

## « Analyse de la théorie de poutre non locale d'ordre zéro pour le cas du post-flambement des poutres à l'échelle-nano »

" Harrat Zouaoui rabie"<sup>1</sup>,

"BELLIFA Hichem"<sup>2</sup>,

" BENRAHOU Kouider Halim "<sup>3</sup>,

" BOUSAHLA Anis Abdelmoumen "<sup>4</sup>,

" TOUNSI Abdelouahed"<sup>5</sup>,

<sup>1</sup>" Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, laboratoire des structures et avancés dans le génie civil et travaux publics, Algérie, [harrat.rabie@gmail.com](mailto:harrat.rabie@gmail.com) "

<sup>2</sup> " Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, laboratoire matériaux & hydrologie, Algérie, [bellifahichem@hotmail.fr](mailto:bellifahichem@hotmail.fr) "

<sup>3</sup> " Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, laboratoire matériaux & hydrologie, Algérie, [khbenrahoul@yahoo.fr](mailto:khbenrahoul@yahoo.fr) "

<sup>4</sup> "Centre Université de Ghelizane, Laboratoire de Modélisation Et Simulation Multi Echelles, Sidi Bel Abbès, Algérie, [bousahla.anis@gmail.com](mailto:bousahla.anis@gmail.com) "

<sup>5</sup> " Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, laboratoire matériaux & hydrologie, Algérie, [touabdel@yahoo.fr](mailto:touabdel@yahoo.fr) "

### Résumé :

L'intérêt de ce travail est d'étudier une théorie non locale d'ordre zéro de la déformation du cisaillement pour les états de post-flambement des poutres à l'échelle nano. Pour la présente théorie, on considère l'effet de déformation dans le déplacement axial dans l'utilisation des forces de cisaillement au lieu du déplacement rotatif comme l'implique les théories de déformation existantes. La charge de flambement critique et l'amplitude de la réponse non-linéaire dans l'état de post-flambement pour une poutre au avec des conditions aux limites encastrees-encastrees sont déterminées. Pour évaluer l'exactitude de la présente formulation dans la prévision la réponse de post-flambement, plusieurs comparaisons ont été faite.

## 1. Introduction

Dans la littérature scientifique, nous pouvons trouver trois approches qui modélisent les structures à l'échelle nano, à savoir : atomistique, Atomistique hybridation- Mécanique des milieux continus et Mécanique des milieux continus. L'Atomistique et l'hybridation atomistique - mécanique des milieux continus sont souvent riches en ressources informatiques et ne sont pas simples et pratiques pour étudier des systèmes à la grande échelle. Par contre, la méthode de la mécanique des milieux continus est moins riche en ressources informatique que les deux anciennes approches. De plus, il a été remarqué que cette approche fournit des résultats presque précis comparés à ceux d'approches atomistique et hybridation atomistique. [1, 2] La flexion, le flambement et la vibration des structures à l'échelle nano sont très importants dans la nanotechnologie. La compréhension du comportement mécanique de structures de l'échelle nano est l'étape principale pour beaucoup de dispositifs de NEMS comme des oscillateurs, des horloges et des dispositifs de capteur. Il y a déjà des travaux exploratoires sur les modèles des milieux continus pour la réponse mécanique de nanotubes carboniques (CNTs)

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement de post-flambement non-linéaire statique des poutres à l'échelle nano selon la théorie d'ordre zéro non-local de déformation en cisaillement (ZSDT). Le ZSDT a été d'abord développé par Shimpi (1999) pour des plaques isotopiques et ainsi il semble être important d'étendre cette théorie aux nanostructures en utilisant la théorie d'élasticité non locale d'Eringen. Le ZSDT représente la déformation en cisaillement transversal à l'aide forces de cisaillement au lieu du déplacement rotatif comme l'implique les théories de déformation existantes. Le ZSDT contient les mêmes inconnus que dans la théorie des poutres de Timoshenko (TBT), mais elle satisfait les conditions aux limites de traction en haut et en bas des surfaces de la poutre sans exiger aucun facteur de correction de cisaillement. [3, 4, 5,6] Les équations d'équilibre sont obtenues en employant le principe des travaux virtuels avec la théorie de Von-Karman pour de grandes déflexions. Les résultantes de contrainte sont reformulées pour considérer le petit effet d'échelle selon la théorie d'élasticité non-locale d'Eringen. La charge de flambement critique et l'amplitude de la réponse non-linéaire statique dans l'état de post-flambement pour une poutre au avec des conditions aux limites simplement appuyée et encastree-encastree sont déterminées. Les effets des paramètres différents comme le paramètre non-local et le paramètre du rapport longueur à la hauteur sur la charge de flambement critique et la réponse de post-flambement sont analysés. Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions existantes pour vérifier l'exactitude de la théorie présente dans la prévision de la charge de flambement critique et la réponse de post-flambement de nano poutres.

