Chapitre III:
Vecteurs aléatoires réels

Module PROBABILITÉS

$4^{ème}$ année
IA

A.U: 2023-2024

Introduction

On considère une expérience aléatoire modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on définit X et Y deux v.a.r tels que :

- X modélise le poids moyen d'un individu, $X(\omega) = [47, 72]$ (en kg).
- Y modélise la taille moyenne d'un individu, $Y(\omega) = [1.50, 1.80]$ (en m).

Introduction

On considère une expérience aléatoire modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on définit X et Y deux v.a.r tels que :

- X modélise le poids moyen d'un individu, $X(\omega) = [47, 72]$ (en kg).
- Y modélise la taille moyenne d'un individu, $Y(\omega) = [1.50, 1.80]$ (en m).

Question :

1. Comment modéliser le couple (X, Y) ?
2. Plus généralement : comment modéliser un vecteur $Z = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$, de dimensions $d \geq 1$, dont les composantes $X_i, 1 \leq i \leq d$, sont des v.a.r ? (cas de la pluspart des expériences aléatoires !).

Introduction : exemple des réalisations d'un vecteur aléatoire

Soit $Z = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$: mesures de battement cardiaque enregistré à des temps sucessifs $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_d$.

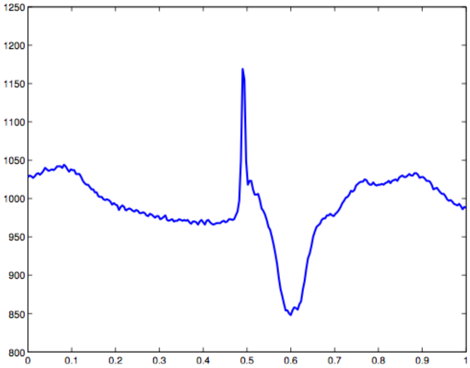

Figure 1 : Réalisation $Z(\omega_1)$ pour n $= 128$ milles secondes

Introduction : exemple des réalisations d'un vecteur aléatoire

Soit $Z = (X_1, ..., X_d) \in \mathbb{R}^d$: mesures de battement cardiaque enregistré à des temps sucessifs $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_d$.

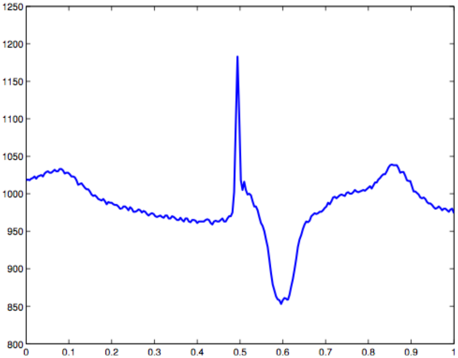

Figure 2 : Réalisation $Z(\omega_2)$ pour n = 128 milles secondes

Vecteur aléatoire réel

Définitions

1. On appelle **vecteur aléatoire (V.a.)** de dimension $d \geq 1$ ou une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ toute application :

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$\omega \mapsto \Big(X_1(\omega), ..., X_d(\omega)\Big)$$

telle que chaque application coordonnée $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $1 \leq i \leq d$, est une variable aléatoire réelle.

2. Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un d-uplet $(X_1, X_2, ..., X_d)$ des v.a. réelles

3. Lorsque $d = 2$, $X = (X_1, X_2)$ est dit un **couple aléatoire**.

Vecteur aléatoire réel

Définitions

1. On appelle **vecteur aléatoire (V.a.)** de dimension $d \geq 1$ ou une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ toute application :

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$\omega \mapsto \Big(X_1(\omega), ..., X_d(\omega)\Big)$$

telle que chaque application coordonnée $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $1 \leq i \leq d$, est une variable aléatoire réelle.

2. Un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un d-uplet $(X_1, X_2, ..., X_d)$ des v.a. réelles

3. Lorsque $d = 2$, $X = (X_1, X_2)$ est dit un **couple aléatoire**.

Remarque : On note que X est bien une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ c.à.d $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Lois de probabilité d'un vecteur aléatoire

Proposition

Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_d) : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire alors l'application :

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, 1]$$

définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$$

est une **mesure de probabilité** sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Lois de probabilité d'un vecteur aléatoire

Proposition

Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_d) : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire alors l'application :

$$\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0, 1]$$

définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \in \mathcal{A}$$

est une **mesure de probabilité** sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

☞ Par analogie avec la notion d'une v.a, la notion d'un V.a permet de probabiliser l'espace $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Lois de probabilité d'un vecteur aléatoire

Définitions

1. Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_d), d \geq 1$ un vecteur aléatoire, la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ est appeleé **loi conjointe de** X.

Lois de probabilité d'un vecteur aléatoire

Définitions

1. Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_d), d \geq 1$ un vecteur aléatoire, la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ est appeleé **loi conjointe de** X.
2. On appelle **lois marginales**, les lois $\mathbb{P}_{X_1}, ..., \mathbb{P}_{X_d}$ des v.a. réelles $X_1, X_2, ..., X_d$ (**lois des composantes**).

