

Une théorie de cisaillement raffinée pour les poutres FGM basé sur la position de surface neutre

Nafissa Zouatnia¹, Lazreg Hadji², Amar Kassoul³

¹ : Université Hassiba Benbouali, Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Chlef, Algérie,
nissa.hadji@yahoo.com

² : Université Ibn Khaldoun, Laboratoire de Géomatique et Développement Durable, Tiaret, Algérie,
had_laz@yahoo.fr

³ : Université Hassiba Benbouali, Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Chlef, Algérie,
amarkassoul@gmail.com

Résumé :

Dans ce travail, une théorie de cisaillement hyperbolique est présentée pour l'analyse des poutres fonctionnellement gradués 'FGM'. Cette théorie utilisée dans le champ de déplacement représente les effets de déformation de cisaillement et ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une variation transversale de la contrainte de cisaillement telle que les contraintes transversales de cisaillement varient paraboliquement suivant l'épaisseur et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. Les équations gouvernantes sont dérivées en utilisant le principe de travaux virtuel et le concept de surface neutre. Une poutre FGM simplement appuyée et soumise à une charge uniformément réparties est considérée pour l'étude numérique. La précision des présentes solutions est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec les résultats disponibles dans la littérature.

Mots clé : Matériau fonctionnellement gradué; Solution de Navier; surface neutre; Travaux virtuel.

1. Introduction

Le concept de FGM a été initialement introduit au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais. Macroscopiquement, Ce sont des matériaux composites hétérogènes qui sont généralement composées de deux matériaux différents comme le céramique-métal. La composition du matériau change progressivement suivant la direction de l'épaisseur. En conséquence, les propriétés mécaniques sont supposées variables de manière continue à partir de la surface supérieure à la partie inférieure.

En raison des bonnes caractéristiques de la céramique à la température et la bonne résistance à la corrosion ainsi que la ténacité du métal, la combinaison de la céramique et du métal peut aboutir à d'excellents matériaux.

Les FGM sont largement utilisés en génie mécanique, aéronautique, nucléaire et génie civil. Par conséquent, des études consacrées à comprendre les comportements statiques et dynamiques des poutres et les plaques FGM ont été trop lancées ces dernières années. Sankar, 2001 [1], a étudié, par une solution élastique, la flexion des poutres FGM ; cette étude est basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Li et al. 2008 [2] a étudié la flexion et la vibration de la poutre de Timoshenko en matériau FGM de, dans laquelle, il a introduit une nouvelle fonction, les équations de flexion et de vibration des poutres FGM ont été découplées et la flèche et l'angle de rotation et la force résultante et le moment sont exprimés uniquement en terme de cette nouvelle fonction. Sallai et al. 2009 [3] ont étudié les réponses statiques d'une poutre FGM sigmoïde épaisse à l'aide de différentes théories des poutres. Huu-Tai et al. 2012 [4] a étudié la flexion et la vibration libre des poutres FGM utilisant les différentes théories de cisaillement d'ordre élevé.

Ce travail porte sur l'analyse statique des poutres FGM utilisant une théorie de cisaillement raffinée à trois variables. La présente théorie de cisaillement proposée assure la nullité des contraintes de cisaillement dans les faces supérieures et inférieures de la poutre sans l'aide de facteur de correction de cisaillement comme la théorie de cisaillement de premier ordre de Timoshenko FSDBT. Dans ce travail, on suppose que les propriétés de la poutre FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon une simple loi de puissance P-FGM. Les équations d'équilibres pour la poutre FGM ont été trouvées en utilisant le principe des travaux virtuels en se basant sur le concept de l'axe neutre. Des solutions analytiques sont obtenues pour les poutres simplement appuyées, et l'exactitude de la présente théorie de cisaillement est vérifiée par la comparaison des résultats trouvés avec les résultats des autres théories existantes dans la littérature.

2. Formulation théorique

1. Surface physique neutre

Les matériaux à gradient de propriétés est un type particulier de composites dans lesquels leurs propriétés matérielles varient de façon continue en raison des variations progressives de la fraction volumique des matériaux constitutifs le long de l'une des dimensions (généralement dans le sens de l'épaisseur). Dans cette étude, la poutre FGM est faite à partir d'un mélange de céramique et de métal et les propriétés sont supposées variables à travers l'épaisseur de la poutre. En raison de l'asymétrie des propriétés des matériaux de la poutre FGM par rapport au plan médian, les équations de cisaillement et de flexion sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est choisie de manière appropriée dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM de façon à être la surface neutre, les propriétés de la poutre FGM étant symétrique par rapport à cet axe. Pour indiquer la position de la surface neutre de la poutre FGM, deux plans différents sont à considérés pour la mesure de z , à savoir, z_{ms} et z_{ns} sont mesurées à partir de la surface médiane et la surface neutre de la poutre, respectivement, comme il est montré dans la figure 1.

