

"Modélisation micromécanique de la conductivité thermique de matériaux composites avec des interfaces imparfaites "

" BONFOH Napo "1,

"SABAR Hafid "2

"DREISTADT Cynthia "3

¹ " Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Paris Tech, LEM3, F-5700 Metz, France, napo.bonfoh@univ-lorraine.fr "

² " Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Paris Tech, LEM3, F-5700 Metz, France, hafid.sabar@univ-lorraine.fr "

³ " Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers Paris Tech, LEM3, F-5700 Metz, France, cynthia.dreistadt@univ-lorraine.fr "

Résumé :

"L'étude propose une modélisation micromécanique de la conductivité thermique effective de matériaux composites contenant des inclusions ellipsoïdales et présentant des interfaces imparfaites. La présence d'une interface imparfaite se traduit par une discontinuité soit du champ de température soit de la densité de flux thermique à travers cette interface. La solution du problème de conduction thermique hétérogène a été construite en recourant à la technique de la fonction de Green et en généralisant le concept du tenseur d'Eshelby pour un point intérieur ou extérieur à l'inclusion. Le modèle de résistance thermique interfaciale de Kapitza a été considéré pour décrire une interface faiblement conductrice induisant un saut de température aux interfaces. Une morphologie ellipsoïdale des inclusions et une anisotropie de la conductivité thermique par phase constitutive ont été considérées.

Des expressions analytiques de la localisation de l'intensité moyenne dans l'inclusion ont été déterminées. Ces expressions permettent ensuite de prédire la conductivité effective du matériau composite en présence d'interfaces faiblement conductrices, à travers de schémas classiques d'homogénéisation.

Ces prédictions ont été comparées aux résultats de cas particuliers traités dans la bibliographie afin d'éprouver la précision des résultats de l'approche proposée.

La formulation proposée est généralisable à l'étude d'une interface hautement conductrice (se traduisant par une discontinuité de la densité de flux) mais aussi à la modélisation d'autres phénomènes de transport tels que la conduction électrique ou magnétique."

1. Introduction

Les matériaux composites contenant des particules sont largement utilisés dans plusieurs applications industrielles où des performances spécifiques sont recherchées. Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour la prédiction des propriétés effectives de ces matériaux hétérogènes en tenant compte des propriétés des phases constitutives et de la fraction volumique, la taille et la forme des renforts, de la nature de l'interface entre les constituants. Cette interface joue un rôle important dans les phénomènes de transport tels que la conduction thermique ou électrique et influence le comportement effectif. La plupart des études suppose une interface parfaite. Compte tenu de l'adhésion imparfaite et d'éventuelles réactions chimiques entre les constituants, cette hypothèse apparaît inappropriée pour une modélisation rigoureuse. Dans le cadre de la conduction thermique, une interface imparfaite peut induire une discontinuité soit du champ de température soit de la densité de flux à l'interface.

Des études ont été consacrées à la modélisation des matériaux composites présentant des interfaces faiblement conductrices, induisant un saut de température.

La première classe de ces modèles est basée sur la solution de l'équation fondamentale de Laplace gouvernant la conduction thermique [1-4] pour des inclusions sphériques ou cylindriques, puis par Benveniste et Miloh [5-6] pour des inclusions sphéroïdales.

Kushch et Chernobai [7] ont proposé une solution pour des inclusions ellipsoïdales basée sur des potentiels complexes.

La troisième classe de modèles concerne les approches micromécaniques basées sur le problème de l'inclusion d'Eshelby étendu à la conduction thermique. Cette approche introduit le formalisme de la fonction de Green et une équation intégrale du problème de conduction hétérogène [8-10].

La dernière famille de modèles met en œuvre les méthodes variationnelles pour principalement établir les bornes inférieure et supérieure de la conductivité effective dans un matériau composite avec des interfaces imparfaites [11-14].

Malgré ces différentes études, le problème général de la conductivité thermique dans des matériaux contenant des inclusions ellipsoïdales avec une conductivité thermique anisotrope par phase et en présence d'une interface imparfaite reste ouvert. Nous présentons une nouvelle formulation micromécanique basée sur l'introduction de la fonction de Green et le concept de tenseur d'Eshelby pour un point intérieur ou extérieur à l'inclusion. L'approche permet d'exprimer de manière analytique la localisation de l'intensité moyenne dans chaque phase du matériau composite puis d'estimer au moyen de schémas d'homogénéisation la conductivité effective. Des comparaisons des prédictions du modèle développé avec des résultats d'approches antérieures sont présentées et discutées.