Lois de probabilité d'un vecteur aléatoire

Définitions

1. Soit $X = (X_1, X_2, ..., X_d), d \geq 1$ un vecteur aléatoire, la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ est appeleé **loi conjointe de** X.
2. On appelle **lois marginales**, les lois $\mathbb{P}_{X_1}, ..., \mathbb{P}_{X_d}$ des v.a. réelles $X_1, X_2, ..., X_d$ (**lois des composantes**).

Remarque : La connaissance des lois marginales ne détermine pas la loi conjointe $\mathbb{P}_X$. Tout va dépendre des "relations" pouvant exister entre les variables composantes $X_1, ..., X_d$.

Fonction de répartition conjointe

Définition

On appelle **fonction de répartition** de $X = (X_1, ..., X_d)$, $d \geq 1$ ou bien **fonction de répartition conjointe**, la fonction $\mathbb{F}_X : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, 1]$ tel que $\forall x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathbb{F}_X(x_1, ..., x_d) = \mathbb{P}\Big(\cap_{i=1}^{d} \{X_i \in]-\infty, x_i]\}\Big) = \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d\Big)$$

Fonction de répartition conjointe

Définition

On appelle **fonction de répartition** de $X = (X_1, ..., X_d), d \geq 1$ ou bien **fonction de répartition conjointe**, la fonction $\mathbb{F}_X : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, 1]$ tel que $\forall x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathbb{F}_X(x_1, ..., x_d) = \mathbb{P}\Big(\cap_{i=1}^{d} \{X_i \in]-\infty, x_i]\}\Big) = \mathbb{P}\Big(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d\Big)$$

Proposition

Soit $X = (X_1, ..., X_d), d \geq 1$ un V.a de fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ alors :

1. $\mathbb{F}_X$ est croissante par rapport à chaque variable.
2. $\forall 1 \leq i \leq d$, on a :

$$\lim_{x_i \to -\infty} \mathbb{F}_X(x_1, ..., x_i, ..., x_d) = 0, \qquad \lim_{x_1 \to +\infty, ..., x_d \to +\infty} \mathbb{F}_X(x_1, ..., x_d) = 1.$$

3. $\mathbb{F}_X$ est continue à droite par rapport à chaque variable $x_1, ..., x_d$
4. $\mathbb{F}_X$ est discontinue en $(x_1, ..., x_d)$ ssi $\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_d = x_d) > 0$.

Fonctions de répartition marginales

Proposition

La fonction de répartition conjointe d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_d)$ détermine les fonctions de répartition $\mathbb{F}_{X_1}, ..., \mathbb{F}_{X_d}$ des variables aléatoires $X_1, ..., X_d$ dites **fonctions de répartition marginales**.
En effet $\forall 1 \leq i \leq d$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{X_i} &= \lim_{x_1 \to +\infty, \ldots, x_{i-1} \to +\infty, x_{i+1} \to +\infty, \ldots x_d \to +\infty} \mathbb{F}_X(x_1, ..., x_d) \\ &= \mathbb{F}_X(+\infty, ..., +\infty, x_i, +\infty ..., +\infty)\end{aligned}$$

Vecteur aléatoire discret

Définition

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ est un **vecteur aléatoire discret** si et seulement si chaque application coordonnée (composante) $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ est une **variable aléatoire discrète**.

Vecteur aléatoire discret

Définition

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ est un **vecteur aléatoire discret** si et seulement si chaque application coordonnée (composante) $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ est une **variable aléatoire discrète**.

Proposition : "Loi conjointe discrète"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire discret, alors la loi conjointe de X est caractérisée par la donnée de :

$$\{\mathbb{P}(X = k), k \in X(\Omega)\}$$

$$\iff \{\mathbb{P}\Big((X_1, ..., X_d) = (k_1, ..., k_d)\Big), \ \forall k = (k_1, ..., k_d) \in (X_1(\Omega), ..., X_d(\Omega))\}$$

avec :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

Vecteur aléatoire discret

Proposition : "Lois marginales discrètes"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire discret, alors $\forall y \in X_1(\Omega)$ la loi marginale de $\mathbb{P}_{X_1}$ de X_1 est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = y) = \sum_{k_2 \in X_2(\Omega)}, ..., \sum_{k_d \in X_d(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = y, X_2 = k_2, ..., X_d = k_d)$$

Vecteur aléatoire discret

Proposition : "Lois marginales discrètes"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire discret, alors $\forall y \in X_1(\Omega)$ la loi marginale de $\mathbb{P}_{X_1}$ de X_1 est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = y) = \sum_{k_2 \in X_2(\Omega)}, ..., \sum_{k_d \in X_d(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = y, X_2 = k_2, ..., X_d = k_d)$$

Remarque :

À partir de la loi conjointe $\mathbb{P}_X$, on pourra également déterminer toutes les lois $\mathbb{P}_{X_i}$ de $X_i, 1 \leq i \leq d$, en permutant 1 par l'indice i dans la proposition ci-dessus.

