Projet d'optimisation

Exercice 3:

Soit le problème d'optimisation suivant:

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} c_1(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 \leq 0 \\ c_2(x_1,x_2) = x_1 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

I. Résolution analytique du problème:

Formes standards des contraintes pour un problème de minimisation:

$$\begin{cases} -c_1(x_1,x_2) = -\left[(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13\right] \geq 0 \\ -c_2(x_1,x_2) = -x_1 \geq -\frac{1}{2} \iff -\left[x_1 - \frac{1}{2}\right] \geq 0 \end{cases}$$

1°) Déterminons le lagrangien L associé à ce problème d'optimisation:

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = f(x) + \lambda_1 c_1(x_1,x_2) + \lambda_2\left(c_2(x_1,x_2) - \frac{1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = 2x_1 + 3x_2 + \lambda_1\left[(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13\right] + \lambda_2\left[x_1 - \frac{1}{2}\right]$$

2°) Donnons les conditions KKT du premier ordre:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_1} = 0 \iff 2 + 2\lambda_1(x_1-1) + \lambda_2 = 0 \iff \lambda_1 = \frac{-2-\lambda_2}{2(x_1-1)} \\ \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x_2} = 0 \iff 3 + 2\lambda_1(x_2-2) = 0 \iff \lambda_1 = \frac{-3}{2(x_2-2)} \\ \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} \geq 0 \iff (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 \leq 0 \\ \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} \geq 0 \iff x_1 - \frac{1}{2} \leq 0 \end{cases}$$

3°) À l'aide des conditions complémentaires, identifier les contraintes actives: Les conditions complémentaires sont les suivantes

$$\begin{cases} \lambda_1 c_1(x_1,x_2) = 0 \iff \lambda_1 = 0 \text{ ou } (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0 \\ \lambda_2\left[c_2(x_1,x_2) - \frac{1}{2}\right] = 0 \iff \lambda_2 = 0 \text{ ou } x_1 - \frac{1}{2} = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \text{ et } \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1^{er} cas : On suppose que les contraintes sont actives

- On note :

$$\begin{cases} (x_1-1)^2+(x_2-2)^2-13=0 & (1) \\ x_1-\frac{1}{2}=0 \iff x_1=\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

En remplaçant x_1 par sa valeur dans (1) on obtient :

$\Rightarrow \frac{1}{4}+(x_2-2)^2-13=0 \iff (x_2-2)^2=\frac{51}{4} \iff x_2-2=\sqrt{\frac{51}{4}}$

ou $x_2-2=-\sqrt{\frac{51}{4}} \iff x_2=\sqrt{\frac{51}{4}}+2$ ou $x_2=-\sqrt{\frac{51}{4}}+2$

$\Rightarrow x_2=5,57$ ou $x_2=-1,57$

- Vérifions si les conditions du premier ordre sont respectées :
  - Pour $(x_1;x_2)=(0,5;-1,57)$:

    $\lambda_1=\frac{-3}{2(-1,57-2)}=0,42$ et $\lambda_2=-2\times 0,42\times(0,5-1)-2=-1,58$

    $\Rightarrow \lambda_1=0,42$ et $\lambda_2=-1,58<0$

    Donc $(x_1;x_2)=(0,5;-1,57)$ n'est pas une solution possible car ne respecte pas la condition $\lambda_2\geq 0$
  - Pour $(x_1;x_2)=(0,5;5,57)$:

    $\lambda_1=\frac{-3}{2(5,57-2)}=-0,42$ et $\lambda_2=2\times 0,42\times(0,5-1)-2=-2,42$

    $\Rightarrow \lambda_1=-0,42<0$ et $\lambda_2=-2,42<0$

    Donc $(x_1;x_2)=(0,5;5,57)$ n'est pas une solution possible car ne respecte pas les conditions $\lambda_1\geq 0$ et $\lambda_2\geq 0$

Conclusion du 1^{er} cas : $c_1(x_1,x_2)$ et $c_2(x_1,x_2)$ ne sont pas toutes les deux actives.

