Solution optimale sans l'application de WELSCH & POWELL



## Solution optimale sans l'application de WELSCH & POWELL



**À RETENIR** : l'algorithme de WELCH & POWELL est une automatisation de la coloration des graphes qui pousse vers l'optimalité mais ne la garantit pas.

# Plan

- 1 Histoire
- 2 Définitions & Propriétés
- 3 Algorithme de GROUTON
- 4 Algorithme de WELSCH & POWELL
- 5 Applications

## Application 1 : organisation d'une session d'examen

On veut organiser une session d'examens comportant, outre les matières communes, six matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S).

Les profils des candidats à options multiples sont : F-A-M ; D-S ; I-S ; I-M.

- 1 Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut planifier en parallèle ?
- 2 Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?





### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets :

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

## choix 2 : les incompatibilités

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur :



## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : planification / plage horaire

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** planification / plage horaire

représentation graphique :

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

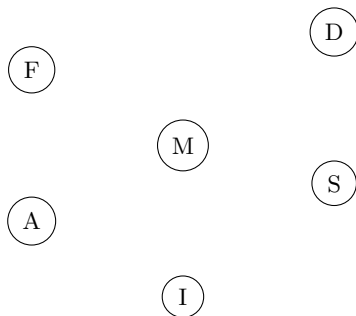
les liens :

### choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** planification / plage horaire

représentation graphique :



### Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

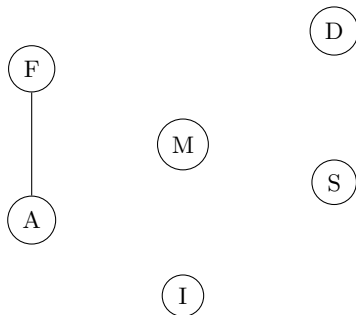
les liens :

## choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

**couleur :** planification / plage horaire

représentation graphique :



## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

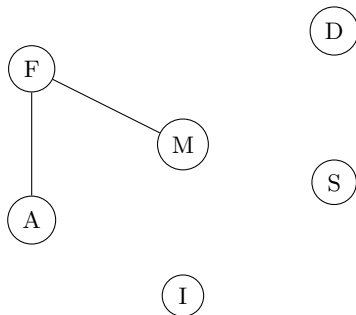
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : planification / plage horaire

représentation graphique :



## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

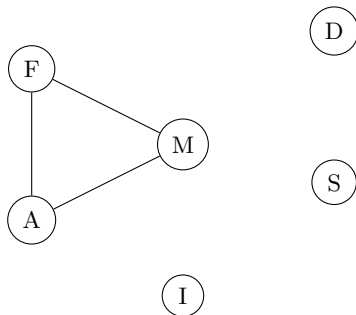
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : planification / plage horaire

représentation graphique :



## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

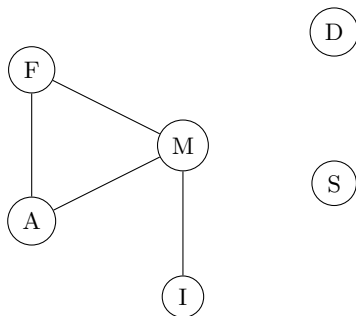
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : planification / plage horaire

représentation graphique :



## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

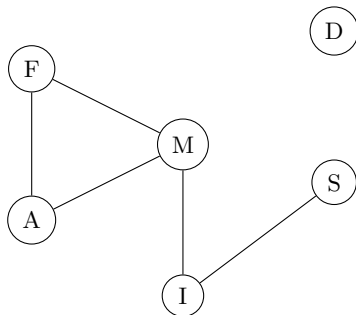
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : planification / plage horaire

représentation graphique :





## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les matières

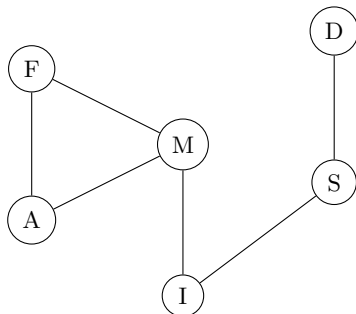
les liens :

choix 1 : les compatibilités

choix 2 : les incompatibilités ✓ (connues dans ce cas)

couleur : planification / plage horaire

représentation graphique :



### Application 1 : organisation d'une session d'examen

## Application de l'algorithme de WELCH & POWELL : réponse de la question 1

Sommets	M	A	F	I	S	D
degrés	3	2	2	2	2	1

## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Application de l'agorithme de WELCH & POWELL : réponse de la question 1

Sommets	M	A	F	I	S	D
degrés	3	2	2	2	2	1
Itération 1	c <sub>1</sub>	-	-	-	c <sub>1</sub>	-

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

### Application de l'agorithme de WELCH & POWELL : réponse de la question 1

Sommets	M	A	F	I	S	D
degrés	3	2	2	2	2	1
Itération 1	c <sub>1</sub>	-	-	-	c <sub>1</sub>	-
Itération 2	x	c <sub>2</sub>	-	c <sub>2</sub>	x	c <sub>2</sub>

## Application 1 : organisation d'une session d'examen

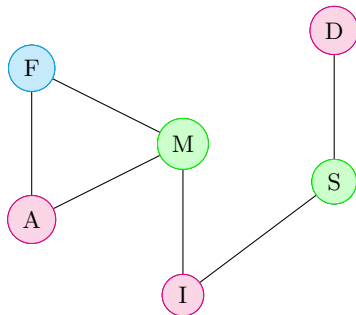
Application de l'agorithme de WELCH & POWELL : réponse de la question 1

Sommets	M	A	F	I	S	D
degrés	3	2	2	2	2	1
Itération 1	$c_1$	-	-	-	$c_1$	-
Itération 2	x	$c_2$	-	$c_2$	x	$c_2$
Itération 3	x	x	$c_3$	x	x	x

## Application 1 : organisation d'une session d'examen

Application de l'algorithme de WELCH & POWELL : réponse de la question 1

Sommets	M	A	F	I	S	D
degrés	3	2	2	2	2	1
Itération 1	$c_1$	-	-	-	$c_1$	-
Itération 2	x	$c_2$	-	$c_2$	x	$c_2$
Itération 3	x	x	$c_3$	x	x	x



### Application 1 : organisation d'une session d'examen

- La solution donnée, cette fois-ci, par l'algorithme de WELCH & POWELL est optimale : elle correspond au nombre chromatique (le graphe contient un cycle).

### Application 1 : organisation d'une session d'examen

- La solution donnée, cette fois-ci, par l'algorithme de WELCH & POWELL est optimale : elle correspond au nombre chromatique (le graphe contient un cycle).
- 3 couleurs  $\implies$  3 Plages Horaires (PH).



## Application 1 : organisation d'une session d'examen

- La solution donnée, cette fois-ci, par l'algorithme de WELCH & POWELL est optimale : elle correspond au nombre chromatique (le graphe contient un cycle).
- 3 couleurs  $\implies$  3 Plages Horaires (PH).
- réponse de la question 2

PH 1	PH 2	PH 3
M	A	F
S	I	
	D	

## Application 2 : Menuiserie

Dans un atelier de menuiserie, six travaux sont à réaliser. On utilise quatre machines : une Scie à dégrossir (S), une Raboteuse (R), une Mortaiseuse (M), une Ponceuse (P). Chaque travail nécessite l'utilisation de deux machines, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Travail	Machines à utiliser	Abréviations
1	Scie et Raboteuse	S-R
2	Scie et Mortaiseuse	S-M
3	Mortaiseuse et Ponceuse	M-P
4	Raboteuse et Ponceuse	R-P
5	Mortaiseuse et Ponceuse	M-P
6	Scie et Mortaiseuse	S-M

Deux travaux ne peuvent être exécutés en même temps que s'ils utilisent des machines différentes.

