

"Propagation d'une Onde dans des Poutres De Matériau à Gradient Propriété avec Utilisation d'une Théorie de Déformation de Cisaillement Efficace "

"NEBAB Mokhtar"¹,

" BENADOUD Mourad "²,

" AIT ATMANE Hassen "³,

¹ " Université Hassiba Benbouali de Chlef, Laboratoire des Sciences des Matériaux et Environnement, Algérie, m.nebab@univ-chlef.dz "

² " Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, laboratoire matériaux & hydrologie, Algérie, aitatmane2000@yahoo.fr "

³ " Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, laboratoire matériaux & hydrologie, Algérie, aitatmane2000@yahoo.fr "

Résumé :

Objectif dans ce travail est développé une théorie efficace de déformation de cisaillement pour l'analyse de propagation d'onde dans une poutre de matériau à gradient propriété. La théorie de déformation de cisaillement proposée est une méthode efficace car elle nous permet de montrer l'effet des deux composants de flexion et de cisaillement. Les propriétés des matériaux de la poutre sont supposées être graduées dans la direction de l'épaisseur, de la surface supérieure riche en céramique à la couche inférieure riche en métal, selon une loi de puissance simple en termes de fractions volumiques des constituants. Equations gouvernant de la propagation de l'onde dans la poutre de matériau à gradient propriété sont dérivées en utilisant le principe de Hamilton. La relation de dispersion analytique de la poutre de matériau à gradient propriété est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. Les effets des distributions des fractions volumiques, de l'épaisseur de la poutre et du nombre d'ondes sur la propagation des ondes dans une poutre de matériau à gradient propriété sont discutés en détail. On peut en conclure que la présente théorie est non seulement précise mais aussi simple pour prédire les caractéristiques de propagation d'onde dans la poutre graduée de propriété.

Mots clés:

Propagation d'onde; poutre de matériau à gradient propriété; théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

1. Introduction

matériaux à gradation fonctionnelle (FGM) sont une classe de matériaux composites qui ont une variation continue de l'espace des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre par une distribution non uniforme de la phase de renforcement, et en éliminant ainsi la concentration des contraintes inter laminaire trouvée dans les composites stratifiés qui provoque de nombreux problèmes tels que délamination, initiation et propagation des fissures en raison de la déformation plastique importante aux interfaces et ainsi de suite. Typiquement, FGM sont constitués d'un mélange de céramique et d'une combinaison de différents métaux. [1, 2]

Les études de propagation des ondes sont également importantes pour comprendre les caractéristiques dynamiques de la structure FGM à des fréquences plus élevées en raison de leurs diverses applications du monde réel. La surveillance de la santé structurelle ou la détection des dommages est une application importante. Comme la propagation des ondes concernent des fréquences plus élevées, des ondes diagnostiques peuvent être utilisées pour prédire la présence de défauts même minimes, qui surviennent au début de l'endommagement et les propagent jusqu'à l'échec de la structure de la FGM. Dans de nombreuses structures d'avions, la vibration et le bruit indésirables transmettent de la source aux autres parties sous forme de propagation d'ondes et ceci nécessite un contrôle ou une réduction, ce qui est encore une application importante des études de propagation des ondes.

L'étude de la propagation des ondes dans les structures FG a également reçu beaucoup d'attention de la part de divers chercheurs. Chen et al [3] ont étudié le comportement de dispersion des ondes dans des plaques graduées fonctionnellement avec des propriétés matérielles variant dans le sens de l'épaisseur. [4] et Liu ont étudié les ondes SH dans les plaques FG, où la variation de la propriété du matériau était supposée être une fonction quadratique par morceaux dans le sens de l'épaisseur. Han et al [5] ont proposé une méthode analytique-numérique pour analyser les caractéristiques des vagues dans les cylindres FG. Han et al [6] ont également proposé une méthode numérique pour étudier l'onde transitoire dans les plaques FG excitées par les charges d'impact. [7] et Luo ont également étudié la propagation de l'onde et la réponse dynamique des plaques rectangulaires à gradients fonctionnels avec des supports serrés complets sous une charge impulsive. Considérant les effets thermiques et les propriétés des matériaux dépendant de la température, Sun et Luo [8] ont étudié la propagation d'une plaque graduelle fonctionnellement infinie en utilisant la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

