

Théorie de déformation de cisaillement raffinée pour l'analyse des poutres sandwiches FGM

Latifa Ould Larbi¹, Lazreg Hadji², Nafissa Zouatnia³

¹ : *Université Hassiba Benbouali, Chlef, Algérie, latifaouldlarbi@gmail.com*

¹ : *Université Ibn Khaldoun, Laboratoire de Géomatique et Développement Durable, Tiaret, Algérie, had_laz@yahoo.fr*

³ : *Université Hassiba Benbouali, Laboratoire de Structures, Géotechnique et Risques, Chlef, Algérie, nissa.hadji@yahoo.com*

Résumé :

Ce travail porte sur l'étude de la vibration des poutres sandwiches en matériaux à gradient de propriété (FGM) en utilisant une théorie de cisaillement raffinée des poutres avec une nouvelle fonction de forme. Cette fonction satisfait les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la poutre. Dans cette étude on suppose que les propriétés matérielles varient selon l'épaisseur de la poutre sandwich seulement selon une distribution de loi de puissance (P-FGM) en terme de fraction de volume des contraintes tandis que le coefficient de poisson demeurant constant.

Deux types courants des poutres sandwiches en FGM sont considérés dans cette étude : sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène rigide et sandwich avec deux peaux FGM et cœur homogène souple. Les équations de mouvement pour la poutre sandwich en FGM ont été obtenues en utilisant le principe d'Hamilton. La solution analytique est obtenue en utilisant la méthode des variables séparés, et les fréquences de vibration sont trouvées en résolvant le problème de valeur propre. Les résultats numériques obtenus par cette étude pour le problème de vibration des poutres fonctionnellement graduée sont présentés et comparés à ceux disponibles dans la littérature.

Mots clé : Vibration, Matériau à gradient de propriété, solution des variables séparés, principe d'Hamilton.

1. Introduction

L'analyse des structures composites exige une bonne connaissance du comportement des matériaux, la théorie des structures, les critères de rupture, les méthodes numérique de résolution.

Ce travail est consacré à l'étude du comportement dynamique des poutres sandwich fonctionnellement graduées (FGM) en utilisant une théorie de cisaillement de déformation hyperbolique des poutres. La caractéristique la plus intéressante de cette théorie est qu'elle n'intervient pas le facteur de correction de cisaillement, et donne une variation parabolique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre. Dans ce chapitre on suppose que les propriétés des matériaux des faces externes de la poutre sandwich (deux peaux) sont variées dans la direction de l'épaisseur seulement selon une distribution de loi de puissance en fonction des fractions de volume des constituants. La couche centrale reste homogène et constituée d'un matériau isotrope. Ensuite, la présente théorie ainsi que le principe de Hamilton, sont utilisés pour extraire les équations de mouvement de la poutre sandwich fonctionnellement graduées 'FGM'. Les solutions analytiques pour la vibration libre sont obtenues. Des exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la présente théorie.

2. Théorie raffinée des poutres sandwiches en FGM

1. Les coordonnées et la géométrie de la poutre à gradient de propriété

Considérons une poutre rectangulaire en FGM d'épaisseur h de longueur L et de largeur b . Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur. Les faces supérieure et inférieure de la poutre sont à $z = \pm h/2$.

La poutre sandwich est composée de trois couche, Les ordonnées verticales de ces couches de bas vers le haut de la poutre sandwich FGM, sont désignées par $h_1 = h/2$, h_2 , h_3 , $h_4 = h/2$, respectivement.

Les couches de surface de la poutre sandwich (les deux peaux) sont réalisées en matériau isotrope ayant des propriétés matérielles différentes sans changement dans la direction z seulement. La couche centrale (le cœur) est constituée d'un matériau homogène, isotrope. Le rapport de la hauteur de chacune des couches du bas vers le haut est indiqué par la combinaison de trois chiffres, à savoir, " 1-0-1 ", " 2-1-2 " et ainsi de suite. Comme on le voit sur la figure.1 [Bennai 2015].

