Transferts thermiques : CMO n°2

3ème année

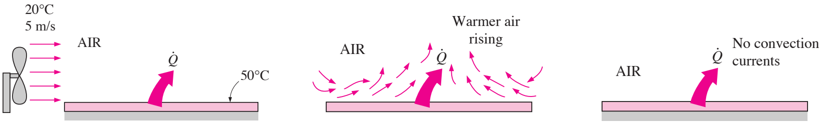
Didier Gossard

Décembre 2025

ESILV
ENGINEERING SCHOOL
DE VINCI PARIS NANTES

Plan

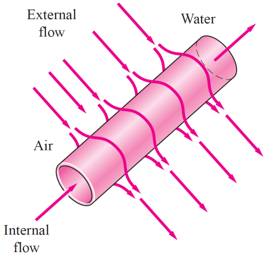
- Le transfert de chaleur à travers un fluide se fait par convection si le fluide est en mouvement et par conduction si le fluide est au repos.
- Pour la **convection forcée**, un fluide est **forcé de s'écouler** sur une surface ou dans une canalisation par des **dispositifs mécaniques externes** tels qu'une *pompe* ou un *ventilateur*.
- Pour la **convection naturelle**, tout mouvement de fluide est dû à un **phénomène naturel** tel que la **poussée d'Archimède**, qui se manifeste par la **montée du fluide** ***plus chaud*** (et donc plus léger) et la **descente du fluide plus froid** (et donc *plus lourd*).



(*a*) Forced convection (*b*) Free convection (*c*) Conduction

Un écoulement de fluide est considéré comme **interne** ou **externe**, selon que le fluide est amené de s'écouler dans une *géométrie fermée* ou *sur une surface*.

- L'écoulement d'un fluide **non borné** sur une surface telle qu'une *plaque*, un *fil* ou une *conduite* est un **écoulement externe**.
- L'écoulement dans un *tuyau* ou une *conduite* est un **écoulement interne** si le fluide est **complètement entouré par des surfaces solides**.



Théorie de la convection : couplage entre la thermique et la mécanique des fluides

- **Approche théorique** : *contexte de la mécanique des milieux continus*
    - Conduction thermique dans le milieu
    - Transport de la chaleur par le fluide en mouvement (advection)
    - Profil de vitesse dans l'écoulement (équation de Navier-Stokes)

  $\Longrightarrow$ Résolvable analytiquement dans des cas extrêmement simples.

  $\Longrightarrow$ Simulation numérique requise.
- **Approche phénoménologique** : *loi empirique basée sur l'expérience*

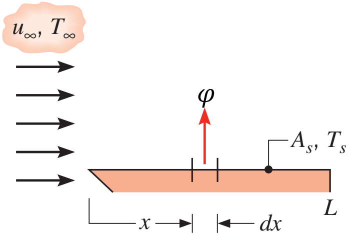
  $\Longrightarrow$ **loi de Newton** (*approximation*)

Approche phénoménologique : loi de Newton (1701)

- Newton modélise le densité de flux échangé par convection par une **loi linéaire empirique**, valable quelque soit le type de convection, d'écoulement et de géométrie :

$$\varphi = h_x \left(T_\mathrm{s} - T_\infty\right)$$

- φ : densité de flux échangé par convection $(W.m^{-2})$
- T_s : la température de la surface d'échange
- T_∞ : la température du fluide (loin de la surface d'échange)
- h_x : le **coefficient local d'échange convectif** $(W.m^{-2}.K^{-1})$



- Le flux total ϕ échangé par la surface totale A_s s'exprime par :

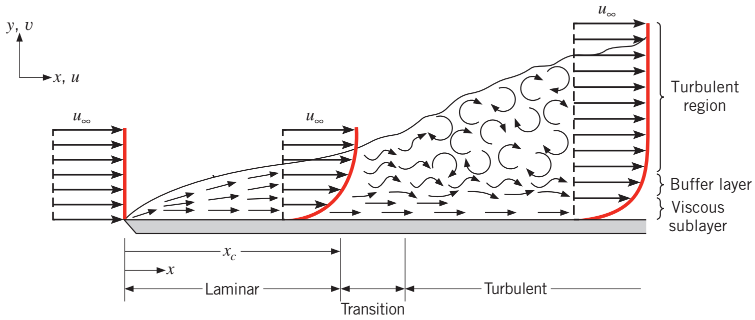
$$\phi = \bar{h}\, A_\mathrm{s}\, (T_\mathrm{s} - T_\infty)$$