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Cas d=2 : Un couple aléatoire discret :

Soient X et Y deux v.a. réelles discrètes, alors on a :

1. $\sum_{i\in X(\Omega)} \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = 1$
2. Les lois marginales $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ sont données par :

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

3. La fonction de répartition $\mathbb{F}_{(X,Y)}$ est donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{F}_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{i\in X(\Omega)|i\leq x} \sum_{j\in Y(\Omega)|j\leq y} \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Exemple 1 :

Si on considère un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$. De plus on se donne la loi conjointe de ce couple à l'aide du tableau suivant où la valeur de α est un réel à déterminer :

$\mathbb{P}(X = i, Y = j)$	$j = -1$	$j = 1$	$j = 2$
$i = -2$	0.2	0.2	α
$i = 0$	0.1	0.1	0.05
$i = 1$	0.2	0	0.1

Comme la loi conjointe de (X, Y) est une loi de probabilité, alors :

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 0,2 \times 3 + 0,1 \times 3 + 0.05 + \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0.05$$

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Exemple 1

Si on voulais connaître la loi de la v.a.r X, il suffit d'appliquer la formule (on pourra également lire le tableau directement) :

$$
\begin{aligned}
* \, \mathbb{P}(X=-2) &= \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=-2, Y=j) \\
&= \mathbb{P}(X=-2, Y=-1) + \mathbb{P}(X=-2, Y=1) + \mathbb{P}(X=-2, Y=2) \\
&= 0.2 + 0.2 + 0.05 \\
&= 0.45
\end{aligned}
$$

$$
* \, \mathbb{P}(X=0) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=0, Y=j) = 0.1 + 0.1 + 0.05 = 0.25
$$

$$
* \, \mathbb{P}(X=1) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=1, Y=j) = 0.1 + 0.2 = 0.3
$$

La même chose pour déterminer la seconde loi marginale $\mathbb{P}_Y$.

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Exercice 1

Soit N le nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il suit $\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$ et qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0, 1[$, cepandant la probabilité que ça soit un garçon est $q = 1 - p$.
On suppose que les sexes de naissance successives sont indépendants.
On note X la v.a correspond au nombre de filles par famille, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe de (N, X).
2. Endéduire la loi de X et de Y.

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Solution de l'exercice 1

❶ Pour un nombre de naissnace fixé $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de filles suit une loi Binomiale des paramètres n et p c.à.d :

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Solution de l'exercice 1

❶ Pour un nombre de naissnace fixé $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de filles suit une loi Binomiale des paramètres n et p c.à.d :

$$\mathbb{P}(X = k | N = n) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k} & , \quad \text{si } k \leq n \\ 0 & , \quad \text{si } k > n \end{cases}$$

D'où on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n, X = k) &= \mathbb{P}(X = k | N = n) \times \mathbb{P}(N = n) \\ &= C_n^k p^k q^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Loi discrète d'un couple (X, Y)

Solution de l'exercice 1

❷ À partir de la loi conjointe, on trouve que la loi marginale de X est comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n\geq k} \mathbb{P}(X=k, N=n) \\
&= \sum_{n\geq k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m q^m}{(m)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p^k}{k!} e^{\lambda q} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \frac{(\lambda p)^k}{k!} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Ainsi X suit la loi de poisson de paramètre λp. De même, on pourra montrer que Y suit la loi de poisson de paramètre λq.

Vecteur aléatoire continu

Définition : "Loi conjointe continue"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire. On dit que sa loi conjointe $\mathbb{P}_X$ est **continue** s'il existe une fonction réelle $f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, tels que :

1. $f \geq 0$ et mesurable.
2. f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, ..., x_d) dx_1 ... dx_d = 1$$

La fonction f est appelée la **densité de loi de probabilité** de X.
Par la suite, le vecteur $X = (X_1, ..., X_d)$ est dit **continu**.

Vecteur aléatoire continu

Proposition

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un V.a continu de fonction de répartition $\mathbb{F}_X$ et de densité f_X, alors :

1. $\forall (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\mathbb{F}_X(x_1, ..., x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_d} f_X(y_1, ..., y_d) dy_1 ... dy_d$$

2. $\mathbb{F}_X$ est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et tel que $\forall (x_1, ..., x_d)$ où f_X est continue on a :

$$f_X(x_1, ..., x_d) = \frac{\partial^d \mathbb{F}_X}{\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_d}}(x_1, ..., x_d)$$

Lois marginales continues

Proposition : "Densités marginales"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un V.a continu de fonction densité f_X, alors $\forall 1 \leq i \leq d$, la v.a.r $X_!$ a pour densité :

$$f_{X_i}(u) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(x_1, x_2, .., x_{i-1}, u, x_{i+1}, ..., x_d) dx_1 ... d_{x\,d}, \ \forall u \in \mathbb{R}$$

Lois marginales continues

Proposition : "Densités marginales"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un V.a continu de fonction densité f_X, alors $\forall 1 \leq i \leq d$, la v.a.r $X_!$ a pour densité :

$$f_{X_i}(u) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(x_1, x_2, .., x_{i-1}, u, x_{i+1}, ..., x_d) dx_1 ... d_{x\,d}, \; \forall u \in \mathbb{R}$$

Remarques :

☞ À partir de la densité conjointe du vecteur X, on pourra déterminer les densités marginales.