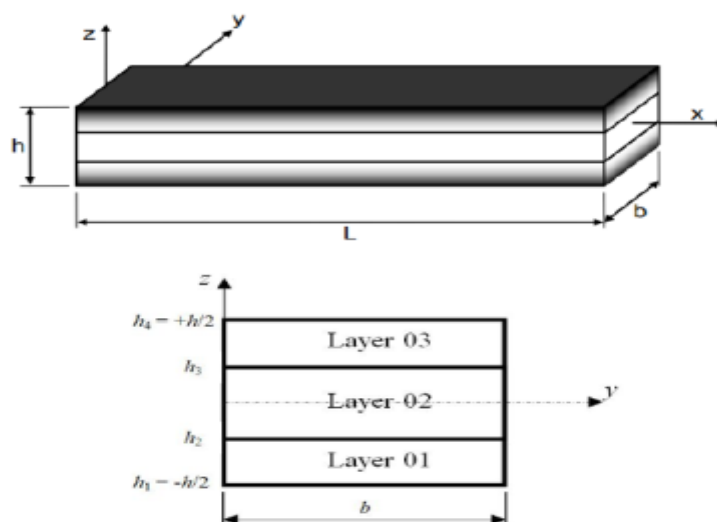


Figure 1. Coordonnées et géométrie de la poutre FG sandwich dans les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

2. Propriétés des matériaux

Les propriétés du FGM varient continuellement due au changement gradué de la fraction volumique des matériaux constitutifs (céramique et métal), généralement dans le sens de l'épaisseur. La fonction de loi de puissance est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux. La fraction volumique du FGM est supposé varier suivant l'épaisseur de la poutre selon une fonction simple en loi de puissance P-FGM :

$$V^{(1)} = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k, \quad z \in [h_0, h_1] \quad (1a)$$

$$V^{(2)} = 1, \quad z \in [h_1, h_2] \quad (1b)$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k, \quad z \in [h_2, h_3] \quad (1c)$$

Où, $V(n)$, $n = (1, 2, 3)$ désigne la fonction de la fraction volumique de la couche n ; k est l'indice de puissance qui décrit le profil de variation des matériaux suivant l'épaisseur.

Les propriétés matérielles effectives, comme le module de Young E , coefficient de Poisson ν , et la densité de masse ρ peuvent être exprimé par la règle de mélange :

$$P^{(n)}(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V^{(n)} \quad (2)$$

Où $P^{(n)}$ est la propriété matérielle effective du FGM de la couche n . P_1 et P_2 sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 dépendant de la fraction volumique $V(n)$, ($n = 1, 2, 3$).

3. Cinématique et équations constitutive

Le champ de déplacement utilisé dans ce travail est sous la forme suivante :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (3a)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (3b)$$

Où $f(z)$ est la fonction de cisaillement. la fonction $f(z)$ est choisi sous la forme [1] :

$$f(z) = z \left[1 + \frac{3\pi}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{3\pi}{2} h \tanh\left(\frac{z}{h}\right) \quad (3c)$$

Le champ de déformations se déduit des déplacements de l'équation (3) soit :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z k_x^b + f(z) k_x^s \quad (4a)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \gamma_{xz}^s \quad (4b)$$

Pour les FGM élastiques et isotropes, les relations constitutives peuvent être écrites comme :

$$\sigma_x^{(n)} = Q_{11}(z) \varepsilon_x \text{ et } \tau_{xz}^{(n)} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (5a)$$

Ou

$$Q_{11}(z) = E^{(n)}(z) \text{ et } Q_{55}(z) = \frac{E^{(n)}(z)}{2(1+\nu)} \quad (5b)$$

4. Equations de mouvement

Les équations de mouvement de la poutre FGM peuvent être exprimées en utilisant le principe d'énergie d'Hamilton. Le principe sous la forme analytique suivante [3]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (6)$$

Ou t est le temps; et t_1 et t_2 sont les temps initial et final, respectivement; δU est la variation virtuelle de l'énergie de déformation; δT est la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