Notre objectif de ce travail est d'étudier l'influence de nombreux paramètres sur la propagation d'onde d'une poutre FG. Les champs de déplacement des théories proposées sont choisis sur la base d'une variation cubique des déplacements dans l'avion à travers l'épaisseur. La théorie de la déformation auditive proposée est une méthode efficace car elle nous permet de montrer l'effet des deux composants de flexion et de cisaillement et ceci est réalisé en divisant le déplacement transversal dans les parties de flexion et de cisaillement.

2. Formulations théoriques

Considérons une poutre comme le montre la figure 1 avec une longueur L et une section uniforme $b \times h$. Le faisceau est constitué d'un mélange de matières céramiques et métalliques isotropes dont les propriétés varient en douceur à travers la profondeur en fonction des fractions volumiques des constituants. La fraction volumique de céramique V_c est exprimée en fonction des coordonnées z tel que

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N \quad (1)$$

Où p est le paramètre scalaire, qui est positif. La variation de V_c à travers la profondeur de la poutre. La distribution des propriétés matérielles de la poutre FG à travers sa profondeur est donnée par la forme de la loi de puissance :

$$P(z) = P_M + (P_C - P_M) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N, \quad (2)$$

Où P_c et P_m sont le module d'Young (E), le coefficient de Poisson (ν), la masse volumique (ρ) de matériaux céramiques et métalliques, respectivement.



Figure. 1 Coordonné et géométrique de poutre fonctionnellement gradue.

2.1. Cinématique

Les champs de déplacement de diverses théories de la poutre de déformation de cisaillement sont choisis sur la base des hypothèses suivantes: (1) les déplacements axiaux et transversaux sont divisés en composants de flexion et de cisaillement; (2) la composante de flexion du déplacement axial est similaire à celle donnée par la théorie classique de la poutre (CBT); et (3) la composante de cisaillement du déplacement axial donne lieu à la variation supérieure de la contrainte de cisaillement et donc à la contrainte de cisaillement à travers la profondeur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement disparaisse sur les surfaces supérieure et inférieure. Sur la base de ces hypothèses, les champs de déplacement de diverses théories de poutre de déformation de cisaillement d'ordre supérieur sont donnés sous une forme générale.

$$u(x, y, z_{ns}, t) = u_0(x, y, t) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3a)$$

$$w(x, y, z_{ns}, t) = w_b + w_s \quad (3c)$$

Où u_0 est le déplacement dans le plan médian de la poutre dans la direction x , w_b et w_s sont respectivement les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal ; et $f(z)$ de Reddy [9] est une fonction de forme déterminant la distribution de la contrainte transversale de cisaillement et de la contrainte de cisaillement à travers la profondeur de la poutre. Les déformations linéaires non nulles associées au champ de déplacement sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z k_x^b - f(z) k_x^s, \quad \gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^0 \quad (4a)$$

$$\text{Et,} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad k_x^b = -\frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad k_x^s = -\frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (4a)$$

$$f(z) = \frac{4z^3}{3h^2}, \quad g(z) = 1 - \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

En supposant que la poutre FG obéit à la loi de Hooke, les contraintes dans la poutre deviennent

$$\sigma_x = C_{11}(z) \varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = C_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (5)$$

Où (σ_x, τ_{xz}) et $(\varepsilon_x, \gamma_{xz})$ sont les composantes contrainte et déformation, respectivement. En utilisant les propriétés du matériau définies dans l'équation. (4), les coefficients de rigidité, C_{ij} , peuvent être exprimés

$$C_{11}(z) = \frac{E(z)}{(1-\nu^2)}, \text{ et } C_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (6)$$

