

Stabilité de la convection thermique dans un système à deux couches fluides chauffé par le bas en présence de vibration périodique

M. ECHCHADLI^{*},
S. ANISS^{*}

^{*}Université Hassan II Casablanca,
Faculté des Sciences Aïn Chock,
Laboratoire de Mécanique, B. P. 5366 Maârif

Résumé :

Nous présentons une étude sur les effets des vibrations sur l'instabilité thermique et d'interface dans un système constitué de deux couches fluides superposées miscibles de densités et de viscosités différentes et soumis à un gradient de température vertical. Initialement, le fluide le plus dense est situé au-dessous du moins dense, cette configuration peut éventuellement être renversée par les effets thermiques. En présence des vibrations, l'analyse de stabilité linéaire montre que le démarrage de la convection peut être retardé ou accéléré et les solutions sont harmoniques ou sous-harmoniques, selon les valeurs de la fréquence et de l'amplitude des vibrations. Nous examinons, dans cette étude, l'influence de la fréquence, du nombre de flottabilité et du rapport des viscosités sur le seuil de convection. Cette étude se veut un élargissement des études sur les problèmes de convection dans les manteaux terrestres.

Abstract :

We present a study on the effect of vibrations on thermal and interfacial instability in a system consisting of two miscible superimposed fluid layers of different densities and viscosities and subjected to a vertical temperature gradient. Initially, the denser fluid is located below the less dense, this configuration may possibly be reversed by the thermal effects. In the presence of vibrations, the linear stability analysis shows that the onset of convection can be delayed or accelerated and the solutions are harmonic or sub harmonic, according to the values of the frequency and the amplitude of the vibrations. In this study, we examine the influence of the frequency, the buoyancy number and the ratio of the viscosities on the convection threshold. This study is intended to broaden studies of convection problems in terrestrial coats.

Mots clés : Instabilité interfaciale ; Fluides miscibles ; Vibration périodique ; Convection thermique

1 Introduction

L'étude des instabilités interfaciales dans un système de deux couches fluides miscibles soumis à un gradient de température, a déjà fait l'objet de plusieurs travaux [1-6]. Dans ce cadre Johnson & Richter [1] se sont intéressés au cas d'un système composé de deux couches fluides miscibles et chauffé par le bas. En effectuant une analyse de stabilité linéaire dans le cas où les propriétés physiques telles que la viscosité, la diffusivité thermique, le coefficient de dilatation thermique des deux fluides, excepté la densité, sont égaux, ils ont montré que la convection est séparée dans chacune des deux couches fluides et que la convection est oscillante avec instabilité de l'interface. Ce même problème a été aussi traité par Olson et al. [2] qui ont effectué une étude expérimentale sur l'écoulement de deux fluides superposés dans une cuve et ont observé que l'interface est déstabilisée au voisinage d'une valeur critique du nombre de flottabilité. Par la suite, Olson et al. [3] ont effectué une analyse de stabilité linéaire en introduisant les termes dus aux effets de viscosité dans les équations de Navier-Stokes. Ils ont ainsi montré que les prévisions faites à partir de l'analyse linéaire de stabilité sont conformes aux mesures expérimentales. Davaille & Jaupart [4] ont été motivés par un intérêt en géophysique, des expériences de laboratoire ont été réalisées pour déterminer l'influence du contraste de viscosité, sur la stabilité des deux couches fluides miscibles dans le cas où il n'y a aucune tension superficielle à l'interface. Dans la situation où l'on a de très grandes valeurs du nombre de Rayleigh thermique et du nombre de Prandtl, ils ont montré que pour un nombre de flottabilité supérieur à l'unité, la convection thermique se développe dans les deux couches superposées, par contre l'interface se déforme dans de grands dômes qui se déplacent quasi-périodiquement. Plus tard, le Bars et Davaille [6] se sont concentrés sur le régime où l'interface se déforme largement et les mouvements se propagent sur toute la profondeur du système. Ils ont utilisé l'analyse de stabilité linéaire et des expériences en laboratoire, dans le cas où le rapport de viscosité est supérieur à 5, pour étudier davantage la stabilité et l'existence des deux régimes de convection, l'un stationnaire et l'autre oscillant, en fonction du rapport des viscosités, de la profondeur et du rapport des densités. Ils ont montré que le régime oscillant existe lorsque le nombre de flottabilité est inférieur à une valeur critique.

