



« Étude de flambement et de vibration des poutres fonctionnellement graduées FGM en utilisant une théorie raffinée d'ordre élevé »

"BEKHADDA Ahmed"¹,

"CHEIKH abdelmadjid"²

"HADJOUI Abdelmadjid"³,

"BENSAID Ismail"⁴

[#] *Laboratoire IS2M, Département Génie Mécanique, Université de Abou Beckr Belkaid, Tlemcen, Algérie*

¹ bekhaddaa@gmail.com

Résumé :

Ce travail propose une nouvelle théorie à ordre élevé pour l'analyse de flambement et vibration d'une poutre FGM. cette théorie a grand ressemblance avec la théorie classique des poutres dans beaucoup d'aspects, les propriétés des matériaux FGM varient continuellement dans le sens de l'épaisseur selon la loi de puissance, les équations du mouvement sont déterminés en utilisant le principe d'Hamilton, les solutions analytique pour calcul les charges de flambement critique, une étude paramétrique de l'influence des différents paramètre tels que le rapport d' , l'indice de fraction volumique , les conditions d'appui les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus d'autres théories qui existent dans la littératures.

Mots-clés : poutre , FGM, théorie a ordre élevé, flambement.

Abstract :

In this paper, we propose a novel higher-order deformation beam theory to analyze the buckling and free vibration of the FGM beam. This theory has great resemblance to the classical beam theory in many aspects. The properties of the FGM materials vary continually according to the law of power in the direction of the thickness. The equations of motion are determined using the Hamilton principle, the analytical solutions for calculating the critical buckling loads, a parametric study of the influence of different parameters such as the ratio of the density index, and the conditions of support. The obtained results are compared with those of other theories that exist in the literature.

Keywords: beam, FGM, high-order theory, buckling.

1. INTRODUCTION :

Actuellement, une nouvelle sorte des matériaux composites connue sous le nom de « matériaux fonctionnellement gradués (FGM) » a attiré une attention considérable dans nombreux domaines de l'ingénierie, en particulier dans les applications à haute température telles que les réacteurs nucléaires et les industries de production aéronautique et des secteurs mécaniques pointues. Ces matériaux ont été développés par laboratoire d'aérospatial du Japon en 1984 par Koizumi [1] étant comme des barrières thermiques, et ils se caractérisent par leurs propriétés mécaniques microscopiquement hétérogènes, dans lequel elles se varient en douceur et en continu à travers certaines dimensions (généralement dans le sens de l'épaisseur). En changeant progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs.

Dans ce contexte, le modèle classique de la théorie des poutres (CBT) ou théorie d'Euler – Bernoulli, qui ignore l'effet de déformation de cisaillement, fournit des résultats acceptables seulement pour les poutres minces [2–4]. les théories de cisaillement d'ordre élevé HSDT peuvent être développées en utilisant des fonctions à travers l'épaisseur que soient polynomiales ou non polynomiales et qui éliminent l'utilisation de facteur de correction de cisaillement en donnant une meilleure représentation de contrainte de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la poutre. Dans ce contexte, Shimpi [7] a développé une nouvelle théorie de plaque raffinée qui est simple à utiliser. La particularité la plus intéressante de cette théorie est qu'elle représente une variation quadratique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, et répond à la nullité des contraintes des surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans l'aide les facteurs de correction de cisaillement. Şimşek [8] a examiné la vibration libre d'une FG poutre modérément épaisse en utilisant différentes théories des poutres d'ordre supérieur. Thai et Vo [9] ont appliqué cette théorie de shimpi pour l'étude de la flexion et de vibration des poutres fonctionnellement graduées (FGM) en utilisant plusieurs fonctions de déformation de cisaillement de poutres. Bouremana et ses collègues [10] ont proposé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (NFSDT) sur la base du concept de position de la surface neutre pour l'étude de flexion statique et la vibration libre des poutres FGM. Plus récemment, Nguyen [11] a proposé une nouvelle théorie de type hyperbolique d'ordre élevé, et en intégrant de nouvelles suppositions supplémentaires concernant la réduction DES variables inconnues, pour étudier la flexion, le flambement et la vibration libres des plaques à gradient de propriétés (FGM). Dans ce travail une étude de flexion et la vibration libre des poutres FG basée sur la théorie raffinée et simplifiée proposée par Nguyen. La particularité de cette théorie est qu'elle n'exige pas de facteur de correction du cisaillement. Les propriétés des matériaux des plaques FG sont supposées varier en continu à travers l'épaisseur, en suivant une fonction de distribution en loi de puissance de la fraction de volume des constituants. Les équations des mouvements ont été dérivés en utilisant le principe variationnel d'Hamilton, sont résolus analytiquement pour le cas d'une poutre simplement appuyé. Les résultats obtenus ont été validé avec celles trouvés dans la littérature et une bonne corrélation a été trouvée, ce qui montre l'efficacité du présent model.

