Projet d'optimisation:

Exercice 1:

Soit le probléme d'optimisation suivant :

$$\min f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} c_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (2 - x_2)^2 - 13 \leq 0 \\ c_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - x_1 \leq 0 \end{cases}$$

I- Résolution analytique :

1°) Déterminons le Lagrangien de L

Formes standards des contraintes pour un probléme de minimisation:

$$\begin{cases} -c_1(x_1, x_2) = -\left[(x_1-1)^2 + (2-x_2)^2 - 13\right] \geq 0 \\ -c_2(x_1, x_2) = -x_1 \geq -\frac{1}{2} \iff x_1 - \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases}$$

le lagrangien L est donc :

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = f(x) + \lambda_1 c_1(x_1, x_2) + \lambda_2 c_2(x_1, x_2) ;$$

$$\Rightarrow L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 3x_2 + \lambda_1\left[(x_1-1)^2 + (2-x_2)^2 - 13\right] + \lambda_2\left(\frac{1}{2} - x_1\right)$$

2°) Donnons les conditions KKT du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} = 0 \iff 2 + 2\lambda_1(x_1 - 1) - \lambda_2 = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} = 0 \iff 3 - 2\lambda_1(2 - x_2) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{2(x_1 - 1)} \qquad (2) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2(2 - x_1)}$$

3°) À l'aide des conditions complémentaires, identifier les contraintes actives

- Les conditions complémentaires sont les suivantes:

$$\begin{cases} \lambda_1 C_1(x_1, x_2) = 0 \iff \lambda_1 = 0 \text{ ou } (x_1-1)^2 + (2-x_2)^2 - 13 = 0 \\ \lambda_2 C_2(x_1, x_2) = 0 \iff \lambda_2 = 0 \text{ ou } \frac{1}{2} - x_1 = 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \text{ et } \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1^{er} cas : Les deux contraintes sont actives

$$\begin{cases} (x_1-1)^2+(2-x_2)^2-13=0 \quad (1) \\ \frac{1}{2}-x_1=0 \iff x_1=\frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

- remplaçons x_1 par sa valeur dans (1) :

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(2-x_2)^2-13=0$

$\Rightarrow \frac{1}{4}+(2-x_1)^2-13=0$

$\Rightarrow (2-x_2)^2=13-\frac{1}{4} \iff 2-x_2=\pm\sqrt{\frac{51}{4}}$

$\Rightarrow x_2=-\sqrt{\frac{51}{4}}+2$ ou $x_2=\sqrt{\frac{51}{4}}+2$

$\Rightarrow x_2=\boxed{-1,57}$ ou $x_2=\boxed{5,57}$

- Vérifions si $(x_1;x_2)=(0,5;-1,57)$ et $(x_1;x_2)=(0,5;5,57)$ sont des solutions possibles du probléme :

* Pour $(x_1;x_2)=(0,5;-1,57)$:

$\lambda_1=\frac{3}{2(2+1,57)}=\boxed{0,42}$

$\lambda_2=2\lambda_1(x_1-1)+2=2\times 0,42(0,5-1)+2 \Rightarrow \lambda_2=\boxed{1,58}$

$\lambda_1>0$ et $\lambda_2>0$
Donc $\boxed{(x_1;x_2)=(0,5;-1,57)}$ est une solution possible car respecte les conditions du premier ordre

* Pour $(x_1;x_2)=(0,5;5,57)$:

$\lambda_1=\frac{3}{2(2-5,57)}=\boxed{-5,355}$

$\lambda_2=2\lambda_1(0,5-1)+2=-2\times 5,355\times(0,5-1)+2=\boxed{7,355}$

$\lambda_1<0$ et $\lambda_2>0$
Donc $(x_1;x_2)=(0,5;5,57)$ n'est pas une solution possible car ne respecte pas la condition $\lambda_1\geq 0$

Conclusion du 1^{er} cas : Les deux deux contraintes sont actives avec comme solution du probléme le point $(x_1;x_2)=(0,5;-1,57)$

$\boxed{f(0,5;-1,57)=-3,71}$

Scanné avec CamScanner

4°) Montrons que la matrice Hessienne de L est définie positive

$$\Delta_{xx}L = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1 x_2} \\ \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial^2 x_2} \end{bmatrix}$$

Avec $\lambda_1 = 0,42$ et $\lambda_2 = 1,58$ nous obtenons le Lagrangien =

$$L(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 0,42\left[(x_1-1)^2 + (2-x_2)^2 - 13\right] + 1,58\left(\frac{1}{2} - x_1\right)$$

- Donc la matrice Hessienne associée est :

$$\Delta_{xx}L = \begin{bmatrix} 2\times 0,42 & 0 \\ 0 & 2\times 1,58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,84 & 0 \\ 0 & 3,16 \end{bmatrix}$$

