COLLECTION MÉTHODES

ANALYSE FONDAMENTALE

ESPACES MÉTRIQUES, TOPOLOGIQUES ET NORMÉS

Deuxième édition revue et augmentée
avec exercices résolus

SZYMON DOLECKI

Licence 3
Master

MATHÉMATIQUES

hermann

Analyse Fondamentale

Collection Méthodes
dirigée par Philippe Fauvernier

www.editions-hermann.fr

ISBN : 978 2 7056 8741 0

Szymon Dolecki

Analyse Fondamentale

Espaces métriques, topologiques et normés

Deuxième édition revue et augmentée
avec exercices résolus

À la mémoire de mon ami et collaborateur
Stanisław Kurcyusz (1947-1978)

hermann
Depuis 1876

Introduction

Introduction à la deuxième édition

La première édition de cet ouvrage correspondait à la réalité d'un cours d'analyse en troisième année de licence, laquelle avec, entre autres, son faible volume horaire, avait entraîné des limitations par rapport à une conception idéale d'un tel livre.

Cette édition intègre quelques thèmes initialement délaissés ou réduits, par exemple, les théorèmes de Tietze, Stone-Weierstraß, de métrisabilité d'Urysohn, de Sierpiński sur l'espace de Baire. Le théorème de Hahn-Banach, originellement présenté dans le cadre normé, est formulé désormais dans celui des semi-normes, permettant d'en déduire des théorèmes de séparation pour les parties convexes et non plus seulement pour les parties linéaires. La compactification de Čech-Stone intègre l'annexe sur les espaces topologiques compacts. Deux nouvelles annexes traitent la métrisation des espaces topologiques et les espaces duaux des espaces fonctionnels. J'espère qu'ainsi la nouvelle édition deviendra plus complète et épanouie.

Le livre est conçu de telle sorte qu'on puisse le lire à plusieurs niveaux d'avancement. Le lecteur s'intéressant principalement aux espaces métriques peut omettre le chapitre III sur les espaces topologiques sans affecter la compréhension des aspects métriques de l'ouvrage. Je cherchais à rendre les plus simples que je pouvais les sections initiales de tous les chapitres, afin de faciliter une première lecture au niveau plus élémentaire. D'autres sections et surtout les annexes permettent un abord plus approfondi.

Aux professeurs Gabriele H. Greco, Frédéric Mynard, Jerry Vaughan, qui m'avaient déjà prodigué leurs suggestions sur la première édition, s'est joint cette fois le professeur Ahmed Bouziad (Université de Rouen). Je leur exprime ma reconnaissance pour leurs précieux conseils. Je sais gré au professeur Jerzy Dydak (University of Tennessee, Knoxville) pour des élucidations concernant l'usage des partitions dans la théorie de métrisation.

Je suis reconnaissant à mon collègue Jérôme Laurens qui a continué à m'épauler face à des subtilités informatiques liées à la mise en page.

Je remercie mon ancien étudiant Yann Petot, agrégé de mathématiques, pour la minutieuse relecture de certaines parties nouvelles de cette édition.

La plupart des exercices sont corrigés à la fin de ce volume.

Des erreurs décelées dans la première édition ont été corrigées et des imperfections redressées. Mais d'autres vont inéluctablement ressurgir. Je serais donc reconnaissant pour tout signalement d'éventuels défauts à l'adresse

dolecki@u-bourgogne.fr

Un possible errata paraîtrait au

http://dolecki.perso.math.cnrs.fr

Dijon, juin 2013 Szymon Dolecki

Introduction à la première édition

Ce livre a émergé autour du cours *Analyse Fondamentale* que j'enseigne en troisième année de Licence de Mathématiques à l'Université de Bourgogne depuis 2009/2010. Son programme se résume ainsi : espaces métriques et normés. Les notions topologiques y sont traitées essentiellement dans le contexte des espaces métriques. Cependant, afin de donner une perspective nécessaire à la compréhension des concepts métriques et topologiques, il faut dépasser le cadre des espaces métriques. C'est pourquoi on étudie les espaces topologiques généraux en soulignant les phénomènes nouveaux par rapport aux espaces topologiques métrisables.

On commence en esquissant la théorie des ensembles, dont on utilisera les concepts de relation et de cardinalité. On procède ensuite à partir d'une unique abstraction qui nous transporte du cadre des espaces euclidiens, familiers aux étudiants de la Licence 2, dans le domaine des espaces métriques, dont on étudie des classes principales (espaces séparables, compacts, complets et connexes), en découvrant des espaces universels[1], dont tout espace métrique (respectivement, métrique séparable) est un sous-espace, ou d'autres, dont tout compact est une image continue. L'abstraction de la structure vectorielle, permet d'étudier les espaces métriques avec beaucoup plus d'aisance qu'avec les contraintes supplémentaires d'une autre structure.

On étudie ensuite les espaces vectoriels avant de les munir des métriques compatibles avec leur structure vectorielle (espaces normés) et d'y ajouter la complétude (espaces de Banach), en profitant des acquis de l'étude des espaces métriques complets. On se focalise enfin sur la classe des espaces munis de produit scalaire qui les rendent complets (espaces de Hilbert), où la notion d'orthogonalité nous approche de nos intuitions initiales des espaces euclidiens, en concluant à l'universalité (parmi les espaces de Hilbert) de l'espace des fonctions carré-sommables.

On a ici un exemple typique de la démarche mathématique. La notion d'espace métrique est abstraite. On étudie ses propriétés. Les espaces normés forment une classe particulière des espaces métriques. Ils seront examinés par la suite. À la fin de cette étude, on caractérisera les espaces métriques comme

1. L'espace des fonctions continues avec la norme supremum, le cube de Hilbert et le cube de Cantor.

des sous-espaces des espaces normés (de fonctions continues avec la norme sup).

Je voudrais remercier les professeurs Gabriele H. Greco (Università di Trento), Frédéric Mynard (Georgia Southern University, Statesboro) et Jerry Vaughan (University of North Carolina, Greensboro) pour leurs précieuses suggestions qui ont contribué à l'amélioration de cet ouvrage. Je remercie également mon collègue Jérôme Laurens, Maître de Conférences à l'Université de Bourgogne, qui, grâce à son savoir informatique, a pu affiner la mise en page. Je suis reconnaissant à Monsieur Yann Petot, étudiant de l'Université de Bourgogne, qui a eu la gentillesse de relire le manuscrit et de me signaler des erreurs de frappe et d'autres imperfections.

Avertissement

Des observations historiques accompagnent le discours mathématique sans aucune prétention d'exhaustivité. Quelques photographies contribueraient à révéler un peu d'aspect humain de la création mathématique.

Les photographies ont été importées de l'Internet dans la conviction qu'elles soient du domaine public, pour la plupart du site du *MacTutor History of Mathematics Archive* de John O'Connor et Edmund F. Robertson de la University of St. Andrews en Écosse :

`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/index.html`

La photographie de Stefan Banach a été reproduite avec la permission des éditeurs de *Stefan Banach - Remarkable life, Brilliant mathematics*, E. Jakimowicz et A. Miranowicz, éditeurs, Gdańsk University Press and Adam Mickiewicz University Press, 2007.

Les deux annexes, dépassant le programme, peuvent apporter une perspective plus ample à un lecteur curieux en l'introduisant à la topologie générale et à la théorie des ensembles.

(1) Parmi les exercices suivant chaque chapitre il y a ceux correspondant à un minimum indispensable des connaissances. Ils seront indiqués par ($\star$). Naturellement certains d'entre eux ne sont que des reformulations des propositions ou des exemples de ce chapitre.

(2) On donne les corrigés de quelques exercices (peut-être un peu plus difficiles) en bas de page. Quelques exercices plus difficiles sont indiqués par (!).

(3) Certaines propositions formulées pour les espaces métriques, mais valables aussi pour les espaces topologiques, sont marquées (**top**). Il s'ensuit que l'on peut donner une démonstration alternative en termes purement topologiques. Pour souligner qu'un fait n'est pas vrai dans le cadre topologique général, on le marque avec (**metr**).

(4) Le matériel des annexes est hors programme.

Dijon, octobre 2010 — Szymon Dolecki

Quelques règles et conventions

Définitions. L'expression $\alpha := \beta$ signifie que α est défini par β.

Abréviations. Afin d'éviter une multiplicité de parenthèses dans des formules, nous en omettons certaines suivant quelques règles de priorité :

(1) opérations notées en exposant,
(2) opérateurs qui précédent,
(3) opérations ensemblistes.

Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}\, A \cap B \ &: = (\mathrm{cl}\, A) \cap B, \\ \mathrm{cl}\, A^c \ &: = \mathrm{cl}\,(A^c)\,, \\ \mathrm{cl}\, A^c \cap B \ &: = (\mathrm{cl}(A^c)) \cap B. \end{aligned}$$

Numérotation. Les formules sont numérotées chapitre par chapitre sans référence à la section, par exemple, **(VII.3)** est la troisième formule numérotée du septième chapitre et **(B.8)** est la huitième formule numérotée de l'annexe B.

Il existe également des formules étiquetées, par exemple, **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, **(*)** ou **(inégalité)**. Puisque les mêmes étiquettes peuvent se répéter à plusieurs endroits, une référence éventuelle à une étiquette se situe dans une proximité immédiate de celle-ci et concerne sa dernière occurrence.

La numérotation des énoncés, comme propositions, théorèmes, lemmes, exemples, etc. est effectuée par chapitres avec la référence à la section, mais pas au chapitre, par exemple, la **Proposition 3.5.** est la cinquième des propositions, théorèmes, etc. de la troisième section d'un chapitre donné. Si l'énoncé suivant est un lemme se trouvant dans la même section, il apparaît comme le **Lemme 3.6.**, s'il est dans la section suivante du même chapitre, il apparaît comme le **Lemme 4.1.** et s'il est dans le chapitre suivant, il apparaît comme le **Lemme 1.1.**

Les sections d'exercices ne portent aucun numéro et les exercices qu'elles contiennent sont numérotés dans leur section, par exemple, **(5)**, **(6)**, **(7)**. Si l'exercice suivant est dans le même chapitre, donc dans la section d'exercices, il est **(8)**, mais s'il est dans le chapitre suivant, donc le premier de la section des exercices de ce chapitre, il devient **(1)**.

Références. Les références à des énoncés à l'intérieur d'un chapitre ne portent pas l'indication du chapitre même, par exemple, on parle du "**théorème 2.1 de Cantor**" quand il est évoqué dans le chapitre VI, car il constitue le premier énoncé de la deuxième section du sixième chapitre. On parlera du "**théorème VI.2.1 de Cantor**" au chapitre X, car il était énoncé à l'extérieur du dixième chapitre.

Dans les références de la dernière annexe, consacrée aux solutions des exercices, on indique toujours le chapitre d'un énoncé ou d'un exercice cités, car tous ces énoncés et exercices ont été formulés en dehors de cette annexe.

Table des matières

CHAPITRE I

Théorie des ensembles

1. Motivation

Jusqu'au XIX^e siècle les mathématiques furent développées à l'aide d'un langage informel, mélangeant des expressions mathématiques avec celles de la langue courante. Ainsi le discours mathématique ne pouvait pas éviter des ambiguïtés présentes dans les langues naturelles, car l'interprétation sémantique n'y est pas univoque. D'où de nombreux cas d'erreurs dans des œuvres mathématiques de l'époque.

La nécessité de rigueur fut ressentie par plusieurs grands esprits, comme Georg Cantor (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872-1970) et autres. Nous leur sommes redevables pour la création du langage mathématique moderne rigoureux, celui de la théorie des ensembles.

David Hilbert (1862-1943) écrivait de cette contribution «Que personne ne puisse nous chasser du paradis que Cantor nous a bâti» [1]. Plus tard, en parlant au Congrès des Mathématiciens à Bologne en 1928 du langage formel de Peano, Hilbert disait que c'était un outil essentiel pour sa théorie de la démonstration [2].

FIGURE I.1. Georg Cantor, Giuseppe Peano et Bertrand Russell

La plupart des notions et des résultats concernant les nombres cardinaux et ordinaux évoqués dans ce chapitre, sont dus à Cantor.

1. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

2. [...] ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie [ist] die Begriffsschrift ; wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, Peano, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben.

2. Fondements

Une théorie déductive est fondée sur des *notions primitives*, autrement dit non définies, et des propositions primitives appelées *axiomes*, c'est-à-dire non démontrées mais déclarés valables. Les notions et propositions primitives sont en nombre fini. La signification d'une notion primitive est donnée indirectement par les axiomes qui la concernent.

Toute notion d'une théorie déductive est définie, moyennant des règles syntaxiques, à partir des notions ayant déjà une signification. Toute proposition de la théorie est déduite des propositions retenues vraies, moyennant des règles logiques inférentielles finies.

Une telle procédure est récursive. Elle nécessite donc des notions et des propositions primitives, car si toute notion était définie par d'autres notions ou toute proposition était une conséquence d'autres propositions, on n'arriverait pas, en reculant à l'infini, à une signification [3]. Une théorie déductive est cohérente si elle ne contient pas de propositions contradictoires [4].

Dans la théorie des ensembles, la notion d'*ensemble* est primitive. Un ensemble est déterminé par ses *éléments* (*cf.*, l'axiome d'extensionalité).

À partir de deux formules élémentaires $x \in y$ (*x appartient à y*) et $x = y$ (*x est égal à y*), on construit des formules moyennant des *connectives* logiques :

$$\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow,$$

respectivement, la *négation*, l'*alternative*, la *conjonction*, l'*implication* et l'*équivalence* et les deux *quantificateurs*, *existentiel* $\exists$ et *universel* $\forall$. Par exemple, si $\alpha, \beta, \varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des propositions, alors $\neg\alpha \vee \beta$, $\exists_x \varphi(x)$, $\forall_x(\varphi(x) \Longrightarrow \psi(x))$ sont des propositions formées à partir des propositions précédentes à l'aide des connectives et quantificateurs [5].

On définit l'*inclusion* $A \subset B$ par $x \in A \Rightarrow x \in B$ pour tout x.

Une liste d'axiomes fonde la théorie. On utilise d'habitude le système de *Zermelo-Fraenkel* avec l'*axiome du choix (ZFC)*.

On n'étudie pas ici la théorie des ensembles de façon systématique. Disons seulement que parmi les axiomes de ZFC, il y a celui d'*extensionalité*, disant que $X = Y$ si et seulement si

$$z \in X \Longleftrightarrow z \in Y,$$

pour tout z. L'axiome de l'*union* dit que pour tout ensemble (d'ensembles) X, il existe un ensemble $Y := \bigcup X$ tel que

$$y \in \bigcup X \Longleftrightarrow \underset{A \in X}{\exists}\ y \in A.$$

---

3. Une telle procédure est une arborescence avec des (multiples) racines.

4. En 1931 Kurt Gödel a démontré que le théorie des ensembles contient des propositions, qui ne sont pas *décidables*, c'est-à-dire que l'on ne peut ni démontrer ni infirmer.

5. D'ailleurs, certaines de ces formules peuvent être écrites moyennant d'autres, par exemple, $(\alpha \Longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$.

L'axiome de la *puissance* affirme que pour tout ensemble X, il existe l'ensemble 2^X de toutes les parties de X,

$$Y \in 2^X \Longleftrightarrow Y \subset X,$$

etc. Bien sûr, $\varnothing, X \in 2^X$ pour tout X. Une partie A de X est dite *propre* si $A \neq \varnothing$ et $A \neq X$.

L'axiome de *séparation* dit que pour toute formule $\varphi(x)$ et tout ensemble X, il existe l'ensemble

$$\{x \in X : \varphi(x)\}.$$

La restriction de la formule à un ensemble est ici essentielle. En général, il n'existe pas l'ensemble de tous les x qui vérifie $\varphi(x)$.

Exemple 2.1 (Paradoxe de Russell). Il n'existe pas l'ensemble de tous les ensembles X pour lesquels $X \notin X$. Effectivement, si Y était un tel ensemble, alors, par définition, $Y \in Y$ si et seulement si $Y \notin Y$.

Comme conséquence, il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles. Effectivement, s'il existait un tel ensemble U, alors selon l'axiome de séparation, $Y := \{X \in U : X \notin X\}$ serait un ensemble, d'où la contradiction notée auparavant.

Cependant on peut parler de la *classe* de tous les ensembles, en traitant le terme *classe* comme externe à la théorie des ensembles.

Enfin, l'*axiome du choix* affirme que

Axiome 2.2 (Peano-Zermelo). *Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une application $f : X \to \bigcup X$ telle que $f(A) \in A$ pour tout $A \in X$.*

On attribue généralement la formulation de cet axiome à E. Zermelo [**34**] de 1904, mais il fut déjà formulé par G. Peano dans [**26**] en 1890.

Un élément u d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$ est dit *maximal* si $x \geq u$ implique que $x = u$.

Théorème 2.3 (Zorn-Kuratowski). *Soit X un ensemble ordonné par $\leq$. Si pour toute partie totalement ordonnée L de X, il existe $w \in X$ tel que $l \leq w$ pour tout $l \in L$, alors pour tout $x \in X$ il existe un élément maximal $u \in X$ tel que $x \leq u$.*

La preuve de ce théorème (dans le cadre de ZFC) sera donnée dans l'annexe A (théorème A.3.11). En réalité, il est équivalent à l'axiome 2.2 du choix dans ZF.

Les propositions logiques correspondent à des opérations sur les parties d'un ensemble; si $A := \{w \in W : \varphi(w)\}$ et $B = \{w \in W : \psi(w)\}$, alors on a, respectivement,

$$\begin{aligned} A^c := W \setminus A &= \{w \in W : \neg\varphi(w)\}, \\ A \cup B &= \{w \in W : \varphi(w) \vee \psi(w)\}, \\ A \cap B &= \{w \in W : \varphi(w) \wedge \psi(w)\}, \\ A \subset B &\Longleftrightarrow \big(\underset{w\in W}{\forall}\ \varphi(w) \Rightarrow \psi(w)\big), \\ A = B &\Longleftrightarrow \big(\underset{w\in W}{\forall}\ \varphi(w) \Longleftrightarrow \psi(w)\big). \end{aligned}$$

Si $A(x) := \{w \in W : \varphi(x,w)\}$, alors l'union et l'intersection de $A(x)$ pour $x \in X$, sont définies moyennant des quantificateurs existentiel et universel respectivement :

$$\bigcup\nolimits_{x\in X} A(x) = \Big\{w \in W : \underset{x\in X}{\exists}\ \varphi(x,w)\Big\} \text{ et}$$
$$\bigcap\nolimits_{x\in X} A(x) = \Big\{w \in W : \underset{x\in X}{\forall}\ \varphi(x,w)\Big\}.$$

Ainsi

$$y \in \bigcup\nolimits_{x\in X} Y_x \Longleftrightarrow \underset{x\in X}{\exists}\ y \in Y_x,$$
$$y \in \bigcap\nolimits_{x\in X} Y_x \Longleftrightarrow \underset{x\in X}{\forall}\ y \in Y_x,$$

Le produit $\prod_{x\in X} Y_x$ est défini comme l'ensemble de $f : X \to \bigcup_{x\in X} Y_x$ telles que $f(x) \in Y_x$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$\prod\nolimits_{x\in X} Y_x := \Big\{f \in (\bigcup\nolimits_{x\in X} Y_x)^X : \underset{x\in X}{\forall}\ f(x) \in Y_x\Big\}.$$

En particulier, si $Y = Y_x$ pour tout $x \in X$, alors $\prod_{x\in X} Y = Y^X$.

Notons que l'axiome 2.2 du choix affirme que si $Y_x \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$, alors $\prod_{x\in X} Y_x \neq \varnothing$.

Pour tout $w \in X$, on définit la *projection* π_w est une application

$$\pi_w : \prod\nolimits_{x\in X} Y_x \to Y_w$$

définie par $\pi_w(f) := f(w)$.

Si $A \subset X$, alors la fonction $\chi_A : X \to \{0,1\}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \notin A \end{cases} \tag{I.1}$$

s'appelle la *fonction caractéristique* de A. Si $f : X \to \{0,1\}$, alors $f = \chi_A$, où $A := \{x \in X : f(x) = 1\}$. Il existe donc une correspondance biunivoque entre les parties de X et les fonctions de X dans un ensemble de deux éléments. C'est pourquoi on note 2^X l'ensemble de toutes les parties de X.

3. Relations, applications

Il découle des axiomes de la théorie des ensembles que pour deux ensembles X, Y il existe leur *produit* $X \times Y := \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$. Si $R \subset X \times Y$, alors on dit que R est une *relation entre* X *et* Y. Traditionnellement on note $(x,y) \in R$ par xRy.

Pour tout $A \subset X$, l'*image* RA de A par R est définie par

$$RA := \{y \in Y : \underset{x \in A}{\exists} (x,y) \in R\}.$$

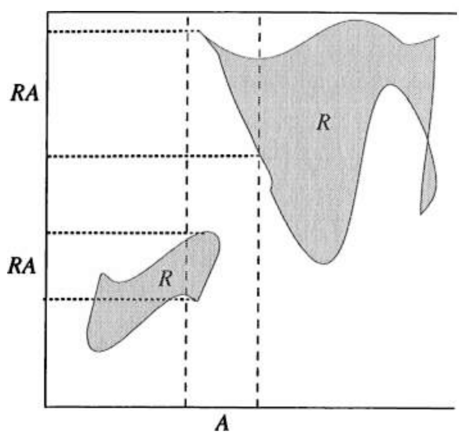


FIGURE I.2. L'image RA d'un ensemble A par la relation R (ici ayant deux composantes connexes) a, dans ce cas, également deux composantes.

Observons que l'image d'une partie de X par une relation $R \subset X \times Y$ est une partie de Y, donc un ensemble. Il s'ensuit que l'image $R\{x\}$ du singleton $\{x\}$ est un ensemble. Notons que

$$RA = \bigcup_{x \in A} R\{x\}.$$

La *relation réciproque* R^{-1} de R (entre Y et X) est définie par

$$R^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}.$$

Comme R^{-1} est une relation, les symboles $R^{-1}B$ et $R^{-1}\{y\}$ ont un sens précis pour tout $B \subset Y$ et tout $y \in Y$. Bien sûr,

$$x \in R^{-1}\{y\} \iff y \in R\{x\}.$$

Pour tous $R \subset X \times Y, A \subset X$ et $B \subset Y$, les formules suivantes sont équivalentes :

$$RA \cap B \neq \varnothing, \tag{I.2}$$

$$A \cap R^{-1}B \neq \varnothing, \tag{I.3}$$

$$(A \times B) \cap R \neq \varnothing. \tag{I.4}$$

Si $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$, alors la *relation composée* $S \circ R$ (entre X et Z) est définie par

$$(S \circ R)A := S(RA)$$

pour tout $A \subset X$. Par conséquent, on abrège $SR := S \circ R$. Il s'ensuit que $z \in (S \circ R)\{x\}$ si et seulement s'il existe $y \in R\{x\}$ tel que $z \in S\{y\}$, c'est-à-dire $S^{-1}\{z\} \cap R\{x\} \neq \varnothing$.

Une relation $R \subset X \times Y$ est dite *surjective* si $RX = Y$; *injective* si $R\{x_0\} \cap R\{x_1\} \neq \varnothing$ implique $x_0 = x_1$. En contraposant la définition, on obtient

Proposition 3.1. *Une relation est injective si et seulement si $x_0 \neq x_1$ implique $R\{x_0\} \cap R\{x_1\} = \varnothing$.*

Nous avons déjà employé des applications sans en donner une définition formelle. Nous allons maintenant définir une application à partir d'une relation particulière. Une relation $R \subset X \times Y$ s'appelle *applicationnelle* si pour tout $x \in X$ il existe un élément $\widehat{R}(x)$ de Y tel que

$$R\{x\} = \{\widehat{R}(x)\}, \tag{I.5}$$

c'est-à-dire, si R est une relation applicationnelle, alors elle définit une *application* $\widehat{R} : X \to Y$ telle que (I.5).

On souligne que l'image d'une partie d'un ensemble par une application est un ensemble. En particulier, si R est applicationnelle, alors $R\{x\}$ est un singleton. Par contre, l'image $\widehat{R}(x)$ de x par l'application $\widehat{R}$ correspondante est un élément de Y.

On désigne par Y^X l'ensemble de toutes les applications de X dans Y. Si $f : X \to Y$ est une application, alors f définit une relation $\widetilde{f} \subset X \times Y$ telle que $\widetilde{f}\{x\} := \{f(x)\}$. Bien entendu, $\widetilde{f}^{-1}$ est également une relation (entre Y et X).

Proposition 3.2. *Une relation $R \subset X \times Y$ est applicationnelle si et seulement si la relation réciproque R^{-1} est injective et surjective.*

Si $f : X \to Y$, alors on appelle

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

le *graphe* de f.

Une application f est *injective* (respectivement, *surjective*) si la relation applicationnelle correspondante l'est. Par conséquent, f est *injective* si $f(x_0) = f(x_1)$ implique $x_0 = x_1$; *surjective* si $f(X) = Y$. Une application est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Si f est injective, alors $\widetilde{f}^{-1}$ est une relation applicationnelle entre $f(X)$ et X ; si f est bijective, alors $\widetilde{f}^{-1}$ est une relation applicationnelle de Y dans X (d'après la proposition I.3.2). On note f^{-1} l'application correspondante.

Si $f : X \to Y$ est une application, $X \subset X_1$ et $Y \subset Y_1$, alors on appelle un *prolongement* de f, toute application $f_1 : X_1 \to Y_1$ qui coïncide avec f sur X, c'est-à-dire $f_1(x) = f(x)$ pour tout $x \in X$.

Remarque 3.3. Dans la notation traditionnelle, $f(A)$ désigne l'ensemble $\{f(x) : x \in A\}$, c'est-à-dire $\widetilde{f}A$ dans notre notation ; de même, traditionnellement, $f^{-1}(B)$ dénote $\{x \in X : f(x) \in B\}$, c'est-à-dire $\widetilde{f}^{-1}B$ dans notre notation. La notation traditionnelle n'échappe pas à des incohérences, par exemple, $f^{-1}(y)$ peut signifier l'image réciproque de y par f (qui est un ensemble), ainsi que la valeur de y par l'application réciproque de f quand f est injective (qui est un élément). Néanmoins, afin de ne pas alourdir l'écriture, nous allons employer la notation traditionnelle, évitant des ambiguïtés grâce au contexte.

La *relation diagonale* $I := I_X \subset X \times X$ est définie par

$$I_X := \{(x,y) \in X \times X : x = y\}. \tag{I.6}$$

Autrement dit, $I_X = \{(x,x) : x \in X\}$. Bien entendu $I_X\{x\} = \{x\}$ pour tout $x \in X$ et, par conséquent, toute relation diagonale est applicationnelle, et l'application correspondante est l'*identité*, c'est-à-dire $i_X : X \to X$ telle que $i_X(x) := x$ pour tout $x \in X$.

Une relation $R \subset X \times X$ est dite *réflexive* si $I \subset R$, *symétrique* si $R^{-1} = R$, *antisymétrique* si $R \cap R^{-1} \subset I$, *transitive* si $RR \subset R$. Rappelons qu'une relation $R \subset X \times X$ est dite d'*équivalence* si elle est réflexive, transitive et symétrique, et d'*ordre (large)* si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

Soit R une relation d'équivalence sur X. On note X/R le *quotient* de X par R, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalences de R. Autrement dit,

$$X/R := \{R\{x\} : x \in X\}.$$

Puisque R est réflexive, $X = \bigcup_{x \in X} R\{x\}$. Définissons l'*application quotient* $\pi_R : X \to X/R$ par $\pi_R(x) := R\{x\}$. Autrement dit, π_R associe à tout $x \in X$ sa classe d'équivalence $R\{x\}$ par rapport à R. On voit facilement que

Proposition 3.4. *Toute application quotient est surjective.*

Exemple 3.5. Pour toute application $f : X \to Y$, la relation $\approx$ sur X définie par

$$x_0 \approx x_1 \iff f(x_0) = f(x_1), \tag{I.7}$$

est une relation d'équivalence, car la famille $\left\{f^{-1}\{y\} : y \in Y\right\}$ consiste de parties disjointes deux à deux, dont l'union est égale à X. La classe d'équivalence de x est $f^{-1}\{f(x)\}$. On note X/f le quotient par rapport à cette relation.

4. Suites

Une *suite* sur X est une application d'un ensemble dénombrable infini dans X. Si $f : A \to X$ est une suite (sur X), alors souvent on note $x_n := f(n)$ pour tout $n \in A$, et on désigne f comme $(x_n)_{n \in A}$. D'habitude l'ensemble des indices d'une suite est $\mathbb{N}$ tout entier et, dans ce cas, on la note $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_n$. Souvent l'ensemble des indices est une partie infinie de $\mathbb{N}$, par exemple,

$$\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} : m \leq n\},$$

où $m \in \mathbb{N}$.[6]

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni de son ordre naturel. Cet ordre intervient dans la définition classique de la convergence d'une suite dans un espace métrique ou topologique, mais, comme nous verrons, il n'y est pas essentiel. En particulier, la permutation des indices d'une suite n'influe pas sur sa convergence. Nous allons décrire la convergence d'une suite en terme des parties cofinies de l'ensemble des indices.

Une partie A d'un ensemble Y est dite *cofinie* si $X \setminus A$ est fini.

Considérons les suites suivantes

(i) $$(\tfrac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}_1},$$

(ii) $$(0)_{n \in \mathbb{N}},$$

(iii) $$(\max\{\tfrac{(-1)^n}{n}, 0\})_{n \in \mathbb{N}_1}$$

(iv) $$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ fois}}, \ldots$$

(v) $$1, 1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ termes}}, \ldots$$

sur l'ensemble $\mathbb{R}$ (des nombres réels). Il y a une différence notable entre les suites ci-dessus. On considère les images réciproques des éléments de l'image de la suite.

(i) L'image réciproque de tout élément est un singleton, c'est-à-dire la suite est *injective*.

(ii) L'image réciproque du seul élément de l'image est infinie.

(iii) Il y a un élément, dont l'image réciproque est infinie et l'infinité d'autres ont les images réciproques finies[7].

(iv) L'image réciproque de tout élément est finie.

(v) Les images réciproques de tous les éléments sont infinies.

On dira qu'une suite f sur X est *libre* si

$$\{n : f(n) = x\}$$

6. En particulier, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où $\mathbb{N}^*$ est une notation traditionnelle assez répandue.

7. Par conséquent, l'image de la suite est infinie.

est finie pour tout $x \in X$.[8] Notons que l'image d'une suite libre est nécessairement infinie.

On appelle le *noyau* d'une suite $(x_n)_n$ l'ensemble

$$\ker_{n\to\infty} x_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x_k : k \geq n\}. \tag{I.8}$$

C'est un ensemble dénombrable (infini ou fini). Comme une conséquence immédiate des définitions,

Proposition 4.1. *Pour que $x \in \ker_{n\to\infty} x_n$ il faut et il suffit que $\{n \in \mathbb{N} : x = x_n\}$ soit infini.*

D'après la proposition 4.1,

Corollaire 4.2. *Une suite est libre si et seulement si son noyau est vide.*

Une suite $(x_n)_n$ est dite *principale* si son noyau $\ker_{n\to\infty} x_n$ n'est pas vide et $\{n : x_n \notin \ker_{k\to\infty} x_k\}$ est fini. Une suite $(x_n)_n$ est dite *stationnaire* s'il existe x tel que $\{n : x_n \neq x\}$ est fini. Bien entendu, toute suite stationnaire est principale.

Exemple 4.3. Le noyau de (ii) est fini non vide et celui de (v) est égal à $\mathbb{N}$, et tous les termes de ces suites appartiennent à leurs noyaux. Ce sont donc des suites principales.

Exemple 4.4. Les noyaux des suites (i) et (iv) sont vides, et par conséquent, les suites sont libres.

Exemple 4.5. La suite (iii) n'est ni principale ni libre. Effectivement, $\ker_{n\to\infty} x_n = \{0\}$, mais $\{n : x_n \neq 0\}$ est infini.

Théorème 4.6 (Décomposition de suites). *Pour toute suite $(x_n)_n$ qui n'est ni principale ni libre, il existe deux ensembles infinis A et B tels que $A \cup B = \mathbb{N}$ et $A \cap B = \varnothing$ de telle sorte que $(x_n)_{n\in A}$ est libre et $(x_n)_{n\in B}$ est principale.*

DÉMONSTRATION. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas libre, alors son noyau $Q := \ker_{n\to\infty} x_n$ n'est pas vide. Bien entendu, $B := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Q\}$ est infini. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas principale, $A := \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin Q\}$ est infini. La suite $(x_n)_{n\in A}$ est libre, car son noyau

$$\bigcap_{n\in A} \{x_k : k \in A, k \geq n\}$$

est inclus dans Q et, d'autre part, $\{x_n : n \in A\} \cap Q = \varnothing$. La suite $(x_n)_{n\in B}$ est principale, car son noyau est égal à Q et, en plus, si $n \notin B$, alors $x_n \notin Q$. □

Une suite $(y_k)_k$ est dite *extraite* de $(x_n)_n$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty \text{ et } y_k = x_{f(k)}$$

8. En anglais, *finite-to-one*.

pour tout $k \in \mathbb{N}_m$.

Une suite $(y_k)_k$ est dite *strictement extraite* (c'est-à-dire *suite extraite* au sens traditionnel) de $(x_n)_n$ s'il existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_k = x_{f(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Bien entendu, toute suite strictement extraite est une suite extraite. D'autre part,

Proposition 4.7. *Si $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors il existe une suite extraite de $(y_k)_k$ qui est une suite strictement extraite de $(x_n)_n$.*

DÉMONSTRATION. Soit m et $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$ telle que et $y_k = x_{f(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_m$ et $\lim_{k\to\infty} f(k) = \infty$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe le premier $k = h(p)$ tel que

$$f(h(p)) > \max\{f(k) : k < p\}.$$

Il est clair que $h(p) < h(p+1)$ et $f(h(p)) < f(h(p+1))$. Ainsi $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_m$ et $f \circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont strictement croissantes, donc $(x_{h(p)})_p$ est une suite strictement extraite de $(y_k)_k$ et $(x_{f\circ h(p)})_p$ est une suite strictement extraite de $(x_n)_n$. □

Proposition 4.8. *Soit $(y_k)_k$ et $(x_n)_n$ deux suites libres dans X. Alors $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$ si et seulement si*

$$\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est fini.

DÉMONSTRATION. Si $(y_k)_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\{y_k : k \in \mathbb{N}_m\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi $\{y_k : k < m\}$ est fini. Réciproquement, si la condition est remplie, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\{y_k : k \in \mathbb{N}_m\} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, donc pour $k \in \mathbb{N}_m$, on pose $f(k) = n$ si $y_k = x_n$. Ceci définit une application f, car les suites sont libres. Bien entendu, f est strictement croissante. □

Proposition 4.9. *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties dénombrables infinies telle que $A_{n+1} \setminus A_n$ est finie pour tout n. Alors il existe une partie infinie A_∞ telle que $A_\infty \setminus A_n$ est finie pour tout n.* [9]

DÉMONSTRATION. Soit $a_0 \in A_0$. Pour tout n il existe

$$a_n \in \bigcap\nolimits_{p=0}^{n} A_p \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\},$$

car cette partie est infinie. Alors $A_\infty := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ a la propriété requise. En effet, si $n \leq p$ alors $a_p \in A_n$, donc $A_\infty \setminus A_n \subset \{a_0, \ldots, a_n\}$. □

Corollaire 4.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(x_k^n)_k$ une suite dans X de telle sorte que $(x_k^{n+1})_k$ est une suite extraite de $(x_k^n)_k$. Alors il existe une suite $(x_k^\infty)_k$ dans X qui est extraite de $(x_k^n)_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

9. Une telle partie A_∞ s'appelle une *presque-intersection* de $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Cardinalité

Disons de façon informelle que la cardinalité d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments. Deux ensembles finis ont la même cardinalité si et seulement s'il existe une bijection entre eux. Ce fait devient la définition de cardinalité d'ensemble arbitraire.

Deux ensembles X, Y sont dits *équipotents* ($X \sim Y$) s'il existe une bijection $f : X \to Y$. Si X, Y, Z sont trois ensembles, alors $X \sim X$ (réflexivité), si $X \sim Y$ alors $Y \sim X$ (symétrie), et $X \sim Y$ et $Y \sim Z$ entraîne $X \sim Z$ (transitivité). Par conséquent, l'*équipotence* est une relation d'équivalence sur la classe de tous les ensembles.

Une classe d'équivalence des ensembles équipotents s'appelle un *nombre cardinal*. On désigne $\operatorname{card} X$ (ou $|X|$) la classe des ensembles équipotents à laquelle appartient X, c'est-à-dire la *cardinalité* de X.

Traditionnellement on utilise les caractères minuscules grecs, du milieu de l'alphabet[10], $\kappa, \lambda, \mu, \ldots$ pour désigner des cardinaux.

Soit κ, λ deux cardinaux. Par définition,

$$\kappa \leq \lambda \tag{I.9}$$

s'il existe une application injective $f : X \to Y$ pour deux ensembles X et Y tels que $\kappa = \operatorname{card} X$ et $\lambda = \operatorname{card} Y$.

Bien entendu, si X_0 et Y_0 sont deux autres ensembles tels que $\kappa = \operatorname{card} X_0$ et $\lambda = \operatorname{card} Y_0$, alors il existe une injection $f_0 : X_0 \to Y_0$. Effectivement, si $g : X_0 \to X$ et $h : Y_0 \to Y$ sont des bijections, alors $h^{-1} \circ f_0 \circ g$ est une injection de X_0 dans Y_0.

On peut également caractériser (I.9) en termes de surjections.

Proposition 5.1. *Soit X, Y deux ensembles. Alors $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$ si et seulement s'il existe une application surjective $g : Y \to X$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$, c'est-à-dire il existe une injection $f : X \to Y$. Ainsi pour tout $y \in f(X)$ il existe un unique $x \in X$ avec $y = f(x)$. Soit $g : Y \to X$ une application telle que $g(y) := x$ s'il existe $x \in X$ avec $y = f(x)$.[11] Alors g est une surjection.

Réciproquement, si $g : Y \to X$ est une surjection, c'est-à-dire si $g^{-1}(x) \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$, alors d'après l'axiome 2.2 du choix, pour tout $x \in X$ il existe $f(x) \in g^{-1}(x)$. Comme $g^{-1}(x_0) \cap g^{-1}(x_1) = \varnothing$ si $x_0 \neq x_1$, l'application $f : X \to Y$ ainsi définie est une injection. □

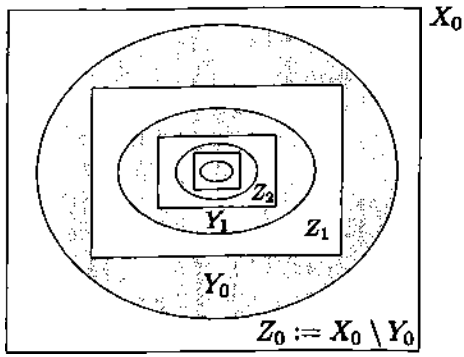
Ainsi, $\leq$ est une relation sur la classe des cardinaux. Il est immédiat qu'elle est réflexive et transitive. Le théorème suivant affirme qu'elle est également antisymétrique.

Théorème 5.2 (Cantor-Bernstein). *Si $\kappa \leq \lambda$ et $\lambda \leq \kappa$, alors $\lambda = \kappa$.*

---

10. En réservant plutôt les premiers caractères α, β, γ, etc... pour les nombres ordinaux.
11. Implicitement, $g(y)$ est un élément arbitraire de X si $y \in Y \setminus f(X)$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\lambda \leq \kappa$ il existe deux ensembles X et Y tels que $\operatorname{card} X = \kappa, \operatorname{card} Y = \lambda$ et $Y \subset X$. D'autre part, $\kappa \leq \lambda$, c'est-à-dire il existe une application injective $f : X \to Y$.



Notons $X_0 := X, Y_0 := Y, Z_0 := X_0 \setminus Y_0$ et

$$X_{n+1} := f(X_n), Y_{n+1} := f(Y_n) \text{ et } Z_{n+1} := f(Z_n).$$

Comme f est injective,

$$Z_1 = f(Z_0) = f(X_0 \setminus Y_0) = f(X_0) \setminus f(Y_0) = X_1 \setminus Y_1,$$

et, plus généralement, $Z_n = X_n \setminus Y_n$. Soit $Z := \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$. Donc

$$f(Z) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(Z_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n = Z \setminus Z_0.$$

De plus, $Z_n \cap Z_k = \varnothing$ si $n \neq k$.

Définissons $h : X \to Y$ par

$$h(x) := \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in Z, \\ x, \text{ si } x \notin Z. \end{cases}$$

La fonction h est injective, car $f(Z) \subset Z$ est la restriction de f à Z est injective, et l'identité est injective sur $X \setminus Z$. La fonction h est surjective sur Y. Effectivement, puisque h est injective,

$$\begin{aligned} h(X) &= h(Z \cup (X \setminus Z)) = f(Z) \cup X \setminus Z \\ &= (Z \setminus Z_0) \cup (X \setminus Z) = X \setminus Z_0 = Y. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\kappa = \lambda$. $\square$

Par conséquent, la relation $\leq$ sur les cardinaux est un ordre. On note $\kappa < \lambda$ si $\kappa \leq \lambda$ et $\kappa \neq \lambda$.

Un ensemble X est dit *fini* si toute application injective $f : X \to X$ est surjective.

L'ensemble vide $\varnothing$ est fini, car la seule application $f : \varnothing \to \varnothing$ est surjective [12]. On note $0 := \operatorname{card} \varnothing$. L'ensemble $\{\varnothing\}$ est fini, car la seule application $f : \{\varnothing\} \to \{\varnothing\}$ est une bijection. On définit $1 := \operatorname{card}\{\varnothing\} = \operatorname{card}\{0\}$, $2 := \operatorname{card}\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \operatorname{card}\{0, 1\}$ et ainsi de suite [13].

D'après l'exercice 12, tout ensemble ainsi construit est fini et, réciproquement, tout ensemble fini est équipotent à un tel ensemble.

On appelle *aleph zéro* et on note $\aleph_0$ la cardinalité de $\mathbb{N}$. C'est un ensemble infini, car l'application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $s(n) := n + 1$ est injective, mais n'est pas surjective, puisque $0 \notin s(\mathbb{N})$.

Un ensemble de cardinalité $\aleph_0$ est dit *dénombrable infini*.

Proposition 5.3. *$\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini.*

Démonstration. Puisque aucune application de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ dans $\mathbb{N}$ est surjective, $\operatorname{card} \mathbb{N} > n$. Si X est un ensemble infini, alors il existe $x_0 \in X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Donc d'après la proposition 5.1, $\aleph_0 = \operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} X$. □

On définit la *somme* $\kappa + \lambda$, le *produit* $\kappa \cdot \lambda$ et la *puissance* λ^κ de deux nombres cardinaux κ et λ par

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda \ &:= \operatorname{card}(X \cup Y) \text{ si } X \cap Y = \varnothing, \\ \kappa \cdot \lambda \ &:= \operatorname{card}(X \times Y), \\ \lambda^\kappa \ &:= \operatorname{card}(Y^X), \end{aligned}$$

où $\kappa = \operatorname{card} X$ et $\lambda = \operatorname{card} Y$. L'exercice 13 montre que ces définitions ne dépendent pas des représentants particuliers X de κ et Y de λ.

Il s'ensuit que les opérations $+$ et $\cdot$ sont associatives, commutatives et distributives, une par rapport à l'autre.

On note que [14]

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu,$$
$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu,$$
$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}.$$

D'autre part,

$$\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \begin{cases} \kappa + \mu \leq \lambda + \mu, \\ \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu, \\ \kappa^\mu \leq \lambda^\mu, \end{cases} \tag{I.10}$$

12. Effectivement, le produit $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$ a une seule partie $\varnothing$, donc il existe une seule relation binaire sur $\varnothing$. Comme sa relation réciproque est injective et surjective, $\varnothing$ est applicationnelle. D'ailleurs elle correspond à une application bijective.

13. Cette définition des nombres naturels est due à von Neumann.

14. Il faut bien distinguer $\kappa^{\lambda^\mu} := \kappa^{(\lambda^\mu)}$ et $(\kappa^\lambda)^\mu$. Par exemple, $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$ est la cardinalité de l'ensemble de toutes les familles de parties de X, tandis que $(2^2)^{\aleph_0} = 2^{2 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

ainsi que

$$0 < \kappa \le \lambda \Longrightarrow \mu^{\kappa} \le \mu^{\lambda}. \tag{I.11}$$

Cependant $\kappa < \lambda$ n'implique pas des inégalités strictes dans (I.10) et (I.11) (Voir l'exercice 14).

Proposition 5.4. $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$.

DÉMONSTRATION. Bien sûr, $\aleph_0 \le \aleph_0 + \aleph_0 \le \aleph_0 \cdot \aleph_0$. Puisque $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, afin de parachever la preuve, il suffit de construire une fonction injective $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Soit $S(n) := \sum_{k=0}^{n} k$ et, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$f(p,q) := S(p+q) + p.$$

Montrons que f est injective. Supposons que $f(p_0, q_0) = f(p_1, q_1)$. Si $p_0 = p_1$, alors $S(p_0 + q_0) = S(p_1 + q_1)$ et comme S est une application injective, $p_0 + q_0 = p_1 + q_1$, d'où $q_0 = q_1$. Si $p_0 \neq p_1$, par exemple, $p_0 > p_1$, alors $S(p_1 + q_1) > S(p_0 + q_0)$, donc

$$p_0 \ge p_0 - p_1 = S(p_1 + q_1) - S(p_0 + q_0) \ge p_0 + q_0 + 1,$$

d'où $-1 \ge q_0$, une contradiction. □

Il s'ensuit que $\operatorname{card} \mathbb{Z} = \aleph_0$ car $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$.

Corollaire 5.5. $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \aleph_0$.

DÉMONSTRATION. Comme tout rationnel admet (au moins) une représentation de la forme $\frac{k}{n}$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}_1$, l'application $(k,n) \longmapsto \frac{k}{n}$ est surjective de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1$ sur $\mathbb{Q}$, donc $\aleph_0 \ge \operatorname{card} \mathbb{Q} \ge \operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$, car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. □

Proposition 5.6. *Si κ est un cardinal, alors*

$$\kappa^0 = 1,$$
$$1^{\kappa} = 1,$$
$$\kappa > 0 \Longrightarrow 0^{\kappa} = 0.$$

DÉMONSTRATION. Par définition, κ^0 est la cardinalité de l'ensemble des applications du domaine vide dans un ensemble Y de cardinalité κ. L'ensemble $\varnothing \times Y = \varnothing$ admet une seule partie $\varnothing$ ($\operatorname{card} 2^{\varnothing \times Y} = 1$), c'est-à-dire il y a une seule relation $\varnothing$ dans $\varnothing \times Y$. Cette relation est une application, car elle est injective et $\varnothing^{-1}(Y) = \varnothing$.

Par définition, 1^{κ} est l'ensemble des applications d'un ensemble X de cardinalité κ dans un ensemble de cardinalité 1, par exemple, $\{0\}$. Il y a une seule relation R dans $X \times \{0\}$ pour laquelle $R^{-1}\{0\} = X$, et c'est $R := X \times \{0\}$. Étant injective, c'est une application, donc $1^{\kappa} = 1$.

Enfin, 0^{κ} est la cardinalité de l'ensemble des applications d'un ensemble non vide X ($\operatorname{card} X > 0$) dans $\varnothing$. Il y a une seule relation dans $\varnothing = X \times \varnothing$, notamment $\varnothing$ et ce n'est pas une application, car $\varnothing = \varnothing^{-1}\varnothing \neq X$, donc $0^{\kappa} = 0$. □

Théorème 5.7 (Cantor). *Si κ est un cardinal, alors $\kappa < 2^\kappa$.*

DÉMONSTRATION. Soit X un ensemble de cardinalité κ. Puisque $h : X \to 2^X$ donnée par $h(x) := \{x\} \in 2^X$ est injective, $\kappa \leq 2^\kappa$. Si $f : X \to 2^X$ est une application, alors f n'est pas surjective, car

$$\{x \in X : x \notin f(x)\}$$

n'est pas dans $f(X)$. Supposons qu'au contraire, il existe $y \in X$ tel que $f(y) = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Par conséquent, $y \in f(y)$ si et seulement si $y \notin f(y)$, ce qui est une contradiction. □

Il s'ensuit qu'il y a une infinité de cardinaux infinis, car si κ est un cardinal infini, par exemple, $\kappa = \aleph_0$, alors les cardinaux

$$\kappa < 2^\kappa < 2^{2^\kappa} < 2^{2^{2^\kappa}} < \ldots$$

sont tous différents. Nous avons déjà observé à propos du paradoxe 2.1 de Russell, qu'il n'existe pas l'ensemble de tous les ensembles. C'est aussi une conséquence immédiate du théorème 5.7, qui également implique que

Corollaire 5.8. *Il n'existe pas la cardinalité la plus grande.*

6. Le continu

Rappelons que $\mathbb{R}$ est complet au sens que toute partie non vide majorée (respectivement, minorée) A de $\mathbb{R}$ a la borne supérieure $\sup A \in \mathbb{R}$ (respectivement, inférieure $\inf A \in \mathbb{R}$) (15).

Proposition 6.1. *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'au contraire il existe une suite $(r_n)_n$ telle que $\mathbb{R} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit n_1 le premier élément de $\mathbb{N}$ tel que $r_0 < r_{n_1}$. Soit n_2 le premier élément de $\mathbb{N}$ tel que $r_0 < r_{n_2} < r_{n_1}$.

On construit ainsi, par récurrence, une suite $(r_{n_k})_k$ strictement extraite de $(r_n)_n$ telle que n_{k+2} est le premier élément de $\mathbb{N}$ tel que $r_{n_{k+2}}$ est entre r_{n_k} et $r_{n_{k+1}}$. Par conséquent,

$$r_0 < r_{n_{2k}} < \ldots < r_{n_{2k+1}} < r_{n_1}.$$

Puisque toute partie majorée admet la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et toute partie minorée admet la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} r_{n_{2k}} \leq r \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} r_{n_{2k+1}}.$$

D'après la construction, $r \notin \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Une contradiction. □

On note $\mathfrak{c}$ la cardinalité de la *droite réelle* $\mathbb{R}$, et on l'appelle le *continu*. La proposition 6.1 montre que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. On prouvera dans la proposition 6.4 un résultat plus précis, à savoir, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

15. Voir l'annexe A pour les définitions.

L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}$, appelé le *cube de Cantor*, est, par définition, l'ensemble de toutes les applications f sur un ensemble dénombrable infini à valeurs dans $\{0,1\}$:

$$f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow f : \mathbb{N} \to \{0,1\},$$

donc peut être identifié, moyennant la fonction caractéristique (I.1), avec l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$. Bien entendu, $\operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0}$.

L'*ensemble de Cantor* C est composé des nombres réels r, dont une représentation ternaire vérifie

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{3^n} \text{ et } \underset{n\in\mathbb{N}_1}{\forall}\ r(n) \in \{0,2\}. \tag{I.12}$$

Par conséquent, $C \subset [0,1]$.

Proposition 6.2. *Tout élément de l'ensemble de Cantor C admet une représentation unique de la forme* (I.12).

DÉMONSTRATION. Soit r, s deux éléments de C. Bien entendu, $r(n)$ et $s(n)$, pour $n \in \mathbb{N}_1$, sont les termes de leurs représentations ternaires (I.12) respectives. On note $\#(r,s)$ le premier $n \in \mathbb{N}_1$ tel que $r(n) \neq s(n)$ et $\#(r,s) = \infty$ si $r = s$. Par conséquent, si $r, s \in C$ et $r < s$, alors il existe n avec $1 \leq n < \infty$ et $n = \#(r,s)$. Donc $r(n) = 0$ et $s(n) = 2$. J'affirme que

$$\min\{s - r : \#(r,s) = n\} = \frac{1}{3^n}.$$

Si $r < s$ et $n = \#(r,s)$, alors [16]

$$\begin{aligned} s - r &= \frac{2}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{s(k)-r(k)}{3^k} \\ &\geq \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n}. \end{aligned} \tag{I.13}$$

Cette minoration atteint sa borne pour $r(n) = 0$ et $r(k) = 2$ pour tout $k > n$ et $s(n) = 2$ et $s(k) = 0$ pour tout $k > n$. □

L'ensemble des $r \in [0,1]$ pour lesquels $r(1) \neq 1$ est (niveau 1) ci-dessous, de ceux pour lesquels $r(1) \neq 1$ et $r(2) \neq 1$ est (niveau 2) et ainsi de suite. Par conséquent, C est l'intersection des unions des niveaux suivants

(niveau 0) $\quad I := [0,1]$

(niveau 1) $\quad I_0 := \left[0, \frac{1}{3}\right],\ I_1 := \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

(niveau 2) $\quad I_{0,0} := \left[0, \frac{1}{9}\right],\ I_{0,1} := \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right],\ I_{1,0} := \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right],\ I_{1,1} := \left[\frac{8}{9}, 1\right]$

$\cdots$

(niveau n) $\quad \left[0, \frac{1}{3^n}\right],\ \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right],\ \ldots\ \left[\frac{3^n-3}{3^n}, \frac{3^n-2}{3^n}\right],\ \left[\frac{3^n-1}{3^n}, 1\right]$

16. La série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Par exemple, si $\#(r,s)=1$, c'est-à-dire $r(1)\neq s(1)$, alors r et s appartiennent à deux intervalles différents du premier niveau ; si $\#(r,s)=2$, alors $r(1)=s(1)$ et $r(2)\neq s(2)$, alors r et s appartiennent au même intervalle du premier niveau et à deux intervalles différents du deuxième niveau [17].

Proposition 6.3. *L'ensemble de Cantor est équipotent au cube de Cantor.*

DÉMONSTRATION. L'application de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans C donnée par

$$F(f):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2f(n)}{3^{n+1}}$$

est surjective, d'après la définition de l'ensemble de Cantor (I.12), et injective, grâce à la proposition 6.2. ☐

Théorème 6.4. $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$.

DÉMONSTRATION. Nous allons définir $F:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{Q}}$. Posons $F(r):=\{f_r(n):n\in\mathbb{N}\}$, où $f_r:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ est injective et telle que $r=\lim_{n\to\infty}f_r(n)$ [18]. Si $r_0\neq r_1$, alors

$$\{f_{r_0}(n):n\in\mathbb{N}\}\cap\{f_{r_1}(n):n\in\mathbb{N}\}$$

est fini, et en conséquence $f_{r_0}\neq f_{r_1}$. Donc $F:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{Q}}$ est injective, donc $\mathfrak{c}=\operatorname{card}\mathbb{R}\leq\operatorname{card}2^{\mathbb{Q}}=2^{\aleph_0}$. Puisque l'ensemble de Cantor C est une partie de $\mathbb{R}$, $2^{\aleph_0}=\operatorname{card}C\leq\operatorname{card}\mathbb{R}=\mathfrak{c}$. Donc, d'après le théorème 5.2 de Cantor-Bernstein, $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$. ☐

Corollaire 6.5. $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\aleph_0\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^{\aleph_0}$. [19]

DÉMONSTRATION. Bien évidemment, d'après (I.10),

$$\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\leq\aleph_0\cdot\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c},$$

puisque $1\leq 2\leq\aleph_0\leq\mathfrak{c}$, et $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}^2\leq\mathfrak{c}^{\aleph_0}$, car $2\leq\aleph_0$.

D'autre part, d'après la proposition 5.4 et le théorème 6.4, $\mathfrak{c}^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$. ☐

Il s'ensuit, par exemple, que le nombre des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ est le même que le nombre des suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui est le même que le nombre des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exercices

Solutions : pages 269-277.

(1) ⋆ Soit $P,R\subset X\times Y$. Vérifier que

(a) $(R^{-1})^{-1}=R$,

(b) $P\subset R\Longrightarrow P^{-1}\subset R^{-1}$,

---

17. Observons que si $r\in C$, alors $\{r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}I_{\frac{r(1)}{2},\frac{r(2)}{2},\dots,\frac{r(n)}{2}}$.

18. Bien sûr, il y a beaucoup de suites vérifiant cette condition.

19. Ce corollaire découle d'un fait plus général (théorème A.5.6 à venir).

(c) $R^{-1}B = \{x \in X : R\{x\} \cap B \neq \varnothing\}$.

(2) $\star$ Soit X, Y deux ensembles et $R \subset X \times Y$. Montrer que

(a) si $A_j \subset X$ pour tout $j \in J$, alors $R(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} RA_j$,

(b) il existe R telle que $R(A \cap B) \neq RA \cap RB$,

(c) si R est injective, alors $R(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} RA_j$,

(d) sont équivalentes :

(i) $$RA \cap B \neq \varnothing,$$

(ii) $$A \cap R^{-1}B \neq \varnothing,$$

(iii) $$(A \times B) \cap R \neq \varnothing.$$

(3) Soit X, Y, Z ensembles, $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$. Montrer que

(a) si $A \subset X$ et $C \subset Z$, alors
$$C \cap (S \circ R)A \neq \varnothing \iff RA \cap S^{-1}C \neq \varnothing,$$

(b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(4) $\star$ Soit $f : X \to Y$ et $A_j \subset X$, $B_k \subset Y$ pour tous les $j \in J$ et $k \in K$. Montrer que

(a) $f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} fA_j$,

(b) $f^{-1}(\bigcup_{k\in K} B_k) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}B_k$,

(c) $f^{-1}(\bigcap_{k\in K} B_k) = \bigcap_{k\in K} f^{-1}B_k$,

(d) si $A \subset X$ et $B \subset Y$, alors
$$A \subset \left(f^{-1} \circ f\right) A,\ (f \circ f^{-1})B \subset B.$$

(5) Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une fonction f moyennant les compositions $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$.

(6) Soit $R \subset X \times Y$. Par définition, pour $A \subset X$, la *polaire* de A par R est $R^*A := \bigcap_{x\in A} R(x)$. Montrer

(a) les équivalences :
$$B \subset R^*A,$$
$$A \subset (R^{-1})^*B,$$
$$A \times B \subset R,$$

(b) $R^*(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} R^*A_j$.

(7) Soit $R \subset X \times X$ et $I \subset X \times X$, la relation diagonale (I.6). Vérifier que

(a) $R \circ I = I \circ R = R$,

(b) R est symétrique $\iff R \subset R^{-1} \iff R^{-1} = R$,

(c) R est transitive $\iff R \circ R \subset R$,

(d) R est réflexive $\iff I \subset R$,

(e) R est une équivalence $\iff R$ est réflexive et $R^{-1} \circ R \subset R$.

(8) Toute application f admet une décomposition $f = h \circ g$, telle que g est surjective et h est injective.

(9) Montrer que

(a) $f : X \to Y$ est surjective si et seulement s'il existe une application injective $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = i_Y$, l'identité sur Y (g est dite une *application quasi-réciproque* ou une *section* de f).

(b) s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = i_X$ (une telle g s'appelle une *rétraction* de f), alors f est injective et g est surjective.

(10) $\star$ Calculer le noyau des suites suivantes et déterminer si elles sont libres ou stationnaires :

(a) $x_n := \max\left\{(-\frac{1}{n})^n, 0\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$,

(b) $y_k := \frac{1}{n}$ si $\frac{(n-1)n}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $k \in \mathbb{N}$,

(c) $z_k := \frac{2}{2k-(n-1)n+2}$ si $\frac{(n-1)n}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $k \in \mathbb{N}$.

(11) Montrer que tout intervalle de longueur non nulle de $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

(12) Montrer que

(a) si X est un ensemble fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{card} X = n$,

(b) si X est un ensemble fini et si $y \notin X$, alors $X \cup \{y\}$ est fini,

(c) toute union finie d'ensembles finis et finie,

(d) tout produit fini d'ensembles finis est fini,

(e) si X, Y sont finis, alors Y^X est fini.

(13) $\star$ Si X_0 équipotent à X_1 et Y_0 équipotent à Y_1, alors

(a) si $X_0 \cap Y_0 = \varnothing$ et $X_1 \cap Y_1 = \varnothing$, alors $X_0 \cup Y_0$ est équipotent à $X_1 \cup Y_1$.

(b) $X_0 \times Y_0$ est équipotent à $X_1 \times Y_1$.

(c) ${Y_0}^{X_0}$ est équipotent à ${Y_1}^{X_1}$.

(14) Soit κ, λ, μ des nombres cardinaux.

