

Mise en œuvre de méthodes de dimensionnement au flambement : Cas de la sphère sous sollicitations combinées

Mamadou TALL^{1,2}
Saïd HARIRI²
Philippe LE GROGNEC³
Yves SIMONET⁴

¹ CETIM - 52 Avenue Felix Louat, BP 80067, Senlis Cedex, FRANCE, fakhoudiatall@gmail.fr

² IMT Lille Douai, Département TPCIM, 941 rue Charles Bourseul, BP 10038, Douai Cedex, FRANCE, said.hariri@imt-lille-douai.fr

³ ENSTA Bretagne, FRE CNRS 3744, IRDL, F-29200 Brest, FRANCE, philippe.le_grogne@ensta-bretagne.fr

⁴ CETIM - 52 Avenue Felix Louat, BP 80067, Senlis Cedex, FRANCE, yves.simonet@cetim.fr

Mots clefs : Flambement, Post-flambement, Pression externe, Cisaillement circonférentiel, Sensibilité aux imperfections, Sollicitations combinées, Courbes de voilement, Courbes d'interaction.

Résumé

Les structures minces sont caractérisées par le fait qu'une de leur dimension (l'épaisseur, par exemple) soit très petite devant les dimensions globales de la structure ainsi que devant les rayons de courbures de la surface moyenne. Cette spécificité en font des structures extrêmement légères, donc viables économiquement et beaucoup plébiscitées dans l'industrie. Parmi les nombreuses applications que l'on peut trouver dans le domaine de l'ingénierie, on peut citer de façon non exhaustive les structures offshore, les véhicules, les composants de l'industrie aéronautique, les Équipements Sous Pression (ESP) ... Cette légèreté et leur élancement font que lorsque l'on est ici en présence de contraintes de natures compressives et/ou de cisaillement, ces structures peuvent entrer dans un état instable à partir d'un certain niveau de chargement. Cet instabilité mécanique désignée sous l'appellation flambement a fait l'objet de plusieurs recherches depuis plus d'une centaine d'années. Si nous prenons le cas particulier des ESP, les conséquences inhérentes à la défaillance de tels équipements sont nombreuses et variées (risques humains, matériels, écologiques ...). Aussi pour prévenir ces risques et assurer un dimensionnement se situant, toujours, du côté de la sécurité, on fait appel à des codes et des normes qui sont sujets à de constantes améliorations. C'est dans ce contexte général que ces travaux sont initiés dans la mesure où ici, il s'agira à l'aide de calculs numériques sophistiquées, de proposer des méthodes analytiques simples et accessibles permettant de réaliser de manière optimale le dimensionnement au flambement de configurations nouvelles (ou pas très bien connues) fréquemment rencontrées dans les ESP. Aussi, en utilisant le formalisme de l'EN 1993-1-6 [1] et le texte ECCS [2] ainsi que les différentes analyses préconisées, le (post-)flambement de la sphère sous sollicitations combinées (pression externe + cisaillement circonférentiel) est présenté. Cette étude permet de quantifier l'influence de certains phénomènes qui peuvent influencer sur le comportement au flambement (non-linéarités matérielles et géométriques, imperfections, ...) pour chaque sollicitation fondamentale. In fine, l'étude paramétrique de la sphère sous sollicitations simultanées de pression externe et de cisaillement circonférentiel permettra de définir des courbes d'interaction ainsi que de donner, qualitativement, le comportement sous sollicitations combinées.