Aucun travail cité ci-dessus n'a tenu compte des vibrations qui peuvent exister dans les manteau terrestres. D'autre part les vibrations sont connues pour être parmi les moyens les plus efficaces d'affecter le comportement des systèmes fluides dans le sens d'accélérer ou de réduire le seuil de convection. Ces vibrations sont associées soit à la gravité, soit à des températures variables dans le temps imposées sur les plans horizontaux d'une couche fluide. A ce sujet, Gresho et Sani [7] ont étudié l'influence de la modulation gravitationnelle sinusoïdale sur le seuil d'instabilité des deux configurations d'équilibre stable et instable pour un fluide confiné entre deux parois rigides et horizontales. Ils ont montré que pour des amplitudes faibles ou modérées, les oscillations ont un effet stabilisant avec des solutions harmoniques au seuil de l'instabilité. Pour des amplitudes grandes, le déclenchement du mouvement de convection se fait avec des solutions sous harmoniques. Aniss et al. [8] ont proposé des études sur l'instabilité convective de Rayleigh-Bénard au sein d'une couche confinée dans une cellule de Hele-Shaw dans le cas d'une modulation gravitationnelle. Ils ont montré que les vibrations ne peuvent générer d'instabilité convective que lorsque le nombre de Prandtl est de l'ordre de l'unité ou supérieur à l'unité. Dans le présent travail, nous reprenons ces travaux en considérant un système constitué de deux couches fluides miscibles en présence de vibration périodique. Nous effectuons une analyse de stabilité linéaire et nous examinons l'influence de la modulation, du nombre de flottabilité, et l'effet du rapport des viscosités sur le seuil de convection.

2 FORMULATION

On considère un système à deux couches fluides, miscibles, visqueuses et incompressibles, d'épaisseurs d_i , de densités ρ_i et de viscosités cinématiques ν_i avec $i = 1, 2$. Les indices 1 et 2 se rapportent respectivement aux fluides inférieur et supérieur. On considère qu'il n'y a ni tension superficielle ni diffusion chimique à l'interface entre les deux fluides. Les plans inférieur et supérieur sont maintenus

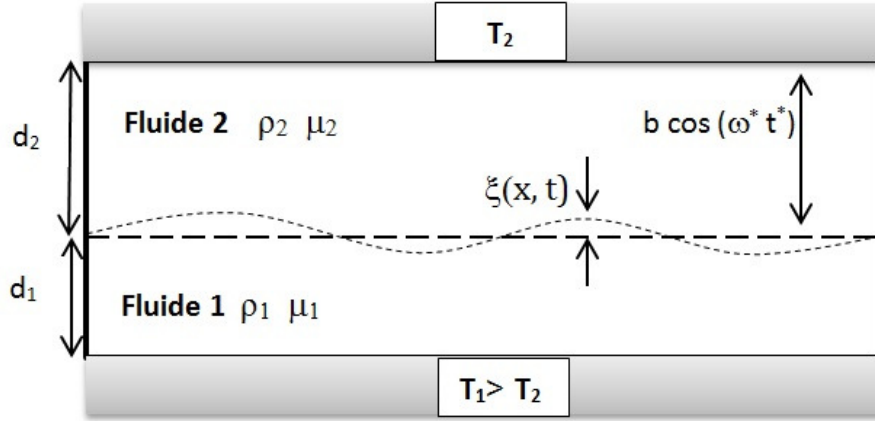


FIGURE 1 — Système de deux couches fluides, confinées entre deux plaques planes horizontales soumis à un gradient de température et à des vibrations périodiques

à des températures uniformes T_1 et T_2 respectivement. Nous considérons que les deux couches fluides sont soumises à un mouvement périodique vertical selon la loi de déplacement $b\omega^{*2} \cos(\omega^* t^*)$, où b et ω^* désignent respectivement l'amplitude de déplacement et la fréquence dimensionnelle du mouvement oscillatoire. L'accélération totale inclue à la fois l'accélération statique de gravité, et la partie vibrationnelle : $g \rightarrow g + b\omega^{*2} \cos(\omega^* t^*)$ (voir figure1).