- 1 Modéliser le problème par un graphe.
- 2 On suppose que le temps nécessaire pour chaque travail est le même. Déterminer le nombre minimal de séquences nécessaires pour réaliser ces six travaux.
- 3 Proposer une organisation.

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets :

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens :

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur :



## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

**couleur :** une séquence

## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

**couleur :** une séquence

représentation graphique :

## Application 2 : Menuiserie

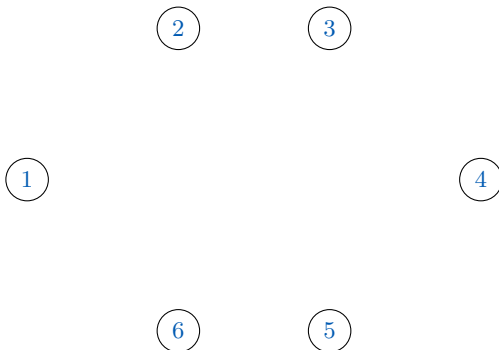
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

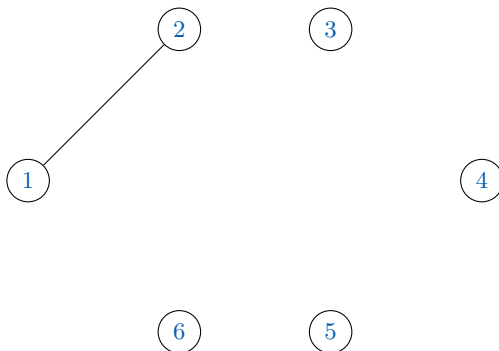
représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

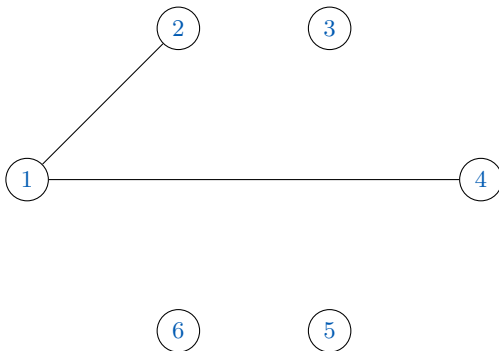
- les sommets : les travaux
  - les liens : les incompatibilités
  - couleur : une séquence
- représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

- les sommets : les travaux
- les liens : les incompatibilités
- couleur : une séquence
- représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

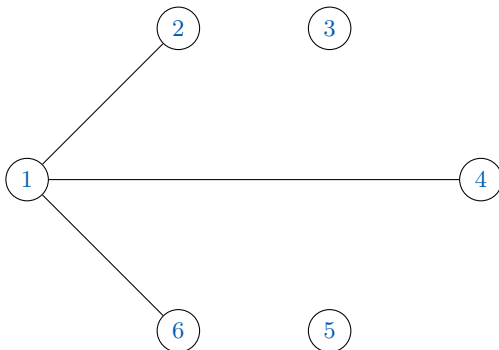
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

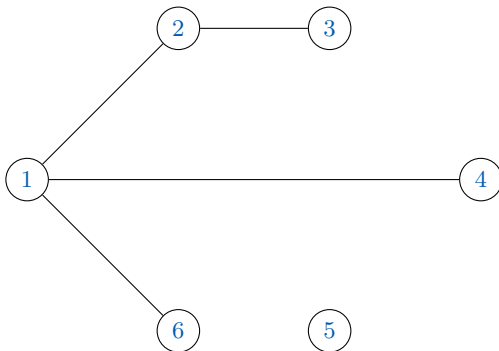
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