Lois marginales continues

Proposition : "Densités marginales"

Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un V.a continu de fonction densité f_X, alors $\forall 1 \leq i \leq d$, la v.a.r $X_!$ a pour densité :

$$f_{X_i}(u) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(x_1, x_2, .., x_{i-1}, u, x_{i+1}, ..., x_d) dx_1 ... d_{xd}, \ \forall u \in \mathbb{R}$$

Remarques :

☞ À partir de la densité conjointe du vecteur X, on pourra déterminer les densités marginales.
☞ La réciproque est fausse.

Loi continue d'un couple (X, Y)

Cas d=2 : Un couple aléatoire continu :

1. La loi conjointe de (X, Y) est dite continue s'elle admet une densité $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(y_1, y_2) d_{y_1} dy_2$$

3. $\mathbb{F}_{(X,Y)}$ est dérivable presque partout sur $\mathbb{R}^2$ et tel que $\forall (x, y)$ où $f_{(X,Y)}$ est continue on a :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{\partial^2 \mathbb{F}_{(X,Y)}}{\partial_x \partial_y}(x, y)$$

4. $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy$ et $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx$.

Loi continue d'un couple (X, Y)

Exemple 2 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité suivante :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

alors la densité de X et celle de Y sont :

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-x^2}{2}} \times \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \end{aligned}$$

D'où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et par le même calcul, on montre aussi que $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Loi continue d'un couple (X, Y)

Exercice 2 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la densité conjointe est la suivante :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-(x+y)} 1_{[0,+\infty[}(x) \times 1_{[0,+\infty[}(y)$$

Déterminer la loi de X et de Y.

Loi continue d'un couple (X, Y)

Solution de l'exercice 2 :

On a :

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+y)} 1_{[0,+\infty[}(x) \times 1_{[0,+\infty[}(y)dy \\ &= e^{-x} 1_{[0,+\infty[(x)} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x)[-e^{-y}]_0^{+\infty} = e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x). \end{aligned}$$

De même pour le calcul de la loi de Y, on trouve :

$$f_Y(y) = e^{-y} 1_{[0,+\infty[}(y)$$

Loi continue d'un couple (X, Y)

Solution de l'exercice 2 :

On a :

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+y)} 1_{[0,+\infty[}(x) \times 1_{[0,+\infty[}(y)dy \\ &= e^{-x} 1_{[0,+\infty[(x)} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x)[-e^{-y}]_0^{+\infty} = e^{-x} 1_{[0,+\infty[}(x). \end{aligned}$$

De même pour le calcul de la loi de Y, on trouve :

$$f_Y(y) = e^{-y} 1_{[0,+\infty[}(y)$$

$\Rightarrow X$ et Y suivent la loi $\mathcal{E}(1)$.

Théorème de transfert

Théorème : "Théorème de transfert"

Soient $X = (X_1, ..., X_d)$ un V.a et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors $g(X_1, ..., X_d)$ est une v.a réelle.

1. Si la v.a X est **discrète** et $\mathbb{E}(g(X)) \leq \infty$ alors on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega) \cdots x_d \in X_d(\Omega)} g(x_1, \cdots, x_d) \mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_d = x_d)$$

Théorème de transfert

Théorème : "Théorème de transfert"

Soient $X = (X_1, ..., X_d)$ un V.a et $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors $g(X_1, ..., X_d)$ est une v.a réelle.

1. Si la v.a X est **discrète** et $\mathbb{E}(g(X)) \leq \infty$ alors on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega) \cdots x_d \in X_d(\Omega)} g(x_1, \cdots, x_d)\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_d = x_d)$$

2. Si la v.a X est **absolument continue** et $\mathbb{E}(g(X)) \leq \infty$ alors on a :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty}, ..., \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx_1, ..., dx_d$$

Espérance d'un vecteur aléatoire

Définition

Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un V.a telles que les v.a réelles $X_1, \cdots, X_d$ admettent des espérences finies. On appelle **espérance** du vecteur X le vecteur de $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \cdots, \mathbb{E}(X_d)).$$

Espérance d'un vecteur aléatoire

Définition

Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un V.a telles que les v.a réelles $X_1, \cdots, X_d$ admettent des espérences finies. On appelle **espérance** du vecteur X le vecteur de $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \cdots, \mathbb{E}(X_d)).$$

Remarque :

Réellement notre vecteur X il s'écrit : $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix}$ et par la suite

$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_d) \end{pmatrix}$ mais par abus de notation on utilise fréquemment les écritures de transposé).

Covariance de deux v.a.réelles

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Covariance de deux v.a.réelles

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si $cov(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées.**

Covariance de deux v.a.réelles

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si $cov(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées.**

Proposition

Soient X et Y deux v.a réelles admettant des moments d'ordre 2, alors

1. $cov(aX + b, cY + d) = ac \;\; cov(X, Y)$ pour tout réels a, b, c et d.

