

Étude du comportement vibratoire des poutres fonctionnellement graduées (FGM) dans un environnement thermique

Bensaid Ismail¹, Bekhadda Ahmed¹, Kerboua Bachir², Cheikh Abdelmadjid¹

¹ Université Abou Beckr Belkaid Tlemcen, Laboratoire IS2M, Département de Génie Mécanique, Algérie, *bensaidismail@yahoo.fr

² Université Abou Beckr Belkaid Tlemcen, laboratoire EOLE, Algérie, kerbouac@yahoo.fr

Résumé :

Ce travail porte sur l'analyse de la vibration thermomécanique des poutres fonctionnellement graduées type FGM dans un environnement thermique. Les propriétés mécaniques de la poutre fonctionnellement graduée sont fonction de deux variables dans le sens de l'épaisseur et de température, selon une loi de puissance (P-FGM). Afin de d'obtenir les équations gouvernantes, le principe d'Hamilton est adopté. La solution analytique de type Navier a été employé pour obtenir les fréquences de vibration. La validation effectuée certifie l'exactitude des résultats obtenus. Les influences des différents paramètres tels que l'effet thermique, l'indice de loi de puissance et les différents modes de vibrations seront illustrées.

Mots clés : FGM ; Poutre ; Effet thermique ; vibration thermomécanique.

1. Introduction

Dans un effort pour développer des matériaux super résistants à des gradients de températures très élevés, les chercheurs japonais spécialisés dans le domaine des matériaux ont proposé le concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) au début des années 1980. Ces matériaux sont une nouvelle classe de matériaux composites qui ont une variation continue des propriétés matérielles d'une surface à une autre et cela pour but diverger la concentration de contraintes trouvés dans l'interface des couches dans les composites stratifiés. Typiquement, un FGM est réalisé à partir d'un mélange de céramique et de métal de telle sorte que la céramique peut résister à des grandes températures dans les environnements thermiques, alors que le métal peut réduire la contrainte de traction engendrée dans la surface de la céramique dans la phase finale de refroidissement. Récemment, les matériaux fonctionnalisés (FGM) sont des matériaux alternatifs largement utilisés dans la mécanique, l'aérospatial, le nucléaire, biomécanique, optique, génie civil et l'automobile.

Motivé par ces applications dans tel domaine d'ingénierie, Les matériaux FGM ont également attirés de grands intérêts de recherche, notamment sur l'étude de leurs comportements en statiques et en dynamiques. Pour cela, un certain nombre d'articles sont rapportés dans la littérature afin d'étudier l'analyse dynamique et à la flexion statique des poutres fonctionnellement gradués. D'où on peut citer, Aydogdu and Taskin [2] ont présenté un model analytique pour l'analyse de la vibration libre d'une poutre FGM avec des conditions au bord simplement appuyés. Li [3] a analysé le comportement en statique et dynamique des poutres fonctionnellement gradués en se basant sur une nouvelle approche unifiée, l'inertie de rotation et la déformation de cisaillement ont été inclus. İmrek [4] a investigué la fréquence libre d'une poutre en FGM, en utilisant des théories des poutres classique, de déformation de cisaillement de premier ordre et d'ordre élevé en considérant des conditions aux limites différentes. Thai and Vo [5] ont utilisé une variété des théories de poutres tenant en compte les déformations de cisaillement afin d'étudier le comportement à la flexion et à la vibration des poutres FG. Bouremana *et al.* [6] ont développé une théorie simple du premier d'ordre de la déformation par cisaillement sur la base du concept de la position de surface neutre pour étudier le comportement mécanique de poutres FG. L'effet d'étirement de l'épaisseur sur la réponse mécanique des poutres FGM a été étudié par Bourada *et al.* [7] en développant une nouvelle théorie simple de déformations en cisaillement à trois variables.

Ce travail porte sur l'analyse de la vibration thermomécanique d'une poutre homogène faite en matériaux à gradient de propriétés (variable) FGM sur la base la théorie des poutres Euler-Bernoulli. Il est supposé que les propriétés matérielles de la poutre FGM changent en continu à travers l'épaisseur, selon la fraction volumique du matériau constitutif suivant une fonction de loi de puissance P-FGM et sont dépendants de la température. Les résultats obtenus ont été comparés avec celles qui existent dans la littérature et une bonne concordance a été révélée. L'effet de plusieurs paramètres, tels que la magnitude de la charge thermique, fractions volumiques des constituants, et le numéro de mode, sur les caractéristiques de vibration thermomécanique des poutres Fonctionnellement Gradués ont été tous explorés.

