Chapitre III:
Vecteurs aléatoires réels

Module PROBABILITÉS

$4^{ème}$ année
IA

A.U: 2022-2023

Introduction

La notion d'un **vecteur gaussien** désigne un cas particulier de celle d'un vecteur aléatoire. Elle intervient dans plusieures disciplines telles que :

- Modèles statistiques d'estimation : modèle de régression (simple /multiple).
- Étude des série chronologiques.
- Analyse de données.
- Intelligence artificielle : réseaux neuronaux.

Définition et propriétés

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$, $d \geq 1$, un vecteur aléatoire. On dit que X est un vecteur gaussien si, $\forall a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ la variable aléatoire réelle Y définie par :

$$Y = a^t . X = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$$

est une variable aléatoire gaussienne, i.e. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; $(m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Définition et propriétés

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$, $d \geq 1$, un vecteur aléatoire. On dit que X est un vecteur gaussien si, $\forall a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ la variable aléatoire réelle Y définie par :

$$Y = a^t.X = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$$

est une variable aléatoire gaussienne, i.e. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; $(m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

☞ Toute combinaison linéaire des v.a $X_1, \dots, X_d$ est une v.a gaussienne.

Définition et propriétés

Définition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$, $d \geq 1$, un vecteur aléatoire. On dit que X est un vecteur gaussien si, $\forall a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ la variable aléatoire réelle Y définie par :

$$Y = a^t.X = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$$

est une variable aléatoire gaussienne, i.e. $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$; $(m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

☞ Toute combinaison linéaire des v.a $X_1, \ldots, X_d$ est une v.a gaussienne.

Exemple :

Soient X et Y deux v.a. tels que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y = 2X$ (p.s) alors $V = (X, Y)$ est un vecteur gaussien.

Définition et propriétés

Conséquence

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d), d \geq 1$, un vecteur gaussien, alors chaque application composante $X_i, 1 \leq i \leq d$, est une variable aléatoire gaussienne.

Définition et propriétés

Conséquence

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d), d \geq 1$, un vecteur gaussien, alors chaque application composante $X_i, 1 \leq i \leq d$, est une variable aléatoire gaussienne.

La réciproque est fausse :

Il se peut que $X_1, \ldots, X_d$ sont des variables aléatoires gaussiennes sans que le vecteur $X = (X_1, \ldots, X_d)$ soit gaussien.

Définition et propriétés

Application 1 :

Soit Y et Z deux variables aléatoires réelles indépendantes avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et Y suit une loi de rademarcher c'est-à-dire $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{1}{2}$. On définit le couple aléatoire $X=(X_1,X_2)$, avec $X_1=Z$ et $X_2=YZ$.

1. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit la loi gaussienne.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_1+X_2=0)$
3. Déduire que X n'est pas un vecteur gaussien.

Définition et propriétés

Corrigé de l'application 1 :

① Pour montrer que la loi de X_2 est gaussienne, on peut calculer sa fonction de répartition $\mathbb{F}_{X_2}$.
Alors $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, on a :

Définition et propriétés

Corrigé de l'application 1 :

① Pour montrer que la loi de X_2 est gaussienne, on peut calculer sa fonction de répartition $\mathbb{F}_{X_2}$.
Alors $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{X_2}(x_2) = \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) &= \mathbb{P}(YZ \leq x_2) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq x_2, Y = 1) + \mathbb{P}(-Z \leq x_2, Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq x_2)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(-Z \leq x_2)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(Z \leq x_2) + \mathbb{P}(-Z \leq x_2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(Z \leq x_2) + \mathbb{P}(Z \leq x_2)\Big) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq x_2) \\
&= \mathbb{F}_Z(x_2)
\end{aligned}$$

Définition et propriétés

Corrigé de l'application 1 :

① Pour montrer que la loi de X_2 est gaussienne, on peut calculer sa fonction de répartition $\mathbb{F}_{X_2}$.
Alors $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{X_2}(x_2) = \mathbb{P}(X_2 \leq x_2) &= \mathbb{P}(YZ \leq x_2) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq x_2, Y = 1) + \mathbb{P}(-Z \leq x_2, Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq x_2)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(-Z \leq x_2)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(Z \leq x_2) + \mathbb{P}(-Z \leq x_2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(Z \leq x_2) + \mathbb{P}(Z \leq x_2)\Big) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq x_2) \\
&= \mathbb{F}_Z(x_2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X_2 = Z, \;\; \mathbb{P}.ps \;\Rightarrow\; X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Définition et propriétés

2

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) &= \mathbb{P}(Z + YZ = 0) \\
&= \mathbb{P}(Z + YZ = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(Z + YZ = 0, Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z + Z = 0)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Z - Z = 0)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(0 = 0)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Définition et propriétés

②

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) &= \mathbb{P}(Z + YZ = 0) \\
&= \mathbb{P}(Z + YZ = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(Z + YZ = 0, Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z + Z = 0)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Z - Z = 0)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(0 = 0)\mathbb{P}(Y = -1) \\
&= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

③

On a $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, donc la variable aléatoire $X_1 + X_2$ ne peut pas être continue car la probabilité qu'une v.a. continue soit égale à un point est toujours nulle.