## 2. Formulation théorique

### 2.1 Cinématique

Le champ de déplacement du ZSDT est adopté et basé en supposant que la contrainte de cisaillement transversal varie de façon parabolique dans la profondeur de la poutre de telle façon qu'elle disparaît sur les surfaces de bas et de haut. Par conséquent, il n'y a aucun besoin d'utiliser le facteur de correction de cisaillement. En se basant sur cette hypothèse, le champ de déplacement correspondant peut être obtenu

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{\lambda_x} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] Q_x(x)$$

$$v(x, z) = 0 \quad (1)$$

$$w(x, z) = w_0(x)$$

Ou  $u_0$  et  $w_0$  sont les déplacements d'un point dans le plan-médium de la poutre dans l'axe des directions  $x$  et  $z$ , respectivement;  $h$  est l'épaisseur de la poutre;  $Q_x$  est la force transversale de cisaillement; et  $\lambda_x$  est un inconnu constant déterminer en se basant sur la définition de la force transversale de cisaillement en tant que

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (2)$$

Les relations de contrainte de déplacement qui sont données comme suit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x + f \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad \text{et} \quad \gamma_{xz} = g \frac{Q_x}{\lambda_x} \quad (3)$$

Ou  $\varepsilon_x^0$  et  $k_x$  sont, respectivement, la déformation longitudinale non linéaire et la courbure données par :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \quad \text{et} \quad k_x = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad (4a)$$

$$f = \frac{3}{2} \left( \frac{z}{h} \right) - 2 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \quad \text{et} \quad g = \frac{df}{dz} = \frac{3}{2h} \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (4b)$$

## 2.2 Relations constitutives

Eringen a d'abord proposé la théorie d'élasticité non-locale (1983) et il a supposé que la contrainte à un point de référence est une fonction du champ de contrainte à chaque point dans le corps. On donne la formule différentielle de la relation constitutive non-locale proposée par Eringen (1983) pour la contrainte normale  $\sigma_x$  et la contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  par [7,8]:

$$\sigma_x - \mu \frac{d^2 \sigma_x}{dx^2} = E \varepsilon_x \quad (5a)$$

$$\tau_{xz} - \mu \frac{d^2 \tau_{xz}}{dx^2} = G \gamma_{xz} \quad (5b)$$

Ou  $E$  et  $G$  sont le module d'Young et le module de cisaillement transversal des nano-poutres, respectivement;  $\mu = (e_0 a)^2$  est le paramètre non-local qui prend en compte l'effet de l'échelle,  $e_0$  est une constante appropriée à chaque matériaux,  $a$  est une longueur caractéristique interne (par exemple longueur de liaison C-C). Quand le paramètre non-local est pris en mettant  $\mu = 0$ , on obtient la relation constitutive de la théorie locale (le modèle local).

## 2.3 Equations d'équilibre

Le principe de déplacements virtuels est employé en ceci pour obtenir les équations d'équilibre. Le principe peut être présenté en forme analytique comme :

$$\int_0^L \int_A (\delta U + \delta V) dA dx = 0 \quad (6)$$

Ou  $\delta U$  est l'énergie de déformation virtuelle;  $\delta V$  est l'énergie potentielle virtuelle du travail effectué par les charges externes appliquées. La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par:

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx \\ &= \int_0^L \left( N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta k_x + P_x \frac{d\delta Q_x}{\lambda_x dx} + R_x \frac{\delta Q_x}{\lambda_x} \right) dx\end{aligned}\quad (7)$$

Ou  $N_x, M_x, P_x$  et  $R_x$  sont des résultantes de contrainte définies par :

$$(N_x, M_x, P_x) = \int_A (1, z, f) \sigma_x dA \quad \text{et} \quad R_x = \int_A g \tau_{xz} dA \quad (8)$$

La variation de l'énergie potentielle des charges extérieurs appliqués peut être exprimés par:

$$\delta V = - \int_0^L N_0 \frac{dw_0}{dx} \frac{d\delta w_0}{dx} dx \quad (9)$$

Ou  $N_0$  Est une charge compressive externe appliquée aux extrémités de la poutre.

