

“Contrôle continu de Méthodes numériques”

Sans documents - Avec calculatrice

Durée: 2 heures

Soit le problème à valeurs initiales suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) = y(t) \sin(t) + \sin(t), & \text{avec } 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 2 & \text{et } y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

- 2 1) Montrer que le problème (1) admet une solution unique.
2 2) Calculer la solution exacte $y(t)$ du problème (1).
2 (Pour la solution particulière, il y a une solution constante évidente).

3) Soit le problème perturbé suivant:

9
$$\begin{cases} z'(t) = z(t) \sin(t) + \sin(t) + \delta \sin(t), & \text{avec } 0 \leq t \leq 2 \\ z(0) = 2 + \epsilon_0 & \text{et } y \in \mathbb{R}, |\epsilon_0| < \epsilon, |\delta| < \epsilon. \end{cases} \quad (2)$$

- 2 a) Calculer la solution exacte $z(t)$ du problème (2).
(Pour la solution particulière, il y a une solution constante évidente).
3 b) Montrer en majorant $|z(t) - y(t)|$ que le problème (1) est bien posé.

Maintenant, on considère le problème (1) avec $0 \leq t \leq 0.5$ et un pas de discrétisation $h = 0.1$.

- 1 4) Énoncer la méthode d'Euler.
3 5) Utiliser la méthode d'Euler pour calculer les solutions numériques w_i ainsi que les solutions exactes $y(t_i)$; puis l'erreur $|y(t_i) - w_i|$. On fera un tableau.
2 6) Énoncer la méthode de Taylor.
11 7) Utiliser la méthode de Taylor pour calculer les solutions numériques w_i ainsi que les solutions exactes $y(t_i)$; puis l'erreur $|y(t_i) - w_i|$. On fera un tableau.
1 8) Comparer les résultats entre Méthode de Taylor et Méthode d'Euler.
1 9) Conclusion.

Corrigé du Contrôle n°1.

I. Soit le problème :

$$(1) \begin{cases} y' = y \sin(t) + \sin(t) & \text{et } 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 2. & -\infty < y < +\infty \end{cases}$$

1- Montrer que le problème (1) admet une solution unique

de domaine $D = \{ 0 \leq t \leq 2; -\infty < y < +\infty \}$ est convexe car il s'agit d'un tube infini.

Soit $f(t, y) = y \sin(t) + \sin(t)$.

La fonction $f(t, y)$ est continue par-rapport à t et aussi

par-rapport à y . Donc la fonction $f(t, y)$ est continue sur

D .

On a : $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = |\sin(t)| \leq 1$

Donc la fonction $f(t, y)$ est de Lipschitz sur D de rapport $L = 1 > 0$.

Conclusion : le problème (1) admet une solution unique.

2- Calculer la solution du problème (1):

On a: $y' - \sin(t)y = \sin(t)$.

• SSN: $y' - \sin(t)y = 0$

$$\Rightarrow y(t) = \lambda e^{-\int -\sin(t) dt} = \lambda e^{\int \sin(t) dt} = \lambda e^{-\cos(t)}$$

$\Rightarrow y_{SSN}(t) = \lambda e^{-\cos(t)} ; \lambda \in \mathbb{R}$.

• EASN: $y' - \sin(t)y = \sin(t)$.

Regardons si les solutions constantes sont solutions de (EASN)

$y' = 0 \Rightarrow y = -1$

• Solution générale:

$y(t) = \lambda e^{-\cos(t)} - 1 ; \lambda \in \mathbb{R}$.

• Condition initiale: $y(0) = 2$.

$$y(0) = \lambda e^{-\cos(0)} - 1 = \lambda e^{-1} - 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lambda e^{-1} = 3$$

$\Rightarrow \lambda = 3e$

• Solution unique du problème (1):

$y(t) = (3e) e^{-\cos(t)} - 1$

3) Soit le problème perturbé :

$$(P) \begin{cases} y' = y \sin(t) + \sin(t) + \delta \sin(t) \text{ avec } 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 2 + \varepsilon_0; \end{cases} \quad \text{et } |\varepsilon_0| < \varepsilon \text{ et } |\delta| < \varepsilon.$$

a) Calculer la solution exacte du problème (P) :

On a: $y' - \sin(t)y = \sin(t) + \delta \sin(t)$.

• SSN: $y' - \sin(t)y = 0$.

$$\Rightarrow \underline{y_{SSN}(t) = d e^{-\cos(t)}; d \in \mathbb{R}.$$

• EASN: $y' - y \sin(t) = \sin(t) + \delta \sin(t)$.

a) des solutions constantes sont-elles solutions de (EASN) ?

On fait $y' = 0$: $-y \sin(t) = \sin(t)(\delta + 1)$

$$\Rightarrow -y = \delta + 1$$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = -(\delta + 1) \text{ qui est bien une solution}}$$

constante.

