EXAMEN DE MÉTHODES NUMÉRIQUES

Sans documents - Avec calculatrice.
Durée : 1h30.
Il y a 2 pages

Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \frac{4}{x}$ définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points d'abscisses : $\frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4$.
Quel est le degré de ce polynôme ?
2) Retrouver le polynôme d'interpolation par la Méthode de Newton.
3) Calculer l'erreur d'interpolation aux points : $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$.
4) Conclure.

Exercice 2

1) Ecrire la méthode d'Adams-Bashforth à 3 pas (m=3) à partir du tableau des coefficients donnés ci-dessous. Quel est l'ordre de cette méthode ?
2) Calculer l'ordre de précision de cette méthode à l'aide de la relation suivante :

$$e(h) = \frac{1}{h}\left(h^{m+1} f^{(m)}(\xi_i, y(\xi_i))(-1)^m \int_0^1 C_{-s}^{\,m}\, ds\right)$$

où ξ_i appartient à un intervalle à déterminer.

Tableau des coefficients :

k	0	1	2	3	4	5
$(-1)^k \int_0^1 C_{-s}^{\,k}\, ds$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{95}{288}$

Exercice 3

On considère le problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y); \quad t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases} \tag{1}$$

On discrétise l'intervalle $[a, b]$ par $N+1$ points équidistants notés t_i, et on note h le pas entre deux points voisins.
On voudrait approcher les valeurs $y(t_i)$ de la solution.
L'objectif de cet exercice est de contruire une Méthode Prédicteur- Correcteur.

1) Montrer que, en intégrant le problème (1) sur l'intervalle $[t_i, t_{i+2}]$, on obtient :

$$y(t_{i+2}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+2}} f\left(s, y(s)\right)\, ds$$

2) Quelle méthode, vue en cours, utilise-t-on pour approcher le terme $\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+2}} f\left(s, y(s)\right)\, ds$?

3) Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(s)$ associé aux 3 points $\{(t_i, f_i); (t_{i+1}, f_{i+1}); (t_{i+2}, f_{i+2})\}$ où $f_i = f\left(t_i, y(t_i)\right)$, $f_{i+1} = f\left(t_{i+1}, y(t_{i+1})\right)$ et $f_{i+2} = f\left(t_{i+2}, y(t_{i+2})\right)$.

4) En approchant $f\left(s, y(s)\right)$ par le polynôme d'interpolation $P(s)$ obtenu à la question 3), on obtient la Méthode numérique suivante:

$$\left\{\begin{array}{l} w_{i+2} = w_i + \dfrac{h}{3}\left(f(t_{i+2}, w_{i+2}) + 4f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i)\right); \quad i = 0, 1, 2, ..., N-2. \\ w_0 = \alpha \\ w_1 = \beta \end{array}\right. \tag{2}$$

où w_i représente la valeur approchée de $y(t_i)$.
(**On ne demande pas de faire la démonstration**).

Du fait que le schéma (2) est implicite, on lui associe un autre schéma explicite afin de prédire la valeur w_{i+2}, avant de l'utiliser dans le calcul dans $f\left(t_{i+2}, w_{i+2}\right)$.
Pour ceci, on choisit la Méthode d'Euler comme Prédicteur.

Ecrire le schéma Prédicteur, en adaptant la Méthode d'Euler afin de prédire la valeur de w_{i+2}.

5) On construit le schéma Prédicteur-Correcteur comme suit :

- pour le Prédicteur, on utilise le schéma d'Euler, explicité dans la question 4).
- Pour le Correcteur, on utilise le schéma (2).

Ecrire l'Algorithme Prédicteur-Correcteur ainsi construit.

6) Le schéma (2) est une Méthode numérique d'ordre 4. A partir de cette information, le choix de la Méthode d'Euler comme Prédicteur est-il un bon choix ? Si oui, expliquer pourquoi ? Si non, quel schéma Prédicteur faudrait-il utiliser ?