(a) Montrer que si $\kappa \leq \lambda$, alors

(i) $$\kappa + \mu \leq \lambda + \mu,$$

(ii) $$\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu,$$

(iii) $$\kappa^\mu \leq \lambda^\mu,$$

(iv) $$\mu^\kappa \leq \mu^\lambda \text{ si } 0 < \kappa \leq \lambda.$$

(b) Observer que $\kappa < \lambda$ n'implique pas les inégalités strictes dans (i)-(iv).

(c) Montrer que

(v) $$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu,$$

(vi) $$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}.$$

(15) ⋆ Combien y a-t-il de

(a) fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(b) parties finies de $\mathbb{N}$?

(c) suites à valeurs dans $\{0, 1\}$?

(d) suites à valeurs dans $\mathbb{N}$?

(e) suites à valeurs dans $\mathbb{R}$?

(f) polynômes à coefficients entiers ?

(g) nombres algébriques ?

(16) Soit A, B deux parties infinies dénombrables de X. On dit que A et B sont *presque disjointes* si $A \cap B$ est finie ; B est *presque incluse* dans A si $B \setminus A$ est finie (en symboles, $B \subset^* A$). A et B sont dits *presque égaux* ($A =^* B$) si $B \subset^* A$ et $A \subset^* B$. Montrer que

(a) deux parties sont presque égales si et seulement si la différence symétrique $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est finie,

(b) la relation $=^*$ est une relation d'équivalence,

(c) deux suites libres n'ont aucune suite extraite commune si et seulement si leurs images sont presque disjointes.

(17) Soit X un ensemble infini dénombrable. Une famille $\mathcal{A}$ de parties infinies est dite *presque disjointe* si A_0, A_1 sont presque disjointes pour chaque couple A_0, A_1 d'éléments distincts de $\mathcal{A}$. Une famille $\mathcal{A}$ presque disjointe est dite *maximale* si pour toute partie (infinie) A_∞ de X, $\mathcal{A} \cup \{A_\infty\}$ n'est pas presque disjointe. Montrer que

(a) si $\mathcal{A} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite presque disjointe de termes distincts, alors il existe une partie $A_\infty \notin \mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A} \cup \{A_\infty\}$ est presque disjointe,

(b) si $\mathcal{A}$ est une famille presque disjointe, alors il existe une famille presque disjointe maximale $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ [20],

(c) une famille $\mathcal{A}$ est presque disjointe maximale si et seulement pour toute partie infinie B il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B \cap A$ est infinie,

(d) si $\mathcal{A}$ est une famille infinie presque disjointe maximale, alors $\operatorname{card} \mathcal{A} > \aleph_0$,

(e) il existe sur X une famille presque disjointe de cardinalité $\mathfrak{c}$ [21].

---

20. Appliquer le lemme 2.3 de Zorn-Kuratowki.

21. Indication : tout ensemble dénombrable infini X est équipotent à $\mathbf{Q}$. Considérer une famille de suites sur $\mathbf{Q}$, dont les limites sont distinctes.

CHAPITRE II

Espaces métriques

La notion de métrique fut introduite [1] par Maurice Fréchet en 1906 dans sa thèse **[13]** afin de pouvoir étudier la convergence des suites de nombres, de points, de fonctions, etc., indépendamment de la nature des éléments considérés.

Citant Séguier, Fréchet remarque qu'on ne peut arriver à une théorie commune qu'*en recherchant les conditions communes aux définitions particulières et en ne retenant que celles qui [sont] indépendantes de la nature des éléments considérés* et déclare : *C'est ce que nous allons essayer de faire pour le Calcul Fonctionnel et en particulier pour la théorie des ensembles abstraits.*

FIGURE II.1. Maurice Fréchet (1878-1973), Felix Hausdorff (1868-1942) et Frigyes Riesz (1880-1956)

1. Métriques, boules, voisinages

Rappelons qu'une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in X$,

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{II.1}$$

$$d(x,y) = 0 \iff x = y, \tag{II.2}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \tag{II.3}$$

s'appelle une *métrique* (ou *distance*) sur X. Un ensemble X muni d'une métrique s'appelle un *espace métrique*.

1. Sous le nom d'*écart*.

Exemple 1.1. Si $\|\cdot\|$ est une *norme* sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une fonction réelle positive $\|\cdot\|$ telle que $\|x\| = 0 \iff x = 0, \|rx\| = |r|\,\|x\|$ et $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$, alors

$$d(x,y) := \|x - y\| \tag{II.4}$$

est une métrique. Cette métrique vérifie en plus

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \text{ et } d(rx, ry) = rd(x,y)$$

pour tous $x, y, z \in X$ et $r \geq 0$. En particulier, elle n'est pas bornée, car $d(X \times X) = \mathbb{R}_+$. Elle a la *propriété de point intermédiaire* : si $d(x_0, x_1) = r > 0$ et $r_0 > 0, r_1 > 0$ sont tels que $r = r_0 + r_1$, alors il existe un point x tel que $d(x, x_0) = r_0$ et $d(x, x_1) = r_1$ (2).

Exemple 1.2. Soit X un ensemble quelconque. Alors la fonction $i : X \times X \to \mathbb{R}$, définie par

$$i(x,y) := \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ 1, \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

est une métrique (l'exercice 1). On note que $i(X \times X) = \{0, 1\}$.

Cette métrique est différente des métriques définies par une norme (II.4). En particulier, i est bornée (3). Par conséquent, même si l'ensemble X dans l'exemple 1.2 était vectoriel, la métrique i ne pourrait pas provenir d'une norme.

Une *boule (stricte)* autour de x de rayon $r > 0$ est définie par

$$B_d(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Si la métrique est sous-entendue, nous abrégeons

$$B_r(x) = B(x,r) = B_d(x,r).$$

Dans l'exemple 1.2, $B(x,r) = \{x\}$ si $0 < r < 1$ et $B(x,r) = X$ si $r \geq 1$. Ici l'intuition d'une boule provenant des espaces euclidiens est mise à mal ; une boule de rayon positif est un singleton (4). Une autre nouveauté est que la boule de rayon fini coïncide avec l'espace tout entier.

On appelle la *boule large* autour de x de rayon $r \geq 0$, l'ensemble

$$B_r^{\leq}(x) = B^{\leq}(x,r) = B_d^{\leq}(x,r) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Si (X,d) est un espace métrique et $A \subset X$, alors la *restriction* d_A de d sur $A \times A$ est une métrique, car les conditions (II.1)-(II.3) sont remplies pour $x, y, z \in A$. On dit que d_A est *héritée de* ou *induite par* (X,d) sur A.

Dans un espace euclidien (l'exemple 1.1), si $d(z_0, z_1) = 2r > 0$, alors $B_s(z_0) \cap B_s(z_1) \neq \varnothing$ pour tout $s > r$. Cette propriété n'est plus valable pour sa restriction.

---

2. Il suffit de prendre $x := \dfrac{r_0}{r} x_0 + \dfrac{r_1}{r} x_1$.

3. Plus précisément, $\sup_{x,y \in X} i(x,y) \leq 1$

4. Cependant, si on considère la distance euclidienne restreinte à certaines parties (par exemple, de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{N}$), alors on observe le même phénomène.

Exemple 1.3. Soit $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ avec la métrique héritée de $\mathbb{R}^2$, à savoir

$$d((x_0,y_0),(x_1,y_1)) := \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

On constate que d est bornée; plus précisément $d(S \times S) = [0,2]$. Prenons deux points opposés de S, par exemple, $d((0,-1),(0,1)) = 2$. Cependant $B_r(0,-1) \cap B_r(0,1) = \varnothing$ pour $r < \sqrt{2}$. Ceci contraste avec la propriété de la métrique dans un espace euclidien observée tout à l'heure.

Dans tout espace métrique, on peut séparer deux éléments quelconques par des boules.

Proposition 1.4. *Si x_0, x_1 sont deux éléments distincts d'un espace métrique, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x_0,r) \cap B(x_1,r) = \varnothing$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $x_0 \neq x_1$, d'après (II.2), $d(x_0,x_1) > 0$. Posons $r := \frac{1}{2}d(x_0,x_1)$. Si $x \in B(x_0,r) \cap B(x_1,r)$, alors

$$2r = d(x_0,x_1) \leq d(x_0,x) + d(x,x_1) < 2r,$$

ce qui est une contradiction. □

Un élément x d'une partie A d'un espace métrique (X,d) est dit *isolé* dans A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Un espace métrique est dit *discret* si tous ses éléments sont isolés.

Exemple 1.5. Soit $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{0\}$ avec la métrique $d(x,y) := |x-y|$ (héritée de $\mathbb{R}$). Le seul point non isolé est 0.

L'espace de l'exemple 1.2 est discret. La droite réelle $\mathbb{R}$ avec la métrique

$$d(x,y) := |x-y| \tag{II.5}$$

n'est pas discrète. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels muni de (II.5) n'est pas discret, mais l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers avec (II.5) est discret.

Corollaire 1.6. *Tout espace métrique fini est discret.*

DÉMONSTRATION. Soit (X,d) un espace fini et $x \in X$. Alors $d(x,y) > 0$ pour tout $y \in X \setminus \{x\}$. Par conséquent, $B(x,r) = \{x\}$ pour

$$r = \min\{d(x,y) : y \in X \setminus \{x\}\}.$$

□

Une partie V de X est dite un *voisinage* de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Dans de nombreux raisonnements les voisinages peuvent supplier les boules, simplifiant souvent le discours en le libérant de l'aspect numérique. Par exemple, x est un élément isolé d'une partie A d'un espace métrique si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$.

L'ensemble des voisinages d'un point a les propriétés suivantes (voir l'exercice 10)

$$\text{(v0)} \qquad \underset{x\in X}{\forall}\; X \in \mathcal{V}(x),$$

$$\text{(v1)} \qquad V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow x \in V,$$

$$\text{(v2)} \qquad W \supset V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(x),$$

$$\text{(v3)} \qquad V_0, V_1 \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V_0 \cap V_1 \in \mathcal{V}(x),$$

$$\text{(v4)} \qquad V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow \underset{W\in\mathcal{V}(x)}{\exists}\; \underset{w\in W}{\forall}\; V \in \mathcal{V}(w).$$

Bien entendu, (v3) entraîne que l'intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x.

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie X. Le *diamètre* $\operatorname{diam} A$ de A est défini comme

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in A\}.$$

Une partie d'un espace métrique est dite *bornée* si son diamètre est fini. Notamment le diamètre de l'espace de l'exemple 1.2 est 1.

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie A de X et $r > 0$, on définit la *boule stricte* autour de A de *rayon* r :

$$\text{(II.7)} \qquad B_d(A, r) := \Big\{x \in X : \underset{a\in A}{\exists}\; d(x, a) < r\Big\}.$$

Si la métrique est sous-entendue, alors on abrège la notation $B_r(A)$ ou $B(A, r)$. Bien entendu, $B_r(A) = \bigcup_{a\in A} B_r(a)$.

La *distance* entre une partie H de X et un élément x de X est définie comme

$$\operatorname{dist}(x, H) = d(x, H) := \inf\big\{d(x, h) : h \in H\big\}.$$

Ainsi $d(x, H) < r$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $d(x, h) < r$, ce qui équivaut à $x \in B_r(H)$. Donc,

$$\text{(II.8)} \qquad d(x, H) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bigcap\nolimits_{r>0} B_r(H).$$

La *distance* entre deux parties F et H de X est définie par

$$\operatorname{dist}(F, H) = d(F, H) := \inf\big\{d(x, H) : x \in F\big\},$$

donc $d(F, H) = \inf\{d(x, y) : x \in F, y \in H\}$.

Soit (X, d) un espace métrique. Une partie Q de X est dite *dense* si $B_r(x) \cap Q \neq \varnothing$ pour tout $x \in X$ et chaque $r > 0$. Un espace est dit *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.

L'exemple le plus connu est probablement celui de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels qui est dense dans $\mathbb{R}$ muni de (II.5). On observe que

Proposition 1.7. *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie Q de X est dense si et seulement si $d(x, Q) = 0$ pour tout $x \in X$.*

DÉMONSTRATION. Comme $B_r(x) \cap Q \neq \varnothing$ équivaut à $x \in B_r(Q)$ (l'exercice 8b), donc Q est dense si et seulement si $X \subset \bigcap_{r>0} B_r(Q)$ et, d'après une observation récente, $d(x, Q) = 0$ pour tout $x \in X$. □

Lemme 1.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Si $x, y \in X$ et $A \subset X$, alors*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{II.9}$$

DÉMONSTRATION. Si $x, y \in X$, alors $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ pour tout $a \in A$, donc $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. De la même manière, $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$, d'où l'inégalité. □

2. Convergence des suites

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X *converge* vers un élément x de X, ou que x est une *limite* de $(x_n)_n$, si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Proposition 2.1. *Si une limite d'une suite d'éléments d'un espace métrique existe, alors elle est unique.*

DÉMONSTRATION. Si x, y sont deux limites de $(x_n)_n$, alors

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

pour tout n, donc

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq \lim_{n\to\infty}(d(x, x_n) + d(x_n, y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0. \end{aligned}$$

□

Ayant établi l'unicité de la limite de suite, nous pouvons noter

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

quand $(x_n)_n$ converge vers x.

En réécrivant la définition de la convergence d'une suite numérique $(d(x_n, x))_n$ vers 0, on obtient la condition : $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si pour tout $r > 0$ il existe $n_r \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < r$ pour tout $n \geq n_r$. Autrement dit, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si

$$\underset{r>0}{\forall} \ \underset{n_r \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \geq n_r}{\forall} \ x_n \in B_r(x), \tag{II.10}$$

c'est-à-dire

Proposition 2.2. *Dans un espace métrique, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si pour tout voisinage V de x, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ est fini.*

DÉMONSTRATION. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_r(x) \subset V$ et, d'après (II.10), il existe $n_r \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_n : n \geq n_r\} \subset B_r(x) \subset V$, donc $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ est fini.

Réciproquement, si $r > 0$ alors $B(x, r) \in \mathcal{V}(x)$, donc $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin B_r(x)\}$ est fini, ainsi si $n > \max\{m \in \mathbb{N} : x_m \notin B_r(x)\}$, alors $x_n \in B_r(x)$. □

La proposition 2.2 montre que, dans l'étude de la convergence des suites, on peut délaisser l'ordre de l'ensemble des indices, car ce qu'y importe sont les parties cofinies de cet ensemble. Plus précisément, si (X, d) est un espace métrique, I est un ensemble dénombrable infini et $f : I \to X$ est une suite, alors $\lim f = x$ si et seulement $f^{-1}(V)$ est cofinie dans I pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$.

Observons que

Proposition 2.3. *Un point x d'un espace métrique est isolé si et seulement si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ implique que $(x_n)_n$ est stationnaire.*

DÉMONSTRATION. Un point x n'est pas isolé si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ tel que $x_n \neq x$, c'est-à-dire $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $(x_n)_n$ n'est pas stationnaire. □

Corollaire 2.4. *Un espace métrique est discret si et seulement si toute suite convergente est stationnaire.*

Du point de vue de la convergence des suites, on considère uniquement les situations où la distance entre les termes de la suite et le point limite tend vers 0 ; on peut donc ignorer les grandes valeurs de la métrique, par exemple, celles supérieures à 1.

Deux métriques d, h sur un même ensemble X sont dites *(topologiquement) équivalentes* si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} h(x_n, x) = 0$$

pour toute suite $(x_n)_n$ et tout x. Elles sont appelées *fortement équivalentes* s'il existe $c_0, c_1 > 0$ tels que pour tous x, y dans X,

$$c_0\, d(x, y) \leq h(x, y) \leq c_1\, d(x, y).$$

Bien sûr, deux normes équivalentes induisent les métriques fortement équivalentes. Il est évident que deux métriques fortement équivalentes sont équivalentes. L'implication réciproque n'est pas vraie.

Exemple 2.5. Soit $X := \{x \in \mathbb{N} : x > 0\}$. Les fonctions $i(x, y) := 0$ si $x = y$ et $i(x, y) := 1$ si $x \neq y$, et $h(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ sont deux métriques équivalentes. Effectivement, $\lim_{n\to\infty} i(x_n, x) = 0$ si et seulement s'il existe n_0 tel que $x_n = x$ pour tout $n \geq n_0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} h(x_n, x) = 0$, c'est-à-dire les seules suites convergentes sont les suites stationnaires. Par conséquent, i et h sont équivalentes. Elles ne sont pas fortement équivalentes, car si $c_0 \geq 0$ et

$$c_0 = c_0\, i(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) \leq h(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n\,(n+1)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, alors $c_0 = 0$.

Proposition 2.6. *Toute métrique admet une métrique équivalente bornée.*

Démonstration. Si d est une métrique, alors la fonction $\delta := \min(d, 1)$ est une métrique (l'exercice 3). Puisque $B_d(x, r) = B_\delta(x, r)$ si $0 < r < 1$, les convergences des suites pour les deux métriques sont les mêmes. □

Proposition 2.7. *Dans un espace métrique, si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $(x_{n_k})_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, alors $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$* (top).

Démonstration. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $\{x_n : n > n_\varepsilon\} \subset B_\varepsilon(x)$. Puisque $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ il existe k_ε tel que $n_k > n_\varepsilon$, donc $x_{n_k} \in B_\varepsilon(x)$ pour tout $k > k_\varepsilon$. □

Proposition 2.8. *Dans un espace métrique, si $x \neq \lim_{n\to\infty} x_n$ alors il existe une suite extraite $(y_k)_k$ de la suite $(x_n)_n$ telle que $x \neq \lim_{p\to\infty} y_{k_p}$ pour toute suite $(y_{k_p})_p$ extraite de $(y_k)_k$* (top).

Démonstration. Si $x \neq \lim_{n\to\infty} x_n$ alors d'après la proposition 2.2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_\varepsilon(x)\}$ est infini. Bien entendu, la suite $(x_n)_{n\in A}$ n'a aucune suite extraite convergente vers x. □

Proposition 2.9. *Dans un espace métrique, si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_{n,k_n}$ pour toute suite $(k_n)_n$ telle que $k_n \geq f(n)$ pour tout n* (metr).

Démonstration. Puisque $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, il existe n_1 tel que $x_n \in B_1(x)$ pour tout $n \geq n_1$, et comme $x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n,k}$, il existe $f_1 : \mathbb{N}_{n_1} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{n,k} \in B_1(x)$ pour tout $k \geq f_1(n)$ et $n \geq n_1$.

Si nous avons trouvé des nombres naturels $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$ et $f_1, f_2, \ldots, f_p$ tels que $f_q : \mathbb{N}_q \to \mathbb{N}$ pour $1 \leq q \leq p$ avec $f_q(n) \leq f_{q+1}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}_{q+1}$, et

$$n \geq n_q, k \geq f_q(n) \Longrightarrow x_{n,k} \in B_{\frac{1}{q}}(x),$$

alors, il existe $n_{p+1} > n_p$ et $f_p : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}$ avec $f_p(n) \leq f_{p+1}(n)$ telle que $x_{n,k} \in B_{\frac{1}{p}}(x)$ pour tout $n \geq n_p$ et $k \geq f_p(n)$. Soit

$$f_\infty(n) := \begin{cases} \sup_{p\in\mathbb{N}_1} f_p(n), \text{ si } n \geq n_p, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $x_{n,k} \in B_{\frac{1}{p}}(x)$ si $n \geq n_p$ et $k \geq f_\infty(n)$. Par conséquent, si $k_n \geq f_\infty(n)$, alors $\lim_{n\to\infty} x_{n,k_n} = x$.). □

Si $(x_{n,k})_k$ est une suite pour tout n, alors une suite $(x_{n_p,k_p})_p$ s'appelle *transversale* de $((x_{n,k})_k)_n$ si $\lim_{p\to\infty} n_p = \infty$.

Corollaire 2.10. *Dans un espace métrique, si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n,k}$ pour tout n, alors il existe une suite transversale $(x_{n_p,k_p})_p$ telle que $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_p,k_p}$* (metr).

Ce corollaire peut être prouvé directement (Voir l'exercice 13).

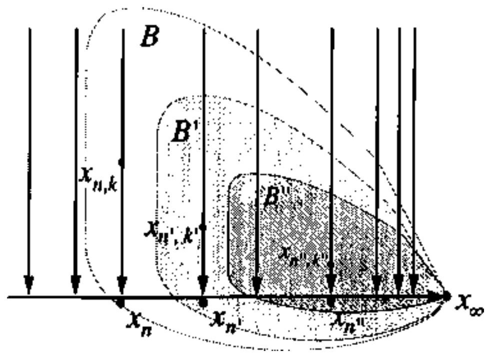


FIGURE II.2. Une suite $(x_n)_n$ converge vers x_∞. Dans chaque boule B, B', B'' autour de x_∞ contenant $x_n, x_{n'}, x_{n''}$ respectivement, il y a $x_{n,k}$, $x_{n',k'}$, $x_{n'',k''}, \ldots$ formant une suite transversale convergeant vers x_∞.

Proposition 2.11. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors $d(x, A) = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $x = \lim_{n\to\infty} a_n$.*

DÉMONSTRATION. Si une telle suite existe, alors $d(x, A) \leq d(a_n, x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $d(x, A) \leq \lim_{n\to\infty} d(a_n, x) = 0$. Réciproquement, si $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to\infty} d(a_n, x) = 0$. □

3. Continuité métrique

Soit $f : X \to Y$, où X, Y sont des espaces métriques et d_X, d_Y leurs métriques respectives. On dit que f est *continue (en x)* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d_X(w, x) \leq \delta$ entraîne $d_Y(f(w), f(x)) < \varepsilon$ pour tout $w \in X$. En termes des voisinages, f est continue en x si et seulement si

$$\forall_{V\in\mathcal{V}(f(x))} \ \exists_{W\in\mathcal{V}(x)} \ f(W) \subset V,$$

ce qui revient à [5]

$$\forall_{V\in\mathcal{V}(f(x))} \ \exists_{W\in\mathcal{V}(x)} \ W \subset f^{-1}(V).$$

Une application $f : X \to Y$ est dite *continue* si elle est continue en x pour tout $x \in X$, c'est-à-dire

$$\forall_{x\in X} \ \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon). \tag{II.11}$$

5. Notons que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ équivaut à $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. Plus généralement, $f(A) \subset B$ équivaut à $A \subset f^{-1}(B)$. Effectivement, en appliquant f^{-1} à la première inclusion, nous obtenons $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(B)$, et, en appliquant f à la seconde inclusion, nous avons $f(A) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Nous allons voir que la continuité ne dépend pas des métriques particulières, mais seulement des suites convergentes.

Disons qu'une application $f : X \to Y$ est *séquentiellement continue en* x si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ entraîne $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ pour toute suite $(x_n)_n$, *séquentiellement continue* si elle est séquentiellement continue en x pour tout $x \in X$.

Proposition 3.1. *Une application entre les espaces métriques est continue en x si et seulement si elle est séquentiellement continue en x.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : X \to Y$ une application continue et $(x_n)_n$ une suite convergente vers x. Si $\varepsilon > 0$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Comme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ il existe n_δ tel que $x_n \in B_\delta(x)$, donc $f(x_n) \in B_\varepsilon(f(x))$ pour tout $n > n_\delta$, ce qui prouve que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$;

Réciproquement, si f n'est pas continue, alors il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Ceci implique que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, et $f(x_n) \notin B(f(x), \varepsilon)$ pour tout n, donc $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. □

Proposition 3.2. *Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, car f est continue, donc $g(f(x)) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n))$, car g est continue. □

Proposition 3.3. *Si $f, g : X \to Y$ sont deux applications continues et $f|_A = g|_A$, où A est une partie dense de X, alors $f = g$.*

DÉMONSTRATION. Comme A est dense, pour tout $x \in X$ il existe une suite $(x_n)_n$ dans A telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. D'après la continuité de f et g, on a $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. □

Une application bijective continue $f : X \to Y$ s'appelle un *homéomorphisme* si f^{-1} est également continue.

Exemple 3.4. Soit $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$. On considère sur X deux métriques : i de l'exemple 1.2 et $d(x,y) = |x - y|$ (héritée de la droite réelle $\mathbb{R}$). Si $i_X : X \to X$ dénote l'identité (c'est-à-dire $i_X(x) := x$ pour tout $x \in X$), alors i_X est une bijection, continue de (X, i) dans (X, d), mais ce n'est pas un homéomorphisme.

Une application $f : X \to Y$ est dite *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d_X(x, w) < \delta$ implique $d_Y(f(x), f(w)) < \varepsilon$ pour tous $x, w \in X$. Autrement dit, si

$$\text{(II.12)} \qquad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in X}{\forall}\ f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Bien entendu, toute application uniformément continue est continue. En effet, f est continue si (II.11) est valable pour tout $x \in X$, où δ dépend de ε

et de x, tandis que f est uniformément continue si (II.12), c'est-à-dire δ ne dépend que de ε [(6)].

Un homéomorphisme n'est pas forcément uniformément continu.

Exemple 3.5. Tout intervalle ouvert non vide de la droite réelle $\mathbb{R}$ est homéomorphe avec $\mathbb{R}$. Par exemple, $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme, car c'est une fonction bijective, dont la fonction réciproque, arctan est continue.

La fonction tan n'est pas uniformément continue, car si on considère une suite $(x_n)_n$ telle que $n = \tan x_n$, alors, d'après le théorème de Lagrange, il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $x_n < w_n < x_{n+1}$ et

$$1 = \tan x_{n+1} - \tan x_n = \frac{1}{\cos^2 w_n}(x_{n+1} - x_n).$$

On note que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{n\to\infty} \cos^2 w_n = 0$ et, par conséquent, $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, ce qui contredit la continuité uniforme de tan.

Une application $f : X \to Y$ est dite *lipschitzienne* s'il existe $r \geq 0$ tel que

$$d_Y(f(x_0), f(x_1)) \leq r \cdot d_X(x_0, x_1) \tag{II.13}$$

pour tous $x_0, x_1 \in X$. Le nombre r le plus petit pour lequel (II.13) soit valable s'appelle *constante de Lipschitz* de f.

Proposition 3.6. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $\varepsilon > 0$ il suffit de poser $\delta := \frac{\varepsilon}{r}$ (avec la convention $\frac{\varepsilon}{0} := \infty$) pour que la condition définissant la continuité en x soit vérifiée pour tout $x \in X$. □

Proposition 3.7. *Pour toute partie A, la distance de A est lipschitzienne, donc uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. D'après (II.9), $d(\cdot, A)$ est lipschitzienne (avec la constante 1), donc uniformément continue. □

Une application surjective $f : X \to Y$ est dite *isométrie* si

$$d_Y(f(x_0), f(x_1)) = d_X(x_0, x_1) \tag{II.14}$$

pour tous $x_0, x_1 \in X$.

Proposition 3.8. *Toute isométrie est un homéomorphisme uniforme.*

DÉMONSTRATION. Une isométrie est évidemment lipschitzienne, donc continue uniformément. D'autre part, une isométrie est injective, car si selon (II.14), $f(x_0) = f(x_1)$ implique $x_0 = x_1$, et l'application réciproque est également isométrie. □

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) := x^n$. Les fonctions f_0 et f_1 sont lipschitzienne (avec les constantes 0 et 1 respectivement), tandis que f_n sont continues mais pas uniformément continues pour $n \geq 2$.

4. Produits dénombrables des espaces métriques

Rappelons que si J et X_j, pour tout $j \in J$, sont des ensembles, alors la *projection* $\pi_k : \prod_{j\in J} X_j \to X_k$ est définie par

$$\pi_k(x) := x(k). \tag{II.15}$$

Soit $(X_1, d_1), (X_2, d_2), , \ldots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques. Une métrique d sur $\prod_{k=1}^n X_k$ est dite *métrique-produit* si

$$\lim_{p\to\infty} d(x_p, x) = 0 \iff \underset{1\le k\le n}{\forall} \lim_{p\to\infty} d_k(x_p(k), x(k)) = 0.$$

Autrement dit, une métrique-produit détermine la *convergence simple*, c'est-à-dire composante par composante, des suites dans le produit :

$$x = \lim_{p\to\infty} x_p$$

si $x(k) = \lim_{p\to\infty} x_p(k)$ pour tout $1 \le k \le n$.

D'après l'exercice 6, les fonctions

$$D_2(x,y) := (\sum_{k=1}^n d_k(x(k), y(k))^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{II.16}$$

$$D_1(x,y) := \sum_{k=1}^n d_k(x_k, y_k), \tag{II.17}$$

$$D_\infty(x,y) := \max_{1\le k\le n} d_k(x_k, y_k) \tag{II.18}$$

sont des métriques équivalentes et sont toutes des métriques-produit.

Soit maintenant $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. Par définition, l'*espace-produit* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est muni de la *convergence simple* des suites :

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \iff \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n).$$

Toute métrique sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ compatible avec la convergence simple est dite une *métrique-produit.*

D'après la proposition 2.6, toute métrique est topologiquement équivalente à une métrique bornée. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe sur X_n une métrique d_n bornée par 1 et compatible avec la convergence des suites dans X_n. Il est évident que la fonction

$$d(f,g) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(f(n), g(n)) \tag{II.19}$$

est une métrique (bornée par 2) sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Proposition 4.1. *La métrique* (II.19) *est une métrique produit.*

DÉMONSTRATION. Effectivement, si $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, alors

$$0 = \lim_{k\to\infty} d(f_k, f) \ge \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^n} d_n(f_k(n), f(n)) \ge 0,$$

donc $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement si $\lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(f(n), g(n)) \le \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous $f, g \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. D'autre part, pour tout $n < n_\varepsilon$ il existe $k_n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $d_n(f_k(n), f(n)) < \frac{\varepsilon}{4}$ pour $k > k_n(\varepsilon)$. Par conséquent, pour $k > \max_{n<n_\varepsilon} k_n(\varepsilon)$,

$$d(f_k, f) \le \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n<n_\varepsilon} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Corollaire 4.2. *Soit W un espace métrique. Une application $h : W \to \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est continue si et seulement si $\pi_n \circ h$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

DÉMONSTRATION. Si h est continue, alors $\pi_n \circ h$ est continue en tant qu'une composition d'applications continues.

Si h n'est pas continue, alors il existe $(w_k)_k$ et w pour lesquels $w = \lim_{k\to\infty} w_k$ et $h(w) \ne \lim_{k\to\infty} h(w_k)$, donc, en vertu de la proposition 4.1, il existe n pour lequel $\pi_n(h(w)) \ne \lim_{k\to\infty} \pi_n(h(w_k))$, c'est-à-dire $\pi_n \circ h$ n'est pas continue. □

Exemple 4.3. L'espace $X := [0,1]^{\mathbb{N}}$, où $[0,1]$ porte la métrique naturelle, s'appelle le *cube de Hilbert*.

Remarque 4.4. Tout espace métrique fini est discret. Donc tout produit fini $\prod_{k=1}^{n} \{0,1\}$ est discret. Cependant, la convergence du produit dénombrable infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}$ du même ensemble $\{0,1\}$, n'est pas discrète.

Exemple 4.5. Considérons l'espace discret $\{0,1\}$ de l'exemple 1.2 [7] et le *cube de Cantor* $\{0,1\}^{\mathbb{N}} := \prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}$ avec la convergence-produit.

D'après la proposition 4.1, $r = \lim_{k\to\infty} r_k$ si et seulement si $r(n) = \lim_{k\to\infty} r_k(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, puisque $X_n = \{0,1\}$ est un espace discret, il existe $k(n)$ tel que $r(n) = r_k(n)$ pour tout $k \ge k(n)$.

Dans (I.12) nous avons défini l'*ensemble de Cantor C*. Il consiste des nombres $r \in [0,1]$, dont une représentation ternaire

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{3^n}$$

est telle que $r(n) \in \{0,2\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On munit C de la métrique héritée de $\mathbb{R}$.

Proposition 4.6. *Soit $(r_k)_k$ une suite d'éléments de l'ensemble de Cantor C. Alors $r = \lim_{k\to\infty} r_k$ si et seulement si pour tout n il existe $k(n)$ tel que $r_k(n) = r(n)$ pour tout $k > k(n)$.*

7. Si d est une métrique sur $\{0,1\}$, alors $d(0,0) = 0, d(1,1) = 0$ et $r := d(0,1) > 0$. Donc $d(x,y) = r \cdot i(x,y)$, où i est la métrique de l'exemple 1.2.

DÉMONSTRATION. Soit $r = \lim_{k\to\infty} r_k$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}_1$ tel que $r(n) \neq r_k(n)$ pour l'infinité de $k \in \mathbb{N}_1$. Soit n_0 le plus petit n avec cette propriété. Alors d'après (I.13),

$$\frac{1}{3^{n_0}} \leq |r - r_k|$$

pour une infinité de k, contredisant l'hypothèse.

Réciproquement, si $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n>n_\varepsilon}^{\infty} \frac{|x(n) - y(n)|}{3^n} \leq \sum_{n>n_\varepsilon}^{\infty} \frac{2}{3^n} < \varepsilon$$

pour tous $x, y \in C$. D'autre part, d'après l'hypothèse, pour tout $n < n_\varepsilon$ il existe $k(n)$ tel que $r_k(n) = r(n)$ pour chaque $k > k(n)$. Donc pour tout $k > \max\{k(n) : 1 \leq n \leq n_\varepsilon\}$,

$$|r - r_k| \leq \sum_{n>n_\varepsilon}^{\infty} \frac{|r_k(n) - r(n)|}{3^n} < \varepsilon.$$

□

Corollaire 4.7. *L'ensemble de Cantor C est le cube de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont homéomorphes.*

5. Intérieur, fermeture, ouverts et fermés

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. L'*intérieur* $\operatorname{int} A$ de A est défini comme l'ensemble des x tels que $A \in \mathcal{V}(x)$. Ainsi les propriétés de l'ensemble des voisinages (v0)-(v4) sont équivalentes celles de l'intérieur : pour tous $A, B, A_0, A_1 \subset X$,

(i0) $$X \subset \operatorname{int} X,$$

(i1) $$\operatorname{int} A \subset A,$$

(i2) $$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B,$$

(i3) $$\operatorname{int} A_0 \cap \operatorname{int} A_1 \subset \operatorname{int}(A_0 \cap A_1),$$

(i4) $$\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A.$$

La *fermeture* $\operatorname{cl} A$ (dite aussi, l'*adhérence* $\operatorname{adh} A$) de A est définie comme l'ensemble des points x tels que $V \cap A \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$.

On observe que

$$\operatorname{cl} A = (\operatorname{int} A^c)^c.$$

Effectivement, $x \notin \operatorname{cl} A$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \varnothing$, c'est-à-dire $V \subset A^c$, donc $A^c \in \mathcal{V}(x)$.

D'après la loi de De Morgan, pour tous $A, B, A_0, A_1 \subset X$,

(c0) $$\operatorname{cl} \varnothing \subset \varnothing,$$

(c1) $$A \subset \operatorname{cl} A,$$

(c2) $$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B,$$

(c3) $$\operatorname{cl}(A_0 \cup A_1) \subset \operatorname{cl} A_0 \cup \operatorname{cl} A_1,$$

(c4) $$\operatorname{cl}(\operatorname{cl} A) = \operatorname{cl} A.$$

Parfois, pour plus de précision, on désigne les opérations de l'intérieur et de la fermeture sur X par $\operatorname{int}_X A$ et $\operatorname{cl}_X A$ au lieu de $\operatorname{int} A$ et $\operatorname{cl} A$ respectivement.

Proposition 5.1. *Dans tout espace métrique, $x \in \operatorname{cl} A$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A telle que*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

DÉMONSTRATION. Par définition, $x \in \operatorname{cl} A$ si $V \cap A \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Ainsi $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de A telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe n tel que $x_n \in V \cap A$. □

Il s'ensuit que la fermeture et, de manière équivalente, l'intérieur et les voisinages, sont déterminés par la convergence des suites et non par des métriques particulières qui lui correspondent.

Une partie A de X s'appelle *ouverte* si $A \in \mathcal{V}(x)$ pour tout $x \in A$.

Proposition 5.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors*

(1) L'ensemble vide et l'espace tout entier sont ouverts;

(2) Toute union d'ouverts est ouverte;

(3) Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\varnothing$ est ouvert, car il n'y a pas de $\operatorname{int} \varnothing = \varnothing$. L'espace entier X est ouvert, car $X \in \mathcal{V}(x)$ pour tout $x \in X$.

Si $\mathcal{D}$ est une famille d'ouverts et $x \in \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$, alors il existe $D_0 \in \mathcal{D}$ tel que $x \in D_0 \subset \operatorname{int} D_0 \subset \operatorname{int} \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$. Si $\mathcal{D}$ est une famille finie d'ouverts, et $x \in \bigcap_{D\in\mathcal{D}} D \subset \bigcap_{D\in\mathcal{D}} \operatorname{int} D = \operatorname{int} \bigcap_{D\in\mathcal{D}} D$. □

Les propriétés d'un espace métrique qui peuvent être formulées en termes des ouverts s'appellent *topologiques*.

Proposition 5.3. *Dans tout espace métrique, la boule stricte $B(x, r)$ est ouverte pour tous $x \in X$ et $r > 0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $y \in B(x, r)$, c'est-à-dire $d(y, x) < r$. Montrons qu'il existe $s > 0$ tel que $B(y, s) \subset B(x, r)$. Soit $s := r - d(y, x)$ et $z \in B(y, s)$, c'est-à-dire $d(y, z) < r - d(y, x)$. Par conséquent,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(y, x) = r,$$

c'est-à-dire $z \in B(x,r)$, ce qui complète la preuve. □

Proposition 5.4. *Dans tout espace métrique, la boule large $B^{\leq}(x,r)$ est fermée pour tous $x \in X$ et $r > 0$.*

DÉMONSTRATION. Si $y \notin B^{\leq}(x,r)$, alors $d(y,x) > r$. Montrons que si $s := d(y,x) - r$, alors $B^{<}(y,s) \cap B^{\leq}(x,r) = \varnothing$, c'est-à-dire $y \notin \mathrm{cl}(B^{\leq}(x,r))$. Effectivement, si $z \in B^{<}(y,s) \cap B^{\leq}(x,r)$, alors $d(z,y) < s$ et $d(z,x) \leq r$, donc $d(y,x) \leq d(z,y) + d(z,x) < s + r = d(y,x) - r + r = d(y,x)$, ce qui est une contradiction. □

En conséquence,

Corollaire 5.5. *Dans tout espace métrique, $B(A,r)$ est ouverte pour tous $A \subset X$ et $r > 0$.*

DÉMONSTRATION. (l'exercice 17) □

Une partie F d'un espace métrique (X,d) est dite *fermée* si $X \setminus F$ est ouverte. Ainsi

Corollaire 5.6. *Soit (X,d) un espace métrique. Alors*

(1) L'ensemble vide et l'espace tout entier sont fermés ;

(2) Toute intersection de fermés est fermée ;

(3) Toute union finie de fermés est fermée.

Les ouverts et les fermés sont déterminés par l'intérieur, donc, de façon équivalente, par la fermeture, ainsi que par les voisinages. La réciproque est aussi vraie. En effet,

Proposition 5.7. *Pour toute partie A d'un espace métrique X,*

$$\mathrm{cl}\, A = \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}_A} F,$$

où $\mathcal{F}_A$ désigne l'ensemble de tous les fermés incluant A.

DÉMONSTRATION. L'idempotence de cl implique que $\mathrm{cl}\, A$ est fermé, donc $\mathrm{cl}\, A \in \mathcal{F}_A$, donc $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F \subset \mathrm{cl}\, A$. D'autre part, $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ est un fermé incluant A et, par conséquent,

$$\mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl} \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}_A} F \subset \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}_A} \mathrm{cl}\, F \subset \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}_A} F.$$

□

Exemple 5.8 (espace discret). Considérons un espace métrique discret sur un ensemble X, c'est-à-dire les suites convergentes sont stationnaires. La métrique de l'exemple 1.2 est compatible. Par conséquent, $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si $x \in V$; en particulier, $\{x\} \in \mathcal{V}(x)$. En conséquence, $\mathrm{int}\, A = A = \mathrm{cl}\, A$ pour toute partie A de X. Donc toute partie de X est ouverte et fermée. Ainsi toute application de X dans un autre espace métrique est continue.

Soit X un espace métrique et $x \in X$. Alors x est dit un *point d'accumulation* d'une partie A de X si $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$. Notons que x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \operatorname{cl}(A \setminus \{x\})$.

L'ensemble $\partial A := \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} A^c$ est dit la *frontière* de A. Bien sûr, une partie d'un espace métrique et son complémentaire ont la même frontière.

Observons que la frontière de A consiste des points qui sont dans la fermeture mais pas dans l'intérieur de A. En effet,

$$\partial A := \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} A^c = \operatorname{cl} A \cap (\operatorname{cl} A^c)^{c\,c} = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A.$$

Il est bien évident que

Proposition 5.9. *Une partie A est ouverte si et seulement si $A \subset \operatorname{int} A$. Une partie A est fermée si et seulement si $\operatorname{cl} A \subset A$.*

Il s'ensuit que dans un espace métrique, les *ouverts*, les *fermés*, l'*intérieur* et la *fermeture* sont des expressions équivalentes de la même structure, dite *topologie* d'un espace métrique. La proposition 5.1 montre qu'ils sont caractérisés par la convergence des suites. Mais, à leur tour, ils caractérisent cette convergence. Effectivement, comme tout voisinage d'un point inclut son voisinage ouvert, la proposition 2.2 entraîne que

Proposition 5.10. *Dans un espace métrique, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si pour tout ouvert O tel que $x \in O$, l'ensemble $\{n : x_n \notin O\}$ est fini.*

6. Adhérence de suite

Un élément x d'un espace métrique appartient à l'*adhérence* $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n$ d'une suite $(x_n)_n$ si $V \cap \{x_m : m \geq n\} \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit,

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_m : m \geq n\}.$$

Bien entendu,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \Longrightarrow \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \{x\},$$

car si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ pour toute suite $(x_{n_k})_k$ extraite de $(x_n)_n$, donc $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \{x\}$. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple 6.1. Dans $\mathbb{R}$ on définit $x_n := n$ pour n pair et $x_n := \frac{1}{n}$ si n est impair. Alors $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \{0\}$, mais $(x_n)_n$ ne converge pas.

Pour une suite $(x_n)_n$ dans un espace discret,

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \ker_{n\to\infty} x_n,$$

car dans un espace discret, $\operatorname{cl} A = A$ pour toute partie A.

Proposition 6.2. *Dans un espace métrique,*

$$x \in \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n$$

si et seulement s'il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

DÉMONSTRATION. Si $(x_{n_k})_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$ convergeant vers x, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe k_V tels que $x_{n_k} \in V$ pour tout $k > k_V$. Puisque $(n_k)_k$ tend vers ∞, pour tout n il existe $k > k_V$ tel que $n_k > n$, donc $V \cap \{x_m : m > n\} \neq \varnothing$.

Réciproquement, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_m : m > n\}$ si et seulement si $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap \{x_m : m > n\} \neq \varnothing$ pour tout n, alors il existe $m_n > n$ tel que $x_{m_n} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Donc $\lim_{n\to\infty} x_{m_n}$ et $(m_n)_n$ tend vers ∞, donc $(x_{m_n})_n$ est une suite extraite de $(x_n)_n$. □

Exemple 6.3. Si $(q_n)_n$ est une suite injective telle que $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, alors $\operatorname{adh}_{n\to\infty} q_n = \mathbb{R}$.

Exercices

Solutions : pages 277-286.

(1) ⋆ Soit X un ensemble quelconque. Montrer que la fonction $i : X \times X \to \mathbb{R}$ définie par $i(x, y) := 0$, si $x = y$ et $i(x, y) := 1$, si $x \neq y$, est une métrique.

(2) ⋆ Décrire toutes les métriques sur $\{0, 1\}$.

(3) ⋆ Soit (X, d) est un espace métrique et $t > 0$. Vérifier que la fonction

$$\delta(x, y) := \min(d(x, y), t)$$

est une métrique.

(4) Montrer que si d est une métrique sur X, alors

$$h(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une métrique bornée par 1 topologiquement équivalente à d.

(5) Soit $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ des normes sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$\|x\|_2 := \left(\sum\nolimits_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|x\|_1 := \sum\nolimits_{k=1}^n |x_k|,$$
$$\|x\|_\infty := \max\nolimits_{1\le k\le n} |x_k|.$$

Définissons les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_2(x, y) := \|x - y\|_2,$$
$$d_1(x, y) := \|x - y\|_1,$$
$$d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty.$$

Montrer que

(a) d_2, d_1, d_∞ sont des métriques,

(b) pour tout x,

(II.20) $$\tfrac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1\,,$$

donc pour tous x, y,

$$\tfrac{1}{n}d_1(x,y) \le d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y).$$

(6) Soit $(X_1, g_1), (X_2, g_2), \ldots, (X_n, g_n)$ des espaces métriques et

$$D_2(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} g_k(x_k, y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$D_1(x,y) := \sum_{k=1}^{n} g_k(x_k, y_k),$$
$$D_\infty(x,y) := \max_{1\le k\le n} g_k(x_k, y_k).$$

Montrer que les fonctions D_2, D_1, D_∞ sont des métriques équivalentes sur $\prod_{k=1}^{n} X_k$.

(7) Soit X, Y deux espaces métriques et d la métrique de Y. Montrer que

$$D(f,g) := \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)),$$

est une métrique sur $C_b(X,Y)$.

(8) Soit (X,d) un espace métrique et $r > 0$. Considérons la relation B_r suivante

$$(x,y) \in B_r \iff d(x,y) < r.$$

Montrer que

(a) $B_r^{-1} = B_r$,

(b) $y \in B_r A \iff B_r\{y\} \cap A \neq \varnothing$,

(c) $D \cap B_r A \neq \varnothing \iff B_r D \cap A \neq \varnothing$.

(9) Montrer que $\operatorname{diam}(B_r A) \le \operatorname{diam}(A) + 2r$.

(10) Montrer que l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de x vérifie (v0)-(v4).

(11) Montrer que toute suite convergente principale est stationnaire.

(12) Montrer que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si pour toute suite extraite $(x_{n_k})_k$ il existe une suite extraite $(x_{n_{k_p}})_p$ telle que $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_{k_p}}$.

(13) Montrer que si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $(n_p)_p, (k_p)_p$ tendant vers ∞ telles que $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_p,k_p}$.

(14) Soit d une métrique sur X. Montrer que

(a) pour tout $y \in X$ la fonction $x \mapsto d(x,y)$ est continue,

(b) pour tous $x, x', y, y' \in X$,

$$\left|d(x,y) - d(x',y')\right| \le d(x,x') + d(y,y'),$$

(c) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue.

(15) ⋆ Déduire de l'exercice 14 la proposition 5.3 (toute boule stricte est ouverte).

(16) ⋆ Déduire de l'exercice 14 la proposition 5.4 (toute boule large est fermée).

(17) ⋆ Soit $B(A,r) := \{y \in X : \exists_{x\in A} d(x,y) < r\}$ et A une partie non vide. Montrer que

(a) $B(A,r)$ est ouverte pour tout $r > 0$,

(b) $\bigcap_{r>0} B(A,r) = \operatorname{cl} A$.

(18) Soit C l'ensemble de Cantor. Montrer que

(a) C est homéomorphe à son carré $C \times C$,

(b) C est homéomorphe à C^n pour tout $n \in \mathbb{N}_1$,

(c) C est homéomorphe à $C^{\aleph_0}$.

(19) ⋆ Montrer que si un espace métrique a au moins 2 éléments, alors il admet au moins 4 ouverts différents.

(20) ⋆ Déterminer $\operatorname{int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ et $\operatorname{cl}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$.

(21) ⋆ Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

(22) ⋆ Montrer que

(a) $A \subset C \Longrightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} C$,

(b) $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$,

(c) $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$,

(d) il existe A, B tels que $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B \neq \operatorname{cl}(A \cap B)$.

(23) ⋆ Si X est un espace métrique et Y est un sous-espace de X, alors pour une partie A de Y, il existe sa fermeture $\operatorname{cl}_Y A$ dans Y, ainsi que sa fermeture $\operatorname{cl}_X A$ dans X. Observer que

(a) $\operatorname{cl}_Y A = Y \cap \operatorname{cl}_X A$,

(b) si Y est fermé dans X, alors $\operatorname{cl}_Y A = \operatorname{cl}_X A$,

(c) si Y est dense dans X et O est un ouvert de X, alors

$$\operatorname{cl}_X (O \cap Y) = \operatorname{cl}_X O.$$

(24) Montrer que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est l'union dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.

(25) Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de termes distincts telle que $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} B(q_n, \tfrac{1}{n^2}).$$

Montrer que (a) A est ouvert, (b) $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}$, (c) $A \neq \mathbb{R}$.

(26) Soit $\{X_j : j \in J\}$ une famille d'ensemble tels que $X_j \cap X_{j'} = \varnothing$ si $j \neq j'$. Soit $X := \bigcup_{j\in J} X_j$. Notons j_x l'élément de J pour lequel $x \in X_j$. Soit d_j une métrique sur X_j, bornée par 1, pour tout $j \in J$. Montrer que

(a) la fonction

$$d(x,y) := \begin{cases} d_j(x,y), & \text{si } \exists_{j\in J}\, x,y \in X_j, \\ 1, & \text{autrement,} \end{cases}$$

est une métrique.

(b) si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors il existe n_0 et $j \in J$ tel que $x_n \in X_j$ pour tout $n \geq n_0$.

(c) la partie X_j de X est ouverte et fermée pour tout $j \in J$.

(d) Observer que si $X_j := \{x_j\}$, alors (X, d) est un espace discret.

(27) $\star$ Soit X, Y espaces métriques et $f : X \to Y$. Montrer les équivalences :

(a) f est continue,

(b) $f^{-1}(O)$ est ouverte pour tout ouvert O de Y,

(c) $f^{-1}(F)$ est fermée pour tout fermé F de Y.

(28) $\star$ Une application $f : X \to Y$ est *ouverte* si $f(O)$ est ouvert pour tout ouvert O de X. Elle est *fermée* si $f(F)$ est fermé pour tout fermé F de X. Donner un exemple d'application continue injective qui n'est ni ouverte ni fermée.

(29) Si $f : X \to Y$, alors $\mathrm{Gr}(f) := \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ est le *graphe* de f. Montrer que

(a) si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé dans l'espace produit $X \times Y$,

(b) il existe une fonction qui n'est pas continue et dont le graphe est fermé,

(c) si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est homéomorphe à X.

CHAPITRE III

Espaces topologiques

Le lecteur qui s'intéresse principalement aux espaces métriques peut omettre ce chapitre lors de la première lecture sans incidence particulière sur la compréhension de la partie métrique.

Les espaces métriques se sont avérés insuffisants pour exprimer des concepts de distance et de continuité dans beaucoup de modèles mathématiques. Par exemple, la convergence simple de fonctions à valeurs réelles sur un ensemble non dénombrable n'admet pas de métrique. Dans la théorie des espaces normés, la convergence simple est intrinsèque aux topologies dites *faibles.*

Les notions de *fermé, ouvert, fermeture, intérieur, voisinage,* etc. sont apparues chez Cantor, Peano, Jordan, Riesz et autres [(1)], d'abord dans le contexte des espaces euclidiens. Chacune d'elles peut être utilisée afin de définir les espaces topologiques.

FIGURE III.1. Camille Jordan (1838-1922), Kazimierz Kuratowski (1896-1980) et Leopold Vietoris (1891-2002)

Les *espaces topologiques* en toute généralité paraissent en 1927 dans *Mengenlehre* de Felix Hausdorff. Jusque dans les années soixante du vingtième siècle le problème de métrisabilité des espaces topologiques (c'est-à-dire des conditions topologiques garantissant l'existence d'une métrique compatible) fut un des problèmes centraux de la topologie.

Ultérieurement, le cadre des espaces topologiques s'est avéré, à son tour, trop étroit, en particulier dans le cas des structures d'applications continues.

1. Plus précisément, Cantor introduit en 1872 *ensemble dérivé* et *voisinage* et en 1884 *ouvert* et *fermé*, Peano en 1887 *intérieur, fermeture* et *frontière*, qui réapparaissent chez Jordan en 1892.

Ainsi est née la *théorie des convergences* (cf., [9]). Elle est entrée dans la phase mûre en 1947/48 avec les *Convergences* [6] de Gustave Choquet (1915-2006) [(2)].

1. Topologies

Dans le chapitre II nous avons introduit les notions d'*ouvert* et de *fermé* d'un espace métrique, ainsi que celles d'*intérieur* et de *fermeture*. Chacune de ces notions détermine toutes les autres sans faire référence à la métrique !

Les faits exprimables en termes d'ouverts furent appelés *topologiques* (donc, de façon équivalente, en termes de fermés, ou de fermeture ou d'intérieur). La *topologie* associée à un espace métrique est la structure définie par la famille des ouverts, ou par la famille des fermés, ou par l'opération de l'intérieur ou bien par celle de la fermeture. Aucun de ces aspects n'a la primauté par rapport aux autres.

Dans le cadre général abstrait, on définit une *topologie* sur un ensemble X en précisant, de manière équivalente, la famille des ouverts de (cette topologie), ou la famille des fermés, ou l'opérateur d'intérieur ou bien l'opérateur de fermeture. Pour désigner des topologies, on emploie souvent des caractères grecs, par exemple, ξ, τ, σ. Un ensemble muni d'une topologie est dit *espace topologique*.

Une famille $\mathcal{O}$ de parties d'un ensemble X vérifiant

$$\varnothing, X \in \mathcal{O}, \tag{O1}$$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O} \Longrightarrow \bigcup\nolimits_{O\in\mathcal{D}} O \in \mathcal{O}, \tag{O2}$$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{O}, \operatorname{card}\mathcal{D} < \infty \Longrightarrow \bigcap\nolimits_{O\in\mathcal{D}} O \in \mathcal{O}, \tag{O3}$$

est dite une *famille des ouverts (pour une topologie)*. S'il y a plusieurs topologies avec le même ensemble sous-jacent X, par exemple, τ, ξ, ζ, alors on notera $\mathcal{O}_\tau, \mathcal{O}_\xi, \mathcal{O}_\zeta$ les familles des ouverts correspondantes.

Une partie F d'un espace topologique est dite *fermée* si $F^c = X \setminus F$ est ouverte. Bien entendu, la famille $\mathcal{F}$ des *fermés (pour une topologie)* vérifie les conditions duales, à savoir

$$\varnothing, X \in \mathcal{F}, \tag{F1}$$

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\nolimits_{F\in\mathcal{C}} F \in \mathcal{F}, \tag{F2}$$

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{F}, \operatorname{card}\mathcal{C} < \infty \Longrightarrow \bigcup\nolimits_{F\in\mathcal{C}} F \in \mathcal{F}. \tag{F3}$$

Exemple 1.1. Si X est un ensemble, alors la famille 2^X de toutes les parties de X est une famille des ouverts pour une topologie. Autrement dit, toute partie de X est ouverte. Cette topologie s'appelle la *topologie discrète* de X, que l'on désigne par $\iota = \iota_X$ (iota). Mais, 2^X vérifie également, les

2. Les convergences sont pour les topologies ce que les nombres complexes sont pour les nombres réels, car beaucoup de problèmes formulés en termes topologiques n'ont de solutions que dans le cadre des convergences.

axiomes d'une famille des fermées, ce qui est normal, car l'ensemble des parties complémentaires de 2^X est 2^X.

Exemple 1.2. La famille $\{\varnothing, X\}$ est une famille des ouverts pour une topologie. C'est la *topologie antidiscrète* de X, que l'on désigne par $o = o_X$ (omicron). Bien sûr, $\{\varnothing, X\}$ est également une famille des fermés pour une topologie.

Exemple 1.3. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie O est dite ouverte si pour tout $x \in O$ il existe $r > 0$ tel que

$$B_r(x) \subset O.$$

Nous avons montré (la proposition II.5.2) que l'ensemble de tous les ouverts par rapport à d, vérifie les hypothèses des ouverts pour une topologie.

On a donc plusieurs topologies sur un ensemble X pourvu que la cardinalité de X soit supérieure à 1, en particulier, la topologie discrète ι_X est différente de la topologie antidiscrète o_X si $\operatorname{card} X > 1$. Si $\operatorname{card} X = 2$, alors il y a 4 topologies sur X (Voir l'exercice 7).

Soit X un espace topologique. Une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts de X s'appelle une *base d'ouverts* si pour tout $x \in X$ et tout ouvert O tel que $x \in O$, il existe un élément B de $\mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset O$.

Une famille $\mathcal{S}$ d'ouverts est dite une *sous-base d'ouverts* si les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ forment une base d'ouverts.

Le *poids* d'un espace topologique est défini comme le plus petit cardinal κ tel qu'il existe une base d'ouverts de cardinalité κ.

Proposition 1.4. *Une famille d'ouverts $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts si et seulement si tout ouvert est une union d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. Soit O un ouvert. Alors pour tout $x \in O$ il existe $B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subset O$. Donc

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B_x \subset O.$$

Réciproquement, supposons que pour tout ouvert O il existe $\mathcal{B}_O \subset \mathcal{B}$ telle que $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_O} B$. Si $x \in O$, alors il existe $B \in \mathcal{B}_O$ tel que $x \in B \subset O$, donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts. □

Une partie V d'un espace topologique X est dite *un voisinage de x* s'il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$.

L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x dans un espace topologique a les mêmes propriétés (v0)-(v4) de la page 26 que dans un espace métrique.

Une famille $\mathcal{B}$ de voisinages de x telle que pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset V$ s'appelle une *base de voisinages de x*.

Le *caractère* $\chi(x)$ d'un élément x d'un espace topologique est le plus petit cardinal κ tel qu'il existe une base de voisinages de x de cardinalité κ. Le *caractère* d'un espace topologique X est par définition $\chi(X) := \sup\{\chi(x) : x \in X\}$ [3].

Si ξ, τ sont deux topologies avec le même ensemble sous-jacent X, on note $\mathcal{O}_\xi, \mathcal{O}_\tau$ les familles d'ouverts correspondantes. On dit que ξ est *plus fine* que τ,

$$\xi \geq \tau$$

si $\mathcal{O}_\tau \subset \mathcal{O}_\xi$. C'est une relation d'ordre dans l'ensemble de toutes les topologies sur un ensemble.

Bien entendu, plus la topologie est fine, plus elle a des fermés. Sur un ensemble donné, la topologie discrète est la plus fine, et la topologie chaotique la plus grossière. On démontre facilement que

Proposition 1.5. *Si ξ, τ sont deux topologies sur X, alors $\tau \leq \xi$ si et seulement si $\mathcal{V}_\tau(x) \subset \mathcal{V}_\xi(x)$.*

Soit X un espace topologique. L'*intérieur* $\operatorname{int}_X A$ ($\operatorname{int} A$) de A est défini comme l'ouvert le plus grand inclus dans A. La *fermeture* $\operatorname{cl}_X A$ ($\operatorname{cl} A$) de A est défini comme le fermé le plus petit incluant A.

Ces définitions sont bien fondées. Prenons, par exemple, celle de la fermeture. Soit $A \subset X$ où X est un espace topologique. Alors

$$\mathcal{F} := \{F \subset X : F \text{ fermé et } A \subset F\}$$

n'est pas vide, car $X \in \mathcal{F}$. D'autre part, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$ est un fermé, et $A \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$. Par conséquent, $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \in \mathcal{F}$ est, bien évidemment, le plus petit élément de $\mathcal{F}$, donc $\operatorname{cl} A = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$.

Il s'ensuit des définitions que

(III.1) $$x \in \operatorname{int} A \iff A \in \mathcal{V}(x).$$

D'autre part,

(III.2) $$\operatorname{cl} A = (\operatorname{int} A^c)^c.$$

Les opérations d'intérieur et de fermeture ont les mêmes propriétés que dans le cas métrique (i0)-(i4) et (c0)-(c4) respectivement (page 35).

Bien entendu, A est ouvert si et seulement si $A \subset \operatorname{int} A$, et A est fermé si et seulement si $\operatorname{cl} A \subset A$. Par conséquent, l'opération d'intérieur et de fermeture déterminent la topologie. Il découle des définitions que

Proposition 1.6. *Si ξ, τ sont deux topologies sur X, alors $\tau \leq \xi$ si et seulement si $\operatorname{cl}_\xi A \subset \operatorname{cl}_\tau A$ pour tout $A \subset X$.*

Démonstration. Par définition, $\operatorname{cl}_\xi A$ est l'intersection des ξ-fermés incluant A. Puisque il y a moins de τ-fermés que de ξ-fermés, la fermeture $\operatorname{cl}_\tau A$, l'intersection des τ-fermés incluant A, inclut $\operatorname{cl}_\xi A$. □

---

3. Le caractère est bien défini. Effectivement, soit $\lambda(x)$ l'ordinal-cardinal tel que $\operatorname{card}\lambda(x) = \chi(x)$, et $A := \{\lambda(x) : x \in X\}$. Comme A est un ensemble d'ordinaux, $\sup A$ existe, et $\chi(X) = \operatorname{card}(\sup A)$ (Voir le chapitre A.