2. Modèle micromécanique

Soit V , le volume élémentaire représentatif (VER) d'un matériau composite constitué d'une inclusion ellipsoïdale (I) dans un milieu homogène de référence ou matrice (0). $\mathbf{q}(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ et $T(\mathbf{r})$ désignent respectivement la densité de flux, l'intensité et la température en un point de vecteur position $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ du VER. Le comportement thermique du composite est supposé linéaire et décrit par le tenseur de conductivité thermique $\mathbf{k}(\mathbf{r})$. Le VER est supposé soumis à une intensité uniforme \mathbf{e}^0 imposée sur sa frontière ∂V .

L'étude se propose de déterminer les champs $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ dans chaque phase constitutive, puis d'estimer la conductivité effective du matériau composite.

1. Equations de base

Sous les hypothèses de régime stationnaire et d'absence de source interne de chaleur, les équations de base du problème de conduction thermique hétérogène dans le VER s'écrivent :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = \mathbf{k}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}), \quad \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{e}(\mathbf{r}) = -\nabla T(\mathbf{r}) \quad (1)$$

Et les conditions aux limites :

$$T(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{r} \quad \text{pour} \quad \mathbf{r} \in \partial V \quad (2)$$

Dans la présente étude, l'interface S_I entre l'inclusion et la matrice est supposée imparfaite et faiblement conductrice :

$$[\mathbf{q}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{q}^+(\mathbf{r}) - \mathbf{q}^-(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [T(\mathbf{r})] = T^+(\mathbf{r}) - T^-(\mathbf{r}) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \mathbf{r} \in S_I \quad (3)$$

\mathbf{n} désigne un vecteur unitaire normal à l'interface S et orienté de S^- à S^+ . $T^+(\mathbf{r})$ et $\mathbf{q}^+(\mathbf{r})$ (respectivement $T^-(\mathbf{r})$ and $\mathbf{q}^-(\mathbf{r})$) sont définis sur S^+ (respectivement S^-). La topologie du problème d'inclusion d'Eshelby avec une interface imparfaite est schématisée par la figure 1.

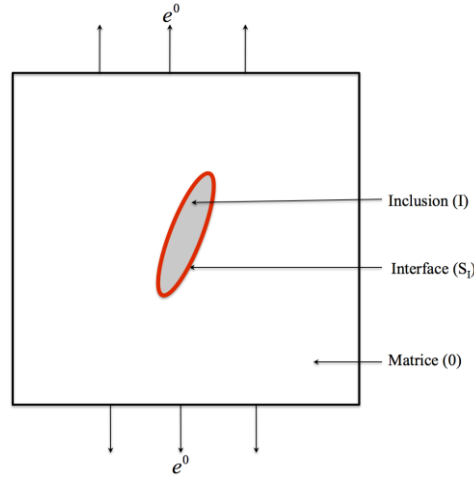


Figure 1. Topologie du problème d'inclusion ellipsoïdale avec une interface imparfaite

2. Equation intégrale

La technique est basée sur l'introduction d'une fonction de Green définie par:

$$k_{ij}^0 G_{,ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x'_i \partial x'_j} + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \quad (4)$$

$\delta(\mathbf{r})$ est la fonction de Dirac et G la fonction de Green associée au milieu de référence de conductivité \mathbf{k}^0 . L'approche consiste à exprimer l'intensité locale sous forme d'une équation intégrale (Bonfoh et al.[10]) :

$$e_m(\mathbf{r}) = e_m^0 + \int_{V_I} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_m \partial x_i} \Delta k_{ij}^I e_j(\mathbf{r}) dV' + \int_{S_I} k_{ij}^0 \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_m \partial x_i} [T] n_j dS' \quad (5)$$

L'intensité locale $e(\mathbf{r})$ est difficile à déterminer. Néanmoins, la conductivité \mathbf{k} étant uniforme par phase, la valeur moyenne de $e(\mathbf{r})$ dans chaque phase peut être considérée. Ainsi dans l'inclusion, on obtient :

$$e_m^I = e_m^0 - S_{mi}^I h_{ij}^0 \Delta k_{jp}^I e_p^I + \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{S_I} k_{ij}^0 \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_m \partial x_i} [T] n_j dS' dV \quad (6)$$

où \mathbf{h}^0 est la résistivité thermique telle que : $h_{mp}^0 k_{pn}^0 = k_{mp}^0 h_{pn}^0 = \delta_{mn}$. Le tenseur d'Eshelby pour un point intérieur (à l'inclusion) \mathbf{S}^I est uniforme et défini par:

$$S_{mn}^I = - \int_{V_I} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_m \partial x_p} k_{pn}^0 dV \quad \text{pour } \mathbf{r}' \in V_I \quad (7)$$