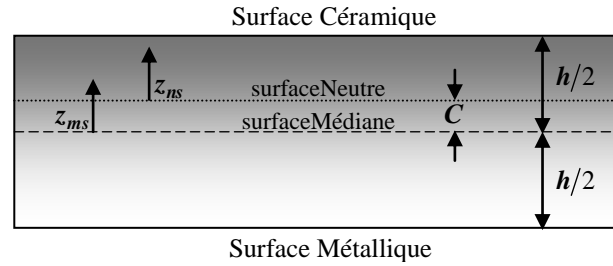


Figure 1. Position de la surface médiane et la surface neutre pour une poutre FGM.

La fraction volumique de la céramique V_C est exprimé en se basant sur les coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_C = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (1)$$

Où k est l'indice de loi de puissance qui prend une valeur supérieure ou égale à zéro et C est la distance entre la surface neutre et la surface médiane.

Les propriétés matérielles non homogènes de la poutre FGM peuvent être exprimées par la loi de mélange en puissance P-FGM. En utilisant l'équation. (1), Les propriétés matérielles non homogènes de la poutre P-FGM, comme une fonction de coordonnée de l'épaisseur devient :

$$P(z) = P_M + P_{CM} \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad P_{CM} = P_C - P_M \quad (2)$$

Où P_M et P_C sont les propriétés du métal et de céramique successivement. Dans ce chapitre, nous supposons que le module d'élasticité E et la densité de masse ρ sont décrits par l'équation. (2), tandis que le coefficient de Poisson ν est considéré constant suivant l'épaisseur Sallai et al [Sallai 2009]. La position de la surface neutre de la poutre FGM est déterminée à satisfaire le premier moment par rapport au module d'Young étant nulle comme :

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C) dz_{ms} = 0 \quad (3)$$

La position de la surface neutre peut être déterminée comme :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (4)$$

Il est clair que le paramètre C est nul pour les poutres homogènes et isotropes.

2. Cinématique et équations constitutive

Le champ de déplacement utilisé en tenant compte de l'effet de cisaillement est sous la forme suivante :

$$u(x, z_{ns}) = u_0(x) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z_{ns}) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (5a)$$

$$w(x, z_{ns}) = w_b(x) + w_s(x) \quad (5b)$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation. (50) soit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z_{ns} k_x^b + f(z_{ns}) k_x^s \quad (6a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z_{ns}) \gamma_{xz}^s \quad (6b)$$

Ou

$$f(z_{ns}) = (z_{ns} + C) \left[1 + \frac{3\pi}{2} \sec h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh \left(\frac{z_{ns} + C}{h} \right) \quad (7a)$$

Et

$$g(z_{ns}) = 1 - f'(z_{ns}) \quad (7b)$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit:

$$\sigma_x = Q_{11}(z_{ns}) \varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz} = Q_{55}(z_{ns}) \gamma_{xz} \quad (8a)$$

Ou

$$Q_{11}(z_{ns}) = E(z_{ns}) \text{ et } Q_{55}(z_{ns}) = \frac{E(z_{ns})}{2(1+\nu)} \quad (8b)$$

3. Equations d'équilibres

Les equations d'équilibres de la poutre FGM peuvent être trouvés en utilisant le principe des travaux virtuel. Le principe sous la forme suivante :

$$\int_0^L \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz_{ns} dx - \int_0^l q (\delta w_b + \delta w_s) dx = 0 \quad (9)$$

Les équations d'équilibres pour la poutre FGM sont obtenues sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{dN}{dx} &= 0 \\ \delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + q &= 0 \\ \delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} + q &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Les équations d'équilibre (9) peuvent être exprimées en termes des déplacements (u_0, w_b, w_s) comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = 0 \quad (11a)$$

$$-D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q = 0 \quad (11b)$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q = 0 \quad (11c)$$

4. Solution analytique

Les équations de mouvement admettent les solutions de Navier pour les poutres simplement appuyées. Les variables u_0 , w_b , w_s peuvent être écrit en supposant les variations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) \\ W_{bm} \sin(\lambda x) \\ W_{sm} \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Où U_m , W_{bm} , et W_{sm} sont des paramètres à déterminer, et $\lambda = m\pi / L$

