

Centrifugal instability of pulsed Taylor-Couette flow in a Oldroyd-B Viscoelastic Fluid

M. Hayani^{1,*},
S. Aniss¹,
M.T. Ouazzani¹,
J.K. Naciri¹

¹ University of Hassan II, Faculty of Sciences Ain-Chock Laboratory of Mechanics, B.P.5366
Maarif, Casablanca, Morocco.

Mots Clés. Taylor-Couette, Modulation en phase, Oldroyd-B non-Linéaire, Méthode Spectrale, Méthode de Runge-Kutta, Théorie de Floquet,

RESUME.

Le présent travail est consacré à l'étude des effets d'une modulation en phase des conditions aux limites relatives à la vitesse, imposées sur le cylindre intérieur et extérieur, sur le seuil d'instabilité au sein d'un fluide viscoélastique en écoulement de Taylor-Couette. Dans ce cadre, nous supposons que le comportement du fluide est régi par une loi de type Oldroyd-B non linéaire et que la modulation est sinusoïdale.

Nous avons effectué une étude de stabilité linéaire de l'écoulement de base et nous avons procédé à une résolution spatiale en utilisant des méthodes spectrales (méthode de collocation de Chebyshev-Gauss-Lobatto) et à une résolution temporelle par la méthode de Runge-Kutta avec la Théorie de Floquet.

Les résultats obtenus dans ce cadre, nous permettent de mettre en évidence, les effets de cette modulation et de la nature viscoélastique sur le nombre de Taylor critique.

1. Introduction

L'écoulement viscoélastique en géométrie de Taylor-Couette constitue un des systèmes modèle pour l'étude des instabilités viscoélastiques [1, 2, 3, 4, 5]. Le système de Taylor-Couette est constitué de deux cylindres coaxiaux, entre lesquels est emprisonné une couche de fluide, les deux cylindres sont mis en rotation indépendamment l'un de l'autre. Le cas de modulation temporelle des vitesses de rotation imposées sur les deux cylindres a fait l'objet de nombreuses études dans le cas des fluides Newtoniens, en particulier le travail réalisé par Aouidef et *al.* [9]. Le cas d'une modulation en phase et en déphasage en présence d'un fluide viscoélastique (modèle de Maxwell linéaire), a été étudiée par Riahi et *al.* [6, 7, 8].

Pour le cas non modulé, une étape majeure fut franchie quand Larson et *al.* [10] découvrirent que les effets élastiques pouvaient déstabiliser l'écoulement de base qui est Newtonien. On parle d'instabilités purement élastiques, caractérisées au seuil par un comportement oscillant non-axisymétrique et désordonné, observables pour des nombres de Reynolds très faibles. Larson et *al.* [10] ont établi l'existence de ce régime à la fois expérimentalement par l'étude de fluides très élastiques dit de Boger (ex.: un polyisobutylène en solution très visqueuse) et théoriquement par une étude de stabilité linéaire du modèle d'Oldroyd-B.

Suite aux travaux de Larson et *al.* [10], nous nous intéressons à l'étude des instabilités inertio-élastiques (couplage entre ces deux effets), en présence d'une modulation en phase, et ce lorsque le fluide est viscoélastique de type Oldroyd B non linéaire dans le cas de nombres de Reynolds finis.

2. Ecoulement de Base

On considère un fluide viscoélastique, de densité ρ et de viscosité cinématique ν , confiné entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et $R_2 = R_1 + d$ ayant respectivement les vitesses angulaires $\Omega(R_1)$ et $\Omega(R_2)$ définies respectivement par $\Omega(R_1) = \Omega(R_2) = \Omega_0 \cos(\omega t)$, où Ω_0 et ω sont respectivement l'amplitude et la fréquence de pulsation (Fig. 1).

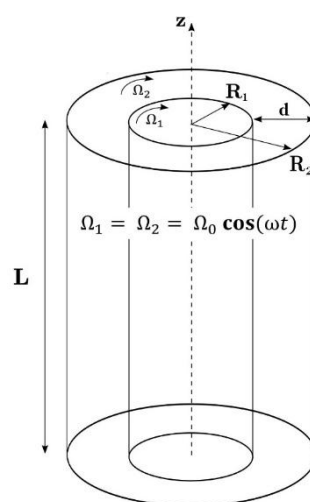


Fig .1. Géométrie de Taylor-Couette modulée.

Les équations régissant l'écoulement de base sont l'équation de conservation de la quantité de mouvement, les équations de la loi de comportement et l'équation de conservation de la masse :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où \mathbf{u} est la vitesse du fluide, p la pression et $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes (incluant la contribution visqueuse newtonienne, et la contribution non-newtonienne). Nous désignons par ρ la densité du fluide. Le fluide considéré est supposé de type Oldroyd-B non-Linéaire dont le comportement est donné par :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^p + \boldsymbol{\tau}^s \quad (2.2)$$

Le premier terme représente la contribution polymère $\bar{\boldsymbol{\tau}}^p$, tandis que le second représente l'effet du solvant newtonien $\bar{\boldsymbol{\tau}}^s$:

$$\boldsymbol{\tau}^s = 2\eta_s \mathbf{D} \quad (2.3)$$

où η_s est la viscosité dynamique du solvant et \mathbf{D} est le tenseur des taux de déformation,

