

" Analyse dynamique des plaques composites stratifiées en utilisant une nouvelle théorie FSDT "

Kada Draiche ^{1,2}

Lazreg Hadji ¹

Abdelouahed Tounsi ²

¹ Département de Génie Civil, Université Ibn Khaldoun Tiaret BP 78 Zaaroura, 14000 Tiaret, Algérie, kdraiche@yahoo.fr

² Laboratoire des matériaux et d'hydrologie, Faculté de technologie, Département de génie civil, université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès Bp 89, cité Ben m'hidi 22000 - Sidi-Bel Abbès, Algérie, touabdel@yahoo.fr

Résumé :

A travers cette étude, une nouvelle théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre est utilisée pour analyser le comportement dynamique des plaques composites stratifiées. Contrairement à la première théorie de déformation de cisaillement transversal du premier ordre (FSDT) à cinq inconnus, la présente théorie ne contient que quatre inconnus et a de fortes similitudes avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions des contraintes résultantes. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont dérivées du principe d'Hamilton. Des solutions analytiques des stratifiés antisymétriques simplement appuyés à plis croisés et équilibrés, sont vérifiées et comparées avec les solutions exactes d'élasticité tridimensionnelle (3D) et celles prédites par les autres théories disponibles dans la littérature. Les études de comparaison montrent que cette nouvelle théorie peut atteindre la même précision que la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre à cinq inconnus.

Mots clés: Plaque composite stratifié, Théorie FSDT, Principe d'Hamilton, Vibration libre.

1. Introduction

L'analyse vibratoire est une question d'actualité importante, tant d'un point de vue académique qu'industrielle. Cette thématique touche aussi d'autres domaines, tels que l'automobile, les ponts, les bâtiments, ou encore le génie nucléaire. Durant ces décennies, le domaine des vibrations connaît un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures couramment utilisées et soumises à de différents niveaux d'excitations importants. D'une autre manière, la compréhension de l'identité vibratoire de plaque devient donc d'une grande importance et aide les ingénieurs à concevoir de meilleures structures. Au final, les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions d'analyse des réponses dynamiques des plaques et leur dimensionnement. L'étude et l'analyse des vibrations ont pris au cours des dernières années, un essor considérable en raison du développement du comportement dynamique du matériau isotrope, orthotrope ou composite.

Vue à l'augmentation de l'application du stratifié dans les structures d'ingénierie, une variété de théories des plaques stratifiées ont été développées pour prédire son comportement. Plusieurs travaux plus récents sur le développement de théories des stratifiés ont été proposés par Ghugal et al. [1] et Khandan et al. [2]. Ces théories peuvent être classées comme des théories à approche monocouche équivalente «Equivalent Single Layer ESL» et peuvent être divisées en trois catégories principales, la théorie classique des plaques (CPT), la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDT). Dans ce présent travail, une nouvelle théorie de déformation du cisaillement du premier ordre à quatre variables, récemment développée par Mantari et Granados [3] pour les plaques en matériaux à gradient de propriétés, est évaluée dans cette étude pour analyser le comportement dynamique des plaques composites stratifiées.

2. Formulation théorique

Considérons une plaque rectangulaire d'épaisseur totale (h) composée de plusieurs couches orthotropes (n) avec le système de coordonnées illustré dans la figure (1) indiquée ci-dessous. En supposant que chaque couche possède un plan de symétrie élastique parallèle au plan $x - y$.

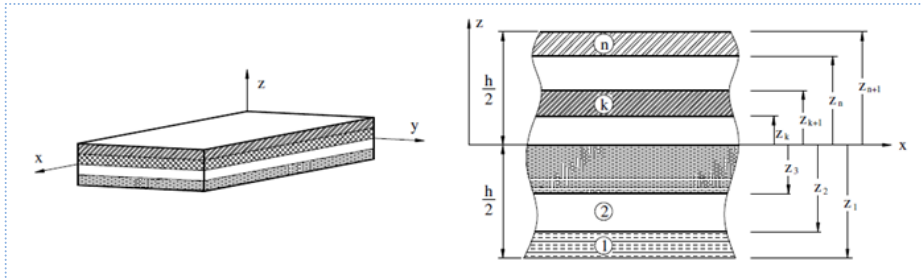


Figure1 : Système de coordonnées et numérotation des couches d'une plaque stratifiée.