2.2. Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton est utilisé ici pour déterminer les équations de mouvement. Le principe peut être exprimé en forme analytique comme suit

$$0 = \int_0^T (\delta U - \delta K) dt \quad (7)$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle ; et δK est la variation d'énergie cinétique. La variation de l'énergie de déformation de la poutre est calculer par

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz \\ &= \int_A \{ N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + S_{xz} \delta \gamma_x^s \} dA \end{aligned} \quad (8)$$

Où les résultantes N , M et S sont définies par

$$\text{, et, } (N_x, M_x^b, M_x^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z_{ns}) \sigma_x dz \quad S_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xz}) dz. \quad (9)$$

La variation de l'énergie cinétique de la poutre est donnée par

$$\delta K = \int_A \left\{ I_0 \left(\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \delta (\dot{w}_b + \dot{w}_s) \right) - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) - J_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} \right) + K_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \right) + J_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_b}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_b}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_s}{\partial x} \right) \right\} dA \quad (10)$$

Où la convention de point-indique la différenciation super script par rapport à la variable de temps t ; et $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2)$ sont des inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, f, z^2, zf, f^2) \rho(z) dz \quad (11)$$

Substituant les relations pour δU , δV , et δK des Eqs. (8), (10), et (11) dans Eq. (7) en intégrant par partie, et en mettant les coefficients δu_0 , δw_b , et δw_s nuls séparément, Les équations de mouvement de la plaque sont obtenues comme suit

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (12a)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M^b_x}{\partial x^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (12b)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M^s_x}{\partial x^2} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (12c)$$

En substituant Eq. (6) dans Eq. (5) Et les résultats ultérieurs dans Eq. (9), les résultantes de contraintes sont obtenues comme suit

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M^b_x \\ M^s_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} & B^s_{11} \\ B_{11} & D_{11} & D^s_{11} \\ B^s_{11} & D_{11} & H^s_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ k^b_x \\ k^s_x \end{Bmatrix}, \text{ et } S_{xz} = A^s \gamma_{xz}, \quad (13)$$

Où $(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B^s_{11}, D^s_{11}, H^s_{11})$ sont la rigidité de la poutre, définie par

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B^s_{11}, D^s_{11}, H^s_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} (1, z, z^2, f, zf, f^2) dz, \text{ et } A_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{55} (g)^2 dz \quad (14)$$

En substituant Eq. (13) dans Eq. (12), les équations de mouvement peuvent être exprimé en terme de déplacement (u_0, w_b, w_s) comme suit

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + B^s_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (15a)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D^s_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (15b)$$

$$B^s_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - D^s_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H^s_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + H_{55} = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} - J_2 \nabla^2 \ddot{w}_b - K_2 \nabla^2 \ddot{w}_s \quad (15d)$$

3. Solution exacte pour l'appui simple

Nous supposons des solutions pour u_0 , w_b et w_s représentant des ondes propagatives dans la direction x avec la forme

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U e^{i(kx-\omega t)} \\ W_b e^{i(kx-\omega t)} \\ W_s e^{i(kx-\omega t)} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Où, U , W_b et W_s sont les coefficients de l'amplitude de l'onde, k est le nombre d'onde de la propagation de l'onde le long de la direction de l'axe des x , ω est la fréquence. Substituer l'équation (16) dans l'équation (15), nous obtenons

$$([K] - \omega^2[M])\{\Delta\} = 0 \quad (17)$$

Les relations de dispersion de la propagation d'onde dans la poutre fonctionnellement graduée sont données par

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (18)$$

Les racines de l'équation (18) peuvent être exprimés comme : $\omega_1 = W_1(k)$, $\omega_2 = W_2(k)$ and $\omega_3 = W_3(k)$. Ils correspondent aux modes d'onde M_0 , M_1 et M_2 respectivement. Les modes d'onde M_0 et M_2 correspondent à l'onde de flexion, le mode d'onde M_1 correspond à l'onde d'extension.