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \quad (2.4)$$

Pour la contribution polymère, nous avons :

$$\boldsymbol{\tau}^p + \lambda \overset{\nabla}{\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^p} = 2\eta_p \mathbf{D} \quad (2.5)$$

où λ est le temps de relaxation, η_p est la viscosité dynamique du polymère et $\overset{\nabla}{\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^p}$ est la dérivée convectée supérieure temporelle du tenseur des contraintes :

$$\overset{\nabla}{\widetilde{\boldsymbol{\tau}}^p} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\tau}^p + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau}^p - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \boldsymbol{\tau}^p - \boldsymbol{\tau}^p \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.6)$$

L'écoulement de base est représenté par un champ de vitesse et un tenseur des contraintes pour lequel v_θ^0 vérifie :

$$\mathbf{u})^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\theta^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\tau}^p)^0 = \begin{pmatrix} \tau_{rr}^0 & \tau_{r\theta}^0 & \tau_{rz}^0 \\ \tau_{\theta r}^0 & \tau_{\theta\theta}^0 & \tau_{\theta z}^0 \\ \tau_{zr}^0 & \tau_{z\theta}^0 & \tau_{zz}^0 \end{pmatrix}, p = \{p^0\} \quad (2.7)$$

Nous introduisons par la suite les variables adimensionnelles suivantes :

$$r = (dx + R_1), v^* = \frac{V}{R_1 \Omega_0}, t^* = \frac{t}{\frac{d^2}{v}}, \tau^* = \frac{\tau}{\frac{\rho v R_1 \Omega_0}{d}} \quad (2.8)$$

Les équations (2.1)-(2.2) s'écrivent donc :

θ -composante de l'équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\theta}^{0*}}{\partial t^*} &= (1-S) \frac{\partial^2 v_{\theta}^{0*}}{\partial x^2} + \frac{(1-S)\epsilon}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial v_{\theta}^{0*}}{\partial x} - \frac{(1-S)\epsilon^2}{(\epsilon x + 1)^2} v_{\theta}^{0*} \\ &+ \frac{2\epsilon}{(\epsilon x + 1)} \tau_{r\theta}^{0*} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^{0*}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

rr -composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \tau_{rr}^{0*} + \tau_{rr}^{0*} = 0 \quad (2.10)$$

$r\theta$ -composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$\begin{aligned} E \frac{\partial}{\partial t^*} \tau_{r\theta}^{0*} + \tau_{r\theta}^{0*} &= -\frac{\epsilon E R_e}{(\epsilon x + 1)} v_{\theta}^{0*} \tau_{rr}^{0*} + E R_e \frac{\partial v_{\theta}^{0*}}{\partial x} \tau_{rr}^{0*} - \frac{\epsilon S}{(\epsilon x + 1)} v_{\theta}^{0*} \\ &+ S \frac{\partial v_{\theta}^{0*}}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

rz - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \tau_{rz}^{0*} + \tau_{rz}^{0*} = 0 \quad (2.12)$$

$\theta\theta$ - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \tau_{\theta\theta}^{0*} + \tau_{\theta\theta}^{0*} = -2 \frac{\epsilon E R_e}{(\epsilon x + 1)} v_{\theta}^{0*} \tau_{r\theta}^{0*} + 2 E R_e \tau_{r\theta}^{0*} \frac{\partial v_{\theta}^{0*}}{\partial x} \quad (2.13)$$

θz - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \tau_{\theta z}^{0*} + \tau_{\theta z}^{0*} = -\frac{\epsilon E R_e}{(\epsilon x + 1)} v_{\theta}^{0*} \tau_{rz}^{0*} + E R_e \tau_{rz}^{0*} \frac{\partial v_{\theta}^{0*}}{\partial x} \quad (2.14)$$

zz - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \tau_{zz}^{0*} + \tau_{zz}^{0*} = 0 \quad (2.15)$$

avec les conditions aux limites suivantes: $v_{\theta}^{0*}(0, t^*) = v_{\theta}^{0*}(1, t^*) = \cos(\sigma t^*)$, nous définissons quatre nombres sans dimension, à savoir le nombre de Reynolds R_e , le nombre d'Elasticité E , le nombre de composition S et le nombre d'Onde α :

$$R_e = \frac{\Omega_1 R_1 d}{\nu}, E = \frac{\lambda}{d^2}, (1-S) = \frac{\eta_s}{\eta}, S = \frac{\eta_p}{\eta}, \sigma = \frac{\omega}{d^2}, \alpha = \sigma d, \epsilon = \frac{d}{R_1},$$

