Cours de Graphes & Applications (G&A)

Chapitre 4 : Arbre couvrant à poids minimal

Nehla DEBBABI

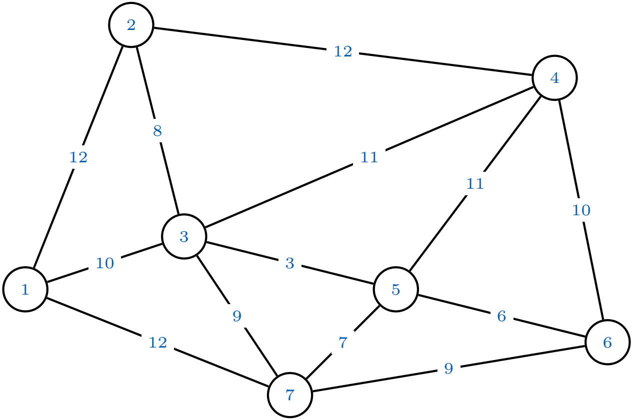
Année Universitaire : 2021-2022

5 octobre 2023

Plan

1. Introduction
   - Motivation
   - Définitions & propriétés
2. Algorithme de Kruskal
3. Algorithme de Prim
4. Applications

Château d'eau



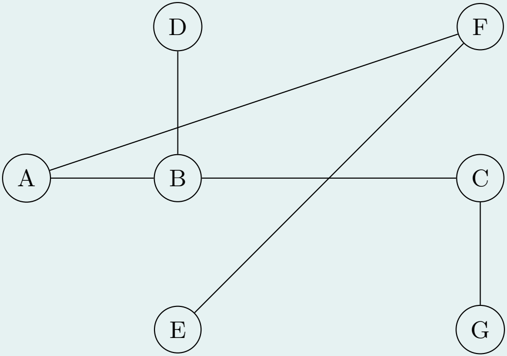
- L'objectif est de desservir, au moindre coût, un ensemble de villages (sommets) en eau potable à partir d'un château d'eau placé dans le village 4. Les coûts d'installation des canalisations pour transporter l'eau entre deux villages sont donnés sur le graphe.

Définitions

Définition d'un arbre

Un arbre est un graphe non orienté, connexe, et acyclique (sans cycle).

Exemple :

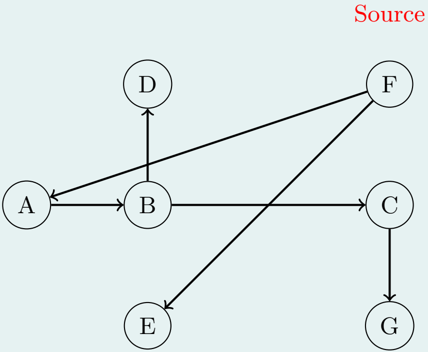


Définitions

Définition d'un arborescence

Une arborescence est un graphe orienté possédant un sommet priviligié, la racine, tel qu'il existe un et un seul chemin depuis la racine à tout autre sommet.

Exemple : La source est F.



Propriétés

Théorème

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple non-orienté avec $card(X) = n$ et $card(A) = m$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est un arbre.
- G est connexe et est composé de $n-1$ arêtes ($m = n-1$).
- G est sans cycle et à $n-1$ arêtes.
- G est sans boucles et entre n'importe quel couple de sommets différents il existe une seule chaine reliant ces deux derniers.

Propriétés

Théorème

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple non-orienté avec $card(X) = n$ et $card(A) = m$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est un arbre.
- G est connexe et est composé de $n - 1$ arêtes ($m = n - 1$).
- G est sans cycle et à $n - 1$ arêtes.
- G est sans boucles et entre n'importe quel couple de sommets différents il existe une seule chaine reliant ces deux derniers.

Propriété

Un graphe G est un arbre, si et seulement si :

- G est connexe et si on lui retire une arête, il n'est plus connexe.
- G est sans cycle et si on lui rajoute une arête, on forme un cycle.

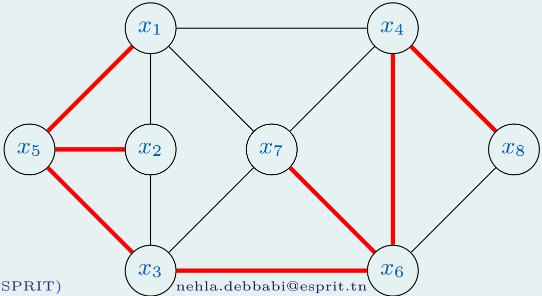
Définitions

Définition d'un arbre couvrant

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple non-orienté avec $card(X) = n$ et $card(A) = m$. Un arbre couvrant de G est un sous graphe $T = (X, A')$ $(A' \subset A)$ de G qui est un arbre. On a alors :

- $\forall x \in X$, $\exists a \in A'$ telle que l'arête a est incidente au sommet x.
- T ne contient pas de cycle.

Exemple :

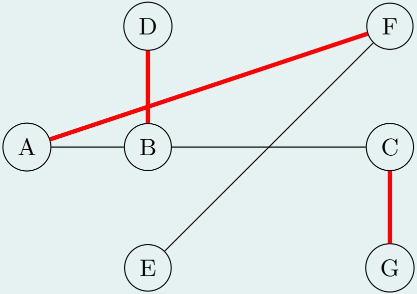


Définitions

Définition d'un co-cycle

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple non-orienté. Un co-cycle d'un ensemble $S \subset X$ de sommets de X est l'ensemble des arêtes (u, v) incidentes aux sommets de S telles que $u \in S$ et $v \in X/S$.