1 Formalisme des Recommandations Européennes (Texte ECCS)

Nous adoptons le formalisme de courbes de voilement du texte ECCS. Ces courbes permettent de mettre en exergue la relation entre la résistance relative de flambement χ (Équation 1) et l'élancement réduit λ (Équation 3). L'avantage de l'utilisation de ces courbes est qu'elles sont parfaitement déterminées par la connaissance de quatre grands paramètres clefs (Tableau 1) qui permettent de mettre en exergue, individuellement, une caractéristique essentielle durant le flambement.

$$\begin{cases} \chi = 1 & \text{quand } \lambda \leq \lambda_0 \\ \chi = 1 - \beta \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_p - \lambda_0} \right)^\eta & \text{quand } \lambda_0 < \lambda < \lambda_p \\ \chi = \frac{\alpha}{\lambda^2} & \text{quand } \lambda_p < \lambda \end{cases} \quad (1)$$

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \beta}} \quad (2)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{R_{MNA}}{R_{LBA}}} \quad (3)$$

α	Non-linéarités géométriques et imperfections géométriques
β	Définition du domaine plastique
η	Interaction élastique-plastique
λ_0	Délimitation plateau plastique

TABLE 1 – Paramètres clefs des courbes de voilement [2, 1]

Les courbes de voilement font intervenir un ensemble de facteurs de résistance qui sont parfaitement déterminés via les différentes analyses préconisées par le texte ECCS et l'EN 1993-1-6 (Tableau 2). Ces analyses vont de la plus simple (LBA) à la plus sophistiquée (GMNIA) permettant de prendre en compte aussi bien les défauts que les effets inélastiques du matériau.

Analyse	Résistance	Description
LBA	R_{LBA}	Analyse Linéaire de Bifurcation (Calcul linéaire élastique de valeurs propres, Structure parfaite)
GNA	R_{GNA}	Analyse Géométriquement Non-linéaire (Grandes transformations, matériau élastique, Structure parfaite, Recherche de points de bifurcation ou de points limites ("snap-through"))
MNA	R_{MNA}	Analyse Matériellement Non-linéaire (Estimation de la résistance plastique, loi matériau parfaitement plastique, hypothèse des petites transformations)
GMNA	R_{GMNA}	Analyse Géométriquement et Matériellement Non-linéaire (Grandes transformations, Structure parfaite, loi matériau parfaitement plastique, Recherche de points de bifurcation ou de points limites ("snap-through"))
GNIA	R_{GNIA}	Analyse Géométriquement Non-linéaire de la structure imparfaite (matériau élastique, Introduction d'une imperfection de "substitution")
GMNIA	R_{GMNIA}	Analyse Géométriquement et Matériellement Non-linéaire de la structure imparfaite (matériau parfaitement plastique, Introduction d'une imperfection de "substitution")

TABLE 2 – Analyses préconisées par le texte ECCS et l'EN 1993-1-6 [2, 1]

2 Étude numérique

Dans le cadre de ces travaux, la structure sphérique sujette à deux types de sollicitations fondamentales a été étudiées. Ce travail a permis de mettre en exergue certaines caractéristiques intéressantes durant le processus de flambement, notamment les influences des pré-déformations avant flambement ainsi que des non-linéarités matérielles, et enfin des imperfections d'origine géométriques ...

2.1 Modélisation numérique

En pression externe, une sphère complète est modélisée afin de traiter le problème dans sa globalité et ainsi ne pas écarter certains modes de flambement. Pour la sphère complète en pression externe, deux types de maillage sont

utilisées : un maillage axisymétrique mettant en exergue un "point singulier" au niveau de l'apex et un maillage structuré en quadrangle plus uniforme (voir Figure 1). Toutes les analyses non-linéaires de flambement sont effectuées en utilisant la méthode modifiée de longueur d'arc de Riks [3] implémentée dans le logiciel commercial ABAQUS [4]. Dans les analyses numériques sur la structure imparfaite, une imperfection semblable au premier mode de flambement associée à une amplitude δ_0 est retenue .