À l'équilibre, les couches fluides sont séparées par une interface qui est initialement plane, le champ de vitesse est nul et le régime thermique est conductif. Les équations de l'équilibre sont :

$$\mathbf{V}_i = 0 \quad (1)$$

$$T_e^* = \frac{T_2 - T_1}{d} z^* + \frac{d_1}{d} (T_2 - T_1) + T_1 \quad (2)$$

$$\nabla P_{ie}^* + \rho_{ie} (g + b\omega^{*2} \cos(\omega^* t^*)) = 0 \quad (3)$$

Nous définissons le rapport des profondeurs par : $a = \frac{d_1}{d_2}$, dans une approximation du premier ordre, l'équation d'état utilisée à l'intérieur de chaque couche i est :

$$\rho_i = \rho_{io} - \beta \rho_o (T(T_1 - T_2) - T_o) \quad (4)$$

où $\rho_o = \frac{(\rho_{10} + \rho_{20})}{2}$.

Le système linéaire correspondant à la perturbation de l'état d'équilibre est donné par l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho_o} \nabla P_i - \beta (g + b \cos(\omega^* t^*)) \mathbf{k} + \nu_i \Delta \mathbf{V}_i \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t^*} + w_i \frac{T_2 - T_1}{d} = \kappa \Delta T_i \quad (7)$$

Les fluides sont considérés incompressibles, sauf pour les termes de flottabilité (approximation de Boussinesq).

Nous adoptons l'analyse adimensionnelle utilisée par Le Bars et Davaille [6]. Les variables adimensionnelles sont définies par :

$$(x, y, z) = \left(\frac{x^*}{d}, \frac{y^*}{d}, \frac{z^*}{d}\right); (u_i, v_i, w_i) = \left(\frac{u_i^*}{\vartheta}, \frac{v_i^*}{\vartheta}, \frac{w_i^*}{\vartheta}\right); t' = \frac{t^*}{d/\vartheta}; T_i = \frac{T_i'}{T_1 - T_2}; p_i = \frac{p_i'}{\rho_{20}\nu_2\vartheta d}$$

où les variables non étoilées sont sans dimension et $\vartheta = \frac{\beta g(T_1 - T_2)d^2}{\nu_2}$ est la vitesse de Stokes qui a été choisie comme échelle caractéristique de la vitesse, le système (5)-(7) s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0 \quad (8)$$

$$\frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} = -\nabla P_i + (1 + \alpha \cos(\Omega t)) T_i \mathbf{k} + \frac{v_1}{v_2} \Delta \mathbf{V}_i \quad (9)$$

$$Ra \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} - \mathbf{w}_i \right) = \Delta T_i \quad (10)$$

où $Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\kappa \nu_2}$, est le nombre de Rayleigh $Pr = \frac{\nu_2}{\kappa}$ est le nombre de Prandtl, $\alpha = \frac{b\omega^*}{g} = Fr \Omega^2$ où Fr est le nombre de Froude défini par $Fr = \frac{\kappa^2 b}{g d^4}$ et $\Omega = \frac{\omega^* d^2}{\kappa}$ est la fréquence adimensionnelle. Pour éliminer le terme correspondant à la pression nous effectuons la projection sur la verticale du rotationnel du rotationnel de l'équation (9). En général, le nombre de Prandtl est considéré infini dans les manteaux terrestres, ce qui permet de négliger l'accélération du fluide. Ainsi au cours de notre étude, on ne s'intéressera qu'à des systèmes où le nombre de Prandtl est très élevé. Les termes inertiels dans l'équation (9) peuvent alors être négligés, on obtient :

$$-\frac{\nu_i}{\nu_2} \Delta \Delta w_i = (1 + \alpha \cos(\frac{\Omega}{Ra} t^*)) \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$Ra \left(\frac{\partial T_i}{\partial t^*} - \mathbf{w}_i \right) = \Delta T_i \quad (12)$$