La difficulté majeure réside dans l'évaluation analytique de la double intégrale de l'Eq.(6). Le théorème de la différentiation sous intégrale de (Jost, [15]) et le théorème de Fubini (Rao [16], Taylor [17]) autorisent de permuter les deux intégrales si et seulement si le volume ne présente pas de singularité. Dans l'Eq.(6), $\mathbf{r} \in V_I$ et $\mathbf{r}' \in S_I$ et en considérant \mathbf{r}' sur la face extérieure de l'interface (à l'extérieur de l'inclusion), nous pouvons éviter la singularité et l'Eq.(6) devient :

$$e_m^I = e_m^0 - S_{mi}^I h_{ij}^0 \Delta k_{jp}^I e_p^I - \frac{1}{V_I} \int_{S_I} \left(- \int_{V_I} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_m \partial x_i} k_{ij}^0 dV \right) [T] n_j dS' \quad (8)$$

Puisque $\mathbf{r}' \notin V_I$, le tenseur d'Eshelby pour un point extérieur (à l'inclusion) \mathbf{S}^E est défini par:

$$S_{mn}^E(\mathbf{r}') = - \int_{V_I} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_m \partial x_p} k_{pn}^0 dV \quad \text{pour } \mathbf{r}' \notin V_I \quad (9)$$

Comme détaillé dans Bonfoh et al.[10], nous obtenons:

$$S_{mn}^E(\mathbf{r}) = S_{mn}^I - P_{mp}^0(\mathbf{n}) k_{pn}^0 \quad \text{avec } P_{mi}^0(\mathbf{n}) = (k_{pq}^0 n_p n_q)^{-1} n_m n_i \quad (10)$$

Eq.(6) devient:

$$e_m^I = e_m^0 - S_{mi}^I h_{ij}^0 \Delta k_{jp}^I e_p^I - (S_{mj}^I - \delta_{mj}) \frac{1}{V_I} \int_{S_I} [T] n_j(\mathbf{r}) dS \quad (11)$$

δ_{mj} est le symbole de Kronecker. En considérant le modèle de résistance interfaciale de Kapitza [18]:

$$[T] = -\alpha q_p(\mathbf{r}) n_p(\mathbf{r}) \quad (12)$$

α désigne la résistance thermique interfaciale de Kapitza [18]:

$$\frac{1}{V_I} \int_{S_I} [T] n_j(\mathbf{r}) dS = -\alpha \frac{1}{V_I} \int_{S_I} q_p(\mathbf{r}) n_p(\mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) dS \quad (13)$$

Le calcul de cette intégrale de surface est difficile car $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ est en général non-uniforme dans l'inclusion V_I . Mais comme suggéré en élasticité par Qu [19], Yanase et Ju [20], et par Wang et al.[21] en piezo-electricité, nous proposons de remplacer $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ par sa valeur moyenne dans l'inclusion telle que :

$$\frac{1}{V_I} \int_{S_I} [T] n_j(\mathbf{r}) dS = -\alpha q_p^I R_{pj} \quad (14)$$

Les détails du calcul analytique du tenseur \mathbf{R} sont présentés dans Bonfoh et al.[10]:

$$R_{pj} = \frac{1}{V_I} \int_{S_I} n_p n_j dS \quad (15)$$

Eq.(6) devient, en tenant compte de la loi de Fourier (Eq.1a):

$$e_m^I = e_m^0 - S_{mi}^I h_{ij}^0 \Delta k_{jp}^I e_p^I + \alpha (S_{mj}^I - \delta_{mj}) R_{jp} k_{pq}^I e_q^I \quad (16)$$

Il est alors possible de relier l'intensité moyenne e_m^I à celle du milieu de référence e_n^0 :

$$e_m^I = (\delta_{mn} + S_{mi}^I h_{ij}^0 \Delta k_{jn}^I - \alpha (S_{mj}^I - \delta_{mj}) R_{jp} k_{pn}^I)^{-1} e_n^0 = A_{mn}^{I/0} e_n^0 \quad (17)$$