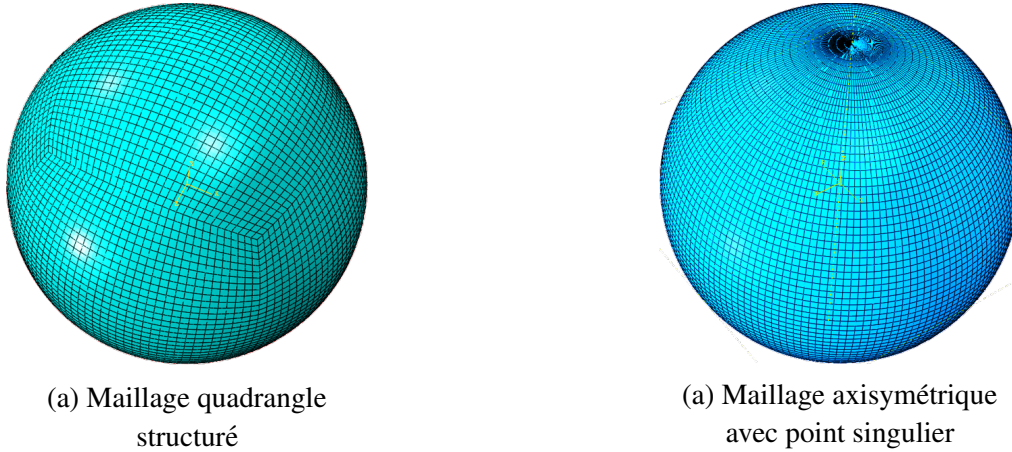


FIGURE 1 – Maillage de la sphère complète sous pression externe

Pour optimiser les temps de calculs, dans le cas du cisaillement circonférentiel et de la sollicitation combinée, une demi-sphère pour laquelle les conditions de symétrie adéquates sont retenues est modélisée. Dans ce cas précis, un maillage quadrangle structuré est utilisé. Le cisaillement est modélisé à l'aide d'une distribution circonférentielle de pression qui s'inspire des travaux de Yinyi [5]. La modélisation de cette pression circonférentielle est possible grâce aux routines utilisateurs présentes dans ABAQUS. Dans tous les calculs numériques, on utilise des éléments quadratiques à huit noeuds et à cinq degré de liberté par noeud (éléments S8R5 dans ABAQUS).

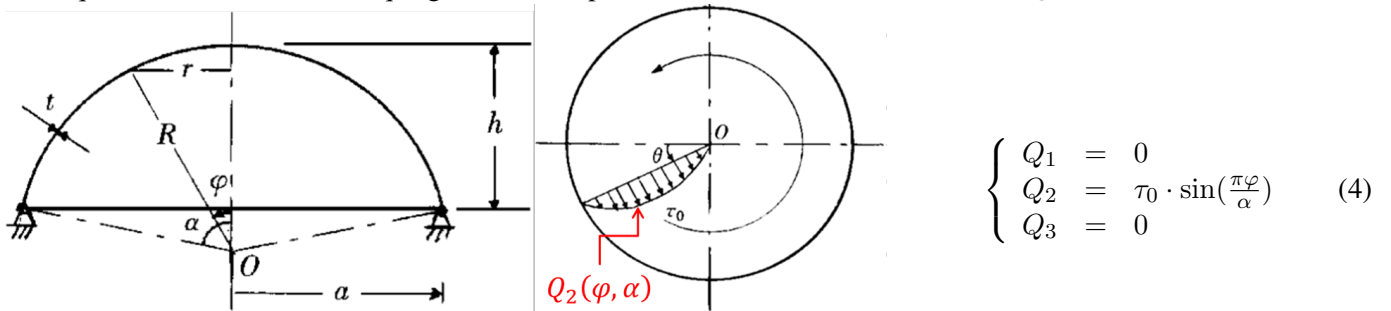


FIGURE 2 – Distribution circonférentielle de pression d'après Yinyi [5]

2.2 Sphère sous pression externe

Zoelly [6] établit le premier la pression critique de flambement sous les hypothèses d'un comportement purement axisymétrique d'une sphère complète sous pression externe. Toutefois, à l'instar du cylindre sous compression axiale, une disparité systématique est observée entre les résultats théoriques et expérimentaux [7].