2. CHAMP DE DEPLACEMENT ET DE DEFORMATION

Considérons une poutre en FGM d'épaisseur « h », largeur « b » et longueur « L », dans le sens x et z respectivement. Le champ du déplacement de cette nouvelle théorie raffinée est donné sous la forme suivante [1] :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b(x, t)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \quad (1a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (1b)$$

3. CINEMATIQUE ET EQUATION CONSTITUTIVES :

du comportement Considérons le cas d'une plaque FGM, composé à partir d'un mélange de céramique et de métal. La variation des propriétés des matériaux s'exprime ci-dessous comme:

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_c \quad (2)$$

Où P représente une propriété de matériau générique comme module et P_c et P_m désignent les propriétés correspondant aux faces supérieure et inférieure de la FG poutre, respectivement. De plus V_c dans l'équation. (2) représente la fraction volumique du constituant de la face supérieure et suit une simple loi de puissance comme:

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (3)$$

Où k ($0 \leq k \leq \infty$) est un paramètre qui détermine le profil de variation de matériau à travers l'épaisseur.

Le champ de déformation est donné par la somme algébrique de la déformation de l'état de membrane et l'état de flexion et de cisaillement, on aura donc :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa^b + f(z)\kappa^s \quad \gamma_{xz} = g(z)\gamma^0 \quad (4)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \kappa^b = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa^s = -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad \gamma^0 = \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad g(z) = 1 - f'(z), \quad f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (5)$$

$$\text{Les relations constitutives linéaires sont : } \sigma_x = Q_{11}(z)\varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = Q_{55}(z)\gamma_{xz} \quad (6)$$

En utilisant les caractéristiques des matériaux définies par l'équation (2), les coefficients de rigidité Q_{ij} , peuvent être exprimés comme suit :

$$Q_{11}(z) = E(z), \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

1-Equations d'équilibres :

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir du principe d'Hamilton comme suit :

$$\delta \int_0^T (U + V - K) dt = 0 \quad (8)$$

La variation de l'énergie de déformation de la poutre est donnée par :

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dx$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} \left(N \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - P \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right) \quad (9)$$

Où N , M , P et Q sont les résultantes de contrainte définies par :

$$(N, M, P) = \int_A (1, z, f) \sigma_x dA, \quad Q = \int_A g \tau_{xz} dA \quad (10)$$

La variation du travail des charges appliquées peut être exprimée par :

$$\delta V = - \int_0^L q \delta(w_b + w_s) \quad (11)$$

Où q et la charge transversales

La variation de l'énergie cinétique est obtenue par :

$$\delta K = \int_0^L \int_A \rho [\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3] dA dx \quad (12)$$

En substituant les expressions de δU , δV , et δK à partir des équations (9), (11), and (12) dans Eq. (8) et l'intégration par parties, et collectons les coefficients de δu_0 , δw_b , δw_s en fonction des coefficients de rigidités, Les équations de mouvement du FG poutre FG sont obtenues comme suit:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 u'' - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_b}{\partial x} - J_1 \frac{\partial \ddot{w}_s}{\partial x} \quad (13)$$

$$B \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + q = I_0 (w_b + w_s)'' + I_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_b}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} \quad (14)$$

$$B_s \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - D_s \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + q = I_0 (w_b + w_s)'' + J_1 \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - K_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_s}{\partial x^2} \quad (15)$$

Où A , B , etc., sont les termes de rigidité et sont définis par :

$$(A, B, D, B_s, D_s, H_s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2, f, z f, f^2) dz,$$

I. SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR LA POUTRE FGM:

La solution approximative suivante qui satisfait les équations différentielles et les conditions aux limites

$$\begin{Bmatrix} U_0 \\ W_b \\ W_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\alpha x) e^{-i\omega t} \\ W_{bm} \sin(\alpha x) e^{-i\omega t} \\ W_{sm} \sin(\alpha x) e^{-i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Où U_n , W_n , ϕ_n , et sont des paramètres arbitraires à déterminer, $\lambda = m\pi / a$ et n est les nombres de modes, ω est la fréquence associée au même mode propre. La charge transversale q est également développée sous forme de série de Fourier.

