Apprentis A_3 Corrigé de l'Examen

Exercice 1: Soit $f(x) = \frac{4}{x}$ défini sur $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

1) Calcul du polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les 4 points:

$A\left(x_0 = \frac{1}{2}; f(x_0) = 8\right)$; $B\left(x_1 = 1; f(x_1) = 4\right)$;

$C\left(x_2 = 2; f(x_2) = 2\right)$; $D\left(x_3 = 4; f(x_3) = 1\right)$.

Le polynôme d'interpolation est de degré au plus 3 car il y a 4 points d'interpolation.

$$P_L(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_L(x) = 8\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)} + 4\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-4)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-2)(1-4)}$$
$$+ 2\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-4)}{\left(2-\frac{1}{2}\right)(2-1)(2-4)} + \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)}{\left(4-\frac{1}{2}\right)(4-1)(4-2)}$$

$$P_L(x) = -8\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{\frac{21}{8}} + 4\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-4)}{3/2}$$
$$-2\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-4)}{3} + \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2)}{21}.$$

$$P_L(x) = -\frac{64}{21}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{8}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-4)$$
$$-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-4) + \frac{1}{21}\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2).$$

Après calculs, on obtient : $P_L(x) = -x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{35}{2}x + 15$.

Le polynôme d'interpolation est de degré 3.

2) Calcul du polynôme d'interpolation de Newton :

$$P_N(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

. Calcul des coefficients par le Tableau des différences divisées :

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
$\frac{1}{2}$	8			
		$\frac{4-8}{1-\frac{1}{2}} = -8$		
1	4			
			$\frac{-2+8}{2-\frac{1}{2}} = 4$	
2	2	$\frac{2-4}{2-1} = -2$		
4	1	$\frac{1-2}{4-2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-\frac{1}{2}+2}{4-1} = \frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-4}{4-\frac{1}{2}} = -1$

On en déduit :

$$P_N(x) = 8 - 8(x-x_0) + 4(x-x_0)(x-x_1) - (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$P_N(x) = 8 - 8\left(x-\frac{1}{2}\right) + 4\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) - \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-2).$$

$$= 8 - 8x + 4 + (4x-2)(x-1) - \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)(x-2)$$

$$= 12 - 8x + 4x^2 - 6x + 2 - \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2x^2 + 3x - 1\right)$$

$$P_N(x) = -x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \left(\frac{35}{2}\right)x + 15 = P_L(x).$$

3) Erreurs d'interpolation aux points $3/2$ et $5/2$:

. $f(3/2) = 8/3$ et $P_N(3/2) = \frac{9}{4}$ d'où $E(3/2) = |f(3/2) - P_N(3/2)| \simeq 0{,}4166$.

. $f(5/2) = 8/5$ et $P_N(5/2) = 5/2$ d'où $E(5/2) = |f(5/2) - P_N(5/2)| = 0{,}9$.

4) L'erreur d'interpolation aux points 3/2 et 5/2 est en 10^{-1}.
On peut rajouter des points supplémentaires pour diminuer l'erreur.

Exercice 2.

1) Les méthodes d'Adams-Bashforth à m pas s'écrivent :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \sum_{k=0}^{m-1} h \, \nabla f(t_i, y(t_i)) (-1)^k \int_0^1 C_{-s}^k \, ds.$$

Ici $m = 3$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\left[f(t_i, y(t_i)) + \frac{1}{2} \nabla f(t_i, y(t_i)) + \frac{5}{12} \nabla^2 f(t_i, y(t_i))\right]$$

Or $\nabla f(t_i, y(t_i)) = f(t_i, y(t_i)) - f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$

$\nabla^2 f(t_i, y(t_i)) = f(t_i, y(t_i)) - 2 f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$

En remplaçant, on obtient :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{12}\left(23 f(t_i, y(t_i)) - 16 f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 5 f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))\right)$$

La méthode d'Adams-Bashforth à 3 pas s'écrit :

$$\begin{cases} w_0 = \alpha ; \; w_1 = \alpha_1 ; \; w_2 = \alpha_2 \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}\left(23 f(t_i, w_i) - 16 f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 5 f(t_{i-2}, w_{i-2})\right) \end{cases}$$

pour $i = 2, \dots, N-1$.

