Projet Probabilité Exercice 1.19

Groupe 10

August 2021

1 <u>Correction de l'exercice 2.8</u>

On dispose de deux pièces A et B.

- La pièce A est équilibrée, au sens où elle donne face et pile avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- La pièce B donne face avec probabilité p et pile avec probabilité $1 - p$.

On eectue une succession de lancers selon le procédé suivant :

- On choisit une des deux pièces A, B au hasard, on la lance.
- A chaque lancer, si on obtient face, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

Pour tout entier naturel, on note An l'événement

"le n-ième lancer se fait avec la pièce A"

Soit $an = \mathbb{P}[A_n]$, l'objectif est d'étudier la suite $(an, n \geq 1)$

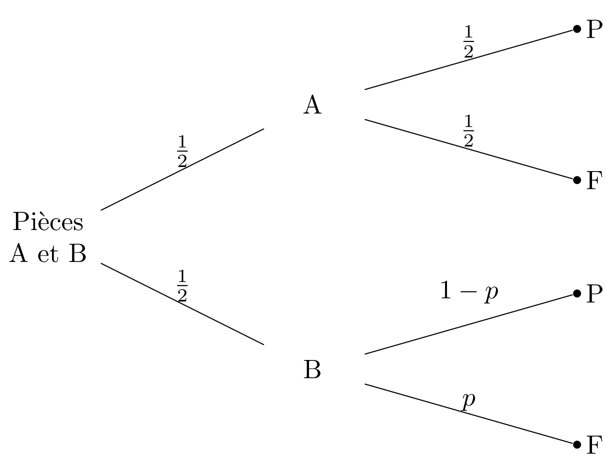
1 Montrer que $a_1 = \frac{1}{2}$

Notons a_1 la probabilité que la pièce A soit lancée au premier tour. Sachant que le choix de la pièce est aléatoire alors les deux pièces ont la même probabilité d'être tirées. Posons :

$P[A_1] = P[B_1]$ et $P[A_1] + P[B_1] = 1 \Longleftrightarrow P[A_1] + P[A_1] = 1 \Longleftrightarrow 2P[A_1] = 1 \Longleftrightarrow P[A_1] = \frac{1}{2}$

<u>Conclusion :</u> $a_1 = \frac{1}{2}$

Nous obtenons l'arbre de probabilité suivant :



2 Montrer que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + (1-p)(1-a_n)$

Soient P et F respectivement les événements "On obtient pile à la lancée de la pièce" et "On obtient face à la lancée de la pièce".
Nous savons que pour que la pièce A soit choisie à la $(n+1)$ ième lancée il y a deux cas possibles :

- Si la pièce A est prise à la n ième lancée alors il faut obtenir comme résultat pile pour relancer à nouveau la pièce A :
  Donc sa probabilité est égale à $\mathbb{P}[A_n \cap P] = \mathbb{P}[P/A_n] \times \mathbb{P}[A_n] = \frac{1}{2}a_n$
- Si la pièce B est prise à la n ième lancée alors il faut tomber sur face pour lancer la pièce A au prochain tour :
  Donc sa probabilité sera la suivante $\mathbb{P}[B_n \cap F] = \mathbb{P}[B_n/F] \times \mathbb{P}[B_n] = (1-p)(1-a_n)$

Finalement on obtient :

$\mathbb{P}[A_{n+1}] = \mathbb{P}[A_n \cap P] + \mathbb{P}[B_n \cap F] = \frac{1}{2}a_n + (1-p)(1-a_n)$

3 On suppose que $p = 3/4$. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

En supposant que $p = \frac{3}{4}$, démontrons par récurrence l'hypothèse H_n selon laquelle pour tout $n \geq 1$ alors :

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

- Posons l'hypothèse H_1, pour $n = 1$ nous avons :

  $a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = P[A_1]$

  Conclusion 1 : L'hypothèse H_1 est vraie.

- Démontrons que si H_n est vraie alors H_{n+1} est aussi vraie.
  - $a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$
  - Nous avions trouvé à la question précédente :

    $$\mathbb{P}[A_{n+1}] = \frac{1}{2}a_n + (1-p)(1-a_n)$$

    Remplacons p par sa valeur et a_n par sa formule en supposant que l'hypothèse H_n est vraie :

    $\mathbb{P}[A_{n+1}] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right] + \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(1 - \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right]\right)$

    $\Longrightarrow \mathbb{P}[A_{n+1}] = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$

    $\Longrightarrow \mathbb{P}[A_{n+1}] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{3\times 4} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4\times 6}\right] + \frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

    $\Longrightarrow \mathbb{P}[A_{n+1}] = \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)}\left[\frac{2-4+3}{6}\right] + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = a_{n+1}$

  Conclusion 2 : L'hypothèse H_{n+1} est vraie si H_n est vraie.

Conclusion : En supposant que $p = \frac{3}{4}$, on a démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

4 Déterminer la limite de $(a_n, n \geq 1)$

Posons $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3}$

car pour une suite géométrique q^n, si $0 \leq q < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

Ici $q = \frac{1}{4}$ et $0 \leq \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} = 0$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}$ avec $n \geq 1$