En remplaçant les expressions de la variation des énergies dans l'équation (6) et en intégrant par partie suivant l'épaisseur de la poutre et le temps, et en rassemblant les coefficients δu_0 , δw_b , et δw_s , les équations de mouvement pour la poutre FGM sont obtenues :

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \frac{dw_b}{dx} - I_1 \frac{dw_s}{dx} \quad (7a)$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} = I_0 (w_b + w_s) + I_1 \frac{dw_b}{dx} - I_2 \frac{d^2 w_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (7b)$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{dQ}{dx} = I_0 (w_b + w_s) + J_1 \frac{dw_b}{dx} - J_2 \frac{d^2 w_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (7c)$$

Les équations (7) peuvent être exprimées en termes de déplacements (u_0, w_b, w_s) comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11}^s \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \frac{dw_b}{dx} - I_1 \frac{dw_s}{dx} \quad (8a)$$

$$B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} = I_0 (w_b + w_s) + I_1 \frac{dw_b}{dx} - I_2 \frac{d^2 w_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (8b)$$

$$B_{11}^s \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11}^s \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^s \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = I_0 (w_b + w_s) + J_1 \frac{dw_b}{dx} - J_2 \frac{d^2 w_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (8c)$$

5. Solution analytique

La solution exacte d'équation. (8a)-(8c) pour la poutre sandwich en FGM avec diverses conditions aux limites peut être construite. Les conditions aux limites pour un bord arbitraire avec simplement appuyée et encastré sont :

Encastré (C):

$$u_0 = w_b = \frac{\partial w_b}{\partial x} = w_s = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{à } x=0, L \quad (9a)$$

Simplement appuyée (S):

$$u_0 = w_b = w_s = 0 \quad \text{à } x=0,L \quad (9b)$$

La représentation suivante pour les grandeurs de déplacement, qui remplissent les conditions aux limites ci-dessus, est appropriée dans le cas de notre problème :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m X'_m e^{i\omega t} \\ W_{bm} X_m e^{i\omega t} \\ W_{sm} X_m(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Où U_m , W_{bm} et W_{sm} sont des paramètres à déterminer, ω est la fréquence propre associée au (m) ième mode propre, et $\lambda = m\pi / L$. La fonction $X_m(x)$ est proposée par Reddy (2004) [1], pour satisfaire au moins les conditions aux limites géométriques indiquées dans les équations. (9a) - (9b) et représente des formes approximatives de la poutre fléchi.

Substituer équation (10) dans l'équation (8), les solutions analytiques peuvent être obtenus, et la solution de la vibration libre peut être obtenu comme un problème de valeurs propres pour une valeur fixe de m, comme :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (11)$$

Avec

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}; [M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}; ([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\} \quad (12)$$

3. Résultats et discussions

Dans cette étude nous supposons que la poutre en FGM est faite d'un mélange de céramique et de métal dont la composition varie à travers l'épaisseur. Tel que la facette supérieur, c.à.d. à ($z = h/2$) est en 100% céramique Al_2O_3 (Alumine), tandis que la facette inférieur ($z = -h/2$) est faite en 100% métal (Aluminium) AL. Les propriétés mécaniques de ces deux matériaux sont :

Céramique (P_c : Alumina, Al_2O_3): $E_c = 380\text{GPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho_c = 3960\text{Kg/m}^3$.

Métal (P_m : Aluminium, Al): $E_m = 70\text{ GPa}$; $\nu = 0.3$; $\rho_m = 2702\text{Kg/m}^3$.

Les résultats numériques sont présentés sous forme des fréquences adimensionnelles. Le paramètre de fréquence adimensionnel est défini comme :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (13)$$

1. Validation des résultats de vibration des poutres sandwiches en FGM simplement appuyées et bi- encastrée

Les tableaux 1 et 2 donnent les résultats numériques de la vibration des poutres sandwiches utilisant la présente théorie de cisaillement raffinée en P-FGM simplement appuyée avec cœur rigide et homogène avec $L/h=5$ et $L/h=20$. Le tableau 1 considère les résultats des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre sandwich en P-FGM simplement appuyée avec cœur rigide et homogène ($L/h=5$). Le tableau 2 considère les résultats des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre sandwich en P-FGM simplement appuyée avec cœur rigide et homogène ($L/h=20$).