2.1 Conditions aux limites

2.1.1 Conditions aux limites sur les parois

Ces conditions s'écrivent :

Condition d'imperméabilité :

$$w_1(z = -a) = w_2(z = 1 - a) = 0 \quad (13)$$

Condition d'adhérence :

$$\frac{\partial w_1}{\partial z}(z = -a) = \frac{\partial w_2}{\partial z}(z = 1 - a) = 0 \quad (14)$$

Condition sur la température :

$$T_1(-a) = 0; \quad T_2(1 - a) = 0 \quad (15)$$

2.1.2 Conditions aux limites à l'interface

La position de l'interface à l'équilibre entre les deux fluides est en $z = 0$. Les distorsions de l'interface de cette position sont décrites par la fonction $h(x, t)$. En supposant que ces distorsions sont infinitésimales, un développement de Taylor aux voisinage de $z = 0$ est utilisée pour obtenir les conditions linéarisés à l'interace :

- Condition cinématique

$$w_1 = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (16)$$

- Continuité des composantes normales de la vitesse

$$w_1 = w_2 \quad (17)$$

- Continuité des contraintes tangentiels

$$\gamma \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = \gamma \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (18)$$

- Continuité des contraintes normales

$$\frac{\Delta \partial}{\partial z}(\gamma w_1 - w_2) + \frac{2\partial^3}{\partial z \partial x^2}(\gamma w_1 - w_2) = -B(1 + \alpha \cos(\frac{\Omega}{Ra} t^*)) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (19)$$

où $\gamma = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ désigne le rapport des viscosités des deux couches fluides.

- Continuité des températures

$$T_1 = T_2 \quad (20)$$

- Continuité des flux de chaleur

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = \frac{\partial T_2}{\partial z} \quad (21)$$

2.2 Analyse en mode normaux

La solution du problème (11)-(21) est cherchée en termes de modes normaux :

$$w_i(x, z, t) = \tilde{w}_i(z, t)e^{iqx} \quad (22)$$

$$T_i(x, z, t) = \tilde{T}_i(z, t)e^{iqx} \quad (23)$$

Par conséquent, $\tilde{w}_i(z, t)$ et $\tilde{T}_i(z, t)$ sont les solutions des équations suivantes :

$$0 = \frac{\nu_i}{\nu_2} (D^2 - q^2)^2 \tilde{w}_i(z, t) - (1 + \alpha \cos(t)) q^2 \tilde{T}_i(z, t) \quad (24)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_i(z, t) = Ra \tilde{w}_i(z, t) + (D^2 - q^2) \tilde{T}_i(z, t) \quad (25)$$

Selon la théorie de Floquet, le système d'équation (21)-(22) possède des solutions périodiques de période 2π correspondant à des solutions harmoniques ainsi que des solutions sous-harmoniques de période 4π . Ce système est résolu numériquement par des méthodes spectrales de collocation de Tchebychev [9].

3 RESULTATS ET DISCUSSION

La validation du calcul numérique a été faite quand il n'y a pas de saut de densité à l'interface, $B = 0$ et dans le cas où $\Omega = 0$ avec des propriétés physiques des deux fluides égales. Nous retrouvons alors le résultat de la convection de Rayleigh-Bénard $Ra = 1707,76$ et $q = 3.12$.