Covariance de deux v.a.réelles

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si $cov(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées.**

Proposition

Soient X et Y deux v.a réelles admettant des moments d'ordre 2, alors

1. $cov(aX + b, cY + d) = ac \;\; cov(X,Y)$ pour tout réels a, b, c et d.
2. $cov(X + Y, Z) = cov(X,Z) + cov(Y,Z)$

Covariance de deux v.a.réelles

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de X et Y** le réel :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si $cov(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées.**

Proposition

Soient X et Y deux v.a réelles admettant des moments d'ordre 2, alors

1. $cov(aX+b, cY+d) = ac\ \ cov(X,Y)$ pour tout réels a, b, c et d.
2. $cov(X+Y,Z) = cov(X,Z) + cov(Y,Z)$
3. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

Covariance de deux v.a.réelles

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de** X **et** Y le réel :

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si $cov(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées.**

Proposition

Soient X et Y deux v.a réelles admettant des moments d'ordre 2, alors

1. $cov(aX + b, cY + d) = ac\ \ cov(X,Y)$ pour tout réels a, b, c et d.
2. $cov(X + Y, Z) = cov(X,Z) + cov(Y,Z)$
3. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
4. $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2cov(X,Y)$.

Matrice de covariance d'un vecteur aléatoire

Définition

Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un V.a telles que les v.a réelles $X_1, \cdots, X_d$ admettent des moments d'ordre 2.
On appelle **matrice de covariance** la matrice réelle d'ordre d définie par :

$$\Sigma_X = (cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq d}$$

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} cov(X_1, X_1) = \mathbb{V}(X_1) & \cdots & cov(X_1, X_d) \\ cov(X_2, X_1) & \cdots & cov(X_2, X_d) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ cov(X_d, X_1) & \cdots & \mathbb{V}(X_d) = cov(X_d, X_d) \end{pmatrix}$$

Matrice de covariance d'un vecteur aléatoire

Définition

Soit $X = (X_1, \cdots, X_d)$ un V.a telles que les v.a réelles $X_1, \cdots, X_d$ admettent des moments d'ordre 2.
On appelle **matrice de covariance** la matrice réelle d'ordre d définie par :

$$\Sigma_X = (cov(X_i, X_j))_{1 \le i,j \le d}$$

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} cov(X_1, X_1) = \mathbb{V}(X_1) & \cdots & cov(X_1, X_d) \\ cov(X_2, X_1) & \cdots & cov(X_2, X_d) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ cov(X_d, X_1) & \cdots & \mathbb{V}(X_d) = cov(X_d, X_d) \end{pmatrix}$$

Remarque : En utilisant l'écriture matricielle, on pourra re-écrire cette matrice : $\Sigma_X = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))^t\Big) = \mathbb{E}(XX^t) - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X))^t$ où $X^t \in \mathcal{M}_{1,d}$ est la transposée du vecteur $X \in \mathcal{M}_{d,1}$.

Matrice de covariance d'un vecteur aléatoire

Conséquences

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ un V.a de matrice de covariances Σ_X. Alors

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Sigma_{\alpha X} = \alpha^2 \Sigma_X$.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma_{u+X} = \Sigma_X$.
3. $(\Sigma_X)^t = \Sigma_X$ (i.e matrice symétrique).
4. Σ_X est semi-définie positive (i.e ses valeurs propres sont positives ou nulles).
5. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{q\times d}$ et Y une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ tel que $Y = AX$, alors
$$\Sigma_Y = A\Sigma_X A^t$$

Matrice de covariance d'un vecteur aléatoire

Conséquences

Soit $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)$ un V.a de matrice de covariances Σ_X. Alors

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Sigma_{\alpha X} = \alpha^2 \Sigma_X$.
2. Pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma_{u+X} = \Sigma_X$.
3. $(\Sigma_X)^t = \Sigma_X$ (i.e matrice symétrique).
4. Σ_X est semi-définie positive (i.e ses valeurs propres sont positives ou nulles).
5. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{q\times d}$ et Y une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ tel que $Y = AX$, alors
$$\Sigma_Y = A\Sigma_X A^t$$

Proposition

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_d$ n v.a réelles admettant des moments d'ordre 2, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_d) = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq d} cov(X_i, X_j)$$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit $V = (X, Y)$ un couple aléatoire tel que les v.a.r X et Y ademettent des moments d'ordre 2 alors :

1. $\mathbb{E}(V) = \Big(\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)\Big)$
2. $$\Sigma_V = \begin{pmatrix} cov(X,X) = \mathbb{V}(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & cov(Y,Y) = \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}$$
3. $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2cov(X,Y)$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Exercice 3 :

Soit $a \in \mathbb{R}$, et soient $X \in \{0,1\}$ et $Y \in \{0,1\}$ deux variables aléatoires telles que :

$$\mathbb{P}((X,Y) = (0,0)) = \frac{1}{6} + a; \ \mathbb{P}((X,Y) = (1,0)) = \frac{1}{3} - a$$

$$\mathbb{P}((X,Y) = (0,1)) = \frac{1}{2} - a; \ \mathbb{P}((X,Y) = (1,1)) = a$$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Exercice 3 :

Soit $a \in \mathbb{R}$, et soient $X \in \{0, 1\}$ et $Y \in \{0, 1\}$ deux variables aléatoires telles que :

$$\mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) = \frac{1}{6} + a;\ \mathbb{P}((X, Y) = (1, 0)) = \frac{1}{3} - a$$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{2} - a;\ \mathbb{P}((X, Y) = (1, 1)) = a$$

1. Montrer que $a \in [0, \frac{1}{3}]$.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer le vecteur espérance ainsi que la matrice de covariance du couple (X, Y).

