

## "Etude du Comportement des Plaques de Verre à Gradient Thermique à l'aide d'une Nouvelle Théorie Raffinée."

" Ali Bouchafa " <sup>1</sup>,

"M.B.Bouiadjra " <sup>1</sup>

" M.S.A.Houari " <sup>1</sup>

" TOUNSI Abdelouahed " <sup>2</sup>

<sup>1</sup> "Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics (LSMAGCTP), Sidi Bel Abbès, Algérie, E-mail : [bouchafa2006@yahoo.fr](mailto:bouchafa2006@yahoo.fr) "

<sup>2</sup> "Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Laboratoire des Matériaux & Hydrologie, 89 Cité Ben M'hidi 22000 Sidi Bel Abbès, Algérie "

### Résumé :

" Une nouvelle théorie raffinée de déformation cisaillement hyperbolique (RHSdT), est présentée pour l'analyse de la flexion des plaques sandwich fonctionnellement graduées FGM, et soumise aussi à un chargement thermique. Contrairement à toute autre théorie, le nombre de fonctions inconnues impliqués dans le calcul est seulement quatre au lieu de cinq dans les d'autres théories de déformation de cisaillement. On peut dire que la théorie proposée est précise et simple pour résoudre le comportement thermomécanique de la flexion des plaques FGM."

### MOTS CLES :

Plaque sandwich, FGM, Théorie hyperbolique, Flexion thermomécanique.

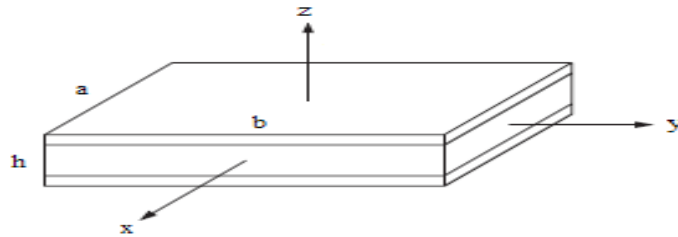
## 1. Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des composites spéciaux dont les propriétés varient de façon continue grâce à leur épaisseur. Les FGM sont habituellement faits de mélange de céramique et de métal et peuvent donc résister à des environnements de haute température tout en maintenant leur ténacité.

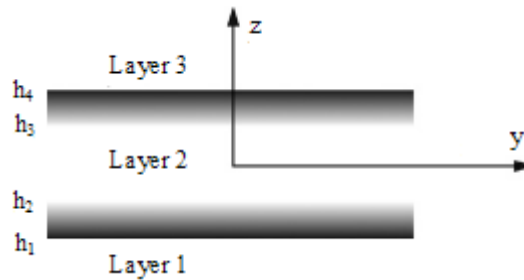
La technologie de la FGM était celle des matériaux de fabrication originale proposée au Japon en 1984 par Sendai Groupe. Ils sont utilisés dans des applications très différentes, telles que les cuves de réacteur, les appareils de l'énergie de fusion, les secteurs biomédicaux, les avions, les véhicules spatiaux, les industries de la défense et d'autres ouvrages d'art. En effet, le comportement mécanique des éléments de structure avec les FGM est d'une importance considérable dans les domaines à la fois de recherche et d'industrie[1-6] et [9-10]

## 2. Formulation du problème

Prenons le cas d'une épaisseur uniforme, une plaque rectangulaire FGM sandwich composée de trois couches hétérogènes comme indiqué dans la figure. 1.



**Figure 1.** Géométrie d'une plaque rectangulaire en FGM sandwich avec une épaisseur uniforme dans le système de coordonnées cartésiennes



**Figure 2.** Variation à travers l'épaisseur des caractéristiques.

La plaque sandwich est composée de trois couches élastiques, à savoir, "couche 1", "couche 2" et "couche 3" de bas en haut de la plaque (Fig. 2).

$$V^{(1)} = \left( \frac{z - h_1}{h_2 - h_1} \right)^k, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left( \frac{z - h_4}{h_3 - h_4} \right)^k, \quad z \in [h_3, h_4] \quad (1c)$$

Où  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ) désigne la fonction de la fraction volumique de la couche, et ( $k$ ) est l'indice de fraction volumique, qui indique le profil de variation à travers l'épaisseur du matériau.