Cette méthode est d'ordre 3.

2) Démontrons-le :

Pour $m = 3$: $$e(h) = \frac{1}{h}\left[h^4 f^{(3)}(\xi_i, y(\xi_i)) (-1)^3 \int_0^1 C_{-s}^3 \, ds \right]$$

$$= \frac{1}{h} h^4 y^{(4)}(\xi_i) \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{3h^3}{8} y^{(4)}(\xi_i) \text{ pour } \xi_i \in [t_{i-2}, t_{i+1}].$$

$\Rightarrow e(h) = O(h^3)$; donc la méthode d'Adams-Bashforth à 3 pas ($m = 3$) est bien d'ordre 3.

Exercice 3 : Soit le problème à valeurs initiales :

$$(3)\ \begin{cases} y' = f(t,y) \ ; \ t \in [a,b]. \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

① Intégrons l'équation : $y' = f(t,y)$ entre t_i et t_{i+2} :

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} y'(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\Leftrightarrow y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(s,y(s))\,ds$$ car s est une variable muette.

$$\Leftrightarrow y(t_{i+2}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(s, y(s))\,ds.$$

② Pour approcher la fonction $f(s,y(s))$, on utilise le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux 3 points t_i, t_{i+1} et t_{i+2}.
Puis on suppose $\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(s,y(s))\,ds \simeq \int_{t_i}^{t_{i+2}} P(s)\,ds$.

③ Ecrire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(s)$:

$$P(s) = f_i \frac{(t-t_{i+1})(t-t_{i+2})}{(t_i-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})} + f_{i+1}\frac{(t-t_i)(t-t_{i+2})}{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_{i+2})} + f_{i+2}\frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})}$$

$$\Rightarrow P(s) = f_i \frac{(t-t_{i+1})(t_i-t_{i+2})}{2h^2} + f_{i+1}\frac{(t-t_i)(t-t_{i+2})}{-h^2} + f_{i+2}\frac{(t-t_i)(t-t_{i+1})}{2h^2}$$

④ Puisque la Méthode d'Euler est explicite, on la choisit comme Prédicteur :

$$w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i)$$

$$\Rightarrow w_{i+2} = w_{i+1} + h f(t_{i+1}, w_{i+1}) = w_i + h f(t_i, w_i) + h f(t_{i+1}, w_i + h f(t_i$$

5) Algorithme Prédicteur - Correcteur :

Initialisation : $h = \frac{b-a}{N}$ où l'intervalle $[a,b]$ et N sont donnés.

$w_0 = \alpha$; $t_0 = a$; $t_1 = a+h$.

$w_1 = \beta$ qui pourra être initialisé avec la Méthode d'Euler : $w_1 = w_0 + h f(t_0, w_0)$.

$i = 0$

Itération : Tant que $i \leq N-2$, on répète :

$t_{i+2} = t_{i+1} + h$

$$w_{i+2}^{App} = w_{i+1} + h f(t_{i+1}, w_{i+1})$$
$$= w_i + h f(t_i, w_i) + h f(t_{i+1}, w_i + h f(t_i, w_i))$$

$$w_{i+2} = w_i + \frac{h}{3}\left[f(t_{i+2}, w_{i+2}^{App}) + 4 f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i) \right]$$

$i = i+1$

6) Le choix de la Méthode d'Euler comme Prédicteur n'est pas un bon choix car la Méthode d'Euler est d'ordre 1.
Comme le schéma Correcteur est d'ordre 4, il faut utiliser un schéma Prédicteur d'ordre au moins égal à 3, pour que le schéma Prédicteur - Correcteur soit d'ordre 4.
Ainsi, il faudrait utiliser un schéma RK3 pour le calcul de w_1 et une Méthode d'Adams - Bashforth à 3 pas comme schéma Prédicteur.