Corollaire 1.7. *Si ξ, τ sont deux topologies sur X, alors $\tau \le \xi$ si et seulement si $\operatorname{int}_\tau A \subset \operatorname{int}_\xi A$ pour tout $A \subset X$.*

Proposition 1.8. *Dans un espace topologique, $x \in \operatorname{cl} A$ si et seulement si $O \cap A \neq \varnothing$ pour tout ouvert O contenant x.*

DÉMONSTRATION. S'il existe un ouvert O tel que $x \in O$ et $O \cap A = \varnothing$, alors O^c est un fermé qui inclut A et $x \notin O^c$. Puisque $\operatorname{cl} A$ est le plus petit fermé tel que $A \subset \operatorname{cl} A$, alors $\operatorname{cl} A \subset O^c$, donc $x \notin \operatorname{cl} A$. Réciproquement, $x \notin \operatorname{cl} A$ implique que $O := (\operatorname{cl} A)^c$ est un ouvert disjoint de A et contenant x. □

Corollaire 1.9. *Dans un espace topologique, $x \in \operatorname{cl} A$ si et seulement si $V \cap A \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$.*

Une partie A d'un espace topologique X est *dense* si $\operatorname{cl} A = X$. Comme pour les espaces métriques, la *frontière* de A est définie par $\partial A := \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} A^c$.

2. Séparation, régularité, normalité

Une topologie est appelée *séparée* (ou de *Hausdorff*) si pour chaque couple d'éléments distincts x_0, x_1, il existe deux ouverts O_0, O_1 tels que $x_0 \in O_0, x_1 \in O_1$ et $O_0 \cap O_1 = \varnothing$. Bien entendu, la topologie chaotique sur X n'est séparée que si $\operatorname{card} X \le 1$.

Il s'ensuit que tout singleton d'un espace topologique séparé est fermé. Par conséquent, toute partie finie d'un espace topologique séparé est fermée (l'exercice 5). Toute topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée (l'exercice 6).

Une topologie séparée est dite *régulière* si pour tout point x et chaque fermé F tel que $x \notin F$ il existe deux ouverts O_0, O_1 tels que $F \subset O_0, x \in O_1$ et $O_0 \cap O_1 = \varnothing$.

Exemple 2.1 (topologie séparée non régulière). Soit $X := [0,1]$. Notons ν la topologie usuelle de $[0,1]$. On définit une topologie ξ en termes des voisinages : si $x \neq 0$ alors $\mathcal{V}_\xi(x) = \mathcal{V}_\nu(x)$; $V \in \mathcal{V}_\xi(0)$ si $V = U \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}$, où $U \in \mathcal{V}_\nu(0)$. C'est une topologie séparée, car elle est plus fine que la topologie usuelle.

La topologie ξ n'est pas régulière. Notons d la (restriction de la) métrique euclidienne sur $[0,1]$. S'il y avait deux ouverts disjoints G_0, G_1 pour lesquels $0 \in G_0$ et $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\} \subset G_1$, alors il existerait $r > 0$ tel que

$$B_d(0,r) \setminus \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\} \subset G_0$$

et, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $\varepsilon_n > 0$ tels que $B_d(\frac{1}{n}, \varepsilon_n) \subset G_1$. Il s'ensuit que $G_0 \cap G_1 \neq \varnothing$.

L'essence de cet exemple peut être exprimée en termes d'une bisuite munie d'une topologie particulière.

Exemple 2.2 (bisuite irrégulière). Soit

$$X := \{x_\infty\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}.$$

On munit X d'une topologie définie comme suit :

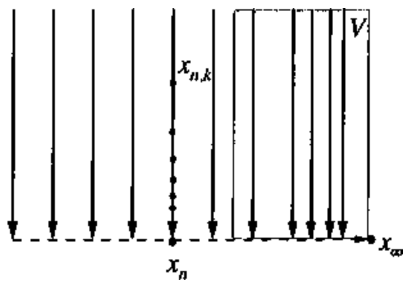


FIGURE III.2. L'ensemble $F := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fermé. Tout voisinage V de x_∞ inclut $\{x_{n,k} : n \geq n_V, k \in \mathbb{N}\}$, où $n_V \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on ne peut pas séparer x_∞ de F par des ouverts.

$V \in \mathcal{V}(x_\infty)$ s'il existe $n_V \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_\infty\} \cup \{x_{n,k} : n \geq n_V, k \in \mathbb{N}\} \subset V$;
$V \in \mathcal{V}(x_n)$ s'il existe k_V tel que $\{x_n\} \cup \{x_{n,k} : k \geq k_V\} \subset V$;
$V \in \mathcal{V}(x_{n,k})$ si $\{x_{n,k}\} \subset V$, autrement dit, les points $x_{n,k}$ sont isolés.
Il est immédiat que c'est une topologie séparée.

Elle n'est pas régulière. Effectivement, on note que $F := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fermé et $x_\infty \notin F$. Tout ouvert G contenant x_∞, inclut

$$\{x_\infty\} \cup \{x_{n,k} : n \geq n_G, k \in \mathbb{N}\}$$

pour un $n_G \in \mathbb{N}$. D'autre part, un ouvert H incluant F, inclut $\{x_n\} \cup \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \geq k_{H,n}\}$. Il s'ensuit que $G \cap H \neq \varnothing$.

Une topologie séparée est dite *normale* si pour chaque couple de parties fermées disjointes F_0, F_1, il existe deux ouverts O_0, O_1 tels que $F_0 \subset O_0, F_1 \subset O_1$ et $O_0 \cap O_1 = \varnothing$. Bien sûr, toute topologie normale est régulière. Des exemples de topologies régulières non normales sont un peu plus difficiles à construire (cf., les exercices VI.13 et A.8).

Proposition 2.3. *Soit X un espace topologique séparé. Si pour tout couple de fermés disjoints F_0, F_1 il existe une suite $(W_n)_n$ d'ouverts telle que*

$$F_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n \subset X \setminus F_1, \tag{III.3}$$

alors X est normal.

DÉMONSTRATION. Soit F_0, F_1 deux fermés disjoints d'un espace séparé X. Soit $(W_n)_n$ une suite d'ouverts vérifiant (III.3). En échangeant les rôles de F_0 et F_1, la condition nous assure l'existence d'une suite $(V_n)_n$d'ouverts telle que

$$F_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} V_n \subset X \setminus F_0. \tag{III.4}$$

Posons

$$G_n := W_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \mathrm{cl}\, V_k \text{ et } H_n := V_n \setminus \bigcup_{k \leq n} \mathrm{cl}\, W_k,$$

et observons que G_n et H_n sont ouverts, $F_0 \subset G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ et $F_1 \subset H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Il suffit donc de prouver que $G \cap H = \varnothing$. Si $x \in G \cap H$, alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x \in G_n \cap H_m$. Ainsi, d'une part $x \in W_n$ et $x \notin \mathrm{cl}\, V_k$ pour tout $k \leq n$ et, de l'autre, $x \in V_m$ et $x \notin \mathrm{cl}\, W_k$ pour tout $k \leq m$, ce qui est une contradiction. Nous avons montré que X est normal. $\square$

3. Convergence des suites

Par définition, une suite $(x_n)_n$ *converge* vers x dans un espace topologique si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $n_V \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour $n > n_V$. En reformulant la définition, on obtient

Proposition 3.1. *Une suite $(x_n)_n$ converge vers x si et seulement si l'ensemble $\{n : x_n \notin V\}$ est fini pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$.*

Dans un espace topologique, une suite peut converger vers plusieurs points. C'est pourquoi la notation $\lim_{n\to\infty} x_n$ adoptée dans des espaces métriques et dénotant la limite de $(x_n)_n$, n'est pas adéquate.

On note

$$\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n$$

la *limite* de $(x_n)_n$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments vers lesquels $(x_n)_n$ converge. Par conséquent, une suite $(x_n)_n$ est convergente si et seulement si $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n \neq \varnothing$. Si $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n$ est un singleton, alors on désigne $\lim_{n\to\infty} x_n$ son élément.

Si $\xi \geq \tau$, alors

$$\mathrm{Lim}^{\xi}_{n\to\infty} x_n \subset \mathrm{Lim}^{\tau}_{n\to\infty} x_n,$$

car $\mathcal{V}_\xi(x)$ a plus d'éléments que $\mathcal{V}_\tau(x)$.

Exemple 3.2. Soit X un ensemble infini muni de la topologie chaotique o. Alors toute suite $(x_n)_n$ converge vers tout point : $\mathrm{Lim}_n\, x_n = X$.

Effectivement, $V \in \mathcal{V}_o(x)$ si et seulement si $V = X$ pour tout $x \in X$. D'autre part $\{n : x_n \notin X\}$ est vide (donc fini) pour toute suite $(x_n)_n$.

Exemple 3.3. Soit $X := \{0, 1\}$ muni de la *topologie de Sierpiński* $\$$: les ouverts sont $\varnothing, \{1\}$ et $\{0, 1\}$. Puisque le seul voisinage de 0 est $\{0, 1\}$, toute suite converge vers 0. D'autre part, comme 1 est isolé, une suite converge vers 1 si et seulement si elle est stationnaire avec le noyau $\{1\}$. Bien sûr, une telle suite converge aussi vers 0. En résumant, $0 \in \mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n$ pour toute suite ; $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n = \{0, 1\}$ si et seulement si $(x_n)_n$ est stationnaire.

Malgré sa simplicité apparente, la topologie de Sierpiński joue un rôle prééminent parmi toutes les topologies, notamment, toute topologie peut être représentée en termes des copies de la topologie de Sierpiński (Voir l'exercice 24)[4].

Exemple 3.4 (topologie cofinie). Soit X un ensemble infini et $x_\infty \in X$. Une partie O est ouverte pour la *topologie cofinie autour de* x_∞ si $x_\infty \in O$ implique que O est cofinie.

Toute suite libre converge vers x_∞. Effectivement, soit $(w_k)_k$ une suite libre, c'est-à-dire l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : w_k = x\}$ est fini pour tout $x \in X$. Soit $V \in \mathcal{V}(x_\infty)$, donc $X \setminus V$ finie et, par conséquent, $\{k \in \mathbb{N} : w_k \in X \setminus V\}$ est fini. D'après la proposition 3.1, $(w_k)_k$ converge vers x_∞.

Exemple 3.5 (topologie cofinie dénombrable). Si X est un ensemble dénombrable (infini), alors, par définition, on peut le ranger en une suite $X = \{x_\infty, x_1, \ldots\}$. D'après notre observation, toute suite libre $(w_k)_k$ converge vers x_∞ (pour la topologie cofinie autour de x_∞). Notons qu'une suite $(w_k)_k$ d'éléments de X est libre si et seulement si elle est extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$. Notons que X est homéomorphe au sous-espace $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.6 (topologie codénombrable). Une partie A de X est dite *codénombrable* si $X \setminus A$ est dénombrable. Soit X un ensemble non dénombrable et $x_\infty \in X$. Une partie O de X est déclarée ouverte pour la *topologie codénombrable autour de* x_∞ si $x_\infty \in O$ implique que O est codénombrable.

C'est une topologie normale (Voir l'exercice 20) sans aucune suite convergente non stationnaire. Effectivement, si $(x_n)_n$ est une suite non stationnaire, alors elle pourrait converger uniquement vers x_∞, car les autres points sont isolés. Or, $\{x_n : x_n \neq x_\infty \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable[5] et, par conséquent, $X \setminus \{x_n : x_n \neq x_\infty \text{ et } n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{V}(x_\infty)$.

Contrairement aux espaces métriques (la proposition II.2.9 et l'exercice II.13), les suites transversales ne convergent pas nécessairement dans des espaces topologiques généraux.

Exemple 3.7 (bisuite convergente). Soit

$$X := \{x_\infty\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}\},$$

où tous les éléments de X sont distincts. On définit une topologie sur X comme suit : O est ouvert si

$$x_n \in O \Longrightarrow \underset{f(n) \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{k \geq f(n)}{\forall} \ x_{n,k} \in O, \tag{III.5}$$

$$x_\infty \in O \Longrightarrow \underset{m \in \mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n \geq m}{\forall} \ x_n \in O. \tag{III.6}$$

On vérifie que c'est une famille des ouverts pour une topologie. Il est facile de voir que c'est une topologie séparée. On note que tout élément de la forme $x_{n,k}$ est isolé.

---

4. En terme de la théorie des catégories, la topologie de Sierpiński est initialement dense dans la catégorie des topologies.

5. D'ailleurs, infini.

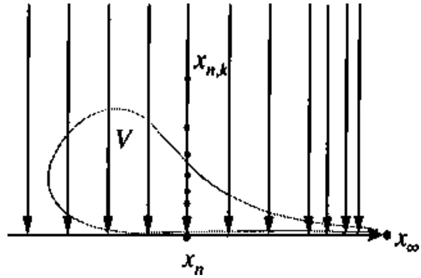


FIGURE III.3. Aucune suite transversale ne converge vers x_∞.

Il est évident que pour cette topologie, $\{x_\infty\} = \mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n$ et $\{x_n\} = \mathrm{Lim}_{k\to\infty} x_{n,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On verra que ces suites et leurs suites extraites sont les uniques suites non stationnaires convergentes.

On observe que O est un voisinage de x_∞ si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et une fonction $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$ tels que $x_n, x_{n,k} \in O$ pour tout $n \geq m$ et chaque $k \geq f(n)$. Par conséquent, aucune suite non stationnaire sur $\{x_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ converge vers x_∞.

Effectivement, si $(x_{n_p,k_p})_p$ était une suite convergente vers x_∞, alors $\lim_{n\to\infty} n_p = \infty$, car sinon il existerait une suite extraite de $(n_p)_p$ à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, donc il existerait une autre suite extraite $(n_{p_q})_q$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n = n_{p_q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, donc $\mathrm{Lim}_{q\to\infty} x_{n_{p_q},k_{p_q}} = \{x_n\}$, ce qui contredit l'hypothèse.

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $N_n := \{p \in \mathbb{N} : n_p = n\}$ est fini. Soit $f(n) := \max\{k_p + 1 : p \in N_n\}$ si $N_p \neq \varnothing$ et $f(n) := 0$ autrement. Alors $\{x_\infty\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}, k \geq f(n)\}$ est un voisinage de x_∞ disjoint de $\{x_{n_p,k_p} : p \in \mathbb{N}\}$.

Nous avons vu dans l'exemple 3.6 que la topologie codénombrable d'un ensemble non dénombrable n'admet pas de suites convergentes non stationnaires, ce qui contraste avec les espaces métriques (la proposition II.2.3). Voici un autre exemple d'une topologie non discrète sans suites convergentes non stationnaires.

Exemple 3.8 (topologie de Arens). On considère la restriction de la topologie de l'exemple 3.7 à l'ensemble $Y := \{x_\infty\} \cup \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$. La topologie qui en résulte s'appelle d'*Arens*.

Aucune suite non stationnaire ne converge pour cette topologie. Effectivement, une telle suite pourrait converger uniquement vers x_∞, car les autres éléments sont isolés. Ceci n'est pas possible d'après l'exemple précédent.

Cette topologie est normale, car elle est *primale*, c'est-à-dire telle qu'il y a au plus un point non isolé (cf., l'exercice 20).

4. Continuité topologique

Dans le chapitre précédent nous avons défini la continuité des applications entre deux espaces métriques. On fait maintenant la même chose pour les applications entre deux espaces topologiques.

Soit X, Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est *continue* en x si $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$ pour tout $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Elle est dite *continue* si elle est continue en x pour tout $x \in X$.

On dénote par $C(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de X dans Y. Si les topologies sur X et Y sont indiquées explicitement, par exemple ξ est la topologie de X est θ est la topologie de Y, alors on utilise souvent $C(\xi, \theta)$ au lieu de $C(X, Y)$.

Proposition 4.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $f : X \to Y$ est continue,

(2) $f^{-1}(O)$ est ouvert pour tout ouvert O de Y,

(3) $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F de Y.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit f continue et O un ouvert de Y. Alors, $O \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $y \in O$, et en particulier $O \in \mathcal{V}(f(x))$ pour tout $x \in X$ tel que $f(x) \in O$ (de façon équivalente, tel que $x \in f^{-1}(O)$). Par conséquent, $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}(x)$ pour tout $x \in f^{-1}(O)$, ce qui veut dire que $f^{-1}(O)$ est ouvert.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Si F est fermé de Y, alors $Y \setminus F$ est ouvert, donc $f^{-1}(Y \setminus F)$ est ouvert. Et puisque $f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F)$ l'ensemble $f^{-1}(F)$ est fermé.

(3) $\Longrightarrow$ (2) de manière analogue.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Si $V \in \mathcal{V}(f(x))$ alors il existe un ouvert O de Y tel que $f(x) \in O \subset V$. Donc $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(O)$ est ouvert d'après (2), ce qui implique que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. □

Au lieu de vérifier (2) pour tous les ouverts de Y, il suffit de le faire pour une base, voire une sous-base d'ouverts.

Lemme 4.2. *Soit $\mathcal{S}$ une sous-base d'ouverts de Y. Alors $f : X \to Y$ est continue si et seulement si $f^{-1}(S)$ est ouvert pour tout $S \in \mathcal{S}$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que la condition soit remplie et prenons un ouvert O de Y. Si $x \in f^{-1}(O)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}_1$ et $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ tels que $f(x) \in S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n \subset O$. Ainsi

$$x \in f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2) \cap \ldots \cap f^{-1}(S_n) \subset f^{-1}(O),$$

ce qui montre que $f^{-1}(O)$ est ouvert. □

Proposition 4.3. *Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue.*

Démonstration. Si O est un ouvert dans Z, alors $g^{-1}(O)$ est un ouvert dans Y, car g est continue. Par conséquent, $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert dans X, car f est continue. □

Proposition 4.4. *Soit X, Y espaces topologiques, dont Y séparé. Si $f, g : X \to Y$ sont deux applications continues, et $f|_A = g|_A$, où A est une partie dense de X, alors $f = g$.*

Démonstration. L'ensemble

$$\{f = g\} := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

est fermé. En effet, si $f(x) \neq g(x)$, alors il existe deux ouverts disjoints V et $W \in$ tels que $f(x) \in V$ et $g(x) \in W$. D'après la continuité, $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ est un ouvert contenant x et $f(z) \in V$ et $g(z) \in W$ pour tout $z \in f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$, donc $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W) \cap \{f = g\} = \varnothing$. D'après l'hypothèse, $A \subset \{f = g\}$, et par conséquent, $X = \operatorname{cl} A \subset \{f = g\}$. □

Une application bijective continue $f : X \to Y$ s'appelle un *homéomorphisme* si f^{-1} est également continue.

5. Treillis des topologies

Nous avons défini l'ordre sur l'ensemble des topologies sur un ensemble donné. Si τ, θ sont deux topologies sur un même ensemble X et $\mathcal{O}_\tau, \mathcal{O}_\theta$ les familles d'ouverts correspondantes, alors θ est *plus fine* que τ (τ est *plus grossière* que θ) si $\mathcal{O}_\theta \supset \mathcal{O}_\tau$, ce qu'on note $\theta \geq \tau$. La relation $\geq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble de toutes les topologies sur X. Rappelons que $i_X : X \to X$ désigne l'*application-identité*.

Proposition 5.1. *Si θ, τ sont deux topologies sur un même ensemble X, alors $\theta \geq \tau$ si et seulement si*

$$i_X \in C(\theta, \tau).$$

Soit T un ensemble de topologies sur X. La topologie la plus fine est la topologie *discrète* et la topologie la moins fine est la topologie *chaotique*.

On note $\bigwedge T$ l'*infimum* (la *borne inférieure*) de T, c'est-à-dire la plus fine des topologies qui sont plus grossières que chaque élément de T. De même, $\bigvee T$ désigne le *supremum* (la *borne supérieure*) de T, c'est-à-dire la plus grossière des topologies qui sont plus fines que chaque élément de T. En particulier,

$$\tau_0 \wedge \tau_1 \text{ et } \tau_0 \vee \tau_1$$

désignent, respectivement, les bornes inférieure et supérieure de τ_0 et τ_1.

Exemple 5.2 (topologies de Sorgenfrey). Soit ν la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, donc $V \in \mathcal{V}_\nu(x)$ s'il existe $s, r \in \mathbb{R}$ tels que $s < x < r$ et $]s, r[\subset V$. Considérons sur $\mathbb{R}$ deux topologies ν_+ et ν_- suivantes :

(1) $V \in \mathcal{V}_{\nu_+}(x)$ s'il existe $r > x$ tel que l'intervalle $[x, r[\subset V$;

(2) $V \in \mathcal{V}_{\nu_-}(x)$ s'il existe $s < x$ tel que l'intervalle $]s, x] \subset V$.

On vérifie facilement que $\mathcal{O}_{\nu_+}$ et $\mathcal{O}_{\nu_-}$ sont les familles des ouverts (pour des topologies). On note que

$$\nu < \nu_+ \text{ et } \nu < \nu_-,$$

car, d'une part, $\mathcal{V}_\nu(x) \subset \mathcal{V}_{\nu_+}(x) \cap \mathcal{V}_{\nu_-}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de l'autre, $[x, r[$ est ouvert pour ν_+, $]s, x]$ est ouvert pour ν_-, mais aucun de deux n'est ouvert pour ν. J'affirme que

$$\nu = \nu_+ \wedge \nu_- \text{ et } \iota = \nu_+ \vee \nu_-.$$

Effectivement, $V \in \mathcal{V}_{\nu_+}(x) \cap \mathcal{V}_{\nu_-}(x)$ s'il existe $s, r \in \mathbb{R}$ tels que $s < x < r$ et $[x, r[\subset V$ et $]s, x] \subset V$, c'est-à-dire $]s, r[\subset V$, donc $\mathcal{V}_\nu(x) = \mathcal{V}_{\nu_+}(x) \cap \mathcal{V}_{\nu_-}(x)$; d'autre part, $[x, r[$ et $]s, x]$ sont ouverts pour $\nu_+ \vee \nu_-$, donc $\{x\} = [x, r[\cap]s, x]$ est ouvert pour $\nu_+ \vee \nu_-$, ce qui veut dire que x est isolé (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Un espace ordonné est un *treillis complet* si toute partie non-vide a le *supremum* et l'*infimum*.

Théorème 5.3. *L'ensemble de toutes les topologies sur un ensemble donné est un treillis complet.*

DÉMONSTRATION. Soit X un ensemble non vide, et T un ensemble de topologies sur X. La famille

$$\bigcap_{\tau \in T} \mathcal{O}_\tau \tag{III.7}$$

vérifie les hypothèses (O1)-(O3), donc définit une topologie sur X. Bien évidemment, cette topologie est moins fine que τ pour tout $\tau \in T$, et la plus fine ayant cette propriété. Cela veut dire que (III.7) est la famille d'ouverts de $\bigwedge T$.

Si S est l'ensemble de toutes les topologies qui sont plus fine que chaque élément de T, alors $S \neq \varnothing$, car la topologie discrète $\iota_X \in S$. Il est clair que $\bigwedge S \in S$ et donc $\bigwedge S = \bigvee T$.

La famille

$$\bigcup_{\tau \in T} \mathcal{O}_\tau \tag{III.8}$$

ne vérifie pas, en général, (O1)-(O3). Cependant, la famille de toutes les unions des intersections finies de (III.8) est une famille d'ouverts pour une topologie qui est nécessairement plus grossière que tout élément de S. Par conséquent, elle est égale à $\bigvee T$. $\square$

Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique et $W \subset X$, alors la *topologie induite* sur W de X est la topologie la moins fine sur W pour laquelle l'*injection canonique* $j : W \to X$, définie par $j(x) := x$ pour tout $x \in W$, est continue.

Proposition 5.4. *Une partie A de W est ouverte pour la topologie induite si et seulement si elle est de la forme $W \cap O$ où O est un ouvert pour la topologie $(X, \mathcal{O})$.*

DÉMONSTRATION. D'après la définition, les ouverts de la topologie induite sont de la forme $j^{-1}(O)$ où O est un ouvert de $(X, \mathcal{O})$. Il suffit maintenant d'observer que $j^{-1}(O) = W \cap O$ pour toute partie O de X. □

6. Séparation fonctionnelle

Nous avons vu que, dans un espace métrique, deux fermés disjoints arbitraires peuvent être séparés par une fonction continue. Cette propriété s'étend aux espaces topologiques normaux.

Lemme 6.1 (Urysohn). *Un espace topologique X est normal si et seulement si pour tout couple F_0, F_1 de fermés disjoints, il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f(F_0) = \{0\}$ et $f(F_1) = \{1\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, où $r_0 = 0$ et $r_1 = 1$ et la suite est injective. D'après la normalité il existe deux ouverts disjoints V_0 et W_0 tels que $F_0 \subset V_0$ et $F_1 \subset W_0$. Posons $V_1 := X \setminus F_1$. Ainsi $F_0 \subset V_0 \subset \operatorname{cl} V_0 \subset X \setminus W_0 \subset V_1$. Supposons avoir construit une suite d'ouverts $V_0, V_1, V_{r_1} \ldots, V_{r_n}$ tels que pour $k, l \leq n$,

$$r_k < r_l \Longrightarrow \operatorname{cl} V_k \subset V_l.$$

Soit $k, l \leq n$ tels que r_k est le plus grand et r_l le plus petit d'éléments de $\{r_m : m \leq n\}$ tels que $r_k < r_{n+1} < r_l$. Comme $\operatorname{cl} V_k$ et $X \setminus V_l$ sont deux fermés disjoints, il existe un ouvert V_{n+1} tel que

$$\operatorname{cl} V_k \subset V_{n+1} \subset \operatorname{cl} V_{n+1} \subset V_l.$$

Soit $f : X \to [0,1]$ donnée par

$$f(x) := \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, \text{ si } x \in V_1, \\ 1, \text{ si } x \in F_1. \end{cases}$$

Bien sûr, si $x \in V_s$, alors $f(x) \leq s$ et si $x \notin V_t$ alors $t \leq f(x)$.

Il est évident que $f(F_0) = \{0\}$ et $f(F_1) = \{1\}$. Cette fonction est continue. Effectivement, si t est rationnel et $t < f(x)$, alors $x \notin \operatorname{cl} V_t$, donc $X \setminus \operatorname{cl} V_t$ est un voisinage de x. Or, si $v \notin V_t$ alors $t \leq f(v)$. Si s est un rationnel tel que $f(x) < s$, alors V_s est un voisinage de x et $f(v) \leq s$ pour tout $v \in V_s$.
□

Par contraste, en général, dans un espace topologique séparé, on ne peut pas fonctionnellement séparer deux points distincts. De même, en général, dans un espace régulier, on ne peut pas fonctionnellement séparer un fermé d'un point ne l'appartenant pas. Il existe des espaces réguliers, où toute fonction continue est constante[6]. Nous allons construire un tel espace.

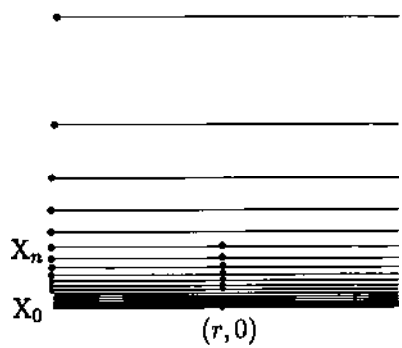
Une topologie séparée est dite *complètement régulière* si pour tout fermé F et tout $x \notin F$ il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $f(F) = \{0\}$ et $f(x) = 1$. Un *espace de Tikhonov* est défini comme un espace topologique complètement régulier.

6. Un des premiers exemples de ce type d'espace est dû à H. Herrlich **[21]**.

Bien entendu, toute topologie normale est complètement régulière, car les singletons y sont fermés. D'autre part, il existe des topologies complètement régulières non normales, comme montre l'exemple suivant.

Exemple 6.2 (planche de Thomas). Soit $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ une partie de $\mathbb{R}^2$, où $X_0 :=]0,1[\times\{0\}$ et $X_n := [0,1[\times\{\frac{1}{n}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. Considérons la topologie suivante sur X : pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, si $0 < r < 1$, alors $(r, \frac{1}{n})$ est isolé et une partie W contenant $(0, \frac{1}{n})$ est un voisinage de $(0, \frac{1}{n})$ si $X_n \setminus W$ est dénombrable ; une partie V est un voisinage de $(r, 0)$ si $\{n : (r, \frac{1}{n}) \notin V\}$ est finie.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, la topologie sur X_n héritée de X est la topologie codénombrable autour de $(0, \frac{1}{n})$.



D'après l'exercice 17, si $f \in C(X, \mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, il existe une partie codénombrable R_n de $]0,1[$ telle que f est constante sur $R_n \times \{\frac{1}{n}\}$. Par conséquent, f est constante sur $R \times \{0\}$, où $R := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} R_n$ et ainsi

$$f(R \times \{0\}) = \{\lim_{n\to\infty} f((0, \tfrac{1}{n}))\}. \tag{III.9}$$

C'est un espace complètement régulier. En effet, soit F est une partie fermée de X. Si $(0, \frac{1}{n}) \notin F$, alors $F \cap X_n$ est dénombrable et la fonction $f : X \to [0,1]$, définie par $f(x) = 0$ si $x \in X_n \setminus F$ et $f(x) = 1$ sinon, est continue. Si $(r, 0) \notin F$, alors il existe N tel que $(r, \frac{1}{n}) \notin F$ pour $n > N$. Ainsi $f : X \to [0,1]$, définie par $f((r,0)) = f((r, \frac{1}{n})) = 0$ si $n > N$ et $f(x) = 1$ sinon, est continue.

Cet espace n'est pas normal. Effectivement, $H := \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}_1\}$ et X_0 sont deux fermés disjoints de X. Si O est un ouvert incluant H, alors $Q_n := \{r \in [0,1[: r \notin O\}$ est dénombrable, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} Q_n$ est dénombrable et, par conséquent, il existe $r_0 \in]0,1[\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} Q_n$, ce qui implique que $\{(r_0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}_1\} \subset O$. Or, pour tout ouvert P incluant X_0 il existe $n \in \mathbb{N}_1$ tel que $(\frac{1}{n}, r_0) \in P$, donc $O \cap P \neq \varnothing$.

Donnons enfin un exemple de topologie régulière qui n'est pas complètement régulière.

Exemple 6.3 (tire-bouchon de Thomas). Pour $k \in \mathbb{Z}$ et une partie B de X de l'exemple 6.2, $B^{(k)}$ désigne une k-ième copie de B. Considérons l'union disjointe $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X^{(k)} \cup \{o, \iota\}$. Une partie V est un voisinage de o si $o \in V$ et s'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $X^{(k)} \subset V$ pour tout $k < K$; une partie W est un voisinage de ι si $\iota \in V$ et s'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $X^{(k)} \subset V$ pour tout $k > K$. Un espace topologique Y est défini comme l'espace quotient de $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X^{(k)} \cup \{o, \iota\}$ après l'identification $\approx$

$$X_0^{(k)} \approx X_0^{(k-1)} \text{ et } H^{(k)} \approx H^{(k+1)} \tag{III.10}$$

pour tout k pair (Voir la section III.11).

L'espace Y est régulier (car tout élément admet une base de voisinages composée de fermés). Il n'est pas complètement régulier, car si $f \in C(Y, \mathbb{R})$, alors $f(o) = f(\iota)$. En effet, d'après une observation faite dans l'exemple 6.2, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il existe une partie codénombrable A_k de $]0, 1[$ tel que f est constante sur $(A_k \times \{0\})^{(k)}$ et sur $(A_k \times \{\frac{1}{n}\})^{(k)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. Or $A := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ est codénombrable, donc il existe $r_0 \in A$. Selon (III.9) et (III.10), pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$f((A \times \{0\})^{(k)}) = f((A \times \{0\})^{(k+1)}).$$

Par conséquent, $s := f((r_0, 0)^{(k)})$ ne dépend pas de k. Donc $|s - f(o)| < \varepsilon$ et $|s - f(\iota)| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il s'ensuit que $f(o) = s = f(\iota)$.

Le lemme 6.1 de Urysohn est une étape d'un théorème de prolongement de fonctions continues.

Théorème 6.4 (Tietze-Urysohn). *Toute fonction continue réelle sur une partie fermée d'un espace normal admet un prolongement continu à l'espace tout entier.*

Démonstration. Compte tenu du homéomorphisme entre $\mathbb{R}$ et ses intervalles ouverts bornés, il suffit de prouver le théorème pour les fonctions bornées, par exemple, à valeurs dans $[-1, 1]$.

Soit F une partie fermée d'un espace normal X, $c > 0$ et $h : F \to [-c, c]$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue g sur X telle que

$$\begin{aligned} x \in X &\Longrightarrow |g(x)| \leq \tfrac{1}{3}c, \\ x \in F &\Longrightarrow |h(x) - g(x)| \leq \tfrac{2}{3}c. \end{aligned} \tag{III.11}$$

En effet, puisque

$$F_0 := \{x \in F : h(x) \leq -\tfrac{c}{3}\} \text{ et } F_1 := \{x \in F : h(x) \geq \tfrac{c}{3}\}$$

sont deux parties fermées disjointes de F, donc de X, selon le lemme 6.1 de Urysohn, il existe une fonction continue $g : X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ telle que $g(F_0) = \{-\frac{c}{3}\}$ et $g(F_1) = \{\frac{c}{3}\}$, donc vérifiant (III.11).

Si $f : F \to [-1,1]$ est une fonction continue, alors nous définissons par récurrence une suite $(g_n)_n$ de fonctions continues sur X telles que

$$(\mathrm{T}_n) \qquad \begin{aligned} x \in X &\Longrightarrow |g_n(x)| \le \tfrac{1}{3}(\tfrac{2}{3})^n, \\ x \in F &\Longrightarrow |f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^n g_k(x)| \le \tfrac{2}{3}(\tfrac{2}{3})^n. \end{aligned}$$

Effectivement, si $c := 1, h := f$, alors il existe une fonction continue g_0 telle que (III.11) soit valable avec $g := g_0$, ce qui nous donne (T_0). Si nous avons trouvé une suite de fonctions continues g_k pour $0 \le k \le n-1$, telle que (T_k) soit valable pour $0 \le k \le n-1$, alors pour $h := f - \sum_{k=0}^{n-1} g_k$ et $c := (\frac{2}{3})^n$, il existe une fonction continue g_n telle que (III.11) soit valable pour $g := g_n$, c'est-à-dire (T_n) est vérifiée. La fonction $\sum_{k=0}^n g_k$ converge uniformément sur X, donc sa limite $g : X \to [-1,1]$ est une fonction continue qui coïncide avec f sur F. □

7. Topologies métrisables

Si (X,d) est un espace métrique, alors on dit qu'une partie O de X est *d-ouverte* si pour tout $x \in O$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_d(x,\varepsilon) := \{y \in Y : d(x,y) < \varepsilon\} \subset O$$

L'ensemble des parties ouvertes d'un espace métrique vérifie (O1)-(O3), constitue donc une topologie.

Un espace topologique $(X,\mathcal{A})$ est *métrisable* s'il existe une métrique d sur X telle que $\mathcal{A}$ sont les d-ouverts. Nous dirons alors que $\mathcal{A}$ est engendrée par d.

Dans un espace métrisable X, une métrique *compatible* avec la topologie, $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B_d(x,r) \subset V$. Par conséquent,

Proposition 7.1. *Si X est un espace métrisable et d est une métrique compatible, alors*

$$x \in \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0.$$

La convergence des suites est donc une propriété topologique, car elle ne dépend pas du choix de la métrique compatible. Certaines propriétés topologiques, c'est-à-dire exprimables en termes d'ouverts ou de fermés, sont nécessaires pour qu'une topologie soit métrisable. D'après la proposition II.1.4,

Proposition 7.2. *Tout espace métrisable est séparé.*

Par conséquent, la topologie chaotique n'est pas métrisable, pourvu que la cardinalité de l'ensemble sous-jacent > 1.

La proposition 7.2 implique que

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n = \{\lim_{n\to\infty} x_n\}$$

pour toute suite (convergente) $(x_n)_n$.

Proposition 7.3. *Si F_0, F_1 sont deux fermés disjoints dans un espace topologique métrisable, alors il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ telle que $f(F_0) = 0$ et $f(F_1) = 1$.*

DÉMONSTRATION. Soit d une métrique compatible avec la topologie de X. Les fonctions $d(x, F_0)$ et $d(x, F_1)$ sont continues d'après la proposition II.3.7.

Puisque F_0, F_1 sont fermés, $d(x, F_0) = 0$ si et seulement si $x \in F_0$ et $d(x, F_1) = 0$ si et seulement si $x \in F_1$. Donc $d(x, F_0) + d(x, F_1) > 0$ pour tout $x \in X$. Par conséquent,

$$f(x) := \frac{d(x, F_0)}{d(x, F_0) + d(x, F_1)}$$

est continue, $F_0 \subset f^{-1}(0)$ et $F_1 \subset f^{-1}(1)$. □

Par conséquent,

Proposition 7.4. *Toute topologie métrisable est normale.*

DÉMONSTRATION. Soit F_0, F_1 deux fermés disjoints. Puisque d'après la proposition II.7.3, il existe une fonction continue f telle que $f(F_0) = \{0\}$ et $f(F_1) = \{1\}$, les parties

$$G_0 := \{x \in X : f(x) < \tfrac{1}{2}\} \text{ et } G_1 := \{x \in X : f(x) > \tfrac{1}{2}\}$$

sont ouvertes et disjointes, $F_0 \subset G_0$ et $F_1 \subset G_1$. □

Dans un espace métrisable, pour tout $x \in X$ il existe une base dénombrable de voisinages de x, par exemple,

$$\mathcal{B} := \left\{B(x, \tfrac{1}{n}) : n = 1, 2, \ldots\right\},$$

où les boules sont par rapport à une des métriques compatibles avec la topologie.

Proposition 7.5. *Toute topologie métrisable est de caractère dénombrable.*

Une topologie s'appelle *séparable* si elle admet un ensemble dénombrable dense. On observe que la topologie discrète o_X est séparable si et seulement si X est dénombrable.

Proposition 7.6. *Le poids de toute topologie métrisable séparable est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Fixons une métrique compatible avec la topologie. $B_r(x)$ désigne une boule autour x de rayon $r > 0$ par rapport à cette métrique. Si A est une partie dénombrable dense, alors

$$\{B_{\frac{1}{n}}(a) : a \in A, n \in \mathbb{N}_1\}$$

est une base dénombrable d'ouverts. Effectivement, si O est un ouvert et $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_r(x) \subset O$. Comme A est dense, il existe $a \in A \cap B_{\frac{r}{2}}(x)$. Par conséquent, $x \in B_{\frac{r}{2}}(a) \subset B_r(x) \subset O$. □

Théorème 7.7 (Urysohn). *Toute topologie normale ayant poids dénombrable est métrisable*[7].

Une preuve du théorème d'Urysohn sera donnée dans la section 10.

Qu'une topologie métrisable soit normale et de caractère dénombrable n'est qu'une condition nécessaire de métrisabilité[8].

Exemple 7.8 (topologie de Sorgenfrey). Sur $\mathbb{R}$ on définit une topologie comme suit : O est ouvert si pour tout $x \in O$ il existe $t > r$ tel que l'intervalle $[x, t[\subset O$. C'est une topologie séparée, car elle plus fine que la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$.

Elle est même normale. Soit F_0, F_1 deux fermés disjoints. Pour tout $x \in F_0$ soit $t_x > x$ tel que $[x, t_x[\cap F_1 = \varnothing$. On pose $O_0 := \bigcup_{x \in F_0} [x, t_x[$. De la même manière, pour tout $y \in F_1$ soit $r_y > y$ tel que $[y, r_y[\cap F_0 = \varnothing$ et $O_1 := \bigcup_{y \in F_1} [y, r_y[$.

Si $w \in O_0 \cap O_1$ alors il existe $x \in F_0$ et $y \in F_1$ tels que $w \in [x, t_x[\cap [y, r_y[$. Si, par exemple, $x < y$, alors $y \leq w$ et $w < t_x$, c'est-à-dire $y \in [x, t_x[$, ce qui contredit le fait que $[x, t_x[\cap F_1 = \varnothing$.

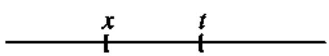


FIGURE III.4. Tout voisinage de x inclut un intervalle $[x, t[$, où $x < t$.

La topologie de Sorgenfrey est de caractère dénombrable, car

$$\left\{ [x, x + \tfrac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_1 \right\}$$

est une base de voisinages de x.

La topologie de Sorgenfrey est séparable, car $\mathbb{Q}$ y est dense. Cependant son poids n'est pas dénombrable, plus précisément, il est égal à $\mathfrak{c}$.

Effectivement, $\{[x, t[: x, t \in \mathbb{R}, x < t\}$ est une base de cardinalité $\mathfrak{c}$. S'il existait une base $\mathcal{B}$ d'ouverts avec $\operatorname{card} \mathcal{B} < \mathfrak{c}$, alors $\operatorname{card} \{\inf B : B \in \mathcal{B}\} < \mathfrak{c}$, donc il existerait $x \in \mathbb{R} \setminus \{\inf B : B \in \mathcal{B}\}$.

Or puisque $[x, \infty[$ est un ouvert, il existerait $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset [x, \infty[$ et par conséquent, $x = \inf B$, ce qui est une contradiction. D'après la proposition 7.6, la topologie de Sorgenfrey n'est pas métrisable.

Proposition 7.9. *Si $\mathcal{A}$ est la topologie sur X engendrée par (X, d) et $E \subset X$, alors $\{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$ est la topologie sur E engendrée par d_E (la restriction de la métrique d sur $E \times E$).*

Nous avons vu que deux métriques différentes peuvent donner lieu à la même topologie.

---

7. Il suffit de supposer que la topologie soit régulière de poids dénombrable.

8. Il existe plusieurs conditions suffisantes et nécessaires de métrisabilité. Nous présenterons quelques unes dans l'annexe C.

Les chapitres successifs seront consacrés à l'étude des propriétés topologiques des espaces métrisables. On verra plus loin des situations, où une topologie résultant des opérations sur des topologies métrisables s'avérera non métrisable. Cependant on va parler des propriétés topologiques pour souligner que ces propriétés ne dépendent que de la topologie et non pas d'une métrique particulière engendrant cette topologie.

Proposition 7.10. *Soit X, Y deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ par rapport aux métriques si et seulement si elle est continue en x par rapport aux topologies relatives.*

DÉMONSTRATION. Soit f continue en x. Si V est un voisinage de $f(x)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V \supset B_\varepsilon(f(x))$, donc $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ et, d'après la continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \supset B_\delta(x)$. Or, $B_\delta(x)$ est un voisinage de x, donc $f^{-1}(V)$ est également un voisinage de x.

Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$ la boule $B_\varepsilon(f(x))$ est un voisinage de $f(x)$, alors d'après la condition, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ est un voisinage de x, donc il existe $\delta > 0$ tel que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, ce qui revient à $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. □

Par conséquent, la notion de continuité est une notion topologique (elle ne dépend pas du choix de métriques sur les espaces métrisables).

8. Sous-espaces

Soit (X, τ) un espace topologique et $W \subset X$. L'*injection canonique* de W dans X est définie par

$$\forall_{x \in W}\ j(x) = x.$$

La *topologie de sous-espace* $\tau|_W$ sur W est la topologie la moins fine pour laquelle l'injection canonique $j : W \to X$ est continue.

Proposition 8.1. *Une partie A de W est $\tau|_W$-ouverte si et seulement s'il existe une partie τ-ouverte O telle que $A = O \cap W$.*

DÉMONSTRATION. Effectivement, comme $j^{-1}(O) = O \cap W$, la famille des ouverts de $\tau|_W$ est $\{O \cap W : O \in \mathcal{O}_\tau\}$. □

Corollaire 8.2. *Une partie F de W est $\tau|_W$-fermée si et seulement s'il existe une partie τ-fermée H telle que $F = H \cap W$.*

Proposition 8.3. *Si $A \subset W$, alors*

$$\begin{aligned} \operatorname{cl}_{\tau|_W} A &= \operatorname{cl}_\tau A \cap W, \\ \operatorname{int}_{\tau|_W} A &= \operatorname{int}_\tau A \cap W. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. L'ensemble $\operatorname{cl}_\tau A \cap W$ est fermé pour $\tau|_W$, car $\operatorname{cl}_\tau A$ est fermée pour τ. Donc $\operatorname{cl}_{\tau|_W} A \subset \operatorname{cl}_\tau A \cap W$. D'autre part, pour tout $F \in$

$\mathcal{F}_{\tau|W}$, il existe $H_F \in \mathcal{F}_\tau$ tel que $F = H_F \cap W$. Par conséquent,

$$\mathrm{cl}_{\tau|W} A = \bigcap\nolimits_{A\subset F\in\mathcal{F}_{\tau|W}} F = W \cap \bigcap\nolimits_{A\subset F\in\mathcal{F}_{\tau|W}} H_F$$
$$\supset W \cap \bigcap\nolimits_{A\subset H\in\mathcal{F}_\tau} H = W \cap \mathrm{cl}_\tau A.$$

La preuve de la seconde égalité est analogue. □

9. Produits

Soit $X := \prod_{j\in J} X_j$, où J est un ensemble et X_j est un ensemble non vide pour tout $j \in J$. Rappelons que, pour tout $k \in J$, la projection $\pi_k : \prod_{j\in J} X_j \to X_k$ est définie par

$$\pi_k(f) := f(k). \tag{III.12}$$

Si X_j est un espace topologique pour tout $j \in J$, alors on munit $\prod_{j\in J} X_j$ de la *topologie-produit*, ou la *topologie de Tikhonov*, c'est-à-dire la topologie la moins fine pour laquelle toute projection est continue.

Il s'ensuit que, pour la topologie de Tikhonov, l'ensemble

$$\pi_k^{-1}(O_k) = \{f \in \prod\nolimits_{j\in J} X_j : f(k) \in O_k\}$$

est ouvert pour tout $k \in J$ et pour tout ouvert O_k de X_k. Plus précisément,

Proposition 9.1. *L'ensemble de $\pi_j^{-1}(O_j)$, où $O_j \in \mathcal{O}_{X_j}$ et $j \in J$ est une sous-base de la topologie de Tikhonov.*

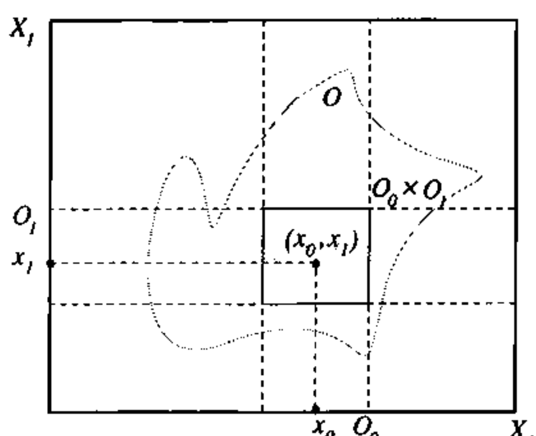


FIGURE III.5. Une partie O est ouverte pour la topologie-produit sur $X_0 \times X_1$ si pour tout $(x_0, x_1) \in O$, il existe un ouvert O_0 de X_0 et un ouvert O_1 de X_1 tels que $(x_0, x_1) \in O_0 \times O_1 \subset O$.

Il s'ensuit que

Proposition 9.2. *Une base d'ouverts pour la topologie de Tikhonov est composée de*

$$\prod_{j\in J} P_j,$$

où P_j est ouvert de X_j et $\{j \in J : P_j \neq X_j\}$ est fini.

DÉMONSTRATION. En effet, $\pi_j^{-1}(O_j) = \prod_{k\in J} P_k$, où $P_j = O_j$ et $P_k = X_k$ pour tout $k \in J$ différent de j. □

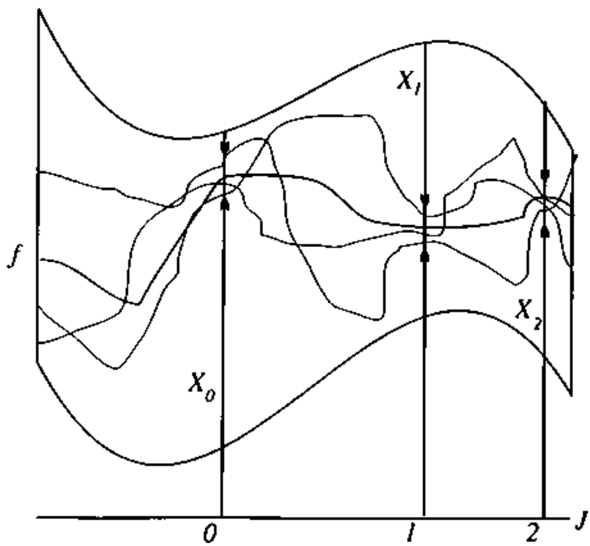


FIGURE III.6. Le produit $\prod_{j\in J} X_j$ est l'ensemble des applications définies sur J telles que $f(j) \in X_j$ pour tout $j \in J$. Ici un voisinage de $f \in \prod_{j\in J} X_j$ est donné par une partie finie $\{0,1,2\}$ de J et des voisinages de $f(0), f(1)$ et $f(2)$ (marqués par de flèches). Des applications en pointillé appartiennent à ce voisinage.

Ainsi, comme dans le cas métrique (le corollaire II.4.2),

Proposition 9.3. *Si W et X_j sont des espaces topologiques pour tout $j \in J$, alors $h : W \to \prod_{j\in J} X_j$ est continue si et seulement si $\pi_k \circ h : W \to X_k$ est continue pour tout $k \in J$.*

DÉMONSTRATION. Si h est continue, alors $\pi_k \circ h$ est continue pour tout $k \in J$ en tant qu'une composition d'applications continues. Réciproquement, si h n'est pas continue, alors selon le lemme 4.2 et la propo sition 9.1, il existe $k \in J$ et $O_k \in \mathcal{O}_{X_k}$ tels que

$$h^{-1}(\pi_k^{-1}(O_k)) = (\pi_k \circ h)^{-1}(O_k)$$

n'est pas ouvert et ainsi $\pi_k \circ h$ n'est pas continue. □

Corollaire 9.4. *Une partie V de $\prod_{j\in J} X_j$ est un voisinage de f si et seulement s'il existe une partie finie F de J telle que pour tout $j \in J$ il existe un voisinage V_j de $f(j)$ tels que $\prod_{j\in J} V_j \subset V$ et $V_j \neq X_j$ implique que $j \in F$.*

Proposition 9.5. *Si X_j est un espace topologique séparé pour tout $j \in J$, alors la topologie de Tikhonov sur $\prod_{j\in J} X_j$ est séparée.*

DÉMONSTRATION. Effectivement, si $f, g \in \prod_{j\in J} X_j$ et $f \neq g$, alors il existe $j \in J$ tel que $f(j) \neq g(j)$. Puisque X_j est séparé, il existe deux ouverts disjoints O, P de X_j tels que $f(j) \in O$ et $g(j) \in P$.

Alors $\pi_j^{-1}(O)$ et $\pi_j^{-1}(P)$ sont ouverts pour la topologie de Tikhonov, $\pi_j^{-1}(O) \cap \pi_j^{-1}(P) = \varnothing$, $f \in \pi_j^{-1}(O)$ et $g \in \pi_j^{-1}(P)$. □

Proposition 9.6. *Le caractère de la topologie de Tikhonov du produit dénombrable d'espaces de caractère dénombrable est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $\{V_{j,k} : k \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages de $x_j \in X_j$ pour tout $j \in J$, et $(J_n)_n$ est une suite croissante de parties finies de J telle que $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, alors

$$\left\{\bigcap\nolimits_{j\in J_n} \pi_j^{-1}(V_{j,k}) : n, k \in \mathbb{N}\right\}$$

est une base dénombrable de $f \in \prod_{j\in J} X_j$ tel que $f(j) = x_j$.

Par conséquent, il est existe une base décroissante de la forme

$$W_n := \left\{\bigcap\nolimits_{j\in J_n} \pi_j^{-1}(V_{j,k_n}) : n \in \mathbb{N}\right\}, \tag{III.13}$$

où $(k_n)_n$ tend vers l'infini. □

Dans le chapitre II, nous avons défini sur tout produit dénombrable $\prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ d'espaces métriques, une convergence canonique des suites telle que $f = \lim_{p\to\infty} f_p$ si et seulement si $f(j) = \lim_{p\to\infty} f_p(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Cette convergence s'est avérée équivalente à une topologie métrisable. Nous allons voir qu'elle coïncide avec la topologie de Tikhonov.

Proposition 9.7. *Si J est dénombrable et X_j est métrisable pour tout $j \in J$, alors O est ouvert pour la topologie de Tikhonov si et seulement si $\lim_{p\to\infty} f_p \in O$ implique que $\{p \in \mathbb{N} : f_p \notin O\}$ est fini.*

DÉMONSTRATION. Si O est ouvert et $\lim_{p\to\infty} f_p = f \in O$, alors il existe une partie finie J_0 de J et pour tout $j \in J_0$, un ouvert O_j de X_j tel que $f(j) \in O_j$ et $f \in \bigcap_{j\in J_0} \pi_j^{-1}(O_j) \subset O$.

D'autre part, pour tout $j \in J_0$ il existe $p(j) \in \mathbb{N}$ tel que $f_p(j) \in O_j$ pour $p \geq p(j)$. Par conséquent, $f_p \in O$ pour tout $p \geq \max\{p(j) : j \in J_0\}$.

Réciproquement, si O n'est pas ouvert, alors il existe $f \in O$ tel que $V \setminus O \neq \varnothing$ pour tout voisinage V de f. Soit $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base de f de la forme (III.13) et soit $f_n \in W_n \setminus O$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $j \in J$, alors il existe n_j tel que $j \in J_{n_j}$, donc $f_n(j) \in V_{j,k_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\lim_{n\to\infty} f_n(j) = f(j)$ pour tout $j \in J$, ce qui signifie que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. □

Il résulte de la proposition II.4.1 que

Corollaire 9.8. *La topologie du produit dénombrable des topologies métrisables est métrisable.*

Théorème 9.9. *Si J est un ensemble non dénombrable et X_j est un espace métrisable avec* $\operatorname{card} X_j \geq 2$ *pour tout $j \in J$, alors $\prod_{j\in J} X_j$ n'est pas métrisable.*

DÉMONSTRATION. Soit x_j, y_j deux points distincts de X_j pour chaque $j \in J$. Alors $\{x_j, y_j\}$ avec la topologie induite de X_j est discret. Il suffit donc de montrer que $\prod_{j\in J}\{x_j, y_j\}$ n'est pas métrisable. Les intersections finies de $\left\{\pi_j^{-1}(f(j)) : j \in J\right\}$ forment une base de voisinages de $f \in \prod_{j\in J} X_j$.

S'il existait une base dénombrable $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ des voisinages de f, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existerait une partie finie F_n de J telle que

$$\bigcap\nolimits_{j\in F_n} \pi_j^{-1}(f(j)) \subset V_n,$$

donc pour $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, l'intersection $\bigcap_{j\in F} \pi_j^{-1}(f(j)) \subset V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, $J \setminus F \neq \varnothing$, car F est dénombrable et J ne l'est pas. Si $j_0 \notin F$, alors

$$\bigcap\nolimits_{j\in F} \pi_j^{-1}(f(j)) \setminus \pi_j^{-1}(f(j_0)) \neq \varnothing$$

et si $g \in \prod_{j\in J} X_j$ telle que $g(j) = f(j)$ pour $j \in F$ et $g(j_0) \neq f(j_0)$, alors

$$g \in \bigcap\nolimits_{j\in F} \pi_j^{-1}(f(j)) \setminus \pi_j^{-1}(f(j_0)),$$

donc V_n n'est pas inclus dans $\pi_j^{-1}(f(j_0))$ pour aucun n, ce qui contredit le fait que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages. □

Notons que $\prod_{j\in J}\{x_j, y_j\}$ est homéomorphe à $\prod_{j\in J}\{0,1\} = \{0,1\}^J$.

Corollaire 9.10. *La convergence simple dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas métrisable.*

10. Plongements

On appelle un *plongement* une application $f : X \to Y$ qui est un homéomorphisme de X en $f(X)$.

Si X, Y sont deux espaces topologiques et $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$, alors $Y^{\mathcal{F}} \subset Y^{C(X,Y)}$. Comme d'habitude, $Y^{\mathcal{F}}$ est muni de la convergence simple et est homéomorphe à $\prod_{f\in\mathcal{F}} Y$ muni de la topologie produit. Bien entendu, la projection $\pi_f : \prod_{f\in\mathcal{F}} Y \to Y$ vérifie (III.12)

$$\pi_f(\varphi) = \varphi(f).$$

Ainsi, une base d'ouverts de $Y^{\mathcal{F}}$ est composé de

$$\bigcap_{f\in\mathcal{F}_0}\{\varphi\in Y^{\mathcal{F}}:\varphi(f)\in O_f\},$$

où $\mathcal{F}_0$ est une partie finie de $\mathcal{F}$ et O_f est un ouvert de Y pour tout $f\in\mathcal{F}_0$.

On dit que $\mathcal{F}$ *distingue les points* si pour tout couple d'éléments distincts x_0, x_1 de X, il existe $f\in\mathcal{F}$ telle que $f(x_0)\neq f(x_1)$.

On dit que $\mathcal{F}$ *distingue les points des fermés* si, pour tout fermé H et $x\notin H$, il existe $f\in\mathcal{F}$ telle que $f(x)\notin f(H)$

Soit $e: X\to Y^{\mathcal{F}}$ définie par

$$e(x)(f):=f(x) \tag{III.14}$$

pour tout $x\in X$ et tout $f\in\mathcal{F}$. Autrement dit, e transforme tout point x de X en une fonction sur un ensemble $\mathcal{F}$ de fonctions (continues) sur X. D'autre part, $e(x)(f)=(\pi_f\circ e)(x)$.

Proposition 10.1. *Si X, Y sont deux espaces topologiques et $e: X\to Y^{\mathcal{F}}$ est définie par* (III.14), *alors*

(1) e est continue;

(2) e est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ distingue les points;

(3) e est ouverte sur son image si et seulement si $\mathcal{F}$ distingue les points des fermés.

DÉMONSTRATION. (1) D'après la proposition 9.3, l'application $e: X\to Y^{\mathcal{F}}$ est continue, car $f=\pi_f\circ e$ est continue pour tout $f\in\mathcal{F}$.

(2) Si $x_0\neq x_1$ et $\mathcal{F}$ distingue les points, alors il existe $f\in\mathcal{F}$ telle que $e(x_0)(f)=f(x_0)\neq f(x_1)=e(x_1)(f)$, c'est-à-dire $e(x_0)\neq e(x_1)$.

(3) Soit O un ouvert de X et $x_0\in O$. D'après l'hypothèse, il existe $f_0\in\mathcal{F}$ est telle que $f_0(x_0)\notin \operatorname{cl} f_0(X\setminus O)$. Or

$$W:=\{\varphi\in Y^{\mathcal{F}}:\varphi(f_0)\notin \operatorname{cl} f_0(X\setminus O)\}$$

est un voisinage ouvert de $e(x_0)$ dans $Y^{\mathcal{F}}$.

Si $e(x)\in W$, c'est-à-dire $f_0(x)=e(x)(f_0)\notin \operatorname{cl} f_0(X\setminus O)$, alors

$$x\notin f_0^{-1}(\operatorname{cl} f(X\setminus O))\supset f_0^{-1}f_0(X\setminus O)\supset X\setminus O,$$

donc $x\in O$ et alors $e(x)\in e(O)$. $\square$

Corollaire 10.2. *Si l'application définie par* (III.14) *distingue les points des fermés, alors elle est un plongement.*

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 7.7 de Urysohn.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable d'ouverts et soit

$$\mathcal{V}:=\{(B,V)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}:\operatorname{cl} B\subseteq V\}.$$

Selon le lemme 6.1 d'Urysohn, pour tout $(B,V)\in\mathcal{V}$ il existe $f\in C(X,[0,1])$ tel que $f(B)=\{0\}$ et $f(X\setminus B)=\{1\}$. L'ensemble F de telles fonctions est dénombrable et distingue les points des fermés. Effectivement, si A est fermé et $x \notin A$, alors il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $x \in V$ et $V \cap A = \varnothing$. Comme l'espace est régulier, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq \mathrm{cl}\, B \subseteq V$, ainsi $(B, V) \in \mathcal{V}$ et par conséquent il existe $f \in F$ telle que $f(x) = 0$ et $f(A) = \{1\}$. L'ensemble F distingue les points, car X est T_1. D'après le corollaire 10.2, l'application $e : X \to [0,1]^F$ est un plongement, est puisque $[0,1]$ est un espace métrique et l'ensemble F est dénombrable, le produit $\prod_{f \in F} [0,1] = [0,1]^F$ est métrisable, donc X est métrisable. □

11. Quotients

Proposition 11.1. *Soit X, Y deux ensembles, $f : X \to Y$ une application surjective et ξ une topologie sur X. Il existe sur Y la topologie τ la plus fine telle que f est continue.*

DÉMONSTRATION. Soit T l'ensemble des topologies τ sur Y telles que f est continue de ξ dans τ. La topologie o chaotique (de Y) appartient à T, car $f^{-1}(Y) = X$ et $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ sont ouverts pour ξ.