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m \sin(\alpha x) \quad (17)$$

En substituant l'équation. (15) dans l'équation. (14), on obtient :

Où Q_m Est l'amplitude de charge calculée dans le cas d'une charge uniformément répartie comme suit

$$Q_m = \frac{4q_0}{m\pi}, \quad (m=1,3,5....) \quad (18)$$

Les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes :

$$\left(\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} - \omega \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_m \\ w_{bm} \\ w_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Ou :

$$\begin{aligned} s_{11} &= A\lambda^2, \quad s_{12} = -B\lambda^3, \quad s_{13} = -B_s\lambda^3, \quad s_{22} = D\lambda^4, \quad s_{23} = D_s\lambda^4, \quad s_{33} = H_s\lambda^4 + A_s\lambda^2 \\ m_{11} &= I_0, \quad m_{12} = -I_1\lambda, \quad m_{13} = -J_1\lambda, \quad m_{22} = I_0 + I_2\lambda^2, \quad m_{23} = I_0 + J_2\lambda^2, \\ m_{33} &= I_0 + K_2\lambda^2 \end{aligned}$$

La flèche statique est obtenue à partir de l'équation (19) en mettant ω égale à 0. Ainsi en annulant q de l'équation (19), la fréquence naturelle peut être obtenue à partir de la même équation.

2-Résultats et Discussion :

Dans le but de prouver la validité de la théorie actuelle, les résultats ont été obtenus pour les poutres FGM et ont été comparés avec ceux déjà existant dans la littérature. Les caractéristiques de la poutre FGM sont données comme suit : $E_m = 70$ GPa, (pour le métal) et $E_c = 380$ GPa, (pour la céramique).

Les différents paramètres unidimensionnels utilisés sont :

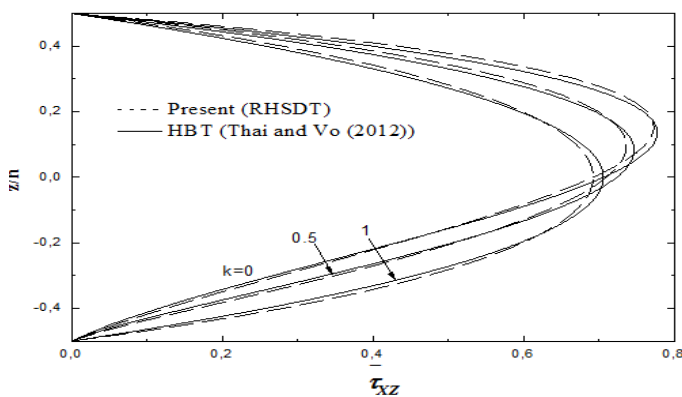
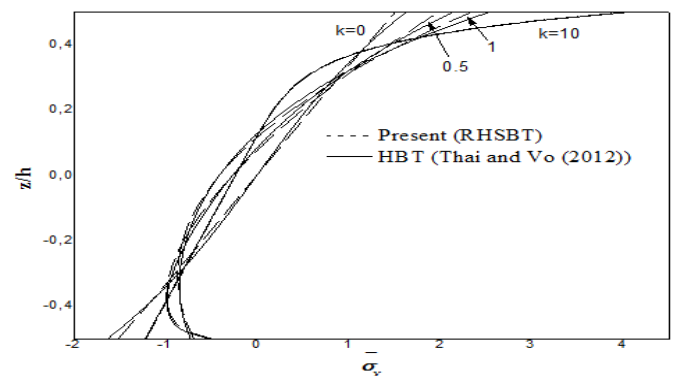
$$\begin{aligned} \bar{w} &= 100 \frac{E_m h^3}{q_0 L^4} w \left(\frac{L}{2} \right), \quad \bar{\sigma}_x = \frac{h}{q_0 L} \sigma_x \left(\frac{L}{2}, \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{q_0 L} \tau_{xz} (0,0), \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}, \end{aligned}$$