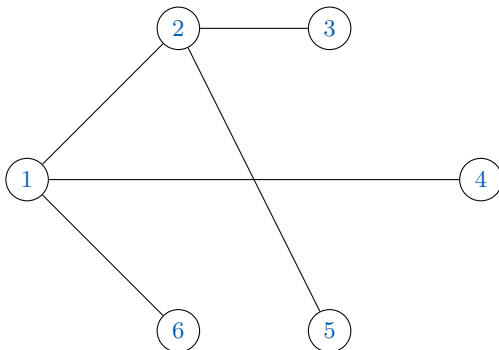
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :





## Application 2 : Menuiserie

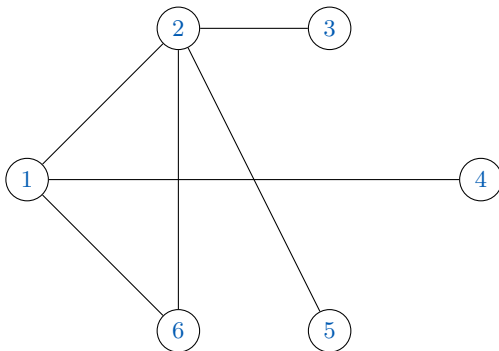
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

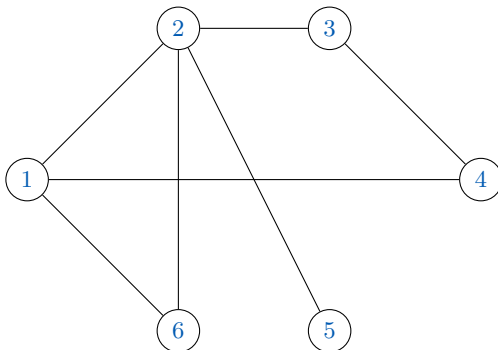
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

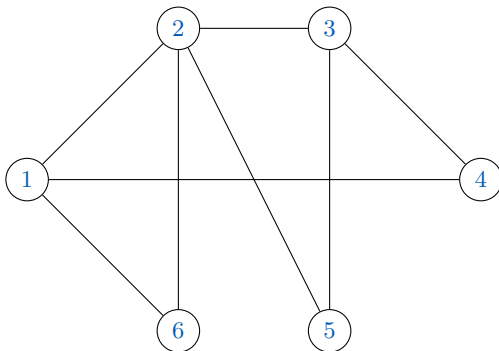
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

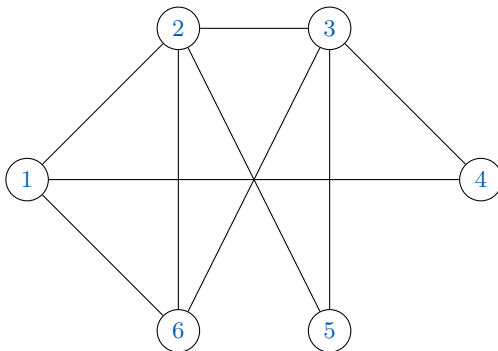
représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

- les sommets : les travaux
  - les liens : les incompatibilités
  - couleur : une séquence
- représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

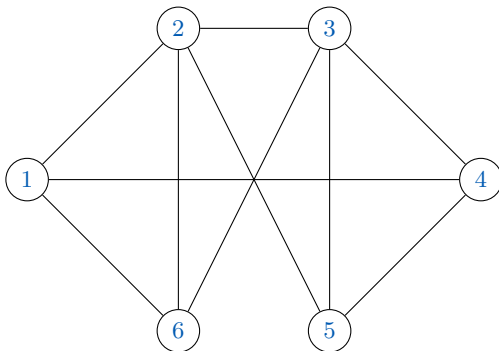
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