On observe que $\bigvee T \in T$. Effectivement, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_\xi$ pour tout $O \in \mathcal{O}_\tau$ et $\tau \in T$. Les ouverts de $\bigvee T$ sont, par définition, les intersections finies de $\{O \in \mathcal{O}_\tau : \tau \in T\}$. Donc l'image réciproque de tout ouvert de $\bigvee T$ est ouverte pour ξ, car $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$ pour n'importe quelle famille $\{B_j : j \in J\}$ de parties de Y. □

La topologie τ sur Y la plus fine telle que f est continue de ξ vers τ est appelée la *topologie quotient* de ξ par rapport à f.

Soit ξ une topologie sur X et τ une topologie sur Y. On dit qu'une application surjective $f : X \to Y$ est *quotient* si τ est la topologie la plus fine pour laquelle f est continue (de ξ vers τ) [9]. D'après la définition, f est une application quotient si et seulement si

$$\mathcal{O}_\tau = \left\{ O \subset Y : f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_\xi \right\}.$$

De même, pour que f soit quotient il faut et il suffit que F est τ-fermé si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé. Par conséquent,

Proposition 11.2. *Une application bijective est quotient si et seulement si elle un homéomorphisme.*

Ainsi on obtient un exemples d'une application continue qui ne soit pas quotient en considérant deux topologies ξ et τ sur un ensemble X telles que $\xi > \tau$ et l'application identité $i_X : X \to X$, qui est continue, mais pas homéomorphe, de ξ vers τ.

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble X. Nous savons que l'application-quotient $\pi_R : X \to X/R$ vérifie $\pi_R(x) = R(x)$.

9. Il ne faut pas la confondre avec l'application-quotient au sens da la théorie des ensembles.

Si ξ est une topologie sur X, alors est O un ouvert pour la topologie-quotient de ξ par rapport à π_R si et seulement si $\pi_R^{-1}(O) = R^{-1}(O)$ est ouvert pour ξ.

Exemple 11.3. Soit $X := [0,1]$ et $E \subset [0,1]^2$ la relation d'équivalence telle que $(v,w) \in E$ avec $v \neq w$ implique que $\{v,w\} = \{0,1\}$. Autrement dit, toutes les classes d'équivalences, sauf une $\{0,1\}$, sont des singletons $\{x\}$ pour $0 < x < 1$. L'application $\pi_E : [0,1] \to [0,1]/E$ vérifie $\pi_E(x) = \{x\}$ si $0 < x < 1$ et $\pi_E(0) = \pi_E(1) = \{0,1\}$. Pour tout $0 < x < 1$, une base de voisinages de $\{x\}$ et de la forme $\{\pi_E(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) : \varepsilon > 0\}$, tandis que celle de $\{0,1\}$ est de la forme

$$\{\pi_E([0,\varepsilon[) \cup \pi_E(]1-\varepsilon,1]) : \varepsilon > 0\}.$$

D'ailleurs l'espace $[0,1]/E$ est homéomorphe à un cercle. L'application $f : [0,1] \to S := \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$, définie par $f(x) := e^{2\pi i x}$ est quotient, les images réciproques des points sont des singletons, sauf $f^{-1}(0) = \{0,1\}$.

Exemple 11.4. Soit $X := [0,1]^2$. Soit E_0 la relation d'équivalence suivante

$$E_0\{(x_0,x_1)\} = \begin{cases} (x_0,x_1), \text{ si } 0 < x_0 < 1, \\ \{(0,x_1),(1,x_1)\}, \text{ si } x_0 \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Ainsi l'espace quotient est homéomorphe à un *cylindre* $\{(e^{i\theta}, y) : \theta \in \mathbb{R}, y \in [0,1]\}$. Géométriquement, on colle ensemble les côtés verticaux du carré.

De la même façon, l'espace quotient par rapport à la relation d'équivalence

$$E_1\{(x_0,x_1)\} = \begin{cases} (x_0,x_1), \text{ si } 0 < x_1 < 1, \\ \{(x_0,0),(x_1,1)\}, \text{ si } x_1 \in \{0,1\}, \end{cases}$$

est homéomorphe à un cylindre $\{(x, e^{i\xi}) : x \in [0,1], \xi \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, on colle ensemble les côtés horizontaux du carré. La composition $\pi_{E_1} \circ \pi_{E_1}$ est une

FIGURE III.7. Un tore.

application quotient, transformant le carré $[0,1]^2$ en un *tore* $\{(e^{i\theta}, e^{i\xi}) : x \in [0,1], \theta, \xi \in \mathbb{R}\}$. Géométriquement, ayant obtenu un des cylindres précédents, on colle ensemble ses bases.

En général, la topologie-quotient d'une topologie métrisable n'est pas métrisable. Un exemple est donné dans la section suivante.

12. Éventail séquentiel

Soit $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ une collection d'ensembles dénombrables infinis tels que $X_n \cap X_m = \varnothing$ pour tous $n \neq m$. Soit x_n un élément distingué de X_n et τ_n la *topologie cofinie de X_n autour de x_n* (l'exemple III.3.4).

On considère sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ la relation R suivante : xRy si $x = y$ ou il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x = x_n$ et $y = x_m$. On note x_∞ la classe d'équivalence de x_∞. Soit τ la topologie-quotient par rapport à cette équivalence.

12.1. Voisinages. Si $x \neq x_\infty$, alors x est isolé, donc $V \in \mathcal{V}_\tau(x)$ si et seulement si $x \in V$. Une partie O est ouverte pour τ si et seulement si elle est ouverte pour τ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, si $x_\infty \in O$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une partie finie F_n de X_n telle que $x_\infty \notin F_n$ et $X \setminus F_n \subset O$. Autrement dit, $V \in \mathcal{V}_\tau(x_\infty)$ si et seulement si $X_n \setminus V$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

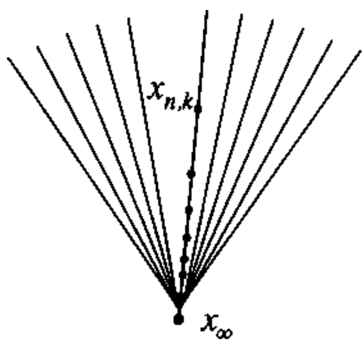


FIGURE III.8. Un éventail infini dénombrable de suites $(x_{n,k})_k$ telles que $\lim_{k\to\infty} x_{n,k} = x_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

12.2. Convergence des suites. Si $(y_k)_k$ est convergente, alors il existe n_0 tel que $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} X_n$.

Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe k_n tel que $y_{k_n} \notin \bigcup_{m=0}^{n} X_m$. Par conséquent, $\{y_{k_n} : n \in \mathbb{N}\} \setminus X_l$ est fini pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc $X \setminus \{y_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ est un voisinage de x_∞, dès lors $(y_k)_k$ ne converge pas vers x_∞.

12.3. Fermeture. Si $x_\infty \in \mathrm{cl}_\tau A$ alors il existe une suite $(y_k)_k$ dans A telle que $x_\infty \in \mathrm{Lim}_{k\to\infty} y_k$.

Observons d'abord, que si $x_\infty \in \mathrm{cl}_\tau A$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_\infty \in \mathrm{cl}_\tau(A \cap X_n)$. Sinon pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie $A \cap X_n$ est finie et $x_\infty \notin A$, donc $X \setminus A$ est un voisinage de x_∞. Comme X_n est métrisable, il existe une suite $(y_k)_k$ dans $A \cap X_n$ convergeant vers x_∞.

12.4. Caractère. Le caractère de x_∞ n'est pas dénombrable et, d'autre part, est inférieur ou égal à $\mathfrak{c}$[10].

Soit $X_n := \{x_{n,k} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$. Alors pour toute la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'ensemble $V_f := \{x_{n,k} : k \geq f(n)\} \cup \{x_\infty\}$ est un voisinage de x_∞. Comme $\operatorname{card}(\mathbb{N}^\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$, le caractère ne dépasse pas $\mathfrak{c}$. D'autre part, si $f_m \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ est une suite croissante, alors pour $f_\infty(n) := f_n(n)$ on a $V_{f_\infty} \setminus V_{f_n} \neq \varnothing$, ce qui montre qu'une famille dénombrable de parties ne peut pas être un voisinage de x_∞.

Par conséquent, la topologie τ n'est pas métrisable, car le caractère d'un élément n'est pas dénombrable.

Exercices

Solutions : pages 286-300.

(1) $\star$ Si X, Y sont deux espaces topologiques et $f : X \to Y$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) f est continue,

(b) $\operatorname{cl} f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\operatorname{cl} B)$ pour tout $B \subset Y$,

(c) $f(\operatorname{cl} A) \subset \operatorname{cl} f(A)$ pour tout $A \subset X$.

(2) Soit Y un espace topologique et soit

$$I_Y := \{(y_0, y_1) \in Y \times Y : y_0 = y_1\}$$

la relation *diagonale* de Y. Montrer que I_Y est fermée dans $Y \times Y$ si et seulement si Y est séparé.

(3) Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que

(a) si Y est séparé, alors le graphe $\operatorname{Gr}(f)$ de f est fermé,

(b) il existe une application continue, dont le graphe n'est pas fermé,

(c) si f est continue, alors $\operatorname{Gr}(f)$ est homéomorphe à X.

(4) Soit X un espace topologique. Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite *semi-continue inférieurement (supérieurement)* en x_0 si

$$f(x_0) \leq \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf_{x \in V} f(x), \tag{III.15}$$

$$\inf_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \sup_{x \in V} f(x) \leq f(x_0). \tag{III.16}$$

L'épigraphe et le hypographe d'une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont définis respectivement

$$\begin{aligned} \operatorname{epi} f \ &:= \{(x, r) : f(x) \leq r\}, \\ \operatorname{hypo} f \ &:= \{(x, r) : r \leq f(x)\}. \end{aligned}$$

10. Une estimation plus précise est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles.

Montrer que [11]

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 si et seulement si f est semi-continue inférieurement et supérieurement en x_0,

(b) f semi-continue inférieurement si et seulement si epi f est fermé,

(c) f semi-continue inférieurement si et seulement si $\{x : f(x) \leq r\}$ est fermée pour tout $r \in \mathbb{R}$,

(d) si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions semi-continues inférieurement, alors $\sup \mathcal{F}$ est semi-continue inférieurement.

(5) ⋆ Montrer que toute partie finie d'un espace topologique séparé est fermée.

(6) ⋆ Montrer que toute topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée.

(7) ⋆ Dénombrer toutes les topologies sur $\{0, 1\}$. Lesquelles sont séparées ?

(8) Soit X un espace topologique et $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie cofinie autour de ∞. Alors la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans X si et seulement si $h : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$ définie par $h(n) = x_n$ et $h(\infty) = x$, est continue.

(9) Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique discret X. Alors $\ker_{n\to\infty} x_n = \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n$.

(10) Soit X un espace topologique. Montrer que pour tout x et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \in \mathcal{V}(w)$ pour chaque $w \in W$.

(11) Montrer que $\operatorname{cl}(A_0 \cup A_1) = \operatorname{cl} A_0 \cup \operatorname{cl} A_1$.

(12) Une famille $\mathcal{F}$ de parties d'un espace topologique X est dite *discrète* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V de x tel que $F \cap V \neq \varnothing$ pour au plus un $F \in \mathcal{F}$. Une partie D d'un espace topologique est dite *discrète* si $\{\{x\} : x \in D\}$ est discrète. Montrer que

(a) si $\mathcal{F}$ est une famille discrète, alors

$$\operatorname{cl}(\bigcup\nolimits_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcup\nolimits_{F\in\mathcal{F}} \operatorname{cl} F.$$

(b) si $(x_n)_n$ est une suite injective dans un espace métrique telle que la famille $\{\{x_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ est discrète, alors il existe une suite $(r_n)_n$ de nombres strictement positifs telle que $B^{\leq}(x_n, r_n)$ sont disjointes deux à deux, et $\{B^{\leq}(x_n, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est discrète.

(13) On rappelle que le *caractère* $\chi(x)$ d'un point x d'un espace topologique est le plus petit cardinal κ tel qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x avec $\operatorname{card} \mathcal{B} = \kappa$. Montrer que

11. Les propositions analogues lient la semi-continuité supérieure et le hypographe.

(a) si X un espace métrisable, alors $\chi(x) \leq \aleph_0$ pour tout $x \in X$,

(b) $\chi(x) < \aleph_0$, alors $\chi(x) = 1$,

(c) si le caractère de x est fini et X est séparée, alors $\{\{x\}\}$ est une base de x,

(d) si X est séparée et $\operatorname{card} X < \infty$, alors X est discret.

(14) Montrer que si A_0, A_1 sont deux fermés disjoints dans un espace métrique, alors il existe deux ouverts O_0, O_1 disjoints tels que $A_0 \subset O_0$ et $A_1 \subset O_1$.

(15) Montrer que la topologie cofinie autour de x_∞ sur un ensemble infini X (l'exemple 3.4) est

(a) séparée,

(b) normale,

(c) de caractère égal à $\operatorname{card} X$.

(16) Soit X, Y deux ensembles non dénombrables avec la topologie cofinie autour de x_∞ sur X et la topologie codénombrable autour de y_∞ sur Y. Montrer que

(a) si $g : Y \to X$ et $g(y_\infty) \neq x_\infty$, alors g est continue si et seulement si $\{y \in Y : g(y) \neq g(y_\infty)\}$ est dénombrable,

(b) si $g : Y \to X$ et $g(y_\infty) = x_\infty$, alors g est continue si et seulement si $g^{-1}(y)$ est dénombrable pour tout $y \neq y_\infty$.

(17) Soit X un ensemble non dénombrable muni de la topologie codénombrable autour de $x_\infty \in X$ (Voir l'exemple 3.6). Montrer que toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est constante sur une partie codénombrable de X.

(18) Soit X, Y deux ensembles non dénombrables munis de la topologie codénombrable autour de $x_\infty \in X$ et $y_\infty \in Y$. Soit $f : X \to Y$. Montrer que

(a) si $f(x_\infty) \neq y_\infty$, alors f est continue si et seulement si

$$\{x \in X : f(x) \neq f(x_\infty)\}$$

est dénombrable.

(b) si $f(x_\infty) = y_\infty$, alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(y)$ est dénombrable pour tout $y \neq y_\infty$.

(19) Soit X, Y deux ensembles non dénombrables avec la topologie cofinie autour x_∞ sur X et la topologie codénombrable autour y_∞ sur Y. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si $\{x \in X : f(x) \neq f(x_\infty)\}$ est fini. En particulier, $f(X)$ est finie.

(20) Une topologie est dite *primale* si elle admet au plus un point non isolé. Montrer que toute topologie primale est normale.

(21) Un espace topologique X est dit *parfaitement normal* si pour tout couple de fermés disjoints F_0, F_1 de X, il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $f^{-1}(0) = F_0$ et $f^{-1}(1) = F_1$. Une partie U d'un espace topologique X est dite *fonctionnellement ouverte* s'il existe une fonction continue f telle que $U = \{f > 0\}$. Montrer que

(a) tout espace métrisable est parfaitement normal,

(b) (théorème de Vedenisov) un espace topologique séparé est parfaitement normal si et seulement si tous les ouverts sont fonctionnellement ouverts,

(c) un espace est parfaitement normal si et seulement s'il est normal et tout fermé est un G_δ,

(d) il existe un espace normal qui n'est pas parfaitement normal.

(22) (!) Montrer que la topologie (non métrisable) de Sorgenfrey (exemple 7.8) est parfaitement normale.

(23) Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$. Montrer que

(a) Si ξ est une topologie sur X, alors il existe sur Y la topologie la plus fine (notée $f\xi$) telle que f est continue de ξ vers $f\xi$.

(b) Si τ est une topologie sur Y, alors il existe sur X la topologie la moins fine (notée $f^{-1}\tau$) telle que f est continue de $f^{-1}\tau$ vers τ.

(24) Les ouverts de la topologie \$ de Sierpiński sur $\{0,1\}$ sont $\varnothing, \{1\}$ et $\{0,1\}$. Soit τ une topologie sur X. Montrer que

(a) Une application $f : X \to \{0,1\}$ est continue de τ dans \$ si et seulement si $\{x \in X : f(x) = 1\}$ est τ-ouvert.

(b) Chaque topologie τ vérifie

$$\tau = \bigvee_{f \in C(\tau, \$)} f^{-1}\$.$$

(25) Soit X un ensemble infini. Pour tout $x \in X$ soit τ_x la topologie cofinie autour de x. Trouver

$$\bigvee_{x \in X} \tau_x \text{ et } \bigwedge_{x \in X} \tau_x.$$

(26) Une partie non vide A d'un espace topologique s'appelle *parfaite* si elle est fermée et sans point isolé ; A s'appelle *clairsemée* si toute partie non vide admet un point isolé. Montrer que

(a) toute union de parties sans point isolé est sans point isolé.

(b) la fermeture de toute partie sans point isolé est sans point isolé.

(c) tout espace topologique admet une décomposition $X = X_\infty \cup X_1$, où X_∞ est parfait et X_1 est clairsemé.

(d) (!) toute partie parfaite de la droite réelle a la cardinalité non inférieure à $\mathfrak{c}$.

(27) Soit $(X, \leq)$ un ensemble *totalement ordonné*, c'est-à-dire un ensemble avec une relation d'ordre $\leq$ telle que $x_0 \leq x_1$ ou $x_1 \leq x_0$ pour tous $x_0, x_1 \in X$. Comme d'habitude, $x_0 < x_1$ signifie $x_0 \leq x_1$ et $x_0 \neq x_1$. Un ordre total est dit *dense* si $x_0 < x_1$ entraîne l'existence de x tel que $x_0 < x < x_1$; *non borné* si pour tout x il existe $y < x$ et $z > x$.

Montrer que

(a) si $\operatorname{card} X > 1$, alors la famille $\mathcal{B}$ des intervalles

$$\{x \in X : x < b\}, \{x \in X : a < x < b\}, \{x \in X : a < x\},$$

où $a, b \in X$ et $a < b$, est une base d'ouverts d'une topologie,

(b) si D est une partie discrète de X, alors il existe une famille disjointe $\{B_x : x \in D\} \subset \mathcal{B}$,

(c) tout espace totalement ordonné est normal,

(d) un espace dénombrable, totalement ordonné, dense et non borné est homéomorphe à $\mathbb{Q}$, donc à $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$.

(28) Montrer que

(a) tout sous-espace d'un espace topologique régulier est régulier,

(b) tout produit d'espaces topologiques réguliers est régulier,

(c) (!) il existe un espace topologique normal X tel que $X \times X$ n'est pas normal (Voir l'exercice VI.14),

(d) un sous-espace d'un espace topologique normal n'est pas forcément normal.

(29) Soit $(X_n)_n$ une suite d'ensembles dénombrables infinis et $(x_n)_n$ telle que $x_n \in X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. On suppose que $X_n \cap X_m = \varnothing$ pour $n \neq m$ et soit $x_0 \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} X_n$. On considère sur chaque X_n la topologie τ_n cofinie autour de x_n.

(a) Est-ce que $\tau := \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ est métrisable sur $X := \{x_0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} X_n$? Si oui, définir une de ses métriques.

(b) Soit $f : X \to X$ telle que $f(x) := x$ si $x \neq x_n$ et $f(x_n) := x_0$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Soit $f\tau$ la topologie quotient. Est-ce que c'est une topologie métrisable ?

(30) Une application $f : X \to Y$ est *ouverte* si $f(O)$ est ouvert pour tout ouvert O de X. Elle est *fermée* si $f(F)$ est fermé pour tout fermé F de X. Montrer que

(a) toute application surjective continue ouverte est quotient,

(b) toute application surjective continue fermée est quotient,

(c) il existe une application quotient qui n'est ni ouverte ni fermée.

(31) Un espace topologique X s'appelle *de Fréchet* si

$$x \in \operatorname{cl} A \Longrightarrow \underset{(x_n)_n}{\exists} \left(\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} x_n \in A \text{ et } x \in \operatorname{Lim}_{n \to \infty} x_n \right).$$

pour tout $x \in X$ et $A \subset X$. Notons $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A := \bigcup \{\operatorname{Lim}_{n\to\infty} f(n) : f \in A^{\mathbb{N}}\}$ la *fermeture séquentielle* de A. Montrer que

(a) X est Fréchet si et seulement si $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A = \operatorname{cl} A$ pour tout $A \subset X$,

(b) tout espace de caractère dénombrable est de Fréchet (donc tout espace métrisable est de Fréchet),

(c) l'éventail séquentiel de la section III.12 est de Fréchet, mais son caractère n'est pas dénombrable,

(d) la bisuite de l'exemple III.3.7 n'est pas de Fréchet.

(32) Une partie A d'un espace topologique est dite *séquentiellement fermée* si $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n \subset A$ pour toute suite d'éléments de A. Un espace topologique X est appelé *séquentiel* si toute partie séquentiellement fermée est fermée. Montrer que

(a) une topologie est séquentielle si et seulement si

$$\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A \subset A \Longrightarrow \operatorname{cl} A \subset A$$

pour toute partie A,

(b) toute topologie de Fréchet est séquentielle,

(c) la bisuite de l'exemple III.3.7 est séquentielle,

(d) la topologie de Arens de l'exemple III.3.8 n'est pas séquentielle,

(e) pour toute topologie τ il existe la topologie $T_{\mathrm{Seq}}\tau$ la moins fine des topologies séquentielles ξ plus fine que τ.

(f) Quelle est $T_{\mathrm{Seq}}\tau$ pour la topologie de Arens τ ?

(33) Soit X, Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite *séquentiellement continue* si $x \in \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n$ entraîne $f(x) \in \operatorname{Lim}_{n\to\infty} f(x_n)$ pour toute suite $(x_n)_n$ et tout x.

(a) Observer que toute application continue est séquentiellement continue.

(b) Montrer que si $f : X \to Y$ est séquentiellement et X est un espace séquentiel, alors f est continue.

(34) Une partie O de $\mathbb{R}^2$ est ouverte pour la *topologie radiale* si $O \cap L$ est une partie ouverte de L pour toute droite L de $\mathbb{R}^2$. Montrer que

(a) si une suite $(x_k)_k$ est convergente pour la topologie radiale, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et des droites $L_1, L_2, \ldots, L_n$ telles que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$,

(b) la topologie radiale n'est pas de Fréchet,

(c) la topologie radiale est séquentielle.

CHAPITRE IV

Espaces métriques séparables

Une topologie est dite séparable si elle admet une partie dénombrable dense. Nous verrons que tout espace métrique séparable possède la propriété de Lindelöf, c'est-à-dire tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement dénombrable.

FIGURE IV.1. Ernst Lindelöf (1870-1946)

1. Espaces métriques séparables

Un espace métrique X est dit *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense, c'est-à-dire il existe $Q \subset X$ telle que $\mathrm{cl}\, Q = X$ et $\mathrm{card}\, Q \leq \aleph_0$. Ainsi la séparabilité est une propriété topologique.

Exemple 1.1. Un espace discret X est pas séparable si et seulement s'il dénombrable. Effectivement, X est séparable pourvu qu'il existe une partie dénombrable Q de X telle que $Q = \mathrm{cl}_\iota\, Q = X$.

L'espace $\mathbb{R}$ (des nombres réels) avec sa topologie usuelle est séparable, car il inclut l'ensemble dénombrable dense $\mathbb{Q}$ (des nombres rationnels). Nous savons que $\mathrm{card}\, \mathbb{R} = \mathfrak{c}$. Bel et bien,

Proposition 1.2. *Si un espace métrique* X *est séparable, alors* $\mathrm{card}\, X \leq \mathfrak{c}$ (metr) [1].

DÉMONSTRATION. Soit A une partie dénombrable dense de X. Par conséquent pour tout $x \in X$ il existe une suite $f_x \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \lim_{n\to\infty} f_x(n)$. L'application $x \mapsto f_x$ est injective, car une suite ne peut pas converger vers deux éléments distincts. Il s'ensuit que $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, A^{\mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. □

1. Cette proposition n'est plus valable dans le cadre topologique général (voir B.6.)

Une partie $\mathcal{B}$ d'ouverts d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est une *base* si pour tout $O \in \mathcal{O}$ et tout $x \in O$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset O$.[2] Par exemple, $\left\{B_{\frac{1}{n}}(q) : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$ est une base (dénombrable) de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3. *Un espace métrique est séparable si et seulement s'il admet une base dénombrable*[3] (metr).

DÉMONSTRATION. Soit d une métrique de X. Si A est une partie dénombrable dense de X, alors $\mathcal{B} := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a) : a \in A, n \in \mathbb{N}_1\right\}$ est une famille dénombrable. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base. En effet, si O est un ouvert et $x \in O$, alors, par définition, il existe $n \in \mathbb{N}_1$ tel que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset A$. Puisque A est dense, il existe $a \in A \cap B_{\frac{1}{2n}}(x)$. Donc $x \in B_{\frac{1}{2n}}(a) \subset B_{\frac{1}{n}}(x) \subset O$, car si $y \in B_{\frac{1}{2n}}(a)$, alors

$$d(y,x) \leq d(y,a) + d(a,x) < \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{n}.$$

Réciproquement, si $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts et $x_n \in G_n$, alors $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense. □

Proposition 1.4. *Si X est séparable et $f : X \to Y$ est continue et surjective, alors Y est séparable* (top).

DÉMONSTRATION. Si A est une partie dénombrable dense de X, alors $f(A)$ est bien évidemment dénombrable. Si $y \in Y$ alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et, d'après l'hypothèse il existe une suite $(a_n)_n$ dans A convergeant vers x. Puisque f est continue, $y = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, donc $y \in \operatorname{cl} f(A)$. □

Lemme 1.5. *Tout produit fini d'espaces métriques séparables est séparable* (top).

DÉMONSTRATION. Soit A_k une partie dénombrable dense de X_k pour $1 \leq k \leq n$. Si $x \in \prod_{k=1}^n X_k$ alors $x(k) \in \operatorname{cl} A_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$, c'est-à-dire $V_k \cap A_k \neq \varnothing$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et tout $V_k \in \mathcal{V}_k(x(k))$. Ainsi $\prod_{k=1}^n V_k \cap \prod_{k=1}^n A_k \neq \varnothing$. Or $\{\prod_{k=1}^n V_k : V_k \in \mathcal{V}_k(x(k))\}$ est une base de voisinages de x, donc $x \in \operatorname{cl} \prod_{k=1}^n A_k$ et $\prod_{k=1}^n A_k$ est dénombrable.[4] □

La difficulté de sa généralisation au cas infini (dénombrable) est que le produit dénombrable infini d'ensembles dénombrables infinis est de cardinalité $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Proposition 1.6. *Tout produit dénombrable des espaces métriques séparables est séparable* (top).[5]

---

2. Le plus petit cardinal κ tel qu'il existe une base de cardinalité κ, s'appelle le *poids* de l'espace.

3. Voir la proposition B.6.3 et l'exercice B.13f.

4. Une autre façon de démontrer ce lemme est d'observer que si $\lim_p x_{k,p} = x_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$, alors $\lim_p (x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{n,p})_p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5. Tout produit de κ espaces séparables est séparable pour $\kappa \leq \mathfrak{c}$ (d'après le théorème B.6.2 de Hewitt-Marczewski-Pondiczery), mais si $\aleph_0 < \kappa$ alors le produit n'est pas métrisable (sauf dans des cas dégénérés) en vertu du théorème III.9.9.

DÉMONSTRATION. Soit A_n une partie dénombrable dense de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et soit a un point arbitraire de $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$. L'ensemble

$$A := \left\{x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n : \underset{n(x)}{\exists} \underset{n>n(x)}{\forall}\ x(n) = a(n)\right\}$$

est dénombrable. En effet, pour tout $x \in A$ il existe $n_x < \infty$ tel que

$$x \in \prod_{n=0}^{n_x} A_n \times \prod_{n=n_x}^{\infty} \{a(n)\}.$$

Si on note $r(x) := (x(0), \ldots, x(n_x))$, alors r est une application injective de A dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{j=0}^{n} A_j$, donc $\operatorname{card} A \leq \aleph_0$.

Il reste à montrer que A est dense dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Si $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $n \in \mathbb{N}$, alors il existe une suite $(x_k^n)_k \in A_n$ telle que $x(n) = \lim_{k\to\infty} x_k^n$. La suite $(y_k)_k$ suivante

$$\begin{aligned}
y_0 &:= (x_0^0, a(1), a(2), a(3), \ldots)\\
y_1 &:= (x_1^0, x_1^1, a(2), a(3), \ldots)\\
&\cdots\\
y_k &:= (x_k^0, x_k^1, \ldots, a(k+1), \ldots)
\end{aligned}$$

converge vers $x = (x(0), x(1), x(3), \ldots)$ et $y_k \in A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

En particulier, le cube de Hilbert et l'ensemble de Cantor sont séparables.

Théorème 1.7 (Urysohn). *Tout espace métrique séparable est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace séparable et soit d une métrique compatible bornée par 1. Si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dense de X, alors $h : X \to \prod_{n\in\mathbb{N}} [0,1]$, définie par

$$h(x) := (d(x, a_0), d(x, a_1), \ldots, d(x, a_n), \ldots)$$

est continue, car $\pi_n \circ h$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part h est injective. En effet, si $h(x') = h(x)$, alors, par définition, $d(x, a_n) = d(x', a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci veut dire que les fonction continues $d(x, \cdot) = d(x', \cdot)$ coïncident sur l'ensemble dense A. Il s'ensuit que $d(x, y) = d(x', y)$ pour tout $y \in X$, donc $x = x'$.

Pour montrer que $h^{-1} : h(X) \to X$ est continue, considérons une suite $(x_k)_k$ et x tels que $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = h(x)$. Si $\varepsilon > 0$, alors il existe n tel que $d(x, a_n) < \varepsilon$, car A est dense. D'autre part, puisque $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = h(x)$, il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_k, a_n) < d(x, a_n) + \varepsilon$ pour tout $k \geq k_\varepsilon$. Par conséquent,

$$d(x, x_k) \leq d(x, a_n) + d(x_k, a_n) < 2d(x, a_n) + \varepsilon = 3\varepsilon$$

pour tout $k \geq k_\varepsilon$. □

2. Espaces de Lindelöf

On dit qu'une famille $\mathcal{H}$ de parties de X est un *recouvrement* d'une partie A de X si $A \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Un recouvrement dans un espace topologique est dit *ouvert* si toutes les parties qui le constituent sont ouvertes.

Un espace topologique X s'appelle *de Lindelöf* si pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{H}$ de X, il existe une suite $(H_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

Théorème 2.1 (Lindelöf). *Tout espace métrique séparable est de Lindelöf.*

DÉMONSTRATION. Effectivement, si X est séparable, alors d'après la proposition 1.3, il existe une base d'ouverts $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X. Soit $\mathcal{H}$ une famille d'ouverts telle que $X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$. Soit

$$N := \{n \in \mathbb{N} : \underset{H \in \mathcal{H}}{\exists} G_n \subset H\}.$$

Donc pour tout $n \in N$ il existe $H_n \in \mathcal{H}$ telle que $G_n \subset H_n$. Comme $X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$, pour tout $x \in X$ il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $x \in H$. Puisque H est ouvert et $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in G_n \subset H$, donc $n \in N$. Par conséquent,

$$X \subset \bigcup_{n \in N} G_n \subset \bigcup_{n \in N} H_n,$$

ce qui prouve que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. □

Un point x d'un espace métrique est dit de *condensation* d'une partie A si $V \cap A$ n'est pas dénombrable pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$. Il s'ensuit que tout point de condensation de A est aussi d'accumulation de A. Il s'avère (voir la solution de l'exercice 5) que l'ensemble des points de condensation de toute partie est parfait.

Exercices

Solutions : pages 300-301.

(1) $\star$ Si X est un espace métrique séparable, alors $\operatorname{card} X \leq \mathfrak{c}$.

(2) $\star$ Combien y a-t-il de fonctions réelles continues sur un espace séparable ?

(3) $\star$ Soit X un espace métrique. Alors X est séparable si et seulement s'il existe une base dénombrable d'ouverts de X.

(4) Dans tout espace métrique séparable X il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $X = \operatorname{adh}_{n \to \infty}(x_n)_n$.

(5) (Théorème de Cantor-Bendixson) Tout espace métrique séparable est l'union disjointe de deux ensembles, dont un est parfait et l'autre est dénombrable.

CHAPITRE V

Espaces métriques compacts

La compacité est une propriété essentielle, garantissant la non vacuité de l'adhérence des suites (et plus généralement, des filtres) et, en conséquence, l'existence (des points fixes des applications continues, des minima des fonctions continues, etc.).

FIGURE V.1. Émile Borel (1871-1956), Henri Lebesgue (1875-1941) et Alexandre N. Tikhonov (1906-1993)

La forme séquentielle de compacité fut formalisé par Bolzano et Weierstraß, et sa forme générale [1] (en termes de recouvrements, familles distributives, grilles ou filtres) par Heine (1872), Cantor (1884), Peano (1887), Borel (1895), Lebesgue (1902), Vietoris (1921), Alexandrov et Urysohn (1923).

1. Compacité en termes des suites

Un espace métrique est dit *compact* si de toute suite on peut extraire une suite convergente.

D'après la proposition II.6.2, un espace métrique X est compact si et seulement si

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n \neq \varnothing \qquad \text{(V.1)}$$

pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X.

Exemple 1.1. Considérons un espace métrique discret X. Les suites convergentes sont précisément celles stationnaires. L'espace discret est compact si et seulement s'il est fini.

1. Voir l'annexe B.

Effectivement, si X est fini et $(y_n)_n$ est une suite d'éléments de X, alors il existe $x \in X$ tel que $A_x := \{n \in \mathbb{N} : y_n = x\}$ est infini. Par conséquent, la suite $(y_n)_{n \in A_x}$ est constante, donc convergente vers x.

Si X est infini, alors il existe une suite injective $(x_n)_n$ dans X. Toute suite extraite de $(x_{n_k})_k$ est injective, donc non stationnaire, d'où $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \varnothing$.

Observons que les espaces discrets infinis sont la quintessence de la non compacité, car

Proposition 1.2. *Un espace métrique n'est pas compact si et seulement s'il a un sous-espace infini discret fermé.*

DÉMONSTRATION. Par définition, X n'est pas compact si et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_l : l \geq n\} = \varnothing,$$

c'est-à-dire si pour tout $x \in X$, il existe n et un voisinage V de x tel que $V \cap \{x_l : l \geq n\} = \varnothing$. Par conséquent, il existe un voisinage W de x tel que $W \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{x\}$, ce qui veut dire que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace discret et fermé de X.

Réciproquement, si F est un sous-espace infini discret fermé de X, alors il existe une suite injective $(x_n)_n$ à valeurs dans F. Ainsi

$$\{x_l : l \geq n\} = \operatorname{cl}_F \{x_l : l \geq n\} = \operatorname{cl}_X \{x_l : l \geq n\}$$

pour tout n, donc $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x_l : l \geq n\} = \varnothing$. □

Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite *compacte* si (K, d_K) est un espace compact, où d_K est la métrique sur K induite de d.

Il s'ensuit que K est une partie compacte de X si et seulement si

$$K \cap \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n \neq \varnothing$$

pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K. Ainsi la compacité est une propriété absolue, c'est-à-dire

Proposition 1.3. *Si X, Y sont deux espaces métriques et K est un sous-espace commun de X et de Y, alors K est compact dans X si et seulement s'il est compact dans Y.*

Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite *relativement compacte* si $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n \neq \varnothing$ pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K.

Proposition 1.4. *Une partie K d'un espace métrique X est relativement compacte si et seulement si $\operatorname{cl}_X K$ est compacte.*

DÉMONSTRATION. Si $\operatorname{cl}_X K$ est compacte, alors pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K, il existe une suite extraite convergeant vers un élément de $\operatorname{cl}_X K$, donc de X.

Réciproquement, soit K relativement compacte dans X et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $\operatorname{cl}_X K$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $w_n \in K$ avec $d(w_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Comme K est relativement compacte, il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que $(w_{n_k})_k$ est convergente. Par conséquent, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} w_{n_k} \in \mathrm{cl}_X K$. □

Exemple 1.5. L'intervalle $]0,1[$ est relativement compact dans $[0,1]$, mais pas dans $]0,1]$.

Proposition 1.6. *Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée*[2] (metr).

DÉMONSTRATION. Soit K une partie compacte d'un espace métrisable X et soit $x \in \mathrm{cl}\, K$. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de K telle que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. D'autre part, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$, car K est compacte. Or $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$, donc $x \in K$. □

En conséquence, une partie K d'un espace métrique est compacte si et seulement si $\varnothing \neq \mathrm{adh}_{n\to\infty} x_n \subset K$ pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K.

Proposition 1.7. *Toute partie fermée d'un espace métrique compact est compacte* (top).

DÉMONSTRATION. Soit L une partie fermée d'un espace compact X. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de L. D'après la compacité de X, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in X$, mais puisque L est fermée, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in L$, en montrant que L est compacte. □

Proposition 1.8. *Si $f : X \to Y$ est continue et K est une partie compacte d'un espace métrique X, alors $f(K)$ est compacte* (top).

DÉMONSTRATION. Si $(y_n)_n \subset f(K)$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans K telle que $y_n = f(x_n)$ pour tout n. Puisque K est compacte, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$, donc $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) \in f(K)$ d'après la continuité de f. □

Corollaire 1.9. *Soit X, Y espaces métriques. Si X est compact et une application $f : X \to Y$ est bijective et continue, alors f est un homéomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $f^{-1} : Y \to X$ est continue, par exemple, on va montrer que si A est un fermé de X, alors $(f^{-1})^{-1}(A)$ est fermée. D'après la proposition 1.7, A est compact, donc $f(A)$ est compact grâce à la proposition 1.8, et fermé d'après la proposition 1.6. Or $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$. □

Un espace métrique X est dit *totalement borné* (ou *pré-compact*) si pour tout $r > 0$ il existe une partie finie F de X telle que $X = B_r(F)$.

Lemme 1.10. *Tout espace métrique compact est totalement borné.*

---

2. Voir l'exemple 4.1.

DÉMONSTRATION. Supposons qu'au contraire, il existe $r > 0$ tel que, pour toute partie finie F, il existe $x_F \in X$ tel que $x_F \notin B_r(F)$.(3) Alors on peut construire une suite $(x_n)_n$ telle que $d(x_n, x_m) > r$ pour tout $n \neq m$. Puisque X est compact, il existe une suite convergente extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$, en particulier $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = 0$, ce qui n'est pas possible car $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) > r$. □

Corollaire 1.11. *Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée.*

DÉMONSTRATION. Si K est compacte dans (X, d), alors, par définition, (K, d_K) est un espace métrique compact. D'après le lemme 1.10, il existe une partie finie F de K telle que $K \subset B_1(F)$. Or $\mathrm{diam}(B_1(F)) \leq \mathrm{diam}(F) + 2 < \infty$. □

La droite réelle $\mathbb{R}$ n'est pas compacte, car elle inclut l'ensemble fermé, discret et infini $\mathbb{Z}$ (des nombres entiers).

L'ordre de la droite réelle est, par définition, complet, au sens que toute partie majorée non vide admet la borne supérieure (de façon équivalente, toute partie minorée non vide admet la borne inférieure). Cette propriété entraîne la compacité des parties bornées fermées de la droite :

Théorème 1.12 (Bolzano-Weierstraß). *Toute suite bornée dans la droite réelle admet une suite extraite convergente.*

Donnons ici une démonstration ayant recours direct à la complétude(4) par rapport à l'ordre (*cf.*, **[23]**).

DÉMONSTRATION. Soit $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq x_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition, $x \in X \subset \mathbb{R}$ si $\{n \in \mathbb{N} : x < x_n\}$ est infini. L'ensemble X n'est pas vide, car $m \in X$.

D'autre part, X est majoré par M, car $\{n \in \mathbb{N} : M < x_n\}$ est vide. D'après la complétude de $\mathbb{R}$, il existe le plus petit majorant x_∞ de X. Puisque $x_\infty - 1 \in X$ et $x_\infty + 1 \notin X$, il existe n_1 tel que $x_{n_1} \in \left]x_\infty - 1, x_\infty + 1\right[$. Supposons que nous avons trouvé $n_1 < \ldots < n_k$ tels que $x_{n_k} \in \left]x_\infty - \frac{1}{k}, x_\infty + \frac{1}{k}\right[$, alors il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} \in \left]x_\infty - \frac{1}{k+1}, x_\infty + \frac{1}{k+1}\right[$, car cet intervalle contient x_n pour une infinité de n. Il s'ensuit que $(x_{n_k})_k$ est une suite extraite de $(x_n)_n$ qui converge vers x_∞. □

Corollaire 1.13. *Une partie de* $\mathbb{R}$ *est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

En effet, si A est une partie compacte, alors A est fermée d'après la proposition 1.6 et bornée d'après le corollaire 1.11. Si A est fermée bornée, toute suite dans A est bornée, alors d'après le théorème 1.12 de Bolzano-Weierstraß, elle admet une suite extraite convergente vers un élément de A, car A est fermée.

3. Rappelons que $B_r(F) := \bigcup_{x\in F} B_r(x)$.

4. Cette propriété est légèrement plus forte que la propriété de *treillis complet* qui assure l'existence de la borne supérieure de toute partie non vide.

Théorème 1.14. *Tout espace métrique compact est séparable*[5] (metr).

DÉMONSTRATION. Par le lemme 1.10, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe une partie finie F_n de X telle que $B_{\frac{1}{n}}(F_n) = X$. L'ensemble $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est bien entendu dénombrable et dense, car pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$ il existe $n > \frac{1}{r}$, donc $x \in B_{\frac{1}{n}}(F_n)$ donc il existe $w \in F_n \subset F$ avec $d(x,w) < r$. □

Théorème 1.15 (Tikhonov). *Si X_n est un espace métrique pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est compact si et seulement si X_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$* (top).

DÉMONSTRATION. Si X est compact, alors pour tout n, l'espace X_n est compact comme l'image du produit par la projection π_n.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Alors comme X_0 est compact, il existe une partie infinie N_0 de $\mathbb{N}$ et $x_0 \in X_0$ tels que $x_0 = \lim_{N_0\ni k\to\infty} f_k(0)$. Supposons que nous avons trouvé des parties infinies $N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_{n-1}$ telles que $\lim_{N_m\ni k\to\infty} f_k(m) = x_m$ pour tout $0 \le m \le n-1$. Alors il existe $N_n \subset N_{n-1}$ et $x_n \in X_m$ telle que $\lim_{N_n\ni k\to\infty} f_k(n) = x_n$, car X_n est compact. D'après la proposition I.4.9, il existe un ensemble infini N_∞ tel que $N_\infty \setminus N_n$ est fini pour tout n. Par conséquent, $\lim_{N_\infty\ni k\to\infty} f_k = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Effectivement, pour tout n, $\lim_{N_n\ni k\to\infty} f_k(n) = x_n$ donc $\lim_{N_\infty\ni k\to\infty} f_k(n) = x_n$. □

Remarque 1.16. Le théorème 1.15 est un cas particulier du théorème B.4.4 de Tikhonov, disant qu'un produit arbitraire d'espaces topologiques est compact si et seulement si toute composante est compacte. Cependant la démonstration ci-dessus, basée sur la convergence des suites, est donnée pour les topologies métrisables.

Il s'ensuit que le cube de Hilbert et le cube de Cantor sont compacts.

D'après le théorème IV.1.7 d'Urysohn, le théorème 1.14 et la proposition 1.8,

Corollaire 1.17. *Tout espace métrique compact est homéomorphe à une partie fermée du cube de Hilbert.*

Exemple 1.18. L'ensemble de Cantor C est homéomorphe au cube de Cantor, donc est compact. La compacité de C est également une conséquence de la construction, en tant qu'une intersection d'ensembles fermés. Notons que C a une base dénombrable composée de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Théorème 1.19. *Tout espace métrique compact non-vide est l'image continue de l'ensemble de Cantor.*

DÉMONSTRATION. L'exercice 11. □

5. Ce fait n'est plus valable dans le cadre topologique général (voir l'exercice B.14.

Théorème 1.20 (Heine). *Si X est un espace métrique compact et $f : X \to Y$ est une application continue, alors f est uniformément continue.*

DÉMONSTRATION. Si X est compact et f est continue, mais qui n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout n il existe x_n, w_n tels que $d(x_n, w_n) < \frac{1}{n}$ et $d(f(x_n), f(w_n)) \geq \varepsilon$.

Puisque X est compact, il existe x_∞ et une partie infinie A de $\mathbb{N}$ telle que $\lim_{A \ni n \to \infty} x_n = x_\infty$ et w_∞ et une partie infinie B de A telle que $\lim_{B \ni n \to \infty} w_n = w_\infty$, donc également $\lim_{B \ni n \to \infty} x_n = x_\infty$.

De l'inégalité

$$d(x_\infty, w_\infty) \leq d(x_\infty, x_n) + d(x_n, w_n) + d(w_n, w_\infty)$$

pour $n \in B$, résulte que $x_\infty = w_\infty$. La continuité de f implique que

$$\lim_{B \ni n \to \infty} f(x_n) = f(x_\infty) = f(w_\infty) = \lim_{B \ni n \to \infty} f(w_n),$$

donc $\lim_{B \ni n \to \infty} d(f(x_n), f(w_n)) = 0$, contrairement à l'hypothèse

$$d(f(x_n), f(w_n)) \geq \varepsilon.$$

□

Théorème 1.21 (Weierstraß). *Si X est métrique compact (non vide) et $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f est bornée et atteint ses bornes* (top).

DÉMONSTRATION. Soit $(r_n)_n$ une suite dans $f(X)$ telle que $r_n \geq r_{n+1}$ pour tout n, et $\inf_{x \in X} f = \lim_{n \to \infty} r_n$. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $r_n = f(x_n)$ pour tout n. Comme X est compact, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ et $x_\infty \in X$ tels que $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_\infty$. Comme f est continue,

$$\inf_{x \in X} f \leq f(x_\infty) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k \to \infty} r_{n_k} = \inf_{x \in X} f,$$

donc f atteint sa borne inférieure. On prouve de la même manière qu'elle atteint sa borne supérieure. Par conséquent, les bornes sont finies, donc f est bornée [6]. □

2. Compacité en termes des recouvrements

Théorème 2.1 (Cantor). *Un espace métrique X est compact si et seulement si pour toute suite décroissante $(F_n)_n$ de parties fermées non vides de X,*

$$\bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$$

(metr).

6. Le fait que f est bornée est également une conséquence du fait que $f(X)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ selon la proposition 1.8.

Démonstration. Soit $x_n \in F_n$. Si X est compact, alors il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ et x_∞ telle que $x_\infty \in X$. Par définition, pour tout n, il existe $k(n)$ telle que $x_{n_k} \in F_n$ pour tout $k > k(n)$, et comme F_n est fermé, $x_\infty \in F_n$, donc $x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Réciproquement, si X n'est pas compact, alors grâce à la proposition 1.2, il existe une suite $(x_n)_n$ injective d'éléments de X telle que toute partie de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est fermée, donc $F_n := \{x_l : l \geq n\}$ définit une suite décroissante de fermés non vides, dont l'intersection est vide. □

Théorème 2.2 (Borel). *Un espace métrique X est compact si et seulement si pour toute suite $(H_n)_n$ d'ouverts telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X = \bigcup_{k=0}^{n} H_k$* (metr).

Démonstration. En contraposant le 2.1 de Cantor avec $G_n := X \setminus F_n$, on obtient qu'un espace métrique X est compact si et seulement si pour toute suite croissante d'ouverts $(G_n)_n$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $G_n = X$. Si $(H_n)_n$ est une suite d'ouverts, alors $G_n := \bigcup_{k=0}^{n} H_k$ définit une suite croissante d'ouverts telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$, ce qui achève la preuve. □

Théorème 2.3 (Borel-Lebesgue). *Un espace métrique est compact si et seulement si pour toute famille d'ouverts $\mathcal{H}$ telle que*

$$X = \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H, \tag{V.2}$$

il existe une sous-famille finie $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ telle que $X = \bigcup_{H\in\mathcal{H}_0} H$ (top).

Démonstration. Si X est un espace métrique compact, donc séparable, alors, d'après le théorème 2.1 de Lindelöf, il existe une sous-famille dénombrable $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ telle que $X = \bigcup_{H\in\mathcal{H}_1} H$. D'après le théorème 2.2 de Borel, il existe une famille finie $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}_1$ telle que $X = \bigcup_{H\in\mathcal{H}_0} H$. Si un espace métrique X n'est pas compact, alors selon le théorème 2.2 de Borel, il existe une famille (dénombrable) $\mathcal{H}$ vérifiant (V.2) et telle que $X \neq \bigcup_{H\in\mathcal{H}_0} H$ pour toute sous-famille finie $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$. □

Donc un espace métrique est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

3. Prolongements des applications continues

Soit K un espace métrique compact, A une partie dense d'un espace métrique X et $f : A \to K$ une application continue. Si f admet un prolongement continu à X, alors pour tout couple F_0, F_1 de fermés disjoints de K,

$$\operatorname{cl} f^{-1}(F_0) \cap \operatorname{cl} f^{-1}(F_1) = \varnothing. \tag{V.3}$$

Effectivement, si $h : X \to K$ est une application continue telle que $h(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$ et F_0, F_1 sont fermés et disjoints, alors $h^{-1}(F_0)$ et $h^{-1}(F_1)$ sont fermés disjoints, et $f^{-1}(F_0) \subset h^{-1}(F_0)$ et $f^{-1}(F_1) \subset h^{-1}(F_1)$, d'où (V.3). Réciproquement,

Théorème 3.1. *Si K est compact, A est dense dans X et $f : A \to K$ est une application continue telle que* (V.3) *pour tout couple F_0, F_1 de fermés disjoints de K, alors il existe un prolongement continu de f à X* (top).

Démonstration. Soit $(V_n)_n$ une base décroissante de voisinages ouverts de $x \in X$. Alors $(\operatorname{cl} f(V_n \cap A))_n$ est une famille décroissante de fermés non vides (A étant dense) dans un espace compact. Conformément au théorème 2.1,

$$F(x) := \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} f(V_n \cap A) \neq \varnothing.$$

L'ensemble $F(x)$ est un singleton. Sinon, il existe $y_0 \neq y_1$ dans $F(x)$, et par conséquent deux voisinages fermés disjoints F_0 et F_1 de y_0 et de y_1 respectivement.

D'après l'hypothèse, $\operatorname{cl} f^{-1}(F_0) \cap \operatorname{cl} f^{-1}(F_1) = \varnothing$. Bien sûr, x ne peut appartenir qu'à une des deux. Ainsi, si $x \notin \operatorname{cl} f^{-1}(F_1)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_n \cap f^{-1}(F_1) = \varnothing$, ce qui équivaut à $f(V_n \cap A) \cap F_1 = \varnothing$, contrairement à la construction de $F(x)$.

Soit $h(x)$ tel que $\{h(x)\} = F(x)$. Si $x \in A$, alors $f(x) \in F(x)$, donc $h(x) = f(x)$, c'est-à-dire h est un prolongement de f.

Ce prolongement est continu. En effet, si O est un ouvert tel que $h(x) \in O$, alors suivant l'exercice 4.d et 4.e, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{cl} f(V_n \cap A) \subset O$. Si $w \in V_n$, alors $\{h(w)\} = F(w) \subset \operatorname{cl} f(V_n \cap A) \subset O$, ce qui prouve la continuité de h. □

4. Compacité dans des espaces fonctionnels

Si X est un espace topologique, alors $C_b(X, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$.(7) Puisque toute application continue d'un espace compact dans un espace normé est bornée, $C_b(X, \mathbb{R}) = C(X, \mathbb{R})$ pourvu que X soit compact.

On munit $C_b(X, \mathbb{R})$ de la métrique

$$D(f, g) := \sup\nolimits_{x\in X} |f(x) - g(x)| \,. \tag{V.4}$$

D'ailleurs, cette métrique n'a pas recours à la métrique de X. La topologie associée à cette métrique est appelée la topologie de la *convergence uniforme* et est notée $\tau(X, \mathbb{R})$. Bien entendu, une base de voisinages de f pour $\tau(X, \mathbb{R})$ est composée des boules

$$B_D(f, \varepsilon) := \{g \in C_b(X, \mathbb{R}) : D(f, g) < \varepsilon\} \,,$$

où $\varepsilon > 0$.

La topologie de la *convergence simple* sur $C_b(X, \mathbb{R})$ est notée $\sigma(X, \mathbb{R})$. C'est la restriction à $C_b(X, \mathbb{R})$ de la topologie-produit sur $\mathbb{R}^X = \prod_{x\in X} \mathbb{R}$. Nous verrons (le théorème III.9.9) que si X n'est pas dénombrable, alors $\sigma(X, \mathbb{R})$ n'est pas métrisable.

7. Tout ce qu'on présente dans cette section reste valable si la droite réelle $\mathbb{R}$ est remplacée par un espace métrique quelconque avec des adaptations évidentes (voir l'exercice 7).

Proposition 4.1. *La topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie de la convergence simple* (top).

DÉMONSTRATION. Une base de voisinages de f pour $\sigma(X,\mathbb{R})$ consiste de

$$\{g \in C_b(X,\mathbb{R}) : \sup_{x\in F} |f(x)-g(x)| < \varepsilon\}, \tag{V.5}$$

où $\varepsilon > 0$ et F est une partie finie de X. Bien sûr, $B_D(f,\varepsilon)$ est incluse dans (V.5), ce qui achève la preuve. □

Une partie $\mathcal{F}$ de $C_b(X,\mathbb{R})$ est dite *équicontinue en* x si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(V) \subset B_D(f(x),\varepsilon)$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Une partie est appelée *équicontinue* si elle est équicontinue pour tout $x \in X$.

Théorème 4.2. *Si X est un espace métrique compact, alors les topologies $\sigma(X,\mathbb{R})$ et $\tau(X,\mathbb{R})$ coïncident sur les parties équicontinues* (top).

DÉMONSTRATION. Soit X un espace métrique compact, $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $C(X,\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ et $f_\infty \in \mathcal{F}$. Nous allons trouver un voisinage W de f_∞ pour $\sigma(X,\mathbb{R})$ tel que $W \cap \mathcal{F} \subset B_D(f_\infty,\varepsilon)$.

Puisque $\mathcal{F}$ est équicontinue, pour tout $x \in X$, il existe $V_x \in \mathcal{V}_x(x)$ tel que $d(f(v), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $v \in V_x$. Puisque X est compact, il existe un ensemble fini E de X tel que $X = \bigcup_{x\in E} V_x$. On pose

$$W := \bigcap_{x\in E} \left\{f \in \mathcal{F} : |f(x) - f_\infty(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

Si $f \in W \cap \mathcal{F}$ et $v \in X$, alors il existe $x_v \in E$ tel que $v \in V_{x_v}$. Donc

$$\begin{aligned} & |f(v) - f_\infty(v)| \\ \leq\ & |f(v) - f(x_v)| + |f(x_v) - f_\infty(x_v)| + |f(x_v) - f_\infty(v)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f \in B_D(f_\infty,\varepsilon)$. □

Proposition 4.3. *Si X est un espace métrique compact, alors toute partie équicontinue simplement bornée de $C(X,\mathbb{R})$ est bornée* (top).

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}$ une partie simplement bornée et équicontinue de $C(X,\mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$ il existe $m(x) > 0$ tel que $\sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < m(x)$ et, comme $\mathcal{F}$ est équicontinue, il existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ telle que

$$\sup\{|f(v)| : v \in V_x, f \in \mathcal{F}\} < m(x).$$

Puisque X est compact, il existe un ensemble fini D tel que $X = \bigcup_{x\in D} V_x$. Si $m := \max\{m(x) : x \in D\}$, alors

$$\sup\{|f(v)| : v \in X, f \in \mathcal{F}\} \leq m < \infty,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}$ est bornée. □

Proposition 4.4. *Si X est un espace métrique compact, alors la fermeture, pour la topologie de la convergence simple, de toute partie équicontinue de $C_b(X,\mathbb{R})$ est équicontinue* (top).

DÉMONSTRATION. Soit $f_\infty \in \mathrm{cl}_\sigma \mathcal{F}$. Alors pour tout x et tous $\varepsilon > \delta > 0$ il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $|f(x) - f(v)| < \delta$ pour tout $v \in V$ et $f \in \mathcal{F}$. Fixons $v \in V$. Soit $f \in \mathcal{F}$ telle que $|f_\infty(x) - f(x)| < \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)$ et $|f_\infty(v) - f(v)| < \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)$. Alors

$$\begin{aligned} &|f_\infty(x) - f_\infty(v)| \\ &\leq |f_\infty(x) - f(x)| + |f(x) - f(v)| + |f_\infty(v) - f(v)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'équicontinuité de $\mathrm{cl}_\sigma \mathcal{F}$. □

Théorème 4.5 (Arzelà-Ascoli). *Si X est un espace métrique compact, alors une partie fermée est compacte pour $\tau(X, \mathbb{R})$ si et seulement si elle est simplement bornée et équicontinue* (top).

DÉMONSTRATION. Comme X est métrique compact, donc séparable, il existe une partie Q dénombrable dense dans X. Il est immédiat que la restriction des éléments de $C(X, \mathbb{R})$ à $C_b(Q, \mathbb{R})$ est injective et un homéomorphisme de $\tau(X, \mathbb{R})$ dans $\tau(Q, \mathbb{R})$. D'autre part, $\sigma(Q, \mathbb{R})$ est la restriction de la topologie produit de $\prod_{x \in Q} \mathbb{R}$, donc métrisable, car Q est dénombrable.

Supposons que $\mathcal{F}$ soit une partie de $C(X, \mathbb{R})$ compacte pour $\tau(X, \mathbb{R})$. Alors sa restriction $\mathcal{F}|_Q$ sur Q, est compacte pour $\tau(Q, \mathbb{R})$, donc pour $\sigma(Q, \mathbb{R})$ d'après la proposition 1.8 appliquée à l'application identité.

En vertu du théorème 1.15 de Tikhonov, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est compacte dans $\mathbb{R}$, donc bornée, pour tout $x \in Q$, donc pour tout $x \in X$.

Si $\mathcal{F}$ n'était pas équicontinue, alors il existerait $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $f_n \in \mathcal{F}$ et $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ tels que $|f_n(x) - f_n(x_n)| \geq \varepsilon$. Par conséquent, il n'y aurait aucune suite extraite de $(f_n)_n$ convergente pour $\tau(X, \mathbb{R})$. En effet, si f_∞ était la limite de $(f_{n_k})_k$, alors on aurait

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_{n_k})| \\ &\leq |f_{n_k}(x) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_\infty(x_{n_k})| + |f_\infty(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})| \\ &\leq 2D(f_{n_k}, f_\infty) + |f_\infty(x) - f_\infty(x_{n_k})|. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{k \to \infty} D(f_{n_k}, f_\infty) = 0$ et puisque f_∞ est continue,

$$\lim_{k \to \infty} |f_\infty(x) - f_\infty(x_{n_k})| = 0,$$

ce qui est une contradiction.

Réciproquement, soit $\mathcal{F}$ une partie fermée, simplement bornée et équicontinue de $C(X, \mathbb{R})$. D'après le théorème 4.2, $\tau(X, \mathbb{R})$ et $\sigma(X, \mathbb{R})$ coïncident sur $\mathcal{F}$, donc $\sigma(Q, \mathbb{R})$ et $\tau(Q, \mathbb{R})$ coïncident sur $\mathcal{F}|_Q$. L'espace $\mathcal{F}|_Q$ avec la topologie $\sigma(Q, \mathbb{R})$ est homéomorphe à $\prod_{x \in Q} \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ avec la topologie produit.

