

Etude des Plagues Sandwiches en FGM sur Fondations Elastiques

Abdelkader SAFA¹, Lazreg HADJI², Faïçal BOURAADA¹, El Abbés Adda BEDIA¹.

1 Laboratoire des Matériaux & Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbès, Algérie

2 Département de Génie Civil, Faculté des Sciences Appliquées, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, Tiaret, Algérie.

Résumé

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques du premier ordre basée sur la position exacte de la surface neutre est développée pour la flexion et la des plaques fonctionnellement graduées (FGM). La plaque est supposée simplement appuyée et reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. En divisant le déplacement transversal en deux composantes l'une de flexion et l'autre de cisaillement, le nombre d'inconnus et des équations de la présente théorie est réduit ce qui rend la théorie simple à utiliser. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuel et le concept de la surface neutre. L'utilisation du concept de la surface neutre élimine le couplage flexion-membrane, et par conséquent, les équations et conditions aux limites de cette théorie ont la même forme des plaques isotropes. Des résultats numériques de la présente méthode sont comparés avec ceux de la littérature basés sur la théorie du premier ordre et d'ordre élevé. A partir de cette comparaison, il ressort que cette théorie est simple et précise pour étudier la réponse en flexion des plaques en FGM.

1. Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) sont un nouveau type de matériaux hétérogènes ([1], [2], [3]) où le gradient des propriétés macroscopiques change dans l'espace. Ainsi, les FGMs peuvent être confectionnés pour répondre à des performances matérielles aux différentes parties de la structure. Actuellement, les FGMs sont utilisés dans de diverses applications structurelles telles que la mécanique, le domaine spatial, nucléaire et l'ingénierie civile. Récemment, plusieurs travaux scientifiques s'intéressant au comportement statique et dynamique des matériaux FGM ont vus le jour. Une revue intéressante de la littérature sur ces travaux peut être trouvée dans l'article de Birman and Byrd [4].

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (NFSDT) pour l'analyse de la flexion des plaques FGM est développée incluant l'interaction plaques-fondations. En utilisant la même méthodologie développée par Thai and Choi ([5], [6]), cette théorie est basée sur la supposition que le déplacement transversal consiste en deux composantes l'une de flexion et l'autre de cisaillement, pour lesquelles celle de flexion ne contribue pas dans les forces de cisaillement et la composante de cisaillement ne contribue pas avec le moment de flexion. Contrairement à la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre conventionnelle FSDT ([7], [8]), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre a deux inconnus est proposée. Comme les propriétés matérielles des plaques FGM varie suivant l'épaisseur de la plaque, la surface neutre de telles plaques ne coïncide pas avec la surface moyenne géométrique plane ([9], [10]). En plus. A cet effet, les équations gouvernant les plaques FG peuvent être simplifiées. On se basant sur la présente théorie et la position exacte de la surface neutre et le principe des travaux virtuel, les équations d'équilibres des plaques FG reposant sur

des fondations élastiques sont obtenues. Des solutions analytiques de la flexion des plaques FGM simplement appuyé sont obtenues. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer la validité et la précision de la théorie NFSDT.

1. Formulations théoriques

A. Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement (NFSDT) des plaques FGM

Due à la symétrie des propriétés matérielles des plaques par rapport à la surface moyenne, les équations membrane-flexion sont couplées. Mais, si l'origine du système de coordonnées est proprement définie dans la direction de l'épaisseur des plaques FG pour être la surface neutre, les propriétés de la plaque FG deviennent symétriques par rapport à cette surface.

Pour spécifier la position de la surface neutre des plaques FG deux différents plans sont retenus pour mesurer de la coordonnée «z» nommée z_{ms} et z_{ns} qui sont mesurées à partir de la surface moyenne et la surface neutre de la plaque respectivement (voir figure 1).

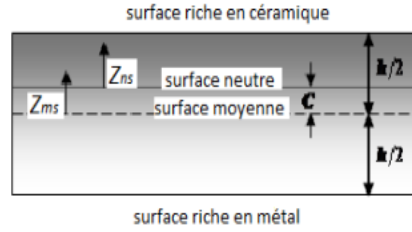


Fig. 1. Position des surfaces moyenne et neutre de la plaque fonctionnellement graduée (FGM).

B. Cinématique

Le champ de déplacement utilisé dans cette étude est comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z_{ns}) &= u_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 v(x, y, z_{ns}) &= v_0(x, y) - z_{ns} \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (1) \\
 w(x, y, z_{ns}) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned}$$

Où, u , v , w sont les déplacements dans les directions x , y , z . u_0 , v_0 , w_b et w_s sont les déplacements de la surface neutre.