- ϕ : flux échangé par convection (W)
- A_s : surface d'échange (m^2)
- $\bar{h} = \dfrac{1}{A_\mathrm{s}} \iint_{A_\mathrm{s}} h_x \mathrm{d}A$: **coefficient moyen d'échange convectif** ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
- On peut définir une résistance thermique de convection R_{th} par analogie électrique : $T_\mathrm{s} - T_\infty = R_{th}\phi$:

$$R_{th} = \frac{1}{h\, A_\mathrm{s}}$$

- Pour alléger les notations, on notera le coefficient moyen d'échange convectif simplement h.

- Le coefficient d'échange convectif h dépend fortement du **régime d'écoulement** du fluide : est-il *laminaire* ou *turbulent* ? $\Longrightarrow$ transition entre les régimes d'écoulement démontrée par Osborne Reynolds en 1883.

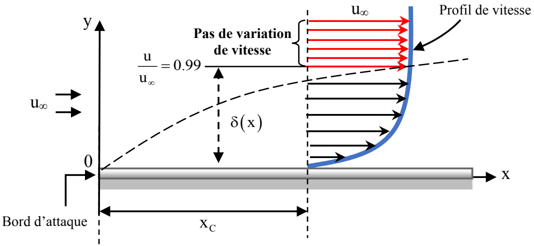


- Dans la *couche laminaire* : le mouvement du fluide est très ordonné dans les deux directions (x et y).
- Dans la *couche turbulente* : le mouvement du fluide est très aléatoire et se caractérise par des fluctuations de vitesse.

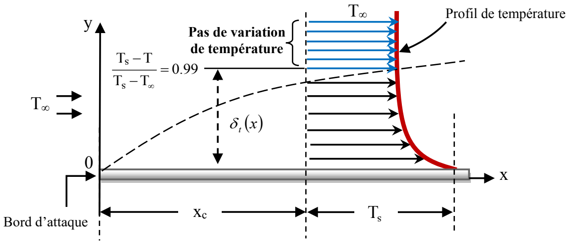
- Reynolds s'était rendu compte que la zone de transition entre le régime laminaire et le régime turbulent se produit toujours autour d'un nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds critique** donné par :

$$Re_{x_c} = \frac{u_\infty \, x_c}{\nu} = \frac{\rho \, u_\infty \, x_c}{\mu}$$

- ρ : masse volumique du fluide $(kg.m^{-3})$
- $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique du fluide $(m^2.s^{-1})$
- u_∞ : vitesse du fluide loin devant la paroi $(m.s^{-1})$
- x_c : position critique (m)
- μ : viscosité dynamique du fluide $(Pa.s)$
- Exemple : *pour un écoulement le long d'une plaque plane* : $Re_{x_c} = 5 \times 10^5$
- $Re_x < Re_{x_c}$: régime laminaire
- $Re_x > Re_{x_c}$: régime turbulent



- Soit une plaque plane sur laquelle se développe un écoulement dont la vitesse du fluide est parallèle à la plaque.
- Les particules fluides en contact avec la surface ont une vitesse nulle en raison des forces visqueuses.
- Ces particules freinent les particules voisines dans les couches supérieures et cela sur une certaine distance y, jusqu'à ce que cet effet de freinage devienne négligeable.
- En augmentant la distance à la surface, la vitesse u du fluide tend vers la vitesse u_∞. La valeur de y où la vitesse $u = 0,99u_\infty$ est appelée **épaisseur de couche-limite hydrodynamique notée** $\delta(x)$.
- La couche limite hydrodynamique se développe quel que soit l'écoulement.



- Les particules fluides en contact avec la surface de la plaque sont à la température de cette surface.
- Ces particules échangent de l'énergie avec les particules voisines, ce qui donne naissance à des gradients de température dans le fluide.
- Le domaine où ces gradients se développent est appelé la **couche-limite thermique et son épaisseur** $\delta_t(x)$ est définie comme la distance y pour laquelle le rapport $(T_s - T)/(T_s - T_\infty) = 0,99$.
- La couche-limite thermique ne se développera que si la température du fluide T_∞ et celle de la surface T_s sont différentes.