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Solution de l'exercice 3 :

1. Comme les 4 expressions représentent des probabilitités, alors forcément chacunes d'entre elle $\in [0, 1]$ (déjà la somme vaut 1 $\forall a \in \mathbb{R}$).
$\Rightarrow a \in [\frac{-1}{6}, \frac{5}{6}]$ et $a \in [\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}]$ et $a \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $a \in [0, 1] \Rightarrow a \in [0, \frac{1}{3}]$.

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Solution de l'exercice 3 :

1. Comme les 4 expressions représentent des probabilitités, alors forcément chacunes d'entre elle $\in [0, 1]$ (déjà la somme vaut 1 $\forall a \in \mathbb{R}$).
$\Rightarrow a \in [\frac{-1}{6}, \frac{5}{6}]$ et $a \in [\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}]$ et $a \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $a \in [0, 1] \Rightarrow a \in [0, \frac{1}{3}]$.
2. La loi de X est donnée par :
   - $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) + \mathbb{P}((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{6} + a + \frac{1}{2} - a = \frac{2}{3}$
   - $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}((X, Y) = (1, 0)) + \mathbb{P}((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{3} - a + a = \frac{1}{3}$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Solution de l'exercice 3 :

1. Comme les 4 expressions représentent des probabilitités, alors forcément chacunes d'entre elle $\in [0,1]$ (déjà la somme vaut 1 $\forall a \in \mathbb{R}$).
$\Rightarrow a \in [\frac{-1}{6}, \frac{5}{6}]$ et $a \in [\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}]$ et $a \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $a \in [0,1] \Rightarrow a \in [0, \frac{1}{3}]$.
2. La loi de X est donnée par :
   - $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((X,Y)=(0,0)) + \mathbb{P}((X,Y)=(0,1)) = \frac{1}{6} + a + \frac{1}{2} - a = \frac{2}{3}$
   - $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}((X,Y)=(1,0)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,1)) = \frac{1}{3} - a + a = \frac{1}{3}$

   La loi de Y est donnée par :
   - $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}((X,Y)=(0,0)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,0)) = \frac{1}{6} + a + \frac{1}{3} - a = \frac{1}{2}$
   - $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}((X,Y)=(1,1)) + \mathbb{P}((X,Y)=(0,1)) = a + \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2}$
3. On pose $V = (X, Y)$, alors calculons $\mathbb{E}(Z)$ et Σ_Z
   - $\mathbb{E}(X) = 0\mathbb{P}(X=0) + 1\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0\mathbb{P}(Y=0) + 1\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$$

   - $\mathbb{E}(X^2) = 0\mathbb{P}(X=0) + 1^2\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Solution de l'exercice 3 :

$$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Calcul de covariance : $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Solution de l'exercice 3 :

$$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Calcul de covariance : $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
or,

$$\mathbb{E}(XY) = 0\mathbb{P}\Big((X, Y) = (0, 0)\Big) + 0\mathbb{P}\Big((X, Y) = (0, 1)\Big)$$

$$+0\mathbb{P}\Big((X, Y) = (1, 0)\Big) + 1\mathbb{P}\Big((X, Y) = (1, 1)\Big) = a$$

Moments d'un couple aléatoire (X, Y)

Solution de l'exercice 3 :

$$\Rightarrow \mathbb{V}(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Calcul de covariance : $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
or,

$$\mathbb{E}(XY) = 0\mathbb{P}\Big((X, Y) = (0,0)\Big) + 0\mathbb{P}\Big((X, Y) = (0,1)\Big)$$
$$+0\mathbb{P}\Big((X, Y) = (1,0)\Big) + 1\mathbb{P}\Big((X, Y) = (1,1)\Big) = a$$

$$\Rightarrow cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = a - \frac{1}{6}$$

Donc

$$\Sigma_Z = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & a - \frac{1}{6} \\ a - \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Formule de changement de variable

Il s'agit ici d'apprendre à déterminer dans le cas d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_d)$ à **densité**, et pour une application (qui vérifie certaines conditions) donnée par :

$$\begin{aligned} g \quad &: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ &x = (x_1, ..., x_d) \mapsto g(x) = \Big(g_1(x_1, ..., x_d), ..., g_d(x_1, ..., x_d)\Big) \end{aligned}$$

la loi du vecteur aléatoire $Y = g(X)$.

Définition

Si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, et g une fonction de U dans V, on dit que g est un C^k-**difféomorphisme**, $k > 0$, si g est **bijective** et si g **et** g^{-1} **sont de classe** C^k.