Nous utilisons la notation : $R = (1 - S)E$. En considérant l'entrefer entre les deux cylindres d petit devant le rayon du cylindre intérieur R_1 , les termes d'ordre d/R_1 sont négligés. La vitesse de base adimensionnelle vérifiant l'équations aux dérivées partielles (2.9)-(2.11) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} v_{\theta}^{0*}(x, t^*) &= V_1(x) \cos(\sigma t^*) + V_2(x) \sin(\sigma t^*) \\ V_1(x) &= \frac{1}{\cosh(\gamma\xi) + \cos(\gamma\beta)} (\cos(\gamma\beta x) \cosh(\gamma\xi(1-x)) + \cos(\gamma\beta(1-x)) \cosh(\gamma\xi x)), \\ V_2(x) &= \frac{1}{\cosh(\gamma\xi) + \cos(\gamma\beta)} (\sin(\gamma\beta x) \sinh(\gamma\xi(1-x)) + \sin(\gamma\beta(1-x)) \sinh(\gamma\xi x)), \end{aligned} \quad 2.10$$

$$\text{Avec les constantes : } \gamma = \sqrt{\frac{\sigma}{2}}, \beta = \sqrt{\frac{(1+\sigma^2 E^2)}{(1+\sigma^2 R^2)} + \frac{\sigma(E-R)}{(1+\sigma^2 R^2)}}, \xi = \sqrt{\frac{(1+\sigma^2 E^2)}{(1+\sigma^2 R^2)} - \frac{\sigma(E-R)}{(1+\sigma^2 R^2)}}$$

La forme du tenseur de contraintes suivant la composante $r\theta$ en écoulement de base, donnée par la résolution de l'équation (2.11) s'écrit sous la forme :

$$\tau_{r\theta}^{0*}(x, t) = T_1(x) \cos(\sigma t) + T_2(x) \sin(\sigma t)$$

avec :

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \frac{S}{(1+(\sigma E)^2)} \frac{\partial V_1}{\partial x} - \frac{\sigma S E}{(1+(\sigma E)^2)} \frac{\partial V_2}{\partial x}, \\ T_2(x) &= \frac{\sigma S E}{(1+(\sigma E)^2)} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{S}{(1+(\sigma E)^2)} \frac{\partial V_2}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

La forme de tenseur de contraintes suivant la composante $\theta\theta$ en écoulement de base, donnée par la résolution de l'équation (2.13) s'écrit sous la forme :

$$\tau_{\theta\theta}^{0*}(x, t^*) = (\epsilon T_3 + T_4) \cos(2\sigma t) + (\epsilon T_5 + T_6) \sin(2\sigma t) + (\epsilon T_7 + T_8)$$

avec:

$$\begin{aligned} T_7 &= -ER_e V_1 T_1 - ER_e V_2 T_2, \\ T_8 &= ER_e T_1 \frac{\partial}{\partial x} V_1 + ER_e T_2 \frac{\partial}{\partial x} V_2, \\ T_3 &= -\frac{ER_e V_1 T_1}{(1+(2\sigma E)^2)} + \frac{2\sigma E^2 R_e V_1 T_2}{(1+(2\sigma E)^2)} + \frac{2\sigma E^2 R_e V_2 T_1}{(1+(2\sigma E)^2)} + \frac{ER_e V_2 T_2}{(1+(2\sigma E)^2)}, \\ T_4 &= \frac{ER_e T_1 \frac{\partial V_1}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)} - \frac{ER_e \frac{\partial V_2}{\partial x} T_2}{(1+(2\sigma E)^2)} - \frac{2\sigma E^2 R_e T_1 \frac{\partial V_2}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)} - \frac{2\sigma E^2 R_e T_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)}, \\ T_5 &= -\frac{2\sigma E^2 R_e V_1 T_1}{(1+(2\sigma E)^2)} - \frac{ER_e V_2 T_1}{(1+(2\sigma E)^2)} - \frac{ER_e V_1 T_2}{(1+(2\sigma E)^2)} + \frac{2\sigma E^2 R_e V_2 T_2}{(1+(2\sigma E)^2)}, \\ T_6 &= \frac{2\sigma E^2 R_e T_1 \frac{\partial V_1}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)} + \frac{ER_e T_1 \frac{\partial V_2}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)} + \frac{ER_e T_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)} - \frac{2\sigma E^2 R_e T_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}}{(1+(2\sigma E)^2)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. Analyse de Stabilité Linéaire

Dans ce paragraphe nous allons nous intéresser à la stabilité de l'écoulement décrit précédemment vis à vis des perturbations axisymétriques. Nous superposons des perturbations infinitésimales à la solution de base :

$$u(r, z, t) = U(r, t)e^{i\sigma z}, \quad v(r, z, t) = v_{\theta}^0(r, t) + V(r, t)e^{i\sigma z}, \quad w(r, z, t) = \quad (3.1)$$