À partir des résultats présentés dans les deux tableaux, on peut constater que les résultats de la présente théorie de cisaillement raffinée sont presque identiques avec les résultats proposée par Vo et al 2014 [4] et Bennai et al. 2015 [5] et la théorie classique des poutres CBT. On remarque que les fréquences fondamentales démunie avec l'augmentation de l'indice de puissance k ce qui agit sur la rigidité de la poutre sandwich. Ainsi que la configuration 1-8-1 dans les poutres symétriques donne une fréquence de vibration maximale des poutres en FGM. (Lorsque k augmente le pourcentage de céramique dans la poutre diminue et le pourcentage du métal augmente qui conduit à une diminution de la rigidité de la poutre).

Les tableaux 3 et 4 montrent les résultats numériques de la vibration des poutres sandwiches utilisant la présente théorie de cisaillement raffinée simplement appuyée avec un cœur souple et homogène avec $L/h=5$ et $L/h=20$.

Dans ce cas, les fréquences fondamentales adimensionnelles augmentent avec l'augmentation de l'indice de puissance k à cause de l'augmentation de quantité de céramique. Après la comparaison des résultats des fréquences fondamentales adimensionnelles d'une poutre avec cœur rigide et cœur souple on a remarqué que les poutres entièrement en céramique donnent les plus grandes valeurs de la fréquence fondamentale adimensionnelle. La diminution de fréquence de vibration est faible avec l'augmentation de la quantité du métal.

Tableau 1 : Fréquence fondamentale adimensionnel $\bar{\omega}$ d'une poutre sandwich en P-FGM simplement appuyée avec cœur rigide et homogène ($L/h=5$).

k	Théories	$\bar{\omega}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	CBT	5.3953	5.3953	5.3953	5.3953	5.3953
	Vo et al. (2014)	5.1528	5.1528	5.1528	5.1528	5.1528
	Bennai et al. (2015)	5.1529	5.1529	5.1529	5.1529	5.1529
	Présente	5.1529	5.1529	5.1529	5.1529	5.1529
0.5	CBT	4.2640	4.3772	4.4796	4.6432	5.0469
	Vo et al. (2014)	4.1268	4.2351	4.3303	4.4798	4.8422
	Bennai et al. (2015)	4.1270	4.2353	4.3305	4.4799	4.8425
	Présente	4.1272	4.2354	4.3305	4.4797	4.8419
1	CBT	3.6706	3.8314	3.9859	4.2394	4.8661
	Vo et al. (2014)	3.5735	3.7298	3.8755	4.1105	4.6084
	Bennai et al. (2015)	3.5730	3.7302	3.8754	4.1108	4.6091
	Présente	3.5739	3.7301	3.8757	4.1104	4.6791
2	CBT	3.1377	3.3068	3.4976	3.8322	4.6835
	Vo et al. (2014)	3.0680	3.2365	3.4190	3.7334	4.5142
	Bennai et al. (2015)	3.0672	3.2368	3.4187	3.7336	4.5151
	Présente	3.0687	3.2370	3.4193	3.7333	4.5136
5	CBT	2.8082	2.8953	3.0741	3.4517	4.5031
	Vo et al. (2014)	2.7446	2.8439	3.0181	3.3771	4.3501
	Bennai et al. (2015)	2.7433	2.8436	3.0178	3.3770	4.3511
	Présente t	2.7457	2.8447	3.0186	3.3771	4.3495
10	CBT	2.7688	2.7839	2.9306	3.3018	4.4237
	Vo et al. (2014)	2.6932	2.7355	2.8808	3.2356	4.2776
	Bennai et al. (2015)	2.6918	2.7353	2.8806	3.2353	4.2782
	Présente	2.6945	2.7365	2.8815	3.2358	4.2769

Tableau 2 : Fréquence fondamentale adimensionnel $\bar{\omega}$ d'une poutre sandwich en P-FGM simplement appuyée avec cœur rigide et homogène ($L/h=20$).