Scanné avec CamScanner

$2^{ème}$ cas : Supposons que seule la contrainte $c_1(x_1, x_2)$ est active.

- On note :

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 & (1) \\ \lambda_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Utilons l'égalité déduite des deux premières conditions en remplaçant λ_2 par sa valeur :

$$\lambda_1 = \frac{-1}{(x_1 - 1)} = \frac{-3}{2(x_2 - 2)} \iff 3(x_1 - 1) = 2(x_2 - 2) \iff x_1 - 1 = \frac{2}{3}(x_2 - 2)$$

remplaçons $(x_1 - 1)$ dans (1) :

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{3}(x_2 - 2)\right]^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0 \Rightarrow (x_2 - 2)^2 \times \left[\frac{4}{9} + 1\right] - 13 = 0$$

$$\Rightarrow (x_2 - 2)^2 = \frac{13 \times 9}{13} = 9 \Rightarrow x_2 - 2 = 3 \text{ ou } x_2 - 2 = -3$$

$$\Rightarrow x_2 = 3 + 2 = 5 \text{ ou } x_2 = -3 + 2 = -1$$

Suivant les valeurs de x_2, nous obtenons pour x_1 :

- Si $x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}(5 - 2) + 1 = 3 \iff x_1 = 3$
- Si $x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}(-1 - 2) + 1 = -1 \iff x_1 = -1$

- Vérifions si les conditions du premier ordre sont respectées :

- Pour $(x_1 ; x_2) = (3 ; 5)$:

$\lambda_1 = \frac{-1}{(5 - 1)} = -0,5$ et $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -0,5 < 0}$

Donc $(x_1 ; x_2) = (3 ; 5)$ n'est pas une solution possible car ne respecte pas la condition $\lambda_1 \geq 0$

- Pour $(x_1 ; x_2) = (-1 ; -1)$:

$\lambda_1 = \frac{-1}{(-1-1)} = 0,5$ et $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$

Donc $\boxed{(x_1 ; x_2) = (-1 ; -1)}$ est une solution possible car respecte les conditions du premier ordre

Conclusion du $2^{ème}$ cas : $\underline{c_1(x_1, x_2) \text{ est la seule contrainte active}}$ avec une solution $(x_1 ; x_2) = (-1 ; -1)$; $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = 0$

et $f(-1, -1) = 2(-1) + 3(-1) = -5$

Scanné avec CamScanner

4°) Montrer que la matrice Hessienne de L est définie positive :

Le lagrangien associé à $\lambda_1 = 0,5$ et $\lambda_2 = 0$ est :

$$L(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 0,5\left[(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13\right]$$

- Notons la matrice Hessienne de L suivante :

$$\Delta_{xx}L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2)}{\partial x_1 x_2} \\ \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2)}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\Delta_{xx}L = \begin{bmatrix} 2\times 0,5 & 0 \\ 0 & 2\times 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Déterminons les mineurs principaux diagonaux de la matrice $\Delta_{xx}L$:
  - Pour le premier mineur principal :

    $r_0 = \det(1) = \underline{1 > 0}$
  - Pour le deuxième mineur principal :

    $s_0 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\times 1 - 0 = \underline{1 > 0}$

Puisque les mineurs principaux de la matrice $\Delta_{xx}L$ sont strictement positifs donc <u>la matrice Hessienne de L est définie positive.</u>

5°) La matrice Hessienne de L étant définie positive donc L ou f admet un minimum local strict qui est $\boxed{(x_1 ; x_2) = (-1 ; -1)}$

(L'unicité de la solution ne peut-être admise car $C_1(x_1, x_2)$ n'est pas linéaire)

Scanné avec CamScanner

II. Résolution graphique :

1) Représenter graphiquement le domaine (domaine réalisable) associé avec contraintes de ce probléme d'optimisation:

- Déterminons les coordonnées de nos contraintes:

• Pour la premiére contrainte $c_1(x_1, x_2)$:

$c_1(x_1, x_2) = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 \leq 0$

transformons la contrainte en équation:

$\Rightarrow (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0 \iff (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 = 13$

Il s'agit d'une équation de cercle de centre $C = (1, 2)$ et de rayon $r = \sqrt{13} = 3,61$