3. Localisation de l'intensité thermique

La localisation Eq.(17) est valable quelles que soient l'anisotropie de la conductivité et la morphologie ellipsoïdale de l'inclusion. Des comparaisons pour des configurations particulières sont présentées.

a. Inclusion sphérique

En considérant des inclusions sphériques et une conductivité anisotrope par phase, Le Quang et al.[8] ont étudié la conductivité en présence d'une interface faiblement conductrice. Dans ce cas, l'Eq.(17) devient :

$$A_{pp}^{I/0} = \left(1 + S_{pp}^I h_{pp}^0 \Delta k_{pp}^I + 2 \frac{\alpha}{a} k_{pp}^I (1 - S_{pp}^I) \right)^{-1} \quad (18)$$

où a est le rayon de l'inclusion. Cette relation est identique à celle proposée par Le Quang et al.[8].

b. Inclusion sphéroidale

Le problème de la conduction thermique dans un matériau présentant des interfaces faiblement conductrices a été étudié par Benveniste et Miloh [5] en considérant des inclusions sphéroidales et une conductivité isotrope par phase.

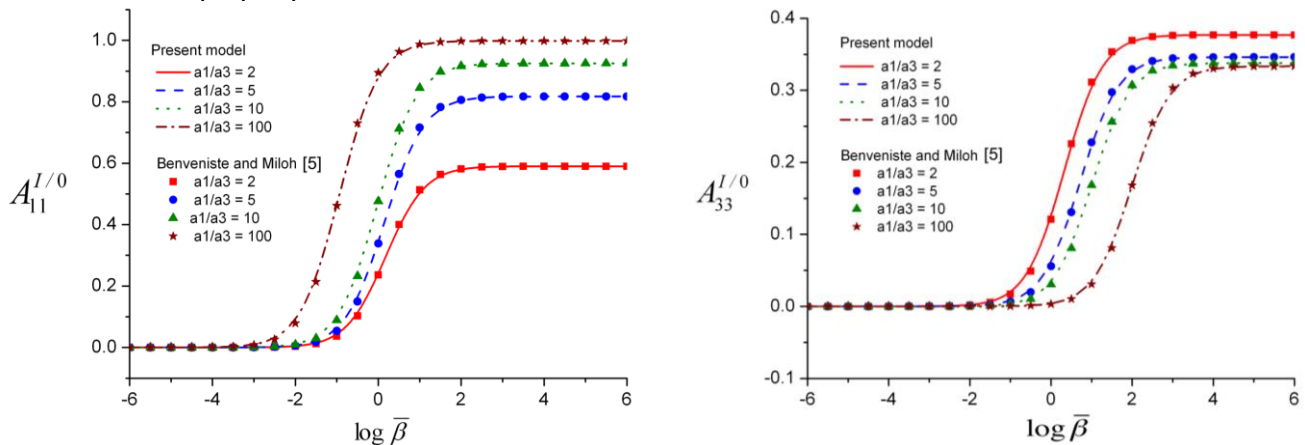


Figure 2. Inclusion prolata sphéroidale en fonction de la conductance normalisée $\bar{\beta} = \sqrt{a_1^2 - a_3^2} / \alpha k^M$ et pour différents facteurs de forme a_1/a_3 avec $k^I = 5 k^M$

La figure 2 présente les composantes du tenseur de localisation pour une inclusion prolata sphéroïdale ($a_1 > a_2 = a_3$), où les a_i sont les demi-axes de l'ellipsoïde.

Quel que soit le facteur de forme a_1/a_3 de l'inclusion, la présente modélisation et celle de Benveniste et Miloh [5] prédisent des localisations identiques. Toutes les courbes sont caractérisées par 3 domaines.

- Pour de grandes valeurs de la résistance interfaciale α (faibles valeurs de $\bar{\beta} = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}/\alpha k^M$) correspondant à une interface adiabatique, de très faibles valeurs de la localisation de l'intensité sont prédites dans l'inclusion.
- Pour des interfaces isothermiques ($\alpha \rightarrow 0$ et $\bar{\beta} \rightarrow \infty$), l'intensité prédite dans les 2 directions atteint un plateau correspondant à sa valeur maximale car la résistance interfaciale devient négligeable.
- Entre ces deux états, se trouve une zone de transition dans laquelle l'intensité dans l'inclusion augmente graduellement avec la conductance interfaciale $\bar{\beta}$.