Or $m(x) := \sup \{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ pour tout $x \in Q$. Par conséquent, $\mathcal{F}|_Q$ est incluse dans $\prod_{x \in Q} [-m(x), m(x)]$ qui est compact pour $\sigma(Q, \mathbb{R})$ selon le théorème 1.15 de Tikhonov.

D'après l'hypothèse, $\mathcal{F}$ est fermée dans $\tau(X, \mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}|_Q$ est fermée dans $\tau(Q, \mathbb{R})$ et, par conséquent, dans $\sigma(Q, \mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{F}|_Q$ est compacte dans $\sigma(Q, \mathbb{R})$, donc dans $\tau(Q, \mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}$ est compacte dans $\tau(X, \mathbb{R})$. □

5. Théorème de Stone-Weierstraß

En général, la borne supérieure de fonctions réelles continues n'est pas continue, mais seulement semi-continue inférieurement.

Théorème 5.1 (Dini). *Si une suite croissante de fonctions réelles continues sur un compact converge simplement vers une fonction continue, alors elle converge uniformément.*

DÉMONSTRATION. Soit X compact et $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $C(X, \mathbb{R})$ telle que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$. Soit $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$F_n := \{x \in X : f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$$

est fermé et $F_n \supset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$, donc d'après le théorème 2.1 de Cantor, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\varnothing = F_{n_\varepsilon}$ et, en conséquence, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. □

Lemme 5.2. *La racine carrée sur* $[0, 1]$ *est la limite uniforme d'une suite de polynômes.*

DÉMONSTRATION. Soit $p_0(t) := 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit p_{n+1} le polynôme

$$p_{n+1}(t) := p_n(t) + \tfrac{1}{2}(t - p_n(t)^2). \tag{V.6}$$

Montrons par récurrence que

$$0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t} \tag{V.7}$$

pour tout $0 \leq t \leq 1$. C'est évident pour $n = 0$, et si c'est vrai pour n, alors

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - p_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - p_n(t) - \tfrac{1}{2}(t - p_n(t)^2) \\ &= (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t))) \geq 0, \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence (V.7) et car $0 \leq t \leq 1$. Il s'ensuit de (V.7) que $t - p_n(t)^2 \geq 0$, donc $(p_n(t))_n$ est croissante est majorée par $\sqrt{t}$ donc $p(t) := \lim_{n\to\infty} p_n(t)$ existe pour tout $0 \leq t \leq 1$. En passant à la limite dans (V.6) quand n tend vers l'infini, on obtient $p(t) = p(t) + \frac{1}{2}(t - p(t)^2)$, c'est-à-dire $p(t) = \sqrt{t}$. Enfin le théorème 5.1 de Dini implique que $(p_n)_n$ converge uniformément. □

Rappelons qu'une partie P de $C(X, \mathbb{R})$ est dite une *algèbre* si $f + g$, $f - g$ et $f \cdot g$ appartiennent à P pourvu que $f, g \in P$. Bien sûr, $C(X, \mathbb{R})$ est elle-même une algèbre.

Lemme 5.3. *Si X est compact et P est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ fermée pour la convergence uniforme, alors* $|f|, \max(f, g), \min(f, g) \in P$ *pourvu que $f, g \in P$. En particulier P est un treillis.*

DÉMONSTRATION. Si $f \in P \subset C(X, \mathbb{R})$, alors f est bornée : il existe $r > 0$ tel que $|f(x)| \leq r$, donc $g := \frac{1}{r} f$ est bornée par 1. Puisque $|g| = \frac{1}{r} |f|$, il suffit de montrer que $|g| \in P$. Comme $|t| = \sqrt{t^2}$, la fonction $|g|$ est la limite uniforme de $(p_n \circ (g)^2)_n$, dont les termes appartiennent à P. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \max(f, g) &: = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|), \\ \min(f, g) &: = \tfrac{1}{2}(f + g - |f - g|), \end{aligned}$$

appartiennent à P si $f, g \in P$. Par conséquent, toute borne inférieure et supérieure d'un nombre fini d'éléments de P appartient à P. □

Théorème 5.4 (Stone-Weierstraß). *Si X est compact, alors toute sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ contenant les constantes, distinguant les points est fermée pour la convergence uniforme et coïncide avec $C(X, \mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons trouver $f_\varepsilon \in P$ tell que $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

Si $v \neq w$, alors il existe $f_{v,w} \in P$ telle que $f_{v,w}(v) = f(v)$ et $f_{v,w}(w) = f(w)$. Effectivement, puisque P distingue les points de X, il existe $p \in P$ telle que $p(v) \neq p(w)$. Alors la fonction

$$f_{v,w}(x) := f(v) + \frac{p(x) - p(v)}{p(w) - p(v)}(f(w) - f(v)),$$

appartient à P, $f_{v,w}(w) = f(w)$ et $f_{v,w}(v) = f(v)$. Alors

$$\begin{aligned} U_{v,w} &:= \{x : f_{v,w}(x) < f(x) + \varepsilon\}, \\ Y_{v,w} &:= \{x : f_{v,w}(x) > f(x) - \varepsilon\} \end{aligned}$$

sont des voisinages à la fois de v et de w.

Pour tout $v \in X$, la famille $\{Y_{v,w} : w \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X, donc, par compacité, il existe une partie finie W_v de X telle que $\{Y_{v,w} : w \in W_v\}$ est un recouvrement de X. Pour tout $v \in X$, la fonction $f_v := \max\{f_{v,w} : w \in W_v\}$ appartient à P et

$$x \in X \Longrightarrow f_v(x) > f(x) - \varepsilon,$$

$$x \in U_v := \bigcap\nolimits_{w \in W_v} U_{v,w} \Longrightarrow f_v(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Puisque $\{U_v : v \in X\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace compact X, il existe une partie finie V de X telle que $\{U_v : v \in V\}$ est un recouvrement de X. Alors $f_\varepsilon := \min\{f_v : v \in V\}$ appartient à P et $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in X$. La coïncidence suit, car P est fermée pour la convergence uniforme. □

Corollaire 5.5. *Toute fonction réelle continue sur un intervalle compact est une limite uniforme de polynômes.*

DÉMONSTRATION. Soit P la plus petite sous-algèbre de $C([a, b], \mathbb{R})$ contenant la fonction constante 1 et l'identité. Alors P est composée de tous les polynômes et, d'autre part, l'identité distingue les points. La fermeture de

P pour la convergence uniforme de P est une algèbre, qui coïncide avec $C([a,b],\mathbb{R})$ d'après le théorème 5.4 de Stone-Weierstraß. Par conséquent, toute fonction $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ est une limite uniforme de polynômes. □

Exercices

Solutions : pages 301-307.

(1) ⋆ Soit F, K deux parties fermées d'un espace métrique (X,d). Montrer que

(a) si $F \cap K = \varnothing$ et K est compacte, alors $\operatorname{dist}(F,K) > 0$,

(b) l'hypothèse de compacité est essentielle.

(2) ⋆ Toute union finie de parties compactes est compacte. En particulier, toute partie finie est compacte.

(3) ⋆ Une partie d'un espace euclidien est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

(4) Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un espace métrique X.

L'*adhérence* de $(A_n)_n$ est définie par

$$\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\bigl(\bigcup_{k\geq n} A_k\bigr).$$

Montrer que

(a) $x \in \operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n$ si et seulement s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ et $x_k \in A_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ de telle sorte que $x = \lim_{k\to\infty} x_k$,

(b) si $A_n = \{a_n\}$ pour tout n, alors $\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n = \operatorname{adh}_{n\to\infty} a_n$,

(c) si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n, alors $\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} A_n$,

(d) si X est compact, alors pour tout ouvert $O \supset \operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n$ il existe n_O tel que $A_n \subset O$ pour tout $n \geq n_O$.

(5) (!) (Choquet [6, p. 70]) Soit X un espace métrique compact, $A_\infty \subset X$ et $(A_n)_n$ une suite de parties de X. Si pour tout ouvert $O \supset A_\infty$ il existe n_O tel que $A_n \subset O$ pour tout $n \geq n_O$, alors il existe une partie compacte K de A_∞ telle que pour tout ouvert $O \supset K$ il existe n_O tel que $A_n \setminus A_\infty \subset O$ pour tout $n \geq n_O$.

(6) Une famille $\mathcal{F}$ de parties non vides d'un ensemble X s'appelle *base de filtre* si pour toute sous-famille finie $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ il existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tel que $F_0 \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}_0} F$.

(a) Montrer qu'une partie K d'un espace métrique est compacte si et seulement si pour toute base de filtre $\mathcal{F}$ telle que $K \cap F \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, alors

$$K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \operatorname{cl} F \neq \varnothing.$$

(b) Soit X un espace métrique compact, $\mathcal{F}$ une base de filtre. Montrer que si O est un ouvert tel que

$$\bigcap\nolimits_{F\in\mathcal{F}} \operatorname{cl} F \subset O,$$

alors il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $\operatorname{cl} F \subset O$.

(7) Soit X et Y des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Alors le graphe $\mathrm{Gr}(f)$ de f est compact si et seulement si X est compact et f est continue [8].

(8) Soit X et Y espaces métriques et $f : X \to X$ une application. Un élément x de X est appelé *point fixe* de f, si $f(x) = x$. Montrer que si (X, d) est compact, $f : X \to X$ est continue et si f n'a pas de point fixe, alors il existe $r > 0$ tel que $d(x, f(x)) \geq r$ pour tout x.

(9) Dans la section I.6 nous avons considéré l'*ensemble de Cantor* C. Notons

$$C_0 := C,$$
$$C_1 := C \cap I_0,\ C_2 := C \cap I_1,$$
$$C_3 = C \cap I_{0,0},\ C_4 = C \cap I_{0,1},\ C_5 = C \cap I_{1,0},\ C_6 = C \cap I_{1,1}, \ldots$$

Bien entendu, $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} C_n = 0$. Montrer que

(a) C_n est fermée et ouverte dans C (pour tout n),

(b) C_n est homéomorphe à C (pour tout n),

(c) $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une *base d'ouverts* de C,

(d) pour tout ouvert O de C, il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que

(V.8) $$O = \bigcup\nolimits_{n\in A} C_n \text{ et } n \neq m \Longrightarrow C_n \cap C_m = \varnothing,$$

(e) si F est une partie fermée de C et $O = C \setminus F$ est représentée par (V.8), alors pour tout $n \in A$ il existe $y_n \in F$ tel que

$$d(y_n, C_n) = \operatorname{dist}(F, C_n) > 0.$$

(10) Montrer que si F est une partie fermée de l'ensemble de Cantor et $C \setminus F$ est représentée par (V.8), alors la projection $\pi_F : C \to F$ définie par

$$\pi_F(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in F, \\ y_n, & \text{si } x \in C_n, \end{cases}$$

est continue.

(11) Soit $\varphi : C \to [0,1]$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}, \text{ où } x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{3^n}$$

et $x(n) \in \{0, 2\}$. Montrer que

8. Exercice communiqué par le professeur G. H. Greco.

(a) φ est surjective et continue,

(b) φ n'est pas bijective,

(c) il existe une application continue surjective de l'ensemble de Cantor sur le *cube de Hilbert* $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$,

(d) tout espace compact non-vide est l'image continue d'une partie fermée de l'ensemble de Cantor C,

(e) tout espace compact non-vide est l'image continue de l'ensemble de Cantor C.

CHAPITRE VI

Espaces métriques complets

René Baire a montré que, dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable de parties ouvertes denses est dense. Le théorème de Baire est parmi les plus féconds théorèmes de mathématiques. Wacław Sierpiński a montré que toute partie complètement métrisable d'un espace métrique est un G_δ et Pavel S. Alexandrov que toute partie G_δ d'un espace métrique complet est complètement métrisable. Eduard Čech a introduit la complétude topologique [1].

FIGURE VI.1. René Baire (1874-1932), Eduard Čech (1893-1960) et Wacław Sierpiński (1882-1969)

La notion de complétude trouve de nombreuses applications, notamment en analyse fonctionnelle.

1. Espaces métriques complets

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X est dite de *Cauchy* (ou *fondamentale*) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour $n, m \geq n_\varepsilon$.

Observons que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\{x_k : k \geq n\} = 0.$$

Il s'ensuit que toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Proposition 1.1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

1. A. V. Arhangel'skii a caractérisé les espaces complets au sens de Čech comme les G_δ de leurs compactifications.

Démonstration. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n > n_\varepsilon$. Donc si $n, m > n_\varepsilon$ alors $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon$. □

Proposition 1.2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors il existe n_1 tel que $\{x_n : n \geq n_1\} \subset B(x_{n_1}, 1)$, donc bornée.

D'autre part, $\{x_n : 0 \leq n < n_1\}$ est finie, donc bornée et, par conséquent, la suite est bornée. □

Lemme 1.3. *Une suite de Cauchy est convergente, pourvu qu'elle admette une suite extraite convergente.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy et $(x_{n_k})_k$ une suite extraite de $(x_n)_n$ telle que $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Si $\varepsilon > 0$, alors il existe n_ε tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout $n, m > n_\varepsilon$ et, d'autre part, il existe k_ε tel que $d(x_{n_k}, x_\infty) < \varepsilon$ si $k > k_\varepsilon$. Donc, pour $k > k_\varepsilon$ et $n, n_k > n_\varepsilon$,

$$d(x_n, x_\infty) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_\infty) < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$. □

Un espace métrique (X, d) s'appelle *complet* (et sa métrique d est dite *complète*) si toute suite de Cauchy (par rapport à d) est convergente. On observe que d est complète si et seulement si $\delta := \min(d, 1)$ est complète. Ce fait relativise la portée de la proposition 1.2, car si une métrique est bornée, alors toutes les suites sont bornées.

Exemple 1.4. Dans l'exemple II.2.5, les deux métriques $i(x, y) := 0$ si $x = y$ et $i(x, y) := 1$ si $x \neq y$ et $h(x, y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ engendrent la même topologie (la topologie discrète), donc les suites convergentes sont les mêmes, c'est-à-dire stationnaires.

Il est évident qu'une suite est de Cauchy par rapport à i si et seulement si elle stationnaire. Par conséquent, i est complète, donc la topologie discrète (ici sur un ensemble dénombrable) est complètement métrisable.

D'autre part, toute suite libre est de Cauchy par rapport à h, et puisque les seules suites stationnaires sont convergentes, h n'est pas complète.

L'image continu d'un espace complet n'est pas forcément complet. Effectivement, dans l'exemple 1.4, l'identité est continue (même uniformément) de (X, i) sur (X, d).

Proposition 1.5. *Tout sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique complet et F une partie fermée de X. Si $(x_n)_n \subset F$ est de Cauchy pour d_F, elle est également de Cauchy pour d, donc il existe $x \in X$ tel que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, mais comme F est fermé, $x \in F$. □

Proposition 1.6. *Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit (X, d) un espace métrique et F un sous-espace complet de X et $x \in \operatorname{cl} F$. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de F convergeant vers x dans X. Par conséquent, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de X, et puisque tous ses termes appartiennent à F, elle de Cauchy dans F. Comme F est complet, il existe un élément y de F telle que $(x_n)_n$ converge vers y dans F, donc dans X. D'après l'unicité de limite, $x = y$, donc $x \in F$. □

Proposition 1.7. *L'espace* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *est complet avec la métrique* (II.19) *si et seulement si* (X_n, d_n) *est complet pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION. Si $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est complet[2] et $(y_k)_k$ est une suite de Cauchy dans X_n, alors il existe une suite $(f_k)_k$ de Cauchy dans X telle que $f_k(n) = y_k$ pour tout k. En effet, si $a \in X$ est arbitraire, alors la suite $(f_k)_k$ définie par

$$f_k(m) := \begin{cases} a(m) \text{ si } m \neq n \\ y_k \text{ si } m = n \end{cases}$$

a la propriété recherchée. Comme X est complet, elle est convergente. Par conséquent, $(y_k)_k$ est convergente grâce à la continuité de π_n, car $\pi_n(f_k) = f_k(n) = y_k$ pour tout k.

Réciproquement, si $(f_k)_k$ est de Cauchy dans X, alors d'après (II.19), $(f_k(n))_k$ est de Cauchy dans X_n pour tout n, donc $x_n = \lim_{k\to\infty}(f_k(n))_k$ existe. Par conséquent, $(\lim_{k\to\infty} f_k)(n) = x_n$ pour tout n. □

Proposition 1.8. *Toute métrique compatible d'un espace métrique compact est complète.*

DÉMONSTRATION. Soit (X, d) un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy. Alors il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ et x_∞ tels que $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Grâce au lemme 1.3, $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$. □

Proposition 1.9. *Un espace métrique est compact si et seulement s'il est complet et totalement borné.*

DÉMONSTRATION. La nécessité découle du lemme V.1.10 et de la proposition 1.8.

Réciproquement, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique complet et totalement borné (X, d). Si $r > 0$, alors il existe une partie finie F de X telle que $X = \bigcup_{x\in F} B(x, r)$. Par conséquent, il existe $x \in F$ une partie infinie $A \subset \mathbb{N}$ telle que $\{x_k : k \in A\} \subset B(x, r)$, donc $\operatorname{diam}\{x_k : k \in A\} \leq 2r$.

Ainsi on peut construire par récurrence une suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}_1$,

$$\operatorname{diam}\{x_k : k \in A_n\} \leq \tfrac{1}{n}.$$

2. Ici, contrairement à la séparabilité et à la compacité, on ne peut pas utiliser la préservation de propriété par les applications continues.

Selon la proposition I.4.9, il existe une partie infinie A_∞ de $\mathbb{N}$ telle que $A_\infty \setminus A_n$ est finie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(x_k)_{k\in A_\infty}$ est une suite extraite de $(x_k)_{k\in A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. En conséquence, pour tout n il existe k_n tel que

$$\operatorname{diam}\{x_k : k \in A_\infty, k \geq k_n\} \leq \tfrac{1}{n},$$

c'est-à-dire $(x_k)_{k\in A_\infty}$ est de Cauchy et, d'après la complétude, convergente. □

Théorème 1.10 (Cauchy). *La droite réelle avec sa métrique usuelle est complète.*

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. D'après la proposition 1.2, $(x_n)_n$ est bornée et, grâce au théorème V.1.12 de Bolzano-Weierstraß, elle admet une suite (strictement) extraite $(x_{n_k})_k$ convergente vers un élément x de $\mathbb{R}$, donc $(x_n)_n$ converge vers x d'après le lemme 1.3. □

Exemple 1.11. Les sous-espaces $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ avec la métrique usuelle ne sont pas complets d'après la proposition 1.6, car ils ne sont pas fermés.

Théorème 1.12 (Cantor). *Un espace (X, d) est complet si et seulement si pour toute suite $(F_n)_n$ décroissante de parties fermées non vides telle que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$,*

$$\bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

Démonstration. Supposons la complétude de l'espace et choisissons $x_n \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $m > n$ alors $x_m \in F_n$, donc $d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(F_n)$, ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente.

Sa limite x_∞ appartient à F_n car F_n est fermé (pour tout n), donc $x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. D'ailleurs, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x_\infty\}$, car $\operatorname{diam}(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ pour tout n, d'où $\operatorname{diam}(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k) = 0$.

Si l'espace n'est pas complet, alors il existe une suite $(x_n)_n$ de Cauchy non convergente, donc $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\operatorname{cl}\{x_k : k \geq n\}) = 0$. Or

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_k : k \geq n\} = \varnothing,$$

car s'il y avait $x \in \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n$, alors selon la proposition II.6.2, il existerait une suite extraite de $(x_n)_n$ convergeant vers x, ce qui est impossible à cause du lemme 1.3. □

2. Complétude des espaces fonctionnels

Soit (X, d) un espace métrique. Considérons l'espace $C_b(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues bornées sur X avec la métrique (V.4)

$$D(f, g) := \sup\nolimits_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Lemme 2.1. *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues bornées sur un espace métrique et $\lim_{n\to\infty} D(f_n, f_\infty) = 0$, alors f_∞ est continue et bornée.*

DÉMONSTRATION. D'après la condition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f_\infty(x)| < \varepsilon.$$

Soit $x_0 \in X$. Puisque f_n est continue, il existe un voisinage V de x_0 tel que $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in V$. Donc si $x \in V$, alors

$$\begin{aligned} & |f_\infty(x_0) - f_\infty(x)| \\ \leq\ & |f_\infty(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_\infty(x)| \\ <\ & 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que f_∞ est continue et, bien sûr, bornée, car

$$\sup_{x\in X} |f_\infty(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x)| + \varepsilon.$$

□

Proposition 2.2. *L'espace métrique des fonctions continues bornées avec la métrique* (V.4) *est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy par rapport à D, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que

$$\sup_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{VI.1}$$

pour $n, m \geq n_\varepsilon$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$), donc convergente, car $\mathbb{R}$ est complet.

Soit $f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Le passage à l'infini avec m dans (VI.1) entraîne $\sup_{x\in X} |f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. □

Théorème 2.3. *Tout espace métrique est isométrique à un sous-espace de l'espace des fonctions continues bornées avec la métrique* (V.4).

DÉMONSTRATION. Soit (X, d) un espace métrique (non vide). Fixons un élément a de X. Soit

$$f_x(y) := d(y, x) - d(y, a).$$

Puisque $|d(y,x) - d(y,a)| \leq d(x,a)$, la fonction f_x est bornée (nous savons déjà qu'elle est continue). Par conséquent, $x \mapsto f_x$ est une application de X dans $C_b(X, \mathbb{R})$. C'est une isométrie, c'est-à-dire $D(f_x, f_z) = d(x,z)$ pour tout $x, z \in X$.

En effet, $|d(y,x) - d(y,z)| \leq d(x,z)$ pour tout y, x et z, donc

$$D(f_x, f_z) = \sup_{y\in X} |d(y,x) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

D'autre part, pour $y := z$ l'expression $|d(y,x) - d(y,z)|$ devient $d(x,z)$. □

Corollaire 2.4. *Tout espace métrique est isométrique à un sous-espace d'un espace métrique complet.*

D'après la proposition 1.5, la fermeture de ce sous-espace est un espace complet. Un espace métrique complet dont (X,d) est une sous-espace dense est dit un *complété* de (X,d). Il s'avère que tous les complétés d'un espace métrique sont isométriques.

3. Complétion

Dans cette section nous présentons une méthode de complétion d'un espace métrique due à Felix Hausdorff. Elle est, selon les mots de son auteur, analogue à la construction de l'espace des nombres réels comme une complétion des nombres rationnels.

Théorème 3.1. *Pour tout espace métrique (X, d), il existe un espace métrique complet $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$, tel que X est isométrique à un sous-espace dense de $\widetilde{X}$. Tout autre complété de (X, d) est isométrique à $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{S}(X, d)$ l'ensemble des suites de Cauchy de (X, d). On dit que deux suites $f, g \in \mathcal{S}(X, d)$ sont équivalentes ($f \sim g$) si

$$\lim_{n\to\infty} d(f(n), g(n)) = 0.$$

La relation $\sim$ est évidemment réflexive et symétrique. La transitivité est une conséquence de l'inégalité triangulaire.

Bien entendu, si $\lim_n f(n) = x$, alors f est équivalente à la suite constante, dont x est la valeur.

Définissons $\widetilde{X} := \mathcal{S}(X, d)/\sim$, le *quotient* de $\mathcal{S}(X, d)$ par $\sim$. Notons $\widetilde{f}$ la classe d'équivalence de $\sim$ contenant f. Soit

$$\widetilde{d}(\widetilde{f}, \widetilde{g}) := \lim_{n\to\infty} d(f(n), g(n)).$$

Il est immédiat que $\widetilde{d}$ est bien définie, car la limite à droite ne dépend pas des représentants des classes $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$.

L'espace $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ est complet. Effectivement, soit $(y_k)_k$ une suite de Cauchy et $(f_k)_k$ une suite dans $\mathcal{S}(X, d)$ telle que $y_k = \widetilde{f}_k$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que

$$\text{(VI.2)} \qquad k, l, n > N_\varepsilon \Longrightarrow d(f_k(n), f_l(n)) < \varepsilon.$$

Soit $f_\infty(n) := f_n(n)$ pour tout n. Alors, d'après (VI.2), si $l, k > N_\varepsilon$ alors $d(f_\infty(k), f_\infty(l)) = d(f_k(k), f_l(l)) < \varepsilon$, ainsi $f_\infty \in \mathcal{S}(X, d)$. D'autre part, si $k > N_\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(\widetilde{f}_k, \widetilde{f}_\infty) &= \lim_{n\to\infty} d(f_k(n), f_\infty(n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(f_k(n), f_n(n)) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\widetilde{f}_\infty = \lim_k y_k$.

À chaque $x \in X$, nous faisons correspondre la suite constante

$$j(x)(n) := x$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Bien sûr, $j(x) \in \mathcal{S}(X, d)$, donc $\widetilde{j(x)} \in \widetilde{X}$, et

$$\widetilde{d}(\widetilde{j(x_0)}, \widetilde{j(x_1)}) = d(x_0, x_1).$$

L'image $j(X)$ est dense dans $\widetilde{X}$, car pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in \mathcal{S}(X, d)$ il existe n_ε tel que $d(f(n), f(n_\varepsilon)) < \varepsilon$. Par conséquent, $\widetilde{d}(\widetilde{f}, \widetilde{j(f(n_\varepsilon))}) \leq \varepsilon$.

Ainsi, $j : X \to \widetilde{X}$ est une isométrie, dont l'image est dense. D'après l'exercice 10, le prolongement de j est unique. Ainsi, deux complétés d'un espace métrique sont homéomorphes. □

4. Espaces complètement métrisables

Un espace topologique est *complètement métrisable* s'il existe une métrique complète compatible avec la topologie de l'espace.

Théorème 4.1 (Baire). *L'intersection d'une suite de parties ouvertes denses dans un espace complètement métrisable est dense.*

DÉMONSTRATION. Soit d une métrique complète sur X et $(A_n)_n$ une suite d'ouverts telle que $\operatorname{cl} A_n = X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que pour tout $x \in X$ et $r > 0$, la boule $B_r(x)$ contient un élément de l'intersection de tous les A_n.

Puisque A_0 est dense et $B_r(x)$ est ouvert, l'intersection $A_0 \cap B_r(x)$ est non vide. Elle est également ouverte, car A_0 est ouvert. Par conséquent, il existe $x_1 \in A_0$ et $0 < r_1 < \frac{1}{2}r$ tels que

$$\operatorname{cl} B_{r_1}(x_1) \subset A_0 \cap B_r(x).$$

Si $r_0 := r > r_1 > \ldots > r_n > 0$ et $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont tels que $\frac{1}{2}r_k \geq r_{k+1}$ et

$$\operatorname{cl} B_{r_{k+1}}(x_{k+1}) \subset A_k \cap B_{r_k}(x) \tag{VI.3}$$

pour tout $0 \leq k < n$, alors, il existe x_{n+1} et $0 < r_{n+1} < \frac{1}{2}r_n$ tels que (VI.3) est valable pour $k = n$, puisque A_n est ouvert et dense. Donc $F_n := \operatorname{cl} B_{r_n}(x_n)$ définit une suite décroissante de fermés non vides avec

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0.$$

D'après le théorème 1.12, $\varnothing \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B_r(x)$, ce qui montre que $\bigcap_n A_n$ est dense. □

En passant aux compléments, on obtient la version duale du théorème de Baire.

Corollaire 4.2 (Baire). *Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés dans un espace métrique complet X telle que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X,$$

alors il existe n tel que $\operatorname{int} F_n \neq \varnothing$.

DÉMONSTRATION. Puisque $X \setminus F_n$ est ouvert pour tout n et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing,$$

d'après le théorème 4.1 de Baire, au moins un des $X \setminus A_n$ n'est pas dense, c'est-à-dire $\varnothing \neq X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus F_n) = \operatorname{int} F_n$. □

La complétude est une propriété métrique, tandis que la *propriété de Baire* est topologique [3]. Cette propriété essentielle des espaces complets fut découverte par René Baire. Le théorème de Baire est un parmi les plus féconds en mathématiques.

Corollaire 4.3. *L'ensemble* $\mathbb{Q}$ *des nombres rationnels n'est pas complètement métrisable.*

Bien sûr, la métrique usuelle $d(x,y) := |x-y|$ n'est pas complète pour $\mathbb{Q}$: effectivement, si $\lim_{n\to\infty} |q_n - \sqrt{2}| = 0$ et $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}$, alors $(q_n)_n$ est une suite de Cauchy qui n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$. Mais, on affirme plus que ça, c'est-à-dire il n'existe pas de métrique g sur $\mathbb{Q}$, pour laquelle $(\mathbb{Q}, g)$ est complet. Effectivement, $\mathbb{Q}$ est l'union dénombrable de singletons (donc parties fermées non vides d'intérieur vide), donc d'après le corollaire 4.2, $(\mathbb{Q}, g)$ n'est pas complet.

Une partie A d'un espace X s'appelle G_δ si elle est l'intersection d'un nombre dénombrable d'ouverts.

Théorème 4.4 (Alexandrov). *Toute partie* G_δ *d'un espace métrique complet est complètement métrisable.*

DÉMONSTRATION. Exercice 5. □

Corollaire 4.5. *L'ensemble* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *des nombres rationnels est complètement métrisable.*

DÉMONSTRATION. Effectivement, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$, donc est un G_δ de l'espace métrique complet $\mathbb{R}$. □

Nous savons que la limite d'une simple de fonctions continues n'est pas forcément continue, par exemple, la fonction caractéristique $\chi_{\{1\}}(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$ pour $x \in [0,1]$. Cependant,

Théorème 4.6 (Baire). *Les points de continuité de la limite simple d'une suite des applications continues sur un espace complet, forment un ensemble dense.*

DÉMONSTRATION. Exercice 12. □

5. Espaces métriques localement compacts

Un espace métrique est dit *localement compact* si tout son élément admet un voisinage compact. Bien sûr, tout espace compact est localement compact.

Exemple 5.1. Pour tout ensemble (non vide) X, l'espace discret (X, i) est localement compact, car $\{x\}$ est un voisinage compact de x pour tout $x \in X$. Si X est infini, alors (X, i) n'est pas compact.

3. car elle peut être exprimée en termes, par exemple, d'opérateurs de fermeture et d'intérieur et d'opérations ensemblistes.

Exemple 5.2. La droite réelle $\mathbb{R}$ avec sa métrique usuelle

$$d(x,y) := |x-y|,$$

est localement compacte, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[x-1, x+1]$ est un voisinage compact de x. Il s'ensuit que $\mathbb{R}^n$ est localement compact pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 5.3. Les sous-espaces $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ avec la métrique induite, ne sont pas localement compacts. Par exemple, si $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}(x)$, donc il existe $r > 0$ avec $]x-r, x+r[\cap\mathbb{Q} \subset V$, alors il existe $y \in]x-r, x+r[\setminus\mathbb{Q}$ et une suite libre $(y_n)_n$ dans $]x-r, x+r[\cap\mathbb{Q}$ convergeant vers y dans $\mathbb{R}$. Aucune suite extraite de $(y_n)_n$ ne converge dans $\mathbb{Q}$.

Exemple 5.4. Le plan complexe $\mathbb{C}$ avec sa métrique usuelle est localement compact, car tout disque fermé est compact. En conséquence, $\mathbb{C}^n$ est localement compact pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 5.5. *Un espace métrique est localement compact si et seulement si $\mathcal{V}(x)$ admet une base composée de compacts.*

DÉMONSTRATION. Si X est localement compact et $x \in X$, alors il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que V est compact. Il existe $r > 0$ tel que $B_r(x) \subset V$, alors $\operatorname{cl} B_r(x)$ est une partie fermée de V, donc compacte. Par conséquent $\{\operatorname{cl} B_s(x) : 0 < s < r\}$ est une base de voisinages compacts. □

Proposition 5.6. *Tout sous-espace ouvert d'un espace métrique localement compact est localement compact.*

DÉMONSTRATION. Soit O une partie ouverte d'un espace métrique localement compact X. Si $x \in O$, alors selon la proposition 5.5, il existe un voisinage compact V de x inclus dans O. Or V est également un voisinage compact de x dans O. □

Proposition 5.7. *Tout sous-espace localement compact dense d'un espace métrique est ouvert.*

DÉMONSTRATION. Si Y est un sous-espace localement compact dense d'un espace métrique X et $y \in Y$, alors il existe $W \in \mathcal{O}_Y$ tel que $y \in W \subset \operatorname{cl}_Y W \subset Y$ et $\operatorname{cl}_Y W$ est compact, donc fermé dans X et, d'après la proposition V.1.6, $\operatorname{cl}_Y W = \operatorname{cl}_X W \subset Y$. Si $O \in \mathcal{O}_X$ tel que $W = O \cap Y$, alors puisque Y est dense dans X, l'exercice II.23 (c) implique que

$$y \in O \subset \operatorname{cl}_X O = \operatorname{cl}_X(O \cap Y) = \operatorname{cl}_X W \subset Y,$$

c'est-à-dire Y est ouvert dans X. □

Lemme 5.8. *Tout espace métrique localement compact est complètement métrisable.*

DÉMONSTRATION. Selon la proposition 5.7, un espace métrique localement compact est ouvert dans sa complétion. Ainsi l'exercice 2 implique qu'il est complètement métrisable. □

Un élément x d'un espace métrique est dit *de compacité locale*, s'il admet un voisinage compact.

Proposition 5.9. *L'ensemble des éléments de compacité locale d'un espace métrique est ouvert.*

DÉMONSTRATION. Soit Y l'ensemble des éléments de compacité locale d'un espace métrique X. Si $x \in Y$ et $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que V est compact, alors il existe $r > 0$ tel que $B_r(x) \subset V$, donc V est un voisinage compact de tout élément de $B_r(x)$, ainsi $B_r(x) \subset Y$. □

L'image continue d'un espace métrique localement compact n'est pas forcément localement compacte.

Proposition 5.10. *Tout espace métrique est l'image continue d'un espace localement compact.*

DÉMONSTRATION. Soit d une métrique compatible de X bornée par 1. Pour tout $x \in X$ et toute suite libre f convergeant vers x, alors le sous-espace $X_{x,f} := \{x\} \cup \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ de X est localement compact. Soit T l'union disjointe de tous les espaces de cette forme avec la métrique

$$h(t_0, t_1) := \begin{cases} d(t_0, t_1), & \text{s'il existe } (x, f) \text{ tel que } t_0, t_1 \in X_{x,f}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $f : T \to X$, définie par par $f(t) := t$, est continue. □

6. Points fixes

Soit $f : X \to X$ une application. Un élément x de X s'appelle un *point fixe* de f si $f(x) = x$.

Rappelons qu'une application $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est dite *lipschitzienne* s'il existe une constante $0 \leq r < \infty$ telle que, pour tout $x_0, x_1 \in X$,

$$d_Y(f(x_0), f(x_1)) \leq r\, d_X(x_0, x_1). \tag{VI.4}$$

L'infimum r vérifiant (VI.4) s'appelle la *constante de Lipschitz* de f. Observons que toute application lipschitzienne est continue.

Si f est une application lipschitzienne avec la constante strictement inférieure à 1, alors f est dite *contractante*.

Théorème 6.1 (Banach). *Soit (X, d) un espace complet et $f : X \to X$ une application. Si f est contractante avec la constante de Lipschitz $0 < r <$ 1, alors il existe un unique point fixe x_∞ de f. En plus, pour tout $x_0 \in X$*

$$d(x_\infty, x_0) \leq \frac{1}{1-r}\, d(f(x_0), x_0). \tag{VI.5}$$

DÉMONSTRATION. Soit x_0 un élément arbitraire de X. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le premier terme est x_0 et $x_{n+1} := f(x_n)$ pour tout n. Alors

$$d(x_2, x_1) \leq d(f(x_1), f(x_0)) \leq r d(x_1, x_0),$$

donc, par récurrence, $d(x_{n+1}, x_n) \leq r^n d(x_1, x_0)$. Par conséquent,

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum\nolimits_{k=0}^{m} r^{n+k} \leq \frac{r^n}{1-r} d(x_1, x_0). \tag{VI.6}$$

On constate que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, car si $\varepsilon > 0$, alors il existe n tel que $\frac{r^n}{1-r} d(x_1, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour $k, l \geq n$,

$$d(x_k, x_l) \leq d(x_k, x_n) + d(x_n, x_l) < \varepsilon.$$

Puisque X est complet, $(x_n)_n$ est convergente à un élément x_∞ de X et, comme f est continue,

$$x_\infty = \lim\nolimits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\nolimits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\nolimits_{n\to\infty} x_n) = f(x_\infty),$$

ce qui prouve l'existence d'un point fixe. Si on pose dans (VI.6) $n := 0$ et on tend vers ∞ avec m, on obtient (VI.5) grâce à la continuité de d. Enfin, s'il y avait un point fixe x différent de x_∞, alors on aurait

$$0 \neq d(x, x_\infty) = d(f(x), f(x_\infty)) \leq r\, d(x, x_\infty),$$

c'est-à-dire $d(x, x_\infty) < d(x, x_\infty)$. □

Exercices

Solutions : pages 307-314.

(1) ⋆ Montrer que toute partie ouverte d'un espace métrique X est homéomorphe à une partie fermée de $X \times \mathbb{R}$.

(2) Montrer que toute partie ouverte d'un espace métrique complet est complètement métrisable.

(3) Soit d une métrique complète de X et soit O une partie (non vide) de X. Donner explicitement une métrique complète de O.

(4) Rappelons qu'une partie A d'un espace X s'appelle G_δ si elle est l'intersection d'un nombre dénombrable d'ouverts. Montrer que tout G_δ d'un espace métrique X est homéomorphe à une partie fermée de $X \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

(5) Montrer que tout G_δ d'un espace métrique complet est complètement métrisable.

(6) Une base de filtre $\mathcal{F}$ (voir l'exercice V.6) dans un espace métrique est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $F_\varepsilon \in \mathcal{F}$ avec $\operatorname{diam}(F_\varepsilon) < \varepsilon$. Montrer qu'un espace métrique est complet si et seulement si $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \operatorname{cl} F$ est un singleton pour toute base de filtre de Cauchy $\mathcal{F}$.

(7) Une application $f : X \to Y$ est dite *presque ouverte* si pour tout $y \in Y$ il existe $x \in f^{-1}(y)$ tel que $f(V) \in \mathcal{V}(y)$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$. Il s'ensuit que f est surjective. Montrer que

(a) toute application ouverte est presque ouverte,

(b) il existe des applications presque ouvertes qui ne sont pas ouvertes,

(c) l'image d'un espace métrique localement compact par une application continue presque ouverte est localement compacte.

(8) Une application surjective continue $f : X \to Y$ est dite *parfaite* si elle est fermée et $f^{-1}(y)$ est compacte pour tout $y \in Y$. Montrer que l'image d'un espace métrique localement compact par une application continue parfaite est localement compacte.

(9) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $n \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors

(a) il existe un intervalle ouvert I tel que $f|_I$ est polynomiale,

(b) pour tout intervalle ouvert J, il existe un intervalle ouvert $I \subset J$ tel que $f|_I$ est polynomiale,

(c) f est polynomiale.

(10) Soit $(X, d), (Y, g)$ deux espaces métriques, D une partie dense de X et $f : D \to Y$ une application. L'*oscillation* $\omega(f, x)$ de f en $x \in X$ est définie par

$$\omega(f, x) := \inf \{\operatorname{diam} f(V \cap D) : V \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Notons $\Omega(f) := \{x \in X : \omega(f, x) = 0\}$. Montrer que

(a) si f est continue en x, alors $x \in \Omega(f)$,

(b) si f est continue et (Y, g) est complet, alors il existe $F : \Omega(f) \to Y$ continue et telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$,

(c) si f est uniformément continue, alors $\Omega(f) = X$,

(d) si f est uniformément continue et (Y, g) est complet, alors f peut être prolongée à une application uniformément continue de X dans Y,

(e) si f est une isométrie et (Y, g) est complet, alors f peut être prolongée à une isométrie de X dans Y.

(11) Soit $(X, d), (Y, g)$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Notons

$$\Omega_r(f) := \{x \in X : \omega(f, x) \leq r\}.$$

Montrer que

(a) $\omega(f, x) = 0$ si et seulement si f est continue en x,

(b) $\Omega_0(f) := \Omega(f)$ est un G_δ,

(c) il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\Omega(f) = \mathbb{Q}$,

(d) tout nombre rationnel non nul admet une unique représentation $\frac{p}{q}$, où p, q sont premiers entre eux. Si $\frac{p}{q}$ est une telle représentation de x, alors on note $\psi(x) = (p, q)$,

$$h(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ si } \psi(x) = (p, q), \end{cases}$$

(e) $\Omega(h) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(12) Soit (X, d) un espace complet et $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de X dans Y. Soit $f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Soit

$$E_r(f, g) := \{x \in X : d(f(x), g(x)) \leq r\}.$$

Montrer que, pour tout $r > 0$,

(a) l'ensemble $E_r(f_n) := \bigcap_{m>n} E_r(f_n, f_m)$ est fermé,

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_r(f_n) = X$,

(c) $E_r(f_n) \subset E_r(f_n, f_\infty)$,

(d) il existe $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon) \subset E_r(f_n, f_\infty)$,

(e) il existe $0 < \eta < \varepsilon$ tel que $\operatorname{diam} f_\infty(B(x_0, \eta)) < 3r$, donc $B(x_0, \eta) \subset \Omega_{3r}(f_\infty)$,

(f) il existe un ouvert dense W_r de X tel que $W_r \subset \Omega_r(f_\infty)$,

(g) $\Omega(f_\infty)$ est dense.

(13) (!)[4] Considérons la *topologie de Niemytzki*. Elle est définie dans $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ comme suit : Tout point (r, t) avec $t > 0$ est isolé. Une base de voisinages de $(r, 0)$ est composée de

$$D(r, \varepsilon) := \left\{(s, t) : \left\|(s, t) - (r, \tfrac{\varepsilon}{2}\right\|_2 < \varepsilon\right\}$$

et de $\{(r, 0)\}$. Observer que tout partie de $\{(r, 0) : r \in \mathbb{R}\}$ est fermée. Montrer que la topologie de Niemytzki

(a) est de caractère dénombrable.

(b) est régulière.

(c) n'est pas normale.

(14) (!) [5] Montrer que si X est l'espace de Sorgenfrey (III.7.8), alors $X \times X$ n'est pas normal.

4. Cet exercice se trouve dans le chapitre sur les espaces métriques complets, car notre solution est basée sur le théorème de Baire.

5. Comme ci-dessus.

CHAPITRE VII

Espaces métriques connexes et disconnexes

Un espace est connexe s'il ne peut pas être décomposé en deux parties fermées disjointes non vides. Cette notion est due à Jordan, qui la formula en 1893 dans le cadre des parties compactes du plan. Une condition (voir l'exercice 1) donnée par Cantor en 1883 est équivalente à la connexité dans le cas des espaces métriques compacts.

FIGURE VII.1. La Nouvelle Zélande terrestre : un exemple d'espace disconnexe.

Si on étudie une classe (de façon équivalente, une propriété) d'espaces, on considère indirectement la classe complémentaire, c'est-à-dire les espaces qui n'ont pas cette propriété.

Si, dans le cas de connexité, on explicite la classe complémentaire, c'est parce que nous allons nous concentrer sur les espaces disconnexes autant que sur les espaces connexes.

1. Espaces métriques connexes

Un espace métrique X est *disconnexe* s'il existe un couple de fermés disjoints non vides F_0, F_1 tels que $F_0 \cup F_1 = X$, c'est-à-dire

(VII.1) $$F_0 \neq \varnothing \neq F_1, F_0 \cap F_1 = \varnothing \text{ et } F_0 \cup F_1 = X.$$

Puisque $F_1 = X \setminus F_0$, les parties F_0 et F_1 sont à la fois ouvertes et fermées. Ainsi, X est disconnexe si et seulement s'il peut être décomposé en deux ouverts non vides.

Un espace métrique est *connexe* s'il n'est pas disconnexe.

Proposition 1.1. *Un espace métrique X est connexe si et seulement si $\varnothing$ et X sont ses seules parties à la fois fermées et ouvertes* (top).

La connexité est une propriété topologique, car elle est définie en termes de fermés moyennant des opérations ensemblistes.

Exemple 1.2. Un espace X (non vide) avec la topologie discrète, est connexe si et seulement si $\operatorname{card} X = 1$. En effet, si $x \in X$ et $\operatorname{card} X > 1$, alors $\{x\}$ est ouvert et fermé non vide, donc $X \setminus \{x\}$ est fermé. Si $\operatorname{card} X = 1$ alors X ne peut pas être décomposé en deux parties non vides.

Exemple 1.3. Tout espace métrique de cardinalité supérieure à 1, admettant un point isolé est disconnexe. En effet, si x est un point isolé de X, alors $\{x\}$ est ouvert et fermé non vide, donc $X \setminus \{x\}$ est fermé (non vide, car $\operatorname{card} X > 1$).

Proposition 1.4. *La droite réelle est connexe.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'au contraire il existe deux fermés non vides disjoints A et B tels que $A \cup B = \mathbb{R}$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Soit

$$c := \sup \{r : r \in [a, b] \cap A\}.$$

Puisque A est fermé, $c \in A$[1]. D'autre part, $]c, b] \subset B$. Comme B est fermé et $b \in B$, alors $[c, b] \subset B$, donc $c \in A \cap B$, ce qui est une contradiction. □

Une partie A d'un espace métrique (X, d) est *connexe* si (A, d_A) est un espace connexe (où d_A est la restriction de d à A). Rappelons que la topologie induite par d_A sur A coïncide avec la restriction à A de la topologie induite par d sur X.

Exemple 1.5. L'espace $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est disconnexe. Si $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $F_0 := \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\}$ et $F_1 := \{q \in \mathbb{Q} : r \leq q\}$ sont fermés, disjoints non vides et $\mathbb{Q} = F_0 \cup F_1$.

Exemple 1.6. L'espace $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est disconnexe pour les mêmes raisons que $\mathbb{Q}$.

---

1. D'après la définition, il existe une suite $(r_n)_n$ croissante d'éléments de $[a, b] \cap A$ telle que $\lim_n r_n = c$.

Proposition 1.7. *L'image continue d'un espace métrique connexe est connexe* (top).

DÉMONSTRATION. Soit X, Y deux espaces métriques, Sinon, il existe deux fermés disjoints F_0, F_1 tels que $f(X) \cap F_0 \neq \varnothing \neq f(X) \cap F_1$ et $f(X) \subset F_0 \cup F_1$. Ainsi $f^{-1}(F_0), f^{-1}(F_1)$ sont non vides. Puisque f est continue, $f^{-1}(F_0)$ et $f^{-1}(F_1)$ sont fermés.

Bien entendu, $f^{-1}(F_0) \cap f^{-1}(F_1) = \varnothing$ et $f^{-1}(F_0) \cup f^{-1}(F_1) = f^{-1}(F_0 \cup F_1) = X$, donc X n'est pas connexe, contrairement à l'hypothèse. □

Selon l'exercice II.29, le graphe d'une application continue est homéomorphe au domaine de l'application. Ainsi

Corollaire 1.8. *Si X, Y sont deux espaces métriques, X est connexe et $f : X \to Y$ est continue, alors* $\mathrm{Gr}\,(f)$ *est connexe.*

Proposition 1.9. *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante* (top).

DÉMONSTRATION. Si X est connexe et $f : X \to \{0,1\}$ est continue, alors d'après la proposition 1.7, $f(X) \subset \{0,1\}$ est connexe, donc de cardinalité 1 d'après l'exemple 1.2, ce qui veut dire que f est constante. S'il existe une fonction continue $f : X \to \{0,1\}$ telle que $f(X) = \{0,1\}$, alors $f^{-1}(0), f^{-1}(1)$ sont deux parties fermées non vides disjointes et $f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) = X$. □

Cette proposition permet de donner une preuve alternative très concise de la proposition 1.7.

DÉMONSTRATION. Si $f(X)$ n'est pas connexe, alors il existe une application continue surjective $g : f(X) \to \{0,1\}$. Donc $g \circ f : X \to \{0,1\}$ est continue surjective et par conséquent n'est pas constante, ce qui montre que X n'est pas connexe. □

La proposition 1.7 entraîne

Théorème 1.10 (Bolzano). *Si X est métrique connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(X)$ est un intervalle* (top).

La propriété exprimée par ce théorème s'appelle la *propriété de Darboux*[2].

Corollaire 1.11. *Si X est un espace métrique connexe et* $\operatorname{card} X > 1$, *alors* $\operatorname{card} X \geq \mathfrak{c}$ (metr).

DÉMONSTRATION. Soit X un espace métrique connexe et x_0, x_1 deux points distincts de X. Soit $f : X \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$.[3] D'après le théorème 1.10 de Bolzano f est surjective, donc $\operatorname{card} X \geq \operatorname{card}[0,1] = \mathfrak{c}$. □

2. Prouvée par Bolzano en 1817 dans le cas de fonction réelle sur un intervalle.

3. Par exemple, $f(x) := \dfrac{d(x, x_0)}{d(x, x_0) + d(x, x_1)}$.

Deux parties M, N de X sont *séparées* si

$$(\mathrm{cl}\, M \cap N) \cup (M \cap \mathrm{cl}\, N) = \varnothing.$$

Proposition 1.12. *Une partie A d'un espace métrique X est connexe si et seulement si $A = M \cup N$ où M, N sont séparées, alors $M = \varnothing$ ou $N = \varnothing$* (top).

DÉMONSTRATION. Si $A = M \cup N$ est connexe et M, N sont séparées, alors $\mathrm{cl}_X\, M \cap N = \varnothing$, donc $\mathrm{cl}_X\, M \cap A \subset A \setminus N = M$ et aussi $M \cap \mathrm{cl}_X\, N = \varnothing$, donc $\mathrm{cl}_X\, N \cap A \subset A \setminus M = N$. Ceci veut dire que M et N sont fermés dans A, donc un d'eux est vide.

Réciproquement, si A n'est pas connexe, alors il existe deux parties fermées disjointes non vides A_0, A_1 de A. Alors $\mathrm{cl}_X\, A_0 \cap A = A_0$,[4] donc $\mathrm{cl}_X\, A_0 \cap A_1 = \varnothing$ et $\mathrm{cl}_X\, A_1 \cap A = A_1$, donc $A_0 \cap \mathrm{cl}_X\, A_1 = \varnothing$ donc A_0, A_1 sont séparées dans X et non vides. □

Proposition 1.13. *Si A, B sont deux parties connexes de X et $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cup B$ est connexe* (top).

DÉMONSTRATION. Soit $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ continue. Comme A et B sont connexes, f est constante sur A et sur B, donc constante car $A \cap B \neq \varnothing$. □

Proposition 1.14. *Si $\{A_t : t \in T\}$ est une famille de parties connexes de X telle qu'il existe $t_0 \in T$ pour lequel $A_t \cap A_{t_0} \neq \varnothing$ pour chaque $t \in T$, alors $\bigcup_{t \in T} A_t$ est connexe* (top).

DÉMONSTRATION. Soit $f : \bigcup_{t \in T} A_t \to \{0, 1\}$ continue. Comme A_t est connexe, f est constante sur A_t (pour tout $t \in T$), donc constante car $A_t \cap A_{t_0} \neq \varnothing$ pour chaque $t \in T$. □

Corollaire 1.15. *Si $\{A_t : t \in T\}$ est une famille de parties connexes de X telle que $\bigcap_{t \in T} A_t \neq \varnothing$, alors $\bigcup_{t \in T} A_t$ est connexe* (top).

DÉMONSTRATION. Soit $x_0 \in \bigcap_{t \in T} A_t$ et t_0 un élément arbitraire de T. Alors $x_0 \in A_{t_0} \cap A_t$ pour tout $t \in T$, donc $\bigcup_{t \in T} A_t$ est connexe d'après la proposition 1.14. □

Corollaire 1.16. *Si A est une partie de X telle que pour tous $x_0, x_1 \in A$ il existe une partie connexe C telle que $x_0, x_1 \in C \subset A$, alors A est connexe* (top).

DÉMONSTRATION. Fixons $x_0 \in A$. Alors pour tout $x \in A$ il existe une partie C_x telle que $x_0, x \in C_x \subset A$. Donc $\{x_0\} \cap C_x \neq \varnothing$ pour tout $x \in A$ et $A = \bigcup_{x \in A} C_x$. □

Proposition 1.17. *Si A est une partie connexe d'un espace métrique X et $A \subset B \subset \mathrm{cl}\, A$, alors B est connexe* (top).

---

4. Si X est un espace topologique et A son sous-espace, alors une partie A_0 de A est fermée si et seulement s'il existe un fermé C de X tel que $A_0 = C \cap A$. Donc $\mathrm{cl}_X\, A_0 \subset C$ et $\mathrm{cl}_X\, A_0 \cap A \subset A_0$.

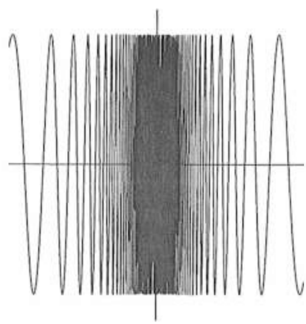
DÉMONSTRATION. Soit $f : B \to \{0,1\}$ continue. Comme A est connexe, f est constante sur A, donc sur $B \subset \operatorname{cl} A$. □

Corollaire 1.18. *Si A est une partie connexe d'un espace métrique X, alors $\operatorname{cl} A$ est connexe* (top).

Exemple 1.19.

$$A := \left\{(x,y) : |x| \neq 0, y = \sin(\tfrac{1}{x})\right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

est connexe.



Effectivement, $A_+ := \left\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\right\}$ est connexe comme l'image de $]0,\infty[$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$, donc $\operatorname{cl} A_+ = A_+ \cup \{0\} \times [-1,1]$ est connexe. Aussi $A_- := \left\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x < 0\right\}$ est connexe comme l'image de $]-\infty, 0[$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin(\frac{1}{x}))$, donc $\operatorname{cl} A_- = A_- \cup \{0\} \times [-1,1]$ est connexe. Comme $\operatorname{cl} A_+ \cap \operatorname{cl} A_- \neq \varnothing$, l'union $A = \operatorname{cl} A_+ \cup \operatorname{cl} A_-$ est connexe.

Théorème 1.20. *Soit X_n un espace métrique pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est connexe si et seulement si X_n est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$* (top).

DÉMONSTRATION. Si X, Y sont connexes et (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux éléments de $X \times Y$, alors $\{x_0\} \times Y$ et $X \times \{y_1\}$ sont connexes, car homéomorphes à Y et X respectivement. Puisque

$$(x_0, y_1) \in (\{x_0\} \times Y) \cap (X \times \{y_1\}),$$

l'union $(\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_1\})$ est connexe. Dès lors $X \times Y$ est connexe grâce au corollaire 1.16. Par une récurrence immédiate, tout produit fini d'espaces connexes est connexe.

Supposons que X_n est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des parties finies de $\mathbb{N}$. On choisit un élément quelconque a de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Pour tout $F \in \mathcal{F}$ soit

$$A_F := \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

$$\text{où } A_n := X_n \text{ si } n \in F, \text{ et } A_n := \{a(n)\} \text{ si } n \notin F.$$

La partie A_F est connexe pour tout $F \in \mathcal{F}$, car homéomorphe au produit fini $\prod_{n\in F} X_n$. D'autre part, $a \in A_F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, donc $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} A_F$ est connexe selon le corollaire 1.15.

Or $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} A_F$ est dense dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. En effet, si $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, alors $V \in \mathcal{V}(x)$ s'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$V_{F,\varepsilon} := \left\{ y \in \prod\nolimits_{n\in\mathbb{N}} X_n : \underset{n\in F}{\forall}\ d_n(y(n), x(n)) < \varepsilon \right\} \subset V.$$

Bien évidemment, $\varnothing \neq V_{F,\varepsilon} \cap A_F \subset V \cap \bigcup_{F\in\mathcal{F}} A_F$.

Alors $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \mathrm{cl} \bigcup_{F\in\mathcal{F}} A_F$ est connexe d'après le corollaire 1.18. Si $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est connexe alors X_n est connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$, car les projections sont continues. $\square$

Il s'ensuit que tout espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est connexe, l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles avec la convergence simple est connexe et le cube de Hilbert $\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,1]$ est connexe.

Un *arc* L dans un espace X est une partie de X homéomorphe à $[0,1]$, c'est-à-dire il existe un homéomorphisme $l : [0,1] \to L$. Les éléments $l(0)$ et $l(1)$ s'appellent les *extrémités* de L. Un espace X est dit *connexe par arcs* (respectivement, *par chemins*) si pour tous x_0, x_1 il existe un arc dont x_0, x_1 sont des extrémités (respectivement, si pour tous x_0, x_1 il existe une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = x_0$ et $f(1) = x_1$).

D'après l'exercice 17,

Proposition 1.21. *Un espace métrique X est connexe par arcs si et seulement s'il est connexe par chemins.*

Bien entendu, la connexité par chemins est plus simple à vérifier que celle par arcs. La proposition est valable, plus généralement, pour les espaces topologiques séparées.

Exemple 1.22. La topologie de Sierpiński $\$$ sur $\{0,1\}$ n'est pas connexe par arcs, mais vérifie la propriété, car l'application $f : [0,1] \to \{0,1\}$ définie par $f(x) := 1$ si $0 < x \leq 1$ et $f(0) := 0$ est continue.

2. Composantes et quasi-composantes

La *composante* d'un élément x d'un espace métrique X est définie comme l'union de toutes les parties connexes de X contenant x. On note $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des parties connexes contenant x et $C^{(x)}$ la composante de x. Ainsi

$$C^{(x)} := \bigcup\nolimits_{C\in\mathcal{C}(x)} C$$

D'après le corollaire 1.15, la composante d'un élément est connexe, donc $C^{(x)}$ est la plus grande partie connexe contenant x. Puisque, d'après le proposition 1.18, la fermeture d'une partie connexe est connexe, toute composante est fermée.

En conséquence,

Proposition 2.1. *Les composantes des éléments d'un espace métrique sont connexes, fermées et disjointes deux à deux* (top).

DÉMONSTRATION. Il reste à montrer que les composantes sont disjointes deux à deux. Si $C^{(x_0)} \cap C^{(x_1)} \neq \varnothing$, alors $C^{(x_0)} \cup C^{(x_1)}$ est un connexe contenant x_0 et x_1, donc

$$C^{(x_0)} \cup C^{(x_1)} \subset C^{(x_0)} \text{ et } C^{(x_0)} \cup C^{(x_1)} \subset C^{(x_1)},$$

d'où $C^{(x_0)} = C^{(x_1)}$. □

ainsi les composantes d'éléments d'un espace métrique X forment une décomposition de X. Donc on les appelle les *composantes* de X. Bien évidemment, X est connexe si et seulement si X est sa seule composante.

La *quasi-composante* d'un élément x d'un espace métrique X est définie comme l'intersection des parties ouvertes-fermées de X contenant x.

Désignons par $\mathcal{Q}(x)$ la famille des ouverts-fermés contenant x et par $Q^{(x)}$ la quasi-composante de x.

Proposition 2.2. *Les quasi-composantes des éléments d'un espace métrique sont fermées et disjointes deux à deux* (top).

DÉMONSTRATION. Toute quasi-composante d'un espace métrique X est fermée en tant qu'intersection de parties fermées. Si $x_1 \notin Q^{(x_0)}$, alors, par définition, il existe un ouvert-fermé Q tel que $x_0 \in Q^{(x_0)} \subset Q$ et $x_1 \notin Q$, ainsi $X \setminus Q$ est un ouvert-fermé contenant x_1. Il s'ensuit que $Q^{(x_1)} \subset X \setminus Q \subset X \setminus Q^{(x_0)}$. □

Par conséquent, les quasi-composantes d'éléments d'un espace métrique X forment une décomposition de X. On les appelle donc *quasi-composantes* de X. Observons que X est connexe si et seulement si X est sa seule quasi-composante.

Notons que pour tout $x \in X$ (voir l'exercice 5)

$$C^{(x)} \subset Q^{(x)}. \tag{VII.2}$$

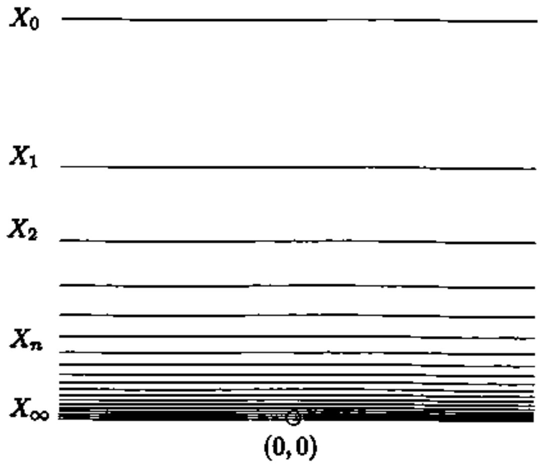
Par conséquent,

Corollaire 2.3. *Si une quasi-composante est connexe, alors elle est une composante.*

Exemple 2.4 (quasi-composante qui n'est pas une composante). Soit $X_n := [-1,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $X_\infty := [-1,1] \times \{0\}$. Considérons $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} X_n \cup X_\infty \setminus \{(0,0)\}$. Les composantes de X sont X_n pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ ainsi que $[-1,0[\times \{0\}$ et $]0,1] \times \{0\}$.