k	Théories	$\bar{\omega}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	CBT	5.4777	5.4777	5.4777	5.4777	5.4777
	Vo et al. (2014)	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603
	Bennai et al. (2015)	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603
	Présente	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603
0.5	CBT	4.3244	4.4389	4.5429	4.7094	5.1212
	Vo et al. (2014)	4.3148	4.4290	4.5324	4.6979	5.1067
	Bennai et al. (2015)	4.3148	4.4290	4.5324	4.6979	5.1067
	Présente	4.3148	4.4290	4.5325	4.6979	5.1066
1	CBT	3.7214	3.8838	4.0404	4.2979	4.9365
	Vo et al. (2014)	3.7147	3.8768	4.0328	4.2889	4.9233
	Bennai et al. (2015)	3.7146	3.8768	4.0328	4.2889	4.9233
	Présente	3.7147	3.8768	4.0328	4.2889	4.9233
2	CBT	3.1812	3.3514	3.5443	3.8837	4.7501
	Vo et al. (2014)	3.1764	3.3465	3.5389	3.8769	4.7382
	Bennai et al. (2015)	3.1763	3.3465	3.5389	3.8769	4.7382
	Présente	3.1764	3.3466	3.5389	3.8769	4.7381
5	CBT	2.8483	2.9346	3.1149	3.4972	4.5661
	Vo et al. (2014)	2.8439	2.9310	3.1111	3.4921	4.5554
	Bennai et al. (2015)	2.8438	2.9310	3.1110	3.4921	4.5554
	Présente	2.8440	2.9311	3.1111	3.4921	4.5554
10	CBT	2.8094	2.8221	2.9696	3.3451	4.4851
	Vo et al. (2014)	2.8439	2.9310	3.1111	3.4921	4.5554
	Bennai et al. (2015)	2.8040	2.8188	2.9661	3.3406	4.4749
	Présente	2.8042	2.8189	2.9662	3.3406	4.4749

Tableau 3 : Fréquence fondamentale adimensionnel $\bar{\omega}$ d'une poutre sandwich en P-FGM simplement appuyée avec cœur souple et homogène ($L/h=5$).

k	Théories	$\bar{\omega}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	CBT	2.8034	2.8034	2.8034	2.8034	2.8034
	Vo et al. (2014)	2.6773	2.6773	2.6773	2.6773	2.6773
	Bennai et al. (2015)	2.6774	2.6774	2.6774	2.6774	2.6774
	Présente	2.6774	2.6774	2.6774	2.6774	2.6774
0.5	CBT	4.8058	4.6979	4.5838	4.3727	3.6851
	Vo et al. (2014)	4.8683	4.7368	4.6050	4.3814	3.7101
	Bennai et al. (2015)	4.4427	4.3046	4.1839	3.9921	3.4342
	Présente	4.4386	4.2993	4.1791	3.9898	3.4355
1	CBT	5.2408	5.1686	5.0670	4.8491	4.0231
	Vo et al. (2014)	5.1002	5.0012	4.8815	4.6512	3.9296
	Bennai et al. (2015)	5.1108	5.0190	4.8984	4.6677	3.9344
	Présente	4.8471	4.7090	4.5765	4.3601	3.7081
2	CBT	5.4609	5.4534	5.3881	5.1982	4.3118
	Vo et al. (2014)	5.1880	5.1603	5.0703	4.8564	4.1139
	Bennai et al. (2015)	5.1916	5.1644	5.0769	4.8646	4.1140
	Présente	5.0895	4.9864	4.8608	4.6347	3.9319
5	CBT	5.4992	5.5760	5.5669	5.4353	4.5566
	Vo et al. (2014)	5.1880	5.1603	5.0703	4.8564	4.1139
	Bennai et al. (2015)	5.1848	5.1966	5.1301	4.9326	4.1855
	Présente	5.1851	5.1507	5.0557	4.8405	4.1149
10	CBT	5.4647	5.5814	5.6026	5.5067	4.6537
	Vo et al. (2014)	5.1848	5.1966	5.1301	4.9326	4.1855
	Bennai et al. (2015)	4.4557	4.3184	4.1968	4.0016	3.4379
	Présente	5.1833	5.1886	5.1163	4.9152	4.1859

