
title: "Splines Hermites"
output: html_document —

Solution de la question 0:

Par définition de l'interpolation d'Hermite.

Solution de la question 1 :

On utilise l'interpolation d'Hermite de forme Bernstein-Bézier: On interpole les points P_0, P_1, \dots, P_N , On choisit la paramétrisation équidistante $u_k = k$ pour $k = 0, 1, \dots, N$

La spline d'Hermite (2) s'écrit :

$$P|_{[u_k, u_{k+1}]}(u) = x_k(t) = \sum_{i=0}^3 b_{3k+i} B_i^3, \quad u \in [u_k, u_{k+1}]$$

On sait déjà que:

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

et

$$(B_i^3(t))' = 3(B_{i-1}^2(t) - B_i^2(t))$$

D'une part, Les contraintes:

$$P(u_k) = P_k$$

et

$$P(u_{k+1}) = P_{k+1}$$

donc en faisant les calculs on obtient $b_{3k} = P_k$ et $P_{3k+3} = P_{k+1}$

D'autre part,

$$P'(u_k) = m_k = \sum_{i=0}^3 b_{3k+i} (B_i^3)'(0) = 3b_{3k+1} - 3b_{3k}$$

Donc,

$$b_{3k+1} = b_{3k} + \frac{1}{3}m_k$$

De même, on a :

$$P'(u_{k+1}) = m_{k+1} = \sum_{i=0}^3 b_{3k+i} (B_i^3)'(1) = -3b_{3k+2} + 3b_{3k+3}$$

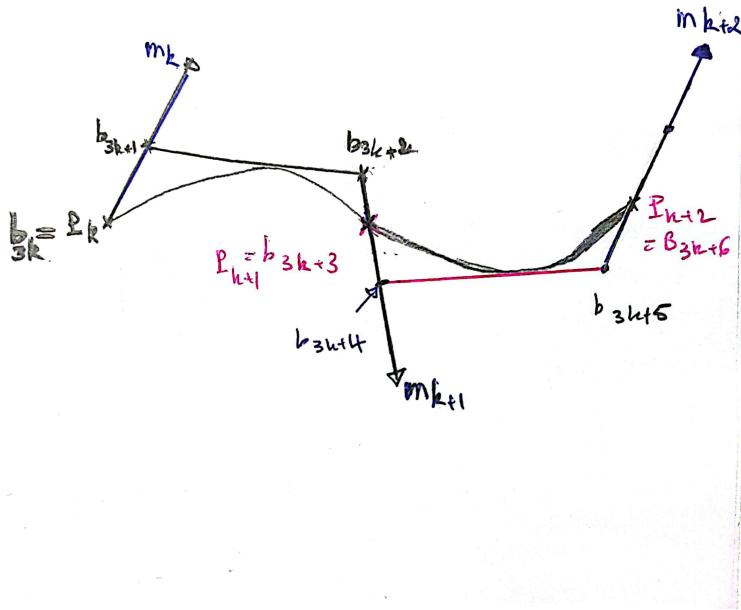
Du coup,

$$b_{3k+2} = b_{3k+3} - \frac{1}{3}m_{k+1} = P_{k+1} - \frac{1}{3}m_{k+1}$$

Points de contrôle déterminés!

Solution de la question 2 :

Dessin des deux polygones de contrôle consécutifs :



Solution de la question 3 :

Estimation des tangentes:

On utilise le schéma symétrique:

Pour un c donné dans $[0, 1]$:

$$m_k = \begin{cases} (1 - c) \frac{P_{k+1} - P_k}{u_{k+1} - u_k} & k = 0 \\ (1 - c) \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{u_{k+1} - u_{k-1}} & k = 1, \dots, N \\ (1 - c) \frac{P_k - P_{k-1}}{u_k - u_{k-1}} & k = N \end{cases}$$

La formule de schéma symétrique ne s'applique pas aux extrémités , on choisit un schéma en avant(right-sided scheme) pour le calcul de m_0 et un schéma en arrière (left-sided scheme) pour le calcul de m_N

Solution de la question 4:

4-1-) Influence de la tension c :

Lorsqu'on varie la tension c sur l'intervalle $[0, 1]$ on constate que la courbe devient de plus en plus raide(difficile à se plier), elle prend même la forme d'un polygone lorsque la tension est maximale.