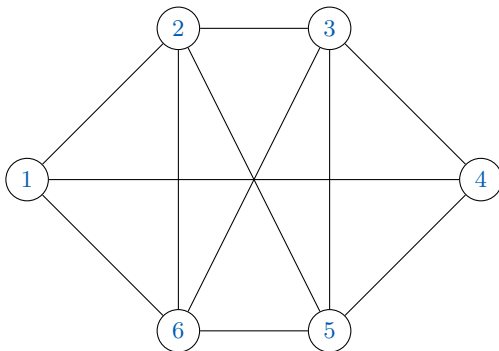
1- Modélisation du problème par un graphe : il s'agit bien d'un problème de coloration.

les sommets : les travaux

les liens : les incompatibilités

couleur : une séquence

représentation graphique :



## Application 2 : Menuiserie

## 2- Application de l'algorithme de WELCH & POWELL

Sommets	2	3	5	6	1	4
degrés	4	4	4	4	3	3

## Application 2 : Menuiserie

## 2- Application de l'algorithme de WELCH & POWELL

Sommets	2	3	5	6	1	4
degrés	4	4	4	4	3	3
Itération 1	$c_1$	-	-	-	-	$c_1$



## Application 2 : Menuiserie

## 2- Application de l'algorithme de WELCH & POWELL

Sommets	2	3	5	6	1	4
degrés	4	4	4	4	3	3
Itération 1	$c_1$	-	-	-	-	$c_1$
Itération 2	x	$c_2$	-	-	$c_2$	x

## Application 2 : Menuiserie

## 2- Application de l'algorithme de WELCH & POWELL

Sommets	2	3	5	6	1	4
degrés	4	4	4	4	3	3
Itération 1	$c_1$	-	-	-	-	$c_1$
Itération 2	x	$c_2$	-	-	$c_2$	x
Itération 3	x	x	$c_3$	-	x	x

## Application 2 : Menuiserie

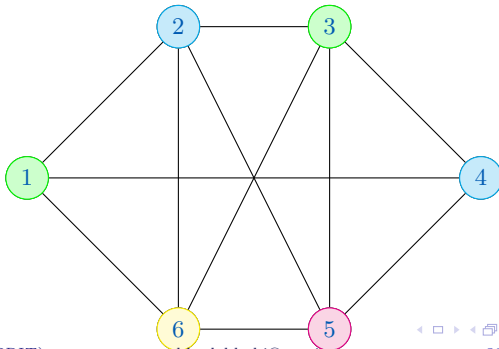
## 2- Application de l'agorithme de WELCH & POWELL

Sommets	2	3	5	6	1	4
degrés	4	4	4	4	3	3
Itération 1	c <sub>1</sub>	-	-	-	-	c <sub>1</sub>
Itération 2	x	c <sub>2</sub>	-	-	c <sub>2</sub>	x
Itération 3	x	x	c <sub>3</sub>	-	x	x
Itération 4	x	x	x	c <sub>4</sub>	x	x

## Application 2 : Menuiserie

### 2- Application de l'algorithme de WELCH & POWELL

Sommets	2	3	5	6	1	4
degrés	4	4	4	4	3	3
Itération 1	$c_1$	-	-	-	-	$c_1$
Itération 2	x	$c_2$	-	-	$c_2$	x
Itération 3	x	x	$c_3$	-	x	x
Itération 4	x	x	x	$c_4$	x	x



## Application 2 : Minuiserie

- La solution donnée par l'algorithme de WELCH & POWELL est optimale : elle correspond au nombre chromatique (le graphe contient un  $K_4$ ).

## Application 2 : Minuiserie

- La solution donnée par l'algorithme de WELCH & POWELL est optimale : elle correspond au nombre chromatique (le graphe contient un  $K_4$ ).
- 4 couleurs  $\implies$  4 Séquences.

## Application 2 : Minuiserie

- La solution donnée par l'algorithme de WELCH & POWELL est optimale : elle correspond au nombre chromatique (le graphe contient un  $K_4$ ).
- 4 couleurs  $\implies$  4 Séquences.
- 3- Une organisation possible est donnée par :

S1	S2	S3	S4
2	3	5	6
4	1		