L'Analyse Linéaire de Bifurcation (LBA) a permis de constater que la forme des modes de flambement est intrinsèquement liée au maillage adopté. Pour le maillage axisymétrique avec "point singulier", les lobes de certains modes exhibent une direction privilégiée (voir (c) et (d) sur la Figure 3) , tandis que pour le maillage quadrangle structuré, les fossettes se forment sur toute la zone circonférentielle de la sphère, et ce, de manière uniforme (voir (a) sur la Figure 3). Pour les deux maillages, les pressions critiques obtenues sont relativement proches permettant de conjecturer, d'après la théorie de Koiter [8], la présence de modes multiples et donc de la sensibilité de la sphère sous pression externe aux imperfections géométriques. Les calculs paramétriques non-linéaires sur la structure imparfaite permettent de confirmer cette sensibilité, dans la mesure où l'on constate une chute importante de la capacité portante de la coque dès lors que la charge limite est atteinte mais aussi, une réduction importante de la pression critique de la structure imparfaite.

Ces analyses numériques préalables permettent d'extraire les différents paramètres clefs des courbes de voilement en utilisant les courbes modifiées de Rotter [9]. Des interpolations non-linéaires en utilisant la méthode des moindres carrés permettent d'obtenir des expressions explicites de ces paramètres qui ne dépendent que de δ_0/t . La Figure 4

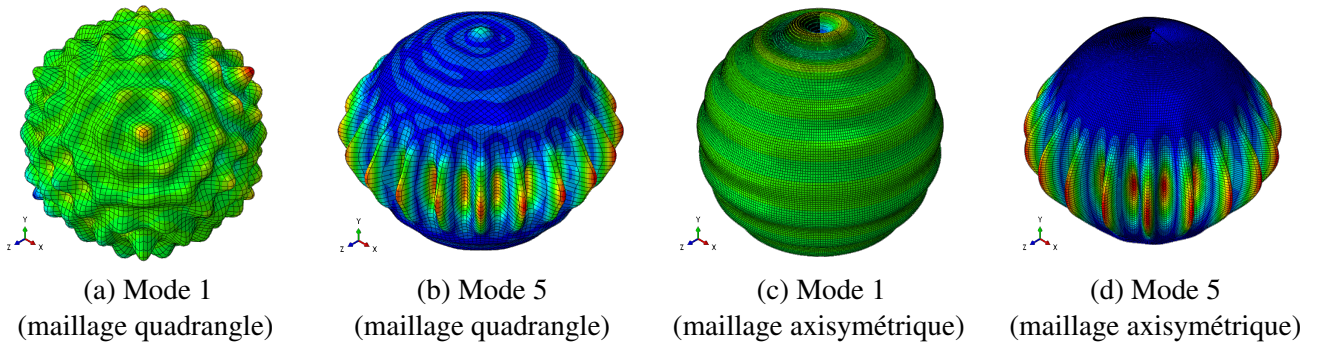


FIGURE 3 – Sphère complète sous pression externe : Exemple de modes LBA obtenus avec les deux types de maillage

donne le facteur d'imperfection α pour différentes valeurs de R/t issu de ces analyses paramétriques pour la sphère complète, celui qui est actuellement codifiée dans le texte ECCS et le facteur α récemment obtenu par Błażejowski et Marcinowski [10] sur une calotte sphérique encastrée en ses bords. De même, de nouvelles expressions des facteurs β et η ne dépendant que de δ_0/t ont été établies sachant que ceux qui sont actuellement codifiés sont pris, de manière conservative, constants.