- **Conduction thermique** en $y = 0$: **loi de Fourier** pour le fluide de conductivité thermique λ :

$$\varphi = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}$$

- **Loi de Newton** :

$$\varphi = h_x \left(T_\mathrm{s} - T_\infty\right)$$

- **Coefficient local d'échange convectif** h_x :

$$h_x = \frac{-\lambda \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{T_\mathrm{s} - T_\infty} \sim \frac{\lambda}{\delta_t(x)}$$

- h_x peut être interprétée comme la **conductance thermique** (*inverse de la résistance thermique*) **de la couche-limite thermique**.

- La technique employée en convection pour déterminer le coefficient d'échange convectif h est basée sur l'**analyse dimensionnelle** (*théorème de Vaschy–Buckingam ou théorème* Π) **combinée à l'expérimentation**.
- Pour cela, on fait intervenir le **nombre de Nusselt** local, Nu_x ou moyen, $\overline{Nu}_L$ le nombre adimensionnel qui va permettre d'aboutir à h_x ou $\bar{h}_L$ respectivement.

$\Longrightarrow$ **Nombre de Nusselt local** : $Nu_x = \dfrac{h_x\, x}{\lambda}$

$\Longrightarrow$ **Nombre de Nusselt moyen** :

$$\overline{Nu}_L = \int_0^L \frac{Nu_x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\bar{h}_L\, L}{\lambda}$$

- Utilisation de **corrélations expérimentales** qui vont calculer le **nombre de Nusselt** à partir d'autres nombres adimensionnels.

- **Nombre de Prandtl** Pr :

$$\mathrm{Pr} = \frac{c_\mathrm{p}\,\mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$$

  c_p : capacité calorifique massique à pression constante ;
  $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho\, c_\mathrm{p}}$: diffusivité thermique.

- En *convection naturelle* : **nombre de Grashof** Gr_L

$$\mathrm{Gr}_L = \frac{g\,\beta\,\left(T_\mathrm{s} - T_\infty\right)\,L^3}{\nu^2}$$

  g : accélération gravitationnelle ; β : coefficient de dilatation thermique isobare.

- En **convection forcée** : les corrélations auront la forme $Nu = f(Re, Pr)$
- En **convection naturelle** : les corrélations auront la forme $Nu = f(Gr, Pr)$

Comment calculer le coefficient d'échange convectif h ?

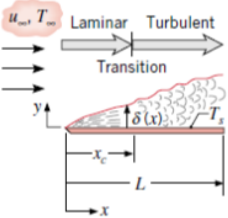
- Préciser les **conditions géométriques** du problème d'échange par convection (*écoulement le long d'une surface plane / sphère / cylindre / écoulement interne / externe, diamètre, longueur,...*)
- Préciser une **température de référence** et déterminer les **propriétés thermophysiques** du fluide à cette température (*masse volumique, capacité calorifique,...*)
- Prise en compte du **type de convection** :

$\Longrightarrow$ Calculer le **nombre de Reynolds** pour déterminer le type d'écoulement en **convection forcée**.

$\Longrightarrow$ Calculer le **nombre de Grashof** en **convection naturelle**.

- Calculer le nombre de Nusselt à partir des corrélations expérimentales.
- Calculer h à partir du nombre de Nusselt.

- Écoulement sur une plaque plane :



- Écoulement laminaire : épaisseur de la couche-limite hydrodynamique $\delta(x)$:

$$\delta(x) = 5x\,\mathrm{Re}_x{}^{-1/2}$$

où x est la distance par rapport au bord d'attaque

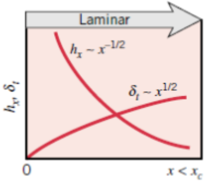
$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty\,x}{\nu}$$

- δ croît avec x, et décroît avec u_∞.

- Nombre de Nusselt *local* :

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x\, x}{k} = 0.332\, \mathrm{Re}_x{}^{1/2}\, \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad [0.6 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 50]$$

- h_x est infini au bord d'attaque ($x \to 0$) et décroît comme $x^{-1/2}$ dans le sens de l'écoulement, $\delta(x)$ décroît comme $x^{1/2}$ dans le sens de l'écoulement :



- Nombre de Nusselt *moyen* (de 0 à $x \leqslant x_c$) :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_x = \frac{\bar{h}_x\, x}{k} = 0.664\, \mathrm{Re}_x{}^{1/2}\, \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad [0.6 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 50]$$

- Écoulement turbulent : épaisseur de la couche-limite hydrodynamique $\delta(x)$:

$$\delta(x) = 0.37x\,\mathrm{Re}_x{}^{-1/5} \qquad \left[\mathrm{Re}_x \leqslant 10^8\right]$$

