

## Etude analytique de la réponse mécanique des poutres poreuse en matériau FGM

Lazreg Hadji<sup>1,2</sup>, Mohamed Ait Amar Meziane<sup>2</sup>, Nafissa Zouatnia<sup>3</sup>

<sup>1</sup> : Université Ibn Khaldoun, Laboratoire de Géomatique et Développement Durable, Tiaret, Algérie, [had\\_laz@yahoo.fr](mailto:had_laz@yahoo.fr)

<sup>2</sup> : Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, Tiaret, Algérie, [mohamed\\_docs@hotmail.com](mailto:mohamed_docs@hotmail.com)

<sup>3</sup> : Université Hassiba Benbouali, Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Chlef, Algérie, [nissa.hadji@yahoo.com](mailto:nissa.hadji@yahoo.com)

### Résumé :

Ce travail vise à développer une nouvelle simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la vibration libre des poutres FGM en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. La théorie proposée contient trois inconnues et trois équations gouvernantes, mais elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Des solutions analytiques sont obtenues pour la poutre FGM par la présente théorie et sa précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et la fraction volumique de la porosité sur la vibration libre des poutres FGM sont tous discutés.

**Mots clé :** Vibration ; FGM ; Porosité ; Facteur de correction ; Fraction volumique.

## 1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) présentent de nombreux avantages pour les composants structurels d'ingénierie. Contrairement aux composites stratifiés à matrice-fibres, les FGM n'ont pas de problèmes de décollement ou de délaminage qui résultent de la grande concentration des contraintes inter-lamellaires. Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). Les FGM sont microscopiquement inhomogènes (hétérogènes) et des matériaux composites spatiaux qui sont généralement composés de deux matériaux différents tels que la céramique et du métal ou de céramique-polymère. La composition du matériau change progressivement dans toute la direction de l'épaisseur. En conséquence, on suppose que les propriétés mécaniques varient d'une façon continue de la surface supérieure vers la surface inférieure. En raison des bonnes caractéristiques de la céramique à la chaleur et des résistances aux corrosions combinées à la dureté des métaux, la combinaison de la céramique et du métal ou des polymères peut conduire à d'excellents matériaux. Les FGM sont largement utilisés dans les domaines de l'ingénierie mécanique, aérospatiale, nucléaire et civile.

Toutefois, dans la fabrication des FGM, des micro-porosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de température de solidification entre les constituants matériels [1]. Wattanasakulpong et al. [2] ont également donné la discussion sur les porosités qui se déroulent à l'intérieur des échantillons FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de la porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges statique et dynamiques [3]. Par conséquent, des études consacrées à la compréhension des comportements statiques et dynamiques des structures en matériau FGM ont été accordées de plus en plus d'attention ces dernières années.

Ce travail vise à développer une nouvelle simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la vibration libre des poutres FGM en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. La théorie proposée contient trois inconnues et trois équations gouvernantes, mais elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Des solutions analytiques sont obtenues pour la poutre FGM par la présente théorie et sa précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et la fraction volumique de la porosité sur la vibration libre des poutres FGM sont tous discutés.

## 2. Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé des poutres poreuse

### 1. configuration géométrique

Considérons une poutre rectangulaire en matériaux fonctionnellement gradués, de longueur  $L$  et de section rectangulaire ( $b \times h$ ), avec  $b$  et  $h$  représentent la largeur et la hauteur de la poutre respectivement comme montre la Figure 1. La poutre est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur.

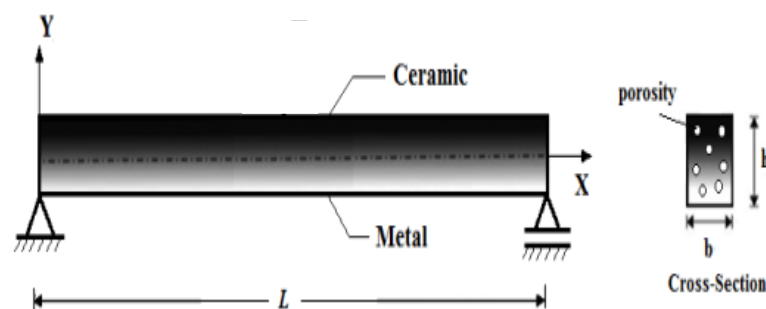


Figure 1. Géométrie et coordonnées de la poutre poreuse en FGM.