4-2) Le schéma symétrique est celui qui approche le plus la spline C^2

C'est un schéma consistant, la courbe est lisse, et ne présente pas d'ondulations non désirées.

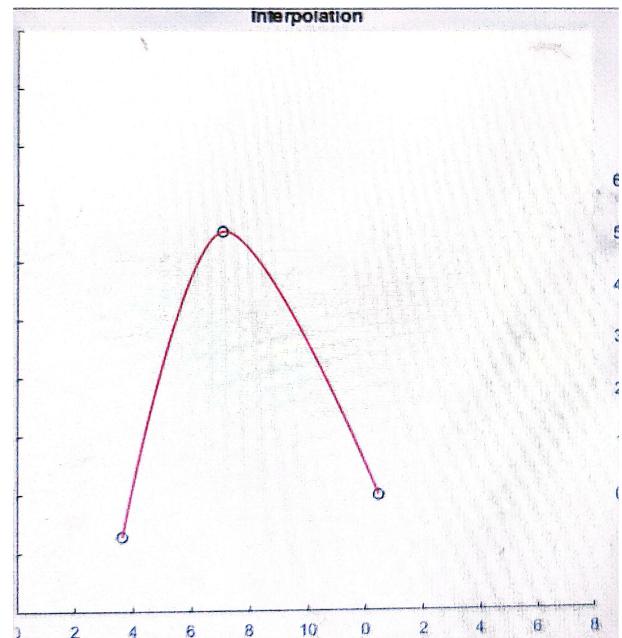
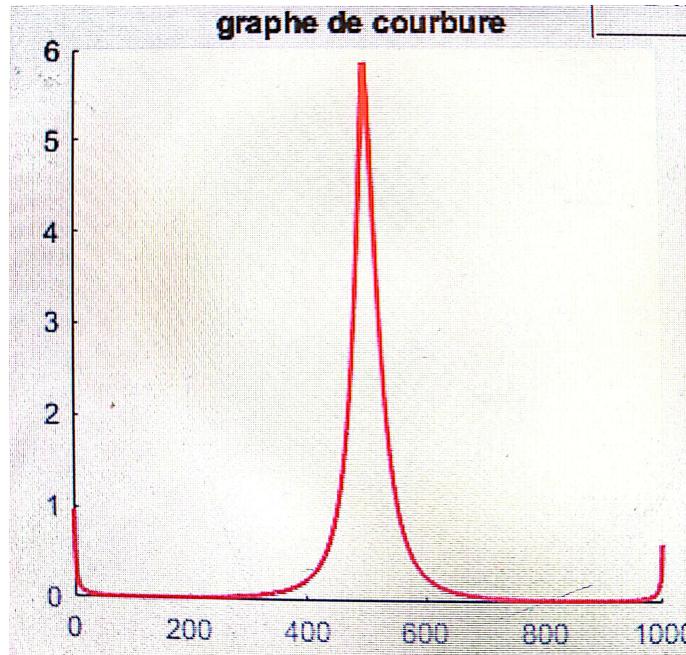
4-3) Le choix des tangentes m_k

Le choix des tangentes est déterminant pour la forme de la spline, d'autres choix de m_k sont possibles à l'instar de ceux donnés par la méthode de triangulation qui consiste à s'appuyer sur le triangle dont les points sont : le point dont on cherche de calculer la tangente, et les deux points qui suivent, (ou qui le précédent).