• Solution générale :

$$\underline{y_P(t) = d e^{-\cos(t)} - 1 - \delta}$$

• Solution unique du problème (P) :

$$y_P(0) = 2 + \varepsilon_0 \Rightarrow d e^{-1} - 1 - \delta = 2 + \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow d e^{-1} = 2 + \varepsilon_0 + 1 + \delta = 3 + \varepsilon_0 + \delta$$

$$\Rightarrow \underline{d = (3 + \varepsilon_0 + \delta)e}$$

$$\Rightarrow \underline{y_P(t) = (3 + \varepsilon_0 + \delta)e \cdot e^{-\cos(t)} - 1 - \delta.}$$

b) Montrer que le problème (1) est bien posé :

Il s'agit de montrer : $|y_p(t) - y(t)| \leq K(\varepsilon)\varepsilon$.

$$\begin{aligned} & |(3 + \varepsilon_0 + \delta) e \cdot e^{-\cos(t)} - 1 - \delta - (3e) e^{-\cos(t)} - 1| = \\ & |(\varepsilon_0 + \delta) e \cdot e^{-\cos(t)} - \delta| \leq |(\varepsilon_0 + \delta) e \cdot e^{-\cos(t)}| + |\delta| \\ & \leq |(\varepsilon_0 + \delta) e| |e^{-\cos(t)}| + |\delta| \end{aligned}$$

Or: $0 \leq t \leq 2$ et $\cos(t)$ est décroissante sur $[0; 2]$.

$$\Rightarrow \cos(2) \leq \cos(t) \leq \cos(0) = 1$$

$$-1 \leq -\cos(t) \leq -\cos(2)$$

$$e^{-1} \leq e^{-\cos(t)} \leq e^{-\cos(2)} = 1.5161084$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |y_p(t) - y(t)| & \leq |(\varepsilon_0 + \delta) e| e^{-\cos(2)} + |\delta| \\ & \leq e(|\varepsilon_0| + |\delta|) e^{-\cos(2)} + |\delta| \\ & \leq 2e\varepsilon e^{-\cos(2)} + \varepsilon \\ & \leq \underbrace{(2e \cdot e^{-\cos(2)} + 1)}_{\leq 2} \varepsilon \end{aligned}$$

$$\underline{|y_p(t) - y(t)| \leq (4e + 1) \varepsilon}$$

On a montré : $|y_p(t) - y(t)| \leq K \cdot \varepsilon$ avec

$$\underline{K = 4e + 1.}$$

Donc le problème (1) est bien posé.

II, Soit $0 \leq t \leq 0.5$ et $h = 0.1$.

On a :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 0.1 \\ t_2 = 0.2 \\ t_3 = 0.3 \\ t_4 = 0.4 \\ t_5 = 0.5 \end{cases}$$

1. Solutions exactes $y(t_i)$ $i = 0, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} y(t_0) = y(0) &= (3e) e^{-\cos(0)} - 1 \\ &= 3e \cdot e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

• $y(t_0) = y(0) = 2$

• $y(t_1) = y(0.1) = (3e) e^{-\cos(0.1)} - 1 = 2,015025$

• $y(t_2) = y(0.2) = (3e) e^{-\cos(0.2)} - 1 = 2,0604002$

• $y(t_3) = y(0.3) = (3e) e^{-\cos(0.3)} - 1 = 2,137027826$

• $y(t_4) = y(0.4) = (3e) e^{-\cos(0.4)} - 1 = 2,24641494$

• $y(t_5) = y(0.5) = (3e) e^{-\cos(0.5)} - 1 = 2,3906774$

2. Méthode de Euler pour t_i ; $i=0,1,2,\dots,5$:

$$a) \begin{cases} \underline{w_0 = y(t_0) = 2.} \\ \underline{w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)} \end{cases}$$

$$\text{avec } f(t_i, w_i) = w_i \sin(t_i) + \sin(t_i)$$

$$\underline{f(t_i, w_i) = \sin(t_i) (w_i + 1).}$$

$$\bullet \underline{w_0 = 2.}$$

$$\bullet \underline{w_1 = w_0 + h \sin(t_0) (w_0 + 1) = 2.}$$

" " " "
2 0.1 0 2

$$\bullet \underline{w_2 = w_1 + h \sin(t_1) (w_1 + 1) = 2.029950025}$$

" " " "
2 0.1 0.1 2

$$\bullet \underline{w_3 = w_2 + h \sin(t_2) (w_2 + 1) = 2.09014584}$$

" " " "
2.0299500 0.1 0.2 2.0299500

$$\bullet \underline{w_4 = w_3 + h \sin(t_3) (w_3 + 1) = 2.1814658931}$$

" " " "
2.09014584 0.1 0.3 2.09014584

$$\bullet \underline{w_5 = w_4 + h \sin(t_4) (w_4 + 1) = 2.30535801052}$$

" " " "
2.18146589 0.1 0.4 2.18146589

b) Erreurs $|w_i - y(t_i)|$ avec la Méthode d'Euler:

<u>t_i</u>	<u>$y(t_i)$</u>	<u>w_i</u>	<u>Erreur Méthode Euler</u>
0	2	2	0
0.1	2.015025	2	0.015025
0.2	2.060400	2.02995	0.030450
0.3	2.137027	2.090145	0.0468820
0.4	2.246414	2.181465	0.0649490
0.5	2.390677	2.305358	0.08531939

On voit que l'erreur est en 10^{-2} avec la Méthode d'Euler pour un pas $h=0.1$.