2. EQUATIONS CONSTITUTIVES

Les plaques FGM sont un mélange de céramique et de métal et leurs propriétés sont supposées varier suivant l'épaisseur selon une simple loi de puissance. La fraction volumique de la céramique V_c est exprimée en terme des coordonnées z_{ms} et z_{ns} comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z_{ms}}{h} + \frac{1}{2} \right)^k = \left(\frac{z_{ns} + C}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (2)$$

Où p est l'indice matériel qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro. C est la distance entre les deux surfaces moyenne et neutre. Les propriétés matérielles de la plaque fonctionnellement graduée peuvent être obtenues par le biais de la loi de mélange de Voigt [11].

Ainsi, en utilisant l'équation (1), les propriétés matérielles non homogènes de la plaque FG notées P , en fonction de la coordonnée d'épaisseur deviennent :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_c \quad (3)$$

Avec P_b et P_c sont les propriétés correspondant au métal et à la céramique.

où P représente la propriété effective du matériau telles que le module de Young E , la masse volumique ρ , les indices m et c représentent les constituants du métal et de la céramique respectivement. La valeur de l'indice matériel p égale à zéro représente une plaque entièrement en céramique, et quand p tend vers l'infinie cela indique une plaque entièrement métallique.

La position de la surface neutre de la plaque FG est déterminée de telle manière que le moment par rapport au module de Young soit égal à zéro comme suit (Ould Larbi et al., 2013)

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})(z_{ms} - C)dz_{ms} = 0 \quad (4)$$

Par conséquent, la position de la surface neutre peut être obtenue par :

$$C = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms})z_{ms} dz_{ms}}{\int_{-h/2}^{h/2} E(z_{ms}) dz_{ms}} \quad (5)$$

Les relations linéaires constitutives de la plaque FG peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_s Q_{44} & 0 \\ 0 & k_s Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (3), les coefficients de rigidités, Q_{ij} , peuvent être exprimés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad (7a)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z_{ns})}{1 - \nu^2}, \quad (7b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z_{ns})}{2(1 + \nu)}, \quad (7c)$$

4. Equations d'Equilibres

Le principe des travaux virtuels est utilisé ici pour dériver les équations d'équilibres. Le principe peut être déclaré sous forme analytique :

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (8)$$

Où δU est la variation de l'énergie de déformation ; δV est la variation de l'énergie potentielle.

La variation de l'énergie de déformation est calculée par :

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}-C}^{\frac{h}{2}-C} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dz_{ns} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} [-M_x^b \delta k_x^b - M_y^b \delta k_y^b - M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + M_x^s \delta k_x^s \\
&\quad + Q_{yz} \delta \gamma_{yz}^s + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^s] d\Omega
\end{aligned} \tag{9}$$

La variation de l'énergie potentielle des charges appliquées peut être exprimée par

$$\delta V = - \int (q + f_e) \delta w dA \tag{10}$$

Où q est la charge transverse appliquée et f_e est la force de réaction de la fondation du modèle de Pasternak:

$$f_e = K_w w - J_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{11}$$

Où K_w est le coefficient de Winkler et J_1 , J_2 sont les modules de cisaillement de la fondation (cisaillement de la couche de fondation rigide).

En substituant les expressions de δU , δV des équations (9), et (10) dans l'équation (8), intégrant par parties et en collectant les coefficients δu_0 , δv_0 , δw_b et δw_s les équations suivantes d'équilibres de la plaque sont obtenues

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\
\delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} - f_e + q = 0 \\
\delta w_s : \quad & \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} - f_e + q = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

les équations du mouvement peuvent être exprimées en terme de déplacements (u_0, v_0, w_b, w_s)

$$\begin{aligned}
A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 &= 0 \\
A_{22} d_{22} v_0 + A_{66} d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 &= 0 \\
-D_{11} d_{1111} w_b - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_b - D_{22} d_{2222} w_b - f_e + q &= 0 \\
A_{55}^s d_{11} w_s + A_{44}^s d_{22} w_s - f_e + q &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Quand l'effet de cisaillement transverse de déformation est négligé ($w_s = 0$), l'équation (13) donne les équations du mouvement de la plaque FGM basée sur la théorie classique des plaques et le concept physique de la surface neutre.