Remplaçant les expressions de  $\delta U$  et  $\delta V$  des Eqs. (7) et (9) dans l' Eq. (6) intégrant par partie, et collectant les coefficients de  $\delta w_0$ , et  $\delta Q_x$ , les équations d'équilibres suivantes de la théorie de la poutre proposé sont obtenus :

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left( N_x \frac{dw_0}{dx} \right) - N_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad (10b)$$

$$\frac{dP_x}{dx} - R_x = 0 \quad (10c)$$

En remplaçant Eq. (3) dans Eq. (5) et les résultats ultérieurs dans Eq. (8), les efforts résultants sont obtenus comme suit :

$$N_x - \mu \frac{d^2 N_x}{dx^2} = A_{11} \left[ \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \quad (11a)$$

$$M_x - \mu \frac{d^2 M_x}{dx^2} = -D_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + D_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (11b)$$

$$P_x - \mu \frac{d^2 P_x}{dx^2} = -D_{11}^s \frac{d^2 w_0}{dx^2} + H_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (11c)$$

$$R_x - \mu \frac{d^2 R_x}{dx^2} = A^s \frac{Q_x}{\lambda_x} \quad (11d)$$

Ou

$$(A_{11}, D_{11}, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_A (1, z^2, z, f, f^2) E dA, \quad A^s = \int_A g^2 G dA \quad (12)$$

Dans la lumière des Eqs. (4a) et (10a), Eq. (11a) Peut être exprimé en forme locale comme suit :

$$N_x = A_{11} \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right) \quad (13)$$

Résolvant Eq. (10b) pour  $d^2 M_x / dx$ , en substituant le résultat dans Eq. (11b), en notant que  $dN_x / dx = 0$ , nous obtenons la résultante de contrainte du moment non local comme suit:

$$M_x = -D_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \mu (N_0 - N_x) \frac{d^2 w_0}{dx^2} + D_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (14)$$

Pour développer les équations d'équilibre en termes des composants de déplacement, nous pouvons utilisées Eq. (14) et Eq. (10b), et notant que  $dN_x / dx = 0$ , nous obtenons l'équation d'équilibre de moment comme suit :

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + (N_0 - N_x) \frac{d^2}{dx^2} \left( w_0 - \mu \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) - D_{11}^s \frac{d^3 Q_x}{\lambda_x dx^3} = 0 \quad (15)$$

En intégrant Eq. (13) une fois par rapport à x et en mettant  $u(0) = u(L) = 0$  (c.a.l., les extrémités de la poutre ne se déplace pas), on obtient:

$$N_x = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 dx \quad (16)$$

Substituant Eq. (16) dans Eq. (15), on obtient:

$$D_{11} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \left( N_0 - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{dw_0}{dx} \right)^2 dx \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( w_0 - \mu \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) - D_{11}^s \frac{d^3 Q_x}{\lambda_x dx^3} = 0 \quad (17)$$

Pour exprimer la troisième équation d'équilibre en termes des déplacements, on résout Eq. (10c) pour  $P_x$  et on obtient:

$$\frac{dP_x}{dx} = R_x \quad (18)$$

En dérivant Eq. (18) une fois par rapport à x et substituent le résultat dans Eq. (11c), On obtient :

$$P_x - \mu \frac{dR_x}{dx} = -D_{11} \frac{d^2 w_0}{dx^2} + H_{11}^s \frac{dQ_x}{\lambda_x dx} \quad (19)$$

En Résolvant la susdite équation pour  $P_x$ , dérivant le résultat une fois par rapport à x, et substituant le résultat dans Eq. (18), on obtient :

$$R_x - \mu \frac{d^2 R_x}{dx^2} + D_{11}^s \frac{d^3 w_0}{dx^3} - H_{11}^s \frac{d^2 Q_x}{\lambda_x dx^2} = 0 \quad (20)$$

Finalement, la susdite équation, à la lumière d'Eq. (11d), peut être exprimé comme suit:

$$A^s \frac{Q_x}{\lambda_x} - H_{11}^s \frac{d^2 Q_x}{\lambda_x dx^2} + D_{11}^s \frac{d^3 w_0}{dx^3} = 0 \quad (21)$$

Finalement, on note qu'Eqs. (17) et (21) gouverne la réponse non-linéaire non-locale des poutres soumises à une charge axiales externe.