### 2. Propriétés des matériaux d'une poutre en céramique-métal

Les propriétés du FGM varient continuellement en raison de la fraction volumique progressive des constitutifs des matériaux (céramique et métal), généralement dans la direction de l'épaisseur. La fonction de la loi de puissance P-FGM est

couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux. L'expression donnée ci-dessous représente le profil de la fraction volumique.

Une poutre FGM fabriquée à partir d'un mélange de deux matériaux, par exemple, le métal et la céramique. Les propriétés du matériau de la poutre FGM sont supposée variées de manière continue à travers l'épaisseur de la poutre. Dans cette étude, la poutre imparfaite est supposée avoir des porosités réparties dans l'épaisseur en raison de défaut pendant la production. Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité,  $\alpha$ , ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) répartie uniformément entre le métal et la céramique, la loi du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [3] est utilisée comme :

$$P = P_m \left( V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + P_c \left( V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (1)$$

Maintenant, la fraction du volume total du métal et de la céramique est:  $V_m + V_c = 1$ , et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique est décrit comme :

$$V_c = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (2)$$

Par conséquent, toutes les propriétés d'un FGM imparfait peuvent être écrites comme [4] :

$$P = (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m - (P_c + P_m) \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

Il est à noter que le nombre réel positif  $p$  ( $0 \leq p \leq \infty$ ) est l'indice de loi de puissance ou d'une fraction de volume, et  $z$  est la distance à partir du plan médian de la poutre à gradient de propriétés. La poutre FGM est une poutre entièrement en céramique lorsque  $k$  est mis à zéro et entièrement métallique pour une valeur de  $p$  égal à l'infini.

Ainsi, les équations du module de Young ( $E$ ) et la densité du matériau ( $\rho$ ) de la poutre FGM avec porosité peut être exprimée comme [4, 5]

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m - (E_c + E_m) \frac{\alpha}{2} \quad (4)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

Cependant, le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une poutre FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque  $\alpha$  est égale à zéro.

### 3. Cinématique et équations constitutive

Basant sur la théorie d'ordre élevée, le champ du déplacement est obtenu comme suit :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, t) dx \quad (6a)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (6b)$$

Dans ce travail, la fonction du cisaillement proposée est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{1}{2} z \left( \frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \quad (7)$$

Les déformations linéaires associées avec le champ de déplacement de l'équation (6) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (8a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (8b)$$

L'état de contrainte dans la poutre est donné par la loi de Hooke généralisée comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) \varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (9a)$$

Où  $Q_{ij}$  sont les coefficients de rigidité, peuvent être exprimés comme :

$$Q_{11}(z) = E(z) \text{ et } Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (9b)$$

#### 4. Equations de mouvement

Les équations de mouvement pour la poutre FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton, qui peut être écrit comme pour la poutre FGM comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (10)$$

$\delta U$  est la variation virtuel de l'énergie de déformation; et  $\delta T$  est la variation virtuel de l'énergie cinétique de la poutre FGM. les équations du mouvement pour la poutre FGM résultantes sont :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \varepsilon_x^b}{\partial x} + k_1 A' J_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (11a)$$

$$\delta w_0 : \frac{d^2 M_b}{dx^2} = I_0 \frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial x} + I_1 \frac{\partial \varepsilon_x^b}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (11b)$$

$$\delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A' \frac{\partial Q}{\partial x} = -J_1 k_1 A' \frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial x} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial x^2} \quad (11c)$$

Les équations de mouvement (11) peuvent être exprimées en termes des déplacements ( $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$ ). Pour la poutre FGM, les équations d'équilibre (11) prennent la forme :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + B_{11}^s k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} = I_0 \frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \varepsilon_x^b}{\partial x} + J_1 A' k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (12a)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{11}^s k_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q = I_0 \frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial x} + I_1 \frac{\partial \varepsilon_x^b}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial x^2} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} & - B_{11}^s k_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + D_{11}^s k_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - H_{11}^s k_1^2 \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ & = - J_1 k_1 A' \frac{\partial \varepsilon_x^0}{\partial x} + J_2 k_1 A' \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial x^2} - K_2 (k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (12c)$$

Ou  $A_{11}$ ,  $D_{11}$ , etc., sont les coefficients de rigidités, et sont définis comme :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z)) dz \quad (13a)$$

et

$$A_{55}^s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} [g(z)]^2 dz \quad (13b)$$