5. Solution exact pour les Plaques FGM

Les plaques rectangulaires sont généralement classées par rapport au support utilisé (conditions d'appuis). Nous nous intéressons dans ce qui suit à la solution exacte de l'équation (13).

On se basant sur l'approche de Navier, les expressions des déplacements suivants sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites des plaques simplement appuyées

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Où U_{mn} , V_{mn} , W_{bmn} and W_{smn} sont des paramètres arbitraires à déterminer, et $\lambda = m\pi/a$ et $\mu = n\pi/b$.

Dans le cas d'une charge distribuée de manière sinusoïdale, nous avons

$$q = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \quad (15)$$

Où q_0 représente l'intensité de la charge au centre de la plaque.

En substituant l'équation (14) et (15) dans l'équation (13), les solutions sont obtenues par

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (16)$$

Où $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\}^t$ et $[K]$ est la matrice symétrique donnée par

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Les composantes généralisées du vecteur de la force $\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^t$ sont donnés par

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \\ P_2 &= 0 \\ P_3 &= -q_0 \\ P_4 &= -q_0 \end{aligned} \quad (18)$$

6. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Dans cette section, divers exemples numériques sont décrits et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie du premier ordre de déformation de cisaillement (NFSDT) pour prédire les flèches des plaques FGM soumises à une charge répartie sinusoïdale sans dimension. Les différents paramètres adimensionnels utilisés sont:

$$\bar{w} = \frac{10E_c h^3}{q_0 a^4} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \quad K_0 = \frac{a^4 K_w}{D}, \quad J_0 = \frac{a^2 J_1}{D} = \frac{b^2 J_2}{D}, \quad D = \frac{h^3 E_c}{12(1-\nu^2)}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h},$$

Pour illustrer l'exactitude de la présente théorie pour une large gamme d'indice de loi de puissance p , rapport d'épaisseur a/h , le rapport a/b , les variations de la flèche adimensionnelle \bar{w} par rapport à l'indice de la loi de puissance p , rapport d'épaisseur a/h , rapport a/b sont illustrés dans les figures 2,3 et 4, respectivement, pour une plaque FGM

soumise à une charge sinusoïdale. Les résultats obtenus sont comparés à ceux donnés par la CPT et la FSDT classique.

On peut voir que les résultats de la présente théorie et la FSDT conventionnelle sont identiques, tandis que la CPT sous-estime la flèche de la plaque.

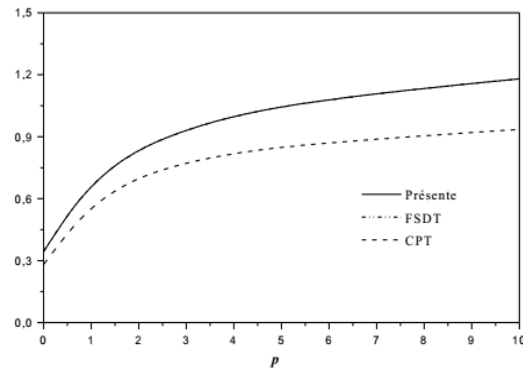


Fig. 2. La comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle W d'une plaque Aluminium / Alumina sous charge sinusoïdale en fonction de l'indice de la loi de puissance p ($a/h = 5$).

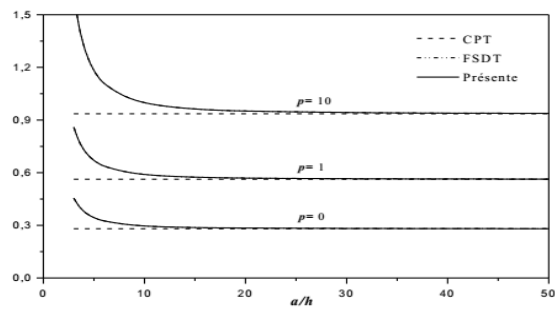


Fig. 3. Comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle W d'une plaque Aluminium/Alumina sous charge sinusoïdale en fonction du rapport a/b .

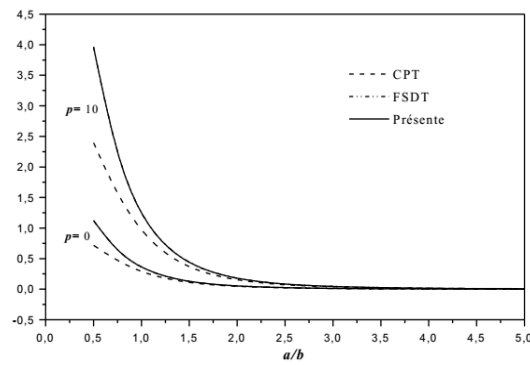


Fig. 4. Comparaison de la variation de la flèche adimensionnelle W d'une plaque Aluminium/Alumina sous charge sinusoïdale en fonction du rapport a/b ($a/h=5$).