Tableau 4 : Fréquence fondamentale adimensionnel $\bar{\omega}$ d'une poutre sandwich en P-FGM simplement appuyée avec cœur souple et homogène ($L/h=20$).

k	Théories	$\bar{\omega}$				
		1-0-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	CBT	2.8462	2.8462	2.8462	2.8462	2.8462
	Vo et al. (2014)	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371
	Bennai et al. (2015)	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371
	Présente	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371	2.8371
0.5	CBT	4.8854	4.7762	4.6602	4.4453	3.7442
	Vo et al. (2014)	4.8579	4.7460	4.6294	4.4160	3.7255
	Bennai et al. (2015)	4.8582	4.7465	4.6297	4.4161	3.7257
	Présente	4.8576	4.7456	4.6290	4.4158	3.7256
1	CBT	5.3283	5.2564	5.1536	4.9317	4.0889
	Vo et al. (2014)	5.2990	5.2217	5.1160	4.8938	4.0648
	Bennai et al. (2015)	5.2996	5.2220	5.1165	4.8941	4.0647
	Présente	5.2986	5.2209	5.1152	4.8932	4.0649
2	CBT	5.5512	5.5462	5.4811	5.2884	4.3836
	Vo et al. (2014)	5.5239	5.5113	5.4410	5.2445	4.3542
	Bennai et al. (2015)	5.5244	5.5118	5.4415	5.2448	4.3541
	Présente	5.5235	5.5103	5.4398	5.2435	4.3543
5	CBT	5.5873	5.6696	5.6626	5.5303	4.6337
	Vo et al. (2014)	5.5645	5.6382	5.6242	5.4843	4.5991
	Bennai et al. (2015)	5.5648	5.6387	5.6247	5.4847	4.5991
	Présente	5.5643	5.6374	5.6229	5.4828	4.5991
10	CBT	5.5505	5.6739	5.6983	5.6029	4.7329
	Vo et al. (2014)	5.5302	5.6452	5.6621	5.5575	4.6960
	Bennai et al. (2015)	5.5303	5.6459	5.6627	5.5579	4.6961
	Présente	5.5301	5.6445	5.6609	5.5559	4.6960

4. Conclusion

Une théorie raffinée de trois variables a été développée pour l'analyse de vibration des poutres fonctionnellement graduées avec des propriétés arbitrairement variables suivant l'épaisseur selon la loi de puissance P-FGM. Cette théorie prend en compte les effets de cisaillement transversal et la distribution parabolique des contraintes de cisaillement dans les faces supérieures et inférieures de la poutre sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Les résultats numériques présentés peuvent être utilisés comme référence pour l'étude du comportement de la vibration des poutres sandwichs en matériau à gradient de propriété FGM. On a constaté que toutes les études comparatives ont montré que les fréquences adimensionnelles obtenues à l'aide de la présente théorie sont presque identiques avec les autres théories de cisaillement. La théorie proposée est précise et simple à utiliser pour traiter le comportement de vibration des poutres sandwichs en FGM.

5. Bibliographie

- [1] Kettaf, F.Z., Houari, M.S.A., Benguediab, Tounsi, A. (2013), "Thermal buckling of functionally graded sandwich plates using a new hyperbolic shear displacement model", *Steel and Composite Structures*, 15(4), 399-423.
- [2] Reddy, J.N., «A simple higher-order theory for laminated composite plates». *J ApplMech* 51(4), 745–52, 1984.
- [3] Thai, H.T. and Vo, T.P. (2012), "Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories", *Int. J. Mech. Sci.*, 62(1), 57-66.
- [4] Vo, T.P., Thai, H.T., Nguyen, T.K., Maheri, A. and Lee, J. (2014), "Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory", *Eng. Struct.*, 64, 12-22.
- [5] Bennai, R., Ait Atmane, H., Tounsi, A., (2015), "A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams", *Steel Compos. Struct.*, 19(3), 521-546.