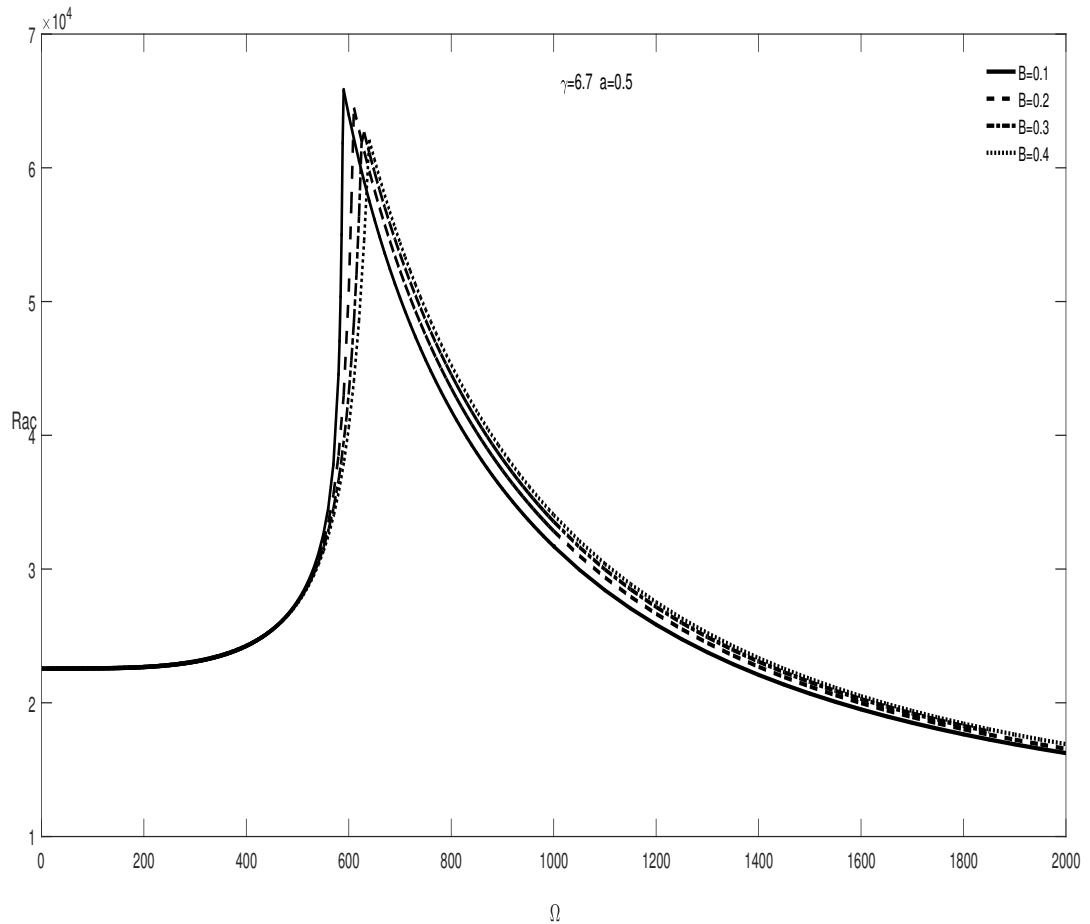


FIGURE 2 — Variation du nombre de Rayleigh critique Rac , en fonction de la fréquence adimensionnelle, pour $Fr = 10^{-5}$ et $\gamma = 6.7$

Sur la figure 2, nous présentons les variations du nombre de Rayleigh critique Rac , en fonction de la fréquence adimensionnelle Ω , pour différentes valeurs du nombre de flotabilité. Lorsque Ω s'approche de zéro Rac tend vers les valeurs du régime stratifié du cas non modulé [6]. Par ailleurs, lorsque Ω croît

à partir de zéro on est dans une région où le seuil de convection correspond à des solutions harmoniques. Dans cette région, le nombre de Rayleigh critique augmente avec Ω pour atteindre une certaine valeur maximale qui dépend du nombre de flotabilité, cette valeur représente l'intersection des deux type de solutions, harmoniques et sous harmoniques et dépend aussi de γ et de Fr . au delà de la valeur maximale, le seuil de convection correspond à des solution sous harmoniques. Lorsque Ω tend vers l'infini, le nombre de Rayleigh critique tend vers une valeur asymptotique $Ra_c = 1,502.10^4$ qui reste indépendante du nombre de flotabilité.