$$W(r, t)e^{i\sigma z}$$

$$p(r, z, t) = p^0(r, t) + P(r, t)e^{i\sigma z} \quad (3.2)$$

Le tenseur des contraintes peut se décomposer aussi en la somme d'un écoulement de base et d'une perturbation suffisamment petite. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{rr}^p &= \mathbb{T}_{rr}^0(r, t) + \widehat{R}\widehat{R}(r, t)e^{i\sigma z}, \mathbb{T}_{\theta\theta}^p = \mathbb{T}_{\theta\theta}^0(r, t) + \\ \widehat{\theta}\widehat{\theta}(r, t)e^{i\sigma z}, \mathbb{T}_{r\theta}^p &= \mathbb{T}_{r\theta}^0(r, t) + \widehat{R}\widehat{\theta}(r, t)e^{i\sigma z}, \mathbb{T}_{\theta z}^p = \\ \mathbb{T}_{\theta z}^0(r, t) + \widehat{\theta}\widehat{Z}(r, t)e^{i\sigma z}, \mathbb{T}_{rz}^p &= \mathbb{T}_{rz}^0(r, t) + \widehat{R}\widehat{Z}(r, t)e^{i\sigma z}, \\ \mathbb{T}_{zz}^p &= \mathbb{T}_{zz}^0(r, t) + \widehat{Z}\widehat{Z}(r, t)e^{i\sigma z} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nous substituons les expressions (3.1)-(3.2)-(3.3) dans les équations (2.1)-(2.5). Nous obtenons un système d'évolution des perturbations que nous linéarisons et nous adimensionnons en utilisant (2.8) pour aboutir au système suivant:

r -composante de l'équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\epsilon^2 \alpha^{-2}}{(\epsilon x + 1)^2} - \frac{\epsilon \alpha^{-2}}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial}{\partial x} - \alpha^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial t^*} \widehat{U}^* &= (1 - S) \left(-\alpha^{-2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \right. \\ \frac{2\epsilon \alpha^{-2}}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3\epsilon^2 \alpha^{-2}}{(\epsilon x + 1)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{3\epsilon^3 \alpha^{-2}}{(\epsilon x + 1)^3} \frac{\partial}{\partial x} &+ \frac{2\epsilon}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{3\epsilon^4 \alpha^{-2}}{(\epsilon x + 1)^4} - \frac{2\epsilon^2}{(\epsilon x + 1)^2} - \\ \alpha^2 \Big) \widehat{U}^* + \frac{2\epsilon R_e}{(\epsilon x + 1)} V_\theta^{0*} \widehat{V}^* + \left(\frac{\epsilon}{(\epsilon x + 1)} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \widehat{R}\widehat{R}^* + \left(i\alpha - i \frac{\epsilon^2 \alpha^{-1}}{(\epsilon x + 1)^2} + i \frac{\epsilon \alpha^{-1}}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial}{\partial x} + \right. \\ \left. i\alpha^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \widehat{R}\widehat{Z}^* - \frac{\epsilon}{(\epsilon x + 1)} \widehat{\theta}\widehat{\theta}^* - \frac{\partial}{\partial x} \widehat{Z}\widehat{Z}^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

θ -composante de l'équation de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^*} \widehat{V}^* &= -\left(\frac{\partial V_\theta^{0*}}{\partial x} + \frac{\epsilon}{(\epsilon x + 1)} V_\theta^{0*}\right) R_e \widehat{U}^* + (1 - S) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\epsilon^2}{(\epsilon x + 1)^2} - \right. \\ \left. \alpha^2\right) \widehat{V}^* + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\epsilon}{(\epsilon x + 1)}\right) \widehat{R}\widehat{\theta}^* + i\alpha \widehat{\theta}\widehat{Z}^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

rr -composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \widehat{R}\widehat{R}^* + \widehat{R}\widehat{R}^* = \left(2ER_e \tau_{rr}^{0*} \frac{\partial}{\partial x} + 2S \frac{\partial}{\partial x} + i2\alpha ER_e \tau_{rz}^{0*} - ER_e \frac{\partial \tau_{rr}^{0*}}{\partial x}\right) \widehat{U}^* \quad (3.6)$$

$r\theta$ - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$\begin{aligned} E \frac{\partial}{\partial t^*} \widehat{R}\widehat{\theta}^* + \widehat{R}\widehat{\theta}^* &= \left(ER_e \tau_{r\theta}^{0*} \frac{\partial}{\partial x} - ER_e \frac{\partial \tau_{r\theta}^{0*}}{\partial x} + \frac{\epsilon ER_e}{(x+1)} \tau_{r\theta}^{0*} + i\alpha ER_e \tau_{\theta z}^{0*}\right) \widehat{U}^* + \\ \left(S \frac{\partial}{\partial x} + ER_e \tau_{rr}^{0*} \frac{\partial}{\partial x} + i\alpha ER_e \tau_{rz}^{0*} - \frac{\epsilon ER_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{rr}^{0*} - \frac{\epsilon S}{(\epsilon x + 1)}\right) \widehat{V}^* + \left(ER_e \frac{\partial V_\theta^{0*}}{\partial x} - \right. \\ \left. \frac{\epsilon ER_e}{(\epsilon x + 1)} V_\theta^{0*}\right) \widehat{R}\widehat{R} \end{aligned} \quad (3.7)$$

rz - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$E \frac{\partial}{\partial t^*} \widehat{R}\widehat{Z}^* + \widehat{R}\widehat{Z}^* = \left(i\alpha^{-1} S \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\alpha^{-1} ER_e \tau_{rr}^{0*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i \frac{\alpha^{-1} ER_e}{(x+\epsilon^{-1})} \tau_{rr}^{0*} \frac{\partial}{\partial x} - \right. \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \text{ER}_e \tau_{rz}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \text{ER}_e \tau_{rz}^0 \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\epsilon \alpha^{-1} S}{(\epsilon x + 1)} \frac{\partial}{\partial x} - \text{ER}_e \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial x} - i \frac{\epsilon^2 \alpha^{-1} \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)^2} \tau_{rz}^0 - \\ & \frac{\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{rz}^0 + i \alpha \text{ER}_e \tau_{zz}^0 + i \alpha S - i \frac{\epsilon^2 \alpha^{-1} S}{(\epsilon x + 1)^2} \hat{U}^* \end{aligned}$$