2. Modélisation mathématique

Sur la base de la théorie de poutre Euler–Bernoulli, le champ de déplacement à n'importe quel point de la poutre peut être écrit comme suit:

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t) \quad (2)$$

La déformation associée au champ de déplacements dans l'équation est :

$$v_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

Le principe d' HAMILTON peut s'écrit comme suit:

$$\int_0^T (U - T + V) dt = 0 \quad (4)$$

où U est la variation virtuelle de l'énergie de déformation, T la variation virtuelle de l'énergie cinétique, et V est la variation virtuelle de l'énergie potentielle respectivement.

En substituant les expressions détaillées de U , T , et V , dans l'équation (4) et en intégrant par parties, et en assemblant les coefficients, les équations de mouvement concernant la vibration thermomécanique de la nano poutre fonctionnellement gradué seront obtenues par la suite.

3. Propriétés matérielles

Nous considérons une poutre faite en FGM d'une longueur L , largeur b et épaisseur uniforme h dans la configuration de référence non sollicitée comme indiqué dans la Figure 1. Selon la loi du mélange ; les propriétés matérielles de la poutre **FGM** changent sans interruption suivant l'épaisseur, et peuvent s'exprimer comme suit Ebrahimi *et al.* [8], Bensaid *et al.* [9]:

$$P = P_b V_m + P_t V_c ; V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (5)$$

On notera que P_b et P_m sont, respectivement, les caractéristiques correspondantes du métal et de la céramique de la nano-poutre FGM. Où p est l'indice de gradient, qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Afin de prédire avec plus de précision le comportement des FGMs sous haute température, il est nécessaire de considérer les propriétés matérielles dépendantes de la variation de température T . L'équation non linéaire des propriétés matérielles thermo-élastiques en fonction de la température $T(K)$ peuvent être exprimé comme Reddy and Chin [10] :

$$P = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right), \quad (6)$$

Où P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 , et P_3 sont les coefficients dépendants de la température, qui peuvent être obtenus à partir des travaux de la littérature pour Si3N4 and SUS 304.

4. Equations de mouvement en termes de déplacements

Les équations générale de mouvement de la présente théorie de nano-poutres proposées ici peuvent être exprimés en terme de déplacement (u, w) telle que:

$$A_{xx} \frac{d^2 u}{dx^2} - B_{xx} \frac{d^3 w}{dx^3} - I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} = 0 \quad (7)$$

$$B_{xx} \frac{d^3 u}{dx^3} - D_{xx} \frac{d^4 w}{dx^4} - N^T \frac{d^2 w}{dx^2} - I_0 \frac{d^2 w}{dt^2} - I_1 \frac{d^3 w}{dt^2 dx} + I_2 \frac{d^4 w}{dt^2 dx^2} = 0 \quad (8)$$

Où q et N^T sont la charge transversale et axiale, respectivement, et A_{xx} , B_{xx} , D_{xx} , sont les coefficients de rigidités, ainsi que I_0 , I_1 , I_2 , sont les moments de masse d' inerties, et le tous peuvent être définis comme :

$$(A_{xx}, B_{xx}, D_{xx}) = \int_A E(z, T) (1, z, z^2) dA, \quad (9)$$

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_A \dots (z, T) (1, z, z^2) dA, \quad (10)$$

$$N^T = \int_{-h/2}^{h/2} E(z, T) r(z, T) (T - T_0) \quad (11)$$

5. Solution analytique

Considérons une poutre FG simplement appuyée de longueur L soumise à une charge transversale q et une charge axiale N^T . La solution des équations générales du mouvement pour la vibration libre d'une FG poutre simplement supporté est supposée être sous la forme

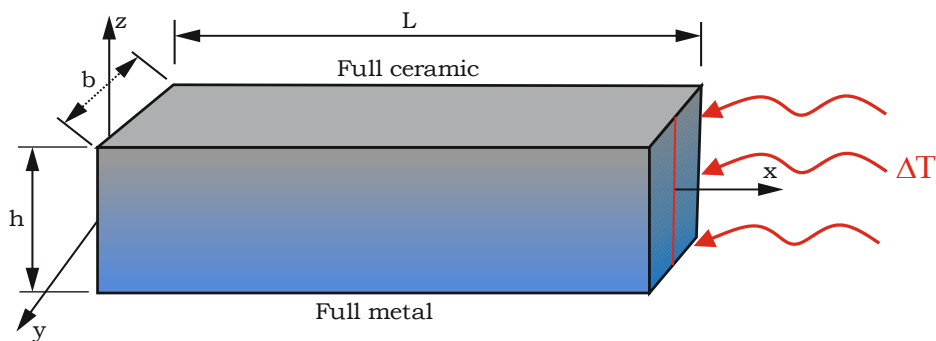


Figure 1. Géométrie et système de coordonnées de la poutre fonctionnellement graduée