Étant donné que les effets de déformation transversale de cisaillement ne sont pas considérés dans la CPT, les valeurs de la flèche adimensionnelle \bar{w} données par la CPT sont indépendantes du rapport d'épaisseur a/h (voir Fig. 3).

La figure 4 montre les effets du rapport a/b en fonction de la flèche adimensionnelle \bar{w} de la plaque FGM. Les flèches trouvées par les différentes théories diminuent à mesure que le rapport a/b augmente. Il convient de noter que la théorie proposée (NFSDT) comporte quatre inconnues contre cinq dans le cas de la FSDT classique.

L'effet des paramètres de fondation élastiques K_0 et le rapport d'épaisseur a/h sur la flèche \bar{w} de la plaque carrée FGM ($p=2$) est présenté dans les figures 5. Comme prévu, les flèches diminuent progressivement à mesure que le paramètre de Winkler K_0 augmente.

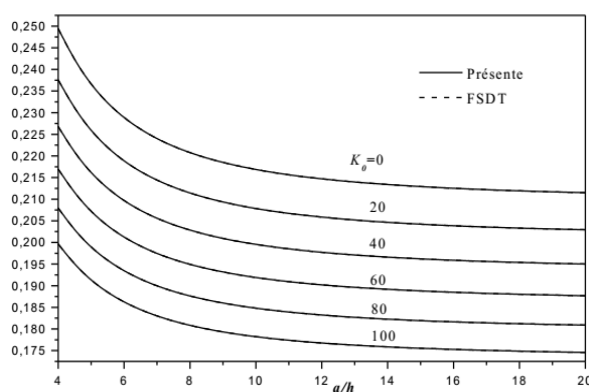


Fig. 5. Effet du paramètre du module de Winkler sur la flèche dimensionnelle \bar{w} des plaques carrées de titane / zircon (p=2) pour différent rapport de a/h avec $J_0=10$ et $q_0=100$.

7. Conclusion

Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (NFSDT) a été proposée pour analyser le comportement statique et dynamique des plaques fonctionnellement graduée reposant sur des fondations élastiques type Winkler-Pasternak. La position de la surface neutre de ces plaques a été déterminée. L'efficacité de la théorie est mise en évidence en l'appliquant pour l'analyse statique.

Les résultats obtenus en utilisant cette nouvelle théorie, se trouvent être en excellent accord avec des études précédentes. Contrairement à la théorie classique de déformation du cisaillement du premier ordre, cette ne contient que quatre inconnues plutôt que cinq pour l'habituel. en plus, elle élimine l'effet du couplage membrane- flexion et facilite considérablement l'analyse technique.

En conclusion, on peut dire que la théorie NFSDT proposée est non seulement précise, mais fournit également une approche élégante et facilement réalisable pour simuler le comportement statique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques.

References

- [1] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. and Shiota I., Proceedings of the 1st International Symposium Functionally Graded Material, Japan, 1990.
- [2] Koizumi M., FGM activities in Japan. Compos B Eng, 1997, 28(1):1–4.
- [3] Koizumi, M. (1993), "Concept of FGM", Ceramic Tran., 34, 3-10.
- [4] Birman V, Byrd LW, Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. Appl Mech Rev, 2007, 60(5):195–216.

- [5] Thai, H.T. and Choi, D.H., "A simple first-order shear deformation theory for the bending and free vibration analysis of functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 2013, 101, 332-340.
- [6] Thai, H.T. and Choi, D.H., "A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates", *Compos. Struct.*, 2013, 106, 754-763.
- [7] Reissner, E., "On a variational theorem in elasticity", *J. Math. Phys. (Cambridge, Mass.)*, 1950, 29, 90-95.
- [8] Mindlin, R.D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, vol. 18, pages 31-38.
- [9] Yahoobi, H. and Feraidoon, A., "Influence of neutral surface position on deflection of functionally graded beam under uniformly distributed load", *World Appl. Sci. J.*, 2010, 10(3), 337-341.
- [10] Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mech. Base. Des. Struct. Mach.*, 2013, 41, 421-433.
- [11] Suresh, S., and Mortensen, A., "Fundamentals of Functionally Graded Materials", (IOM Communications Ltd., London.), 1998.