$\theta\theta$ - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$\begin{aligned} & E \frac{\partial}{\partial t^*} \hat{\theta\theta}^* + \hat{\theta\theta}^* = \\ & \left(-\text{ER}_e \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^0}{\partial x} + 2 \frac{\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{\theta\theta}^0 + \frac{2\epsilon S}{(\epsilon x + 1)} \right) \hat{U}^* + \left(2\text{ER}_e \tau_{r\theta}^0 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{r\theta}^0 + \right. \\ & \left. i 2\alpha \text{ER}_e \tau_{\theta z}^0 \right) \hat{V}^* + \left(2\text{ER}_e \frac{\partial V_{\theta}^0}{\partial x} - \frac{2\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} V_{\theta}^0 \right) \hat{R\theta}^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

θz - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$\begin{aligned} & E \frac{\partial}{\partial t^*} \hat{\theta z}^* + \hat{\theta z}^* = \left(i \alpha^{-1} \text{ER}_e \tau_{r\theta}^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i \frac{\epsilon \alpha^{-1} \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{r\theta}^0 \frac{\partial}{\partial x} - \text{ER}_e \tau_{\theta z}^0 \frac{\partial}{\partial x} - \right. \\ & \left. \text{ER}_e \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial x} + \frac{\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{\theta z}^0 - \frac{\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{\theta z}^0 - i \frac{\epsilon^2 \alpha^{-1} \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)^2} \tau_{r\theta}^0 \right) \hat{U}^* + \left(\text{ER}_e \tau_{rz}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \right. \\ & \left. i \alpha \text{ER}_e \tau_{zz}^0 - \frac{\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{rz}^0 + i \alpha S \right) \hat{V}^* + \left(\text{ER}_e \frac{\partial V_{\theta}^0}{\partial x} - \frac{\epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} V_{\theta}^0 \right) \hat{Rz}^* \end{aligned} \quad (3.10)$$

zz - composante de l'équation d'Oldroyd-B

$$\begin{aligned} & E \frac{\partial}{\partial t^*} \hat{zz}^* + \hat{zz}^* = \left(i 2 \alpha^{-1} \text{ER}_e \tau_{rz}^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i \frac{2 \epsilon \alpha^{-1} \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{rz}^0 \frac{\partial}{\partial x} - 2 \text{ER}_e \tau_{zz}^0 \frac{\partial}{\partial x} - \right. \\ & \left. 2S \frac{\partial}{\partial x} - \text{ER}_e \frac{\partial \tau_{zz}^0}{\partial x} - \frac{2\epsilon S}{(\epsilon x + 1)} - i \frac{2 \epsilon^2 \alpha^{-1} \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)^2} \tau_{rz}^0 - \frac{2 \epsilon \text{ER}_e}{(\epsilon x + 1)} \tau_{zz}^0 \right) \hat{U}^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\hat{U}^* = \frac{\partial}{\partial x} \hat{U}^* = \hat{V}^* = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \quad (3.12)$$

Le comportement de l'écoulement perturbé est contrôlé par quatre paramètres : le nombre de fréquence, σ , le nombre de Taylor T_a , le nombre de d'élasticité E et le nombre de composition S .

4. Approche Numérique et Résultats

4.1. Approche numérique

Nous utilisons la théorie des méthodes spectrales de collocation pour la résolution numérique du problème de stabilité linéaire. Ces méthodes se révèlent d'un grand intérêt en raison de leur très grande précision [11]. Elles consistent à déterminer la solution des équations sous la forme de séries tronquées de fonctions de base orthogonales. Aussi, nous présentons la méthode de résolution temporelle utilisant la théorie de Floquet avec la méthode numérique de Runge-Kutta.

Les méthodes spectrales de collocation de Chebychev [11] reposent sur la décomposition des éléments solutions sur une base de fonction de Lagrange $L_j(x)$. Ainsi, on a:

$$\begin{aligned} &(\hat{U}^*, \hat{V}^*, \widehat{RR}^*, \widehat{R\theta}^*, \widehat{RZ}^*, \widehat{\theta\theta}^*, \widehat{\theta Z}^*, \widehat{ZZ}^*)(x, t) \\ &\approx \sum_{j=1}^N (\hat{U}_j^*, \hat{V}_j^*, \widehat{RR}_j^*, \widehat{R\theta}_j^*, \widehat{RZ}_j^*, \widehat{\theta\theta}_j^*, \widehat{\theta Z}_j^*, \widehat{ZZ}_j^*)(t) \cdot L_j(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\hat{U}_j^*, \hat{V}_j^*, \widehat{RR}_j^*, \widehat{R\theta}_j^*, \widehat{RZ}_j^*, \widehat{\theta\theta}_j^*, \widehat{\theta Z}_j^*, \widehat{ZZ}_j^*$ sont les amplitudes dépendant du temps et $L_j(x)$ sont les fonctions de base de Lagrange définies comme suit :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \left(\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \quad j = 1 \dots N \quad (4.2)$$