Les propriétés mécaniques efficaces, comme le module de Young, coefficient de Poisson, et le coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimés par la loi de mélange (Marur, 1999), comme suit :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (2)$$

Où  $P^{(n)}$  est la propriété effective du matériau FGM de la couche  $n$ .  $P_2$  et  $P_1$  désigne la propriété des faces inférieure et supérieure de la couche 1 ( $h_1 \leq z \leq h_2$ ), respectivement, et vice versa pour la couche 3 ( $h_3 \leq z \leq h_4$ ) en fonction de la fraction volumique  $V^{(n)}$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

## 1. Cinématique et équations constitutives

Sur la base des hypothèses formulées dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu en utilisant les équations :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (3a)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y)$$

$$f(z) = \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right) - z}{[\cosh(\pi/2) - 1]} \quad (3b)$$

Où ;

Pour des plaques FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T \\ \varepsilon_y - \alpha T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}^{(n)} \quad (4)$$

où ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx}$ ) et ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx}$ ) sont les composantes des contraintes et des déformations, respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (2), les coefficients de rigidité, peuvent être exprimées comme ;

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, \quad (5a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1 - \nu^2}, \quad (5b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)}, \quad (5c)$$

## 2. Equations régissantes

Les équations régissantes l'équilibre, peuvent être obtenues en utilisant le principe des déplacements virtuels. Le principe du travail virtuel dans le cas présent est ;

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz = 0 \quad (6)$$

Où  $\Omega$  est la surface supérieure. On intégration à travers l'épaisseur de la plaque, l'équation (6) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
\delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\
\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} &= 0 \\
\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

La variation du champ de température à travers l'épaisseur est supposée être

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\Psi(z)}{h} T_3(x, y), \tag{8}$$

Où  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont des charges thermiques. Dans le cas de la présente théorie (NTSDT),

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]}$$

### 3. Solution exacte pour une plaque FGM Sandwich simplement appuyée

Les plaques rectangulaires sont généralement graduées en fonction du type de l'appui utilisé. Nous sommes concernés ici par la solution exacte des équations. (7) pour une plaque FGM simplement appuyée. Les conditions aux limites suivantes sont imposées au niveau des bords latéraux pour la RSHDT:

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{at } x = -a/2, a/2 \tag{9-a}$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{at } y = -b/2, b/2 \tag{9-a}$$

Pour résoudre ce problème, Navier a présenté les charges de température transversales  $T_1$ ,  $T_2$ , et  $T_3$  sous la forme d'une double série trigonométrique comme suit :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \tag{10}$$

Où  $\lambda = \pi/a$ ,  $\mu = \pi/b$ ,  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$  et  $\bar{T}_3$  sont constants.

En suivant la procédure de solution de Navier, on suppose la forme de solution suivante pour  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_b$  et  $w_s$  qui satisfait les conditions aux limites

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \tag{11}$$

Où  $U, V, W_b$  et  $W_s$  sont des paramètres arbitraires à déterminer, soumis à la condition que la solution de l'équation (9) satisfait les équations régissant (7). On obtient l'équation de l'opérateur suivant :

$$[K]\{\Delta\} = \{P\},$$

Où  $\{\Delta\} = \{U, V, W_b, W_s\}^t$  et  $[K]$  est la matrice symétrique donnée par;