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_n \cos(r x) e^{i\tilde{S}_n t} \\ W_n \sin(r x) e^{i\tilde{S}_n t} \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

Où U_n , W_n sont des paramètres arbitraires à déterminer, \tilde{S}_n est la fréquence propre associée au $n^{\text{ème}}$ mode propre, et $r = n\pi/L$. La charge transversale q est également élargie dans la série sinus de Fourier en tant que

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(r x), \quad Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(r x) dx \quad (13)$$

Les coefficients de Fourier Q_n associée à certaines charges typiques sont donnés

$$Q_n = q_0, \quad n = 1 \quad \text{pour charge sinusoïdal} \quad (14a)$$

$$Q_n = \frac{4q_0}{nf}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \text{ pour charge uniforme} \quad (14b)$$

$$Q_n = \frac{2q_0}{L} \sin \frac{nf}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ pour une charge ponctuelle } Q_0 \text{ au plan moyen,} \quad (14c)$$

En substituant le système d'équations (12) dans les Eqs. (7) et (8) respectivement, et avec quelque manipulation mathématiques, nous obtiendrons les relations suivantes :

$$\left(-A_{xx} \left(\frac{nf}{L} \right)^2 + I_0 \tilde{S}_n^2 \right) U_n + \left(B_{xx} \left(\frac{nf}{L} \right)^3 - I_1 \left(\frac{nf}{L} \right) \tilde{S}_n^2 \right) W_n = 0 \quad (15)$$

$$\left(B_{xx} \left(\frac{nf}{L} \right)^3 - I_1 \left(\frac{nf}{L} \right) \tilde{S}_n^2 \right) U_n + \left(-D_{xx} \left(\frac{nf}{L} \right)^4 + N^T \left(\frac{nf}{L} \right)^2 + I_0 \tilde{S}_n^2 + I_2 \left(\frac{nf}{L} \right)^2 \tilde{S}_n^2 \right) W_n = 0 \quad (16)$$

La fréquence propre \tilde{S}_n est obtenue à partir du système d'équations en dessus (15) et (16) en mettant le polynôme égale à 0.

1. chargement thermique uniforme

La poutre fonctionnellement graduée est supposée initialement dans un endroit où la température est considérée ambiante ($T_0 = 300K$), et puis va subir un changement uniforme de cette dernière pour aboutir à une température finale avec un incrément T . L'élévation de température dans la direction de l'épaisseur est donnée par:

$$\Delta T = T - T_0 \quad (17)$$

6. Résultats et discussion

Les résultats numériques sont donnés en utilisant les solutions analytiques données précédemment. Pour analyser la vibration thermomécanique libre des poutres FGM simplement appuyées avec soumises des charges thermiques dans le plan, et cela pour différentes valeurs de l'indice de puissance, la charge d'écart thermique, ainsi que le nombre des modes de vibrations. La poutre FGM est composée d'acier (SUS 304) et alumine (Si3N4). On suppose que l'augmentation de température dans la surface métallique à la température de référence T_0 de la poutre FGM est de $T_m - T_0 = 5K$ [11]. Dans ce qui suit le paramètre adimensionnel est utilisé:

$$\bar{S} = \tilde{S} L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}, \quad (18)$$

Pour vérifier la validité du modèle étudié pour la vibration thermomécanique d'une poutre FGM, les résultats obtenus ont été comparés avec ceux qui sont disponibles obtenus dans la littérature par la solution analytique fournis par Im et al. [4], Excellent accord est obtenu entre les deux résultats.

Le tableau 1 exhibe une comparaison de la fréquence fondamentale obtenue à partir du modèle actuelle de FG poutres avec les résultats obtenus par Im et al. [4], pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur et indice de puissance p . Comme on peut le percevoir, les résultats sont en bon accord.