La zone où les solutions sont harmoniques se réduisent de façon très faibles quand B diminue, et pour une fréquence adimensionnelle fixée le nombre de Rayleigh critique Ra_c augmente légèrement avec l'augmentation de B .

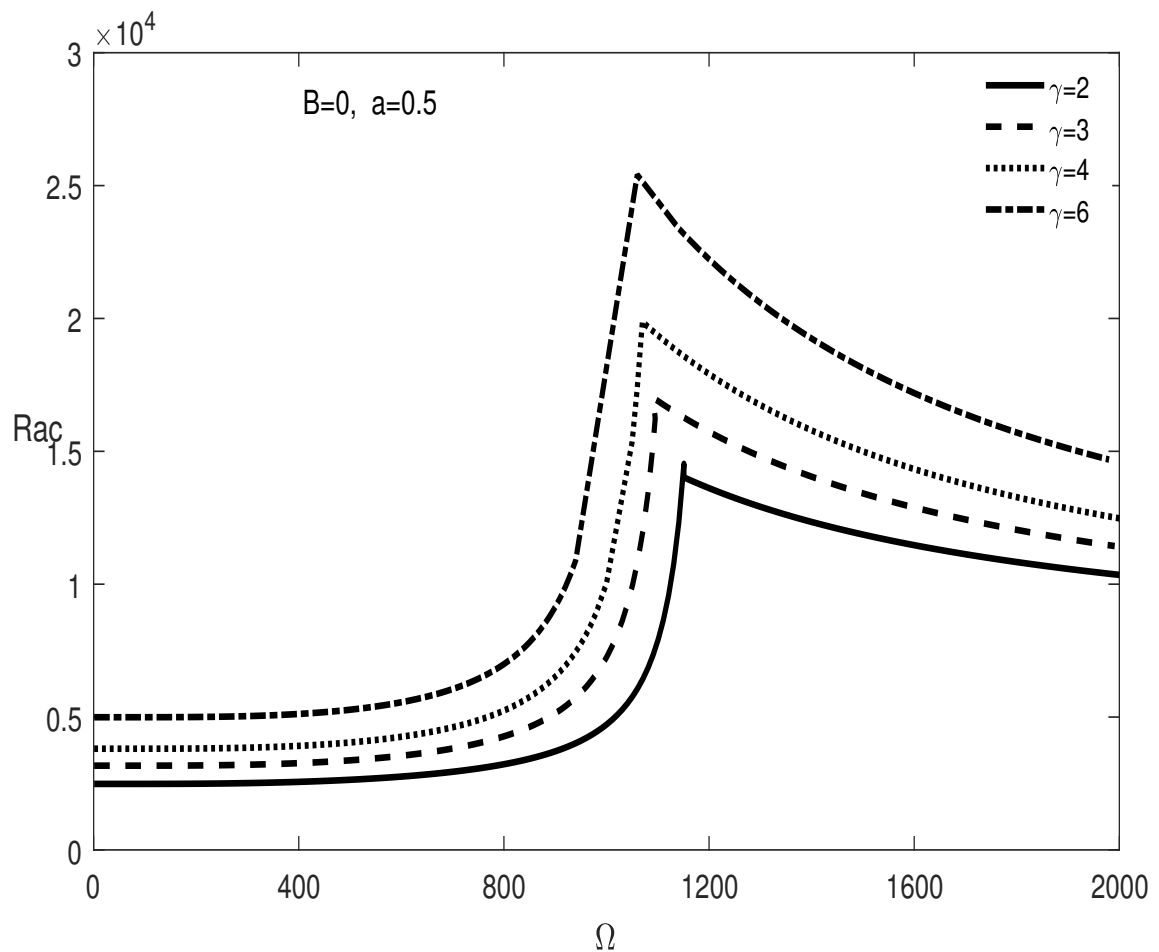


FIGURE 3 — Variation du nombr de Rayleigh critique, Ra_c , en fonction de la fréquence adimensionnelle, Pour différentes valeurs du rapport de viscosité, pour le nombre de Froude $Fr = 10^{-5}$ et le nombre de flotabilité $B = 0$