### 3. Solutions analytiques :

#### 3.1 Solutions analytiques pour les conditions aux limites simplement appuyées en extrémités

Les conditions aux limites pour la poutre simplement appuyées sont :

$$w_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{L} \quad (22a)$$

$$Q_x(x) = b \cos \frac{\pi x}{L} \quad (22b)$$

Ou  $a$  et  $b$  sont des inconnus à déterminer. Il faut noter que  $a$  est la flèche statique maximale à la mi-longueur de la poutre. Substituant Eqs. (22) dans Eqs. (17) et (21) et les résoudre pour  $a$  et  $b$ . Trois solutions analytiques de l'amplitude statique du post-flambement  $a$  sont obtenues. La première est la solution insignifiante,  $a = 0$  qui correspond à la position d'équilibre instable de l'état de post flambement. Les deux autres solutions sont exprimées comme suit :

$$a = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{N_0 L^2}{A_{11}} - \frac{\pi^2 L^2}{(\pi^2 \mu + L^2)} \left( \frac{D_{11}}{A_{11}} - \frac{\pi^2 (D_{11}^s)^2}{A_{11} (A^s L^2 + \pi^2 H_{11}^s)} \right)} \quad (23)$$

Ces deux solutions correspondent aux positions d'équilibre stables dans l'état se post-flambement. D'autres part, la charge critique de flambement,  $N_{cr}$ , Peut être obtenu en résolvant la contrepartie linéaire de l'Eq. (17). Le résultat est:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 [D_{11} A^s L^2 + \pi^2 (D_{11} H_{11}^s - (D_{11}^s)^2)]}{(\pi^2 \mu + L^2) (A^s L^2 + \pi^2 H_{11}^s)} \quad (24)$$

La charge critique non-dimensionnelle de flambement,  $\bar{N}_{cr}$ , est définie comme suit:

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{L^2}{D_{11}} \quad (25)$$

#### 3.2 Solutions analytiques pour la poutre encastree-encastree

Pour les poutres *encastrees-encastrees*, Le champ de déplacement suivant est supposé:

$$w_0(x) = \frac{1}{2} a \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) \quad (26a)$$

$$Q_x(x) = b \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (26b)$$

Substituant Eqs. (26) dans Eqs. (17) et (21), On obtient l'amplitude de post-flambement statique comme suit :

$$a = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{N_0 L^2}{A_{11}} - \frac{4\pi^2 L^2}{\mu(4\pi^2 + L^2)} \left( \frac{D_{11}}{A_{11}} - \frac{4\pi^2 (D_{11}^s)^2}{A_{11}(A^s L^2 + 4\pi^2 H_{11}^s)} \right)} \quad (27)$$

$$N_{cr} = \frac{4\pi^2 [D_{11} A^s L^2 + 4\pi^2 (D_{11} H_{11}^s - (D_{11}^s)^2)]}{(4\pi^2 \mu + L^2)(A^s L^2 + 4\pi^2 H_{11}^s)} \quad (28)$$

La charge critique non-dimensionnelle de flambement,  $\bar{N}_{cr}$ , est définie comme suit:

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr} \frac{L^2}{D_{11}} \quad (29)$$

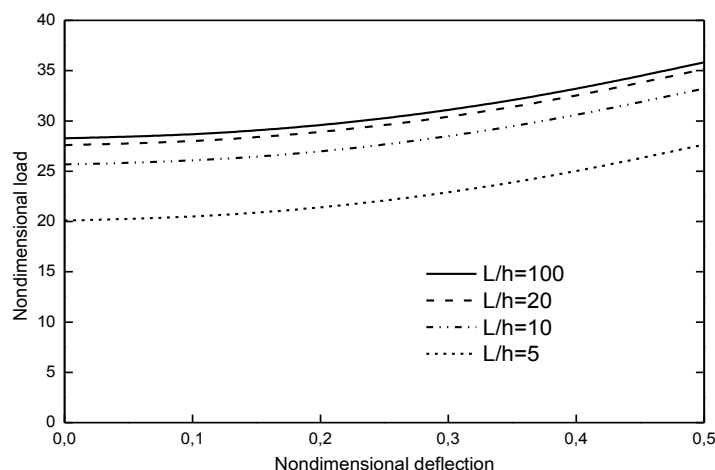
#### 4. Résultats et discussions:

Dans cette section, des résultats numériques divers sont établis et discutés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie dans la prévision du flambement et les réponses du post-flambement des poutres à l'échelle nano. La longueur de la poutre à l'échelle nano  $L$  est pris égale à 10 nm, le module de Young  $E$  et le module de Poisson  $\nu$ , sont pris égale à 30 MPa and 0.3, respectivement. Les résultats obtenus en utilisant la présente théorie non-locale ZSDT pour des valeurs différentes du paramètre de la petite échelle et le rapport d'épaisseur  $L/h$  sont comparés avec ceux rapportés par Emam (2013) [9], basé sur la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT), la théorie de poutre de Timoshenko (TBT) et la théorie de poutre de Reddy (RBT). On peut voir que les résultats de la présente théorie sont dans l'accord excellent avec ceux de RBT utilisé par Emam (2013) pour toutes les valeurs du paramètre de la petite échelle et le rapport d'épaisseur et cela pour le cas poutres encastrees-encastrees.