Si Q est un ouvert contenant $(1,0)$, alors il existe $n_Q \in \mathbb{N}_1$ tel que $Q \cap X_n \neq \varnothing$ pour $n \geq n_Q$. Si Q est également fermé, alors $]0,1] \times \{0\} \subset Q$ et $X_n \subset Q$ pour $n \geq n_Q$, donc $[-1,0[\times \{0\} \subset Q$. Ainsi $X_\infty \setminus \{(0,0)\} = ([-1,0[\cup]0,1]) \times \{0\}$ est la quasi-composante de $(1,0)$.

Théorème 2.5. *Dans tout espace métrique compact, les composantes et les quasi-composantes coïncident* (top *séparé*).



DÉMONSTRATION. Soit X un espace métrique compact. En vertu du corollaire 2.3, il suffit de montrer que $Q^{(x)}$ est connexe pour tout $x \in X$.

Soit F_0, F_1 deux parties fermées disjointes de $Q^{(x)}$ telles que $Q^{(x)} = F_0 \cup F_1$ et $x \in F_0$. Puisque $Q^{(x)}$ est fermée, F_0, F_1 sont fermées dans X.

Soit O_0, O_1 deux ouverts disjoints de X tels que $F_0 \subset O_0$ et $F_1 \subset O_1$, donc $\operatorname{cl} O_0 \cap O_1 = \varnothing$ et $Q^{(x)} \subset O_0 \cup O_1$.

Puisque les intersections finies d'éléments de $\mathcal{Q}(x)$ appartiennent à $\mathcal{Q}(x)$ et l'espace X est compact, d'après l'exercice V.6.b, il existe $Q \in \mathcal{Q}(x)$ tel que $Q^{(x)} \subset Q \subset O_0 \cup O_1$, donc $Q = Q \cap (O_0 \cup O_1)$. Par définition, Q est ouverte et fermée, donc $Q \cap O_0$ est ouverte. Il s'ensuit que

$$\operatorname{cl}(Q \cap O_0) \subset Q \cap \operatorname{cl} O_0 \subset Q \cap (O_0 \cup O_1) \cap \operatorname{cl} O_0 = Q \cap O_0,$$

donc $Q \cap O_0$ est également fermée, ainsi $Q \cap O_0 \in \mathcal{Q}(x)$ et, par conséquent, $F_1 \subset Q^{(x)} \subset Q \cap O_0$. D'autre part, $F_1 \cap O_0 = \varnothing$, donc $F_1 = \varnothing$. □

Proposition 2.6. *Si $\varnothing \neq F \neq X$ est une partie fermée d'un espace métrique connexe compact X et C est une composante de F, alors $C \cap \partial F \neq \varnothing$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que C soit la composante d'un élément x de F telle que $C \cap \partial F = \varnothing$. D'après le théorème 2.5, C est l'intersection des ouverts-fermés de F qui l'incluent. Comme C est compact et $F \setminus \partial F$ est un ouvert incluant C, d'après l'exercice V.6.b, il existe un ouvert-fermé Q de F tel que $C \subset Q$ et $Q \cap \partial F = \varnothing$. Comme Q est ouvert dans F, il existe un ouvert O de X tel que $Q = O \cap F$. Ainsi $O \cap \partial F = \varnothing$, ce qui prouve que $Q = O \cap \operatorname{int} F$, donc Q est ouvert dans X. Mais Q est également une partie fermée de F, donc de X. Puisque X est connexe et Q est un ouvert-fermé non vide de X, alors $Q = X$. Il s'ensuit que $\partial F = \varnothing$, c'est-à-dire F est ouvert-fermé non vide, ce qui contredit l'hypothèse. □

Proposition 2.7. *Si $X = \bigcup_{j\in J} O_j$ où $\{O_j : j \in J\}$ est un ensemble de parties ouvertes, connexes, disjointes deux à deux de X, alors $\{O_j : j \in J\}$ est l'ensemble de composantes de X.*

Proposition 2.8. *Si $X = \bigcup_{j\in J} F_j$ où $\{F_j : j \in J\}$ est un ensemble fini de parties fermées, connexes, disjointes deux à deux de X, alors $\{F_j : j \in J\}$ est l'ensemble de composantes de X.*

Si J n'est pas fini, alors la conclusion de la proposition précédente n'est plus vraie (l'exercice 5.d). D'autre part, il existe une partie connexe X de $\mathbb{R}^2$ étant union dénombrable de fermés disjoints (l'exercice 9). Cependant,

Théorème 2.9 (Sierpiński). *Un espace métrique compact connexe ne peut pas être décomposé en famille infinie dénombrable de fermés non vides disjoints deux à deux.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'un espace métrique compact connexe X admet une décomposition $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, où X_n est fermé non vide pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme X_0 et X_1 sont fermés disjoints, il existe deux ouverts disjoints O_0 et O_1 tels que $X_0 \subset O_0$ et $X_1 \subset O_1$.

Soit $x \in X_1$ et C_0 la composante x dans $\operatorname{cl} O_1$. Alors $C_0 \cap X_0 = \varnothing$ et $C_0 \cap \partial O_1 \neq \varnothing$ selon la proposition 2.6. Bien sûr, $C_0 \cap X_1 \neq \varnothing$ et comme $X_1 \cap \partial O_1 = \varnothing$, alors il existe $k > 1$ tel que $C_0 \cap X_k \neq \varnothing$.

Puisque C_0 est connexe et $C_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1}(C_0 \cap X_n)$, où $\{C_0 \cap X_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ est une famille de fermés disjoints et l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} : C_0 \cap X_k \neq \varnothing\}$ a au moins deux éléments, il ne peut pas être fini.

Si nous avons déjà trouvé une suite décroissante de connexes fermés non vides $C_0, C_1, \ldots, C_n$ tels que $X_j \cap C_j = \varnothing$ pour $0 \leq j \leq n$, comme C_n est connexe et

$$1 < \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N}_{n+1} : C_n \cap X_k \neq \varnothing\},$$

alors $\{k \in \mathbb{N}_{n+1} : C_n \cap X_k \neq \varnothing\}$ est infini. Ainsi, C_n est un compact connexe qui est union disjointe dénombrable de fermés non vides.

On se ramène donc au début de la preuve avec C_n remplaçant X. Il existe donc un connexe fermé non vide $C_{n+1} \subset C_n$ tel que $C_{n+1} \cap X_{n+1} = \varnothing$. D'une part,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing,$$

et de l'autre, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$, car $(C_n)_n$ est une suite décroissante de compacts. Une contradiction. □

3. Espaces métriques zéro-dimensionnels

Nous avons déjà observé que[5] tout espace métrique de cardinalité > 1, ayant un point isolé est disconnexe. Les espaces métriques des nombres rationnels et des nombres irrationnels sont disconnexes sans points isolés.

5. Le traitement de la disconnexité est en grande partie basée sur l'article de Jerry Vaughan [33].

D'après le théorème 1.20, le cube de Cantor est disconnexe, en tant que produit dénombrable d'espaces métriques disconnexes (des copies de l'espace discret $\{0,1\}$). Par conséquent l'ensemble de Cantor est disconnexe, car homéomorphe au cube de Cantor.

Un autre exemple important d'espace disconnexe est l'*espace de Baire* $\mathbb{B}$, c'est-à-dire le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}$ d'un nombre dénombrable de copies de l'espace discret $\mathbb{N}$, munie de la topologie produit.

Par conséquent, une suite $(f_k)_k$ d'éléments de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}$ converge vers un élément f de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}$ si et seulement si toutes les composantes convergent, c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f \iff \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \lim_{k\to\infty} f_k(n) = f(n).$$

Bien entendu, l'espace de Baire peut être vu comme l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec la convergence simple. Comme produit dénombrable d'espaces métriques complets, disconnexes et séparables,

Corollaire 3.1. *L'espace de Baire est complètement métrisable, séparable et disconnexe.*

Un espace topologique s'appelle *zéro-dimensionnel* si tout point admet une base de voisinages composée de parties qui sont à la fois ouvertes et fermées. Bien évidemment, tout espace zéro-dimensionnel est disconnexe. Plus précisément, si X est zéro-dimensionnel, alors pour tout $x \in X$, la quasi-composante de x est $\{x\}$.

Exemple 3.2. Tout espace métrique X discret est zéro-dimmensionnel, car $\{\{x\}\}$ constitue une base de voisinages de x et $\{x\}$ est ouvert-fermé pour tout x.

Exemple 3.3. On vérifie aisément que les espaces des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, nombres irrationnels $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, de Baire $\mathbb{B}$, ainsi que de Cantor C sont zéro-dimensionnels.

Exemple 3.4. Les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \{0\}\cup\{\tfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}_1\}$$

sont disconnexes, mais pas zéro-dimensionnels.

Proposition 3.5. *Tout produit d'espaces zéro-dimensionnels est zéro-dimensionnel* (top).

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition III.9.2, une base de voisinages de $x \in \prod_{j\in J} X_j$ est composé de $\prod_{j\in J} V_j$, où $V_j \in \mathcal{V}_j(x(j))$ et $\{j \in J : V_j \neq X_j\}$ est fini. Comme tout X_j est zéro-dimensionnel, on peut considérer seulement ceux V_j qui sont ouverts-fermés. □

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ deux familles de parties d'un ensemble X. On dit que $\mathcal{B}$ est un *raffinement* de $\mathcal{D}$ si pour tout $B \in \mathcal{B}$ il existe $D \in \mathcal{D}$ tel que $B \subset D$.

On dit que la *dimension topologique* d'un espace topologique est nulle si tout recouvrement ouvert admets un raffinement qui est un recouvrement ouvert, et dont les éléments sont disjoints deux à deux. Observons qu'un tel recouvrement est composé d'ouverts-fermés.

Proposition 3.6. *Tout espace métrique de dimension topologique nulle est zéro-dimensionnel.*

DÉMONSTRATION. Si $x \in X$ et $r > 0$, alors $\mathcal{D} := \{\{y : d(x,y) < r\}, \{y : d(x,y) > \frac{r}{2}\}\}$ est un recouvrement de X. Si $\mathcal{B}$ est un raffinement de $\mathcal{D}$ composé d'ouverts deux à deux disjoints (donc ouverts-fermés) qui recouvre X, et $B \in \mathcal{B}$ contient x, alors il existe un élément de $\mathcal{D}$ qui inclut B, donc $B \subset \{y : d(x,y) < r\}$, ce qui montre que x admet une base de voisinages ouverts-fermés. □

Un espace métrique zéro-dimensionnel n'a pas forcément la dimension topologique nulle[6]. Cependant,

Proposition 3.7. *La dimension topologique de tout espace métrique séparable zéro-dimensionnel est nulle.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x composée d'ouverts-fermés pour tout $x \in X$, alors $\mathcal{V} := \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}(x)$ est une base d'ouverts (qui sont aussi fermés) de X. D'après la proposition IV.1.3, il existe une base dénombrable de X. D'après l'exercice 5, il existe une base dénombrable $\mathcal{B} := \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ composée d'ouverts-fermés. Alors la famille $\mathcal{D} := \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ donnée par $D_0 := B_0$ et $D_n := B_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} B_k$ pour $n > 0$, est composée d'ouverts-fermés, deux à deux disjoints. De surcroît, $\mathcal{D}$ est une base et un raffinement de $\mathcal{B}$. □

Comme $\mathbb{N}$ est zéro-dimensionnel et séparable, d'après les propositions 3.5, IV.1.6 et 3.7,

Corollaire 3.8. *La dimension topologique de l'espace de Baire est nulle.*

4. Espaces ultramétriques

Une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ s'appelle une *ultramétrique* si pour tous $x, y, z \in X$,

$$d(x,y) = d(y,x),$$

$$d(x,y) = 0 \iff x = y,$$

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) \tag{VII.3}$$

Puisque $\max(a,b) \leq a + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+$, toute ultramétrique est une métrique.

Proposition 4.1. *Si d est une ultramétrique sur X, alors pour $x, y, z \in X$, au moins deux éléments de $\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$ sont égaux.*

6. Des exemples connus de tels espaces sont assez compliqués.

DÉMONSTRATION. Si tous ces nombres étaient différents, par exemple, $d(x,y) < d(y,z) < d(x,z)$, alors $d(x,z)$ ne serait pas inférieur ou égal à $d(y,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$. □

Proposition 4.2. *Si d est une ultramétrique sur X, alors pour $r, t > 0$ et $x, y \in X$,*

(1) Si $y \in B_r(x)$, alors $B_r(x) = B_r(y)$.

(2) Si $B_r(x) \cap B_t(y) \neq \varnothing$ et $r \leq t$, alors
$$B_r(x) \subset B_t(y).$$

(3) $B_r(x)$ est fermée.

DÉMONSTRATION. (1) Montrons que $B_r(x) \subset B_r(y)$. Si $z \in B_r(x)$ alors $d(z,x) < r$ donc
$$d(z,y) \leq \max(d(x,y), d(y,z)) < r,$$
ce qui veut dire que $z \in B_r(y)$. Comme $y \in B_r(x)$ équivaut à $x \in B_r(y)$, on a l'égalité.

(2) Supposons que $r \leq t$ et $z \in B_r(x) \cap B_t(y)$. Alors, après (1), $B_r(x) = B_r(z) \subset B_t(z) = B_t(y)$.

(3) Si $y \notin B_r(x)$ et $0 < s < r$, alors que $B_s(y) \cap B_r(x) = \varnothing$. Sinon, d'après (2), $y \in B_s(y) \subset B_r(x)$, ce qui donne une contradiction. □

Il s'ensuit de la proposition 4.2, que tout espace ultramétrique est zéro-dimensionnel. Nous renforcerons ce résultat.

Proposition 4.3. *La dimension topologique de tout espace ultramétrique est nulle.*

DÉMONSTRATION. Soit (X,d) espace ultramétrique et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $x \in X$, soit $r(x)$ le plus grand nombre réel tel qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ avec $B_{r(x)}(x) \subset U$. Comme $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert, $r(x) > 0$ pour tout $x \in X$. Il s'ensuit que $\left\{B_{r(x)}(x) : x \in X\right\}$ est un recouvrement de X composé d'ouverts-fermés et raffinant $\mathcal{U}$.

Il suffit de montrer que deux éléments de ce recouvrement ou sont disjoints ou coïncident. Soit x, y deux éléments distincts de X.

Si $B_{r(x)}(x) \cap B_{r(y)}(y) \neq \varnothing$, alors d'après la proposition 4.2.(2), une boule est incluse dans l'autre, par exemple $B_{r(x)}(x) \subset B_{r(y)}(y)$, donc $B_{r(y)}(x) = B_{r(y)}(y)$ conformément à la proposition 4.2.(3), ainsi $r(x) = r(y)$, d'après la définition de $r : X \to \mathbb{R}_+$. □

Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties d'un espace métrique, alors désignons
$$\operatorname{diam} \mathcal{A} := \sup \{\operatorname{diam} A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Lemme 4.4. *Si la dimension topologique d'un espace métrique est nulle et $(r_n)_n$ est une suite strictement décroissante avec $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, alors il existe une suite $(\mathcal{U}_n)_n$ de recouvrements d'ouverts disjoints deux à deux telle que $\mathcal{U}_{n+1}$ soit un raffinement de $\mathcal{U}_n$ et $\operatorname{diam} \mathcal{U}_n \leq r_n$.*

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence, prenant pour $\mathcal{U}_0$ un recouvrement d'ouverts disjoints deux à deux qui raffine $\{B_{r_0}(x) : x \in X\}$. Suivant la définition de la dimension nulle, il existe un recouvrement $\mathcal{U}_{n+1}$ d'ouverts disjoints deux à deux qui est un raffinement à la fois de $\mathcal{U}_n$ et de $\{B_{r_n}(x) : x \in X\}$. □

Théorème 4.5. *Un espace métrique admet une ultramétrique topologiquement équivalente si et seulement si sa dimension topologique est nulle.*

DÉMONSTRATION. Suivant la proposition 4.3 et le lemme 4.4, il suffit de montrer qu'un espace métrique ayant une suite $(\mathcal{U}_n)_n$ de recouvrements d'ouverts disjoints deux à deux telle que $\mathcal{U}_{n+1}$ soit un raffinement de $\mathcal{U}_n$, $\operatorname{diam}\mathcal{U}_{n+1} < \operatorname{diam}\mathcal{U}_n$ et $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\mathcal{U}_n = 0$, admet une ultramétrique topologiquement équivalente.

On note $\#(x, y)$ le premier n tel que x et y ne sont pas dans le même élément de $\mathcal{U}_n$ et soit $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une suite strictement décroissante avec $\lim_{n\to\infty} s(n) = 0$. On définit

$$m(x,y) := \begin{cases} s(\#(x,y)), \text{ si } x \neq y, \\ 0, \text{ si } x = y. \end{cases}$$

Il est clair que m est positive, symétrique et que $m(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Montrons que

$$m(x,z) \leq \max(m(x,y), m(y,z)) \tag{VII.4}$$

pour tous $x, y, z \in X$. Il suffit de considérer le cas où x, y, z ne sont pas tous égaux. Alors il existe le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n = \min(\#(x,y), \#(x,z), \#(y,z)).$$

Il y existe donc un élément U de $\mathcal{U}_n$ contenant un seul des x, y, z. Il s'ensuit qu'au moins deux des nombres $m(x, z), m(x, y), m(y, z)$ sont égaux à $s(n)$ et le troisième n'est pas supérieur à $s(n)$, ce qui complète la preuve de (VII.4).

Pour montrer que m est compatible, observons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $U \in \mathcal{U}_n$, si $s(n) \leq s < s(n-1)$, alors $B_s(x) = U$ pour tout $x \in U$. Ainsi $\{B_s(x) : x \in X, s > 0\}$ coïncide avec la base $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ de X. □

Exemple 4.6. Nous avons déjà vu que l'ensemble de Cantor est zéro-dimensionnel (l'exercice V.9) et est séparable, donc de dimension topologique 0. Une ultramétrique sur C est un cas particulier du théorème 4.5 : si $x \neq y$, alors $\#(x, y)$ désigne le premier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $x(n) \neq y(n)$. La fonction

$$m(x,y) := \begin{cases} 3^{-\#(x,y)}, \text{ si } x \neq y, \\ 0, \text{ si } x = y, \end{cases}$$

est une utramétrique compatible sur C. Si d désigne la métrique usuelle de $\mathbb{R}$, alors on vérifie facilement que pour tous $x, y \in C$,

$$m(x,y) \leq d(x,y) \leq 3m(x,y).$$

5. Espace de Baire

Nous allons montrer que l'espace de Baire $\mathbb{B}$ est homéomorphe au sous-espace de la droite des nombres irrationnels. Puisque l'espace de Baire est complet en tant que produit (dénombrable) d'espaces métriques discrets, nous aurons une autre démonstration du fait déjà établi que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est complètement métrisable. Nous avons vu que la dimension topologique de $\mathbb{B}$ est 0, donc $\mathbb{B}$ est ultramétrisable. Soit $\#(f, g)$ le premier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \neq g(n)$. Alors conformément au théorème 4.5,

Corollaire 5.1. *La fonction*

$$d(f,g) := \begin{cases} (\#(f,g)+1)^{-1}, & si\ f \neq g, \\ 0, & si\ f = g. \end{cases} \tag{VII.5}$$

est une métrique compatible avec la topologie de $\mathbb{B}$.

Si $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ sont des bijections, alors la fonction $\Psi : \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}_1} \mathbb{N}_1$ définie par

$$\Psi(f) := (\psi(f(0), \varphi \circ f|_{\mathbb{N}_1}),$$

où $f|_{\mathbb{N}_1}$ est la restriction de f sur $\mathbb{N}_1$, est une bijection. Bien entendu, tout $g \in \mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}_1} \mathbb{N}_1$ est une suite telle que $g(0) \in \mathbb{Z}$ et $g(n) \in \mathbb{N}_1$ pour $n > 0$.

Si $y, z \in \mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}_1} \mathbb{N}_1$, alors soit

$$d_0(y,z) := d(\Psi^{-1}(y), \Psi^{-1}(z))$$

la métrique définie sur $\mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}_1} \mathbb{N}_1$ par la bijection Ψ à partir de la métrique d sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ (VII.5). Notons $\mathbb{B}_0$ l'espace $\mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}_1} \mathbb{N}_1$ muni de d_0. Bien entendu, $\mathbb{B}_0$ et $\mathbb{B}$ sont isométriques, *a fortiori* homéomorphes. Si $g \in \mathbb{Z} \times \prod_{n\in\mathbb{N}_1} \mathbb{N}_1$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $g|m$ désigne un élément de $\mathbb{Z} \times \prod_{n=1}^{m-1} \mathbb{N}_1$ qui est la restriction de g à m premiers termes.

5.1. Fractions continues. Une *fraction continue* $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ est définie par

$$\begin{aligned} [a_0] &:= a_0, \\ [a_0, a_1, \ldots, a_n] &:= a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]}, \end{aligned}$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_k \in \mathbb{N}_1$ pour $k > 0$. Par conséquent,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots \cfrac{1}{a_n}}}. \tag{VII.6}$$

Ainsi, l'opération (VII.6) associe à toute restriction (à un nombre fini de premières composantes) d'un élément de $\mathbb{B}_0$, un nombre rationnel. Réciproquement,

Proposition 5.2. *Tout nombre rationnel admet une représentation comme fraction continue.*

DÉMONSTRATION. Si $r \in \mathbb{Q}$, alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}_1$ tels que $r = \frac{a}{b}$. D'après le théorème d'Euclide, il existe deux entiers q et r tels que

$$a = bq + r, \text{ où } 0 \leq r < b.$$

En posant $r_0 := b$, on obtient

$$\begin{aligned} a &= r_0 q_0 + r_1, \text{ où } 0 \leq r_1 < r_0, \\ r_0 &= r_1 q_1 + r_2, \text{ où } 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3, \text{ où } 0 \leq r_3 < r_2, \\ &\dots \\ r_{n-1} &= r_n q_n + r_{n+1}, \text{ où } 0 \leq r_{n+1} < r_n, \end{aligned}$$

jusqu'au moment où, après un nombre fini de pas, r_{n+1} devient 0, c'est-à-dire $r_{n-1} = r_n q_n$. D'où

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{r_0} = q_0 + \frac{r_1}{r_0},$$

donc

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{r_0} = q_0 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_2}{r_1}},$$

ainsi

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots \cfrac{1}{q_n}}} = [q_0, q_1, \dots, q_n].$$

□

Bien entendu, une fraction (VII.6) a un sens pour $a_0, a_1, \dots, a_n$ réels, pourvu qu'aucun dénominateur ne soit égal à 0. Nous aurons besoin de cette généralisation dans la suite.

Lemme 5.3. *Si* $0 < x < y$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

(1) si n *est pair, alors* $[a_0, a_1, \dots, a_n, x] > [a_0, a_1, \dots, a_n, y]$,

(2) si n *est impair, alors* $[a_0, a_1, \dots, a_n, x] < [a_0, a_1, \dots, a_n, y]$.

DÉMONSTRATION. (l'exercice 20). □

Proposition 5.4. *Si* $1 \leq x < y$ *et* $n \in \mathbb{N}_1$, *alors*

$$|[a_0, a_1, \dots, a_n, x] - [a_0, a_1, \dots, a_n, y]| \leq \frac{y - x}{xy + n}.$$

DÉMONSTRATION. (l'exercice 21). □

Afin d'éviter une confusion avec les crochets servant à définir les fractions continues, nous allons ici déroger à la notation traditionnelle française et désignerons

$$(a, b) :=]a, b[,$$

l'intervalle ouvert, dont les extrémités sont $a < b$.

Théorème 5.5. *L'espace de Baire est homéomorphe à l'espace des nombres irrationnels.*

DÉMONSTRATION. Définissons une suite de familles d'intervalles ouverts :

$$\mathcal{U}_0 := \{(a, a+1) : a \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $n > 0$, alors $\mathcal{U}_{2n}$ est composé de

$$([a_0, \ldots, a_{2n}, k+1], [a_0, \ldots, a_{2n}, k]),$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, \ldots, a_{2n}, k \in \mathbb{N}_1$ et $\mathcal{U}_{2n+1}$ est composé de

$$([a_0, \ldots, a_{2n+1}, k], [a_0, \ldots, a_{2n+1}, k+1]),$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, \ldots, a_{2n+1}, k \in \mathbb{N}_1$.

Pour tout m, les intervalles de $\mathcal{U}_m$ sont disjoints deux à deux, leurs extrémités sont rationnelles et leur union inclut $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ainsi $\mathcal{U}_m$ est un recouvrement de $X := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour tout m.

Observons que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$[a_0, \ldots, a_m, 1] = [a_0, \ldots, a_m + 1]$$

et $\lim_{k\to\infty} [a_0, \ldots, a_m, k] = [a_0, \ldots, a_m]$.

Donc tout élément de $\mathcal{U}_m$ est l'union disjointe des éléments de $\mathcal{U}_{m+1}$ qu'il inclut. En particulier, $\mathcal{U}_{m+1}$ est un raffinement de $\mathcal{U}_m$.

D'après la proposition 5.4 avec $y = \frac{1}{k}$ et $y = \frac{1}{k+1}$,

$$I \in \mathcal{U}_m \Longrightarrow \operatorname{diam} I \leq \frac{1}{m+1}.$$

Si $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors pour tout m il existe $I_m(r) \in \mathcal{U}_m$ tel que $r \in I_m(r)$ et $I_m(r) \supset I_{m+1}(r)$. Puisque $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam} I_m(r) = 0$,

$$\{r\} = \bigcap\nolimits_{m\in\mathbb{N}} I_m(r).$$

Réciproquement, pour tout $f \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1^{\mathbb{N}_1}$, soit

$$\{F(f)\} := \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} I_n, \tag{VII.7}$$

où, pour n pair,

$$I_n := ([f(0), \ldots, f(n)], [f(0), \ldots, f(n) + 1]),$$

et, pour n impair,

$$I_n := ([f(0), \ldots, f(n) + 1], [f(0), \ldots, f(n)]).$$

Observons que le n-ième intervalle de cette intersection appartient à $\mathcal{U}_n$.

Comme $I_n \supset \operatorname{cl} I_{n+1}$ pour tout n dans (VII.7), l'intersection n'est pas vide, car $\mathbb{R}$ est localement compact. Puisque $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} I_n = 0$, l'intersection est un singleton, donc la définition ci-dessus est correcte. En plus, $F(f)$ est irrationnel pour tout $f \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1^{\mathbb{N}_1}$. En effet, d'après la proposition 5.2, pour tout nombre rationnel r, il existe $m \in \mathbb{N}$ et une fraction $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$ égale à r, donc est une extrémité d'un élément de $\mathcal{U}_m$.

Nous avons prouvé que $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1^{\mathbb{N}_1}$ est bijective.

Une base de $\mathbb{B}_0$ est composée de

$$B_m(f) := \{g \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_1^{\mathbb{N}_1} : g|m = f|m\},$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $f|m \in \mathbb{Z} \times \prod_{n=1}^{m-1} \mathbb{N}_1$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ est une base de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ainsi, pour tous f et m,

$$F(B_m(f)) = I_{m-1}(f),$$

ce qui prouve que F est un homéomorphisme. Pour conclure il suffit de se souvenir que $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}_0$ sont homéomorphes. □

Théorème 5.6 (Sierpiński). *Tout espace métrique séparable zéro-dimensionnel est homéomorphe à un sous-espace des nombres irrationnels.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace métrique séparable et zéro-dimensionnel. Alors, d'après le théorème 4.5, il existe une suite $(\mathcal{U}_n)_n$ de recouvrements d'ouverts disjoints deux à deux telle que $\mathcal{U}_{n+1}$ est un raffinement de $\mathcal{U}_n$ et $\operatorname{diam} \mathcal{U}_n \leq 2^{-n}$. D'après la proposition 3.7, pour tout n il existe une sous-famille de cardinalité dénombrable $m(n) \leq \infty$,

$$\mathcal{V}_n := \{V_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$$

de $\mathcal{U}_n$ telle que la suite $(\mathcal{V}_n)_n$ a les mêmes propriétés que $(\mathcal{U}_n)_n$. Pour tout $x \in X$ et chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $\mathfrak{f}(x)(n) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in V_{n,\mathfrak{f}(x)(n)}$. Ainsi, à tout $x \in X$, il correspond un unique élément $\mathfrak{f}(x)$ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, donc $\mathfrak{f} : X \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une application injective.

On observe que $\mathcal{W} := \{\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = k\} : k \leq m(n), n \in \mathbb{N}\}$ est une sous-base d'ouverts de $\mathbb{B}$ et, d'autre part,

$$\mathfrak{f}(V_{n,k}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = k\} \cap \mathfrak{f}(X),$$

est une bijection entre $\mathcal{V} := \bigcup_n \mathcal{V}_n$ et les traces de $\mathcal{W}$ sur $\mathfrak{f}(X)$. □

Exercices

Solutions : pages 314-324.

(1) Soit (X, d) un espace métrique. Pour $\varepsilon > 0$, on appelle *ε-chaîne* toute suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ telle que $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ pour tout $0 \leq k < n$. Un espace métrique (X, d) est dit *bien enchaîné* si pour chaque couple $v, w \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une ε-chaîne $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ telle que $v = x_0, w = x_n$. Montrer que

   (a) tout espace métrique connexe est bien enchaîné,

   (b) tout espace métrique compact bien enchaîné est connexe,

   (c) Donner des exemples d'un espace métrique bien enchaîné qui ne soit pas connexe.

(2) Une partie A d'un espace euclidien est dite *convexe* si $x_r \in A$ pour tous $x_0, x_1 \in A$ et $0 \leq r \leq 1$, où

$$x_r := (1-r)\,x_0 + r\,x_1.$$

Montrer que

(a) toute partie convexe d'un espace euclidien est connexe,

(b) toute partie connexe de $\mathbf{R}$ est convexe, c'est-à-dire un intervalle.

(3) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer qu'il existe x_∞ tel que $f(x_\infty) = x_\infty$.

(4) (!) Soit $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ parties connexes d'un espace X et $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n. Soit

$$A_\infty := \bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Montrer que

(a) si A_n est compact pour tout n, alors A_∞ est connexe,

(b) si A_n est fermé pour tout n et $A_\infty \neq \varnothing$, alors A_∞ n'est pas forcément connexe.

(5) Composantes et quasi-composantes.

(a) Quelles sont les composantes de $X := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}$ (avec la topologie induite de la droite) ?

(b) Est-ce que toute composante est ouverte ?

(c) Si $n \in \mathbb{N}_1$ et $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ est une famille de connexes, fermés, non vides, disjoints et $X = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, alors $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont les composantes de X.

(d) Si la famille de fermés, connexes, non vides n'est pas finie, alors la conclusion ci-dessus n'est plus valable[7].

(e) Soit X un espace métrique, $x \in X$. Si $C^{(x)}$ est la composante de x et $Q^{(x)}$ est la quasi-composante de x, alors $C^{(x)} \subset Q^{(x)}$.

(6) Un espace métrique (X, d) est dit *localement connexe* si pour tout $x \in X$ et chaque voisinage V de x il existe un voisinage connexe $W \subset V$. Montrer que

(a) tout espace métrique discret est localement connexe,

(b) X est localement connexe si et seulement si les composantes de chaque partie ouverte de X sont ouvertes dans X,

(c) l'image continue d'un espace localement connexe n'est pas forcément localement connexe,

7. Considérer la famille $\{\{x\} \times \mathbf{R} : x \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^2$.

(d) l'image d'un espace localement connexe par une application quotient est localement connexe,

(e) il existe un espace connexe qui n'est pas localement connexe.

(7) Un espace métrique est dit *localement connexe par arcs,* si pour tout x et $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $v, w \in B(x, \delta)$, alors il existe un arc de diamètre inférieur à ε joignant v et w. Montrer que

(a) un espace localement connexe par arcs est localement connexe,

(b) si un espace métrique (X, d) est compact et localement connexe par arcs, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(w, x) < \delta$, alors il existe un arc de diamètre inférieur à ε joignant w et x.

(8) (!) (Théorème de Hahn-Mazurkiewicz) Tout espace métrique compact, connexe et localement connexe est l'image continue de $[0,1]$. Montrer

(a) la version plus faible de ce théorème, où *localement connexe* est remplacé par *localement connexe par arcs*[8].
Montrer que

(b) le cube de Hilbert est l'image continue de $[0,1]$,

(c) (courbe de Peano) $[0,1]^2$ est l'image continue de $[0,1]$.

(9) (!) Trouver un sous-espace connexe X de $\mathbb{R}^2$ qui est l'union dénombrable disjointe de fermés connexes.

(10) Montrer que

(a) on peut décomposer $\mathbb{R}^2$ en une famille de fermés disjoints, chacun étant de cardinalité $\mathfrak{c}$,

(b) on ne peut pas représenter $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, où $a_n \leq b_n$, où $a_n \leq b_n$ et $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] = \varnothing$ si $n \neq m$,

(c) on ne peut pas représenter $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, où tous les D_n sont des disques fermés non vides et disjoints deux à deux.

(11) Soit X un espace métrique connexe. On appelle *point de coupure* tout $x \in X$ tel que $X \setminus \{x\}$ est disconnexe, c'est-à-dire il existe deux ouverts disjoints non vides A, B tels que $X \setminus \{x\} = A \cup B$; autrement, il est dit *point de non coupure.* Montrer que si X est connexe, x est un point de coupure de X et A, B sont ouverts disjoints non vides tels que $X \setminus \{x\} = A \cup B$, $A \cup \{x\}$ et $B \cup \{x\}$ sont connexes.

8. Indication : Si X est un espace métrique compact, alors d'après le théorème 1.19 du chapitre V, il existe une application continue f de l'ensemble de Cantor C sur X. Prolonger f sur $[0,1]$.

(12) *Caractérisation topologique de l'intervalle fermé.* Montrer qu'un espace métrique est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$ si et seulement s'il est compact, connexe, et le nombre de ses points de non coupure est deux.

(13) Montrer que

(a) tout espace connexe par arcs est connexe,

(b) la partie
$$A := \left\{(x,y) : x > 0, y = \sin(\tfrac{1}{x})\right\}$$
de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs,

(c) $A \cup \{(0,0)\}$ est connexe,

(d) $A \cup \{(0,0)\}$ n'est pas connexe par arcs.

(14) $\star$ En utilisant des arguments liés à la connexité, montrer que

(a) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes,

(b) $[-1,1]$ et $\left\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\right\}$ ne sont pas homéomorphes,

(c) $[-1,1]$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.

(15) $\star$ Montrer que

(a) $\mathbb{R}$ est connexe par arcs,

(b) $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ est connexe par arcs pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ si $n > 1$.

(16) Soit $n > 1$, A une partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

(a) si $p \notin A$, alors pour toute droite L de $\mathbb{R}^n$, telle que $p \notin L$, l'ensemble
$$\{r \in L : [p,r] \cap A \neq \varnothing\},$$
est dénombrable, où $[p,r] := \{(1-\lambda)p + \lambda r : 0 < \lambda < 1\}$,

(b) $\mathbb{R}^n \setminus A$ est connexe par arcs.

(17) (!) Un espace métrique X est connexe par arcs si et seulement si pour tous $x_0, x_1 \in X$ il existe une application continue $l : [0,1] \to X$ telle que $l(0) = x_0$ et $l(1) = x_1$.

(18) Espaces zéro-dimensionnels

(a) $\star$ Montrer que toute composante d'un espace zéro-dimensionnels X est un singleton [9].

(b) Quelles sont les composantes de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,1\}$?

9. Tout espace avec cette propriété s'appelle *héréditairement disconnexe*.

(19) Soit C l'ensemble de Cantor et $f : C \to [0,1]$ une application continue surjective. Montrer que pour tout $0 < r < 1$ et $\varepsilon > 0$ il existe $y \in [r-\varepsilon, r+\varepsilon]$ tel que $\operatorname{card} f^{-1}(y) > 1$.

(20) Prouver le lemme 5.3 : Si $0 < x < y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

si n est pair, alors $[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] > [a_0, a_1, \ldots, a_n, y]$,

si n est impair, alors $[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] < [a_0, a_1, \ldots, a_n, y]$.

(21) Prouver la proposition 5.4 : Si $1 \leq x < y$ et $n \in \mathbb{N}_1$, alors

$$|[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] - [a_0, a_1, \ldots, a_n, y]| \leq \frac{y-x}{xy+n}.$$

CHAPITRE VIII

Espaces vectoriels

Au XIX^e siècle les espaces euclidiens furent utilisés communément de façon intuitive, mais une première théorie de tels espaces en tant qu'espaces vectoriels et affines fut fondée par Hermann Grassmann dans son œuvre célèbre *Ausdehnungslehre* (éditions 1844 et 1862).

FIGURE VIII.1. Hermann Grassmann (1809-1877)

Cependant, la notion moderne des espaces vectoriels fut donnée par Giuseppe Peano dans le *Calcolo geometrico secondo Ausdehnungslehre di H. Grassmann* en 1888. On y trouve, entre autres, les notions d'application linéaire et de norme.

Un *espace vectoriel* X sur (un corps commutatif) $\mathbb{K}$ est un groupe commutatif $(X, +)$ non vide, muni d'une opération externe de multiplication $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times X$ dans X satisfaisant les conditions suivantes :

(VIII.1) $$1x = x \quad \text{(normalisation)},$$

(VIII.2) $$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \text{(associativité)},$$

(VIII.3) $$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad \text{(distributivité)},$$

(VIII.4) $$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \text{(distributivité)},$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in X$. Nous allons considérer surtout des espaces sur $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels et sur $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout *espace vectoriel complexe* (c'est-à-dire sur $\mathbb{C}$) peut également être considéré comme un *espace vectoriel réel* (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$), car si la multiplication de $\mathbb{C} \times X \to X$ vérifiant (VIII.1)-(VIII.4), alors sa restriction à $\mathbb{R} \times X \to X$ vérifie les mêmes conditions.

Soit X un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$). Une partie L non vide de X est appelée *linéaire* ou un *sous-espace vectoriel* de X, si L est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (relativement aux restrictions des opérations d'addition et de multiplication externe). Pour que L soit un sous-espace, il faut et il suffit que L soit stable pour ces opérations, c'est-à-dire

$$x, y \in L \Longrightarrow x + y \in L,$$
$$\lambda \in \mathbb{K},\ x \in L \Longrightarrow \lambda x \in L.$$

Soit J un ensemble. Si X_j est un espace vectoriel sur le même corps pour tout $j \in J$, alors on définit sur le produit $\prod_{j \in J} X_j$, les opérations d'addition et de multiplication composante par composante, c'est-à-dire si $f, g \in \prod_{j \in J} X_j$, alors, par définition,

$$(f+g)(j) \ : \ = f(j) + g(j),$$
$$(\lambda f)(j) \ : \ = \lambda \cdot f(j).$$

Exemple 0.7. Si $\mathbb{K}$ est un corps, alors $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec l'opération interne d'addition $+$ et l'opération $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, où la première composante joue le rôle du corps des scalaires et la seconde celui de l'espace vectoriel. Par conséquent, $\mathbb{K}^n := \prod_{1 \le k \le n} \mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Bases, dimension

Le sous-espace le plus petit incluant une partie A de X s'appelle *l'enveloppe linéaire* de A (ou, *sous-espace engendré par* A) et est noté $\operatorname{vect} A$. Pour se convaincre qu'un tel sous-espace existe, considérons la famille

$$\mathcal{A} = \{L \subset X : L \text{ linéaire, } A \subset L\}.$$

La famille $\mathcal{A}$ n'est pas vide, car $X \in \mathcal{A}$; d'autre part, $\bigcap_{L \in \mathcal{A}} L \in \mathcal{A}$. En conséquence, $\operatorname{vect} A = \bigcap_{L \in \mathcal{A}} L$.

Une *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X est un vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$, où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$. On observe que

Proposition 1.1. *L'enveloppe linéaire de A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est-à-dire*

$$\operatorname{vect} A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$

DÉMONSTRATION. En effet, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est linéaire, incluant A et inclus dans $\operatorname{vect} A$. □

Une partie H de X est dite *linéairement indépendante* (ou *libre*) si pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, tous $x_1, \ldots, x_n \in H$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \Longrightarrow \underset{1 \le k \le n}{\forall} \lambda_k = 0.$$

Proposition 1.2. *Une partie H de X telle que $0 \notin H$, est libre si et seulement si $h \notin \mathrm{vect}(H \setminus \{h\})$ pour tout $h \in H$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que H est libre. Si $h_0 \in \mathrm{vect}(H \setminus \{h_0\})$, alors il existe $n \in \mathbb{N}_1$, $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H \setminus \{h_0\}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $h_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k$, c'est-à-dire

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} \lambda_k h_k = 0, \text{ où } \lambda_0 = -1.$$

Puisque H est libre, $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ en contradiction avec $\lambda_0 = -1$. Si H n'est pas libre, alors il existe $n \in \mathbb{N}_1, x_1, \ldots, x_n \in H$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \text{ et } \sum\nolimits_{k=1}^{n} |\lambda_k| \neq 0.$$

Il existe donc $0 \leq j \leq n$ pour lequel $\lambda_j \neq 0$. Doncs $x_j = -\sum_{k \neq j} \frac{\lambda_k}{\lambda_j} x_k$, donc $h_j \in \mathrm{vect}\{h_k : k \neq j, 0 \leq k \leq n\} \subset \mathrm{vect}(H \setminus \{h_j\})$. □

L'indépendance linéaire est une propriété inductive, c'est-à-dire si $\mathcal{H}$ est une famille totalement ordonnée par l'inclusion de parties libres, alors $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ est libre. Ainsi, grâce au théorème I.2.3 de Zorn-Kuratowski,

Proposition 1.3. *Toute partie libre est incluse dans une partie libre maximale (par rapport à l'inclusion).*

Une partie libre maximale d'un espace vectoriel X s'appelle une *base (de Hamel)* de X.

Proposition 1.4. *Si B est une base de X, alors $X = \mathrm{vect}\, B$.*

DÉMONSTRATION. Effectivement, si au contraire, $x \in X \setminus \mathrm{vect}\, B$ et B est libre, alors $B \cup \{x\}$ est libre, donc B n'est pas maximale. En effet, si $n \in \mathbb{N}_1, b_1, \ldots, b_n \in B$ et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k b_k = 0$, où $b_0 = x$, et $\sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \neq 0$, alors $\lambda_0 = 0$, car dans le cas contraire

$$x = \sum\nolimits_{j=1}^{n} -\tfrac{\lambda_j}{\lambda_k} b_j.$$

Puisque B est libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ également. □

Une partie H de X telle que $\mathrm{vect}\, H = X$ est dite *génératrice*. Donc

Corollaire 1.5. *Une partie d'un espace vectoriel est une base si et seulement si elle est génératrice et libre.*

Proposition 1.6. *Soit B une base d'un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in X$, il existe une unique application $\lambda : B \to \mathbb{K}$ telle que $\{b \in B : \lambda(b) \neq 0\}$ est fini et*

$$x = \sum\nolimits_{b \in B} \lambda(b)\, b.$$

DÉMONSTRATION. L'existence λ est une conséquence de $X = \operatorname{vect} B$. Supposons que $\mu : B \to \mathbb{K}$ est une autre application telle que

$$\sum_{b\in B} \mu(b)\, b = x = \sum_{b\in B} \lambda(b)\, b$$

et $\{b \in B : \mu(b) \neq 0\}$ est fini. Par conséquent, $\sum_{b\in B}(\mu(b) - \lambda(b))\, b = 0$ et $\{b \in B : \mu(b) - \lambda(b) \neq 0\}$ est fini. Puisque B est libre, $\mu(b) - \lambda(b) = 0$ pour tout $b \in B$. □

Théorème 1.7. *Toutes les bases d'un espace vectoriel ont la même cardinalité.*

DÉMONSTRATION. Soient B, W deux bases de X. Comme W est une base de X, pour tout élément b de B, il existe une partie finie (non vide) $W(b)$ de W telle que

(VIII.5) $$b \in \operatorname{vect} W(b).$$

Or $W = \bigcup_{b\in B} W(b)$. Effectivement, puisque B est une base de X, pour tout élément w de W, il existe une partie finie $B(w)$ de B telle que $w \in \operatorname{vect} B(w) \subset \operatorname{vect}(\bigcup_{b\in B(w)} W(b))$. Dès lors W est libre, $w \in \bigcup_{b\in B(w)} W(b)$, c'est-à-dire pour tout $w \in W$, il existe $b \in B$ tel que $w \in W(b)$.

Si B est finie, alors W est finie, par exemple, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ et $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$. Comme pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe des scalaires $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \cdots, \lambda_{i,k}$ tels que $b_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i,j} w_j$, et puisque B est linéairement indépendante, $n \leq k$, donc $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} W$. En changeant les rôles de B et W, on obtient $\operatorname{card} B = \operatorname{card} W$.

Si B est infinie, alors d'après le théorème A.5.6 [(1)],

$$\operatorname{card} W \leq \sum_{b\in B} \operatorname{card} W(b) \leq \operatorname{card} B \cdot \aleph_0 = \operatorname{card} B,$$

car $\operatorname{card} W(b) < \aleph_0$ pour tout $b \in B$. De la même manière, $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} W$, ce qui implique l'équipotence de B et W, grâce au théorème I.5.2 de Cantor-Bernstein. □

La cardinalité d'une base d'un espace vectoriel X s'appelle la *dimension* de X et est notée $\dim X$. Si X est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, alors $\dim X$ est différente de $\dim_{\mathbb{R}} X$, la dimension de X en tant qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.8. Soit X un espace vectoriel complexe de dimension 1. Alors X peut être identifié avec $\mathbb{C}$. Le même X en tant qu'espace réel a la dimension 2, car $\mathbb{C} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Si V, W sont des parties d'un espace vectoriel X et A est un ensemble de scalaires, alors on note

$$\begin{aligned} V + W \;&:= \{v + w : v \in V, w \in W\}, \\ AV \;&:= \{\alpha v : \alpha \in A, v \in V\}. \end{aligned}$$

1. Nous utilisons ici le fait (qui n'a été démontré dans toute sa généralité que dans un appendice) que $\kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$ pour tout cardinal infini κ.

Si deux sous-espaces vectoriels V, W de X sont tels que $V \cap W = \{0\}$, alors $V + W$ est la *somme directe* de V et W, notée $V \oplus W$. Si $X = V \oplus W$, alors V est *supplémentaire* de W (et réciproquement).

Proposition 1.9. *Si $X = V \oplus W$, alors tout $x \in X$ a une unique représentation $x = v + w$, où $v \in V$ et $w \in W$.*

DÉMONSTRATION. Par définition, $x = v + w$. Si également $x = v_0 + w_0$, alors $V \ni v - v_0 = w_0 - w \in W$, donc $v = v_0$ et $w = w_0$, car $V \cap W = \{0\}$. □

Bien entendu, deux sous-espaces supplémentaires d'un même sous-espace ont la même dimension. La *codimension* $\operatorname{codim} H$ d'un sous-espace vectoriel H de X est la dimension de son espace supplémentaire. Un *hyperplan vectoriel* de X est un sous-espace vectoriel de X de codimension 1.

Proposition 1.10. *Pour tout sous-espace L de X, il existe un sous-espace M de X tel que*

$$X = L \oplus M.$$

DÉMONSTRATION. Effectivement, soit B_L une base de L. Alors il existe une base B de X telle que $B_L \subset B$. Soit $M := \operatorname{vect}(B \setminus B_L)$. Il est évident que $X = L + M$. D'autre part, si $x \in L \cap M$, alors $x = 0$. □

2. Applications et formes linéaires

Soit X, Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : X \to Y$ est dite *linéaire* si pour tout $x_0, x_1 \in X$ et $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1).$$

Bien sûr, par récurrence, si f est linéaire, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}_1, x_1, \ldots, x_n \in X$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

On note $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires de X dans Y. On observe que $L(X, Y)$ muni des opérations

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$

où $f, g \in L(X, Y), x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Une application linéaire bijective est appelée un *isomorphisme (linéaire)*. Deux espaces vectoriels X, Y s'appellent *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $f : X \to Y$. Notons que l'application réciproque d'une application linéaire (bijective) est linéaire.

Si $\dim Y = 1$, alors pour tout $0 \neq y \in Y$ forme une base de Y, donc $Y = \mathbb{K}y := \{\lambda y : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Par conséquent, tout espace de dimension 1 peut être identifié avec le corps des scalaires correspondant. On désigne $X^* := L(X, \mathbb{K})$ le *dual (vectoriel)* de X, c'est-à-dire l'espace des *formes linéaires* sur X.

Proposition 2.1. *Si B est une base de X et $f_0 : B \to \mathbb{K}$, alors il existe une unique forme $f \in X^*$ telle que $f(b) = f_0(b)$ pour tout $b \in B$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f(0) = 0$. Si $0 \neq x \in X$ alors il existe $n \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_n \in B$ et $0 \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$$

et cette représentation est unique. Par conséquent,

$$f(x) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_0(b_k)$$

est une forme linéaire sur X. Si $g \in X^*$ vérifie $g(b) = f_0(b)$ pour tout $b \in B$, alors

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_0(b_k) = f(x). \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2. *Si $f \in X^*$ et B est une base de X, alors f est déterminée par sa restriction à B.*

Corollaire 2.3. *Le dual X^* d'un espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à X.*

DÉMONSTRATION. Soit $n = \dim X$ et soit $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ une base de X. Pour tout $1 \leq k \leq n$ soit f_k une forme linéaire sur X définie par

$$f_k(b_j) := \delta_j^k. \tag{VIII.6}$$

Si $f := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$, alors $f(b_j) = \lambda_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$, ce qui montre que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ est linéairement indépendante. D'autre part, si $f \in X^*$ alors $f = \sum_{k=1}^{n} f(b_k) f_k$. En effet, cette égalité est équivalentes à l'égalité sur les éléments d'une base, par exemple, sur $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Or, $\sum_{k=1}^{n} f(b_k) f_k(b_j) = f(b_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$ selon (VIII.6). Enfin, $F : X \to X^*$ définie par $F(b_k) := f_k$ est un isomorphisme linéaire. □

Il est immédiat que

Proposition 2.4. *L'image et l'image réciproque d'une partie linéaire par une application linéaire sont linéaires.*

En particulier, si f est linéaire, alors

$$f^{-1}(0) := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

est linéaire. L'image réciproque d'une application linéaire f, parfois notée $\ker f$, est appelé le *noyau* de f. Autrement dit,

$$\ker f = f^{-1}(0).$$

Soit X un espace vectoriel et L son sous-espace vectoriel. Deux éléments x, y de X sont *L-équivalents* si $y - x \in L$,

$$x \approx_L y \Longleftrightarrow y - x \in L. \tag{VIII.7}$$

Soit X/L l'ensemble des classes de L-équivalence, c'est-à-dire le *quotient* (défini à la page 7) de X par rapport à la relation d'équivalence (VIII.7). Ainsi $z \in X/L$ si et seulement s'il existe $y \in X$ tel que $z = y + L$. Si

(VIII.8) $$(x + L) + (y + L) \ : \ = (x + y) + L,$$

(VIII.9) $$\lambda(x + L) \ : \ = \lambda x + L,$$

alors le quotient X/L avec les opérations définies par (VIII.8) et (VIII.9) devient un espace vectoriel. L'application $q : X \to X/L$ associant à x sa classe d'équivalence $x + L$,

(VIII.10) $$q(x) := x + L,$$

s'appelle la *projection naturelle* sur X/L. Elle est linéaire.

Si X est un espace vectoriel, alors une application linéaire $p : X \to X$ s'appelle une *projection* si $p^2(x) = p(x)$ pour tout $x \in X$. Observons que, contrairement aux projections naturelles, les projections dans le sens actuel ont les valeurs dans le même espace que les arguments. Il existe néanmoins un lien étroit entre les projections et projections naturelles.

Rappelons que $i_X : X \to X$ désigne l'*identité* c'est-à-dire $i_X(x) = x$ pour tout x.

Proposition 2.5. *Si $p : X \to X$ est une projection, alors $i_X - p$ est une projection, et $X = p(X) \oplus (i_X - p)(X)$. Inversement, si*

$$X = V \oplus W,$$

c'est-à-dire pour tout $x \in X$ il existe un unique $(\pi_V(x), \pi_W(x)) \in V \times W$ tel que

$$x = \pi_V(x) + \pi_W(x),$$

alors π_W est une projection et $\pi_W = i_X - \pi_V$.

DÉMONSTRATION. On calcule

$$\begin{aligned}(i_X - p)^2(x) &= (i_X - p)(x - p(x)) \\ &= x - p(x) - p(x) + p^2(x) \\ &= x - p(x) = (i_X - p)(x).\end{aligned}$$

Si $y \in p(X)$, alors $p(y) = y$, donc $(i_X - p)(y) = y - p(y) = 0$, et vice versa, et par conséquent $p(X) \cap (i_X - p)(X) = \{0\}$.

Inversement, $\pi_W(x) = x - \pi_V(x)$ et $\pi_V(x) \in V$ et, en conséquence, $\pi_W(\pi_V(x)) = 0$, donc $\pi_V^2(x) = \pi_V(x)$. □

Proposition 2.6. *Si $p : X \to X$ est une projection, alors il existe une bijection linéaire $f : p(X) \to X/(i_X - p)(X)$ telle que $f \circ p$ est la projection naturelle sur $X/(i_X - p)(X)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f(y) := y + (i_X - p)(X)$ pour tout $y \in (i_X - p)(X)$. Alors $f(p(x)) = p(x) + (i_X - p)(X) = x + (i_X - p)(X)$. En effet, puisque $x - p(x) \in (i_X - p)(X)$, en additionnant $(i_X - p)(X)$ de deux côtés, on obtient

$$x - p(x) + (i_X - p)(X) \subset (i_X - p)(X),$$

d'où $x + (i_X - p)(X) \subset p(x) + (i_X - p)(X)$. En multipliant cette inclusion par -1, on conclut grâce à la linéarité de $(i_X - p)(X)$. □

Proposition 2.7. *Pour que H soit un hyperplan vectoriel de X, il faut et il suffit qu'il existe $0 \neq f \in X^*$ telle que $H = \{f = 0\}$.*

DÉMONSTRATION. Si H est un hyperplan de X, alors il existe $x_0 \in X \setminus H$ tel que $X = H \oplus \mathbb{K}x_0$, ce qui veut dire que tout élément x de X a une unique représentation $x = h_x + \lambda_x x_0$. Par conséquent, $f(x) := \lambda_x$ définit une fonction de X dans $\mathbb{K}$. Il est immédiat que f est une forme linéaire telle que $H = \{f = 0\}$.

Si $0 \neq f \in X^*$, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = 1$. Donc si $x \in X$, alors $x = (x - f(x)\, x_0) + f(x)\, x_0$.

Or, $(x - f(x)\, x_0) \in \{f = 0\}$ et $f(f(x)\, x_0) = f(x)$, ce qui montre que $X = \{f = 0\} \oplus \mathbb{K}x_0$, c'est-à-dire $\{f = 0\}$ est un hyperplan. □

Si X est un espace vectoriel complexe, on distingue son *dual complexe* $X^*_{\mathbb{C}}$ et son *dual réel* $X^*_{\mathbb{R}}$. Effectivement, $X^*_{\mathbb{C}}$ représente toutes les formes linéaires $f : X \to \mathbb{C}$, et $X^*_{\mathbb{R}}$ toutes les formes linéaires $f : X \to \mathbb{R}$, quand X est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Si $f \in X^*_{\mathbb{C}}$, alors $f(\lambda\, x) = \lambda\, f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} f(x) &= \Re f(x) + i\, \Im f(x) \\ &= v(x) + i\, w(x), \end{aligned}$$

où $v(x), w(x) \in \mathbb{R}$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $f(x)$ pour tout $x \in X$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$v(\lambda\, x) = \Re f(\lambda\, x) = \Re(\lambda\, f(x)) = \lambda \Re f(x) = \lambda v(x)\,,$$

ce qui montre que $\Re f$ est une forme linéaire (réelle). Il s'avère que la partie réelle $\Re f$ d'une forme linéaire complexe f détermine f. Plus précisément,

$$f(x) = \Re f(x) - i\, \Re f(i\, x). \tag{VIII.11}$$

En effet, comme $f \in X^*_{\mathbb{C}}$, on a $f(i\, x) = v(i\, x) + i\, w(i\, x)$ et, d'autre part, $f(i\, x) = i\, f(x) = i\, v(x) - w(x)$, ce qui entraîne $\Im f(x) = w(x) = -v(i\, x) = -\Re f(i\, x)$.

3. Prolongement des formes linéaires

Soit X un espace vectoriel réel. Une fonction $p : X \to \mathbb{R}_+$ est dite *positivement homogène* si pour tous $x \in X$ et $t > 0$,

$$p(tx) = tp(x). \tag{VIII.12}$$

Elle s'appelle *sous-additive* si

$$p(x_0 + x_1) \leq p(x_0) + p(x_1) \tag{VIII.13}$$

pour tous $x_0, x_1 \in X$.

Théorème 3.1 (Hahn-Banach (réel)). *Soit X un espace vectoriel réel et soit $p : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction sous-additive, positivement homogène. Si X_0 est un sous-espace vectoriel de X et $f_0 \in X_0^*$ telle que*

$$x \in X_0 \Longrightarrow f_0(x) \le p(x),$$

alors il existe $f \in X^*$ telle que $f(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in X_0$ et

$$x \in X \Longrightarrow f(x) \le p(x).$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que X est réel. Si $X \neq X_0$ alors il existe $h \in X \setminus X_0$. Nous allons prolonger f_0 à une forme linéaire continue f_1 (de la même norme) à $X_0 \oplus \mathbb{R}h$. Pour tous $w, y \in X_0$,

$$\begin{aligned} f_0(w) + f_0(y) &= f_0(w + y) \\ &\le p(w + y) \le p(w - h) + p(y + h). \end{aligned}$$

Donc

$$f_0(w) - p(w - h) \le p(y + h) - f_0(y)$$

pour chaque $w, y \in X_0$. Par conséquent, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_0(w) - p(w - h) \le c \le p(y + h) - f_0(y) \tag{VIII.14}$$

pour chaque $w, y \in X_0$. En remplaçant w et y par $\frac{1}{t}x$ avec $t > 0$ dans (VIII.14), on obtient

$$\begin{aligned} f_0(x) - ct &\le p(x - th), \\ f_0(x) + ct &\le p(x + th), \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in X_0$ et $r \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x + rh) := f_0(x) + cr \le p(x + rh),$$

ainsi f_1 est une forme linéaire sur $X_0 \oplus \mathbb{R}h$ majorée par p.

Considérons maintenant tous les prolongements linéaires continus de f_0 majorés par p. Soit

$$\mathcal{F} := \left\{(L, l) : X_0 \subset L = \operatorname{vect} L \subset X, l \in L', l \le p|_L \text{ et } l|_{X_0} = f_0\right\}$$

muni de l'ordre

$$(L_0, l_0) \le (L_1, l_1) \Longleftrightarrow L_0 \subset L_1 \text{ et } l_1|_{L_0} = l_0.$$

Pour toute partie $\mathcal{L}$ totalement ordonnée de $\mathcal{F}$, on définit sur le sous-espace vectoriel $L_\bullet := \bigcup_{(L,l) \in \mathcal{L}} L$ de X, la forme linéaire

$$l_\bullet(x) := l(x) \text{ si } (L, l) \in \mathcal{L} \text{ et } x \in L.$$

La forme $l_\bullet$ est bien définie et $l_\bullet \in L_\bullet^*$, car si $x \in L_0 \cap L_1$ et $(L_0, l_0), (L_1, l_1) \in \mathcal{L}$, alors $L_0 \subset L_1$ et $l_1|_{L_0} = l_0$ ou $L_1 \subset L_0$ et $l_0|_{L_1} = l_1$, car $\mathcal{L}$ est totalement ordonnée.

