Barème Examen Stat ALT A3

1

Ex 1 7 pts

Ex 1	
1/ :	2 pts
2/	3,5 pts
3/	1,5 pts.

1/ X_i : "volume de la $i^{ème}$ bouteille tirée"

1,5

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0{,}05$ (connu).

Estimateur : $\overline{X}_n = \dfrac{\sum X_i}{n} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

0,5 Estimation : $\overline{x}_n = \hat{\mu} = 0{,}98$.

2/

0,5
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1 \\ H_1 : \mu \neq 1 \end{cases} \qquad \alpha = 4\%$$

$$Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \quad , \quad P\left(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha .$$

$z_{1-\alpha/2} = 2{,}05$ 1

1ère méth 2

$h = z_{1-\alpha/2} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}023$ 1

Règle de rejet H_0 :

$\overline{x} < \mu_0 - h$ ou $\overline{x} > \mu_0 + h$. 0,5

$\mu_0 - h = 0{,}977$;

$\mu_0 + h = 1{,}023$

On ne rejette pas H_0. 0,5

2ème méth 2

on calcule $Z_c = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -1{,}79$. 1

$|Z_c| > 2{,}05$ Rejet de H_0 0,5

On ne rejette pas H_0. 0,5

3ème méth 2 par IC

1

$IC = [\overline{x} \pm h] = [0{,}957 ; 1{,}003]$

$\mu_0 \in IC$ on ne peut pas rejeter H_0. 1

Scanné avec CamScanner

3°/ $\bar{x} > \mu_0 + h \Leftrightarrow 0{,}98 \geq 1 + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{20}}$. (1)

$\Leftrightarrow z_{1-\alpha/2} \leq 1{,}79.$

$\Leftrightarrow 1-\alpha/2 < 0{,}9633 \Leftrightarrow \alpha > 7{,}34\,\%$ (0,5)

Ex 2 (7 pts)

(0,5) 1°/ . $E(\varepsilon_i) = 0$

(0,5) . $\sigma(\varepsilon_i)$ est une constante.

(0,5) . ε_i et $\varepsilon_{i'}$ sont non corrélé $[\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_{i'}) = 0]$

(1) 2°/ $\hat{\beta}_1 = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{-195{,}4}{1991} = \boxed{-0{,}098}$

(1) $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 170{,}2 + 0{,}098 \times 35{,}6 = \boxed{173{,}69}$.

(1) 3°/ $\hat{y}_i = 173{,}69 - 0{,}098\, x_i$. (0 si $\hat{y}_i = 173{,}69 - 0{,}098 x_i$ $+ \varepsilon_i$)

(1) 4°/ $SCE = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 = \sum \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{x}\right)^2$

$= \sum \hat{\beta}_1^2 (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2$.

(1) 5°/ $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \hat{\beta}_1^2 \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = (-0{,}098)^2 \frac{1991}{189{,}2}$

$= 0{,}10 = 10\,\%$.

(0,5) Seulement 10% de la variabilité de la fréquence seuil est expliquée par la variabilité de l'age.

faible ajustement linéaire.

Ex3 | 9 pts

1°/ $\widehat{Sleep}_i = 624,2796 - 0,2678\, workh_i - 1,9904\, age_i - 99,64\, Kid_i$

2°/ $624,2796 - 0,2678 \times 300 - 1,9904 \times 44 - 99,64 \times 0 =$ $\boxed{456,362}$ minutes.

3°/ $IC_{95\%}(b_1) = \left[\hat{b}_1 \pm t^{(23)}_{1-\alpha/2}\, \hat{\sigma}_{\hat{b}_1}\right]$ $\quad n-(k+1) = 27-(3+1) = 23.$

$= \left[-0,2678 \pm 2,0687 \cdot 0,09154\right]$ $\quad t_{1-\alpha/2} = 2,0687$

$= \left[-0,2678 \pm 0,19\right] = \left[-0,4578 \,;\, -0,0778\right]$

4°/ $\begin{cases} H_0 : b_3 = 0 \\ H_1 : b_3 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \alpha = 1\%$

$t^{23}_{1-\alpha/2} = 2,8073.$

$T_c = \dfrac{\hat{b}_3}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_3}} = \dfrac{-99,6403}{32,86498} = -3,032$

$|T_c| > t^{23}_{1-\alpha/2} = 2,8073$ On rejette H_0 et on confirme que b_3 est significativement différent de 0.

5°/ $0,40012 = R^2$ c-à-d 40% de la variabilité de "Sleep" est expliquée par la variabilité des 3 variables explicatives.

6°/

④

6/ (0,5) "Residual standard error" = $\hat{\sigma}_\varepsilon$

(0,5) $SCR = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \times (n-(k+1)) = 52910,77^2 \times 23$

$= 64\,389\,640\,385,84.$

$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \Rightarrow SCT = SCR / (1-R^2)$

(0,5) $SCT = 107\,337\,534\,816,69.$

$SCE = SCT - SCR$

(0,5) $SCE = 42\,947\,894\,430,85$

7/ Fisher : (0,5)

$\begin{cases} H_0 : \text{tous les coef sont nuls.} \\ H_1 : \text{Au moins l'un des coef est nul.} \end{cases}$

(0,5)

$$F = \frac{SCE/3}{SCR/23} = \frac{14\,315\,964\,810,283}{2\,799\,549\,581,993} = 5,113$$

ou

$$F = \frac{23}{3} \cdot \frac{R^2}{1-R^2} = 5,113.$$

(0,5) $\alpha = 5\%$ $\quad f_{tab}^{(3;23)} = 3,01$ ou $3,05$

(0,5) $F > f$ donc le modèle est globalement significatif.