$L/h$	$\mu$	EBT	TBT	RBT	Présente
100	0	39.4784	39.4379	39.4379	39.4379
	1	28.3043	28.2753	28.2753	28.2753
	2	22.0603	22.0377	22.0377	22.0377
	3	18.0733	18.0548	18.0548	18.0548
	4	15.3068	15.2911	15.2911	15.2911
	5	13.2749	13.2613	13.2613	13.2613
20	0	39.4784	38.4907	38.4910	38.4910
	1	28.3043	27.5962	27.5964	27.5964
	2	22.0603	21.5084	21.5085	21.5085
	3	18.0733	17.6211	17.6212	17.6212
	4	15.3068	14.9239	14.9240	14.9240
	5	13.2749	12.9428	12.9429	12.9429
10	0	39.4784	35.8034	35.8075	35.8075
	1	28.3043	25.6695	25.6724	25.6724
	2	22.0603	20.0067	20.0090	20.0090
	3	18.0733	16.3909	16.3927	16.3927
	4	15.3068	13.8819	13.8835	13.8835
	5	13.2749	12.0391	12.0405	12.0405

**Tableau 1:** Première charge critique adimensionnelle de flambement pour le cas des poutres à l'échelle nano encastrees-encastrees

La figure 1 représente la charge mécanique de post-flambement en fonction de la flèche pour des valeurs différentes du paramètre d'épaisseur ( $L/h$ ) selon la présente formulation. On peut constater que l'effet du paramètre de l'épaisseur ( $L/h$ ) sur l'amplitude surgissante du flambement est fortement significatif dans le cas de la poutre encastree-encastree comme le montre la figure.



**Fig. 1:** Variation de la charge maximale du flambement en fonction de la charge axiale appliqué pour le cas des poutres encastrees-encastrees pour  $\mu = 3$ .

## 5. Conclusion

Des solutions analytiques pour le post-flambement non-linéaire des poutres à l'échelle nano soumise à la compression axiale dans le contexte de la théorie du zéro-ordre de la déformation du cisaillement et les relations différentielles constitutives non-locales d'Eringen ont été présenter dans ce travail. La présente formulation est en mesure d'identifier la déformation de cisaillement et les effets non locaux des poutres à l'échelle nano et n'exige pas des facteurs de correction de cisaillement. on peut constater que le paramètre de la petite échelle réduit non seulement la charge de flambement critique, mais il amplifie aussi l'amplitude surgissante du flambement. Ainsi, on peut conclure que le paramètre non-local adoucit la poutre et que la connaissance de ce comportement est cruciale dans l'examen et la conception des poutres à l'échelle nano comme les capteurs.

## Références

1. P. Ball, *Roll up for the revolution*, *Nature*, **414**, 142–144, (2001).
2. R.H. Baughman, A.A. Zakhidov, W.A. de Heer, *Carbon nanotubes—the route toward applications*, *Science*, **297**, 787–792. (2002).
3. A. Tounsi, H. Heireche, H.M. Berrabah, A. Benzair, L. Boumia, *Effect of small size on wave propagation in double-walled carbon nanotubes under temperature field*, *Journal of Applied Physics*, **104**, 104301, (2008).
4. A. Tounsi, S. Benguediab, E.A. Adda Bedia, A. Semmah, M. Zidour, *Nonlocal effects on thermal buckling properties of double-walled carbon nanotubes*, *Advances in Nano Research*, **1**, 1 – 11. (2013).
5. Q. Wang, G.Y. Zhou, K.C. Lin, *Scale effect on wave propagation of double walled carbon nanotubes*, *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 6071–6084, (2006a).
6. Q. Wang, V.K. Varadan, *Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics*, *Smart Materials and Structures*, **15**, 659–666, (2006b).
7. A.C. Eringen, *on differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves*, *Journal of Applied Physics*, **54**, 4703–4710, (1983).
8. A.C. Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, Springer, New York, (2002).
9. S.A. Emam, *A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams*, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 6929–6939, (2013).