La charge transversale q est développée en séries de Fourier comme suit :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\lambda x) \quad (13)$$

Où Q_m est l'amplitude de la charge calculée à partir de la relation suivante :

$$Q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (14)$$

Le coefficient Q_m est donné ci-dessous pour certains types de chargement. Dans le cas d'une charge sinusoïdale, nous avons :

Pour le cas d'une charge uniformément répartie nous avons

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (15)$$

Substituant les expansions de u_0 , w_b , w_s , et q de l'équation (12) et (13) dans les équations de mouvement (11), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_{bm} \\ W_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_m \\ Q_m \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Où

$$a_{11} = A_{11}\lambda^2, \quad a_{13} = -B_{11}^s\lambda^3, \quad a_{22} = D_{11}\lambda^4, \quad a_{23} = D_{11}^s\lambda^4, \quad a_{33} = H_{11}^s\lambda^4 + A_{55}^s\lambda^2 \quad (17)$$

3. Résultats numériques et discussion

Dans cette étude, l'analyse de flexion des poutres FGM simplement appuyées par la présente théorie est effectuée pour discussion.

Pour la poutre FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

Céramique (P_C , alumine, Al_2O_3) $E_c = 380GPa$, $\nu = 0.3$

Métal (P_M , Aluminium, Al) $E_m = 380GPa$, $\nu = 0.3$.

Les résultats numériques sont présentés en termes des flèches, déplacement, contraintes et des fréquences non dimensionnelles.

$$\bar{w} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w\left(\frac{L}{2}\right), \quad \bar{u} = 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} u\left(0, -\frac{h}{2} - C\right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} - C\right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz}(0, -C)$$

Le tableau 1 présente une comparaison des résultats des déplacements et des contraintes de poutres FGM sous charge uniforme pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance k et le rapport L/h . Les résultats obtenus sont comparés avec les solutions analytiques proposés par Ould Larbi Latifa et al. 2013 [5] et Hadji et al. 2014 [6] et À partir des résultats présentés dans le tableau 1, on peut constater que les résultats de cette nouvelle théorie raffinée montrent un bon accord avec ceux obtenus par les théories de cisaillement utilisé par Hadji 2014 et Ould Larbi Latifa 2013.

k	Theories	$L/h = 5$				$L/h = 20$			
		\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Present	0.9397	3.1655	3.8016	0.7310	0.2305	2.8962	15.0128	0.7415
	Ould Larbi et al. (2013)	0.9406	3.1651	3.8043	0.7489	0.2305	2.8962	15.0136	0.7625
	Hadji et al. (2014)	0.9400	3.1654	3.8019	0.7330	0.2305	2.8962	15.0129	0.7437
1	Present	2.3036	6.2593	5.8829	0.7310	0.5685	5.8049	23.2050	0.7415
	Ould Larbi et al. (2013)	2.3052	6.2590	5.8875	0.7489	0.5685	5.8049	23.2063	0.7625
	Hadji et al. (2014)	2.3038	6.2594	5.8835	0.7330	0.5685	5.8049	23.2051	0.7437
2	Present	3.1129	8.0686	6.8817	0.6683	0.7691	7.4421	27.0987	0.67893
	Ould Larbi et al. (2013)	3.1146	8.0683	6.8878	0.6870	0.7691	7.4421	27.1005	0.7005
	Hadji et al. (2014)	3.1129	8.0677	6.8824	0.6704	0.7691	7.4421	27.0989	0.6812
5	Present	3.7097	9.8273	8.1092	0.5881	0.9134	8.8182	31.8124	0.5988
	Ould Larbi et al. (2013)	3.7128	9.8345	8.1187	0.6084	0.9134	8.8186	31.8151	0.6218
	H Hadji et al. (2014)adji et al.	3.7100	9.8281	8.1104	0.5904	0.9134	8.8182	31.8127	0.6013
10	Present	3.8859	10.9374	9.7109	0.6443	0.9536	9.6906	38.1379	0.6561
	Ould Larbi et al.	3.8898	10.9413	9.7203	0.6640	0.9537	9.6907	38.1408	0.6788

(2013)									
Hadji et al. (2014)	3.8863	10.9381	9.7119	0.6465	0.9536	9.6905	38.1382	0.6586	

Les figures 2 montre l'évolution des contraintes normales axiales $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM sous charge uniforme. Une comparaison avec la théorie de cisaillement des poutres (TBT) développé par [Reddy1984] est représentée sur ces figures en utilisant des différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k . On remarque qu'il ya un bon accord entre la présente théorie et la théorie TBT. Dans la figure 2, la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ est de traction dans la surface supérieure et de compression dans la surface inférieure. La poutre homogène en céramique ($k = 0$) donne une contrainte de compression maximale à la surface inférieure et une contrainte de traction minimale sur la surface supérieure de la poutre.