Les résultats obtenus à partir du présent modèle sont présentés dans le (Tab. 1), et cela pour divers non dimensionnelles valeurs telles que la flèche et les contraintes de la FG poutre sous charge uniforme q_0 , pour différentes valeurs l'indice de loi de puissance k et rapport de dimensionnement L/h . On constate que les résultats obtenus par la présente théorie raffinée RBT sont très proches de ceux rapportés par (Li et al. [12], Thai et Vo. [9], Ould Larbi *et al* [13]). Il est conclu qu'au fur et à mesure que la poutre devienne de plus en plus métallique, l'écart augmenté pour la flèche \bar{w} et la contrainte normale $\bar{\sigma}_x$, mais diminue pour la contrainte normale $\bar{\tau}_{xz}$, cela est dû le pourcentage du métal élevé dans la poutre FGM donne, lui confère un certain aspect de flexibilité. Les différences sont considérables importantes pour les poutres épaisses par rapport au mince. Cependant, afin d'obtenir des résultats précis pour les plaques épaisses FG, il est nécessaire de tenir compte des effets de déformations de cisaillement transverse par le biais de la présente théorie.

		L/h=5		L/h=20	
k	Model	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
	Li <i>et al.</i>	3.1657	3.802	2.8962	15.0130
0	Thai and Vo	3.1654	3.8017	2.8962	15.0129
	Present	3.1323	3.7511	2.8934	15.0000
	Li <i>et al.</i>	4.8292	4.9925	4.4645	19.7005
0.5	Thai and Vo	4.8285	4.9920	4.4644	19.7003
	Present	4.7888	4.9033	4.4609	19.6781
	Li <i>et al.</i>	6.2599	5.8837	5.8049	23.2054
1	Thai and Vo	6.2594	5.8831	5.8049	23.2052
	Present	6.2036	5.7977	5.8001	23.1834
	Li <i>et al.</i>	8.0602	6.8812	7.4415	27.0989
2	Thai and Vo	8.0675	6.8819	7.4420	27.0989
	Present	7.9581	6.7699	7.4335	27.0705
	Li <i>et al.</i>	9.7802	8.1030	8.8151	31.8112
5	Thai and Vo	9.8271	8.1095	8.8181	31.8127
	Present	9.5482	7.9457	8.7981	31.7712
	Li <i>et al.</i>	10.8979	9.7063	9.6879	38.1372
10	Thai and Vo	10.9375	9.7111	9.6905	38.1383
	Present	10.5487	9.5781	9.6673	38.0824

Table 1: Comparaison des valeurs non dimensionnelles des déflexions et des contraintes des FG poutres sous charge uniforme

Les (Figs. 1-2) montrent la variation des contraintes axiales $\bar{\sigma}_x$ et transversales $\bar{\tau}_{xz}$ respectivement à travers l'épaisseur de la poutre fonctionnellement graduée (FGM), pour le cas d'une charge uniforme. Une comparaison avec la solution analytique fournie par Thai et Vo [9] est aussi illustrée sur ces figures en utilisant différentes valeurs d'indice de puissance k . Il peut être remarqué des valeurs trouvées qu'il y a une bonne concordance entre les résultats de notre modèle et ceux de Thai et Vo [9]. On peut également observer à partir de ces (Figs. 2-3) que l'augmentation de l'exposant de loi de puissance k mène à une augmentation de la valeur de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$,

Fig 2 : Variation de la contrainte transversale de cisaillement $\bar{\tau}_{xz}$ a travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L=2h$)Fig1 : Variation de la contrainte axiale $\bar{\sigma}_x$ a travers l'épaisseur de la poutre FGM ($L=2h$)

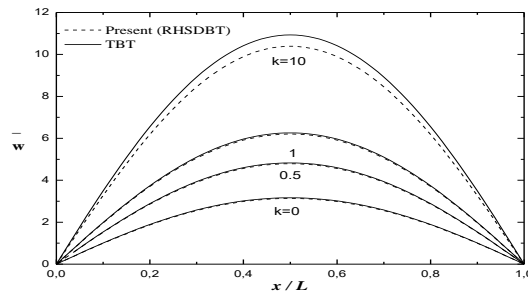


Fig 3 : Variation du déplacement transversal de cisaillement \bar{w} en fonction la longueur non dimensionnelle de la poutre

La variation de la flèche \bar{w} en fonction la longueur non dimensionnelle pour différentes valeurs de l'indice matériel de la loi de puissance k est explorée dans la (Fig. 3). On peut aussi constater à partir de cette que le modèle raffiné actuel offre des résultats très proches à celles de Reddy (TBT).