Des résultats similaires ont été obtenus pour des inclusions oblates sphéroïdales, Bonfoh et al.[10].

La localisation de l'intensité dans l'inclusion permet ensuite la mise en œuvre d'un schéma d'homogénéisation pertinent pour prédire la conductivité thermique effective du matériau composite.

3. Conductivité effective

Le VER du matériau hétérogène est modélisé par une inclusion I noyée dans une matrice infinie M de conductivité thermique k^M . Lorsque le matériau est soumis à une intensité uniforme E à ses frontières, E ainsi que la densité de flux macroscopique Q sont reliées aux champs locaux par:

$$E_m = \frac{1}{V} \int_V e_m(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{V} \int_S \alpha q_p(\mathbf{r}) n_p(\mathbf{r}) n_m(\mathbf{r}) dS \quad (19)$$

$$= f e_m^I + (1-f) e_m^M + \alpha f R_{mp} k_{pq}^I e_q^I$$

$$Q_m = \frac{1}{V} \int_V q_m(\mathbf{r}) dV = f q_m^I + (1-f) q_m^M \quad (20)$$

où f est la fraction volumique totale des inclusions. A l'échelle macroscopique, la loi de Fourier s'écrit:

$$Q_m = k_{mp}^{eff} E_p \quad (21)$$

k^{eff} désigne la conductivité effective du matériau macro-homogène. La localisation par rapport à l'intensité macroscopique E conduit à:

$$e_m^I = A_{mn}^I E_n \quad (22)$$

k^{eff} dépend alors de la localisation A^I et peut être estimée au travers de schémas d'homogénéisation:

$$k_{mn}^{eff} = k_{mn}^M + f (k_{mp}^I - k_{mp}^M - \alpha R_{mi} k_{ij}^I k_{jp}^M) A_{pn}^I \quad (23)$$

1. Schéma de Mori-Tanaka

Le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka consiste à considérer la matrice (M) comme le milieu homogène de référence dans la formulation intégrale: $k^0 = k^M$ and $e^0 = e^M$. De l'Eq.(17) nous obtenons:

$$e_m^I = A_{mn}^{I/M} e_n^M \quad (24)$$

$A_{mn}^{I/M}$ est déduit de Eq.(17) en remplaçant k^0 par k^M . La vraie localisation A_{mn}^I (par rapport à l'intensité macroscopique E) s'obtient à partir des Eqs.(19) et (22):

$$A_{pp}^I = \frac{A_{pp}^{I/M}}{f (1 + \alpha R_{pp} k_{pp}^I) A_{pp}^{I/M} + (1-f)} \quad (25)$$

Finalement, la conductivité effective est déduite de l'Eq.(23).

2. Schéma autocohérent

Selon le schéma d'homogénéisation autocohérent, le milieu de référence correspond au milieu homogène équivalent dont on cherche à déterminer les propriétés: $k^0 = k^{eff}$ et $e^0 = E$. La localisation de l'intensité dans l'inclusion est déduite de Eq.(17) en remplaçant k^0 par k^{eff} et la conductivité effective k^{eff} exprimée par Eq.(23) est ensuite déterminée à travers un processus itératif.

3. Schéma différentiel

La procédure du schéma différentiel débute par un matériau composite constitué uniquement de la matrice. Ensuite à chaque étape, on ajoute un volume infinitésimal ΔV d'inclusions dans le matériau composite construit durant les étapes antérieures. La conductivité effective actualisée $k^{eff} + \Delta k^{eff}$ est reliée aux moyennes macroscopiques E et Q par :

$$Q_m = (k_{mp}^{eff} + \Delta k_{mp}^{eff}) E_p \quad (26)$$

La densité de flux macroscopique s'exprime:

$$Q_m = \frac{1}{V} k_{mp}^{eff} \int_{V-\Delta V} e_p(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{V} k_{mp}^I \int_{\Delta V} e_p(\mathbf{r}) dV \quad (27)$$

et l'intensité macroscopique:

$$E_m = \frac{1}{V} \int_{V-\Delta V} e_m(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{V} \int_{\Delta V} e_m(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{V} \int_{S_I} [T] n_m(\mathbf{r}) dS \quad (28)$$

En combinant les Eqs.(26) à (28), nous pouvons déduire l'incrément Δk_{mp}^{eff} (Norris [22]):

$$\Delta k_{mn}^{eff} = \frac{\Delta f}{1-f} \left(k_{mp}^I - k_{mp}^{eff} - \alpha R_{mi} k_{ij}^I k_{jp}^{eff} \right) A_{pn}^I \quad (29)$$