### 5. Solution de Navier pour les poutres simplement appuyées

Pour une solution analytique des équations (12), la méthode de Navier est utilisée pour une poutre FGM avec des conditions d'appuis spécifiques (appuyée – appuyée). Les fonctions des déplacements qui satisfont les conditions aux limites peuvent être écrites en supposons les variations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) e^{i\omega t} \\ W_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \\ X_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Ou  $U_m$ ,  $W_m$  et  $X_m$  sont des paramètres à déterminer,  $\omega$  est la fréquence propre associée au (m) ième mode propre avec

$$\alpha = m\pi / L \quad (15)$$

Substituant les expansions de  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\theta$  de l'équation (14) dans les équations de mouvement (12), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left( \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ X_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Avec

$$\begin{aligned} S_{11} &= A_{11} \alpha^2, \quad S_{12} = -B_{11} \alpha^3, \quad S_{13} = -B_{11}^s \alpha k_1, \\ S_{22} &= D_{11} \alpha^4, \quad S_{23} = D_{11}^s \alpha^2 k_1, \quad S_{33} = H_{11}^s k_1^2 + A_{55}^s (k_1 A')^2 \alpha^2 \end{aligned} \quad (17a)$$

Et

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_0, \quad m_{12} = -I_1 \alpha, \quad m_{13} = J_1 \alpha k_1 A', \\ m_{22} &= I_0 + I_2 \alpha^2, \quad m_{23} = -J_2 \alpha^2 k_1 A', \\ m_{33} &= K_2 \alpha^2 (k_1 A')^2 \end{aligned} \quad (17b)$$

## 3. Résultats et discussions

Dans cette partie, plusieurs exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie raffinée de cisaillement de déformation pour l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres en FGM sans et avec porosité simplement appuyées. Pour la poutre FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Céramique ( $P_C$  : Alumine,  $Al_2O_3$ ) :  $E_c = 380$  GPa ;  $\nu = 0.3$  ;  $\rho_c = 3960$  kg/m<sup>3</sup>.
- Métal ( $P_M$  : Aluminium, Al) :  $E_m = 70$  GPa ;  $\nu = 0.3$  ;  $\rho_m = 2702$  kg/m<sup>3</sup>.

Les propriétés matérielles de la poutre FGM sont supposées variables suivant l'épaisseur de la poutre selon une simple loi de puissance P-FGM. La partie inférieure de la poutre FGM est riche en Métal (Aluminium, Al), tandis que la surface supérieure est riche en céramique (Alumine,  $Al_2O_3$ ). Pour plus de commodité, Le paramètre adimensionnel utilisé dans cette étude est :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

## 6. Résultats d'analyse de vibration libre

L'analyse dynamique des poutres FGM poreuses est également considérée dans cette étude. Les résultats de la présente théorie ont été comparés avec ceux qui sont disponibles dans la littérature obtenus par les différentes théories de cisaillement tels que la théorie de cisaillement de premier ordre de Timoshenko FSDBT, la théorie de cisaillement sinusoïdale de Touratier SSDBT, et la théorie de cisaillement exponentielle de Karama ESDBT et la théorie classique des poutres CBT (Simsek [6])...

Les tableaux 1 et 2 montrent également l'exactitude de la présente théorie raffinée avec et sans porosité en comparant les résultats de la fréquence fondamentale adimensionnelle des poutres FGM en  $Al/Al_2O_3$  avec celles rapportées dans la littérature obtenus par les théories de cisaillement d'ordre élevés développées par Simsek [4]. Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie raffinée et les résultats développés par Simsek [6]. On constate aussi que les fréquences de vibrations diminuent avec l'augmentation de la fraction volumique de la porosité ( $\alpha$ ) car la présence des pores aux niveaux de la poutre FGM affaiblit sa rigidité. On peut voir que toutes les théories de cisaillement des poutres avec la présente théorie raffinée donnent presque les mêmes fréquences, tandis la théorie classique des poutres CBT surestime les fréquences de vibration pour tous les cas considérés.

Tableau 1 : Etude comparative de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  d'une poutre en  $Al/Al_2O_3$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $p$ , et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  ( $L/h = 5$ ).