Sur la figure 3, nous présentons, la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction de la fréquence adimensionnelle pour différentes valeurs du rapport de viscosité. Lorsque la fréquence adimensionnelle tend vers zéro, le nombre de Rayleigh critique tend vers les valeurs du seuil stationnaire du cas non modulé, par ailleurs lorsque la fréquence adimensionnelle croît à partir de zéro, on est dans une région où le seuil de convection correspond à des solutions harmoniques. Dans cette région le nombre de Rayleigh critique augment avec la fréquence adimensionnelle pour atteindre une certaine valeur de $\Omega(\gamma)$ correspondant à nombre de Rayleigh est maximal, cette valeur dépend du rapport de viscosité et

augmente avec le rapport de viscosité, γ . Au delà de cette valeur maximale qui correspond à l'intersection des deux types de solutions, harmonique et sous harmonique, le nombre de Rayleigh diminue en fonction de la fréquence adimensionnelle, on est toujours en présence d'un effet stabilisant. L'effet du rapport de viscosité est stabilisant. Nous constatons que l'effet de la fréquence adimensionnelle sur le seuil convectif dépend du rapport de viscosité. Enfin, les résultats démontrent que la diminution du rapport de viscosité entre les couches augmente systématiquement significativement le seuil de stabilité. Cet effet est stabilisant .

4 CONCLUSION

Nous nous sommes intéressé à l'étude de l'influence de la modulation gravitationnelle sur le seuil d'instabilité convectif au sein de deux couche fluides miscibles confinée entre deux plans, soumises à un gradient de température vertical constant. Cette étude nous a permis d'examiner l'influence d'une modulation sur le seuil de convection. Dans ce cadre, nous avons essentiellement comparé les résultats relatifs à une seule couche non modulée et nous avons montré que la modulation produit un effet stabilisant ou déstabilisant. Nous avons montré aussi que le rapport de viscosité a beaucoup d'influence sur les solutions harmoniques et sous harmoniques. Enfin, les résultats démontrent que la diminution du rapport de viscosité entre les couches augmente significativement le seuil de stabilité et l'effet de l'augmentation de ce rapport est stabilisant.

Références

- [1] Richter, F. M. and Johnson, C. E. Stability of a chemically layered mantle. *J. Geophys.* 1974, Res. **79** 1635-1639.
- [2] Olson, P. and Kincaid, C. Experiments on the interaction of thermal convection and compositional layering at the base of the mantle. *J. Geophys.* 1991, Res. **96**, 4347-4354
- [3] Olson, P. Silver, P. G. and Carlson, R. W. The large scale structure of convection in the Earth's mantle. 1990, **344**, 209-215.
- [4] Davaille, A. and Jaupart, C. Transient high-Rayleigh-number thermal convection with large viscosity variations. *J. Fluid Mech.* 1993, **250**, 141-166.
- [5] Davaille, A., Simultaneous generation of hotspots and superswells by convection in a heterogeneous planetary mantle, *Nature*. 1999, **402**, 756-760.
- [6] Le Bars, M. and Davaille, A. "Stability of thermal convection in two superimposed miscible viscous fluids", *J. Fluid Mech.* 2002, vol. **471**, pp. 339-363
- [7] Gresho, P. M., and Sani, R. L., "The Effects of Gravity Modulation on the Stability of a Heated Fluid Layer," *J. Fluid Mech.*, 1970, **40**, 783-806.
- [8] Aniss, S., Souhar, M., and Belhaq, M., Asymptotic study of convective parametric instability in Hele-Shaw cell. *Phys. Fluids*, 2000, **12**(2), pp. 262-268.
- [9] Weideman, J. A. C., Reddy, S. C., A MATLAB Differentiation Matrix Suite.