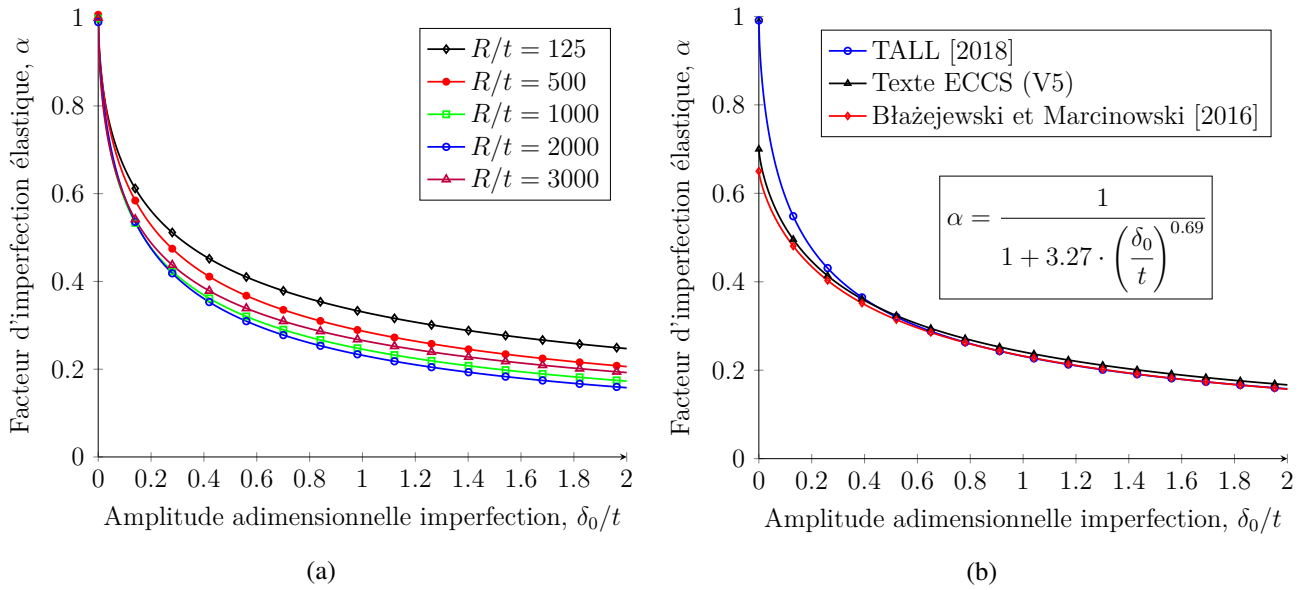


FIGURE 4 – Sphère complète sous pression externe : (a) Facteur d'imperfection élastique α pour $R/t = 125, 500, 1000, 2000, 3000$; (b) Comparaison du facteur α avec les valeurs actuellement implémentées dans le texte ECCS [2] et le facteur α obtenu très récemment par Błażejowski and Marcinowski [10]

2.3 Sphère sous cisaillement circonférentiel

L'analyse LBA de la sphère sous cisaillement circonférentiel montre l'existence de modes de flambement de forme ellipsoïdale (Figure 5) comme l'ont d'ailleurs constaté Mow et Sadowski [11] dans leurs travaux précurseurs sur une sphère ayant un piquage aux différents pôles soumise à un moment de torsion.

La Figure 6 donne le facteur α pour différents ratio R/t ainsi que la borne inférieure ("lower bound") qui en est déduite. Contrairement à la sphère complète sous pression externe, les paramètres α entre deux ratios donnés sont quasi-coïncidents. Les autres paramètres clefs (β , η) sont extraits et ne dépendent là aussi que de δ_0/t . Néanmoins, il serait opportun de disposer de résultats expérimentaux afin de juger qualitativement de la valeur de ces nouvelles courbes de voilement qui sont, à la connaissance des auteurs, tout à fait nouvelles.

2.4 Flambement sous sollicitations combinées

Les résultats précédents ont permis de mettre en exergue le comportement de la sphère sous sollicitations de pression externe d'une part et de cisaillement circonférentiel d'autre part. Néanmoins, en pratique les structures ne sont pas soumises à l'une ou l'autre sollicitation fondamentale mais bien à leur combinaison. Ainsi, de manière analogue à

