Projet Probabilité Exercice 5.5

Groupe 10

August 2021

Correction de l'exercice 5.5.

Soit $f : t \longmapsto \lambda e^{-|t|}$

1) Déterminons λ pour que $f(t)$ soit une densité

$f(t)$ est une densité de probabilité si :

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-|t|} = 1.$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-|t|} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-|t|} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-|t|} dt + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-|t|} dt = 1$$

Or $\begin{cases} \text{si } t \in]-\infty, 0[\text{ alors } t < 0 \Rightarrow |t| = -t. \\ \text{si } t \in [0, +\infty[\text{ alors } t > 0 \Rightarrow |t| = t. \end{cases}$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-|t|} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-(-t)} dt + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-t} dt = 1.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{t} dt + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-t} dt = 1.$$

$$\Rightarrow \lambda \left[e^{t} \right]_{-\infty}^{0} + \lambda \left[-e^{-t} \right]_{0}^{+\infty} = 1.$$

$$\Rightarrow \lambda \left[(1-0) - (0-1) \right] = 1$$

$$\Rightarrow \lambda(2) = 1 \Rightarrow 2\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{2}} \text{ alors}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

2°) Déterminons la fonction de répartition $F(t)$:

En remplaçant A par sa vraie valeur, on a :

- Si $t \in]-\infty ; 0] \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2} e^{-(-x)}\,dx$

$\Leftrightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2} e^{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} e^{x}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x}\right]_{-\infty}^{t}$

$\Leftrightarrow \boxed{F(t) = \frac{1}{2} e^{t}}$

- Si $t \in [0 ; +\infty[\Rightarrow F(t) = \int_{0}^{t} f(x)\,dx = \int_{0}^{t} \frac{1}{2} e^{-(x)}\,dx$

$\Leftrightarrow F(t) = \int_{0}^{t} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{t}$

$\Leftrightarrow F(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow F(t) = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t}\right]$

Conclusion : $F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{t} & \text{si } t \in]-\infty ; 0] \\ \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t}\right] & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}$

3°) Calcul des deux premières moments :

- Moment d'ordre 1 : Espérance de t.

Posons $E(t) = \int_{\mathbb{R}} t\, f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} t \times \frac{1}{2} e^{-|t|} dt$

- Si $t \in]-\infty ; 0]$ alors $f(t) = \frac{1}{2} e^{t} dt$

Nous aurons dans ce cas :

$\int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} t e^{t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} t e^{t} dt$

Posons :

$\begin{cases} u = t & \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{t} & \Rightarrow v = e^{t} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = \frac{1}{2} [t e^{t}]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{t} dt$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = \frac{1}{2} [0 - 0] - \frac{1}{2} [e^{t}]_{-\infty}^{0}$

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = -\frac{1}{2} [e^{0} - 0] = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt = -\frac{1}{2}}$ ①

- Si $t \in [0 ; +\infty[$ alors $f(t) = \frac{1}{2} e^{-t} dt$

Nous aurons dans ce cas :

$\int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} t e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} t e^{-t} dt$

Posons :

$\begin{cases} u = t & \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-t} & \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \frac{1}{2} [-t e^{-t}]_{0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} -e^{-t} dt$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = 0 - \frac{1}{2} [e^{-t}]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = -\frac{1}{2}}$ ②

① et ② nous donne :

$E(t) = \int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$

$\Leftrightarrow E(t) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow \boxed{E(t) = -1}$

- Moment d'ordre 2 : Espérance de t^2.

Posons $E(t^2) = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 \times \frac{1}{2} e^{-|t|}dt = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} t^2 \times e^{-|t|}dt$

- Si $t \in]-\infty;0]$, $f(t) = \frac{1}{2}e^{t}$
- si $t \in [0;+\infty[$, $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}$

Nous aurons dans ce cas :

$$E(t^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} t^2 e^t dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t}dt$$

<u>Posons</u> :

$$\left| \begin{array}{l} u = t^2 \Rightarrow u' = 2t \\ v' = e^t \Rightarrow v = e^t \end{array} \right.$$

Et

$$\left| \begin{array}{l} A = t^2 \Rightarrow A' = 2t \\ B' = e^{-t} \Rightarrow B = -e^{-t} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow E(t^2) = \frac{1}{2}\times\left([t^2 e^t]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 2te^{t}dt \right) + \frac{1}{2}\times\left(-[t^2 e^{-t}]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} 2te^{-t}dt \right)$$

$$\Leftrightarrow E(t^2) = -\int_{-\infty}^{0} te^t dt + \int_{0}^{+\infty} t e^{-t}dt$$

$$\Leftrightarrow E(t^2) = -\left([te^t]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^t dt \right) + \left(-[te^{-t}]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt \right)$$

$$\Leftrightarrow E(t^2) = \int_{-\infty}^{0} e^t dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = [e^t]_{-\infty}^{0} + [-e^{-t}]_{0}^{+\infty} = 1 + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(t^2) = 2}$$