

Durée de l'épreuve : **1h30**. Calculatrices programmables (sauf en mode examen), documents et autres supports électroniques interdits.

### Exercice 1 ( 6 points)

Une usine prétend que ses machines produisent des bouteilles avec un volume moyen de 1 litre. On suppose que le volume des bouteilles est normalement distribué avec un écart-type connu de 0,05 litre. Un inspecteur prélève un échantillon de 20 bouteilles et mesure un volume moyen de 0,98 litre.

1. Donner un estimateur puis une estimation du volume moyen des bouteilles de cette usine
2. Peut-on conclure avec un risque d'erreur de 1<sup>ère</sup> espèce de 4%, que les bouteilles ont un volume moyen différent de 1 litre ?
3. Calculer le niveau de risque  $\alpha$  à partir duquel on peut conclure que la prétention du producteur est fausse.

### Exercice 1 ( 6 points)

On appelle « fréquence seuil » d'un sportif amateur sa fréquence cardiaque obtenue après trois quarts d'heure d'un effort soutenu de course à pied. Celle-ci est mesurée à l'aide d'un cardio-fréquencemètre. On cherche à savoir si l'âge d'un sportif a une influence sur sa fréquence seuil. On dispose pour ce la de 20 valeurs du couple  $(x_i ; y_i)$ , où  $x_i$  est l'âge et  $y_i$  la fréquence seuil du sportif. On a obtenu  $(\bar{x} ; \bar{y}) = (35,6 ; 170,2)$  et :

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 1991 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 189,2 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -195,4$$

On considère le modèle de régression linéaire simple suivant :  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$

1. Rappeler les hypothèses sur le terme d'erreur  $\varepsilon_i$
2. Calculer, en justifiant vos calculs, les coefficients de la droite de régression linéaire
3. Donner l'expression du modèle estimé.
4. Sachant que la SCE est égale à  $\sum_{i=1}^{20} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ , exprimer la SCE en fonction de  $\hat{\beta}_1$  et  $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2$ .
5. En déduire la valeur du coefficient de détermination  $R^2$ . Commenter la qualité de l'ajustement des données au modèle.

### Exercice 3 (8 points)

On cherche à rendre compte des déterminants du sommeil de 27 employés de bureau en 1975. On estime le modèle suivant:

$$\text{sleep}_i = b_0 + b_1 \text{workh}_i + b_2 \text{age}_i + b_3 \text{kid}_i + \varepsilon_i$$

où  $\text{sleep}$  représente le nombre de minutes de sommeil par jour,  $\text{workh}$  le nombre de minutes travaillées par jour,  $\text{age}$  l'âge de l'employé en années et  $\text{kid}$  est une variable indicatrice qui vaut 1 si l'employé a des enfants de moins de 3 ans, et 0 autrement.

On donne les résultats d'estimation suivants:

Call:

```
lm(formula = sleep ~ workh + age + kid , data = data)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error
(Intercept)	624.2796	45.0672
workh	-0.2678	0.09154
age	-1.9904	0.93214
kid	-99.6403	32.86498

Residual standard error: 52910.7712 on 23 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.40012

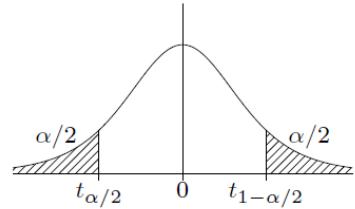
1. Exprimer l'équation de la droite de régression linéaire multiple
2. Prévoir le temps de sommeil pour un salarié de 44 ans travaillant 5 heures par jour et ayant 1 enfant de 4 ans.
3. Sous l'hypothèse de normalité des erreurs, calculer l'intervalle de confiance de  $b_1$  à un niveau de 95%
4. Sous l'hypothèse de normalité des erreurs, tester la nullité du coefficient  $b_3$  avec un risque d'erreur de 1%. Effectuer toutes les étapes du test.
5. Interpréter la valeur 0.40012
6. Que signifie « *Résiduel standard error* ». En déduire la SCR, la SCT et la SCE
7. Tester la significativité globale du modèle au risque d'erreur de 5%.

### A.3. LOIS DE STUDENT

Si  $T$  est une variable aléatoire suivant la loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté, la table donne, pour  $\alpha$  fixé, la valeur  $t_{1-\alpha/2}$  telle que

$$\mathbb{P}\{|T| \geq t_{1-\alpha/2}\} = \alpha.$$

Ainsi,  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté.



$\nu \setminus \alpha$	0,900	0,500	0,300	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
1	0,1584	1,0000	1,9626	3,0777	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6193
2	0,1421	0,8165	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	0,1366	0,7649	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,9240
4	0,1338	0,7407	1,1896	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	0,1322	0,7267	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	0,1311	0,7176	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	0,1303	0,7111	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	0,1297	0,7064	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	0,1293	0,7027	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	0,1289	0,6998	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	0,1286	0,6974	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	0,1283	0,6955	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	0,1281	0,6938	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	0,1280	0,6924	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	0,1278	0,6912	1,0735	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	0,1277	0,6901	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	0,1276	0,6892	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	0,1274	0,6884	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	0,1274	0,6876	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	0,1273	0,6870	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	0,1272	0,6864	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	0,1271	0,6858	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	0,1271	0,6853	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	0,1270	0,6848	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	0,1269	0,6844	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	0,1269	0,6840	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	0,1268	0,6837	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	0,1268	0,6834	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	0,1268	0,6830	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	0,1267	0,6828	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	0,1265	0,6807	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
60	0,1262	0,6786	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
80	0,1261	0,6776	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
120	0,1259	0,6765	1,0409	1,2886	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
$\infty$	0,1257	0,6745	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

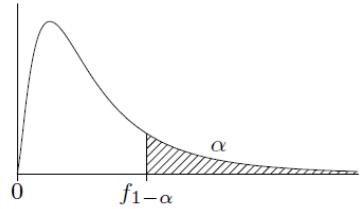
Lorsque  $\nu = \infty$ ,  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

#### A.4. LOIS DE FISHER-SNEDECOR ( $\alpha = 0,05$ )

Si  $F$  est une variable aléatoire suivant la loi de Fisher-Snedecor à  $(\nu_1, \nu_2)$  degrés de liberté, la table donne la valeur  $f_{1-\alpha}$  telle que

$$\mathbb{P}\{F \geq f_{1-\alpha}\} = \alpha = 0,05.$$

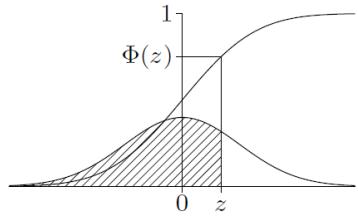
Ainsi,  $f_{1-\alpha}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha = 0,95$  de la loi de Fisher-Snedecor à  $(\nu_1, \nu_2)$  degrés de liberté.



$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	$\infty$
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00

### A.1. LOI NORMALE $\mathcal{N}(0, 1)$

1° *Fonction de répartition de la loi Normale.* — La fonction de répartition  $\Phi$  de la loi Normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  est définie par  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du / \sqrt{2\pi}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , on a  $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ .



$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

*Exemples.* —  $\Phi(0,25) \approx 0,5987$ ,  $\Phi(-0,32) = 1 - \Phi(0,32) \approx 1 - 0,6255 = 0,3745$ .