Théories	$\alpha$	$p = 0$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	Métal
CBT*	$\alpha = 0$	5.3953	5.0206	4.5931	4.1484	3.5949	3.4921	2.8034
FSDBT*	$\alpha = 0$	5.1525	4.8066	4.4083	3.9902	3.4312	3.3134	2.6772
ESDBT*	$\alpha = 0$	5.1542	4.8105	4.4122	3.9914	3.4014	3.2813	2.6781
PSDBT*	$\alpha = 0$	5.1527	4.8092	4.4111	3.9904	3.4012	3.2816	2.6773
Présente	$\alpha = 0$	5.1527	4.8081	4.4107	3.9904	3.4012	3.2816	2.6773
	$\alpha = 0.1$	5.2223	4.8498	4.4042	3.9070	3.1478	3.0292	2.3554
	$\alpha = 0.2$	5.3048	4.8995	4.3928	3.7865	2.6961	2.5718	1.8433

\* Résultats de la Ref [6]

Tableau 2 : Etude comparative de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  d'une poutre en  $Al/Al_2O_3$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $p$ , et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  ( $L/h = 20$ ).

Théories	$\alpha$	$p = 0$	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 10$	Métal
CBT*	$\alpha = 0$	5.4777	5.0967	4.6641	4.2163	3.6628	3.5546	2.8462
FSDBT*	$\alpha = 0$	5.4603	5.0827	4.6514	4.2051	3.6509	3.5415	2.8371
ESDBT*	$\alpha = 0$	5.4604	5.0829	4.6516	4.2051	3.6483	3.5389	2.8372
PSDBT*	$\alpha = 0$	5.4603	5.0829	4.6516	4.2050	3.6485	3.5389	2.8372
Présente	$\alpha = 0$	5.4603	5.0815	4.6511	4.2050	3.6485	3.5389	2.8371
	$\alpha = 0.1$	5.5340	5.1244	4.6412	4.1117	3.3767	3.2809	2.4960
	$\alpha = 0.2$	5.6214	5.1755	4.6254	3.9776	2.8856	2.8021	1.9533

\* Résultats de la Ref [6]

L'effet de l'indice matérielle  $p$  sur les fréquences naturelle fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  des poutres FGM parfaite et imparfaite pour deux différentes valeurs du rapport d'épaisseur  $L/h$  de la poutre en utilisant la présente théorie de cisaillement d'ordre élevé sont illustrées dans les figures 2 et 3 respectivement.

Il est à noter que la fréquence adimensionnelle diminue avec l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance  $p$  pour les poutres parfaites et imparfaites et cela pour les trois rapports d'épaisseur  $L/h$ . Les fréquences sont supérieures pour les poutres entièrement en céramique ( $p=0$ ) tandis que les fréquences sont inférieures pour les poutres en métal ( $p \rightarrow \infty$ ).

Cette diminution des fréquences est expliquée par l'influence de la rigidité du matériau c-à-dire une augmentation de la valeur de l'indice de puissance  $p$  conduit à une diminution du module d'élasticité de la poutre. En d'autres termes, la poutre devient flexible lorsque l'indice de loi de puissance augmente, et diminuant ainsi les valeurs de la fréquence. De plus, la porosité ( $\alpha$ ) conduit à une diminution de la fréquence de la poutre. L'effet du rapport d'épaisseur de la poutre sur la fréquence de vibration est très clair dans les trois figures. Une diminution dans le rapport  $L/h$  conduit à une diminution dans les fréquences adimensionnelle. On peut également dire que le rapport d'épaisseur  $L/h$  à un effet considérable sur la fréquence fondamentale adimensionnelle. Cette dépendance est liée à l'effet de cisaillement sur la fréquence de vibration.