Formule de changement de variable

Formule de changement de variable

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire de **densité** f_X.
Soit $g = (g_1, ..., g_d)$ un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ sur l'ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$, alors la densité f_Y du vecteur $Y = g(X)$ est donnée $\forall y = (y_1, ..., y_d)$ par :

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) |J(g^{-1}(y))| \, \mathbf{1}_V(y)$$

où $g^{-1} = (g_1^{-1}, ..., g_d^{-1})$ est l'application réciproque de g et $J(g^{-1}(y))$ est le déterminant de la matrice des coefficients $\left(\frac{\partial g_j^{-1}}{\partial y_k}\right)_{1 \leq j,k \leq d}$, appelé jacobien de g^{-1} et donné par :

$$J(g^{-1}(y)) = det\left(\frac{\partial g_j^{-1}}{\partial y_k}\right)_{1 \leq j,k \leq d} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1}(y_1, \ldots, y_d) & \ldots & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_d}(y_1, \ldots, y_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_d^{-1}}{\partial y_1}(y_1, \ldots, y_d) & \ldots & \frac{\partial g_d^{-1}}{\partial y_d}(y_1, \ldots, y_d) \end{vmatrix}$$

Formule de changement de variable

Cas d=2 : Un couple aléatoire

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple aléatoire de **densité** f_X.
Soit $g = (g_1, g_2)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ sur l'ouvert $V \subset \mathbb{R}^2$, alors la densité f_Y du vecteur $Y = g(X)$ est donnée $\forall y = (y_1, y_2)$ par :

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) |J(g^{-1}(y))| \, \mathbf{1}_V(y)$$

où

$$J(g^{-1}(y)) = det\left(\frac{\partial g_j^{-1}}{\partial y_k}\right)_{1 \leq j,k \leq 2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_2}(y_1, y_2) \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{vmatrix}$$

Formule de changement de variable

Exemple 3 :

Soit (X, Y) un couple aléatoire qui a pour densité :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\Big),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On veut déterminer la densité du couple $\Big(U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}, V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\Big)$. Alors la fonction g considérée est définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = \Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)$$

g est bien un C^1-difféomorphisme. Déterminons maintenant l'expression de son inverse g^{-1} et trouve que :

$$\left\{\begin{array}{ll} u & = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ v & = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{2x}{\sqrt{2}} & = u + v \\ \frac{2y}{\sqrt{2}} & = u - v \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \\ y & = \frac{u-v}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Ainsi $J_{g^{-1}}$ le jacobien de g^{-1} est :

Formule de changement de variable

Suite de l'exemple 3 :

$$J(g^{-1}(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

On applique alors le théorème de changement de variable, et par la suite la densité du couple (U, V) est la suivante :

$$\begin{aligned} f_{(U,V)} &= f_{(X,Y)}(g^{-1}(u,v)) \times |J(g^{-1}(u,v))| \times \mathbf{1}_{Img}(u,v) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2}[(\frac{u+v}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{u-v}{\sqrt{2}})^2]\Big) \times |-1| \times \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}(u,v) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\Big(-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\Big)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}(u,v) \end{aligned}$$

où Img désigne l'image de $\mathbb{R}^2$ par l'application g.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Proposition

Soient $X_1, \cdots, X_d$ des v.a réelles **indépendantes** et $h_1, \cdots, h_d$ des fonctions réelles mesurables, alors les v.a. réelles :

$$h_1(X_1), \cdots, h_d(X_d) \ \ \textbf{sont indépendantes}$$

Vecteur aléatoire - Indépendance

Proposition

Soient $X_1, \cdots, X_d$ des v.a réelles **indépendantes** et $h_1, \cdots, h_d$ des fonctions réelles mesurables, alors les v.a. réelles :

$$h_1(X_1), \cdots, h_d(X_d) \;\; \textbf{sont indépendantes}$$

Pour montrer dorénavant l'indépendance des v.a. on utilise souvent les résultats suivants :

Vecteur aléatoire - Indépendance

Proposition

Soient $X_1, \cdots, X_d$ des v.a réelles **indépendantes** et $h_1, \cdots, h_d$ des fonctions réelles mesurables, alors les v.a. réelles :

$$h_1(X_1), \cdots, h_d(X_d) \ \textbf{ sont indépendantes}$$

Pour montrer dorénavant l'indépendance des v.a. on utilise souvent les résultats suivants :

Indépendance - Fonction de répartition conjointe

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire de **fonction de répartition conjointe** $\mathbb{F}_X$, alors les v.a. $X_1, \cdots, X_d$ sont indépendantes ssi

$$\forall (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \ \ \mathbb{F}_X(x_1, \cdots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{F}_{X_i}(x_i)$$

où $\forall 1 \leq i \leq d$, $\mathbb{F}_{X_i}$ est la fonction de répartition (marginale) de X_i.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Indépendance - Vecteur discret

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire **discret** de loi de **probabilité conjointe** $\mathbb{P}_X$, alors les v.a. discrètes $X_1, \cdots, X_d$ sont indépendantes ssi $\forall k = (k_1, \cdots, k_d) \in X(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}_X(X_1 = k_1, \cdots, X_d = k_d) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}_{X_i}(X_i = k_i)$$

$\forall 1 \leq i \leq d$, $\mathbb{P}_{X_i}$ est la loi de probabilité (marginale) de la v.a discrète X_i.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Indépendance - Vecteur à densité

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire **continu** de **densité conjointe** f_X, alors les v.a. continues $X_1, \cdots, X_d$ sont indépendantes ssi $\forall x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$f_X(x_1, \cdots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}(x_i)$$