En vertu du théorème I.2.3 de Zorn-Kuratowski, il existe un élément maximal (F, f) de $\mathcal{F}$ et d'après la première partie de la preuve, $F = X$ donc $f \in X^*$. $\square$

Soit X un espace vectoriel (réel ou complexe). Une fonction $p : X \to \mathbb{R}_+$ est dite *semi-norme* si elle sous-additive et

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \tag{VIII.15}$$

pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il s'ensuit que $p(0) = 0$. Si $p(x) = 0$ entraîne $x = 0$, alors p est une norme.

Exemple 3.2. Si $f \in X^*$, alors $p(x) := |f(x)|$ définit une semi-norme qui n'est pas une norme sauf le cas de $\dim X = 1$.

Exemple 3.3. Si X est un espace normé et L est une partie linéaire de X, alors $d(x, L) := \inf\{d(x,y) : y \in L\}$ est une semi-norme. Elle est une norme si $\dim L = 0$.

Théorème 3.4 (Hahn-Banach). *Soit X un espace vectoriel réel ou complexe et soit $p : X \to \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Si X_0 est un sous-espace vectoriel de X et $f_0 \in X_0^*$ telle que*

$$x \in X_0 \Longrightarrow |f_0(x)| \le p(x),$$

alors il existe $f \in X^*$ telle que $f(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in X_0$ et

$$x \in X \Longrightarrow |f(x)| \le p(x).$$

DÉMONSTRATION. Le cas réel est une conséquence du théorème IX.3.1. Si X est un espace vectoriel complexe et $f_0 \in X_0^*$, alors $\Re f_0$ est une forme linéaire réelle et $\Re f_0(x) \le |f_0(x)| \le p(x)$ pour tout $x \in X_0$. D'après le cas réel, il existe une forme linéaire réelle v sur X qui prolonge $\Re f_0$ et telle que $v(x) \le p(x)$ pour tout $x \in X$. La forme

$$f(x) = v(x) - i\, v(i\, x)$$

est un prolongement recherché de f_0. Effectivement, pour tout $x \in X$ il existe $\alpha(x) \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha(x)| = 1$ et $|f(x)| = \alpha(x) f(x)$. Dès lors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \alpha(x) f(x) = f(\alpha(x)x) \\ &= v(\alpha(x)x) \le p(\alpha(x)x) = |\alpha(x)|\, p(x) = p(x). \end{aligned}$$

□

4. Intérieur et fermeture algébriques

Soit X un espace vectoriel et A une partie de X. On dit qu'un élément x appartient à l'*intérieur algébrique* de A,

$$x \in \operatorname{int}_a A$$

si pour tout $h \in X$ il existe $t_h > 0$ tel que $x + th \in A$ pour tout $0 \le t < t_h$.

On observe que pour $A, B \subset X$,

$$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{int}_a A \subset \operatorname{int}_a B, \tag{VIII.16}$$

$$\operatorname{int}_a A \subset A, \tag{VIII.17}$$

$$\operatorname{int}_a(A \cap B) = \operatorname{int}_a A \cap \operatorname{int}_a B, \tag{VIII.18}$$

mais l'opération int_a n'est pas idempotente.

Lemme 4.1. *Si X est un espace vectoriel, $0 \neq f \in X^*$, $B \subset X$ et $x \in \operatorname{int}_a B$, alors $f(x) > \inf_B f$.*

DÉMONSTRATION. Si $0 \neq f \in X^*$, alors il existe $h \in X$ tel que $f(h) < 0$. Comme $x \in \operatorname{int}_a B$, il existe $t_h > 0$ tel que $x + th \in B$ pour tout $0 \leq t \leq t_h$. Par conséquent,

$$\inf_B f \leq f(x + t_h h) = f(x) + t_h f(h) < f(x).$$

□

Exemple 4.2. Soit

$$A = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : r > 0 \Longrightarrow s < \sqrt{r}\}.$$

Alors $\operatorname{int}_a A = A \setminus \{(0, s) \in \mathbb{R}^2 : s > 0\}$, tandis que $\operatorname{int}_a \operatorname{int}_a A = A \setminus \{(0, s) \in \mathbb{R}^2 : s \geq 0\}$. Ainsi $(0, 0) \in \operatorname{int}_a A \setminus \operatorname{int}_a \operatorname{int}_a A$.

Cette structure algébrique a un lien étroit à la topologie radiale de l'exercice III.34 (voir les exercices A.8 et A.9).

Cependant l'intérieur algébrique est idempotent sur les convexes.

Une partie A d'un espace vectoriel X sur $\mathbb{K}$ est dite *convexe* si pour tous $x_0, x_1 \in A$ et $0 \leq r \leq 1$,

$$x_r := (1 - r)\, x_0 + r\, x_1 \in A. \tag{VIII.19}$$

L'espace tout entier est convexe ; l'intersection de chaque famille de convexes est convexe. En conséquence, pour toute partie B de X, le plus petit convexe incluant B existe (2) ; on l'appelle *l'enveloppe convexe* de B (ou bien la *convexifiée* de B) et on la note $\operatorname{conv} B$. Constatons que, pour tous $A, B \subset X$,

$$A \subset B \Longrightarrow \operatorname{conv} A \subset \operatorname{conv} B,$$
$$A \subset \operatorname{conv} A,$$
$$\operatorname{conv}(\operatorname{conv} A) = \operatorname{conv} A,$$

ainsi que $\operatorname{conv} \varnothing = \varnothing$ et $\operatorname{conv} X = X$.

Rappelons qu'une *chaîne* est une partie totalement ordonnée (ici, par inclusion), c'est-à-dire dont deux éléments quelconques sont comparables.

Proposition 4.3. *Si $\{A_i : i \in I\}$ est une chaîne de convexes, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est convexe.*

On montre sans peine par récurrence qu'une partie A est convexe si et seulement si pour tout n et tous $x_0, \ldots, x_n \in A$ et $\alpha_0 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0$ avec $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, alors $\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \in A$.

Proposition 4.4. *Si B est une partie d'un espace vectoriel, alors*

$$\operatorname{conv} B = \{\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i : \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1,\ x_0, \ldots, x_n \in B,\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{VIII.20}$$

---

2. En effet, la famille $\mathcal{B} = \{A \text{ convexe} : B \subset A \subset X\}$ est non vide ($X \in \mathcal{B}$ et $\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \in \mathcal{B}$, donc $\operatorname{co} B = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} A$.

DÉMONSTRATION. En effet, l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de B est convexe et inclut B donc inclut $\operatorname{conv} B$. D'autre part, toute combinaison convexe d'éléments de B appartient à $\operatorname{conv} B$. $\square$

Proposition 4.5. *Si A est un convexe, alors*

$$\operatorname{int}_a \operatorname{int}_a A = \operatorname{int}_a A.$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \operatorname{int}_a A$ et $h \in X$. Alors il existe $t_0 > 0$ tel que $x+th \in A$ pour tout $0 \leq t \leq t_0$. Nous allons montrer que $x+th \in \operatorname{int}_a A$ si $0 < t < t_0$, ce qui équivaut à $x \in \operatorname{int}_a \operatorname{int}_a A$, car h est arbitraire.

Fixons $0 < t < t_0$ et $k \in X$. Il faut trouver $s_0 > 0$ tel que $x+th+sk \in A$ pour $0 < s < s_0$. Comme $x \in \operatorname{int}_a A$, il existe $r_0 > 0$ tel que $x + rk \in A$ pour $0 < r < r_0$. Par conséquent, pour tout $0 < r < r_0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$v(r,\alpha) = (1-\alpha)(x+rk) + \alpha(x+t_0h) \in A$$

Il suffit de trouver des conditions telles que pour $s > 0$, il existe r et α tels que

$$x + th + sk = v(r,\alpha).$$

En comparant les termes, on obtient $\alpha = \frac{t}{t_0}$ (qui est inférieur à 1) et $s = (1 - \frac{t}{t_0})r$. Donc $s_k = (1-\frac{t}{t_0})r_r > 0$. $\square$

Dualement, la *fermeture algébrique* de A est définie par

$$\operatorname{cl}_a A = (\operatorname{int}_a A^c)^c.$$

Proposition 4.6. *Pour que $x \in \operatorname{cl}_a A$ il faut et il suffit qu'il existe $h \in X$ et une suite $(t_n)_n$ de réels positifs tels que $x + t_nh \in A$.*

DÉMONSTRATION. Par définition, $x \in \operatorname{cl}_a A$ si et seulement si $x \notin \operatorname{int}_a A^c$, donc pour tout $h \in X$ et tout $s > 0$, l'intervalle $\{x + th : 0 \leq t < s\} \cap A \neq \varnothing$, c'est-à-dire il existe $(t_n)_n$ de réels positifs tels que $x + t_nh \in A$. $\square$

Il ne faut pas croire que $\operatorname{cl}_a \operatorname{cl}_a A = \operatorname{cl}_a A$ pour tout convexe A. Effectivement,

Exemple 4.7. Soit X un espace vectoriel réel de dimension $\aleph_0$. Notons $\{e_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ une base de X. Alors pour tout $x \in X$, il existe une unique suite $(x(n))_n$ telle que $\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ est fini et $x = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} x(n)\, e_n$. Définissons

$$m(x) := \sup\{n \in \mathbb{N}_1 : x(n) \neq 0\} < \infty,$$

(ainsi $m(0) = 0$) et considérons l'ensemble

$$A = \{x : m(x) > 0 \text{ et } \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}_1} x(n) \geq \frac{1}{m(x)}\}.$$

La partie A est convexe, car pour $x, y \in A$ et $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}_1} x(n) + \alpha \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}_1} y(n) &\geq \frac{1-\alpha}{m(x)} + \frac{\alpha}{m(y)} \\ &\geq \frac{1}{m(x) \vee m(y)} \geq \frac{1}{m((1-\alpha)x + \alpha y)}.\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{cl}_a A = \{x : \sum_{n\in\mathbb{N}_1} x(n) > 0\}$. En effet, si $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} x(n) > 0$ alors il existe $N > m(x)$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} x(n) > \frac{1}{N}$. Par conséquent, $m(x+te_N) = N$ pour tout $t > 0$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} x(n) + t > \frac{1}{N}$, et ainsi $x + te_N \in A$ pour t assez petit. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} y(n) \le 0$, alors $y \notin \mathrm{cl}_a A$, car si $h \in X$, alors ou $m(y+th) = m(y+h) = 0$ pour tout t, ou il existe $t > 0$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}_1} y(n) + t \sum_{n\in\mathbb{N}_1} h(n) < \dfrac{1}{m(y+th)}$. Bien sûr, $0 \in \mathrm{cl}_a \mathrm{cl}_a A$, car $te_0 \in \mathrm{cl}_a A$ pour tout $t > 0$.

5. Séparation des convexes

Le but de cette section est de construire des semi-normes associées à des parties convexes. Soit A une partie d'un espace vectoriel X. La *jauge* de A est définie sur X par

$$j_A(x) = \inf\{r > 0 : x \in rA\}. \tag{VIII.21}$$

Évidemment, $j_A(x) \ge 0$ pour chaque A et tout $x \in X$. D'autre part, pour toute partie A non vide, $j_A(0) = 0$. Observons que $A \subset D$ implique que $j_A \ge j_D$, en particulier $j_A \ge j_{[0,1]A}$.[3] En fait,

$$j_A = j_{[0,1]A}.$$

Effectivement, si $t > j_{[0,1]A}(x)$, alors il existe $r < t, \lambda \in [0,1]$ et $a \in A$ tels que $x = r\lambda a$, donc si $s := r\lambda$ et $x \in sA$, alors $t \ge s \ge j_A(x)$.

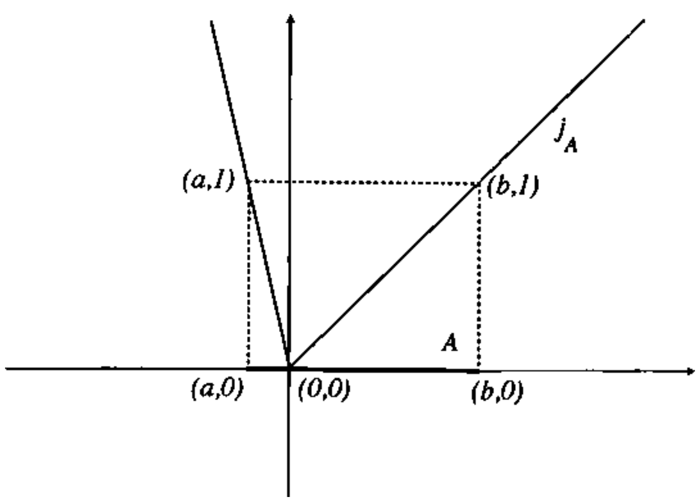


FIGURE VIII.2. La jauge $j_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de l'intervalle $A = [a, b]$ est la même que de l'ensemble $A = \{a, b\}$.

3. Rappelons que $[0,1]A := \{\lambda a : \lambda \in [0,1], a \in A\}$.

Proposition 5.1. *Toute jauge est positivement homogène.*

DÉMONSTRATION. En effet, $s > t\, j_A(x)$ si et seulement si $\frac{s}{t} > j_A(x)$, c'est-à-dire il existe $r < \frac{s}{t}$ tel que $x \in rA$, de même $tx \in rtA$. Comme $rt < s$, ceci revient à $s > j_A(tx)$. □

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel est *radiale* si $0 \in \operatorname{int}_a A$. Une partie A d'un espace vectoriel est dite *symétrique* si $-A = A$.

Pour que j_A soit finie, il suffit que pour tout $x \neq 0$ il existe $t > 0$ tel que $tx \in A$. Donc si A est une partie radiale, alors $j_A(x) < \infty$ pour tout $x \in X$.

Proposition 5.2. *Si A est une partie convexe, alors j_A est convexe.*

DÉMONSTRATION. Comme j_A est positivement homogène, il suffit donc de montrer qu'elle est sous-additive sur $\{j_A < +\infty\}$.

Soit $+\infty > r > j_A(x_0) + j_A(x_1)$. Il existe r_0, r_1 tels que $r = r_0 + r_1$, $j_A(x_0) < r_0$ et $j_A(x_1) < r_1$. D'après la définition de la jauge, il existe $0 < s_0 < r_0$ et $0 < s_1 < r_1$ tels que $x_0 \in s_0 A$ et $x_1 \in s_1 A$. Il s'ensuit que $\frac{1}{s_0}x_0 \in A$ et $\frac{1}{s_1}x_1 \in A$ et, d'après la convexité de A,

$$\frac{x_0 + x_1}{s_0 + s_1} = \frac{s_0}{s_0 + s_1}\frac{x_0}{s_0} + \frac{s_1}{s_0 + s_1}\frac{x_1}{s_1} \in A,$$

car $\dfrac{s_0}{s_0 + s_1} + \dfrac{s_1}{s_0 + s_1} = 1$. En conclusion, $j_A(x_0 + x_1) \leq s_0 + s_1 < r$. □

Corollaire 5.3. *Si A est une partie convexe et radiale, alors j_A est sous-additive.*

Il est évident que $A \subset \{j_A \leq 1\}$. D'autre part,

$$[0,1]\, A \subset A \Longrightarrow \{j_A \leq 1\} \subset \operatorname{cl}_a A. \tag{VIII.22}$$

Effectivement, si $x \notin \operatorname{cl}_a A$, alors en particulier il existe $\delta > 0$ tel que $(1 - \delta)x = x - \delta x \notin A$ et comme $[0,1]\, A \subset A$, alors $x \notin rA$ pour tout $0 \leq r \leq \frac{1}{1-\delta}$, ainsi $j_A(x) > 1$.

Nous sommes maintenant en mesure d'affronter la question de séparation des convexes disjoints par des formes linéaires.

Théorème 5.4. *Soit A, B deux parties convexes d'un espace vectoriel réel X telles que $A \cap B = \varnothing$ et*

$$\operatorname{int}_a(A - B) \neq \varnothing. \tag{VIII.23}$$

Alors il existe une forme linéaire non nulle f telle que

$$\sup\nolimits_A f \leq \inf\nolimits_B f. \tag{VIII.24}$$

DÉMONSTRATION. Comme $A \cap B = \varnothing$, on a $0 \notin A - B$ et d'après l'hypothèse, il existe $x_0 \in X$ tel que $-x_0 \in \operatorname{int}_a(A - B)$. Par conséquent, $0 \in \operatorname{int}_a(A - B + x_0)$ et $x_0 \notin A - B + x_0$.

Posons $C = A - B + x_0$. Alors C est un convexe, $0 \in \operatorname{int}_a C$ donc j_C est sous-additive et positivement homogène. Puisque $x_0 \notin C$, en vertu de (VIII.22), $j_C(x_0) \geq 1$. Définissons sur $\mathbb{R}\{x_0\}$ la forme linéaire suivante :

$$f_0(tx_0) = t.$$

En particulier, $f_0(x_0) = 1 \leq j_C(x_0)$ et, comme f est linéaire et j_C est positivement homogène, $f_0 \leq j_C$ sur $\mathbb{R}\{x_0\}$. Donc, en vertu du théorème VIII.3.1 de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire f sur X qui prolonge f_0 de telle sorte que $f(x) \leq j_C(x)$ pour $x \in X$. Par conséquent, $f \neq 0$. Or, $f(x_0) = 1 \geq \sup_C j_C \geq \sup_C f$ et

$$\sup_{x\in C} f(x) = \sup_{a\in A} \sup_{b\in B} (f(a) - f(b) + f(x_0)),$$

ce qui donne (VIII.24). □

L'hypothèse (VIII.23) est fondamentale.

Proposition 5.5. *Dans tout espace vectoriel de dimension infinie, il existe un convexe L tel que L^c est convexe,* $\operatorname{cl}_a L = \operatorname{cl}_a L^c = X$, *donc* $\operatorname{int}_a L = \operatorname{int}_a L^c = \varnothing$.

Démonstration. Soit X un espace vectoriel réel de dimension infinie. Pour simplifier la démonstration, on supposera que $\dim X$ est dénombrable (cette dernière hypothèse n'est pas essentielle).

Soit $(e_n)_n$ une base de X. Tout élément x de X admet une représentation unique

$$x = \sum_{n=0}^{n(x)} \alpha_n e_n,$$

où $n(x)$ est le plus petit indice tel que $\alpha_n = 0$ si $n > n(x)$. Définissons

$$L = \{x : \alpha_{n(x)} > 0\}.$$

On constate facilement que L est convexe, $L^c = \{x : \alpha_{n(x)} < 0\}$ est aussi convexe. Pour montrer que $\operatorname{cl}_a L = X$, prenons $x \in X \setminus L$. Pour tout $t > 0$, le vecteur $x + te_{n(x)+1}$ appartient à L, donc $x \in \operatorname{cl}_a L$. La démonstration de $\operatorname{cl}_a L^c = X$ est identique. □

Les deux parties convexes L et L^c ne peuvent pas être séparées par une forme linéaire non nulle. En effet, pour chaque $A \subset X$ et chaque forme linéaire f sur X, on a $\sup_A f = \sup_{\operatorname{cl}_a A} f$. Donc si on avait $\sup_L f < \inf_{L^c} f$ avec $f \neq 0$, alors on aurait $\sup_L f < \infty$ car $L^c \neq \varnothing$. D'autre part, $\operatorname{cl}_a L = X$, donc $\sup_L f = \infty$.

Exercices

Solutions : pages 324-329.

(1) ⋆ Soit X, Y deux espaces vectoriels (sur $\mathbb{K}$). Soit L une partie linéaire de $X \times Y$, c'est-à-dire une relation (linéaire) entre X et Y. Montrer que

(a) pour tout partie linéaire A de X, l'image LA (de A par L) est linéaire,

(b) si $f : X \to Y$ est une application linéaire, alors $f(A)$ est linéaire pour toute partie linéaire A de X,

(c) si $f : X \to Y$ est une application linéaire, alors $f^{-1}(B)$ est linéaire pour toute partie linéaire B de Y.

(2) Soit X un espace vectoriel réel, $f \in X^*$ et L une partie linéaire de X. Montrer que si $\sup\{f(x) : x \in L\} < \infty$, alors $f(L) = \{0\}$.

(3) Si $f, f_1, \ldots, f_n \in X^*$, alors $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f$ si et seulement si $f \in \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_n\}$.

(4) Si X_j est un espace vectoriel pour $1 \leq j \leq n$, alors $f \in (\prod_{j=1}^n X_j)^*$ si et seulement si il existe $f_j \in X_j^*$ telles que

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j).$$

(5) Quelle est la dimension de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$?

(6) Soit X un espace vectoriel. Montrer que

(a) si $\dim X = \aleph_0$ alors $\dim(X^*) > \aleph_0$,

(b) si $\dim X \geq \aleph_0$ alors $\dim(X) < \dim(X^*)$. (4)

(7) Décrire les convexes A dans $\mathbb{R}^n$ tels que $0 \notin A$ et maximaux par rapport à l'inclusion.

(8) Observer que dans $\mathbb{R}^2$ la famille des A tels que $\operatorname{cl}_\alpha A \subset A$, coïncide avec celle des fermés pour la topologie radiale (l'exercice III.34).

(9) Soit X un espace vectoriel et $x_0, x_1 \in X$. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, soit

$$x_\alpha := (1 - \alpha)\, x_0 + x_1.$$

Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est dite *convexe* si pour tous $x_0, x_1 \in \operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ et $0 < \alpha < 1$,

$$f(x_\alpha) \leq (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1);$$

strictement convexe si l'inégalité dans la formule ci-dessus est stricte. Montrer que

(a) si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son *épigraphe* $\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ est une partie convexe,

(b) si $x_0 < x < x_1$ et $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ est convexe, alors

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

(c) une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue,

---

4. Hors programme. On peut généraliser les raisonnements utilisés pour la question précédente, mais ils requièrent des connaissances plus avancées (c.f. l'annexe A).

(d) une fonction dérivable f est convexe si et seulement si f' est croissante,

(e) $f \in C^1$ est convexe si et seulement si pour tous v, w,

$$f(w) - f(v) \geq f'(v)(w - v),$$

strictement convexe si et seulement si pour tous $v \neq w$, l'inégalité dans la formule ci-dessus est stricte,

(f) $f \in C^2$ est convexe si et seulement si f'' est positive,

(g) la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe.

(10) (Inégalité de Young) Deux nombres réels $p, q > 1$ sont dits *conjugués* si $p + q = pq$. Montrer que si $a, b \in \mathbf{R}_+$ et p, q sont conjugués, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{VIII.25}$$

avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

CHAPITRE IX

Espaces vectoriels normés

L'*analyse fonctionnelle* naît au début du vingtième siècle à partir des méthodes abstraites introduites en théorie des équations intégrales par Ivar Fredholm (1866-1927) et Vito Volterra (1860-1940) et développées par David Hilbert et son école dans les années suivantes. L'apport de Jacques Hadamard (1865-1963) vient de son approche du *calcul des variations*(1). L'année 1907 apporte les publications de Frigyes Riesz sur les espaces des suites carré-sommables l_2 et les espaces $L_2([0, 2\pi])$ de Ernst S. Fischer (1875-1954) sur les coefficients de Fourier abstraits et de Maurice Fréchet sur les aspects métriques des espaces fonctionnels.

FIGURE IX.1. David Hilbert (1862-1943), Hugo Steinhaus (1887-1972) et Stefan Banach (1892-1945).

En 1932 paraissent deux livres fondamentaux : *Théorie des opérations linéaires* de Stefan Banach couronne une décennie des travaux de l'*École polonaise* en analyse fonctionnelle (autour de Hugo Steinhaus)(2), et *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* de John von Neumann (1903-1957) qui contribuera beaucoup à la diffusion des idées de l'analyse fonctionnelle.

L'étape suivante du développement de l'analyse fonctionnelle (qui dépasse l'objet de ce cours) est l'apparition en 1935, de façon indépendante dans des œuvres de Von Neumann et de Andrey N. Kolmogorov (1903-1987), des espaces vectoriels topologiques, c'est-à-dire des espaces vectoriels munis des

1. Hadamard, ainsi que son élève Fréchet et Émile Borel voient en Volterra le père de l'analyse fonctionnelle.

2. Le nom *espaces de Banach* fut proposé par Maurice Fréchet.

topologies (en général non métrisables), pour lesquelles les opérations linéaires sont continues. L'espace des distributions de Laurent Schwartz en est un éminent exemple.

Et ce n'est pas fini. Naissent les espaces vectoriels de convergence jouissant d'une stabilité structurelle (3), qui faisait défaut aux espaces vectoriels topologiques (*cf.*, [**3**]).

1. Espaces normés

Soit X un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ valué, c'est-à-dire muni d'un *module* $|\cdot|$. Le module définit une norme $d(r,s) := |r-s|$ sur $\mathbb{K}$. Nous allons considérer les deux cas les plus communs, à savoir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dans ces deux cas, le corps valué constitue un espace métrique complet.

Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ est dite une *norme* si pour tous $x, x_0, x_1 \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\text{(i)} \qquad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

$$\text{(ii)} \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, ,$$

$$\text{(iii)} \qquad \|x_0 + x_1\| \leq \|x_0\| + \|x_1\| \, .$$

Autrement dit, toute norme est *positivement homogène*, c'est-à-dire vérifie (ii) et satisfait l'inégalité *triangulaire* (iii). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit *normé*.

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur X, alors la fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

est une métrique. La métrique provenant d'une norme est *invariante* par *translation* et par *homothétie*, c'est-à-dire

$$d(x+h, y+h) = d(x,y) \text{ et } d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$$

pour tous $x, y, h \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Ceci implique que, dans un espace normé, pour tout $x \in X$ et $r > 0$, la boule de rayon r autour de x vérifie

$$B(x,r) = x + B(0,r) = x + rB(0,1).$$

Dans un espace normé la boule $B(x,r)$ est convexe pour tout $x \in X$ et $r > 0$ (Voir l'exercice 2). Bien entendu, pour toute partie A non vide de X,

$$B(A,r) = A + B(0,r) = A + rB(0,1).$$

Ainsi, compte tenu de l'exercice II.17, pour toute partie non vide

$$\text{(IX.1)} \qquad \operatorname{cl} A = \bigcap\nolimits_{r>0} (A + B(0,r)).$$

3. Il existe une convergence vectorielle, mais en général pas de topologie vectorielle, la moins fine sur l'espace dual, pour laquelle le couplage canonique est continu.

Puisque toute métrique est une fonction continue [4], la norme $\|x\| = d(x,0)$ est continue.

Proposition 1.1. *Dans un espace normé* $(X, \|\cdot\|)$ *sur* $\mathbb{K}$, *l'addition* $+ : X \times X \to X$ *et la multiplication* $\cdot : X \times \mathbb{K} \to X$ *sont continues.*

DÉMONSTRATION. Si $((x_n, y_n))_n$ converge vers (x,y), alors $(x_n)_n$ converge vers x et $(y_n)_n$ converge vers y. Ainsi

$$\begin{aligned} d(x+y, x_n+y_n) &= \|x+y-(x_n+y_n)\| \\ &= \|(x-x_n)+(y-y_n)\| \leq d(x,x_n)+d(y,y_n), \end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x+y$. Si $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, alors, en particulier, $\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ est bornée et

$$\begin{aligned} &\|\lambda x - \lambda_n x_n\| \\ &= \|\lambda x - \lambda x_n + \lambda x_n + \lambda_n x_n\| \\ &\leq |\lambda|\,\|x-x_n\| + |\lambda - \lambda_n|\,\|x_n\|, \end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to\infty}\lambda_n x_n = \lambda x$. □

Exemple 1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ peut être muni de chacune des normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ (voir l'exercice II.5) [5]. D'après (II.20),

$$\tfrac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit X un espace vectoriel et $\|\cdot\|_\dagger$, $\|\cdot\|_\ddagger$ deux normes sur X. On dit que ces *normes* sont *équivalentes* s'il existe deux constantes strictement positives a, b telles que pour tout $x \in X$,

$$a\|x\|_\dagger \leq \|x\|_\ddagger \leq b\|x\|_\dagger.$$

Bien entendu, $a \leq b$. Comme le nom suggère, cette relation est une relation d'équivalence. D'après l'exercice II.5, les trois normes de l'exemple 1.2 sont équivalentes.

Deux normes s'appellent *topologiquement équivalentes* si les topologies engendrées par les métriques correspondantes coïncident.

Voici d'autres exemples fondamentaux d'espaces normés.

Exemple 1.3. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace vectoriel l_p des suites x de scalaires telles que

$$\|x\|_p := \left(\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

---

4. La métrique est continue jointement. Cependant il suffit utiliser ici la continuité séparée en une variable.

5. Ainsi que $\mathbb{C}^n$ avec les mêmes normes.

est muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Si $p = 1$, alors

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1 &= \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)+y(n)| \\ &\le \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} (|x(n)|+|y(n)|) \le \|x\|_1 + \|y\|_1 , \end{aligned}$$

donc $\|\cdot\|_1$ est une norme. Pour $1 < p < \infty$, l'inégalité (D.6) de Minkowski de l'annexe D montre que $\|\cdot\|_p$ est une norme

Exemple 1.4. L'espace vectoriel l_∞ des suites bornées x de scalaires telles que

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Effectivement,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\infty &= \sup\{|x(n)+y(n)| : n\in\mathbb{N}\} \\ &\le \sup\{|x(n)| : n\in\mathbb{N}\} + \sup\{|y(n)| : n\in\mathbb{N}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty . \end{aligned}$$

Le sous-espace vectoriel de l_∞ consistant des suites convergentes est noté c. On note c_0 son sous-espace composé des suites convergentes vers 0.

Une suite $(e_n)_n$ d'un espace normé (séparable) X s'appelle une *base de Schauder* si tout $x \in X$ admet une unique représentation

$$x = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\, e_n,$$

c'est-à-dire pour tout $x \in X$, il existe une unique suite de scalaires $(\alpha_n(x))_n$ telle que $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x)\, e_n$.[6] Appelons $\alpha_n(x)$ le n-ième *coefficient* de x par rapport à la base de Schauder $(e_n)_n$.

Exemple 1.5. La suite $(e_k)_k$ de l_1 définie par[7] $e_k(n) := \delta_k^n$ est une base de Schauder de l_1. Si $x \in l_1$, alors $x(n)$ est le n-ième coefficient de x par rapport à cette base. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &\le \lim\nolimits_{N\to\infty} \left\| x - \sum\nolimits_{n=1}^{N} x(n)\, e_n \right\|_1 \\ &\le \lim\nolimits_{N\to\infty} \sum\nolimits_{n=N+1}^{\infty} |x(n)| = 0, \end{aligned}$$

car la série $\sum_n^\infty |x(n)|$ est convergente. Si $x \in l_1$ et $x = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n\, e_n$, alors

$$|x(k) - \alpha_k| \le \left\| \sum\nolimits_{n=1}^{N} (x(n) - \alpha_n) e_n \right\|_1$$

pour tout $k \le N$ et $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |x(n) - \alpha_n| = 0$, ce qui prouve l'unicité.

6. Il existe des espaces séparables de Banach sans bases de Schauder. Ce fait fut prouvé en 1972 par Per Enflo (né en 1944) comme réponse à un problème formulé par Stanisław Mazur (1905-1981) en 1936.

7. Le symbole de Kronecker $\delta_k^n := 1$ si $n = k$ et $\delta_k^n := 0$ si $n \ne k$.

Exemple 1.6. La suite $(e_k)_k$ est aussi une base de Schauder dans c_0, car définissant pour $y \in c_0$ le n-ième coefficient par $y(n)$,

$$\left\| y - \sum\nolimits_{n=1}^{N} y(n) e_n \right\|_\infty = \sup\{|y(n)| : n > N\}$$

converge vers 0. Effectivement, $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$ et si $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, alors

$$|y(k) - \alpha_k| \le \left\| \sum\nolimits_{n=1}^{N} (y(n) - \alpha_n) e_n \right\|_\infty = \sup_{n \le N} |y(n) - \alpha_n|$$

pour $k \le N$. Cette expression tend vers 0 avec N, car les deux sommes partielles tendent vers y, d'où l'unicité.

Exemple 1.7. La suite $(e_n)_n$ (définie par $e_n(k) := \delta_k^n$) est une base de Schauder dans l_p pour $1 < p < \infty$. Effectivement, tout $x \in l_p$ est la limite $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n$ en $\|\cdot\|_p$ est la représentation $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$ est unique.

2. Applications et formes linéaires continues

La classe la plus importante des applications entre les espaces normés est, naturellement, celle des applications linéaires continues, car elles préservent à la fois les opérations linéaires et les invariants topologiques.

Deux espaces normés X et Y sont dits *isomorphes* (*linéairement homéomorphes*), ce qu'on désigne par

$$X \approx Y,$$

s'il existe une application bijective, linéaire et continue $h : X \to Y$ telle que $h^{-1} : Y \to X$ est continue. Une telle application est appelée *isomorphisme* (*homéomorphisme linéaire*).

Si X et Y sont deux espaces normés sur le même corps, alors l'espace vectoriel des applications linéaires continues est noté $L_c(X, Y)$. Nous avons vu que l'espace des applications linéaires $L(X, Y)$ est un espace vectoriel. Puisque la somme de deux applications continues est continue et le produit d'une application continue par un scalaire est continue, $L_c(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $L(X, Y)$. On vérifie facilement (l'exercice 5) que

$$\|f\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \tag{IX.2}$$

est une *norme* sur $L_c(X, Y)$. Il est immédiat que

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \le 1\}. \tag{IX.3}$$

L'ensemble des formes linéaires continues sur un espace normé X s'appelle le *dual (topologique)* de X et est souvent noté X' au lieu de $L_c(X, \mathbb{K})$. Bien entendu, X' est un sous-espace vectoriel de X^*.

Proposition 2.1. *Toute application linéaire continue en* 0 *est lipschitzienne, donc continue.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $f \in L(X,Y)$ et f est continue en 0, alors en particulier, d'après (II.11) avec $\varepsilon := 1$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup\{\|f(x)\| : \|x\| < \delta\} \leq 1. \tag{IX.4}$$

En posant $x := \delta v$ nous obtenons $\sup\{\|f(\delta v)\| : \|\delta v\| < \delta\} \leq 1$ ce qui revient à $\sup\{\delta\,\|f(v)\| : \delta\|v\| < \delta\} \leq 1$, parce que f est linéaire et la norme est positivement homogène. Ainsi $\sup\{\|f(v)\| : \|v\| \leq 1\} \leq \frac{1}{\delta}$ d'après la continuité de la norme. Si $\|x\| = 1$, alors

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|. \tag{IX.5}$$

Comme pour tout $x \in X$, il existe $v \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda v$ et $\|v\| = 1$, l'inégalité (IX.5) est valable pour tout $x \in X$ à cause de la positive homogénéité de la norme. Par conséquent,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x - x_0)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x - x_0\|$$

pour tous x et x_0 dans X. □

Exemple 2.2 (forme linéaire discontinue). Soit X le sous-espace de l_∞ (exemple 1.4) consistant des suites $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x(n) = 0$ pour $n \geq n(x)$.

Bien entendu, $\|x\|_\infty = \max\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble

$$E := \{e_n : n \in \mathbb{N}\},$$

où $e_n(k) := \delta_n^k$, est une base de Hamel de X. On définit $f(e_n) := n$, ce qui détermine une forme linéaire sur X. Bien sûr, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} e_n = 0$, mais $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n} e_n) = 1$ pour tout n, tandis que $f(0) = 0$.

Une partie D d'un espace normé X est dite *bornée* s'il existe $r > 0$ tel que $D \subset B_r(0)$. Soit X, Y deux espaces normés. Une application linéaire $f : X \to Y$ est dite *bornée* si $\sup\{\|f(x)\| : x \in D\} < \infty$ pour toute partie bornée D de X.

Proposition 2.3. *Une application linéaire est continue si et seulement si elle est bornée.*

DÉMONSTRATION. Si $f \in L_c(X,Y)$, alors en particulier, f est continue en 0, donc vérifie (IX.4). Si D est une partie bornée, alors il existe $r > 0$ tel que $D \subset B_r(0)$. Or, $\sup\{\|f(x)\| : \|x\| < r\} \leq \frac{r}{\delta}$ grâce à la linéarité de f. En effet, si $\|x\| < r$ alors $\|\frac{\delta}{r}x\| < \delta$, donc $\frac{\delta}{r}\|f(x)\| = \left\|f(\frac{\delta}{r}x)\right\| \leq 1$.

Réciproquement, si $f \in L(X,Y)$ est bornée, alors $\|f\| < \infty$. En conséquence, si $\varepsilon > 0$ et $\|x\| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{\|f\|}$, alors $\|f(x)\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de f en 0, donc partout grâce à la proposition 2.1. □

Si $f \in X'$, alors bien évidemment son noyau $f^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel fermé. Si $f \neq 0$, alors $f^{-1}(0)$ est hyperplan (fermé).

Proposition 2.4. *Un hyperplan dans un espace normé est fermé ou dense.*

DÉMONSTRATION. Si H est un hyperplan de X qui n'est pas fermé, alors $\operatorname{cl} H$ est un sous-espace vectoriel de X et $\operatorname{cl} H \setminus H \neq \varnothing$ et puisque la codimension de H est 1, celle de $\operatorname{cl} H$ est 0, donc $\operatorname{cl} H = X$. □

Proposition 2.5. *Une forme linéaire est continue si et seulement son noyau est fermé*[8].

DÉMONSTRATION. Soit $f \in X^*$. Si f est continue, alors $f^{-1}(0)$ est fermé comme l'image réciproque d'un fermé. Si f n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée, c'est-à-dire il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $f(x_n) = n$ pour tout n, en particulier, $x_1 \notin f^{-1}(0)$. Ainsi $X = f^{-1}(0) \oplus \mathbb{K}x_1$, donc pour tout n, il existe $h_n \in f^{-1}(0)$ et un scalaire λ_n tels que $x_n = h_n + \lambda_n x_1$. Il s'ensuit que $n = f(x_n) = \lambda_n$, et par conséquent

$$x_1 = -\tfrac{1}{n}h_n + \tfrac{1}{n}x_n.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}h_n) = x_1$, ce qui veut dire que $x_1 \in \operatorname{cl} f^{-1}(0) \setminus f^{-1}(0)$. □

Comme une conséquence de la définition,

Proposition 2.6. *Si $(e_n)_n$ est une base de Schauder de X et $f \in X'$, alors pour tout $x \in X$,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\, f(e_n).$$

Autrement dit, toute forme linéaire continue sur un espace normé séparable ayant une base de Schauder est déterminée par ses valeurs sur les éléments de cette base[9].

3. Conséquences du théorème de Hahn-Banach

Une conséquence immédiate du théorème VIII.3.4 de Hahn-Banach dans le cadre des espaces normés est

Théorème 3.1 (Hahn-Banach). *Soit X un espace normé (réel ou complexe). Si X_0 est un sous-espace vectoriel de X et $f_0 \in X_0'$, alors il existe $f \in X'$ telle que $\|f\| = \|f_0\|$ et $f(x) = f_0(x)$ pour tout $x \in X_0$.*

Corollaire 3.2. *Si X est un espace normé, alors pour tout $x \in X$,*

$$\|x\| = \max\left\{|f(x)| : f \in X' \text{ et } \|f\| \le 1\right\}.$$

---

8. On peut prouver cette proposition d'une autre façon (en utilisant les espaces quotient) : si $f^{-1}(0)$ est fermé, alors $X/f^{-1}(0)$ avec la norme-quotient, est un espace normé de dimension 1. On définit une forme linéaire φ sur $X/f^{-1}(0)$ par $\varphi(x + f^{-1}(0)) := f(x)$. La définition n'est pas ambiguë, car $x + f^{-1}(0)$ est équivalent à $y + f^{-1}(0)$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. La forme φ est continue, en tant qu'une forme linéaire sur un espace de dimension finie. Donc $f = \varphi \circ Q$ est continue comme une composition d'applications continues.

9. Rappelons que toute forme linéaire sur un espace vectoriel est déterminée par ses valeurs sur une base de Hamel.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$. Si $f \in X'$ et $\|f\| \leq 1$, alors $|f(x)| \leq \|x\|$. Si $x = 0$, alors le maximum est atteint pour chaque $f \in X'$.

Si $x \neq 0$, alors soit $X_0 := \mathbb{K}x$ et $f_0(\lambda x) := \lambda\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f_0(x) = \|x\|$ et $\|f_0\| = 1$. D'après le théorème 3.1 de Hahn-Banach, il existe $f \in X'$ avec $\|f\| = \|f_0\| = 1$ et telle que $f(\lambda x) = f_0(\lambda x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, donc $\|x\| = |f(x)|$. □

Corollaire 3.3. *Si X est un espace normé, alors pour tout $x \in X$, il existe $f \in X'$ telle que $\|f\| = 1$ et $\|x\| = |f(x)|$.*

Proposition 3.4. *Soit X un espace réel normé. Si A est une partie convexe fermée non vide de X et $x \notin A$, alors il existe $f \in X'$ telle que*

$$f(x) > \sup_A f.$$

DÉMONSTRATION. Puisque A est fermé et $x \notin A$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \varnothing$. Puisque $B(x,r)$ est convexe et ouvert, ainsi $B(x,r) - A$ est ouvert non vide, et *a fortiori*

$$\mathrm{int}_a(B(x,r) - A) \neq \varnothing.$$

Selon le théorème VIII.5.4, il existe une forme linéaire f sur X telle que $-\infty < \sup_A f \leq \inf_{B(x,r)} f < f(x)$. Par conséquent, $\sup_{w \in B(x,r)} |f(w)| < \infty$, c'est-à-dire f est bornée, donc continue. □

On appelle *semi-espace ouvert (fermé)* une partie d'un espace normé X de la forme $\{x \in X : f(x) < r\}$ (respectivement, $\{x \in X : f(x) \leq r\}$), où $0 \neq f \in X'$ et $r \in \mathbb{R}$.

Tout convexe fermé strictement inclus dans un espace réel normé est l'intersection de semi-espaces fermés.

Corollaire 3.5. *Tout convexe fermé strictement inclus dans un espace réel normé est l'intersection de semi-espaces ouverts.*

Laissons les démonstrations de ces deux corollaires comme exercice.

4. Espaces normés de dimension finie

Ils s'avère que tout espace normé de dimension finie est linéairement homéomorphe à un produit fini des copies de son corps *valué* $\mathbb{K}$ des scalaires, c'est-à-dire normé par son module. Nous étudions les deux cas, réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Munis de la norme associée au produit scalaire, $\mathbb{R}^n$ est dit *espace euclidien* et $\mathbb{C}^n$ est dit *espace hermitien.*

Proposition 4.1. *Un espace vectoriel (sur $\mathbb{K}$) normé est de dimension finie n si et seulement s'il est linéairement homéomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

DÉMONSTRATION. Soit X un espace normé (sur $\mathbb{K}$) de dimension vectorielle $n \in \mathbb{N}$ et soit $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ une base de Hamel de X. L'application $h : \mathbb{K}^n \to X$ définie par

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) := \sum\nolimits_{j=1}^{n} \alpha_j b_j,$$

est linéaire, bijective et continue. Effectivement, la linéarité vient de la définition, l'injectivité de l'indépendance linéaire de $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, la surjectivité de sa maximalité et la continuité est une conséquence de la continuité des opérations algébriques établie dans la proposition 1.1. Montrons que h^{-1} est continue.

Si ce n'est pas le cas, alors il existe une suite $(x_k)_k$ d'éléments de X et $\delta > 0$ tels que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ et $\left\|h^{-1}(x_k)\right\| \geq \delta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$y_k := \frac{h^{-1}(x_k)}{\|h^{-1}(x_k)\|}.$$

Puisque $\{y \in \mathbb{K}^n : \|y\| = 1\}$ est compact, il existe une suite strictement croissante $(k_m)_m$ et $y_\infty = (\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_n^\infty) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\lim_{m\to\infty} y_{k_m} = y_\infty$ et $\|y_\infty\| = 1$. Or,

$$h(y_k) = \frac{x_k}{\|h^{-1}(x_k)\|},$$

ainsi $\|h(y_k)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x_k\|$ et, par conséquent, $\lim_{k\to\infty} h(y_k) = 0$.

Comme h est continue, $0 = h(y_\infty) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^\infty b_j$, donc

$$\alpha_1^\infty = \alpha_2^\infty = \ldots = \alpha_n^\infty = 0,$$

car $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ est une base, d'où une contradiction. □

Corollaire 4.2. *Les normes topologiquement équivalentes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.*

Proposition 4.3. *Un espace normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. Bien sûr, un espace de dimension finie est localement compact, car homéomorphe à un produit fini d'espaces localement compacts.

Soit X un espace normé et soit $B^{\leq}(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ compacte. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X'$ tels que $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ entraîne $x = 0$ pour tout $x \in X$.

Supposons qu'au contraire, pour toute partie finie Y de X',

$$S_Y := \bigcap_{y\in Y} \{x \in X : \|x\| = 1, y(x) = 0\}$$

est non vide. La famille $\mathcal{S} := \{S_Y : Y \subset X', \operatorname{card} Y < \infty\}$ est composée de parties fermées non vides du compact $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ et toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{S}$ est dans $\mathcal{S}$. En vertu du théorème V.2.1 de Cantor, $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S \neq \varnothing$, c'est-à-dire il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $f \in X'$, contrairement au corollaire 3.3.

Ainsi l'application linéaire continue $F : X \to \mathbb{K}^n$ définie par

$$F(x) := (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)),$$

est injective, donc $\dim X \leq n$. □

Proposition 4.4. *Toute application linéaire sur un espace normé de dimension finie est continue.*

DÉMONSTRATION. Puisque tout espace normé de dimension finie est isomorphe à un espace euclidien ou hermitien, on considère une application linéaire $f : \mathbb{K}^n \to Y$, où $(Y, \|\cdot\|)$ est un espace normé. Observons que $\sup\{\|f(x)\| : \max_{j=1}^n |x_j| \leq 1\}$ est atteint (sur un des sommets du cube de dimension n), donc f est bornée et, par conséquent, continue. □

Le corollaire VIII.2.3 dit que si $\dim X < \infty$ alors X est linéairement isomorphe à X^* donc à X' en vertu de la proposition 4.4. La même proposition nous assure que tout isomorphisme linéaire est continu. Ainsi

Proposition 4.5. *Le dual topologique X' d'un espace normé de dimension finie X est linéairement homéomorphe à X.*

5. Duaux des espaces des suites

Nous montrerons maintenant que les espaces spéciaux mentionnés dans des exemples (c_0 et l_p avec $1 \leq p \leq \infty$) sont effectivement des espaces normés et nous caractériserons leurs espaces duaux topologiques, c'est-à-dire les espaces de leurs formes linéaires continues. Nous verrons que

$$(c_0)' \approx l_1, \ (l_1)' \approx l_\infty,$$
$$p + q = pq \Longrightarrow (l_p)' \approx l_q$$

pour $1 < p, q < \infty$.

Si $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors notons

$$\langle x, y\rangle := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} x(n)\, y(n), \tag{IX.6}$$

pourvu que la série soit convergente.

Proposition 5.1. *Si $x \in l_1$ et $y \in l_\infty$, alors*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty . \tag{IX.7}$$

DÉMONSTRATION. L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ entraîne

$$\begin{aligned} \left|\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)\right| &\leq \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)y(n)| \\ &\leq \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|\, \|y\|_\infty = \|x\|_1 \|y\|_\infty , \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 5.2. *$f \in (l_1)'$ si et seulement s'il existe $y \in l_\infty$ tel que*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \tag{IX.8}$$

pour tout $x \in l_1$. En plus, $\|f\| = \|y\|_\infty$.

DÉMONSTRATION. Si $y \in l_\infty$, alors f définie par (IX.8) est, bien entendu, une forme linéaire et, compte tenu de (IX.7), continue avec $\|f\| \leq \|y\|_\infty$. Observons qu'en particulier

$$f(e_n) = \langle e_n, y\rangle = y(n), \tag{IX.9}$$

où $e_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est définie par $e_n(k) := \delta_k^n$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$. Comme $\|e_n\|_1 = 1$ pour tout n,

$$\begin{aligned}\|f\| &\geq \sup\{|f(e_n)| : n \in \mathbb{N}\}\\ &= \sup\{|y(n)| : n \in \mathbb{N}\} = \|y\|_\infty ,\end{aligned}$$

donc $\|f\| = \|y\|_\infty$.

Réciproquement, si $f \in (l_1)'$, alors on définit $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par (IX.9), c'est-à-dire $y(n) := f(e_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui revient à (IX.8). Ainsi $|y(n)| \leq \|f\|\,\|e_n\|_1 = \|f\|$, donc $\|y\|_\infty = \|f\| < \infty$ et par conséquent $y \in l_\infty$. □

Observons que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$$

pour tout élément $x \in l_1$. De surcroît, si $x \in l_1$, alors la suite $(x(n))_n$ est convergente. Donc

$$l_1 \subset c_0 \subset c \subset l_\infty.$$

Proposition 5.3. *$f \in (c_0)'$ si et seulement s'il existe $x \in l_1$ tel que*

$$f(y) = \langle x, y\rangle \tag{IX.10}$$

pour tout $y \in l_1$. En plus, $\|f\| = \|x\|_1$.

Démonstration. D'après (IX.7), pour tout $x \in l_1$ la forme définie par (IX.10) est linéaire et continue sur l_∞ et $\|f\| \leq \|x\|_1$. En conséquence, la restriction de f sur c_0 est linéaire et continue.

Si maintenant $f \in (c_0)'$, alors on définit $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par $x(n) := f(e_n)$, où $e_n \in c_0$ est donné par $e_n(k) := \delta_k^n$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, ce qui revient à (IX.10). Nous allons montrer que $x \in l_1$ et $\|f\| = \|x\|_1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit

$$y_k(n) := \begin{cases} \operatorname{sgn} x(n), \text{ si } n \leq k,\\ 0, \text{ si } n > k.\end{cases}$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} y_k(n) = 0$, c'est-à-dire $y_k \in c_0$. D'autre part, pour tout k, ou $\|y_k\|_\infty = 1$ ou bien $\|y_k\|_\infty = 0$. Ainsi $f(y_k) = \sum_{n=1}^k |x(n)|$ et, par conséquent,

$$\|f\| \geq \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(y_k)| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{k} |x(n)| = \|x\|_1 ,$$

et ainsi $x \in l_1$. Or en raison de (IX.7), $\|f\| \leq \|x\|_1$, ce qui prouve l'égalité. □

Bien entendu, tout élément de l_1 définit une forme linéaire continue sur l_∞ moyennant (IX.6), mais il y a les éléments de l'_∞ qui ne sont pas de cette forme (l'exemple D.5.5). On verra dans le corollaire D.5.4 que le dual l_∞ est isométriquement isomorphe à l'espace $\mathbf{M}(\mathbb{N})$ des mesures additives à variation bornée sur $\mathbb{N}$ avec la norme (D.24).

Proposition 5.4. *Si $1 < p < \infty$ et p, q sont conjugués, alors $(l_p)' \approx l_q$.*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà observé que tout élément y de l_q définit une forme linéaire continue sur l_p moyennant

$$f(x) := \langle x, y \rangle .$$

Réciproquement, si $f \in (l_p)'$, alors on définit $y \in l_q$ par $y(n) := f(e_n)$, ce qui coïncide avec la définition ci-dessus. En effet,

$$f(x) = f(\sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) = \langle x, y \rangle .$$

Compte tenu de l'inégalité (D.5) de Hölder de l'annexe D, $\|f\| \leq \|y\|_q$. Le corollaire 2.2 de l'annexe D montre que $\|y\|_q \leq \|f\|$. □

6. Espaces de Banach

Un espace normé complet s'appelle *espace de Banach*.

Tous les espaces vectoriels que nous considérons, sont définis sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$. Le module $|\cdot|$ constitue une norme sur le corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ en les rendant complets. Par conséquent,

Exemple 6.1. Les produits $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ avec la norme $\|\cdot\|_2$ sont des espaces de Banach, en tant que produits finis des espaces complets.

D'après l'exercice 13.c,

Exemple 6.2. L'espace $c_\bullet$ des suites finies (réelles ou complexes) avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas un espace de Banach, car il est n'est pas fermé dans c_0 qui est complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 6.3. *Un espace normé isomorphe à un espace de Banach est de Banach.*

DÉMONSTRATION. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace normé et $h : X \to Y$ est un isomorphisme. Si $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors $(h^{-1}(y_n))_n$ est de Cauchy, car

$$\|y_n - y_m\| \left\|h^{-1}\right\| \geq \left\|h^{-1}(y_n) - h^{-1}(y_m)\right\| .$$

Comme $(X, \|\cdot\|_X)$ il existe $x \in X$ tel que $x = \lim_{n\to\infty} h^{-1}(y_n)$, donc $h(x) = \lim_{n\to\infty} y_n$, ce qui prouve la complétude de $(Y, \|\cdot\|_Y)$. □

D'après la proposition 4.1, un espace de dimension finie sur un corps complet $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ qui complet (en tant que produit fini d'espaces complets). Selon la proposition 6.3,

Corollaire 6.4. *Tout espace normé de dimension finie est de Banach.*

Tous les espaces des exemples de la section précédente sont de Banach. Nous allons démontrer la complétude des certains de ces cas.

Lemme 6.5. *Soit $(f_n)_n$ une suite dans X' et soit $f : X \to \mathbb{K}$ définie par $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$. Alors f est une forme linéaire sur X.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_0, x_1 \in X, \alpha_0, \alpha_1$ deux scalaires et $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe n tel que $|f(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1) - f_n(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ainsi que $|\alpha_0|\,|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|\alpha_1|\,|f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

En conséquence,

$$\begin{aligned}
&|f(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1) - \alpha_0 f(x_0) - \alpha_1 f(x_1)| \\
&\leq |f(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1) - f_n(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)| \\
&+ |f_n(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1) - \alpha_0 f_n(x_0) - \alpha_1 f_n(x_1)| \\
&+ |\alpha_0 f_n(x_0) + \alpha_1 f_n(x_1) - \alpha_0 f(x_0) - \alpha_1 f(x_1)| \\
&\leq |f(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1) - f_n(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)| \\
&+ |\alpha_0|\,|f_n(x_0) - f(x_0)| + |\alpha_1|\,|f_n(x_1) - f(x_1)| \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.6. *Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors X' muni de* (IX.3) *est un espace de Banach.*

DÉMONSTRATION. Soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy dans X', c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_\varepsilon \in$ tel que

$$\|f_k - f_l\|_\infty = \sup\{|f_k(x) - f_l(x)| : \|x\| = 1\} < \varepsilon \tag{IX.11}$$

pour $k, l \geq k_\varepsilon$. Par conséquent, pour tout x tel que $\|x\| = 1$, la suite $(f_k(x))_k$ est de Cauchy. Soit $f_\infty(x)$ sa limite. En appliquant $\lim_{l\to\infty}$ à (IX.11), on obtient

$$\|f_k - f_\infty\|_\infty = \sup\{|f_k(x) - f_\infty(x)| : \|x\| = 1\} \leq \varepsilon$$

pour tout $k \geq k_\varepsilon$, ce qui veut dire que $(f_k)_k$ converge vers f_∞. Donc

$$\|f\| \leq \|f_n - f\| + \|f_n\| < \infty.$$

D'après le lemme 6.5, f est linéaire, et étant bornée, $f \in X'$. □

Proposition 6.7. *Les espaces l_p avec $1 \leq p \leq \infty$ et les espaces c et c_0 sont de Banach.*

DÉMONSTRATION. En effet, $l_\infty \approx (l_1)'$, $l_1 \approx (c_0)'$ et $l_p \approx (l_q)'$ pour $0 < p < \infty$ et $p + q = pq$. Les espaces c et c_0 sont fermés dans l_∞. □

7. Applications ouvertes et du graphe fermé

Rappelons (l'exercice III.30) qu'une application entre deux espaces métriques (ou topologiques) s'appelle *ouverte* si l'image de toute partie ouverte est ouverte.

Il se trouve qu'une application linéaire entre deux espaces normés est ouverte si et seulement si elle est ouverte en 0. Plus précisément,

Proposition 7.1. *Une application linéaire $f : X \to Y$ est ouverte si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que*

$$f(B(0,1)) \supset B(0,r). \tag{IX.12}$$

DÉMONSTRATION. Si f est ouverte, alors $0 \in f(B(0,1))$ et $f(B(0,1))$ est un ouvert, donc un voisinage de 0. Il s'ensuit qu'il existe $r > 0$ tel que (IX.12).

Réciproquement, si f est une application linéaire vérifiant (IX.12) pour un $r > 0$, alors pour tout $t > 0$,

$$f(B(0,t)) \supset B(0,rt). \tag{IX.13}$$

Soit O une partie ouverte de X et $y \in f(O)$, alors il existe $x \in O$ tel que $f(x) = y$ et, par conséquent, il existe $t > 0$ tel que $x + B(0,t) = B(x,t) \subset O$. Ainsi, en raison de (IX.13),

$$f(x) + B(0,rt) \subset f(x) + f(B(0,t)) \subset f(O),$$

donc $y = f(x) \in \operatorname{int} f(O)$. Nous pouvons conclure que $f(O)$ est ouverte. □

Proposition 7.2. *Une application linéaire $f : X \to Y$ est ouverte si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $y \in Y$,*

$$\inf\{\|x\| : f(x) = y\} \leq c\|y\|. \tag{IX.14}$$

DÉMONSTRATION. Nous verrons que (IX.14) est équivalente à (IX.12) avec $r = \frac{1}{c}$. Supposons que (IX.14) pour tous $y \in Y$ et $r = \frac{1}{c}$. Si $y \in B(0,r)$, c'est-à-dire $c\|y\| < 1$, alors compte tenu de (IX.14), il existe $x \in f^{-1}(y)$ avec $\|x\| < 1$, donc (IX.12).

Réciproquement, si (IX.12) et $y \in Y$ et si $c\|y\| < t$, alors $\|y\| < rt$ et, en raison de (IX.13), il existe $x \in f^{-1}(y)$ tel que $\|x\| < t$, c'est-à-dire $\inf\{\|x\| : f(x) = y\} < t$, ce qui prouve (IX.14). □

La borne inférieure de c qui vérifient (IX.14) est appelée la *constante de Banach* de f. Bien sûr, si f est bijective, alors $\|f^{-1}\|$ est la norme de la fonction f^{-1} réciproque de f.

Il s'avère qu'une application linéaire du graphe fermé entre deux espaces de Banach est ouverte pourvu qu'elle soit surjective. Ce fait découle du théorème 7.3 de Banach et du théorème 7.6 du graphe fermé.

Théorème 7.3 (d'homomorphisme de Banach). *Si X, Y sont deux espaces de Banach, $f : X \to Y$ est linéaire, continue et*

$$f(X) = Y,$$

alors f est ouverte.

DÉMONSTRATION. Notons $B := B(0,1)$ la boule de rayon 1 autour de 0. Puisque f est surjective,

$$Y \subset f(X) = f\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n f(B) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n \operatorname{cl} f(B) \subset Y.$$

Comme Y est un espace complet et $n \operatorname{cl} f(B)$ est fermé pour tout n, d'après le corollaire VI.4.2 de Baire, il existe n tel que $\operatorname{int}(n \operatorname{cl} f(B)) \neq \varnothing$, donc $\operatorname{int}(\operatorname{cl} f(B)) \neq \varnothing$. En conséquence, il existe y et $r > 0$ tel que

$$B(y,r) \subset \operatorname{cl} f(B).$$

Puisque $B = -B$, aussi $\operatorname{cl} f(B) = -\operatorname{cl} f(B)$, donc $B(-y,r) \subset \operatorname{cl} f(B)$. Or comme B est convexe, $\operatorname{cl} f(B)$ est également convexe, et c'est pourquoi $B(0,r) = \frac{1}{2}B(-y,r) + \frac{1}{2}B(y,r) \subset \operatorname{cl} f(B)$, autrement dit, il existe $r > 0$ tel que

$$\operatorname{cl} f(B(0,1)) \supset B(0,r). \tag{IX.15}$$

L'inclusion ci-dessus ressemble beaucoup à (IX.12), excepté la fermeture qui n'apparaît pas dans l'inclusion précédente. Notre tâche consistera maintenant à nous débarrasser de cette fermeture. Plus précisément, nous allons prouver que $f(B(0,1) \supset B(0,t)$ pour tout $0 < t < r$.

Abrégeons $W := B(0,r)$ et revenons à $B := B(0,1)$. Alors (IX.15), compte tenu de (IX.1), entraîne

$$W \subset f(B) + \varepsilon W \tag{IX.16}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $s > 1$ et soit $(s_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $s_0 = 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} s_n < s$. Il découle de (IX.16) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n W \subset f(s_n B) + s_{n+1} W.$$

D'après (IX.16), si $y_0 \in W$, alors il existe $x_0 \in B$ et $y_1 \in s_1 W$ tels que $y_0 = f(x_0) + y_1$.