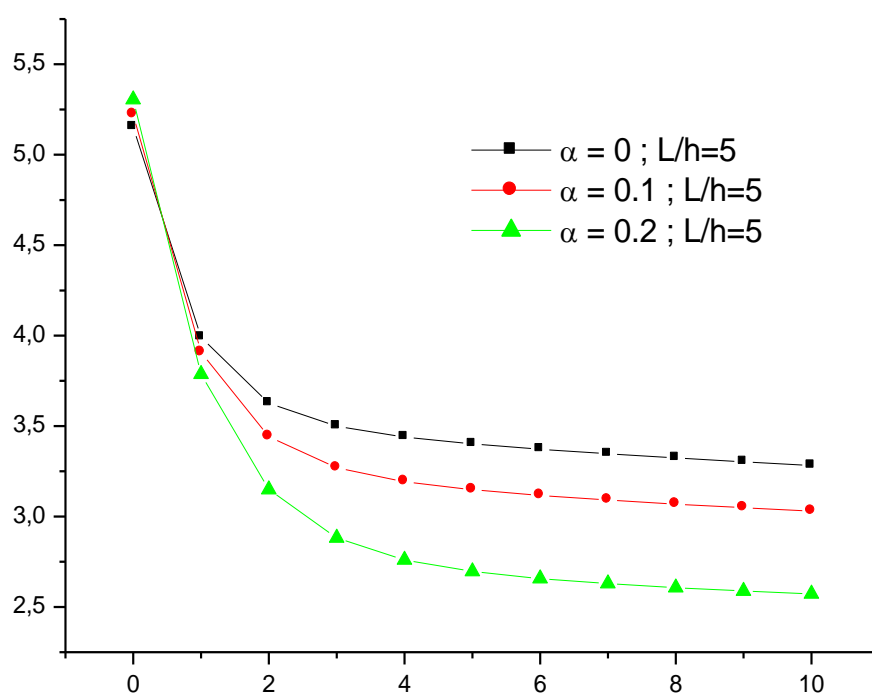


Figure 2. Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  en fonction de l'indice de puissance  $p$  et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  d'une poutre FGM en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec  $L/h = 5$ .

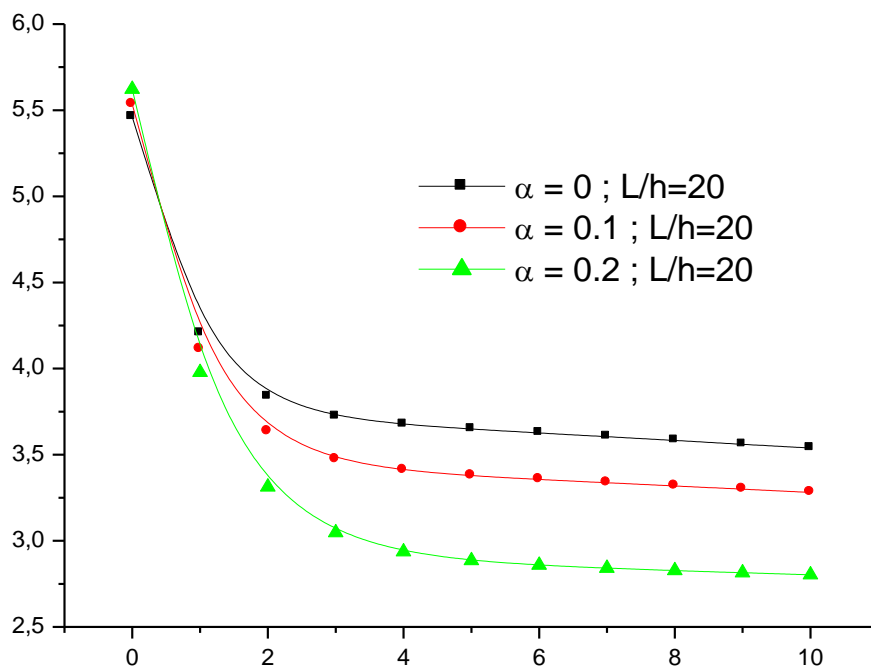


Figure 3. Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}$  en fonction de l'indice de puissance  $p$  et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  d'une poutre FGM en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec  $L/h = 20$ .

## 4. Conclusion

Dans ce travail, L'analyse de la vibration libre des poutres poreuse en FGM est examinée par une nouvelle simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Cette théorie satisfaisait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des poutres FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie de la plaque, les équations de mouvement sont dérivées du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton.

Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et la fraction volumique de la porosité sur la flexion et la vibration libre des poutres FGM sont tous discutés. A partir de ce travail, on peut dire que la présente théorie des poutres proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement mécanique des poutres FGM avec porosité.

## 5. Bibliographie

- [1] [Zhu. 2001] Zhu, J. Lai, Z. Yin, Z. Jeon, J. and Lee, S. Fabrication of ZrO<sub>2</sub>-NiCr functionally graded material by powder metallurgy. Mater. Chem. Phys, 68(1-3), 130-135, 2001.
- [2] Wattanasakulpong, N. Prusty, B.G. Kelly, D.W. and Hoffman, M. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. Mater. Des, 36, 182-190, 2012.
- [3] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. Aerosp. Sci. Technol, 32(1), 111-120, 2014.
- [4] Hadji, L., and Adda Bedia, E.A., Influence of the porosities on the free vibration of FGM beams, Wind and Structures, 21(3) 273-287, 2015.
- [5] Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F., and Mahmoud, S.R., A computational shear displacement model for Vibrational analysis of functionally graded beams with porosities, Steel and Composite Structures, An Int'l Journal, 19(2), 369-385, 2015.
- [6] Simsek, M., Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories, Nucl. Eng. Des., 240(4), 697-705, 2010.