1. Cinématique et champ de déformations

La cinématique du champ de déplacement de la présente nouvelle théorie contient que quatre variables et peut s'écrire sous une forme plus simple telle que [3] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zk_1 \int \theta(x, y) dx \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zk_2 \int \theta(x, y) dy \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

Où u_0 et v_0 sont les composantes de déplacement du plan médian de la plaque; θ est un terme mathématique qui permet d'obtenir les rotations de la normale au plan moyen autour des axes x et y . Les constantes k_1 et k_2 dépendent de la géométrie de la plaque considérée. Toutefois le champ de déformation est obtenu en substituant les termes de l'équation (1) dans la relation d'élasticité linéaire déformations-déplacements. Il est donné comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z k_1 \theta \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z k_2 \theta \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx - k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} - k_1 \int \theta dx \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - k_2 \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (2)$$

2. Equations constitutives

Etant donné que le matériau stratifié est constitué de plusieurs couches orthotropes avec leurs axes orientés arbitrairement en ce qui concerne les coordonnées de stratifié, les équations constitutives de chaque couche doivent être transformées dans le repère global du stratifié (x, y, z). Les relations constitutives pour n'importe quelle couche k d'un matériau stratifié dans le système de coordonnées (x, y), correspondent à un état de contraintes planes, elles s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité réduite \bar{Q}_{ij} sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3)$$

3. Equations d'équilibre

L'équation du mouvement de la plaque composite en vibration libre peut être obtenue du principe d'Hamilton. L'énergie potentielle totale de la plaque considérée est exprimée comme suit:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (4)$$

Où δU et δT sont les variations, de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique, respectivement. Ces deux sont déterminées à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ \delta T &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho^k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dA dz \end{aligned} \quad (5)$$

Où ρ^k et A représentent la densité du matériau et la surface de la plaque, respectivement. En remplaçant les expressions données par les équations (1, 2, 3) dans les équations (4, 5) et en faisant l'intégration par parties, et ensuite la collection des coefficients ou bien des termes de $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ et $\delta \theta$, on obtient les équations de mouvement suivantes:

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 + k_1 \frac{I_2}{\alpha^2} \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_1 \ddot{v}_0 + k_2 \frac{I_2}{\beta^2} \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
\delta w_0 : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} &= I_1 \ddot{w}_0 \\
\delta w_s : k_1 M_x + k_2 M_y - \left(\frac{k_1}{\alpha^2} + \frac{k_2}{\beta^2} \right) \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{k_1}{\alpha^2} \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{k_2}{\beta^2} \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} &= -k_1 \frac{I_2}{\alpha^2} \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \\
&\quad - k_2 \frac{I_2}{\beta^2} \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} - k_1^2 \frac{I_3}{\alpha^4} \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} - k_2^2 \frac{I_3}{\beta^4} \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Où N , M et Q sont les contraintes résultantes définies par :

$$\begin{aligned}
(N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \\
(M_x, M_y, M_{xy}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz, \\
(Q_{xz}, Q_{yz}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} K (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz
\end{aligned} \tag{7}$$

Où K est le facteur de correction de cisaillement. Les termes d'inerties de masse sont définis par les relations suivantes :

$$(I_1, I_2, I_3) = \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho^{(k)} (1, z, z^2) dz \tag{8}$$

Pour résoudre le problème du comportement vibratoire des plaques en matériaux composites stratifiés, on emploie les solutions de Navier qui sont développées sous la forme d'une double série trigonométrique de Fourier et en substituant ces derniers dans les équations d'équilibre (6), la vibration libre des plaques composites stratifiées peut être obtenue à partir de l'équation suivante :

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\Delta\} = \{0\}, \tag{9}$$

Où $[K]$, $[M]$, ω et $\{\Delta\}$ sont la matrice de rigidité globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires, la matrice masse, la fréquence propre de vibration et le vecteur global des déplacements inconnus, respectivement.