• Pour la deuxiéme contrainte $c_2(x_1, x_2)$:

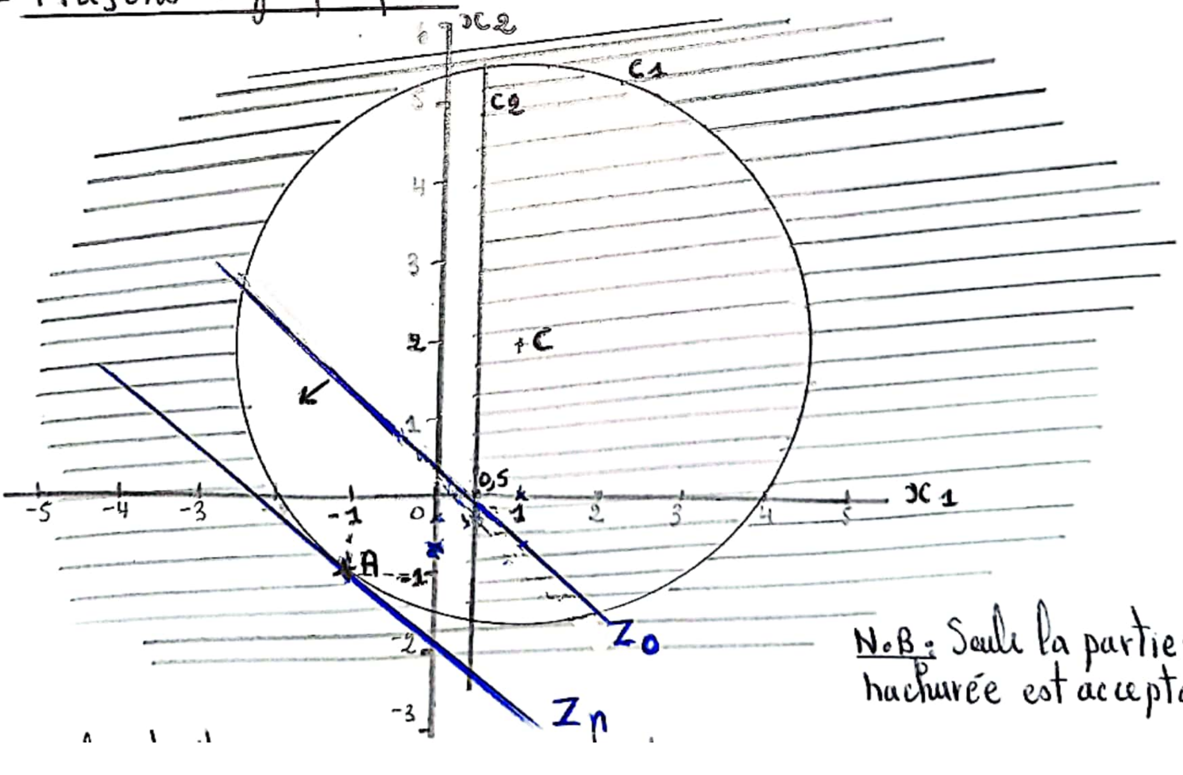
$c_2(x_1, x_2) = x_1 \leq \frac{1}{2}$

transformons la contrainte en équation:

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

Il s'agit d'une droite d'équation $x_1 = \frac{1}{2}$

- Traçons le graphique :



N.B : Seule la partie non hachurée est acceptable.

2°) Tracer les droites $2x_1 + 3x_2 = \text{constante}$: Posons $\underline{Z_0 = 2x_1 + 3x_2 = 0}$

- Pour $x_1 = 0,5 \Rightarrow 3x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -0,33$
- Pour $x_1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -0,67$

(voir graphique)

Pour tracer Z_n, il suffit de déplacer Z_0 vers le bas de manière à ce qu'elle atteigne un point (minimum) sur la contrainte C_1.

3°) Nous pouvons en déduire que le minimum de ce probléme d'optimisation est le point $\boxed{A = (-1 ; -1)}$

Scanné avec CamScanner