A_{mn}^I peut être déterminé en considérant un schéma d'homogénéisation tel que Mori Tanaka ou autocohérent. Par passage à la limite, le taux de conductivité effective s'écrit:

$$\dot{k}_{mn}^{eff} = \frac{\dot{f}}{1-f} \left(k_{mp}^I - k_{mp}^{eff} - \alpha R_{mi} k_{ij}^I k_{jp}^{eff} \right) A_{pn}^I \quad (30)$$

La solution de l'équation différentielle Eq.(30) est obtenue en tenant compte de $k^{eff}(f=0) = k^M$.

4. Applications et comparaisons

1. Conductivité thermique anisotrope

Marcos-Gomez et al.[23] ont proposé une estimation par des calculs éléments finis de la conductivité effective d'un matériau composite constitué d'une matrice en cuivre ($k^M = 385 \text{ W/m.K}$) contenant des nano-fibres de carbone uniaxialement orientées avec une conductivité anisotrope : $k_{11}^I = 3000 \text{ W/m.K}$ et $k_{22}^I = k_{33}^I = 6 \text{ W/m.K}$. Les écarts observés sur la figure 3 sont inférieurs à 6% et peuvent être reliés à la taille du VER considéré pour les simulations par éléments finis. Par ailleurs, dans [23] les fibres ont un facteur de forme ($l/d = 5$) alors que les prédictions du modèle sont relatives à une inclusion prolate sphéroïdale de même rapport de forme.

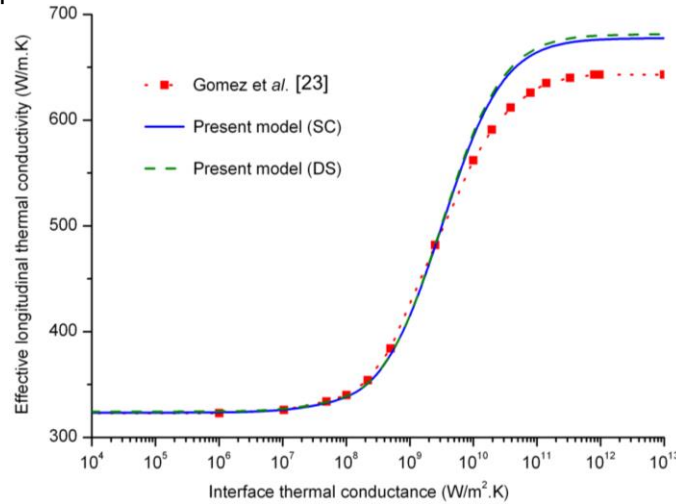


Figure 3. SC: Autocohérent, DS: schéma différentiel, éléments finis [23]: $a_1 = 5$ $a_2 = 5$ a_3 ; $f = 0.15$

2. Conductivité thermique isotrope par phase

a. Inclusion sphéroïdale

Benveniste et Miloh [5] ont étudié la conductivité thermique d'un matériau composite contenant des inclusions sphéroïdales et une interface faiblement conductrice. La conductivité effective a ensuite été estimée par un schéma de milieu dilué.