Solution de la question 5 :

La courbature: La méthode utilisée pour le traçage de $|k_k|$ consiste à approximer R_k le rayon de courbature en un point P_k , par le rayon du cercle circonscrit au triangle dont les sommets sont : P_{k-1} , P_k et P_{k+1} . Lorsque les points P_{k-1} et P_{k+1} sont assez proches de P_k , les deux points seront approximativement sur le cercle, le cercle circonscrit et le cercle osculateur seront confondues.

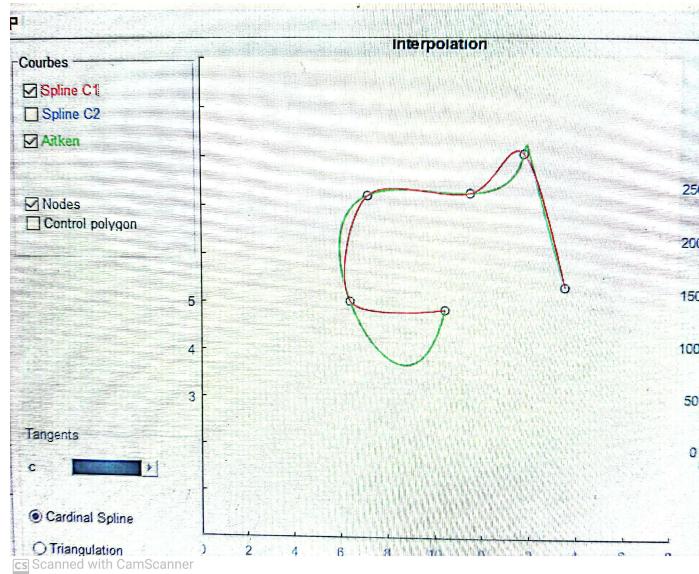
On a donc : $|k_k| = \frac{1}{R_k} = \frac{1}{R_c}$ Pour un cercle circonscrit à un triangle ABC d'aire A : on a $A = \frac{1}{2} \|AC\| \cdot \|AB\| \sin(\alpha)$ tel que α est la mesure de l'angle $B\hat{A}C$. Or, $\sin(\alpha) = \frac{\|BC\|}{2R}$ Du coup, $|k_k| = \frac{4A}{\|BC\| \cdot \|AB\| \cdot \|AC\|}$



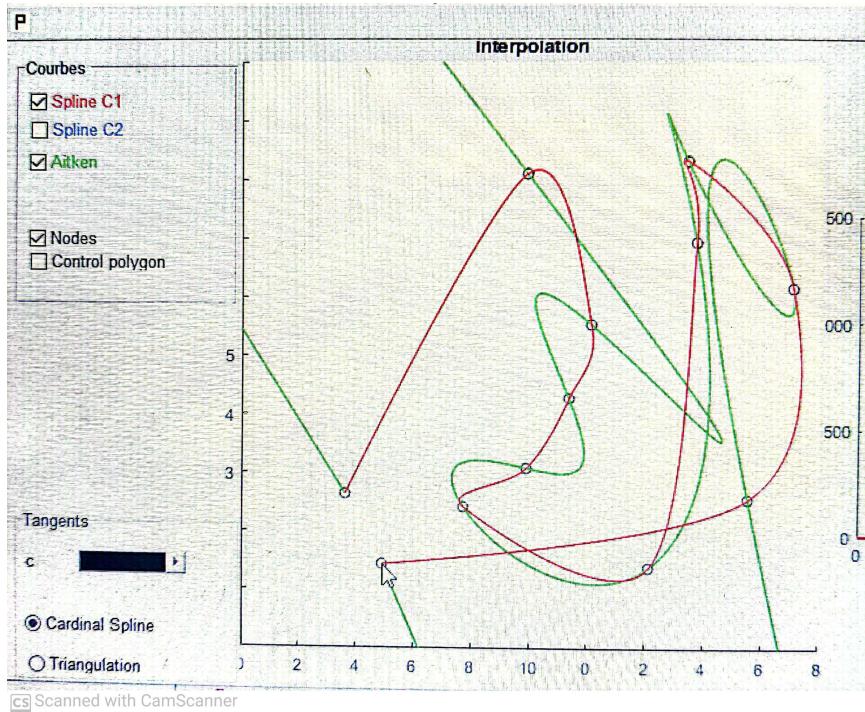
Partie 2 :