3. Résultats numériques et discussions

Dans cette étude, le modèle proposé a été employé pour analyser le comportement dynamique des plaques stratifiées antisymétriques simplement appuyées à plis croisés et équilibrés. Les exemples numériques sont présentés et validés avec d'autres travaux pour vérifier l'exactitude de la présente théorie.

Les propriétés matérielles adimensionnelles utilisées dans la présente étude sont :

$$E_1 / E_2 = Open, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2, \quad G_{23} = 0.5 E_2, \quad \nu_{12} = 0.25 \tag{10}$$

La fréquence naturelle fondamentale est représentée en tant que terme adimensionnel $\bar{\omega}$ défini pour présenter les résultats numériques obtenus sous formes tabulaires, ce terme peut être défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\rho / E_2} \quad (11)$$

1. Effet du rapport d'orthotropie

Les fréquences fondamentales adimensionnelles sont données dans le tableau (1) pour différentes valeurs du rapport des modules de Young et du nombre de plis des plaques stratifiées antisymétriques croisés. Notre objectif est de vérifier l'exactitude et la bonne convergence du présent travail, à cet effet les résultats numériques obtenus sont comparés aux solutions exactes 3D effectués par Noor [4] et celles présentés par Thai et Kim [5]. Toutefois on constate que les résultats obtenus par la présente théorie FSDT sont identiques à ceux prévus par la théorie FSDT à cinq variables [5].

Tableau 1. Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque stratifiée carrée (0/90)_n pour différentes valeurs du rapport d'orthotropie, avec a/h=5.

Nombre des couches	Théories	E1/E2				
		3	10	20	30	40
(0/90)1	Exact [4]	6.2578	6.9845	7.6745	8.1763	8.5625
	TSDT [5]	6.2169	6.9887	7.8210	8.5050	9.0871
	FSDT [5]	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
	Présente	6.2085	6.9392	7.7060	8.3211	8.8333
(0/90)2	Exact [4]	6.5455	8.1445	9.4055	10.1650	10.6789
	TSDT [5]	6.5008	8.1954	9.6265	10.5348	11.1716
	FSDT [5]	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
	Présente	6.5043	8.2246	9.6885	10.6198	11.2708
(0/90)3	Exact [4]	6.6100	8.4143	9.8398	10.6958	11.2728
	TSDT [5]	6.5558	8.4052	9.9181	10.8547	11.5012
	FSDT [5]	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
	Présente	6.5569	8.4183	9.9427	10.8828	11.5264
(0/90)5	Exact [4]	6.6458	8.5625	10.0843	11.0027	11.6245
	TSDT [5]	6.5842	8.5126	10.0674	11.0197	11.6730
	FSDT [5]	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444
	Présente	6.5837	8.5132	10.0638	11.0058	11.6444

Les résultats obtenus confirment que le degré de l'orthotropie a un effet significatif sur les fréquences naturelles, ce dernier est considéré variable en fonction du rapport des modules d'élasticité longitudinale suivant les deux directions différentes du matériau et comme prévu, il a indiqué très clairement qu'avec l'augmentation du nombre de couches, la rigidité de la plaque est augmentée et par conséquent augmentent les fréquences propres de vibration.

2. Effet du rapport d'élancement

Dans cet exemple, une analyse a été effectuée sur les stratifiées antisymétriques équilibrés à deux couches de même épaisseur (0/-0). Le tableau (2) montre les fréquences fondamentales adimensionnelles pour les différents rapports d'élancement. On observe que les résultats obtenus par la présente théorie et le modèle de la théorie FSDT à cinq variables sont en excellent accord les uns avec les autres. Les résultats sont également comparés à ceux présentés par Kim et al. [5] en utilisant les théories TSDT, FSDT et CPT ainsi que avec la théorie d'ordre élevé HSDT [6].

