Projet Probabilité Exercice 2.8

Groupe 10

August 2021

1 Correction de l'exercice 2.8

Un couple décide d'arrêter les naissances de ses enfants à première fille, ou, à défaut, à un nombre maximum , $n = 5$. A chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est p et les sexes lors des différentes naissances sont indépendants. On note Y le nombre de garçons de la famille, et X le nombre de filles.

1 Quels sont les nombres possibles de filles dans une famille ? Calculer la probabilité que la famille ne soit composée que de garçons.

- Déterminons le nombre de filles dans une famille.

  Notons les deux cas possibles :

  - Le couple décide d'arrêter les naissances à la première fille, sachant que le nombre de naissances est inférieur ou égal à 5. Dans ce cas le couple n'a qu'une fille au cours des n naissances :

    $$X = 1$$

  - Le couple décide d'arréter à la 5ième naissance, sachant qu'aucune fille n'est née. Dans ce cas, le couple n'a aucune fille au cours des $n = 5$ naissances :

    $$X = 0$$

  Conclusion : X ne peut prendre donc que deux valeurs possibles, à savoir 1 ou 0. autrement dit $X(\Omega) = \{1, 0\}$

- Calculons la probabilité que la famille ne soit composée que de garcons.

  Pour que la famille ne soit composée que de garcons il faut que le nombre de naissances soit égal à cinq ($n = 5$) et que le nombre de filles dans la famille soit nul ($X = 0$). Autrement dit c'est la probabilité que le couple obtienne 5 garcons au cours des 5 naissances. Donc :

  $$P(X = 0) = p \times p \times p \times p \times p = p^5$$

  Avec p, la probabilité que le couple obtienne un garcon au cours d'une naissance.

2 En déduire que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi = 1 - p^n$ et en déduire son espérance.

- Montrons que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi = 1 - p^n$:

  Nous savons que $X(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc on peut dire que :

– $P(\Omega) = P(X=0) + P(X=1) = 1 \Longrightarrow P(X=1) = 1 - P(X=0) \Longrightarrow P(X=1) = 1 - p^5$

Avec n = 5 nous avons $P(X=1) = 1 - p^n$

– Notons k, la valeur prise par X, alors on a :

$P(X=k) = (1-p^n)^k \times (1-(1-p^n))^{1-k} = (1-p^n)^k \times (1-1+p^n)^{1-k} = (1-p^n) \times (p^n)^{1-k}$

– Faisons les calculs pour vérifier :

$P(X=1) = (1-p^n)^1 \times (p^n)^{1-1} = 1 - p^n$

$P(X=0) = (1-p^n)^0 \times (p^n)^{1-0} = p^n$

Conclusion : X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\pi = 1 - p^n$

- Calculons l'espérance de X :

$E(X) = \sum_{k=0}^{1} kP(X=k) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = 1 \times (1-p^n) = 1 - p^n$

$\Longleftrightarrow E(X) = \pi$

3 Montrer que la loi de Y est donnée par

$$P(Y=k) = (1-p)p^k \text{ si } k = 1, ..., n-1$$
$$P(Y=n) = p^n$$

- Notons la variable aléatoire X' le nombre de naissances avant l'obtention du succès c'est à dire une fille, alors $X' \sim \mathbb{G}(1-p)$ avec $(1-p)$ la probabilité d'avoir une fille à chaque naissance.

  Posons :
$$P(X'=k') = (1-p)(1-(1-p))^{k'-1} = (1-p)p^{k'-1}$$

  Pour qu'on est au moins un garcon sur les n naissances avec une fille à la dernière naissance, il faut que $k'-1$ prennent ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n-1\} \backslash \{0\}$

  Notons $k = k' - 1$, le nombre de garcons dans la famille sachant qu'il y a une fille à la n ième naissance, donc on obtient :

  $P(Y=k) = (1-p)p^k = P(X'=k') = (1-p)p^{k'-1}$ avec $k = k'-1 \in \{1, 2, ..., n-1\}$

- $P(Y=n)$ c'est la probabilité de n'avoir que des garcons sur les n naissances, c'est-à-dire de n'avoir aucune fille sur les n naissances :

$$P(Y=n) = P(X=0) = p^n \text{ avec } n = 5$$

4 En déduire $\mathbb{E}[Y]$.

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{n-1} k \times P(Y=k) + nP(Y=n)$$

$\longrightarrow E[Y] = \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)p^k + np^n = (1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + np^n = (1-p)p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} + np^n$

Posons $S_{n-1}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} \Longleftrightarrow S_{n-1}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} [p^k]'$ car la dérivée par rapport p de p^k est kp^{k-1}

Soit la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géometrique $U_{n-1}(p) = \sum_{k=1}^{n-1} p^k = \frac{1-p^{n-1}}{1-p}$

$\Longleftrightarrow [U_{n-1}(p)]' = S_{n-1}(p) = \frac{-(n-1)p^{n-2}\times(1-p)+p(1-p^{n-1})}{(1-p)^2}$

$\Longleftrightarrow E[Y] = p(1-p)\frac{-(n-1)p^{n-2}\times(1-p)+p(1-p^{n-1})}{(1-p)^2} + np^n = p\frac{-(n-1)p^{n-2}\times(1-p)+p(1-p^{n-1})}{1-p} + np^n$

En remplacant n par 5 qui est le nombre maximal de naissances on obtient :

$E[Y] = p\frac{-4p^3\times(1-p)+p(1-p^4)}{1-p} + 5p^5 = \frac{-4p^4\times(1-p)+p^2(1-p^4)+5p^5\times(1-p)}{1-p}$

$\Longleftrightarrow E[Y] = \frac{p^2(-4p^2+4p^3+1-p^4+5p^3-5p^4)}{1-p} = \frac{p^2(-6p^4+9p^3-4p^2+1)}{1-p}$

<u>Conclusion :</u> $E[Y] = \frac{p^2(-6p^4+9p^3-4p^2+1)}{1-p}$