La figure 3, montre la distribution de la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre. Les distributions des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur pour les poutres FGM ne sont pas paraboliques comme dans le cas des poutres homogènes en métal ou en céramique.

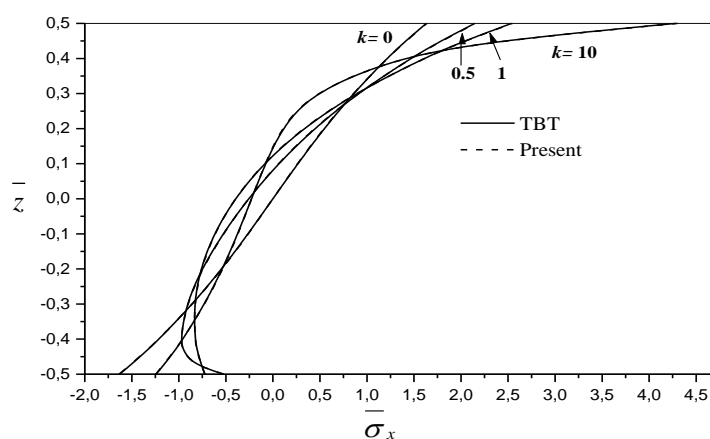


Figure 2. Variation de la contrainte normale axiale $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L = 2h$).

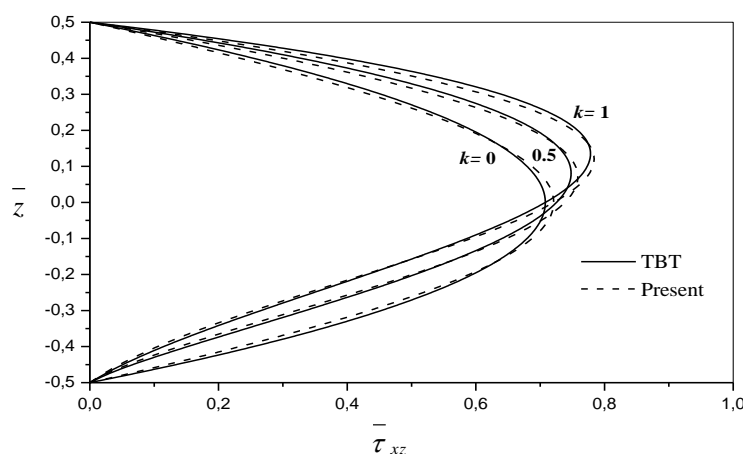


Figure 3. Variation de la contrainte de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L = 2h$).

4. Conclusions

Une théorie de déformation de cisaillement des poutres basée sur la position de la surface neutre est développée pour l'analyse de la flexion des poutres gradient de propriété. La théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution hyperbolique des contraintes de cisaillement suivant l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de traction sur les bords, sans l'aide de facteurs de correction de cisaillement. Cette théorie est basée sur l'hypothèse que les déplacements transversaux sont constitués de deux composants de flexion et de cisaillement dans lequel les composants de flexion ne contribuent pas vers les forces de cisaillement et, de même, les composantes de cisaillement ne contribuent pas vers les moments de flexion. On se base sur la présente théorie et le concept de la surface neutre, les équations de mouvement pour la poutre FGM ont été obtenus en utilisant le principe des travaux virtuel. En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée donne des solutions qui sont presque identiques à ceux obtenus avec d'autres théories de déformation de cisaillement.

5. Bibliographie

- [1] Sankar, B.V., An elasticity solution for functionally graded beams, *Compos. Sci. Tech.*, 61(5), 689-696, 2001.
- [2] Li, X.F., A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams", *Journal of Sound and Vibration*, 318, 1210–1229, 2008.
- [3] Sallai, B.O., Tounsi, A., Mechab, I., Bachir, B.M., Meradjah, M., Adda Bedia, E.A., A theoretical analysis of flexional bending of Al/Al₂O₃ S-FGM thick beams, *Comput. Mater. Sci.*, 44(4), 1344-1350, 2009.
- [4] Thai, H.T. and Vo, T.P., Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories, *Int. J. Mech. Sci.*, 62(1), 57-66, 2012.
- [5] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421–433, 2013.
- [6] Hadji, L., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Adda bedia, E.A., A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam, *Steel and Composite Structures*, 16(5), 507-519, 2014.