Projet Probabilité Exercice 1.10

Groupe 10

August 2021

1 Correction de l'exercice 1.10

Notons N_1, N_2, B_1 et B_2 respectivement les événements "la boule obtenue au premier tirage est noire", "la boule obtenue au deuxième tirage est noire", "la boule obtenue au premier tirage est blanche" et "La boule obtenue au deuxième tirage est blanche".

- Pour le premier tirage, on considère que toutes les boules ont la même chance d'être tirée :

  Soit X, la variable aléatoire prenant chaque valeur de l'ensemble 1, 2, ..., 5, alors X suit une loi uniforme : $X \sim U(\{1, 2, ..., 5\})$ et on a $P(X = k) = P(A_1) = P(B_1) = \frac{1}{5}$ avec $k \in \{1, 2, ..., 5\}$.

- En ayant placé la boule tirée dans la deuxième urne, selon la couleur de cette boule, on obtient soit :
  - <u>1^{er} cas</u> : 4 boules blanches et 4 boules noires dans la deuxième urne si la boule qui y placée est blanche;
  - <u>2^{eme} cas</u> : 3 boules blanches et 5 boules noires dans la deuxième urne si la boule qui y est placée est noire.

  Le nombre total de boules présentes dans la deuxième urne pour les deux cas sera ainsi de 8 boules.

  En considérant que le tireur à examiner la couleur de la boule lors du deuxième tirage, alors la probabilité de tirer une boule c'est le rapport entre le nombre de combinaisons d'une boule prise parmi n boules de même couleur et le nombre de combinaisons d'une boule prise parmi 8 boules (nombre total de boules dans la deuxième urne). En suivant cette logique on obtient les résultats suivants les différents cas énoncés ci-dessus :

  - <u>Pour le 1^{er} cas</u> :
    * On calcule la probabilité de tirer une boule blanche dans la deuxième urne sachant qu'on à tirer une boule blanche dans la première urne.

      $P(B_2/B_1) = \frac{C_1^4}{C_1^8} = \frac{4}{8}$

    * On calcule la probabilité de tirer une boule noire dans la deuxième urne sachant qu'on à tirer une boule blanche dans la première urne.

      $P(N_1/B_1) = \frac{C_1^4}{C_1^8} = \frac{4}{8}$

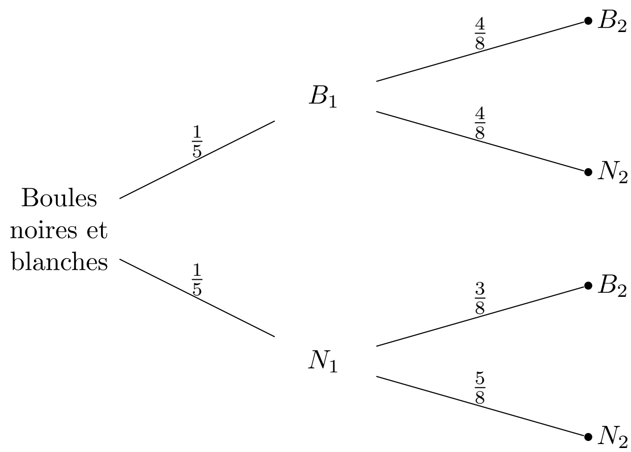
  - <u>Pour le 2^{eme} cas</u> :
    * On calcule la probabilité de tirer une boule blanche dans la deuxième urne sachant qu'on à tirer une boule noire dans la première urne.

      $P(B_2/N_1) = \frac{C_1^3}{C_1^8} = \frac{3}{8}$

* On calcule la probabilité de tirer une boule noire dans la deuxième urne sachant qu'on à tirer une boule noire dans la première urne.

  $P(N_2/N_1) = \frac{C_1^4}{C_1^8} = \frac{5}{8}$

Pour obtenir une boule noire, on peut au premier tirage avoir soit une boule noire, soit une boule blanche. Donc sa probabilité c'est la somme entre la probabilité de tirer une boule noire au premier tirage multipliée par la probabilité de tirer une boule noire au deuxième sachant qu'on a tiré une boule noire au premier tirage et la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage multipliée par la probabilité de tirer une boule noire au deuxième tirage sachant qu'on a tiré une boule noire au premier tirage. Pour illustrer cela on peut tracer l'arbre de probabilité suivante :



La probabilité de tirer une boule noire dans la deuxième urne est donc :

$P(N) = P(N_2 \cap B_1) + P(N_2 \cap N_1) = P(B_1) \times P(N_2/B_1) + P(N_1) \times P(N_2/N_1) = \frac{1}{5} \times \frac{4}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{4+5}{45} = \frac{9}{45}$

$\Longleftrightarrow P(N) = \frac{9}{45}$