- Si la transition se déroule dans la zone définie par $0.95 \leqslant (x_\mathrm{c}/L) \leqslant 1 \rightarrow \overline{\mathrm{Nu}}_L$ pour un écoulement laminaire
- Si la transition se déroule dans la zone définie par $(x_\mathrm{c}/L) \leqslant 0.95 \rightarrow$ *couche-limite mixte* :

$$\overline{h}_L = \frac{1}{L}\left(\int_0^{x_\mathrm{c}} h_\mathrm{lam}\,\mathrm{d}x + \int_{x_\mathrm{c}}^{L} h_\mathrm{turb}\,\mathrm{d}x\right)$$

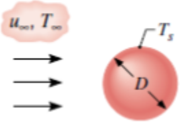
- Nombre de Nusselt *moyen* sur toute la longueur L :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \left(0.037\,\mathrm{Re}_L^{4/5} - A\right)\,\mathrm{Pr}^{1/3}$$

où A dépend du nombre de Reynolds critique $\mathrm{Re}_{x,c}$.
- Pour un écoulement totalement turbulent :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.037\,\mathrm{Re}_L^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad \begin{bmatrix} 0.6 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 50 \\ \mathrm{Re}_{x,c} = 0 \end{bmatrix}$$

- Cylindre de diamètre D ayant une température de surface T_s uniforme soumis à un écoulement perpendiculaire d'un fluide à la température en amont T_∞ avec une vitesse en amont uniforme u_∞



- Le nombre de Reynolds est basé sur le diamètre D du cylindre $\mathrm{Re}_D = \dfrac{u_\infty D}{\nu}$
- Nombre de Nusselt *moyen* : *corrélation de Hilpert*

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \frac{\overline{h}\, D}{k} = C\, \mathrm{Re}_D^m\, \mathrm{Pr}^{1/3} \qquad [\mathrm{Pr} \geqslant 0.7]$$

où C et m dépendent du nombre de Reynolds.
- La corrélation de Hilpert peut être utilisée pour l'écoulement de gaz sur des cylindres de section non-circulaire.

- Nombre de Nusselt *moyen* : *corrélation de Churchill-Bernstein* (♥) : pour $\mathrm{Re}_D \times \mathrm{Pr} > 0.2$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0.3 + \frac{0.62\,\mathrm{Re}_D^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{1/3}}{\left[1 + (0.4/\mathrm{Pr})^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{\mathrm{Re}_D}{282\,000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$

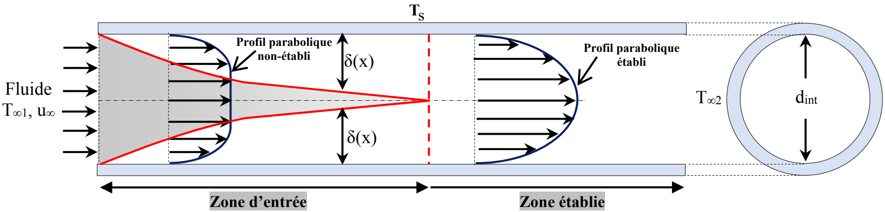
- Cette corrélation est recommandée, même si la simplicité de la *corrélation de Hilpert* est plus avantageuse.

- Les effets de la couche-limite associés à l'écoulement sur une sphère sont très similaires à ceux d'un cylindre circulaire.
- Nombre de Nusselt *moyen* : *corrélation de Whitaker* :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 2 + \left(0.4\,\mathrm{Re}_D^{1/2} + 0.06\,\mathrm{Re}_D^{2/3}\right)\mathrm{Pr}^{0.4}\left(\frac{\mu}{\mu_\mathrm{s}}\right)^{1/4}$$

$$\begin{bmatrix} 0.71 < \mathrm{Pr} < 380 \\ 3.6 < \mathrm{Re}_D < 7.6 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

- μ_s est évaluée à la température de surface T_s, et le reste des propriétés sont évaluées à la température du fluide en amont T_∞.
- Le rapport $\left(\dfrac{\mu}{\mu_\mathrm{s}}\right)$ tient compte des effets de propriétés non-uniformes dans la couche-limite.