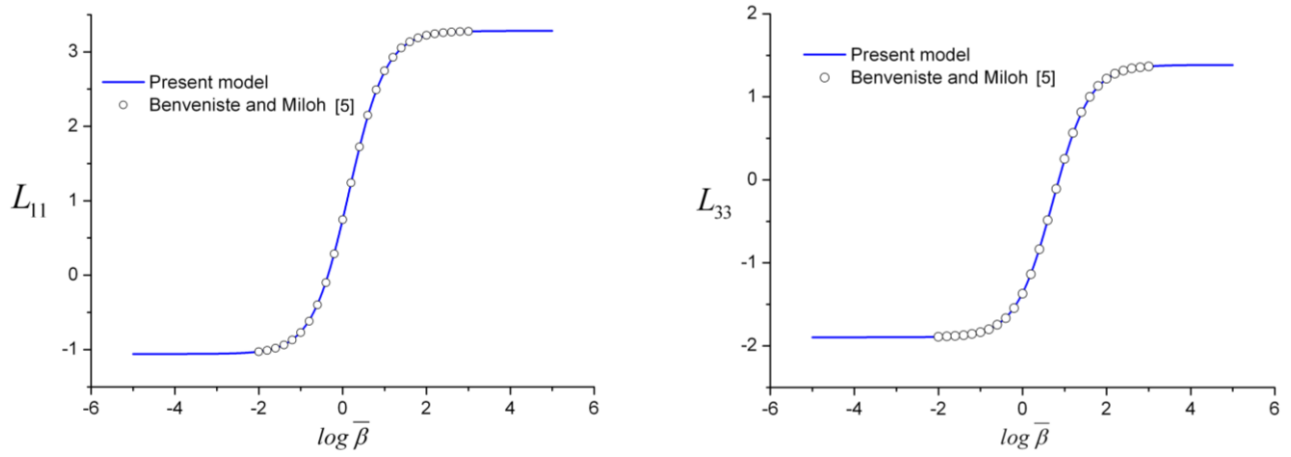


Figure 4. Approximation milieu dilué: $L_{pp} = (k_{pp}^{eff}/k^M - 1)/f$ pour une inclusion prolate spheroidale ($a_1 = 5 a_2 = 5 a_3$) en fonction de $\bar{\beta} = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}/\alpha k^M$ et pour $k^I = 5 k^M$

Les prédictions du modèle coïncident avec ceux de Benveniste et Miloh [5]. Cette similitude est également observée pour une inclusion de forme oblate spheroidale (Bonfoh et al.[10]).

b. Inclusion sphérique

Dans le cas d'inclusions sphériques de rayon a dans une matrice isotrope, la localisation s'exprime :

$$A^{I/0} = \frac{3 k^0}{2 k^0 + k^I + 2 \bar{\alpha} k^I} \quad (31)$$

avec $\bar{\alpha} = \alpha k^M/a$. La conductivité effective est alors estimée au travers de schémas d'homogénéisation.

▪ Schéma de Mori-Tanaka

$$A^I = \frac{3 k^M}{((1-f) k^I + (2+f)k^M + (2+f)\bar{\alpha} k^I)} \quad (32)$$

$$k^{eff} = \frac{((1+2f) k^I + 2(1-f) k^M) + 2(1-f)\bar{\alpha} k^I}{(1-f) k^I + (2+f)k^M + (2+f)\bar{\alpha} k^I} k^M \quad (33)$$

▪ Schéma autocohérent

$$A^I = \frac{3 a k^{eff}}{a (k^I + 2 k^{eff}) + 2 \alpha k^I k^{eff}} \quad (34)$$

$$k^{eff} = \frac{a \left((2-3f) k^M k^{eff} + k^I (k^M + 3 f k^{eff}) \right) + (2-3f) \alpha k^I k^M k^{eff}}{a (k^I + 2 k^{eff}) + 2 \alpha k^I k^{eff}} \quad (35)$$

▪ Schéma différentiel

$$\dot{k}^{eff} = \frac{\dot{f}}{1-f} \left(k^I - k^{eff} - \frac{\alpha}{a} k^I k^{eff} \right) \frac{3 a k^{eff}}{a (k^I + 2 k^{eff}) + 2 \alpha k^I k^{eff}} \quad (36)$$

Pour cette configuration de sphères isotropes dans une matrice isotrope, quel que soit le schéma d'homogénéisation, les résultats obtenus sont identiques à ceux présentés dans [5, 8].

5. Conclusion

L'étude propose une modélisation micromécanique de la conductivité effective d'un matériau composite en présence d'interfaces imparfaites. La formulation proposée permet d'exprimer de manière analytique la localisation de l'intensité dans l'inclusion. L'approche traite du cas général d'une morphologie ellipsoïdale des inclusions et d'une anisotropie de la conductivité thermique par phase. La conductivité effective est ensuite estimée au moyen de schémas d'homogénéisation. Pour le cas particulier d'une conductivité thermique isotrope par phase, les résultats obtenus coïncident avec ceux de Benveniste et Miloh [5]. Dans le cas anisotrope, les comparaisons avec les résultats numériques de Marcos-Gomez et al.[23], ont montré la pertinence du modèle proposé à traiter le problème général dans la conductivité hétérogène avec une interface faiblement conductrice.

Les résultats permettent d'envisager la généralisation de la formulation proposée d'une part pour l'étude de la conductivité thermique en présence d'une interface hautement conductrice, se traduisant par une discontinuité de la densité de flux. D'autre part, l'approche développée se prête aussi à la modélisation d'autres phénomènes de transfert tels que la conductivité électrique ou magnétique.