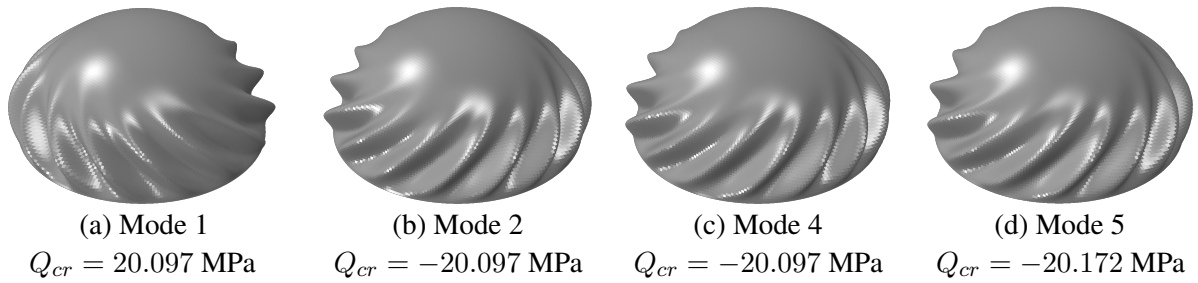


FIGURE 5 – Sphère sous cisaillement circonférentiel : quelques modes issus de l'analyse LBA. Le nombre d'onde critique de ces modes est égal à $n_{cr} = 14$.

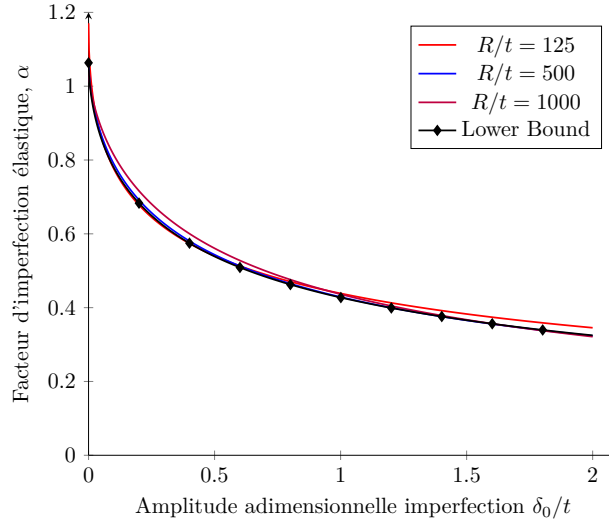


FIGURE 6 – Sphère sous cisaillement circonférentiel : Facteur d'imperfection élastique α pour différents ratios de géométrie R/t ainsi que la borne inférieure déduite des calculs paramétriques numériques.

Winterstetter et Schmidt [12], la combinaison de sollicitations est étudiée en établissant des courbes d'interaction permettant de mettre en exergue l'influence de chaque chargement.

- (i) La Figure 7 représente une synthèse des courbes d'interaction LBA obtenues pour différents ratios R/t ainsi que, pour chaque R/t , les courbes représentant la meilleure interpolation possible (au sens des moindres carrés non-linéaires). Les courbes d'interaction sont très similaires à celles obtenues par Mow et Sadowski [11] dans leurs travaux précurseurs. Autrement dit, pour des coques relativement épaisses (R/t suffisamment petit), la courbe comporte, pour un cisaillement faible, une partie parabolique. Ensuite, elle devient parfaitement linéaire. Néanmoins, pour des coques relativement minces (R/t suffisamment grand), les courbes d'interaction deviennent complètement linéaires.
- (ii) Pour la sphère parfaite, les courbes d'interaction obtenues respectivement pour les analyses LBA et GNA se superposent parfaitement. Ce fait permet de conjecturer naturellement que les non-linéarités géométriques avant flambement n'ont pas d'influence particulière sur le flambement en sollicitations combinées. La forme néanmoins des courbes obtenues dépend du ratio R/t . Ainsi, pour des coques suffisamment mince (R/t grand), les courbes d'interaction sont parfaitement linéaires et pour des coques suffisamment épaisses (R/t petit), on distingue une partie parabolique pour un cisaillement très faible ($R/t = 500$, voir Figure 8).
- (iii) Pour la sphère imparfaite (voir Figure 9), les courbes d'interaction dépendent aussi bien de l'amplitude de l'imperfection que du ratio R/t . On remarque ainsi que lorsque le flambement a lieu dans le domaine élastique, les courbes d'interaction sont parfaitement linéaires et se superposent aux courbes LBA/GNA, alors que pour un flambement ayant lieu dans le domaine plastique, celles-ci sont asymptotiquement semblables à la courbe matérielle seuil de Von-Mises. De plus, l'on note que pour toutes les courbes obtenues, il subsiste un plateau montrant qu'il existe une contrainte de cisaillement seuil en dessous de laquelle, le cisaillement circonférentiel n'a aucune influence sur la combinaison de sollicitation.

