Markov Decision Process
Rappel : Vecteur gaussien, Mouvement Brownien et Martingales

Mohamed Anis BEN LASMAR

A.U.2024-2025

Plan

Vecteurs gaussiens

Définition

On dit qu'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_d)$ est un vecteur gaussien si, pour tout $a = (a_1, \cdots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, la variable aléatoire réelle aX est une variable aléatoire gaussienne.

Autrement dit, toute combinaison linéaire de X est gaussienne.

Vecteurs gaussiens

Notons par Γ , avec $\Gamma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$, la matrice de variance covariance du vecteur X et m, avec $m_i = E(X_i)$, son vecteur moyenne. La fonction caractéristique de X est donnée par :

$$E(e^{iuX}) = exp\{iE(u.X) - \frac{1}{2}Var(u.X)\} = e^{iu.m - \frac{1}{2}u\Gamma u}.$$

La fonction caractéristique (et donc la loi) ne dépend que du couple (m, Γ). On dit dans ce cas que X suit la loi $N(m, \Gamma)$.

Vecteurs gaussiens

Exemple:

Si $X_1, \cdots, X_d$ sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes alors $X = (X_1, \cdots, X_d)$ est un vecteur gaussien centré de matrice de variance covariance égale à la matrice identité de $\mathbb{R}^d$.

Vecteurs gaussiens

Exemple:

Si $X_1, \cdots, X_d$ sont des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes alors $X = (X_1, \cdots, X_d)$ est un vecteur gaussien centré de matrice de variance covariance égale à la matrice identité de $\mathbb{R}^d$.

En effet: pour $a \in \mathbb{R}^d$, par indépendance, la fonction caractéristique de $a.X$ est:

$$\Phi_{a.X}(t) = E[e^{ita.X}] = \prod_{j=1}^{d} E[e^{ita_j.X_j}] = \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{(ta_j)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}a.a}$$

Donc la variable aléatoire $a.X$ suit la loi gaussienne centrée de variance $a.a$.

Remarque !!

Il ne suffit pas que X_1 et X_2 soient des variables gaussiennes réelles pour que (X_1, X_2) soit un vecteur gaussien. Ce résultat est vrai dans le cas particulier où X_1 et X_2 sont indépendantes.

Stabilité du caractère gaussien par transformation linéaire

Si X est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $Y = a + MX$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ un vecteur constant et et M une matrice de taille $n \times d$, alors toute combinaison linéaire des coordonnées de Y est combinaison linéaire des coordonnées de X à une constante près :

$$\text{pour } b \in \mathbb{R}^n, \quad b.Y = b.a + (M^t.b).X.$$

Donc si X est gaussien, alors Y est aussi gaussien.

Vecteurs gaussiens et indépendance

Proposition

Les coordonnées d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \cdots, X_d)$ sont indépendantes si et seulement si sa matrice de variance covariance γ est diagonale.

Plan

Processus Stochastique

Définition

On appelle processus stochastique à temps continu à valeurs dans un espace E muni d'une tribu E, une famille $(X_t, t \geq 0)$ de variables aléatoires à valeurs dans E définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Remarque: L'indice $t \in [0, +\infty[$ représente le temps. Notons que l'on peut associer, à chaque $\omega \in \Omega$, une trajectoire :

$$t \to X_t(\omega).$$

Mouvement Brownien

Définition

Un processus stochastique $(B_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est dit un mouvement brownien (standard) s'il vérifie les quatre propriétés suivantes:

- $B_0 = 0$.
- Pour tout $s \leq t$, l'accroissement $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne centrée de variance $t - s$ (Processus à accroissements stationnaires).
- si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, les accroissements $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendants. (Processus à accroissements indépendants).
- En dehors d'un ensemble de probabilité nulle, les trajectoires $t \to B_t(\omega)$ sont continues.(Processus continu).

Mouvement Brownien

Théorème

Si $(X_t, t \geq 0)$ est un processus continu à accroissements indépendants et stationnaires alors il existe deux constantes réelles r et *sigma* t.q. $\forall t \geq 0$,

$$X_t - X_0 = rt + \sigma B_t$$

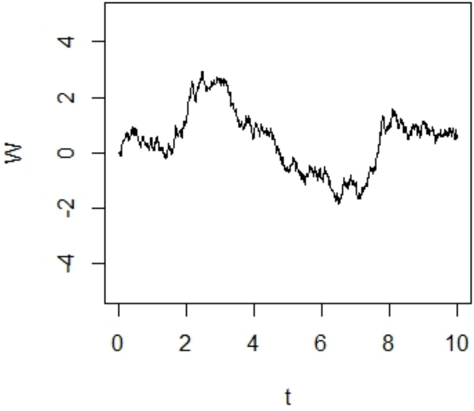
avec $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien.

Une propriété importante du mouvement brownien est le manque de régularité des trajectoires. Nous admettrons le théorème suivant

Théorème

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien, alors, en dehors d'un ensemble de probabilité nulle, il n'existe aucun point où la trajectoire est différentiable.

Mouvement Brownien - Régularité des trajectoires



Mouvement Brownien - Régularité des trajectoires

Proposition

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien, soit T un réel positif, n un entier. On pose : $t_i^n = \frac{iT}{n}$, pour $0 \leq i \leq n$. Alors, au sens de la convergence L^2:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)^2 = T.$$

Ceci implique que $(Bt, t \geq 0)$ ne peut être lischitzienne sur l'intervalle $[0, T]$.

Caractère gaussien du mouvement brownien

Nous avons vu que si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien alors B_t suit une loi gaussienne. Une propriété plus forte est vérifié par le processus $(B_t, t \geq 0)$: c'est un processus gaussien.

Définition

On dit qu'un processus $(X_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien, si pour tout entier n et pour tout $n-$uplet, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < +\infty$, le vecteur $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Théorème

Un mouvement brownien est un processus gaussien.

Caractère gaussien du mouvement brownien

Théorème

Soit $(B_t, t \geq 0)$ un processus gaussien centré continu t.q.

$$\forall s, t \geq 0, \quad Cov(B_s, B_t) = min(s, t).$$

Alors $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Markov Decision Process
Rappel : Vecteur gaussien, Mouvement Brownien et Martingales

Mohamed Anis BEN LASMAR

A.U.2024-2025