Tableau 2. Fréquences fondamentales adimensionnelles d'une plaque antisymétrique carrée (θ/θ) pour différentes valeurs du rapport h/a .

E1/E2	a/h	Théories				
		HSDT [6]	TSDT [5]	FSDT [5]	Présente	CLPT [5]
3	4	6.1223	6.0861	6.0665	6.0665	6.9251
	10	7.1056	7.0739	7.0700	7.0700	7.2699
	20	7.3001	7.2705	7.2694	7.2694	7.3228
	50	7.3583	7.3293	7.3291	7.3291	7.3378
	100	7.3666	7.3378	7.3378	7.3378	7.3400
10	4	7.2647	7.3470	7.2169	7.2169	8.7950
	10	8.9893	8.9660	8.9324	8.9324	9.3444
	20	9.3265	9.3266	9.3173	9.3173	9.4304
	50	9.4377	9.4377	9.4362	9.4362	9.4548
	100	9.5123	9.4540	9.4537	9.4537	9.4583
20	4	8.0490	8.4152	8.1185	8.1185	10.6314
	10	10.6412	10.7151	10.6265	10.6265	11.3406
	20	11.2975	11.2772	11.2517	11.2517	11.4525
	50	11.5074	11.4553	11.4511	11.4511	11.4844
	100	11.5385	11.4816	11.4806	11.4806	11.4889
30	4	8.5212	9.1752	8.7213	8.7213	12.1586
	10	11.8926	12.0971	11.9456	11.9456	12.9888
	20	12.8422	12.8659	12.8208	12.8208	13.1203
	50	13.1566	13.1153	13.1077	13.1077	13.1577
	100	13.2035	13.1524	13.1505	13.1505	13.1631
40	4	8.8426	9.7594	9.1609	9.1609	13.5059
	10	12.9115	13.2631	13.0439	13.0439	14.4392
	20	14.1705	14.2463	14.1790	14.1790	14.5873
	50	14.6012	14.5724	14.5608	14.5608	14.6295
	100	14.6668	14.6212	14.6183	14.6183	14.6356

4. Conclusion

L'objectif assigné à cette recherche est l'étude du comportement vibratoire des plaques composites stratifiées antisymétriques. A cet effet nous avons proposée une méthode de calcul analytique et numérique qui se base sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) à quatre variables pour analyser les vibrations libres des plaques composites stratifiées à séquence d'empilement croisé et équilibré. Les équations de mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton et sont résolues d'une manière analytique pour des plaques stratifiées simplement appuyées. La nouvelle théorie est très intéressante, efficace et plus d'avantage que la première théorie FSDT à cinq variables, puisque le nombre d'inconnus et les équations d'équilibre de la présente FSDT sont réduites d'une variable et, par conséquent, rendent la nouvelle théorie simple et efficace à utiliser. Les études de vérification montrent que les prédictions de la présente théorie de déformation du cisaillement FSDT et de la théorie FSDT existante pour les stratifiés sont proches les unes des autres. Cela indique que l'utilisation des hypothèses simplifiées dans cette étude a un impact minimal sur la précision des résultats pour le problème considéré, mais elle peut améliorer un paramètre très important, c'est le temps de calcul en raison de la réduction du nombre d'inconnus et les équations de mouvement.

5. Bibliographie

- [1] Ghugal YM, Shimpi RP. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. J Reinf Plast Compos; 2002, 21(9):775–813.
- [2] Khandan R, Noroozi S, Sewell P, Vinney J. The development of laminated composite plate theories: a review. J Mater Sci; 2012, 47(16):5901–10.
- [3] Mantari J.L., Granados E.V. Dynamic analysis of functionally graded plates using a novel FSDT, Composites Part B 75, 2015, 148-155.
- [4] Noor AK. Free vibrations of multilayered composite plates. AIAA J; 1973, 11(7):1038–9.
- [5] Thai HT, Kim SE. Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory. Int J Mech Sci; 2010, 52(4):626–633.
- [6] Swaminathan K, Patil S. Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates. Compos Struct 2008, 82(2): 209–16.