Ainsi, le polynôme de Chebychev d'ordre N , noté T_N est défini par :

$$T_N(x) = \cos(N \cos^{-1}(x)) \quad (4.3)$$

Ce polynôme admet exactement N extremas. Ces derniers sont appelés les points de collocation de Chebychev-Gauss-Lobatto définis dans l'intervalle $[-1, 1]$ et s'écrivent comme suit :

$$y_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{N-1}\right) \quad i = 1 \dots N \quad (4.4)$$

Le polynôme d'interpolation de Chebychev de Lagrange s'écrit alors pour le cas des points de collocation de Tchabychev-Gauss-Lobatto comme suit:

$$L_j(x) = \frac{(-1)^j (1-x^2) T'_{N-1}(x)}{c_j (N-1)^2 (x-x_j)} \quad (4.5)$$

où $c_1 = c_2 = 2$ et $c_2 = \dots = c_{N-1} = 1$

Les dérivées d'ordre n des fonctions $(\hat{U}^*, \hat{V}^*, \widehat{RR}^*, \widehat{R\theta}^*, \widehat{RZ}^*, \widehat{\theta\theta}^*, \widehat{\theta Z}^*, \widehat{ZZ}^*)(x, t)$ par rapport à x , évaluées en N points de collocation sont exprimées en termes de matrices dérivées $\mathbf{D}_{ij}^{(n)}$ du même ordre de taille $n \times n$, dont les indices i et j désignent respectivement leurs lignes et leurs colonnes:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n}{\partial x^n} (\hat{U}^*, \hat{V}^*, \widehat{RR}^*, \widehat{R\theta}^*, \widehat{RZ}^*, \widehat{\theta\theta}^*, \widehat{\theta Z}^*, \widehat{ZZ}^*)(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^N (\hat{U}_j^*, \hat{V}_j^*, \widehat{RR}_j^*, \widehat{R\theta}_j^*, \widehat{RZ}_j^*, \widehat{\theta\theta}_j^*, \widehat{\theta Z}_j^*, \widehat{ZZ}_j^*)(t) \cdot \mathbf{D}_{ij}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les composantes des matrices \mathbf{D}_{ij}^n sont les dérivées d'ordre n des fonctions de base (polynômes de Lagrange) prises en chacun des points de collocation. La matrice dérivée du premier ordre $\mathbf{D}_{ij}^{(1)}$ calculée aux points aux points de collocation de Chebyshev-Gauss-Lobatto [11]. Les dérivées d'ordre $p > 1$ de cette matrice s'obtiennent en élevant la matrice $\mathbf{D}^{(1)}$ à la puissance p , c'est à dire : $\mathbf{D}^{(p)} = (\mathbf{D}^{(1)})^p$. La discrétisation spatiale nous conduit vers un système matriciel de $8N$ inconnus dépendantes du temps. Ces dernières sont définies comme suit :

$$(\hat{U}_1^* \dots \hat{U}_N^*, \hat{V}_1^* \dots \hat{V}_N^*, \hat{R}\hat{R}_1^* \dots \hat{R}\hat{R}_N^*, \hat{R}\hat{\theta}_1^* \dots \hat{R}\hat{\theta}_N^*, \hat{R}\hat{Z}_1^* \dots \hat{R}\hat{Z}_N^*, \hat{\theta}\hat{\theta}_1^* \dots \hat{\theta}\hat{\theta}_N^*, \hat{\theta}\hat{Z}_1^* \dots \hat{\theta}\hat{Z}_N^*, \hat{Z}\hat{Z}_1^* \dots \hat{Z}\hat{Z}_N^*) \quad (4.7)$$

Les équations (3.4- 3.12) constituent un système matriciel dépendant du temps définitsous la forme suivante :

$$\bar{\mathbf{B}} \frac{\partial}{\partial t^*} \hat{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{M}}(t) \hat{\mathbf{X}} \quad (4.8)$$

Avec $\bar{\mathbf{M}}(t)$ sont des matrices d'ordre $8N$, $\bar{\mathbf{B}}$ est une matrice singulière et: $\hat{\mathbf{X}}^t = (\hat{U}_j^*, \hat{V}_j^*, \hat{R}\hat{R}_j^*, \hat{R}\hat{\theta}_j^*, \hat{R}\hat{Z}_j^*, \hat{\theta}\hat{\theta}_j^*, \hat{\theta}\hat{Z}_j^*, \hat{Z}\hat{Z}_j^*)$.