Tableau 1 Comparaison de la fréquence fondamentale non-dimensionnelle d'une poutre FGM avec différents indices de puissance

| L/h | Indice de puissance | | | | | | | | | |
|-----|---------------------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| | p=0 | | p=0.2 | | p=0.5 | | p=1 | | p=2 | |
| | Présent | im ek [4] | Présent | im ek [4] | Présent | im ek [4] | Présent | im ek [4] | Présent | im ek [4] |
| 5 | 5.3953 | 5.3953 | 5.0206 | 5.0219 | 4.5931 | 4.5936 | 4.1483 | 4.1483 | 3.7793 | 3.7793 |
| 20 | 5.4777 | 5.4777 | 5.0967 | 5.0980 | 4.6641 | 4.6645 | 4.2163 | 4.2163 | 3.8471 | 3.8471 |

La variation de fréquence naturelle adimensionnelle en fonction de la variation de la charge thermique et pour plusieurs valeurs l'indice de la fraction volumique (p) est présenté dans la Figure 2. On remarque la fréquence fondamentale naturelle tend a diminué avec l'augmentation de l'indice de puissance p . On peut voir aussi que l'augmentation de l'écart de température de chargement, les fréquences adimensionnelle de la poutre FG diminuent avec l'augmentation de la température jusqu'à atteindre ou approché a une valeur de zéro, et cela à la température critique. Cela est dû à cause de la réduction de la rigidité totale de la poutre, comme la rigidité géométrique s'affaiblit lorsque le chargement thermique dans le plan augmente.

Figure 3 montres l'effet de l'indice de puissance p sur la valeur maximale de la fréquence nondimensionnelle, et pour plusieurs valeurs d'écart du chargement thermique ($L/h=20$). On peut signaler que, la fréquence non-dimensionnelle se réduit d'un taux élevé dans le cas l'indice de puissance varie entre 0 à 3 par a port au cas où l'indice de puissance s'exprime entre 3 et 10. De plus, on perçoit que les fréquences réduisent en augmentant la valeur de la charge thermique, en raison de l'effet adoucissant de cette dernière sur la poutre FG et une élévation de la température augmente cet effet.

L'effet du nombre de mode de vibration-thermomécanique sur la valeur maximale de la fréquence adimensionnelle pour multitude de valeurs d'écart du chargement thermique au plan sont illustré dans la Figure 4. On voit sur cette figure que, l'augmentation de coefficient du mode de vibration entraine une augmentation de la fréquence fondamentale naturelle. Ainsi qu'une augmentation de la charge thermique engendre une diminution de la vibration libre de la poutre FGM. Et on peut dire que ce paramètre a un effet notable sur la fréquence fondamentale.

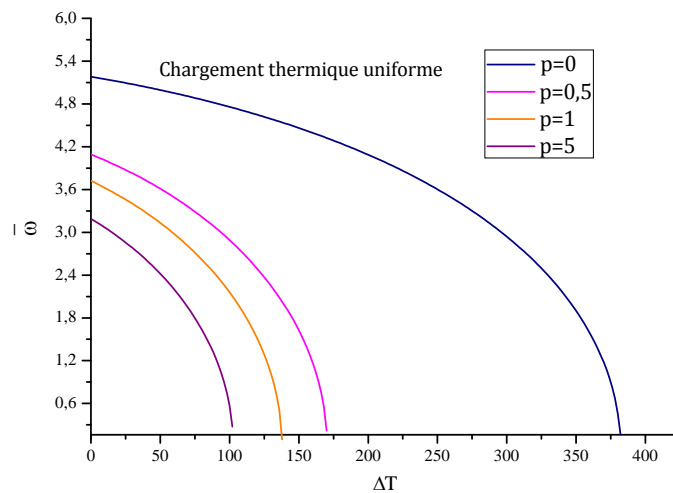


Figure 2. Effet de l'indice de puissance sur la fréquence naturelle on fonction du chargement thermique d'une poutre FGM

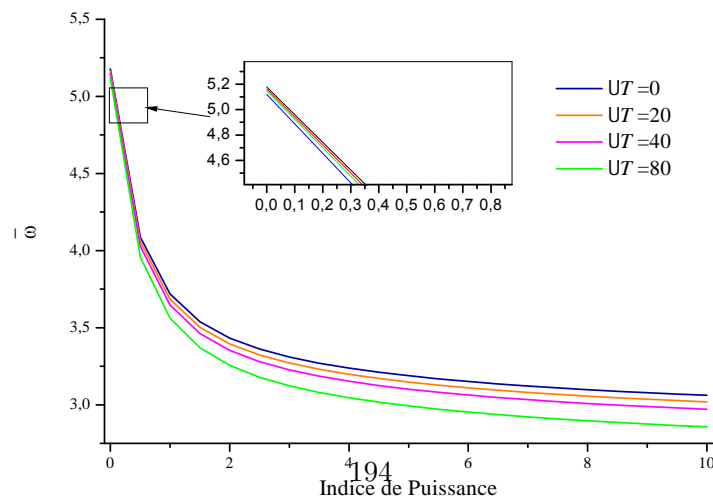


Figure 3. Effet du chargement thermique sur la fréquence naturelle on fonction de l'indice de puissance d'une poutre FGM