En outre, les résultats montrent que l'augmentation de l'indice de puissance k conduit à une augmentation du déplacement transversal \bar{w} .

D. analyse de flambement d'une poutre FGM :

Pour le flambement on obtient les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} - \mathfrak{N} & S_{23} - \mathfrak{N} \\ S_{13} & S_{23} - \mathfrak{N} & S_{33} - \mathfrak{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ w_{bm} \\ w_{sm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix}$$

Tableau 2 : poutre FGM se compose de métal et céramique, le module de young sont le même avec (Tab1), le coefficient de poisson est $\nu = 0.23$.

Les caractéristiques de la poutre FGM sont données comme suit : $E_m = 70$ GPa, (pour le métal) et $E_c = 380$ GPa, (pour la céramique).

La charge critique est exprimée comme :

$$N_1 = N_{cr} L^2 / (E_m I)$$

Table2 : variation de la charge critique en fonction de l'indice de puissance et le rapport (L/h)

Rapport (L/h)	Method	p						
L/h		0	0,5	1	2	5	10	100
5		48,847	32,002	24,692	19,156	15,925	14,141	11,065
10		52,31	34,008	26,171	20,39	17,105	15,526	11,015
20		53,255	34,547	26,569	20,724	17,49	15,917	11,065

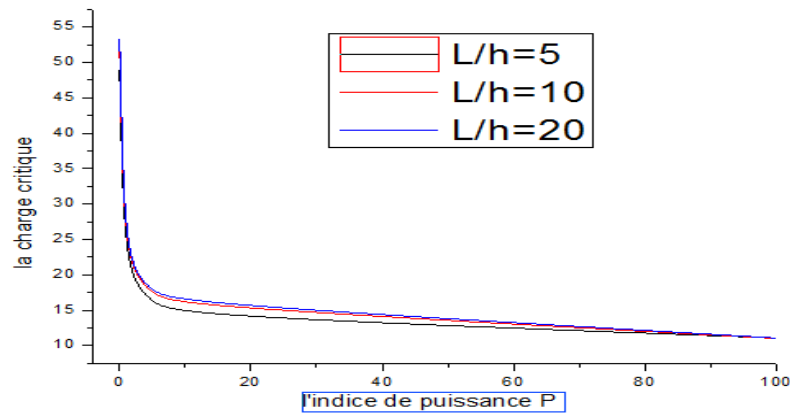


Table2 : variation de la charge critique en fonction de l'indice de puissance et le rapport (L/h)

5. CONCLUSION

Dans le cadre de ce travail, l'analyse de la flexion statique et flambement des poutres FGM a été présentée par le biais d'un nouveau modèle raffiné d'ordre élevé de déformation de cisaillement, qui évite l'utilisation d'un facteur de correction de cisaillement. Les équations du mouvement ont été obtenues à partir du principe d'Hamilton, et résolu analytiquement. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux de la littérature. En outre, des études paramétriques ont été effectuées afin d'examiner l'influence de différents paramètres tels que l'indice de puissance k , le rapport géométrique L/h sur la déflexion, les contraintes, et les fréquences naturelles de la poutre fait des matériaux à gradient de propriété.

5. Bibliographie :

- 1] J. Yang, Y. Chan. Free vibration and Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks, journal of composite structures. 2017, pp48-60
- 2] Ait atmane. A Tounsi. Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations. 2015
- 3] Alshorbagy AE., Eltaher M., Mahmoud F. *Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method*. Appl Math Modell. 2011. 35(1).412–25.
- 4] Chakraborty A., Gopalakrishnan S., Reddy JN. *A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials*. Int J Mech Sci. 2003. 45(3). 519–39.
- 5] Li XF. *A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams*. J Sound Vib. 2008. 318(4–5).1210–29.
- 6] Sina SA., Navazi HM., Haddadpour H. *An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams*. Mater Des. 2009. 30(3).741–7.
- 7] Shimpi R P., and Patel H G. *A Two Variable Refined Plate Theory for Orthotropic Plate Analysis*. Int. J. Solids Struct. 2006. vol. 43, pp. 6783–6799.
- 8] Simsek M. *Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories*. Nucl Eng Des. 2010. 240(4). 697–705.