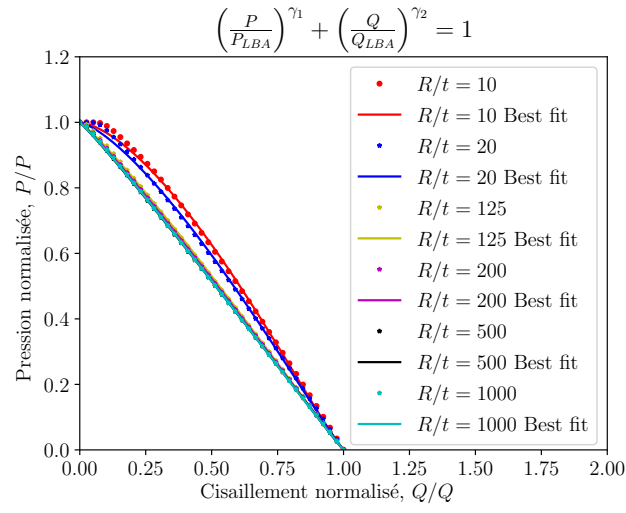


FIGURE 7 – Sphère sous sollicitations combinées : courbes d'interaction LBA pour différents ratios de géométrie R/t

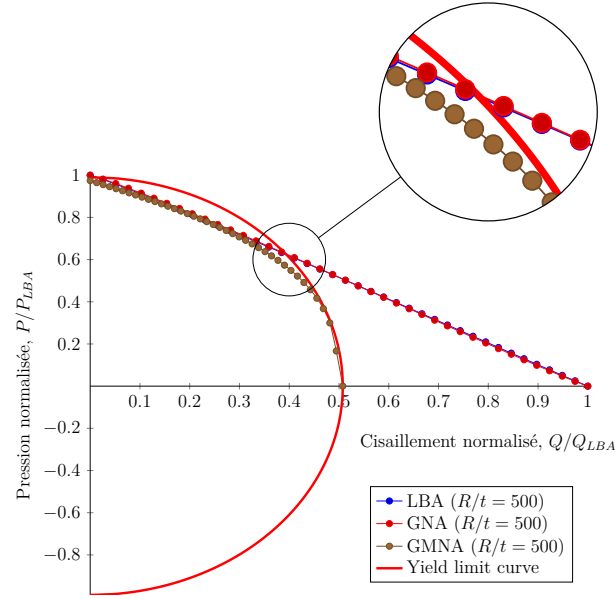


FIGURE 8 – Sphère sous sollicitations combinées : Courbes d'interaction théoriques de la sphère parfaite (LBA, GNA, GMNA). Matériau : $E = 210$ GPa, $\sigma_y = 250$ MPa, $\nu = 0.3$. Géométrie : $R/t = 500$