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

#### 4. Résultats numériques et discussion

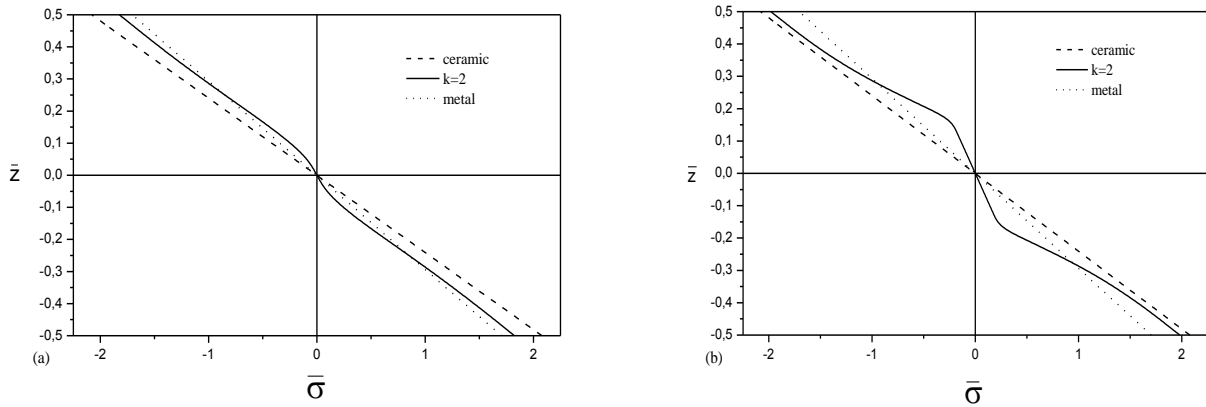
L'analyse thermo-élastique de flexion est effectuée pour une combinaison de métal et de céramique. L'ensemble des matériaux choisis est en Titane et en Zirconium. Par souci de simplicité, le coefficient de Poisson des deux matériaux retient la même valeur. Les valeurs typiques de métal et de céramique utilisés dans la plaque en sandwich FG sont énumérées dans le tableau 1. Pour illustrer l'analyse thermique structurale précédente dans une variété de problèmes est considérée. Par souci de brièveté, seule une répartition linéaire (à travers l'épaisseur) de la température  $T = \bar{z}T_2$ ; la variation non linéaire (à travers l'épaisseur)  $T = \bar{\Psi}(\mathbf{z})T_3$ ; et une combinaison des deux  $T = \bar{z}T_2 + \bar{\Psi}(\mathbf{z})T_3$  sont considérées. Il est noter, dans la littérature, les problèmes des contraintes thermiques sont traités dans une distribution de température de l'état d'équilibre qui est linéaire par rapport à la direction de l'épaisseur. Différentes grandeurs adimensionnelle sont utilisées pour le chargement pur de température:

- Flèche centrale 
$$\bar{w} = \frac{h}{\alpha_0 \bar{T}_2 a^2} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right),$$
- Contrainte axiale 
$$\bar{\sigma}_x = \frac{h^2}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a^2} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right),$$
- Contrainte de cisaillement 
$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{10h}{\alpha_0 \bar{T}_2 E_0 a} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right).$$

Où les valeurs de référence sont pries comme:  $E_0 = 1$  GPa et  $\alpha_0 = 10^{-6}$  /K. Des résultats sont illustrés dans les figures. 3 et 4 en utilisant cette nouvelle théorie raffinée (RHSdT). On suppose, sauf indication contraire, que  $a/h = 10$ ,  $a/b = 1$ ,  $\bar{T}_1 = 0$  et  $\bar{T}_2 = 100$ . Le facteur de correction de cisaillement de la FSDPT est fixé à  $K = 5/6$ . (Voir tableau 1)

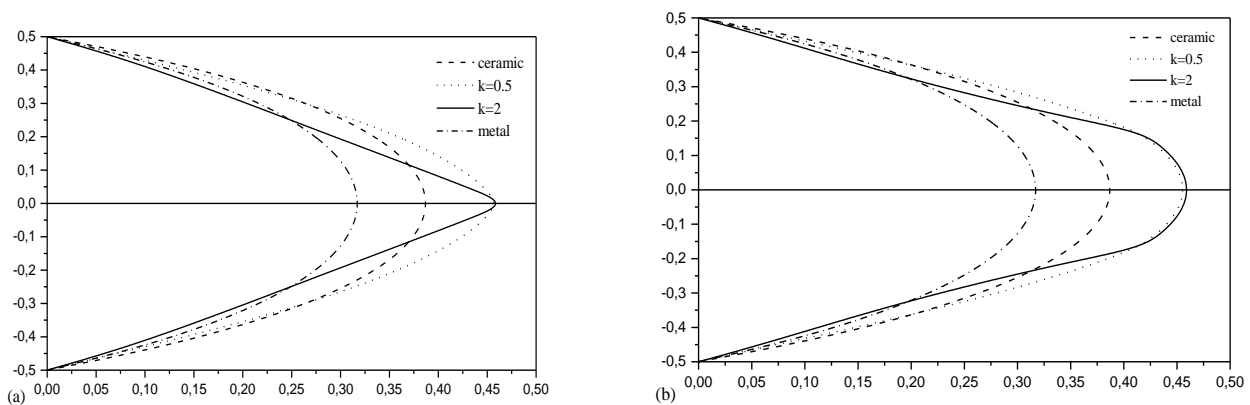
Propriétés	Metal: Ti-6Al-4V	Céramique: ZrO2
E (GPa)	66.2	117.0
$\nu$	1/3	1/3
$\alpha$ (10-6/K)	10.3	7.11

Tableau 1 Propriétés des matériaux utilisés pour une plaque FGM sandwich.