Définition et propriétés

②

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) &= \mathbb{P}(Z + YZ = 0)\\ &= \mathbb{P}(Z + YZ = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(Z + YZ = 0, Y = -1)\\ &= \mathbb{P}(Z + Z = 0)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Z - Z = 0)\mathbb{P}(Y = -1)\\ &= \mathbb{P}(Z = 0)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(0 = 0)\mathbb{P}(Y = -1)\\ &= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

③
On a $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 0) = \frac{1}{2}$, donc la variable aléatoire $X_1 + X_2$ ne peut pas être continue car la probabilité qu'une v.a. continue soit égale à un point est toujours nulle.
Donc, $X_1 + X_2$ n'est pas gaussienne.

$\Rightarrow$ On a trouvé une combinaison linéaire de X_1 et X_2 non gaussienne, ceci implique par définition d'un vecteur gaussien que X n'est pas gaussien.

Moments d'un vecteur gaussien

Définition-Vecteur espérance

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien tel que les v.a. $X_1, \ldots, X_d$ admettant des moments d'ordre 1. On appelle espérance de X, le vecteur de $\mathbb{R}^d$:

$$m = (m_1, \ldots, m_d)$$

où $\forall 1 \leq i \leq d,\ m_i = \mathbb{E}(X_i)$.

Moments d'un vecteur gaussien

Définition-Vecteur espérance

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien tel que les v.a. $X_1, \ldots, X_d$ admettant des moments d'ordre 1. On appelle espérance de X, le vecteur de $\mathbb{R}^d$:

$$m = (m_1, \ldots, m_d)$$

où $\forall 1 \leq i \leq d,\ m_i = \mathbb{E}(X_i)$.

Définition-Matrice de covariance

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien tel que les v.a. $X_1, \ldots, X_d$ admettant des moments d'ordre 2. On appelle matrice de covariance de X la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = (\Sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}, \quad \text{avec } \Sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$$

Moments d'un vecteur gaussien

Définition-Vecteur espérance

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien tel que les v.a. $X_1, \dots, X_d$ admettant des moments d'ordre 1. On appelle espérance de X, le vecteur de $\mathbb{R}^d$:

$$m = (m_1, \dots, m_d)$$

où $\forall 1 \leq i \leq d,\ m_i = \mathbb{E}(X_i)$.

Définition-Matrice de covariance

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien tel que les v.a. $X_1, \dots, X_d$ admettant des moments d'ordre 2. On appelle matrice de covariance de X la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = (\Sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}, \quad \text{avec } \Sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$$

☞ La loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par son vecteur espérance m et sa matrice de covariance Σ. Par analogie des v.a., on écrit $X \sim \mathcal{N}_d(m, \Sigma),\ d \geq 1$.

Construction d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien. On dit que X est standard si son espérance m est le vecteur nul et sa matrice de covariance $\Sigma = I_d$.
Autrement dit,

Construction d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien. On dit que X est standard si son espérance m est le vecteur nul et sa matrice de covariance $\Sigma = I_d$.

Autrement dit,

si les composantes X_i sont centrées réduites et non corrélées.

Dans ce cas, on écrit :

$$X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$$

où I_d désigne la matrice identité d'ordre d.

Construction d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien. On dit que X est standard si son espérance m est le vecteur nul et sa matrice de covariance $\Sigma = I_d$.
Autrement dit,
si les composantes X_i sont centrées réduites et non corrélées.

Dans ce cas, on écrit :

$$X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$$

où I_d désigne la matrice identité d'ordre d.

Proposition : Transformation affine

Soit $Z \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, $A \in \mathcal{M}_{dn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$, alors $X = A\,Z + b$ est un vecteur gaussien telque :

$$X \sim \mathcal{N}_d(Am + b, A\,\Sigma\,A^t)$$

Construction d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien. On dit que X est standard si son espérance m est le vecteur nul et sa matrice de covariance $\Sigma = I_d$.

Autrement dit,

si les composantes X_i sont centrées réduites et non corrélées.

Dans ce cas, on écrit :

$$X \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$$

où I_d désigne la matrice identité d'ordre d.