On voit que l'erreur augmente linéairement avec h .
La Méthode d'Euler est d'ordre 1 en h .

3- Méthode de Taylor d'ordre 2:

$$a) \begin{cases} \underline{w_0 = y(t_0) = 2} \\ \underline{w_{i+1} = w_i + h T^{(2)}(t_i, w_i)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } T^{(2)}(t_i, w_i) &= f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} \frac{df}{dt}(t_i, w_i) \\ &= \sin(t_i)(w_i + 1) + \frac{h}{2} \left[\cos(t_i)(w_i + 1) + \sin^2(t_i)(w_i + 1) \right] \\ &= (w_i + 1) \left[\sin(t_i) + \frac{h}{2} \cos(t_i) + \frac{h}{2} \sin^2(t_i) \right] \end{aligned}$$

D'où la Méthode de Taylor s'écrit:

$$\begin{cases} \underline{w_0 = y(t_0) = 2.} \\ \underline{w_{i+1} = w_i + h(w_i + 1) \left[\sin(t_i) + \frac{h}{2} (\cos(t_i) + \sin^2(t_i)) \right]} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{w_0 = 2.}$$

$$w_1 = \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{w_0} + \underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{h} \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{(w_0 + 1)} \left[\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\sin(t_0)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{\frac{h}{2}} \left(\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\cos(t_0)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\sin^2(t_0)} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \underline{w_1 = 2.015.}$$

$$w_2 = \underset{\substack{\parallel \\ 2.015}}{w_1} + \underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{h} \underset{\substack{\parallel \\ 2.015}}{(w_1 + 1)} \left[\underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{\sin(t_1)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{\frac{h}{2}} \left(\underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{\cos(t_1)} + \underset{\substack{\parallel \\ 0.1}}{\sin^2(t_1)} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \underline{w_2 = 2.06012969.}$$

$$\cdot w_3 = w_2 + h(w_2 + 1) \left[\sin(t_2) + \frac{h}{2} (\cos(t_2) + \sin^2(t_2)) \right]$$

$\begin{matrix} & & 0.1 & & & & 0.2 & & 0.2 & & 0.2 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 2.060129 & 2.060129 & & & & & & & & & \end{matrix}$

$$\Rightarrow \underline{w_3 = 2.136524645.}$$

$$\cdot w_4 = w_3 + h(w_3 + 1) \left[\sin(t_3) + \frac{h}{2} (\cos(t_3) + \sin^2(t_3)) \right]$$

$\begin{matrix} & & 0.1 & & & & 0.3 & & 0.3 & & 0.3 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 2.13652 & 2.13652 & & & & & & & & & \end{matrix}$

$$\Rightarrow \underline{w_4 = 2.2455670662.}$$

$$\cdot w_5 = w_4 + h(w_4 + 1) \left[\sin(t_4) + \frac{h}{2} (\cos(t_4) + \sin^2(t_4)) \right]$$

$\begin{matrix} & & 0.1 & & & & 0.4 & & 0.4 & & 0.4 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 2.245567 & 2.245567 & & & & & & & & & \end{matrix}$

$$\Rightarrow \underline{w_5 = 2.3893631238.}$$

b) Tableau des erreurs $|y(t_i) - w_i|$:

<u>t_i</u>	<u>$y(t_i)$</u>	<u>w_i</u>	<u>Erreur</u> <u>Méthode de Taylor</u>
0	2	2	0
0.1	2.015025	2.015	$0.0000245 = 2.45 \cdot 10^{-5}$
0.2	2.060400	2.06013	$0.00027056 = 2.7 \cdot 10^{-4}$
0.3	2.137027	2.1365246	$0.000503181 = 5.031 \cdot 10^{-4}$
0.4	2.246414	2.245567	$0.00084788 = 8.478 \cdot 10^{-4}$
0.5	2.390677	2.38936312	$0.00131427 = 1.3114 \cdot 10^{-3}$

8) On voit que les erreurs avec la Méthode de Taylor sont de l'ordre de 10^{-4} alors qu'elles sont de l'ordre de 10^{-2} avec la Méthode d'Euler. De plus, les erreurs augmentent beaucoup plus lentement avec la Méthode de Taylor, alors qu'elles augmentent d'une manière linéaire avec la Méthode d'Euler.

9) La Méthode de Taylor est d'ordre 2 en temps. L'erreur globale vérifie :

$$e \leq C \cdot h^2, \text{ où } C \text{ est une constante indépendante du pas } h.$$

Et ici, $h = 0.1$ et $h^2 = 0.01$, et ici, l'erreur globale reste largement inférieure à h^2 .

D'où une nette amélioration de la précision numérique, seulement en ajoutant à la Méthode d'Euler, le terme d'ordre 2 :

$$\frac{h^2}{2} (\cos(t_i) + \sin^2(t_i)) (w_i + 1).$$