6. Bibliographie

- [1] RAYLEIGH L. *On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of the medium*. Philosophical Magazine, 1892, vol. 34, pp. 481-502.
- [2] MAXWELL J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. 1, Clarendon Press, 1873
- [3] HASSELMAN D.P.H. JOHNSON L.F. *Effective Thermal Conductivity of Composites with Interfacial Thermal Barrier Resistance*. J. Composite Materials, 1987, vol. 21, pp. 508-515.
- [4] HASSELMAN D.P.H. DONALDSON J.R.T.Jr. *Effective thermal conductivity of uniaxial composite with cylindrically orthotropic carbon fibers and interfacial thermal barrier*. J. Composite Materials, 1993, vol. 27, n°6, p. 637.
- [5] BENVENISTE Y. MILOH T. *The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces*. International Journal Engineering Sciences 1986, vol.24, pp.1537-1552.
- [6] BENVENISTE Y. *Effective conductivity of composites with imperfect a thermal contact resistance between the constituent*. Journal of Applied Physics 1987, vol.61, pp.2840-2843.
- [7] KUSHCH V.I. CHERNOBAI V.S. *Transverse conductivity and longitudinal shear of elliptic fiber composite with imperfect interface*. Int. Journal of Solids and Structures 2014, vol.51, pp.2529-2538.
- [8] LE QUANG H. HE Q.-C. BONNET G. *Eshelby's tensor fields and effective conductivity of composites made of anisotropic phases with Kapitza's interface thermal resistance*. Philosophical Magazine 2011, vol.91, pp.3358.
- [9] LE QUANG H. PHAM D.C. BONNET G. HE Q.-C. *Estimations of the effective conductivity of anisotropic multiphase composites with imperfect interfaces*. Int. J. Heat Mass Transfer 2013, vol.58, pp.175-187.
- [10] BONFOH N. DREISTADT C. SABAR H. *Micromechanical modeling of the anisotropic thermal conductivity of ellipsoidal inclusion-reinforced composite materials with weakly conducting interfaces*. Int. J. Heat Mass Transfer 2017, vol.108, pp.1727-1739.
- [11] LIPTON R. VERNESCU B. *Composites with imperfect interface*. Proc. Phys. Soc. 1996, vol.A452, pp.329-358.
- [12] LIPTON R. VERNESCU B. *Critical radius, size effects and inverse problems for composites with imperfect interface*. J. Applied. Phys. 1996, vol.79, pp.8964-8966.
- [13] CHENG H. TORQUATO S. *Effective conductivity of periodic arrays of spheres with interfacial resistance*. Proc. Roy. Soc. London. 1997, vol.A453, pp.145-161.
- [14] TORQUATO S. RINTOUL M. *Effects of the interface on the properties of composite media*. Phys. Rev. Lett. 1995, vol.75, pp.4067-4070.
- [15] JOST J. *Postmodern Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3 Edition, 2005 ISSN: 0172-5939
- [16] RAO M.M. *Measures theory and integration*. Second Edition, CRC Press, 2004.
- [17] TAYLOR A. E. *General theory of functions and integration*. Dover Publications, 2010.
- [18] Kapitza P. L. *The study of heat transfer in helium II*, J. Phys. (USSR) 4. pp 181–210, 1941
- [19] QU J. *The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials*. Mechanics of Materials 1993, vol.14, pp. 269–281.
- [20] YANASE K. JU J.W. *Effective elastic moduli of spherical particle reinforced composites containing imperfect interfaces*. International Journal of Damage Mechanics 2012, vol.21, pp. 97–127.
- [21] WANG Z. ZHU J. CHEN W.Q. JIN X.Y. ZHANG C.Z. *Modified Eshelby tensor for an ellipsoidal inclusion imperfectly embedded in an infinite piezoelectric medium*. Mechanics of Materials 2014, vol.74, pp.56–66
- [22] NORRIS A. N. *A differential scheme for the effective moduli of composites*, Mechanics of Materials 1985, vol.4, pp.1-16.
- [23] MARCOS-GÓMEZ D. CHING-LLOYD J. ELIZALDE M.R. CLEGG W.J., MOLINA-ALDAREGUIA J.M. *Predicting the thermal conductivity of composite materials with imperfect interfaces*, Composites Science and Technology 2010, vol.70, pp.2276–2283.