Proposition : Transformation affine

Soit $Z \sim \mathcal{N}_n(m, \Sigma)$, $A \in \mathcal{M}_{dn}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$, alors $X = A\,Z + b$ est un vecteur gaussien telque :

$$X \sim \mathcal{N}_d(Am + b, A\,\Sigma\,A^t)$$

Cas particulier : $Z \sim \mathcal{N}_d(0, I_d)$, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$, $\Rightarrow X \sim \mathcal{N}_d(b, AA^t)$

Construction d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire quelconque, la fonction caractéristique de X est définie par :

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iu^t.X}] = \mathbb{E}[e^{i(u_1X_1+\cdots+u_dX_d)}], \quad \forall u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$$

Construction d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire quelconque, la fonction caractéristique de X est définie par :

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iu^t.X}] = \mathbb{E}[e^{i(u_1X_1+\cdots+u_dX_d)}], \quad \forall u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$$

Proposition-Fonction caractéristique

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Σ, alors la fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\phi_X(u) = e^{iu^t.m}\, e^{\frac{-1}{2}\, u^t.\Sigma.u}, \quad \forall u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$$

Construction d'un vecteur gaussien

Théorème

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Σ. X admet une densité f_X **ssi** la matrice Σ est inversible.
De plus, la densité f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\Sigma^{-1}(x-m)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Construction d'un vecteur gaussien

Théorème

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien de moyenne m et de matrice de covariance Σ. X admet une densité f_X **ssi** la matrice Σ est inversible.
De plus, la densité f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\Sigma^{-1}(x-m)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Application 2 :

Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes normales centrées et réduites. On pose $X = (X_1, X_2) = (Y + Z, Y - Z)$.

1. Calculer la matrice de covariance de X.
2. Montrer que X admet une densité, puis la déterminer.
3. Calculer la fonction caractéristique de X.

Corrigé de l'application 2 :

① On a :

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(Y+Z) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(Z) = 2$$
$$\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(Y-Z) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(-Z) = \mathbb{V}(Y) + (Z) = 2$$

et

$$\begin{aligned} cov(X_1, X_2) &= cov(Y+Z, Y-Z) \\ &= cov(Y, Y-Z) + cov(Z, Y-Z) \\ &= cov(Y,Y) - cov(Y,Z) + cov(Z,Y) - cov(Z,Z) \\ &= cov(Y,Y) - cov(Z,Z) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Corrigé de l'application 2 :

① On a :

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(Y+Z) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(Z) = 2$$
$$\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(Y-Z) = \mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(-Z) = \mathbb{V}(Y) + (Z) = 2$$

et

$$\begin{aligned} cov(X_1, X_2) &= cov(Y+Z, Y-Z) \\ &= cov(Y, Y-Z) + cov(Z, Y-Z) \\ &= cov(Y,Y) - cov(Y,Z) + cov(Z,Y) - cov(Z,Z) \\ &= cov(Y,Y) - cov(Z,Z) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

donc la matrice de covariance de X est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Notons que $X = (X_1, X_2)$ est bien un vecteur gaussien (car $\forall a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, a_1X_1 + a_2X_2 = (a_1 + a_2)Y + (a_1 - a_2)Z$ est une v.a gaussienne), et que :

$$\det(\Sigma) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Donc X admet une densité donnée pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

② Notons que $X = (X_1, X_2)$ est bien un vecteur gaussien (car $\forall a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, a_1X_1 + a_2X_2 = (a_1 + a_2)Y + (a_1 - a_2)Z$ est une v.a gaussienne), et que :

$$\det(\Sigma) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Donc X admet une densité donnée pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned}
f_X(x_1, x_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\Sigma^{-1}(x-m)} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)
\end{aligned}$$

③

$\forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_X(u) &= e^{iu^t.m}\, e^{\frac{-1}{2}\, u^t.\Sigma.u} \\
&= e^{\frac{-1}{2}\, u^t.\Sigma.u} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}(u_1 \;\; u_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \exp\left(-(u_1^2 + u_2^2)\right)
\end{aligned}$$

Indépendance d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X_1, \ldots, X_d$ une famille des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes ssi $\forall 1 \leq j \leq d$ et $\forall$ intervalles $I_1, \ldots, I_j$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \ldots, X_j \in I_j) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_j \in I_j)$$

Indépendance d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X_1, \dots, X_d$ une famille des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \dots, X_d$ sont mutuellement indépendantes ssi $\forall 1 \leq j \leq d$ et $\forall$ intervalles $I_1, \dots, I_j$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_j \in I_j) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_j \in I_j)$$

☞ $X_1, \dots, X_d$ est une famille des v.a.r mutuellement indépendantes $\Rightarrow$ c'est une famille des v.a.r deux à deux indépendantes.

Indépendance d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X_1, \ldots, X_d$ une famille des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes ssi $\forall 1 \leq j \leq d$ et $\forall$ intervalles $I_1, \ldots, I_j$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \ldots, X_j \in I_j) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_j \in I_j)$$

☞ $X_1, \ldots, X_d$ est une famille des v.a.r mutuellement indépendantes $\Rightarrow$ c'est une famille des v.a.r deux à deux indépendantes.