Selon la théorie de Floquet, la solution matricielle fondamentale de (4.8) a la forme suivante:

$$\Phi(t^*) = \mathbf{P}(t^*) e^{\mathbf{Q}t^*} \quad (4.9)$$

où $\mathbf{P}(t^*)$ est une matrice périodique de période π et les valeurs propres de la matrice \mathbf{Q} sont les exposants de Floquet μ_j . On pose comme condition initiale:

$$\Phi(0) = \mathbf{I} \quad (4.10)$$

En intégrant l'équation (4.9) sur une période, on obtient la condition :

$$\Phi(\pi) = e^{\pi \mathbf{Q}} \quad (4.11)$$

Les valeurs propres λ_j de $\Phi(\pi)$ sont reliées aux exposants de Floquet par la relation :

$$\mu_j = \frac{1}{\pi} \ln(\lambda_j) \quad (4.12)$$

Le système (4.8) est intégré en utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre avec la condition initiale (4.10). Enfin, on a une relation entre la fréquence γ , le nombre de Taylor T_a et le nombre d'onde k . Cette relation s'écrit formellement sous la forme :

$$\mathcal{R}(T_a, k, \gamma) = 0 \quad (4.13)$$

4.1. Résultats

L'objectif principal de cette étude est de mettre en évidence les effets du caractère viscoélastique du fluide considéré sur les paramètres critiques relatifs au seuil d'instabilité de l'écoulement.

Dans ce cadre, les valeurs critiques du nombre de Taylor et du nombre d'onde critiques, T_{ac} et q_c , en fonction de γ sont présentées dans les figures ci-dessous, (Fig. 1, Fig. 2) pour différentes valeurs du nombre d'élasticité et du nombre de composition S . On constate que pour les faibles valeurs d'élasticité (Fig. 1), un comportement hydrodynamique similaire à celui du fluide Newtonien est obtenu pour les différentes valeurs du paramètre S . En effet, l'écoulement est potentiellement instable dans les fréquences intermédiaires et une stabilisation de celui-ci est obtenue dans les basses et hautes fréquences. Outre l'effet déstabilisant du paramètre S dans toutes les gammes de fréquence, ce paramètre fait augmenter la fréquence à laquelle l'écoulement est potentiellement instable. De plus, le nombre d'onde critique augmente lorsque la composition S du fluide augmente.

En revanche et pour les grandes valeurs du nombre d'élasticité (Fig. 2), une stabilisation de l'écoulement est obtenue en augmentant la fréquence de modulation et l'effet de la composition S est toujours déstabilisant.

Effet de nombre d'élasticité sur le seuil d'instabilité

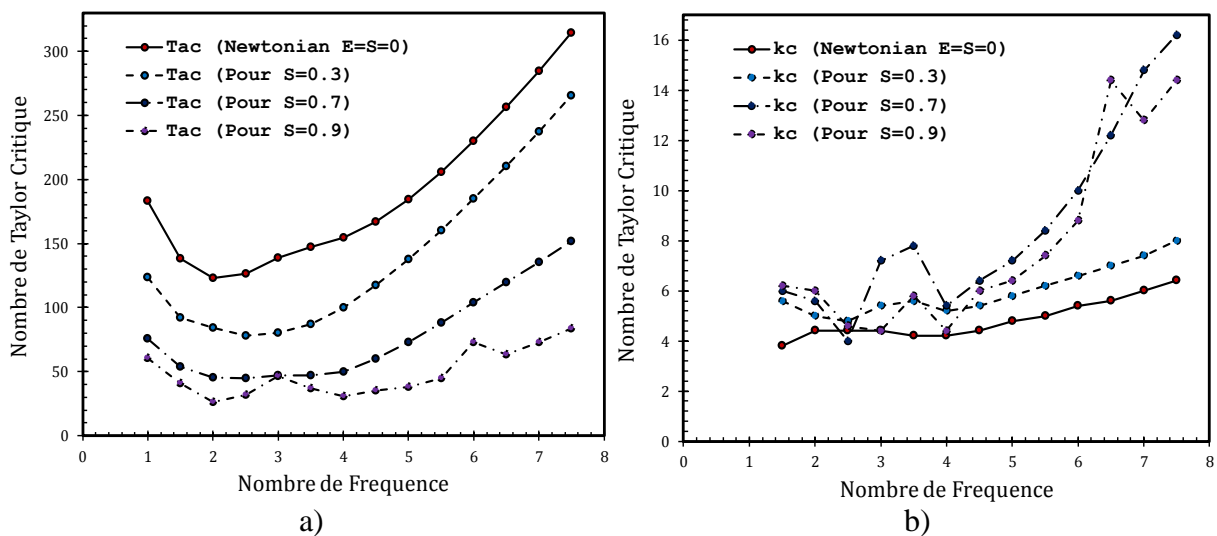


Fig. 1. a) Nombre de Taylor critique en fonction du nombre de fréquence pour un nombre d'élasticité fixe égale à 0.1 et pour différents nombres de composition $S=0, 0.3, 0.7, 0.9$.
b) Nombre d'Onde critique en fonction du nombre de fréquence pour un nombre d'élasticité fixe égale à 0.1 et pour différents nombres de composition $S=0, 0.3, 0.7, 0.9$.