- Soit r_0 le premier mineur principal diagonal de $\Delta_{xx}L$ =

$$r_0 = \det(0,84) = \boxed{0,84 > 0}$$

- Soit s_0, le deuxième mineur principal diagonal de $\Delta_{xx}L$ =

$$s_0 = \det\begin{bmatrix} 0,84 & 0 \\ 0 & 3,16 \end{bmatrix} = 0,84 \times 3,16 = \boxed{2,65 > 0}$$

$r_0 > 0$ et $s_0 > 0$

Donc la matrice Hessienne de L est définie positive

5°) La matrice Hessienne de L étant définie positive donc L ou f admet un minimum local strict qui est $\boxed{(x_1 ; x_2) = (0,5 ; -1,57)}$

(L'unicité de la solution ne peut-être admise car $C_1(x_1, x_2)$ n'est pas linéaire).

Scanné avec CamScanner

II. Résolution graphique :

1°) Représenter graphiquement le domaine (domaine réalisable) associé aux contraintes de ce problème d'optimisation :

- Pour la première contrainte $c_1(x_1; x_2)$:

$$c_1(x_1, x_2) = (x_1-1)^2 + (2-x_2)^2 - 13 \leq 0$$

$\Rightarrow$ transformons la en équation :

$$(x_1-1)^2 + (2-x_2)^2 - 13 = (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0$$

Il s'agit d'une équation de cercle de centre $C = (1, 2)$ et de rayon $r = \sqrt{13} = 3{,}61$

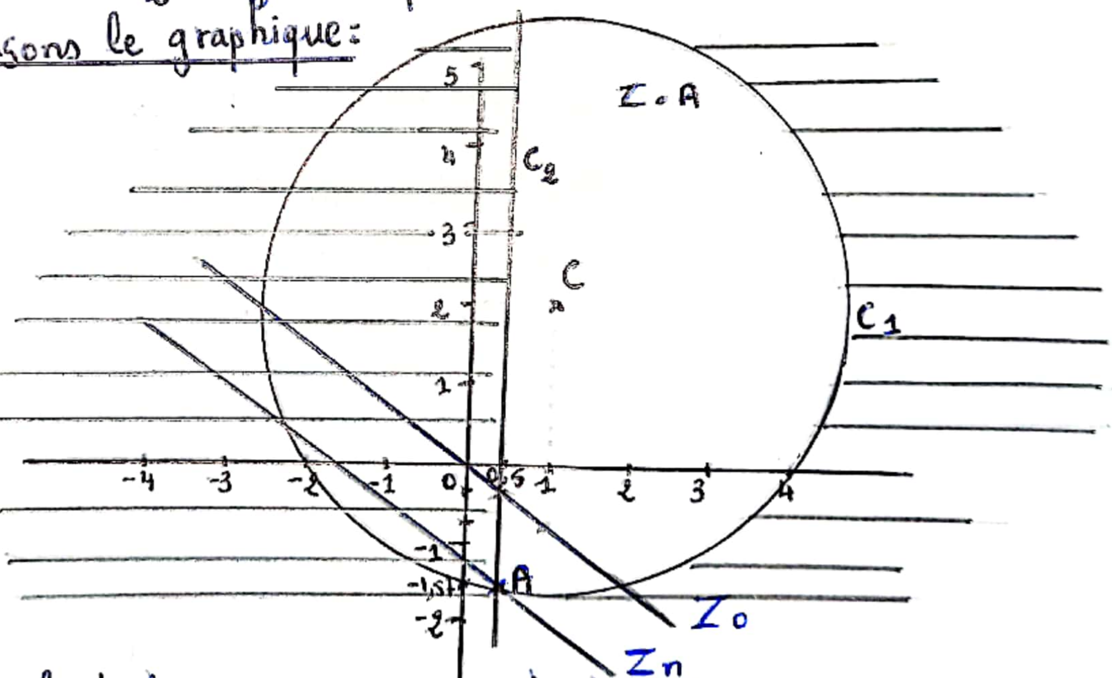
- Pour la contrainte $c_2(x_1, x_2)$:

$$c_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - x_1 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Transformons la en équation :

$x_1 = \frac{1}{2}$ (droite d'équation $x_1 = \frac{1}{2}$)

Traçons le graphique :



2°) Tracer les droites $2x_1 + 3x_2 =$ constante : Posons $Z_0 = 2x_1 + 3x_2 = 0$

- Pour $x_1 = 0{,}5 \Rightarrow 3x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -0{,}33$
- Pour $x_1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -2 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x_2 = -0{,}67$

Pour trouver la droite Z_n, il suffit de tracer une droite parallèle à la droite Z_0 et qui touche un point unique au niveau des deux contraintes.

3°) Nous pouvons en déduire que le minimum de ce problème d'optimisation est le point $A = (0{,}5 ; -1{,}57)$.

Scanné avec CamScanner