- En raison des effets visqueux, le profil de vitesse uniforme à l'entrée se transforme progressivement en une distribution parabolique non-établi lorsque la couche-limite $\delta(x)$ commence à remplir la conduite dans la zone d'entrée.
- Au delà de la zone d'entrée, le profil de vitesse ne varie plus : le profil est **parabolique établi**. On parlera de **zone établie**.

Pour un *écoulement laminaire* ($Re_D < 2100$) *dans un tube circulaire* dans la **zone établie** :

- Pour une *densité de flux uniforme* :

$$\mathrm{Nu}_D = \frac{h\,D}{\lambda} = 4.36 \qquad [\varphi = \text{constante}]$$

- Pour une *température de surface uniforme* :

$$\mathrm{Nu}_D = \frac{h\,D}{\lambda} = 3.66 \qquad [T_\mathrm{s} = \text{constante}]$$

Pour les *tubes non-circulaires*, les corrélations précédentes peuvent être appliquées en utilisant le **diamètre hydraulique** D_h :

$$D_\mathrm{h} = \frac{4\,A_\mathrm{c}}{P}$$

où A_c et P sont la surface de la section de passage du fluide et le périmètre *mouillé*, respectivement.

Pour un *écoulement turbulent dans un tube circulaire* lisse, (densité de flux uniforme ou température de surface uniforme)

- *Corrélation de Dittus-Boelter* :

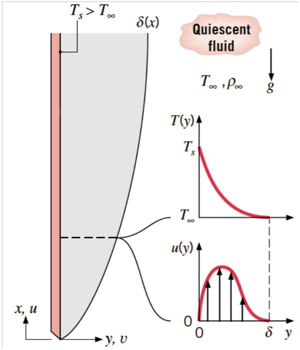
$$\mathrm{Nu}_D = 0.023\,\mathrm{Re}_D^{4/5}\,\mathrm{Pr}^n \qquad \begin{bmatrix} 0.6 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 160 \\ \mathrm{Re}_D \geqslant 10\,000 \\ \dfrac{L}{D} \geqslant 10 \end{bmatrix}$$

  où $n = 0.4$ pour le chauffage ($T_\mathrm{s} > T_\mathrm{m}$) et 0.3 pour le refroidissement ($T_\mathrm{s} < T_\mathrm{m}$).

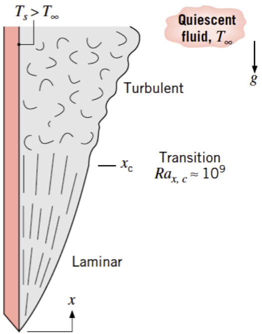
- Pour de grandes variations de propriétés thermophysiques, l'*équation de Sieder et Tate* est recommandée :

$$\mathrm{Nu}_D = 0.027\,\mathrm{Re}_D^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}\left(\frac{\mu}{\mu_\mathrm{s}}\right)^{0.14} \qquad \begin{bmatrix} 0.7 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 16\,700 \\ \mathrm{Re}_D \geqslant 10\,000 \\ \dfrac{L}{D} \geqslant 10 \end{bmatrix}$$

- Plaque verticale chauffée immergée dans un fluide *étendu et immobile* plus froid : développement de la couche-limite



- Le fluide proche de la plaque est moins dense que le fluide dans la zone de repos. **Le gradient de densité du fluide et le champ gravitationnel génèrent la poussée d'Archimède**.



- Pour la convection naturelle, les écoulements peuvent subir des perturbations entraînant la *transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent.*
- Cette transition dépend de la valeur relative de la poussée d'Archimède et des forces visqueuses dans le fluide. Pour les plaques verticales, le **nombre de Rayleigh critique** :

$$\mathrm{Ra}_{x,c} = \mathrm{Gr}_{x,c}\,\mathrm{Pr} = \frac{g\,\beta\,(T_\mathrm{s} - T_\infty)\,x_\mathrm{c}^3}{\nu\,\alpha} \approx 10^9$$

- **Coefficient de dilatation thermique isobare** :

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$$

- Pour un gaz parfait, $\rho = \dfrac{P}{r\,T}$:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{\rho}\,\frac{P}{r\,T^2} = \frac{1}{T}$$

 où T est la *température absolue*.
- Pour les liquides et les gaz réels, β doit être trouvé à partir de tables.
- Pour la convection naturelle les corrélations peuvent s'exprimer sous la forme

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}\,L}{k} = \text{fonction}\,(\mathrm{Gr}_L, \mathrm{Pr}) = C\,\mathrm{Ra}_L^n$$