$\forall 1 \leq i \leq d,\ f_{X_i}$ est la densité (marginale) de la v.a continue X_i.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Exercice 4 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ tq la densité conjointe est donnée par :

$$f_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x, y)$$

Vecteur aléatoire - Indépendance

Exercice 4 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ tq la densité conjointe est donnée par :

$$f_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x, y)$$

Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Vecteur aléatoire - Indépendance

Exercice 4 :

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1] \times [-1,1]$ tq la densité conjointe est donnée par :

$$f_{(X,Y)} = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x, y)$$

Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution de l'exercice 4 :

Comme $f_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x,y) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \times \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(y) = f_X(x) \times f_Y(y)$ alors X et Y sont indépendantes, avec f_X est bien la densité de X, ainsi que f_Y est la densité de Y.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Indépendance - vecteur espérence

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire tq les v.a. $X_1, \cdots, X_d$ sont indépendantes alors on a :

$$\mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^{d} X_i\Big) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{E}(X_i)$$

Vecteur aléatoire - Indépendance

Indépendance - vecteur espérence

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire tq les v.a. $X_1, \cdots, X_d$ sont indépendantes alors on a :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{d} X_i\right) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{E}(X_i)$$

Conséquences

Vecteur aléatoire - Indépendance

Indépendance - vecteur espérence

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur aléatoire tq les v.a. $X_1, \cdots, X_d$ sont indépendantes alors on a :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{d} X_i\right) = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{E}(X_i)$$

Conséquences

Indépendance - Corrélation

Soient $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r **indépendantes**, qui admettent tous des moments d'ordre 2, alors :

$$cov(X_i, X_j) = 0, \ \forall 1 \leq i, j \leq d$$

Vecteur aléatoire - Indépendance

Remarques :

☞ On pourra dire que les deux v.a X_i et X_j sont **non corrélées** ou **décorrélées**.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Remarques :

- On pourra dire que les deux v.a X_i et X_j sont **non corrélées** ou **décorrélées**.
- La réciproque est fausse : $cov(X_i, X_j) = 0 \not\Rightarrow X_i \coprod Y_j$.

Un contre exemple :

Soit $X \sim \mathcal{U}([-1, 1])$, alors $cov(X, X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0$.
Cependant X et X^2 ne sont pas indépendantes.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Remarques :

☞ On pourra dire que les deux v.a X_i et X_j sont **non corrélées** ou **décorrélées**.
☞ La réciproque est fausse : $cov(X_i, X_j) = 0 \not\Rightarrow X_i \coprod Y_j$.

Un contre exemple :

Soit $X \sim \mathcal{U}([-1, 1])$, alors $cov(X, X^2) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) = 0$.
Cependant X et X^2 ne sont pas indépendantes.

☞ La matrice de covariance de $X = (X_1, \dots, X_d)$ est diagonale.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Indépendance - Variance

Soient $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r **indépendantes**, qui admettent tous des moments d'ordre 2, alors :

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_d) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$$

Vecteur aléatoire - Indépendance

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit (X, Y) un couple aléatoire, X et Y sont indépendantes

1. ssi $\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x) \times \mathbb{F}_Y(y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit (X, Y) un couple aléatoire, X et Y sont indépendantes

1. ssi $\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x) \times \mathbb{F}_Y(y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. ssi $\mathbb{P}(X = k_1, Y = k_2) = \mathbb{P}(X = k_1) \times \mathbb{P}(Y = k_2),\ \forall (k_1, k_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit (X, Y) un couple aléatoire, X et Y sont indépendantes

1. ssi $\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x) \times \mathbb{F}_Y(y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. ssi $\mathbb{P}(X = k_1, Y = k_2) = \mathbb{P}(X = k_1) \times \mathbb{P}(Y = k_2), \ \forall (k_1, k_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
3. ssi $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit (X, Y) un couple aléatoire, X et Y sont indépendantes

1. ssi $\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x) \times \mathbb{F}_Y(y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. ssi $\mathbb{P}(X = k_1, Y = k_2) = \mathbb{P}(X = k_1) \times \mathbb{P}(Y = k_2), \ \forall (k_1, k_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
3. ssi $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit (X, Y) un couple aléatoire, X et Y sont indépendantes

1. ssi $\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x) \times \mathbb{F}_Y(y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. ssi $\mathbb{P}(X = k_1, Y = k_2) = \mathbb{P}(X = k_1) \times \mathbb{P}(Y = k_2),\ \forall (k_1, k_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
3. ssi $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.
5. alors $cov(X, Y) = 0$.

Vecteur aléatoire - Indépendance

Cas d=2 : Un couple aléatoire :

Soit (X, Y) un couple aléatoire, X et Y sont indépendantes

1. ssi $\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x) \times \mathbb{F}_Y(y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. ssi $\mathbb{P}(X = k_1, Y = k_2) = \mathbb{P}(X = k_1) \times \mathbb{P}(Y = k_2),\ \forall (k_1, k_2) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
3. ssi $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.
5. alors $cov(X, Y) = 0$.
6. alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

- J.Jacod et P.Protter : Probability essentials. Springer 2000.
- Laurent Rouvière : Probabilités générales, Université de Rennes 1.