La vitesse de phase de la propagation de l'onde dans la poutre graduée fonctionnellement peut être exprimée

$$C_i = \frac{W_i(k)}{k} \quad i = (1,2,3) \quad (19)$$

4. Résultats et discussions

Dans cette section, une poutre FG en Si_3N_4 / SUS_{304} , dont les propriétés sont : $E = 348.43$ GPa, $\rho = 2370$ kg / m³, $\nu = 0.3$ pour Si_3N_4 et $E = 201.04$ GPa, $\rho = 8166$ kg / m³, $\nu = 0.3$ pour SUS_{304} , sont choisis. La profondeur de poutre FG est de 0,02 m.

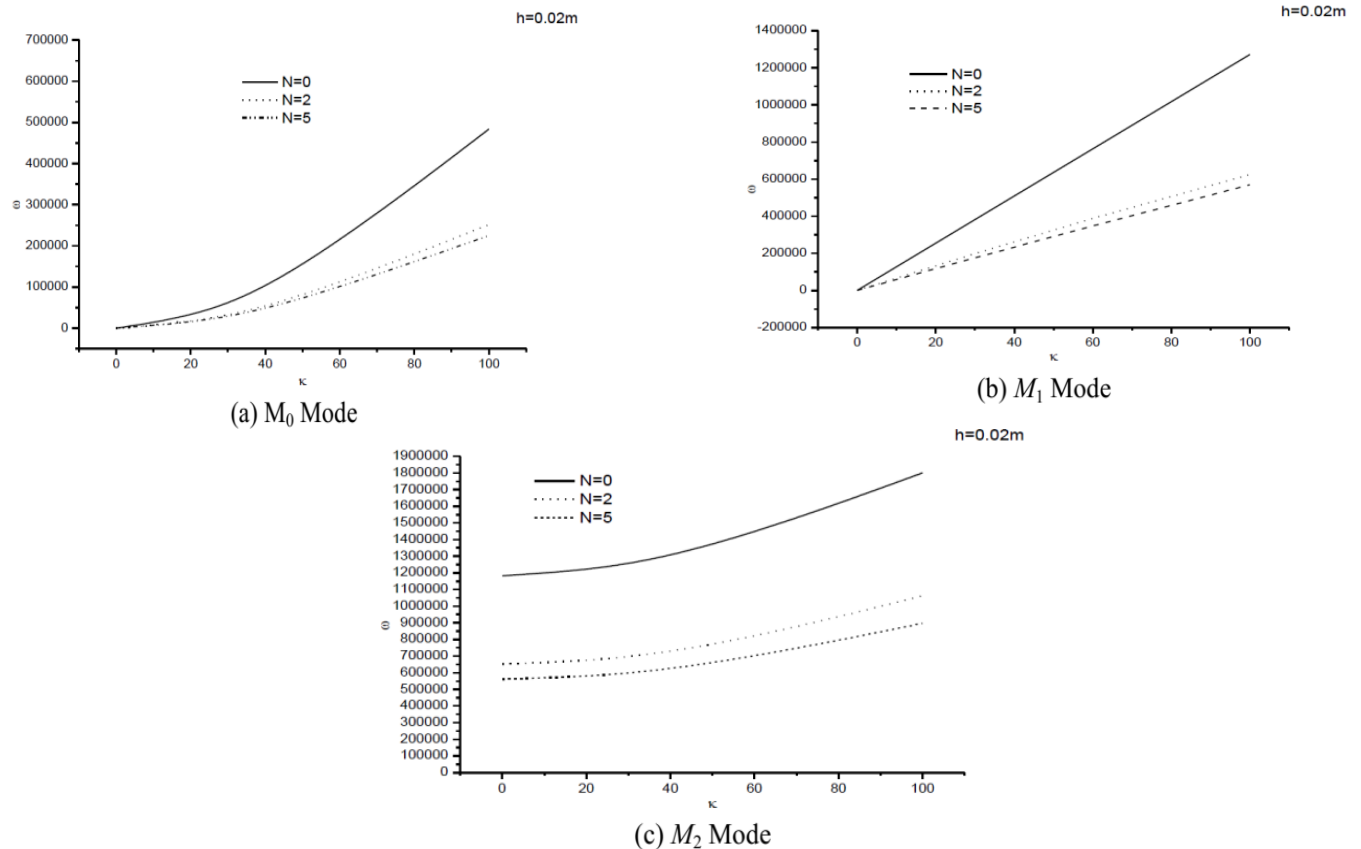


Figure. 2 Les courbes de dispersion de différentes poutres graduellement fonctionnelles.

Figures. 2 présentent respectivement les courbes de dispersion et les courbes de vitesse de phase de poutre à gradations fonctionnelles parfaites différentes. Plus le paramètre de dispersion est élevé, plus la fréquence de propagation des ondes dans les poutres fonctionnelles est élevée, quel que soit l'indice de loi de puissance. Cependant, l'augmentation de l'indice de loi de puissance conduit à une diminution de la fréquence. En conséquence, la fréquence maximale est obtenue pour une poutre en céramique complet ($N = 0$).