**Figure 3.** Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur de la plaque sandwich.

La figure 3, contient l'allure de la contrainte axiale à travers l'épaisseur des plaques FGM sandwich. Les contraintes de traction sont au-dessous du plan médian et les contraintes de compression. Les résultats montrent une variation non linéaire de la contrainte axiale à travers l'épaisseur de la plaque pour  $k=2$ . Tous les types de plaque FGM donnent la compression maximale (minimale à la traction) de la contrainte dans la surface supérieure (inférieure) de la couche de base (ce sont les surfaces riches en céramique).



**Figure 4.** Variation de la contrainte transversale à travers l'épaisseur de la plaque sandwich.

Dans la Figure. 4, nous avons illustré à travers l'épaisseur, les distributions de la contrainte de cisaillement transversale. La valeur maximale se produit à un point sur le plan médian de la plaque et son amplitude pour la plaque FGM est entre celui des plaques homogènes (plaques de céramique et de métal), sauf pour la plaque FGM (1-0-1).

## 5. Conclusion

La réponse thermo-élastique de flexion des plaques sandwich FGM est étudiée en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique raffinée (RHSdT). Le nombre de variables primaires dans cette théorie est même inférieur à celle des premières théories d'ordre supérieur de la plaque de déformation de cisaillement.

La théorie donne une distribution parabolique des contraintes transversales de cisaillement, traction et satisfait les conditions aux limites sur les surfaces de la plaque sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Toutes les études comparatives ont démontré que les flèches et les contraintes thermiques obtenues en utilisant la théorie actuelle raffinée (avec quatre inconnues) et d'autres théories de déformation d'ordre supérieur de cisaillement (cinq inconnues) sont presque identiques.

Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée (RHSdT) est précise et simple pour résoudre le problème de flexion thermo-élastique des plaques. La formulation se prête particulièrement bien à la simulation d'éléments finis et aussi d'autres méthodes numériques utilisant le calcul symbolique pour les problèmes de flexion des plaques, qui seront examinées dans un proche avenir.

## 6. Références

- [1] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A., Tounsi, A. (2014), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Structural Engineering and Mechanics*, Accepted.
- [2] Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., Adda Bedia, E.A. (2013), "A new higher-order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 15(6), 671 – 703.
- [3] Bourada, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. (2012), "A new four-variable refined plate theory for thermal buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 14, 5 - 33.
- [4] Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A., (2014), "A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates", *International Journal of Computational Methods*, 11(6), 1350082.
- [5] Chakraverty, S., Pradhan, K.K. (2014), "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerosp. Sci. Technol.*, 36, 132-156.
- [6] Jha, D.K., Kant, T., Singh, R.K. (2013), "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 96, 833 – 849.
- [7] Curiel Sosa, J.L., Anwar Bég, O. and Liebana Murillo, J.M. (2013), "Finite element analysis of structural instability using a switching implicit-explicit technique", *Int. J. Comp. Method. Eng. Sci. Mech.*, 14(5), 452-464.
- [8] Curiel Sosa, J.L., Munoz, J.J., Pinho, S.T. and Anwar Bég, O. (2012), "(XFEM) Simulation of damage in laminates", *Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, (J. Eberhardsteiner et al. Eds.), Vienna, Austria, September.
- [9] Lu, C.F., Lim, C.W., Chen, W.Q. (2009), "Semi-analytical analysis for multi-directional functionally graded plates: 3-d elasticity solutions". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 79(1), 25-44.
- [10] Talha, M., Singh, B.N. (2010), "Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model.*, 34(12), 3991–4011.
- [11] Wen, P.H., Sladek, J., Sladek, V. (2011), "Three-dimensional analysis of functionally graded plates". *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 87(10), 923-942.
- [12] Rashidi, M.M., Shooshtari, A. and Anwar Bég, O. (2012), "Homotopy perturbation study of nonlinear vibration of Von Kármán rectangular plates", *Comput. Struct.*, 106/107, 46-55.