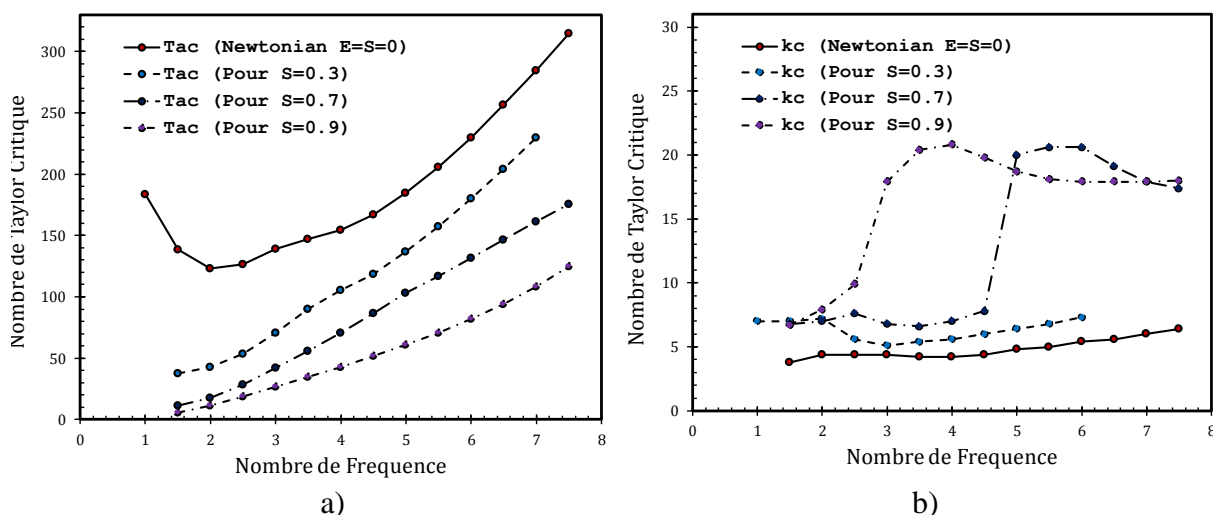


Fig. 2. a) Nombre de Taylor critique en fonction du nombre de fréquence pour un nombre d'élasticité fixe égale à 10 et pour différents nombres de composition $S=0, 0.3, 0.7, 0.9$
 b) Nombre d'Onde critique en fonction du nombre de fréquence pour un nombre d'élasticité fixe égale à 10 et pour différents nombres de composition $S=0, 0.3, 0.7, 0.9$.

5. Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'effet d'une modulation périodique des vitesses pariétales sur l'instabilité centrifuge d'un fluide d'Oldroyd-B en géométrie de Taylor-Couette. Les premiers résultats numériques obtenus dans ce cadre montrent des effets stabilisant ou déstabilisant de cette modulation et de la nature viscoélastique du fluide.

6. Bibliographie

- [1] RUBIN, H., ELATA, C. "Stability of Couette flow of dilute polymer solutions". Phys. Fluids 9, 1926- 1933. 1969.
- [2] DENN, M. M. & ROISMAN, J. J. "Rotational stability and measurement of normal stress functions in dilute polymer solutions". AIChE J. 15, 454-459. 1969.
- [3] SUN, Z.-S. & DENN, M. M. "Stability of rotational Couette flow of polymer solutions. AIChE J. 18, 1010- 1510. 1972
- [4] HAYES, J. W. & HUTTON, J. F. "The effect of very dilute polymer solutions on the formation of Taylor vortices. Comparison of theory with experiment". Prog. Heat Mass Transfer 5, 195-209. 1972
- [5] JONES, W. M., DAVIES, D. M. & THOMAS, M. C. "Taylor vortices and the evaluation of material constants: a critical assessment". J. Fluid Mech. 60, 19-41. 1973
- [6] Mehdi Riahi, Saïd aniss, Mohamed Ouazzani Touhami, and Salah skali lami, "Stability of a Pulsed Taylor-Couette Flow in a Viscoelastic Fluid", Nihon Reoroji Gakkaishi Vol.42, No.5, 321~327(2014).
- [7] Mehdi Riahi, Saïd aniss, Mohamed Ouazzani Touhami, and Salah skali lami, "Centrifugal instability of pulsed Taylor-Couette flow in a Maxwell fluid", The European Physical Journal E 39(8)· (August 2016).

- [8] Mehdi Riahi, Saïd aniss, Mohamed Ouazzani Touhami, and Salah skali lami, “*Pulsed Taylor-Couette flow in a viscoelastic fluid under inner cylinder modulation*”, Eur. Phys. J. Plus (2015) 130: 253.
- [9] Aouidef A, Normand C, Stegner A, Wesfreid JE, “*Centrifugal instability of pulsed flow*” Phys Fluids, 11, 3665 (1994).
- [10] R. G. Larson, Eric S. G. Shaqfeh And S. J. Muller, “*A purely elastic instability in Taylor-Couette flow*”, J . Fluid Mech. (1990),vol. 218, p p . 573-800
- [11] J . A. C. Weideman. S. C. Reddy. “*A MATLAB differentiation matrix suite. ACM transaction on mathematical software*”, 26,(2000).