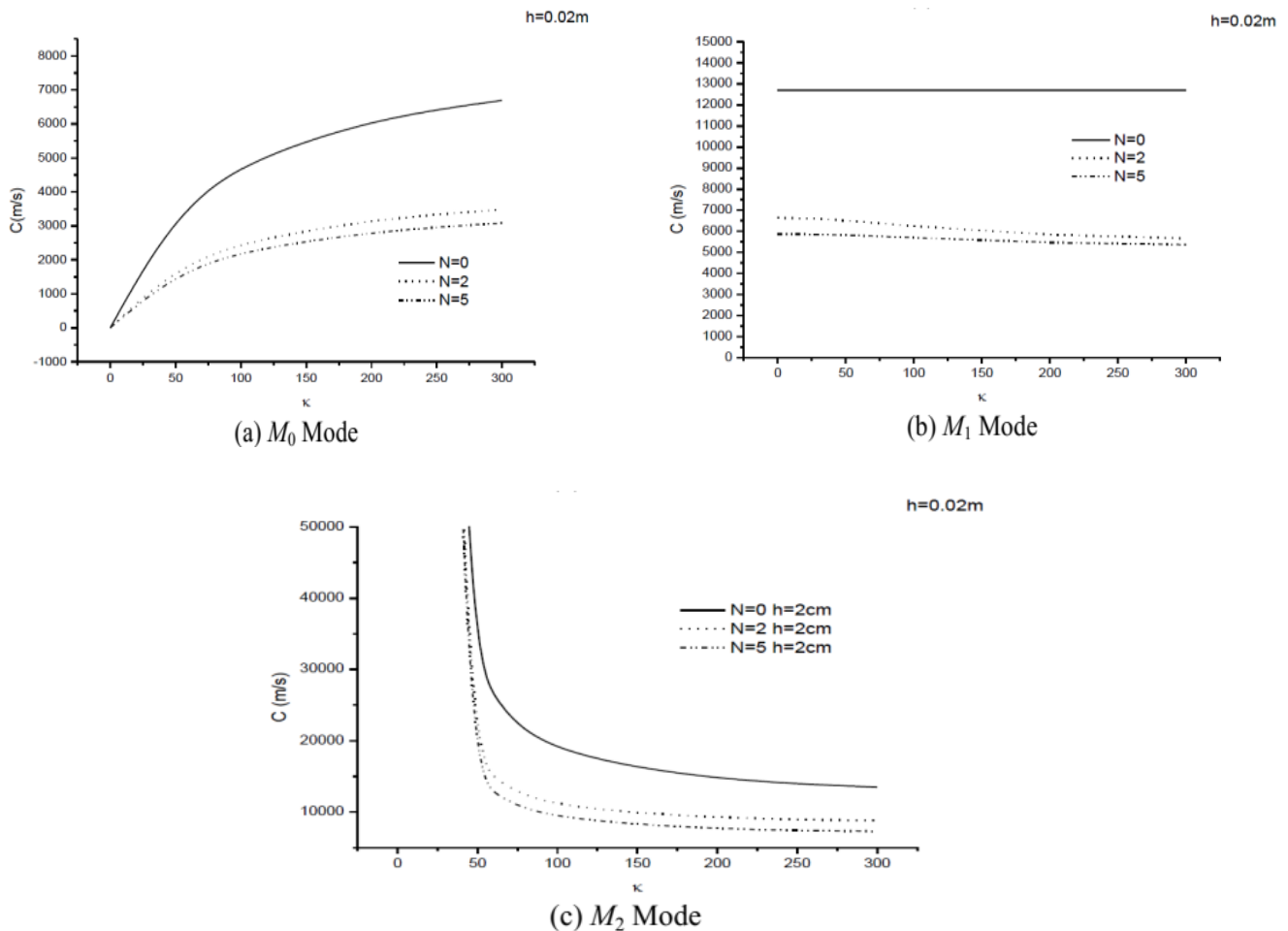


Figure. 3 Les courbes de vitesse de phase de différentes poutres fonctionnelles.

La figure 3 présente les courbes de vitesse de phase des différents poutres FG obtenues en utilisant une théorie de déformation de cisaillement du 3^{ème} ordre pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance N . On peut conclure de cette courbe que la vitesse de phase décroît lorsque l'indice de loi de puissance augmente pour le même nombre d'onde k . La vitesse de phase pour le mode d'extension M_1 de la poutre homogène ($N = 0$) est constante contrairement à celle de la poutre non homogène ($N \neq 0$). On peut également conclure que la vitesse de phase est maximale pour l en céramique complet ($N = 0$).

5. Conclusion

Dans cette recherche, la propagation des ondes des poutres FG en utilisant une théorie efficace de la déformation par cisaillement. Les propriétés du matériau sont considérées comme variées dans la direction de l'épaisseur en fonction de la règle de mélange modifiée. Les équations gouvernant la propagation de l'onde dans la poutre FG sont dérivées dans le cadre de la théorie de la poutre de déformation de cisaillement du troisième ordre et en utilisant le principe de Hamilton. La relation de dispersion analytique de la poutre FG est obtenue en résolvant un problème de valeur propre. D'après les travaux actuels, on peut affirmer que l'effet des distributions des fractions volumiques et de l'indice de volume sur la propagation des ondes dans la poutre FG est significatif.