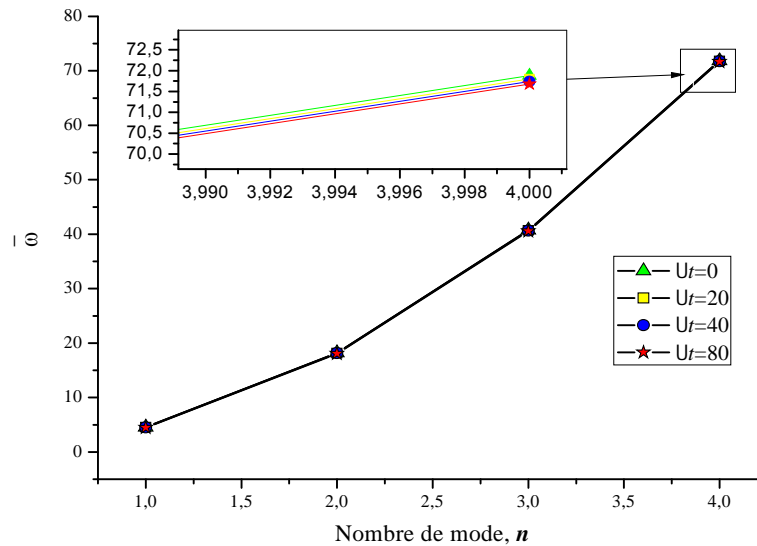


Figure 4. La variation de la première fréquence adimensionnelle en fonction du mode de vibration pour plusieurs valeurs du chargement thermique ($L/h=20$)

7. Conclusion

Dans ce travail, Une investigation sur la vibration thermomécanique des poutres fonctionnellement gradués dans un environnement thermique et soumises à des hausses de température uniformes a été présentée. Les propriétés thermomécaniques des poutres FG sont supposées être en fonctions à la fois de température et de l'épaisseur sur la base de la loi de mélange type puissance. Les équations différentielles du mouvement et les conditions aux limites associés sont dérivées en appliquant le principe d'Hamilton. La précision des résultats obtenus ont été validés avec celles disponibles dans la littérature. A la fin, on peut constater à partir de l'étude faite dans ce travail, que les différents indices de la fraction de volume, et de loi puissance, le chargement thermique, ainsi que les modes de vibrations ont un impact significatif sur la fréquence fondamentale.

8. Bibliographie

- [1] Koizumi M. *FGM activities in Japan*. Compos. Part B: Eng, 1997, vol. 28, n°1-2, pp.1-4.
- [2] Aydogdu M, Taskin V. *Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges*. Mater Des, 2010, vol.28, n°5, pp.1651–1656.
- [3] Li X.F. *A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams*. J. Sound Vib, 2008, vol. 318, n°4-5, pp. 1210-1229.
- [4] im ek M. *Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories*. Nud Eng Des, 2010, vol. 240, n°4, pp.697–705.
- [5] Thai H.T. and Vo T.P. *Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories*. Int. J. Mech. Sci, 2012, vol. 62, n°1, pp. 57-66.
- [6] Bouremama M. Houari M.S.A. Tounsi A. Kaci A. and Adda Bedia E.A. *A new first shear deformation beam theory based on neutral surface position for functionally graded beams*. Steel Compos. Struct, 2013, vol. 15, n°5, pp. 467-479.
- [7] Bourada M. Kaci A. Houari M.S.A. and Tounsi A. *A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams*. Steel Compos. Struct, Int. J, 2015, vol.8, n°2, pp. 409-423.
- [8] Ebrahimi F. Ghasemi F. Salari E. *Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities*. Meccanica, 2015, vol. 51, n°1, pp.223–249.
- [9] Bensaid I. Cheikh A. Mengouchi A. Kerboua B. *Static deflection and dynamic behavior of higher-order hyperbolic shear deformable compositionally graded beams*. Adv Mater. Resear, 2017, vol.6, n°1, pp.13-26.
- [10] Reddy JN, Chin CD. *Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates*. J Therm Stress, 1998, vol 21, n°6, pp.593–626.
- [11] Kiani Y, Eslami MR. *An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium*. Compos B Eng, 2013, vol. 45, n°1, pp.101–110.