Exemple : Le sous-ensemble des arêtes $\{(A, F), (B, D), (C, G)\} \subset A$ est un co-cycle du sous-ensemble $S = \{A, B, C\}$ de X.



Objectif du chapitre

- Objectif du chapitre : Déterminer un arbre couvrant à poids minimal (la somme des poids associés aux arêtes est minimal).
- Quelques applications :
  - Connectivité d'un réseau informatique / communication / électricité / TV / .....
  - Problème de voyageur de commerce.

Plan

Pseudo-code de l'algorithme de Kruskal

Pseudo-code

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple non-orienté avec $card(X) = n$ et $card(A) = m$.

Initialisation :

- $T = \emptyset$
- Ordonner les arêtes par ordre croissant des poids telles que :

$$\mathcal{C}(a_1) \leq \mathcal{C}(a_2) \leq \cdots \leq \mathcal{C}(a_m)$$

  les a_i désignent les arêtes $1 \leq i \leq m$.

Procedure itérative :

- $j = 0$
- Pour i de 1 à m faire
- Tant que $j < n - 1$ faire
- Si $T \cup \{a_i\}$ ne contient pas de cycle faire
- $T \leftarrow T \cup \{a_i\}$ et $j \leftarrow j + 1$
- Fin si
- Fin tant que
- Fin pour

Plan

Pseudo-code de l'algorithme de Prim

Pseudo-code

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple non-orienté avec $card(X) = n$ et $card(A) = m$. On désigne par $\mathcal{CC}(X_T)$ le co-cycle de X_T.

Objectif : On chercher à construire l'arbre couvrant $T = (X_T, A_T)$ avec $X_T = X$ et $A_T \subset A$. Initialisation :

- $T = (X_T, A_T)$ avec $X_T = \{x_1\}$ et $A_T = \emptyset$

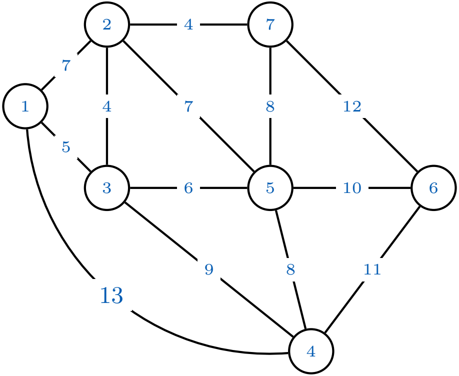
Procedure itérative :

- Tant que $|X_T| < |X|$ faire
  - Déterminer $a = (u, v) \in \mathcal{CC}(X_T)$ de poids minimal ($u \in X_T$ et $v \in X/X_T$).
  - $X_T \leftarrow X_T \cup v$: ajouter v à X_T
  - $A_T \leftarrow A_T \cup a$: ajouter a à A_T
- Fin tant que

Plan

Application 1

Une commune veut offrir des possibilités de connexion à haut débit par câble dans ses nouveaux lotissements. Les liaisons envisageables entre les lotissements (numéroté de 1 à 7), ainsi que les estimations des coûts de construction sont donnés sur le graphe ci-dessous. Seul le lotissement numéro 1 est relié au réseau à haut débit.



- Déterminer les liaisons à mettre en place de manière à connecter tous les lotissements au réseau tout en minimisant les coûts de construction.

Application 2

Une banque désire installer, au moindre coût, un réseau de transmission de données entre son siège central et sept de ses agences. Il s'agit d'un réseau composé de lignes privées point à point. Le coût de construction d'une ligne entre deux agences est donné par le tableau suivant (en unités monétaires). On notera l'agence i par $Ag(i)$.

	Siège	$Ag(1)$	$Ag(2)$	$Ag(3)$	$Ag(4)$	$Ag(5)$	$Ag(6)$	$Ag(1)$
Siège	–							
$Ag(1)$	5	–						
$Ag(2)$	18	17	–					
$Ag(3)$	9	11	27	–				
$Ag(4)$	13	7	23	20	–			
$Ag(5)$	7	12	15	15	15	–		
$Ag(6)$	38	38	20	40	40	35	–	
$Ag(7)$	22	15	25	25	30	10	45	–

Remarque : le coût de construction entre deux agences I et j est symétrique, $1 \leq i, j \leq 7$.

Application 2

- Construire le graphe représentant le siège, les agences, les liens et les coûts correspondants.
- A quel problème de théorie des graphes, ce problème se ramène-t-il ?
- Donner la solution optimale.

Application 3

Un document produit en anglais doit être traduit en français, allemand, espagnol et italien. Les coûts de traduction (qui sont symétriques) sont indiqués sur le tableau ci-dessous, en milliers de dinars :

	Allemand	Anglais	Espagnol	Français	Italien
Allemand	–	3	8	6	7
Anglais	3	–	4	3	6
Espagnol	8	4	–	2	3
Français	6	3	2	–	2
Italien	7	6	3	2	–

On cherche à minimiser le coût de traduction total. Pour cela on s'autorise à traduire de manière séquentielle le document (par exemple de l'anglais à l'italien et au français, puis de l'italien à l'allemand et l'espagnol).

Application 3

- Construire le graphe modélisant ce contexte.
- A quel problème de théorie des graphes, ce problème se ramène-t-il ?
- Déterminer une solution qui minimise le coût total. Expliquer votre démarche et préciser les étapes intermédiaires de votre résolution.
- Déterminer le coût total de traduction.