6. Bibliographie

- [1] M.A.A. Meziane, H.H. Abdelaziz, A. Tounsi, An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions, Journal of Sandwich Structures & Materials 16(3) (2014) 293-318.

- [2] M. Ahouel, M.S.A. Houari, E. Bedia, A. Tounsi, Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept, *Steel and Composite Structures* 20(5) (2016) 963-981.
- [3] W. Chen, H. Wang, R. Bao, On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate, *Composite Structures* 81(2) (2007) 233-242.
- [4] X. Han, G. Liu, Effects of SH waves in a functionally graded plate, *Mechanics Research Communications* 29(5) (2002) 327-338.
- [5] X. Han, G. Liu, Z. Xi, K. Lam, Transient waves in a functionally graded cylinder, *International Journal of Solids and Structures* 38(17) (2001) 3021-3037.
- [6] X. Han, G. Liu, K. Lam, Transient waves in plates of functionally graded materials, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52(8) (2001) 851-865.
- [7] D. Sun, S.-N. Luo, The wave propagation and dynamic response of rectangular functionally graded material plates with completed clamped supports under impulse load, *European Journal of Mechanics-A/Solids* 30(3) (2011) 396-408.
- [8] D. Sun, S.-N. Luo, Wave propagation of functionally graded material plates in thermal environments, *Ultrasonics* 51(8) (2011) 940-952.
- [9] J. Reddy, Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47(1-3) (2000) 663-684.