Projet Probabilité Exercice 3.6

Groupe 10

August 2021

1 Correction de l'exercice 3.6

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$P(\{X=j\} \cap \{Y=k\}) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!}$$

a Déterminer λ. (On pourra étudier $f : x \mapsto 2xe^{2x-1} - 1$) sur $\mathbb{R}_+$.

Pour que $P(\{X=j\} \cap \{Y=k\})$ soit une loi de couple il faut qu'elle respecte la condition suivante :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=j\} \cap \{Y=k\}) \right) = 1$$

Notons les deux relations nécessaires par la suite :

- $a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = ae$
- $a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = a \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = ae^\lambda$

Posons :

$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X=j\} \cap \{Y=k\}) \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!} \right) = \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{j!k!} \right)$

Effectuons la résolution en deux étapes.

- Résolvons d'abord la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{j!k!}$:

  $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{j!k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j\lambda^{j+k} + k\lambda^{j+k}}{j!k!} = \frac{1}{j!} \left(j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j \lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^j \lambda^k}{k!} \right)$

  $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{j!k!} = \frac{\lambda^j}{j!} \left(j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \frac{\lambda^j}{j!} \left(je^\lambda + \lambda e^\lambda \right)$

  $\Longrightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{j!k!} = \frac{e^\lambda \lambda^j (j+\lambda)}{j!}$

- Résolvons à présent la somme $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^\lambda \lambda^j (j+\lambda)}{j!}$:

  $\Longrightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^\lambda \lambda^j (j+\lambda)}{j!} = e^\lambda \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\lambda^j}{j!} + \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) = e^\lambda \left(\lambda \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} + \lambda e^\lambda \right) = e^\lambda (\lambda e^\lambda + \lambda e^\lambda)$

  $\Longrightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^\lambda \lambda^j (j+\lambda)}{j!} = 2\lambda e^{2\lambda}$

On obtient finalement :

$\Longrightarrow \frac{1}{e} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{j!k!} \right) = \frac{2\lambda e^{2\lambda}}{e} = 1$

$\iff 2\lambda e^{2\lambda} = e \iff 2\lambda e^{2\lambda} - e = 0$

L'unique solution qui satisfasse l'équation $2\lambda e^{2\lambda} - e = 0$ est $\underline{\lambda = \frac{1}{2}}$

b Déterminer les lois de X et de Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes?

- D'après la résolution de la question précédente on avait $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$P(X = j) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{1}{e} \frac{e^{\lambda} \lambda^j (j + \lambda)}{j!}$$

  En posant $\lambda = \frac{1}{2}$ on a:

  $P(X = j) = \frac{1}{e} \frac{e^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^j (j+\frac{1}{2})}{j!} = \frac{1}{e} \frac{e^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^j (j+\frac{1}{2})}{j!} = \frac{2j+1}{2e^{\frac{1}{2}} 2^j j!}$

  $\iff P(X = j) = \frac{2j+1}{e^{\frac{1}{2}} 2^{j+1} j!}$

- Par symétrie des rôles, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{2k + 1}{e^{\frac{1}{2}} 2^{k+1} k!}$$

- X et Y sont indépendantes si et seulement :

  $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$ on a $P(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = P(X = j) \times P(X = k)$

  Avec $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient :

  - $P(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{(j+k)(\frac{1}{2})^{j+k}}{ej!k!}$
  - $P(X = j) \times P(X = k) = \frac{2j+1}{e^{\frac{1}{2}} 2^{j+1} j!} \times \frac{2k+1}{e^{\frac{1}{2}} 2^{k+1} k!}$

  Faisons une première vérification avec $(j, k) = (0, 0)$:

  - $P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{(0+0)(\frac{1}{2})^{0+0}}{e0!0!} = 0$
  - $P(X = 0) \times P(X = 0) = \frac{0+1}{e^{\frac{1}{2}} 2^{(0+1)} 0!} \times \frac{0+1}{e^{\frac{1}{2}} 2^{(0+1)} 0!} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} 2} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} 2} = \frac{1}{4e} \neq 0$

  Après vérification on constate que la proposition $P(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = P(X = j) \times P(X = k)$ n'est pas valable pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$

  <u>Conclusion :</u> Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.