☞ La réciproque est fausse

Indépendance d'un vecteur gaussien

Définition

Soit $X_1, \ldots, X_d$ une famille des variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes ssi $\forall 1 \leq j \leq d$ et $\forall$ intervalles $I_1, \ldots, I_j$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \ldots, X_j \in I_j) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_j \in I_j)$$

☞ $X_1, \ldots, X_d$ est une famille des v.a.r mutuellement indépendantes $\Rightarrow$ c'est une famille des v.a.r deux à deux indépendantes.

☞ La réciproque est fausse

Exemple :

On lance deux fois une pièce équilibrée et on considère les v.a suivantes :

X_1 : modélise que les deux résultats sont différents,

X_2 : modélise que la face obtenue au premier lancer est une face F

X_3 : modélise que la face obtenue au second lancer est une pile P.

$\Rightarrow$ Les v.a X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes deux à deux mais pas mutuellement indépendantes.

Indépendance d'un vecteur gaussien

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes.
2. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont deux à deux indépendantes.

Indépendance d'un vecteur gaussien

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes.
2. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont deux à deux indépendantes.

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les v.a. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.
2. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont non corrélées.
3. La matrice de covariance Σ du vecteur X est diagonale.

Indépendance d'un vecteur gaussien

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont mutuellement indépendantes.
2. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont deux à deux indépendantes.

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les v.a. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes.
2. Les composantes $X_1, \ldots, X_d$ sont non corrélées.
3. La matrice de covariance Σ du vecteur X est diagonale.

☞ Deux v.a.r. quelconque X et Y sont indépendantes $\Rightarrow cov(X, Y) = 0$.
☞ La réciproque est fausse, sauf dans le cas où (X, Y) forment un vecteur gaussien.

Indépendance d'un vecteur gaussien

Proposition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$, alors, les v.a. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes, ssi :

$$\phi_X(u) = \phi_{X_1}(u_1) \times \cdots \times \phi_{X_d}(u_d), \forall u = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{R}^d$$

Indépendance d'un vecteur gaussien

Application 3 :

Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur gaussien centré, avec $\mathbb{V}(X_1) = 4$ et $\mathbb{V}(X_2) = 1$, telles que les variables $2X_1 + X_2$ et $X_1 - 3X_2$ sont indépendantes.

1. Calculer $cov(X_1, X_2)$.
2. Vérifier que le vecteur $Y = \Big(Y_1 = X_1 + X_2, \, Y_2 = 2X_1 - 5X_2\Big)$ est gaussien.
3. Les composantes Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Indépendance d'un vecteur gaussien

Corrigé de l'application 3 :

①

$$\begin{aligned} cov(2X_1 + X_2, X_1 - 3X_2) &= 2cov(X_1, X_1 - 3X_2) + cov(X_2, X_1 - 3X_2) \\ &= 2\mathbb{V}[X_1] - 6cov(X_1, X_2) + cov(X_2, X_1) - 3\mathbb{V}[X_2] \\ &= 5 - 5cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $2X_1 + X_2$ et $X_1 - 3X_2$ sont indépendantes, on obtient :

$$cov(X_1, X_2) = 1$$

Indépendance d'un vecteur gaussien

Corrigé de l'application 3 :

①

$$\begin{aligned} cov(2X_1 + X_2, X_1 - 3X_2) &= 2cov(X_1, X_1 - 3X_2) + cov(X_2, X_1 - 3X_2) \\ &= 2\mathbb{V}[X_1] - 6cov(X_1, X_2) + cov(X_2, X_1) - 3\mathbb{V}[X_2] \\ &= 5 - 5cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $2X_1 + X_2$ et $X_1 - 3X_2$ sont indépendantes, on obtient :

$$cov(X_1, X_2) = 1$$

②

Le vecteur $Y = (Y_1, Y_2)$ est bien un vecteur gaussien car il s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire du vecteur gaussien $X = (X_1, X_2)$. En effet :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 - 5X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A \times X$$

Indépendance d'un vecteur gaussien

Suite du corrigé de l'application 3 :

③
Tout en tenant compte que le vecteur $Y = (Y_1, Y_2)$ est gaussien et que :

$$\begin{aligned} cov(Y_1, Y_2) &= cov(X_1 + X_2, 2X_1 - 5X_2) \\ &= cov(X_1, 2X_1 - 5X_2) + cov(X_2, 2X_1 - 5X_2) \\ &= 2\mathbb{V}(X_1) - 5cov(X_1, X_2) + 2cov(X_2, X_1) - 5\mathbb{V}(X_2) \\ &= 2\mathbb{V}(X_1) - 5\mathbb{V}(X_2) - 3cov(X_1, X_2) \\ &= 8 - 5 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors les composantes Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

J.Jacod et P.Protter : Probability essentials. Springer 2000.