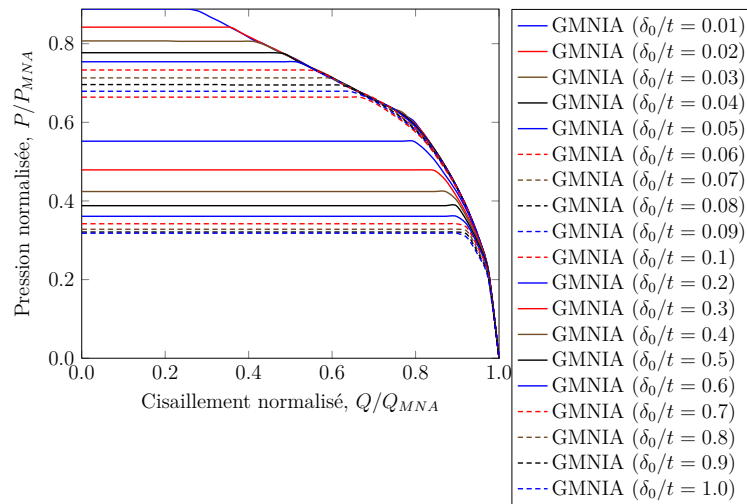


FIGURE 9 – Sphère sous sollicitations combinées : courbes d'interaction GMNIA ($R/t = 500$, $\sigma_y = 250$ MPa, $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$), imperfection affine au premier mode linéaire de la sphère sous pression externe seule.

3 Conclusions

Cette étude a permis d'extraire les différents paramètres clefs associés aux courbes de voilement de la sphère sous pression externe d'une part et sous cisaillement circonférentiel d'autre part. L'étude de la sphère sous sollicitations combinées a permis l'extraction de nouvelles courbes d'interaction pour différents ratio de géométrie. Cette étude offre ainsi de belles perspectives pour l'établissement d'une règle d'interaction, à l'image de celle qui existe actuellement pour les cylindres, simple, accessible et permettant via un dépouillement analytique, de dimensionner de manière optimale une sphère sous une telle configuration.

Références

- [1] NF EN 1993-1-6 : Eurocode 3 : Calcul des structures en acier, Partie 1-6 : Résistance et Stabilité des structures en coque. Rapport technique, Comité Européen de Normalisation, Brussels, Belgium, 2007. Indice de classement : P 22-316.
- [2] J. M. ROTTER et H. SCHMIDT : Stability of steel shells : European design recommendations (5th edition). Rapport technique, European Convention for Constructional SteelWorks, Brussels, Belgium, 2008.
- [3] E. RIKS : Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47(3):219–259, 1984.
- [4] SIMULIA : *Abaqus/Standard 6.14 User's Manual*. Dassault Systems, Providence, RI, 2014.
- [5] Z. YINYI : Torsional buckling of spherical shells under circumferential shear loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 20(4):426–432, 1999.
- [6] R. ZOELLY : *Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Zürich, 1915.
- [7] S. F. EGGWERTZ et L. SAMUELSON : Buckling strength of spherical shells. *Journal of Constructional Steel Research*, 17(3):195–216, 1990.
- [8] W. T. KOITER : *Over de Stabieleit van het elastisch Evenwicht (On the stability of elastic equilibrium)*. Thèse de doctorat, Delft University of Technology, 1945. [English translations : NASA TT-F10 (1967) and AFFDL TR-7025 (1970)].
- [9] C. DOERICH et J. M. ROTTER : Generalised capacity curves for stability and plasticity : Application and limitations. *Thin-Walled Structures*, 49(9):1132–1140, 2011.
- [10] P. BŁAŻEJEWSKI et J. MARCINOWSKI : Buckling capacity curves for pressurized spherical shells. *In Recent Progress in Steel and Composite Structures : Proceedings of the XIII International Conference on Metal Structures (ICMS2016, Zielona Góra, Poland, 15-17 June 2016)*, page 401. CRC Press, 2016.
- [11] C. C. MOW et M. A. SADOWSKI : Determination of the critical torque inducing buckling in a twisted spherical shell subject to internal or external pressure. *In 1962 Army Science Conference, United States Military Academy, West-Point, New York, 20-22 June 1962*. Armed Services Technical Information Agency, Arlington Hall Station, Arlington 12, Virginia, 1962.
- [12] T. A. WINTERSTETTER et H. SCHMIDT : Stability of circular cylindrical steel shells under combined loading. *Thin-Walled Structures*, 40(10):893–910, 2002.