- Pour les plaques verticales :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.59\,\mathrm{Ra}_L^{1/4} \qquad \left[10^4 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^9\right]$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.10\,\mathrm{Ra}_L^{1/3} \qquad \left[10^9 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{13}\right]$$

- La *corrélation de Churchill-Chu* peut être utilisée pour n'importe quel Ra_L :

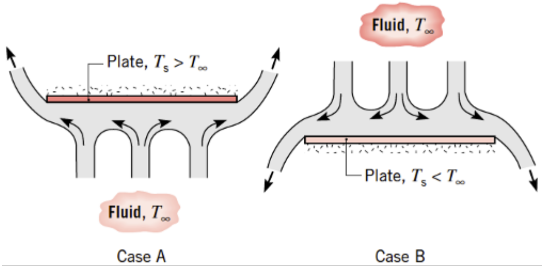
$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \left[0.825 + \frac{0.387\,\mathrm{Ra}_L^{1/6}}{\left[1 + (0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}}\right]^2$$

- Une légère amélioration de la précision peut être obtenue pour l'écoulement *laminaire* en utilisant

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.68 + \frac{0.670\,\mathrm{Ra}_L^{1/4}}{\left[1 + (0.492/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}} \qquad \left[\mathrm{Ra}_L \leqslant 10^9\right]$$

- Pour une plaque horizontale : les structures d'écoulement et le flux de chaleur dépendent étroitement du fait que la surface est chaude *ou* froide *et* qu'elle est orientée vers le haut *ou* vers le bas.
- Pour une *surface chaude orientée vers le bas* (cas A) et *une surface froide orientée vers le haut* (cas B) :

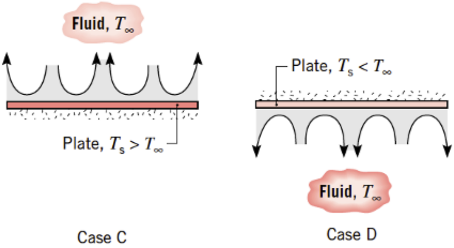
$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.27\,\mathrm{Ra}_L^{1/4} \qquad \left[10^5 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{10}\right]$$



- Pour une *surface chaude orientée vers le haut* (cas C) et une *surface froide orientée vers le bas* (cas D) :

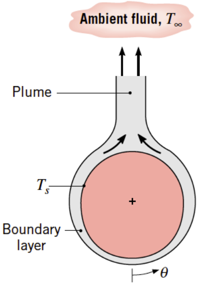
$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.54\,\mathrm{Ra}_L^{1/4} \qquad \left[10^4 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^7\right]$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0.15\,\mathrm{Ra}_L^{1/3} \qquad \left[10^7 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{11}\right]$$



- Ces corrélations utilisent la *longueur caractéristique* L définie par $L = \dfrac{A_s}{P}$ où A_s et P sont l'aire de la plaque et le périmètre, respectivement.

- Pour un *cylindre* chauffé, le développement de la couche-limite commence à $\theta = 0°$ et se termine à $\theta < 180°$ avec la formation d'un *panache* ascendant à partir du cylindre.



- Pour un *long cylindre horizontal, corrélations de Morgan* :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0.850\,\mathrm{Ra}_D^{0.188} \qquad [10^2 \leqslant \mathrm{Ra}_D \leqslant 10^4]$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0.480\,\mathrm{Ra}_D^{0.250} \qquad [10^4 \leqslant \mathrm{Ra}_D \leqslant 10^7]$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0.125\,\mathrm{Ra}_D^{0.333} \qquad [10^7 \leqslant \mathrm{Ra}_D \leqslant 10^{12}]$$

- La *corrélation de Churchill-Chu* est recommandée pour un large intervalle de nombre de Rayleigh

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = \left[0.60 + \frac{0.387\,\mathrm{Ra}_D^{1/6}}{\left[1 + (0.559/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{8/27}} \right]^2 \qquad \left[\mathrm{Ra}_D \leqslant 10^{12}\right]$$

- Pour une sphère isotherme : le développement de la couche-limite est similaire à celui du cylindre avec la formation d'un panache. La *corrélation de Churchill* est recommandée :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 2 + \frac{0.589\,\mathrm{Ra}_D^{1/4}}{\left[1 + (0.469/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{4/9}} \qquad \left[\mathrm{Pr} \geqslant 0.7, \mathrm{Ra}_D \leqslant 10^{11}\right]$$