Solution de la question 7 :

On utilise la méthode de Lagrange s'appuyant sur l'algorithme d'Aitken, les résultats sont tout à fait convenables pour un petit nombre de points (N'est pas petit), on constate que la courbe est régulière

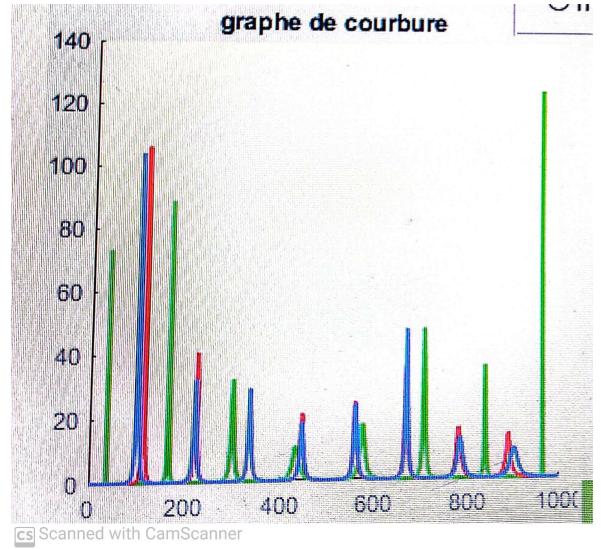
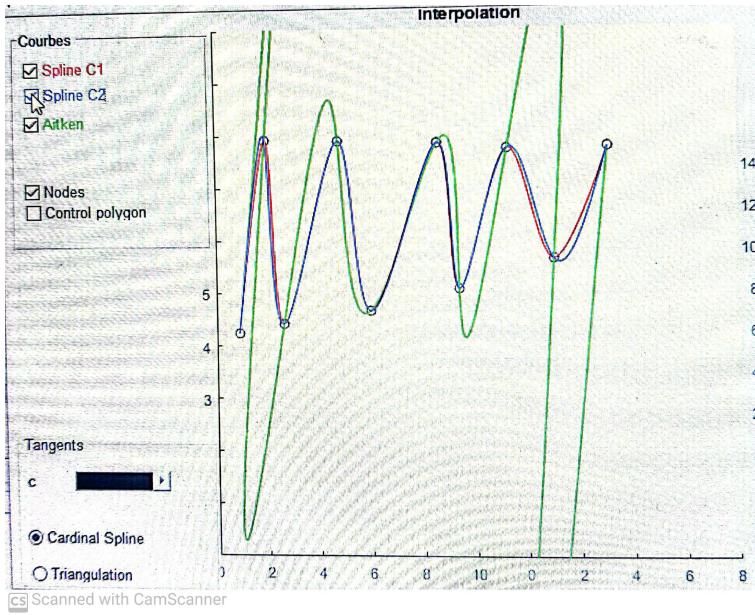


Dans le cas d'un N assez grand, on constate une instabilité dans la courbe, des phénomènes d'oscillations étranges sont également remarqués.



Solution de la question 8 :

Superposition faite .



solution de la question 9 :

La courbe de Lagrange présente un problème d'oscillations étranges et chaotiques lorsque le nombre N de points est assez grand vu que le nombre de points est le degré des polynômes en question. Par contre, les courbes splines sont régulières dans ce cas là.

On constate que la courbe spline C^1 est celle qui approche le plus le polygone de contrôle (mais elle présente l'inconvénient qu'elle est uniquement de classe C^1).