Par récurrence, il existe deux suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ telles que

$$y_0 = y,\ y_n \in s_n W,\ x_n \in s_n B$$

et $y_n = f(x_n) + y_{n+1}$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ et

$$y_0 = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) + y_{n+1}.$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est de Cauchy, donc convergente, car X est complet, et $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in sB$ et comme f est continue, $y_0 = f(\sum_{n=0}^{\infty} x_n)$. Par conséquent, $W \subset sf(B)$ pour tout $s > 1$, donc

$$f(B(0,1)) \supset B(0, \tfrac{r}{s}).$$

□

Corollaire 7.4. *Si X, Y sont deux espaces de Banach, $f : X \to Y$ est une application linéaire, continue et bijective, alors f^{-1} est linéaire et continue.*

Corollaire 7.5. *Soit $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\bullet$ deux normes sur un espace vectoriel X telles que $(X, \|\cdot\|)$ et $(X, \|\cdot\|_\bullet)$ soient de Banach et*

$$\underset{x\in X}{\forall}\ \|x\| \geq \|x\|_\bullet .$$

Alors $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\bullet$ sont équivalentes.

Démonstration. L'application identité $i_X : X \to X$ est bijective et continue de $(X, \|\cdot\|)$ dans $(X, \|\cdot\|_\bullet)$, car $\|i_X(x)\| = \|x\|_\bullet \leq \|x\|$, donc, en vertu du corollaire 7.4, il existe $c = \left\|i_X^{-1}\right\|$ tel que $c\,\|x\|_\bullet \geq \left\|i_X^{-1}(x)\right\| = \|x\|$.
□

Théorème 7.6 (du graphe fermé). *Si X, Y sont deux espaces de Banach et $f : X \to Y$ est linéaire et son graphe est fermé, alors f est continue.*

DÉMONSTRATION. Puisque f est linéaire, le graphe $\mathrm{Gr}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $X \times Y$ qui est fermé par l'hypothèse. L'espace $X \times Y$ est complet [10], comme produit de deux espaces complets, donc $\mathrm{Gr}(f)$ est complet en tant qu'une partie fermée d'un espace complet.

L'application $F : \mathrm{Gr}(f) \to X$ définie par $F(x, f(x)) := x$ est bijective, linéaire et continue. D'après le corollaire 7.4, $F^{-1} : X \to \mathrm{Gr}(f)$ est continue, donc

$$f = \pi_Y \circ F^{-1}$$

est continue comme une composition de deux applications continues. □

8. Familles uniformément bornées

Il s'avère que toute famille simplement bornée des applications continues d'un espace normé dans un espace de Banach est uniformément bornée.

Théorème 8.1 (Banach-Steinhaus). *Si X est un espace de Banach, Y est normé et $\mathcal{F} \subset L_c(X, Y)$ vérifie*

$$\sup \{\|f(x)\| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$$

pour tout $x \in X$, alors

$$\sup \{\|f\| : f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

DÉMONSTRATION. La partie

$$A_n := \left\{x \in X : \sup \{\|f(x)\| : f \in \mathcal{F}\} \leq n\right\}$$

est convexe, fermée, symétrique et, d'après l'hypothèse, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Puisque X est complet, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{int} A_n \neq \varnothing$. Soit $x \in X$ et $r > 0$ tels que $B_r(x) \subset A_n$.

Par symétrie, $B_r(-x) \subset A_n$, donc $B_r(0) = \frac{1}{2}B_r(x) + \frac{1}{2}B_r(-x) \subset A_n$ grâce à la convexité de A_n. Par conséquent, $\sup \{\|f(x)\| : \|x\| \leq r, f \in \mathcal{F}\} \leq n$, donc

$$\begin{aligned} &\sup \{\|f\| : f \in \mathcal{F}\} \\ &= \sup \{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1, f \in \mathcal{F}\} \leq \tfrac{n}{r} < \infty. \end{aligned}$$

□

Corollaire 8.2. *Soit X un espace de Banach, Y un espace normé et $(f_n)_n \subset L_c(X, Y)$ une suite convergeant simplement vers f. Alors $f \in L_c(X, Y)$.*

10. Avec une norme-produit, par exemple, $\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\|$

DÉMONSTRATION. Étant donné que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$ et l'ensemble $\{\|f_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ est bornée pour tout $x \in X$, l'application f est linéaire en raison du lemme 6.5.

Alors, d'après le théorème 8.1 de Banach-Steinhaus, $\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ est bornée, c'est-à-dire il existe $c > 0$ tel que

$$\sup\{\|f_n(x)\| : \|x\| \leq 1, n \in \mathbb{N}\} \leq c < \infty.$$

Si n tend vers l'infini, $\sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq c < \infty$, ce qui montre la continuité de f. □

9. Projections et quotients

Si X est un espace normé et L est un sous-espace vectoriel de X, alors le quotient X/L par rapport à l'équivalence $x \approx_L y$ définie par $x - y \in L$, est muni des opérations algébriques (VIII.8) et (VIII.9) qui en font un espace vectoriel. Soit

$$\|x + L\| := \inf\{\|h\| : h \in x + L\} \tag{IX.17}$$

Observons que $\|x + L\| = d(x, L)$.[11] En conséquence,

Proposition 9.1. *Si L est un sous-espace vectoriel fermé de X, alors* (IX.17) *est une norme sur X/L.*

DÉMONSTRATION. Pour tout x, la valeur $\|x + L\| \geq 0$, et $\|x + L\| = 0$ si et seulement si $d(x, L) = 0$, c'est-à-dire $x \in L$, car L est fermé, donc quand x est L-équivalent à 0. D'autre part,

$$\begin{aligned}\|\lambda(x + L)\| &= \inf\{\|h\| : h \in \lambda x + L\} \\ &= \|\lambda x + L\| = d(\lambda x, L) = |\lambda|\, d(x, L).\end{aligned}$$

L'inégalité

$$\begin{gathered}\|(x + L) + (y + L)\| = \inf\{\|h\| : h \in x + y + L\} \\ = \inf\{\|h + g\| : h \in x + L, g \in y + L\} \leq \\ \inf\{\|h\| + \|g\| : h \in x + L, g \in y + L\} = \|x + L\| + \|y + L\|\end{gathered}$$

conclut la démonstration. □

Nous avons vu que la projection naturelle (VIII.10) $q : X \to X/L$ est linéaire.

Proposition 9.2. *Si L est un sous-espace vectoriel fermé de X, alors la projection $q : X \to X/L$ est continue et ouverte.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in X$, en posant $h = 0$ dans (IX.17), on obtient $\|q(x)\| = \|x + L\| \leq \|x\|$, donc q est continue et $\|q\| \leq 1$.

---

11. En effet, $h \in x + L$ s'il existe $l \in L$ tel que $h = x - l$.

Si O est un ouvert de X, alors $q(O) = \{x + L : x \in O\}$ est ouvert dans X/L, car si $z \in q(O)$ alors il existe $y \in O$ tel que $z = y + L$. Il s'ensuit qu'il existe $r > 0$ tel que $B(y,r) \subset O$, donc $q(B(y,r)) \subset q(O)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} q(B(y,r)) &= \{x + L : \|x - y\| < r\} \\ &= \{x + L : \|(x + L) - (y + L)\| < r\} = B_{X/L}(z,r). \end{aligned}$$

□

Proposition 9.3. *Si X est un espace normé, L est un sous-espace vectoriel fermé de X et $x_0 \notin L$, alors il existe $f \in X'$ telle que $f(L) = \{0\}$ et $f(x_0) = d(x_0, L)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $q : X \to X/L$ la projection. Puisque $x_0 \notin L$, on en déduit que $q(x_0) \neq 0$, donc il existe $F \in (X/L)'$ de norme 1 telle que

$$F(q(x_0)) = \|q(x_0)\| = \|x_0 + L\| = d(x_0, L).$$

Or $f := F \circ q \in X'$ et $f(x) = F(q(x)) = F(L) = 0$ pour tout $x \in L$. De surcroît on a $\|f\| = \|F \circ q\| \leq \|F\| \, \|q\| = 1$. □

Proposition 9.4. *Si $X = V \oplus W$ et V, W sont fermés, alors π_V, π_W sont de graphe fermé.*

DÉMONSTRATION. Si $(x_n)_n$ converge vers x et $(\pi_V(x_n))_n$ converge vers v, alors $v \in V$ car $\pi_V(x_n) \in V$ et V est fermé. Par conséquent, $v = \pi_V(v)$ et $\lim_{n\to\infty}(x_n - \pi_V(x_n))_n = x - v \in W$, car W est fermé, donc $\pi_V(x - v) = 0$, ce qui prouve que $\pi_V(x) = v$. □

D'après la proposition 9.4,

Corollaire 9.5. *Si X est un espace de Banach et V, W sont ses sous-espaces fermés tels que $X = V \oplus W$ alors les projections π_V et π_W sont continues.*

Corollaire 9.6. *Si L est un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach X, alors il existe un espace supplémentaire (fermé) M de L tel que les projections π_L et π_M sont continues.*

Corollaire 9.7. *Tout sous-espace de dimension finie est fermé.*

10. Espaces des fonctions continues

L'espace vectoriel $C_b(T) := C_b(T, \mathbb{K})$ des fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$ (réel ou complexe) sur un espace métrique T, a été dotée d'une métrique D définie dans (V.4). Ainsi

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in T} |f(t)| \tag{IX.18}$$

est égale à $D(f, 0)$. Comme $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ pour tout $f \in C_b(T)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, nous concluons que (IX.18) est une norme. Nous avons déjà observé dans la proposition 2.2 que cet espace est complet, donc de Banach. L'espace l_∞ de l'exemple 1.4 est un cas particulier (où $T = \mathbb{N}$ avec la topologie discrète).

Dans la suite, nous allons nous borner au cas où T est localement compact. Le *support* d'une fonction $f : T \to \mathbb{K}$ est défini comme

$$\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}\{t \in T : f(t) \neq 0\}.$$

L'ensemble $C_c(T)$ des fonctions continues à *support compact* est un sous-espace vectoriel de $C_b(T)$, car toute combinaison linéaire de fonctions à support compact, est à support compact.

L'ensemble $C_0(T)$ est composés de $f \in C(T, \mathbb{K})$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que

$$\sup\{|f(t)| : t \notin K\} \leq \varepsilon. \tag{IX.19}$$

Bien entendu, $C_0(T)$ est également un sous-espace vectoriel de $C_b(T)$ et $C_c(T) \subset C_0(T)$. On les munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Il s'avère que $C_0(T)$ est un espace de Banach.

Proposition 10.1. *Si T est un espace métrique localement compact, alors $C_c(T)$ est dense dans $C_0(T)$ qui est fermé dans $C_b(T)$.*

DÉMONSTRATION. Si $f \in C_0(T)$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe un compact K tel que (IX.19). Puisque T est localement compact, pour tout $t \in K$ il existe $\delta_t > 0$ tel que $\operatorname{cl} B(t, \delta_t)$ est un voisinage compact de t. D'après la compacité de K, il existe une partie finie F de K telle que

$$K \subset \bigcup_{t\in F} B(t, \delta_t) \subset \bigcup_{t\in F} \operatorname{cl} B(t, \delta_t).$$

Selon la proposition III.7.3, il existe une fonction continue $\varphi : X \to [0, 1]$ telle que $\varphi(K) = \{1\}$ et

$$\{t \in T : \varphi(t) \neq 0\} \subset \bigcup_{t\in F} B(t, \delta_t).$$

Par conséquent, $\varphi \in C_c(T)$ car $\bigcup_{t\in F} \operatorname{cl} B(t, \delta_t)$ est compacte. Or $\operatorname{supp}(f\varphi) \subset \operatorname{supp}\varphi$, donc $f\varphi \in C_c(T)$ et $0 \leq |f(t)\varphi(t)| \leq |f(t)|$ pour tout $t \in T$. En conséquence,

$$\|f\varphi - f\|_\infty = \sup\{|f(t)\,\varphi(t) - f(t)| : t \notin K\} \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la densité.

Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $C_0(T)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\infty\|_\infty = 0$. Si $\varepsilon > 0$, alors d'une part, il existe n tel que $\|f_n - f_\infty\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ et, de l'autre, un compact K tel que $\sup\{|f_n(t)| : t \notin K\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent,

$$\sup\{|f_\infty(t)| : t \notin K\} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $f_\infty \in C_0(T)$. □

Il s'ensuit que $C_0(T)$ est le complété de $C_c(T)$.

On verra dans l'annexe D les espaces duaux aux espaces des fonctions continues sont isomorphes à des espaces des mesures.

11. Opérateurs adjoints

Nous allons employer $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X' \to \mathbb{K}$ pour désigner le *couplage canonique* entre un espace normé X et l'espace normé X' des formes linéaires continues sur X (le dual topologique de X), c'est-à-dire

$$\langle x, f\rangle := f(x)$$

pour tout $x \in X$ et $f \in X'$. Il s'ensuit que pour tout $x \in X$ et tout $f \in X'$,

$$|\langle x, f\rangle| \leq \|x\|\,\|f\|\,. \tag{IX.20}$$

Si $A \subset X$ et $B \subset X'$, alors on note

$$A^{\perp} := \left\{f \in X' : \underset{x\in A}{\forall}\ \langle x, f\rangle = 0\right\} \text{ et } B^{\perp} := \left\{x \in X : \underset{f\in B}{\forall}\ \langle x, f\rangle = 0\right\},$$

les *polaires* de A et B respectivement. Observons que $A \subset A^{\perp\perp}$ et $B \subset B^{\perp\perp}$.

Dans cette section on utilise souvent le terme *opérateur linéaire* pour désigner une application linéaire

$$F : \operatorname{dom} F \to Y,$$

définie sur un sous-espace $\operatorname{dom} F$ d'un espace normé X, appelé le *domaine* de F, et à valeurs dans un espace normé Y. On note Fx l'image de x par F et FX l'image de X par F. On rappelle que $\ker F := F^{-1}(0)$ est dit le *noyau* de F.

Supposons que $\operatorname{dom} F$ est dense dans X. Si $f \in Y'$ est tel que la composition $f \circ F$ est continue sur $\operatorname{dom} F$, alors

$$(f \circ F)(x) = \langle f, Fx\rangle = \langle F^* f, x\rangle \tag{IX.21}$$

définit une forme linéaire continue F^*f sur $\operatorname{dom} F$, qu'on prolonge sur tout X grâce au théorème 3.1 de Hahn-Banach. Ce prolongement est unique, car $\operatorname{dom} F$ est dense. Autrement dit, (IX.21) définit l'*opérateur adjoint*

$$F^* : \operatorname{dom} F^* \to X',$$

de F, défini sur $\operatorname{dom} F^* := \left\{f \in Y' : f \circ F \in (\operatorname{dom} F)'\right\}$. Si F est continu, alors $\operatorname{dom} F$ est fermé, donc égal à X et, par conséquent, $\operatorname{dom} F^* = Y'$.

Proposition 11.1. *Tout opérateur adjoint est de graphe fermé.*

DÉMONSTRATION. Si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et $\lim_{n\to\infty} F^* f_n = g$, alors pour tout $x \in \operatorname{dom} F$,

$$\langle x, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x, F^* f_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Fx, f_n\rangle = \langle Fx, f\rangle = \langle x, F^* f\rangle,$$

donc $F^* f = g$. □

Par conséquent, $\ker F^*$ est fermé pour tout opérateur linéaire F.

Proposition 11.2. *Soit $F : \operatorname{dom} F \to Y$ un opérateur linéaire. Alors*

$$\left(F^* Y'\right)^{\perp} = \ker F, \tag{IX.22}$$

$$(FX)^{\perp} = \ker F^*. \tag{IX.23}$$

Si en plus, FX est fermée, alors

$$FX = (\ker F^*)^{\perp} . \tag{IX.24}$$

DÉMONSTRATION. Effectivement, par définition, $x \in (F^*Y')^{\perp}$ si $0 = \langle F^*f, x\rangle = \langle f, Fx\rangle$ pour tout $f \in Y'$. Selon le corollaire 3.3, ceci équivaut à $Fx = 0$. De même, $f \in (FX)^{\perp}$ si et seulement si $0 = \langle f, Fx\rangle = \langle F^*f, x\rangle$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $F^*f = 0$.

D'après (IX.23), $FX \subset (\ker F^*)^{\perp}$. Si FX est fermée, et $y \notin FX$, alors d'après la proposition 3.4, il existe une forme linéaire continue f sur telle que

$$f(y) > \sup_{FX} f = \sup_{x\in X}\langle Fx, f\rangle = \sup_{x\in X}\langle x, F^*f\rangle = 0,$$

donc $F^*f = 0$, autrement dit $f \in \ker F^*$, mais $f(y) \neq 0$ donc $y \notin (\ker F^*)^{\perp}$.
□

12. Topologies faibles

Soit X un espace normé. La topologie la moins fine de X, pour laquelle tout $y \in X'$ est continue est dite *topologie faible* et est notée $\sigma(X, X')$. Il s'ensuit que la topologie faible est moins fine que la topologie de la norme.

Proposition 12.1. *Une partie V de X est un voisinage de x_0 pour la topologie faible si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ et une partie finie Y de X' tels que*

$$\bigcap\nolimits_{y\in Y} \{x \in X : |y(x) - y(x_0)| < \varepsilon\} \subset V.$$

La topologie la moins fine de X', pour laquelle tout $x \in X$ est continue est dite la *topologie faible (étoile)* et est notée $\sigma(X', X)$.

Observons que $\sigma(X', X)$ coïncide avec la topologie de la convergence simple.

Théorème 12.2 (Alaoglu-Bourbaki). *La boule $\{y \in X' : \|y\| \le 1\}$ est compacte pour $\sigma(X', X)$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in X$, l'ensemble $B^{\le}(0, \|x\|) = \{y(x) : y \in X', \|y\| \le 1\}$ est compact dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$). Comme

$$\{y \in X' : \|y\| \le 1\} \subset \prod\nolimits_{x\in X} B^{\le}(0, \|x\|),$$

et d'après le théorème B.4.4, l'ensemble $\prod_{x\in X} B^{\le}(0, \|x\|)$ est compact pour la topologie de la convergence simple. Il suffit donc de montrer que $\{y \in X' : \|y\| \le 1\}$ est une partie fermée. D'après le lemme 6.5, la limite simple de toute suite d'éléments de $\{y \in X' : \|y\| \le 1\}$ est linéaire et de norme inférieure à 1, donc continue. Mais la topologie de la convergence simple restreinte à X' est égale à $\sigma(X', X)$. □

Remarque 12.3. Si on ne veut pas utiliser le théorème général de Tikhonov général de l'annexe B, on peut employer le théorème V.1.15 de Tikhonov sous l'hypothèse que X soit séparable.

Un espace normé X s'appelle *réflexif* si $X'' = X$. Bien entendu, tout espace réflexif est de Banach. Il découle de la définition et de la proposition 5.4 que les espaces l_p sont réflexifs pour $1 < p < \infty$.

Corollaire 12.4. *Toute partie fermée bornée d'un espace réflexif est faiblement compacte.*

Il s'avère que les espaces des fonctions continues sur un compact sont universels pour les espaces normés.

Théorème 12.5. *Pour tout espace normé X, il existe un espace topologique compact K tel que X isométriquement isomorphe à un sous-espace de $C(K)$.*

DÉMONSTRATION. Soit

$$K := \{y \in X' : \|y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, y\rangle| \leq 1\}.$$

la boule-unité de X'. D'après le théorème 12.2 de Alaoglu-Bourbaki, K est $\sigma(X', X)$-compacte. Puisque tout élément x de X est $\sigma(X', X)$-continu, la restriction x_K (de x à K) appartient à $C(K)$. L'application $x \mapsto x_K$ est une injection linéaire, car si $x \neq 0$, alors il existe $y \in X'$ avec $\langle x, y\rangle \neq 0$. Il existe $y_0 \in K$ et $r > 0$ tel que $y = r y_0$, donc $\langle x, y_0\rangle \neq 0$). Ainsi

$$\|x_K\|_{C(K)} = \sup_{y \in K} |\langle x, y\rangle| \leq \sup_{y \in K} \|x\| \|y\| = \|x\| \; ; \tag{IX.25}$$

d'autre part, d'après le théorème 3.1 de Hahn-Banach, il existe $y_0 \in X'$ tel que $\|y_0\| = 1$ et $\langle x, y_0\rangle = \|x\|$. Par conséquent, $\sup_{y \in K} |\langle x, y\rangle|$ est atteint en y_0, donc (IX.25) devient l'égalité

$$\|x_K\|_{C(K)} = \|x\|.$$

□

Exercices

Solutions : pages 329-338.

(1) ⋆ Soit X un espace normé et $A, B \subset X$. Montrer que

(a) si A est linéaire, alors $\operatorname{cl} A$ est linéaire,

(b) si A est une partie convexe, alors $\operatorname{cl} A$ est convexe,

(c) si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert,

(d) si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.

(e) Donner un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}^2$ tels que $A + B$ n'est pas fermé.

(f) Donner un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}$ tels que $A + B$ n'est pas fermé.

(2) Montrer que dans un espace normé, toute boule est convexe.

(3) Soit A un convexe dans un espace normé. Montrer que

(a) pour $0 \leq \alpha < 1$,
$$(1-\alpha)\operatorname{int} A + \alpha \operatorname{cl} A \subset \operatorname{int} A,$$

(b) si $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, alors $\operatorname{int}_a A = \operatorname{int} A$.

(4) Montrer que si L est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé réel X et $x \notin L$, alors il existe $f \in X'$ tel que $f(L) = \{0\}$ et $f(x) = 1$.

(5) Soit

(*) $$\|f\| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Montrer que

(a) $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\}$,

(b) $\|f\| = \inf\{r > 0 : \forall_{x \in X}\ \|f(x)\| \leq r\|x\|\}$.

(c) (*) est une norme.

(6) $\star$ Montrer que

(a) tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé,

(b) toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

(7) Montrer qu'une partie K d'un espace normé X est totalement bornée si et seulement si K est bornée et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel L de dimension finie de X tel que $K \subset B(L, \varepsilon)$.

(8) Soit $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés et $f : X \to Y$ une application linéaire continue. Soit
$$\|y\|_f := \inf\{\|x\|_X : f(x) = y\}.$$
Montrer que

(a) $\|\cdot\|_f$ est une norme sur $f(X)$,

(b) $\|y\|_Y \leq \|f\|\,\|y\|_f$ pour tout $y \in f(X)$.

(9) Une partie A d'un espace normé X est dite *totale* si $\operatorname{cl}(\operatorname{vect} A) = X$. Montrer qu'une partie A de X est totale si et seulement si pour tout $f \in X'$
$$f(A) = \{0\} \Longrightarrow f = 0.$$

(10) Soit $B^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées, continûment dérivables et dont la dérivée est bornée. Soit
$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \ \text{ et } \ |||f||| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$$
deux normes. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

(11) Pour tout $x \in X$, l'application $j(x) : X' \to \mathbb{K}$ est définie par $j(x)(f) = f(x)$. Montrer que

(a) $j(x)$ est linéaire et continue, c'est-à-dire $j(x) \in X'' := (X')'$,

(b)
$$\|j(x)\| := \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\},$$

(c) $\|j(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$,

(d) $\|j(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$,

(e) l'application $j : X \to X''$ est linéaire, injective, continue et $\|j\| = 1$.

(12) Soit X, Y espaces normés et $L_c(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues munie de la norme (*). Montrer que si Y est complet, alors $L_c(X, Y)$ est complet.

(13) Soit l_∞ avec sa norme $\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que

(a) l'espace c_0 des suites convergentes vers 0, est fermé dans l_∞,

(b) l'espace c des suites convergentes est fermé dans l_∞,

(c) l'espace c_* des suites finies est dense dans c_0.

(d) Caractériser le dual de c.

(14) Soit $\gamma \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ avec le support dans $[-1, 1]$ et telle que
$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(x)dx = 1.$$
Pour $\varepsilon > 0$ soit $\gamma_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\gamma(\frac{x}{\varepsilon})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

(a) il existe une telle fonction,

(b) $\int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon(x)dx = 1$,

(c) $\lim_{\varepsilon\to\infty} \int |\gamma_\varepsilon * f(x) - f(x)|\, dx = 0$.

(15) Soit T un intervalle compact et $X := C(T, \mathbb{R})$ avec la norme $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| : t \in T\}$. Montrer que

(a) si $g \in C(T, \mathbb{R})$ et $G(f) := \int_T f(t)g(t)dt$, alors $G \in X'$ et
$$\|G\| = \int_T |g(t)|\, dt,$$

(b) si $t_0 \in T$ et $H(f) := f(t_0)$, alors $H \in X'$ et $\|H\| = 1$,

(c) si $(t_n)_n$ est une suite injective dans T et $(\alpha_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty$, et
$$F(f) := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f(t_n),$$
alors $F \in X'$ et $\|F\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$.

(16) Montrer qu'une partie convexe d'un espace normé réel X est fermée si et seulement si elle est faiblement fermée.

CHAPITRE X

Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une forme $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ s'appelle *produit scalaire* si pour tous $x, y, x_0, x_1 \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

(i) $$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,$$

(ii) $$\langle x_0 + x_1, y\rangle = \langle x_0, y\rangle + \langle x_1, y\rangle,$$

(iii) $$\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle},$$

(iv) $$\langle x, x\rangle \geq 0$$

(v) $$\langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Ces axiomes entraînent

(vi) $$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle,$$

(vii) $$\langle x, y_0 + y_1\rangle = \langle x, y_0\rangle + \langle x, y_1\rangle.$$

Un espace muni d'un produit scalaire s'appelle *préhilbertien.* Bien entendu, si X est un espace vectoriel réel, (iii) devient $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$ et (vi) devient $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$. On définit

(X.1) $$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

2. Propriétés fondamentales

Bien entendu, (X.1) est positive, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ et $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$. Pour montrer que (X.1) est sous-additive, établissons d'abord l'*inégalité de Schwarz,* dite aussi l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*[1].

Proposition 2.1 (Inégalité de Schwarz). *Pour tous $x, y \in X$,*

(X.2) $$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Démonstration. Si $\langle x, y\rangle = 0$, (X.2) est évident. Sinon, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\langle x, y\rangle| = \alpha\langle y, x\rangle$. Bien sûr $|\alpha| = 1$. D'après (iv), pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + r\alpha y, x + r\alpha y\rangle \\ &= \|x\|^2 + r\alpha\,\langle y, x\rangle + \overline{r\alpha\,\langle y, x\rangle} + r^2\,\|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2r\,|\langle x, y\rangle| + r^2\,\|y\|^2, \end{aligned}$$

1. La version concernant des sommes fut publiée par Cauchy en 1821, la variante en termes des intégrales est due à Buniakovski (1859) et la version générale à Schwarz (1888).

ainsi le discriminant de la forme quadratique ci-dessus est négatif, c'est-à-dire $|\langle x,y\rangle|^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \le 0$. □

Bien entendu,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned} \tag{X.3}$$

Puisque $|\Re\,\langle x,y\rangle| \le |\langle x,y\rangle|$, d'après (X.2),

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\le \|x\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

d'où découle la sous-additivité de la norme :

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \tag{X.4}$$

pour tous $x, y \in X$.

La formule (X.3) entraîne immédiatement la *règle du parallélogramme* :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{X.5}$$

pour tous $x, y \in X$.

Un espace préhilbertien s'appelle *espace de Hilbert* s'il est complet par rapport à (X.1).

Exemple 2.2. La forme $\langle f,g\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$ est un produit scalaire sur l_2. Nous avons vu que l_2 est complet, donc il est de Hilbert.

3. Projections orthogonales

Proposition 3.1. *Soit A un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert X. Alors pour tout $x \in X$ il existe un unique $x_A \in A$ tel que*

$$\|x - x_A\| = \operatorname{dist}(x, A). \tag{X.6}$$

Si en plus X est réel, alors x_A vérifie (X.6) *si et seulement si*

$$\langle a - x_A, x - x_A\rangle \le 0 \tag{X.7}$$

pour tout $a \in A$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(0, A-x)$, il suffit de démontrer la proposition pour $x = 0$. Ainsi on prouvera qu'il existe un seul élément 0_A de A tel que

$$\|0_A\| = \operatorname{dist}(0, A), \tag{X.8}$$

et que, dans le cas de X réel, 0_A est caractérisé par

$$\langle a - 0_A, 0_A\rangle \ge 0 \tag{X.9}$$

pour tout $a \in A$.

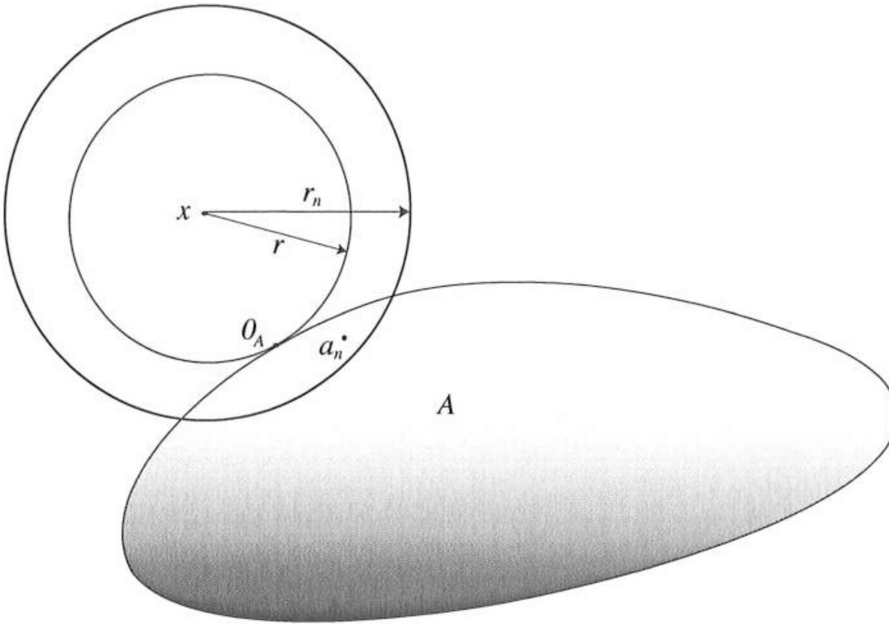


FIGURE X.1. Le diamètre de $B(x, r_n) \cap A$ tend vers 0 quand r_n tend vers r.

Soit $r := d(0, A)$ et soit $(r_n)_n$ une suite décroissante tendant vers r. Il existe alors une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $r \leq \|a_n\| \leq r_n$. Selon (X.5),

$$\begin{aligned} &\|a_n - a_m\|^2 \\ &= 2\|a_n\|^2 + 2\|a_m\|^2 - 4\left\|\tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}a_m\right\|^2, \end{aligned}$$

et comme A est convexe, $\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_m \in A$, donc $\left\|\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}a_m\right\| \geq r$.

Par conséquent, $\|a_n - a_m\|^2 \leq 2r_n^2 + 2r_m^2 - 4r^2$, et puisque $(r_n)_n$ converge vers r, la suite $(a_n)_n$ est de Cauchy. Ainsi $(a_n)_n$ converge vers un élément 0_A de A, car A est fermé, et comme la norme est continue, $\|0_A\| = r$.

Soit a est un autre élément de A tel que $\|a\| = d(0, A)$. Alors d'après la convexité, $\frac{1}{2}0_A + \frac{1}{2}a \in A$, donc $\left\|\frac{1}{2}0_A + \frac{1}{2}a\right\| \geq r$. Conformément à (X.5),

$$\begin{aligned} \|0_A - a\|^2 &= 2\|a\|^2 + 2\|0_A\|^2 - 4\left\|\tfrac{1}{2}0_A + \tfrac{1}{2}a\right\|^2 \\ &\leq 4r^2 - 4r^2 = 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que X est réel. Si (X.8) et $a \in A$, alors pour tout $0 < t < 1$,

$$\|0_A\|^2 \leq \|0_A + t(a - 0_A)\|^2 = \|0_A\|^2 + 2t\langle a - 0_A, 0_A\rangle + t^2\|a - 0_A\|^2$$

Donc

$$0 \leq 2\langle a - 0_A, 0_A \rangle + t \|a - 0_A\|^2$$

et quand t tends vers 0, on obtient (X.9).

Réciproquement, si (X.9) et $a \in A$, alors

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= \|a - 0_A + 0_A\|^2 \\ &= \|a - 0_A\|^2 + 2\langle a - 0_A, 0_A \rangle + \|0_A\|^2 \geq \|0_A\|^2 . \end{aligned}$$

□

Deux éléments h_0 et h_1 d'un espace de Hilbert [2] X sont *orthogonaux* si $\langle h_0, h_1 \rangle = 0$, ce qu'on désigne par $h_0 \perp h_1$. Si $A \subset X$, alors

$$A^{\perp} := \{x \in X : \forall_{a \in A} \; x \perp a\}$$

est l'*espace orthogonal* à A. On observe que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé pour tout $A \subset X$.

Proposition 3.2. *Si L est sous-espace vectoriel fermé de X et $x \in X$. Alors un élément x_L de L vérifie* (X.6) *si et seulement si $x - x_L$ est orthogonal à L.*

DÉMONSTRATION. Si $x_0 \in L$ et $x - x_0$ est orthogonal à L, alors pour tout $y \in L$,

$$\|x - y\|^2 = \|x - x_0 + x_0 - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2 \geq \|x - x_0\|^2 ,$$

donc $\|x - x_0\| = d(x, L)$.

Réciproquement, si $x - x_0$ n'est pas orthogonal à L, alors il existe $h \in L$ tel que $\langle x - x_0, h \rangle \neq 0$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\langle x - x_0, \alpha h \rangle = -1$. Alors pour $r \in \mathbb{R}$, on a $x_0 + r\alpha h \in L$ et

$$\begin{aligned} d(x, L) &\leq \|x - (x_0 + r\alpha h)\|^2 \\ &= \|x - x_0\|^2 + 2r\Re \langle x - x_0, \alpha h \rangle + r^2 \|\alpha h\|^2 \\ &= \|x - x_0\|^2 - 2r + r^2 \|\alpha h\|^2 , \end{aligned}$$

il existe donc r tel que $-2r + r^2 \|\alpha h\|^2 < 0$, alors $\|x - x_0\| > d(x, L)$. □

On appelle la *projection orthogonale* de x sur L l'unique point x_L vérifiant (X.6).

Proposition 3.3. *Si L est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert X, alors il existe des (uniques) applications linéaires continues $P : X \to L$ et $Q : X \to L^{\perp}$ telles que pour tout $x \in X$,*

$$x = Px + Qx \tag{X.10}$$

et $\|Px\| = d(x, L^{\perp})$ et $\|Qx\| = d(x, L)$.

2. Plus généralement, d'un espace préhilbertien.

DÉMONSTRATION. L'existence et l'unicité de la projection Px de x sur L sont assurées par le lemme 3.2. Posons $Qx := x - Px$. D'après le lemme 3.2, $Qx \in L^\perp$. Comme Px et Qx sont orthogonaux, $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$. En conséquence, $\|Px\| \le \|x\|$ et $\|Qx\| \le \|x\|$, ce qui montre la continuité de P et Q et $\|P\| = 1 = \|Q\|$.

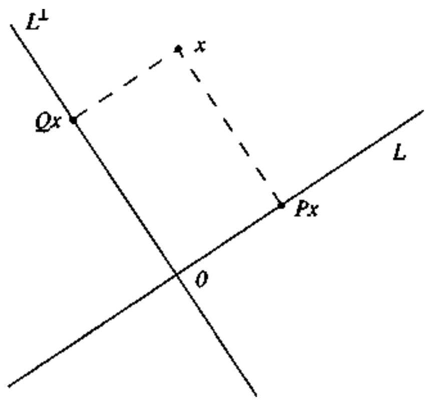


FIGURE X.2. Projections orthogonales de x sur L et $L^\perp$.

Afin de montrer que $\|Px\| = d(x, L^\perp)$, soit $z \in L^\perp$. Alors

$$x - z = Px + Qx - z,$$

et $Qx - z \in L^\perp$. Donc $\|x - z\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx - z\|^2$, donc $\|Px\|^2 \le \|x - z\|^2$ pour tout $z \in L^\perp$ et l'égalité pour $z := Qx$. La linéarité se vérifie aisément à partir de (X.10). ☐

4. Bases de Hilbert

Une partie H d'un espace de Hilbert X s'appelle *orthonormale* si $\langle h_0, h_1 \rangle = 0$ pour $h_0, h_1 \in H$ distincts et $\langle h, h \rangle = 1$ pour $h \in H$. Une partie orthonormale H s'appelle une *base de Hilbert* de X si $\operatorname{cl}\operatorname{vect} H = X$.

Observons que pour deux éléments distinct h_0, h_1 d'une base H, la distance $d(h_0, h_1) = \sqrt{2}$. Effectivement,

$$\|h_0 - h_1\|^2 = \langle h_0 - h_1, h_0 - h_1 \rangle = \|h_0\|^2 + \|h_1\|^2 = 2.$$

Lemme 4.1. *Pour qu'une partie orthonormale H d'un espace de Hilbert X soit une base de Hilbert il faut et il suffit qu'elle soit maximale par rapport à l'inclusion.*

DÉMONSTRATION. Si $\operatorname{cl}\operatorname{vect} H \neq X$, alors il existe x non nul et orthogonal à H, ce qui contredit la maximalité de H. Si H n'est pas maximal, alors il existe $x \notin H$ tel que $H \cup \{x\}$ est orthonormal, donc $x \in (\operatorname{vect} H)^\perp = (\operatorname{cl}\operatorname{vect} H)^\perp$, donc $\operatorname{cl}\operatorname{vect} H \neq X$. ☐

Exemple 4.2. L'espace $L_2(0, 2\pi)$ à valeurs complexes avec

$$(X.11) \qquad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\,\overline{g}dx,$$

est un espace de Hilbert. La famille $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base de Hilbert. À partir de cette base, on peut facilement trouver une base de Hilbert dans $L_2(0, 2\pi)$ à valeurs réels. La famille $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de Hilbert dans l_2 (voir l'exemple 2.2).

Proposition 4.3. *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base de Hilbert dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Soit H une base de Hilbert de X. Si D est une partie dénombrable dense de X, alors $D_h := B(h, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap D \neq \varnothing$ pour tout $h \in H$ et $D_{h_0} \cap D_{h_1} = \varnothing$ si $h_0 \neq h_1$. Par conséquent, H est dénombrable (finie ou infinie). Si H est dénombrable, alors l'ensemble $\operatorname{vect}_{\mathbf{Q}} H$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels est dense, car $\operatorname{cl}\operatorname{vect}_{\mathbf{Q}} H = \operatorname{cl}\operatorname{vect} H$. □

Proposition 4.4. *Si X est un espace de Hilbert séparable, alors toute base de Hilbert est une base de Schauder.*

DÉMONSTRATION. Soit $H = \{h_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ une base de Hilbert. Alors pour tout $x \in X$, la suite définie par $x_n := \sum_{k=1}^{n} \hat{x}(h_k)\, h_k$ converge vers x, car $\|x - x_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{x}(h_k)|^2$. □

5. Représentation des formes linéaires continues

Soit X un espace de Hilbert et $y \in X$. Alors

$$(X.12) \qquad f(x) = \langle x, y \rangle$$

est évidemment une forme linéaire sur X. D'après l'inégalité (X.2) de Schwarz, elle est continue et

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\|} \leq \|y\| \, .$$

Enfin, en posant $x := y$, on constate que $\|f\| = \|y\|$. Réciproquement,

Théorème 5.1 (Riesz). *Soit X un espace de Hilbert. Si $f \in X'$, alors il existe un unique $y \in X$ tel que* (X.12) *pour tout $x \in X$. En plus $\|y\| = \|f\|$.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in X'$. Nous cherchons $y \in X$ vérifiant (X.12), donc également

$$(X.13) \qquad f(y) = \langle y, y \rangle = \|y\|^2 \, .$$

Comme f est continue, l'hyperplan $\{f = 0\}$ est fermé, donc son espace orthogonal $\{f = 0\}^{\perp}$ est de dimension 1. D'après la proposition 3.3, il existe $0 \neq z \in \{f = 0\}^{\perp}$. Nous cherchons y de la forme αz où $\alpha \in \mathbb{K}$. D'après (X.13), $\alpha f(z) = f(\alpha z) = |\alpha|^2 \|z\|^2 = \alpha\overline{\alpha} \|z\|^2$, donc $\alpha = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2}$.

Chaque $x \in X$ admet une unique décomposition $x = \lambda y + w$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $w \in \{f = 0\}$. Par conséquent, $f(x) = \lambda f(y)$ et d'autre part, $\langle x, y\rangle = \langle w + \lambda y, y\rangle = \lambda \|y\|^2$, donc tenant compte de (X.13), on obtient (X.12). D'après la remarque précédant le théorème, $\|f\| = \|y\|$. Enfin si y_0, y_1 sont tels que $f(x) = \langle x, y_0\rangle = \langle x, y_1\rangle$ pour tout $x \in X$, alors $\langle x, y_1 - y_0\rangle = 0$ pour tout $x \in X$, donc $y_1 = y_0$, ce qui achève la démonstration. □

Si H est une base de Hilbert de X, alors pour tout $x \in X$ on définit le *coefficient de Fourier* $\widehat{x}(h)$ de x

$$\hat{x}(h) := \langle x, h\rangle$$

pour tout $h \in H$.

Lemme 5.2. *La projection orthogonale de x sur l'enveloppe linéaire d'une partie finie orthonormale G est donnée par $\sum_{h\in G} \hat{x}(h)h$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x_G := \sum_{h\in G} \hat{x}(h)h$. Alors pour tout $h_0 \in G$,

$$\langle x - x_G, h_0\rangle = \hat{x}(h_0) - \hat{x}(h_0)\,\langle h_0, h_0\rangle = 0,$$

ce qui montre que $x - x_G$ est orthogonal à $\operatorname{vect} G$, c'est-à-dire $\|x - x_G\| = d(x, \operatorname{vect} G)$, donc x_G est la projection orthogonale de x sur $\operatorname{vect} G$ en vertu de la proposition 3.3. □

On note $l_2(H)$ l'espace des fonctions g de H dans $\mathbb{K}$ telles que $\|g\|^2_{l_2(H)} := \int_H |g|^2\, d\mu$, où μ est la mesure de comptage. Si $A \subset \mathbb{R}_+$, alors on définit

$$\sum\nolimits_{r\in A} r := \sup\Big\{\sum\nolimits_{r\in T} r : T \subset A, \operatorname{card} T < \infty\Big\}. \tag{X.14}$$

Observons que

Proposition 5.3. *Si $r := \sum_{r\in A} r < \infty$, alors $\{r \in A : r > 0\}$ est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe une partie finie T_n de A telle que $r_\infty - \sum_{r\in T_n} r < \frac{1}{n}$. Ainsi $A_0 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} T_n$ est dénombrable et $r_\infty = \sum_{r\in A_0} r$. Si $\widehat{r} \notin A_0$ et $\widehat{r} > 0$, alors il existe n tel que $\frac{1}{n} < \widehat{r}$ et, par conséquent, $\sum_{r\in T_n\cup\{\widehat{r}\}} r > r_\infty$ en contradiction avec (X.14). □

Proposition 5.4. *Si H est une base de Hilbert de X, et $x \in X$ alors $\hat{x} : H \to \mathbb{K}$ est un élément de $l_2(H)$ et*

$$\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2_{l_2(H)}\,. \tag{X.15}$$

DÉMONSTRATION. Effectivement, $\|x\|^2 \geq \sum_{h\in G} |\hat{x}(h)|^2$ pour toute partie finie G de H. Donc

$$\|x\|^2 \geq \sup\Big\{\sum_{h\in G} |\hat{x}(h)|^2 : G \subset H, \operatorname{card} G < \infty\Big\} = \sum_{h\in H} |\hat{x}(h)|^2,$$

ce qui donne l'*inégalité de Bessel*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{h\in H} |\hat{x}(h)|^2 . \tag{X.16}$$

D'autre part, puisque vect H est dense, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un élément x_ε de vect H tel que $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$. Si G est une partie finie de H telle que $x_\varepsilon \in \operatorname{vect} G$, alors $\left\|x - \sum_{h\in G} \hat{x}(h)h\right\| < \varepsilon$, donc $\|x\|^2 \leq \sum_{h\in G} |\hat{x}(h)|^2 + \varepsilon^2$, donc $\|x\|^2 \leq \sum_{h\in H} |\hat{x}(h)|^2$, en entraînant l'égalité.

Or, puisque μ est la mesure de comptage,

$$\|\hat{x}\|^2_{l_2(H)} := \int_H |\hat{x}|^2 \, d\mu = \sum_{h\in H} |\hat{x}(h)|^2 .$$

□

Théorème 5.5 (Riesz-Fischer). *Si H est une base de Hilbert de X, alors pour tout $f \in l_2(H)$ il existe $x \in X$ tel que $\hat{x} = f$.*

DÉMONSTRATION. Si $f \in l_2(H)$, alors $H_n := \left\{f \in H : |f(h)| > \frac{1}{n}\right\}$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. Soit

$$x_n := \sum_{h\in H_n} f(h)\, h.$$

Si $h \in H_n$ alors $\hat{x}_n(h) = \langle x_n, h\rangle = f(h)$ et $\hat{x}_n(h) = 0$ si $h \notin H_n$. Il est clair que

$$\underset{h\in H}{\forall} \ \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n(h) = f(h),$$

et $|f - \hat{x}_n|^2 \leq \|f\|^2_{l_2(H)}$, donc, selon le théorème D.1.3 de Lebesgue de convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \int_H |f - \hat{x}_n|^2 \, d\mu = 0$, c'est-à-dire $(\hat{x}_n)_n$ converge vers f dans $l_2(H)$, donc est de Cauchy.

Conformément à (X.15), $(x_n)_n$ est également une suite de Cauchy, et comme X est complet, il existe $x \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, donc grâce à l'isométrie (X.15), $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \hat{x}$ et en conséquence $\hat{x} = f$. □

La formule (X.15) nous permet d'obtenir l'*identité de Parseval*

$$\langle x, y\rangle = \langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{l_2(H)} \tag{X.17}$$

pour tous $x, y \in X$. En effet, (X.15) s'écrit également $\langle x, x\rangle = \langle \hat{x}, \hat{x}\rangle_{l_2(H)}$, donc pour tous $x, y \in X$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, nous avons $\langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle = \langle \hat{x} + \alpha\,\hat{y}, \hat{x} + \alpha\,\hat{y}\rangle_{l_2(H)}$, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} &2\Re\alpha\,\langle x, y\rangle \\ &= \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle = \langle \hat{x}, \alpha\,\hat{y}\rangle_{l_2(H)} + \langle \hat{x}, \alpha\,\hat{y}\rangle_{l_2(H)} \\ &= 2\Re\alpha\,\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle_{l_2(H)} . \end{aligned}$$

En posant $\alpha = 1$ et $\alpha = i$, on obtient (X.17). Nous concluons que

Corollaire 5.6. *Tout espace de Hilbert X est isométriquement isomorphe à l'espace $l_2(H)$ pour toute base de Hilbert H de X et, en plus, cet isomorphisme préserve le produit scalaire.*

Exercices

Solutions : pages 338-340.

(1) Deux éléments h_0 et h_1 d'un espace réel de Hilbert X sont *orthogonaux* (en symboles, $h_0 \perp h_1$) si $\langle h_0, h_1 \rangle = 0$. Si $A \subset X$, alors
$$A^\perp := \left\{x \in X : \underset{a\in A}{\forall}\ x \perp a\right\}$$
est l'*espace orthogonal* à A. Montrer que

  (a) $A^\perp$ est la polaire de A par la relation $\perp$.

  (b) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé pour tout $A \subset X$,

  (c) $A^{\perp\perp} = \operatorname{cl}\operatorname{vect} A$,

  (d) $(\bigcup_{j\in J} A_j)^\perp = \bigcap_{j\in J} A_j^\perp$,

  (e) si A_j est un sous-espace vectoriel fermé pour tout $j \in J$, alors $(\bigcap_{j\in J} A_j)^\perp = \operatorname{cl}\operatorname{vect} \bigcup_{j\in J} A_j^\perp$.

(2) Soit A un convexe fermé d'un espace réel de Hilbert X. D'après la proposition 3.1, il existe un unique $x_A \in A$ tel que

(X.18) $$\|x - x_A\| = \operatorname{dist}(x, A).$$

Montrer que (X.18) si et seulement si $\langle y - x_A, x - x_A \rangle \leq 0$ pour tout $y \in A$.

(3) L'espace $L_2(-\pi, \pi)$ à valeurs complexe avec le produit scalaire (X.11) est un espace de Hilbert. Montrer que

  (a) l'ensemble $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, où $e_n(x) := \exp(inx)$, est une base de Hilbert de $L_2(-\pi, \pi)$ complexe,

  (b) l'ensemble $\{h_n : n \in \mathbb{Z}\}$, où $h_n(x) := \sin(nx)$ si $n \geq 1$, $h_n(x) := \cos(nx)$ si $n \leq -1$ et $h_0(x) := 1$ est une base de Hilbert de $L_2(-\pi, \pi)$ réel.

CHAPITRE XI

Théorie spectrale

La théorie spectrale fut initiée par Riesz et Fredholm dans leurs études des solutions des équations intégrales, qu'on représente comme une équation $Fx = y$, où F est un opérateur compact auto-adjoint. L'approche consiste à décomposer l'espace en sous-espaces consistant des vecteurs propres de F correspondant aux mêmes valeurs propres de F. Cette méthode s'applique aux équations intégrales, donc également aux équations différentielles admettant fonctions de Green.

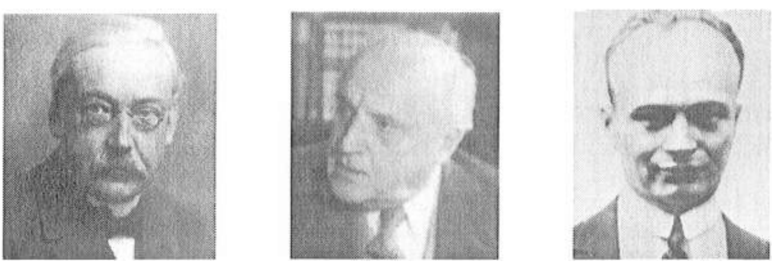


FIGURE XI.1. Erik Ivar Fredholm (1866-1927), Erhard Schmidt (1876 - 1959) et Juliusz Schauder (1899 - 1943)

1. Inégalité variationnelle

Dans cette section nous allons établir un résultat concernant les formes bilinéaires généralisant la proposition X.3.1.

Soit X un espace normé. Une application $b : X \times X \to \mathbb{R}$ est dite *forme bilinéaire* si elle est linéaire séparément pour les deux variables. Une forme bilinéaire b est dite *continue* s'il existe une constante C telle que

$$|b(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$$

pour tous $x, y \in X$; *coercive* s'il existe $c > 0$ tel que

$$|b(x,x)| \geq c\|x\|^2 \tag{XI.1}$$

pour tout $x \in X$. En particulier, si X est un espace de Hilbert, alors $b(x,y) := \langle x, y\rangle$ est une forme bilinéaire continue et coercive.

Théorème 1.1 (Stampacchia). *Si A est un convexe fermé non-vide d'un espace de Hilbert X, et b est une forme bilinéaire, continue, coercive, alors pour tout $f \in X'$ il existe un unique $a_0 \in A$ tel que*

$$b(a_0, a - a_0) \geq \langle f, a - a_0 \rangle \tag{XI.2}$$

pour tout $a \in A$.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème X.5.1 de représentation de Riesz, on peut supposer que $f \in X$, et que, pour tout a, il existe une forme linéaire continue Fa telle que $b(a, y) = \langle Fa, y \rangle$ pour tout $y \in X$. Bien sûr, F est linéaire et comme $|b(a, y)| \leq C\|a\|\|y\|$ et grâce à (XI.1), l'opérateur F est continu et

$$\langle Fa, a \rangle \geq c\|a\|^2.$$

Donc le problème est celui de trouver un a_0 unique tel que

$$\langle Fa_0, a - a_0 \rangle \geq \langle f, a - a_0 \rangle \text{ pour tout } a \in A,$$

ou de façon équivalente, pour tout $a \in A$ et pour $r > 0$,

$$\langle (rf - rFa_0 + a_0) - a_0, a - a_0 \rangle \leq 0.$$

Autrement dit $a_0 = P_A(rf - rFa_0 + a_0)$ la projection de sur A. Soit

$$S_r(a) = P_A(rf - rFa_0 + a).$$

Or

$$\|S_r(a_1) - S_r(a_2)\| \leq \|(a_1 - a_2) - r(Fa_1 - Fa_2)\|,$$

donc

$$\begin{aligned} &\|S_r(a_1) - S_r(a_2)\|^2 \\ \leq \|a_1 - a_2\|^2 - 2r\langle (Fa_1 - Fa_2&), (a_1 - a_2)\rangle + r^2\|F(a_1 - a_2)\|^2 \\ &\leq \|a_1 - a_2\|^2(1 - 2rc + r^2\|F\|^2). \end{aligned}$$

Si $r = 0$, alors $(1 - 2rc + r^2\|F\|^2) = 1$ et $\min\{1 - 2rc + r^2\|F\|^2 : r \in \mathbb{R}\}$ est atteint $r = \dfrac{2c}{\|F\|^2}$ et est inférieur à 1. Par conséquent, il existe un r et $t < 1$ tel que

$$\|S_r(a_1) - S_r(a_2)\| \leq \sqrt{t}\|a_1 - a_2\|,$$

et d'après le théorème VI.6.1 de point fixe de Banach, il existe un unique $a_0 \in A$ tel que $S_r a_0 = a_0$. □

Exemple 1.2. Si $b(x, y) := \langle x, y \rangle$ et $f \in X$, alors (XI.2) devient

$$\langle a - a_0, f - a_0 \rangle \leq 0,$$

c'est-à-dire la condition (X.7) caractérisant l'élément $x_A = a_0$ du convexe fermé A qui soit le plus proche d'un élément donné f de X. Ainsi la proposition X.3.1 découle du théorème 1.1.

Si A est un sous-espace vectoriel fermé de X, alors

Théorème 1.3 (Lax-Milgram). *Soit b une forme bilinéaire continue coercive sur un espace de Hilbert X et A un sous-espace vectoriel fermé de X. Alors pour tout $f \in X'$ il existe un unique a_0 tel que*

$$b(a_0, h) = \langle f, h \rangle$$

pour tout $h \in A$.

2. Opérateurs compacts

Soit X, Y deux espaces normés. Un opérateur linéaire $F : X \to Y$ est dit *compact* s'il est continu et si FB est relativement compact pour tout borné B. Il est dit de *rang fini* si $\dim(FX) < \infty$. Il découle de la proposition IX.4.3 que tout opérateur continu de rang fini est compact.

Le sous-espace $K(X, Y)$ des opérateurs compacts dans l'espace des opérateurs linéaires continus $L_c(X, Y)$ est fermé (l'exercice 1).

Théorème 2.1 (Schauder). *Si X, Y sont deux espaces de Banach et si $F : X \to Y$ est un opérateur linéaire et continu, alors F est compact si et seulement si F^* est compact.*

DÉMONSTRATION. Soit $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Si $F : X \to Y$ est compact, alors $\operatorname{cl} F(B)$ est une partie compacte de Y. Soit $(f_n)_n$ une suite dans Y' telle que $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n. Nous allons montrer que $(F^* f_n)_n$ admet une suite extraite convergente, ce qui entraîne la compacité de F^*. La suite

$$\{f_n|_{\operatorname{cl} F(B)} : n < \infty\} \tag{XI.3}$$

est équicontinue sur un compact, et comme $f_n(0) = 0$ pour tout n, (XI.3) est bornée. D'après le théorème V.4.5 d'Arzelà-Ascoli, il existe $f \in C(\operatorname{cl} FB)$ et une suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que $(f_{n_k}|_{\operatorname{cl} F(B)})_k$ converge vers f uniformément. En particulier,

$$\sup_{x \in B} |f_{n_k}(Fx) - f(Fx)|$$

tend vers 0, quand k tend vers ∞, donc

$$\sup_{x \in B} |\langle (F^* f_{n_k} - F^* f_{n_l}), x \rangle| = \|F^* f_{n_k} - F^* f_{n_l}\|$$

tends vers 0 quand k, l tendent vers ∞, alors $(F^* f_{n_k})_k$ est de Cauchy, donc convergente grâce à la complétude de X'.

Si F^* est compact, alors par la première partie de la preuve, F^{**} est compact. D'autre part, F^{**} coïncide avec F sur X. ☐

Théorème 2.2. *Soit X un espace de Banach. Si $F : X \to X$ est compact, alors*

$$\dim (\operatorname{fix} F) < \infty$$

et $(i_X - F)X$ est fermé.

DÉMONSTRATION. Puisque F est compact et $\operatorname{fix} F \subset F(X)$, en posant $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, on observe que

$$B \cap \operatorname{fix} F = F(B \cap \operatorname{fix} F) \subset F(B)$$

est relativement compact. Ainsi $\operatorname{fix} F$ est un espace vectoriel localement compact, donc la dimension de $\operatorname{fix} F$ finie.

Pour montrer la seconde affirmation, considérons une suite $(y_n)_n$ d'éléments de $(i_X - F)X$ telle que $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Alors pour tout n, il existe $x_n \in X$ tel que $y_n = x_n - Fx_n$ Comme $\operatorname{fix} F$ est de dimension finie, pour tout n il existe $v_n \in \operatorname{fix} F$ tel que

$$\|x_n - v_n\| = \operatorname{dist}(x_n, \operatorname{fix} F).$$

Puisque $v_n = Fv_n$,

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - Fx_n - v_n + Fv_n \\ &= (x_n - v_n) - F(x_n - v_n) = h_n - Fh_n, \end{aligned}$$

où $h_n := x_n - v_n$. Il s'ensuit que $\|h_n\| = \operatorname{dist}(h_n, \operatorname{fix} F)$.

Montrons que la suite $(h_n)_n$ est bornée. Sinon, il existerait une suite $(h_{n_k})_k$ telle que $\lim_{k\to\infty} \|h_{n_k}\| = \infty$. Comme $(y_n)_n$ est bornée, en posant $w_n\|h_n\| := h_n$, on conclut que

$$\text{(XI.4)} \qquad 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{y_{n_k}}{\|h_{n_k}\|} = \lim_{k\to\infty}(w_{n_k} - Fw_{n_k}).$$

Puisque F est compact, il existe une suite strictement croissante $(k_p)_p$ telle que $(Fw_{n_{k_p}})_p$ est convergente, donc selon (XI.4), il existe w tel que

$$w = \lim_{p\to\infty} w_{n_{k_p}} = \lim_{p\to\infty} Fw_{n_p}.$$

Comme F est continu, $w = Fw$, c'est-à-dire $w \in \operatorname{fix} F$ et, d'autre part, $\operatorname{dist}(w, \operatorname{fix} F) = 1$, car la fonction distance est continue.

Ayant prouvé que $(h_n)_n$ est bornée, on utilise la compacité de F pour déduire l'existence d'une suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que $(Fh_{n_k})_k$ est convergente, et, puisque $y_n = h_n - Fh_n$, la suite $(h_{n_k})_k$ est également convergente et

$$h := \lim_{k\to\infty} h_{n_k} = y - \lim_{n\to\infty} Fh_{n_k} = y - Fh,$$

c'est-à-dire $y = h - Fh \in (i_X - F)X$. □

Lemme 2.3 (Riesz). *Si L est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in X$ tel que $\|h\| = 1$ et $\operatorname{dist}(h, L) > 1 - \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \notin L$. Comme L est fermé, $\operatorname{dist}(x, L) > 0$. Il existe donc $w \in L$ tel que

$$\operatorname{dist}(x, L) \leq \|x - w\| < \frac{1}{1-\varepsilon} \operatorname{dist}(x, L),$$

donc

$$\begin{aligned}
1-\varepsilon &< \operatorname{dist}\Big(\frac{x}{\|x-w\|}, L\Big)\\
&= \operatorname{dist}\Big(\frac{x}{\|x-w\|} - \frac{w}{\|x-w\|}, L - \frac{w}{\|x-w\|}\Big)\\
&= \operatorname{dist}\Big(\frac{x-w}{\|x-w\|}, L\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$h := \frac{x-w}{\|x-w\|}$$

vérifie les conditions du lemme. □

Théorème 2.4 (Alternative de Fredholm). *Soit X un espace de Banach. Si $F : X \to X$ est compact, alors*

(a) $i_X - F$ est injectif si et seulement s'il est surjectif,

(b) $\dim(\operatorname{fix} F) = \dim(\operatorname{fix} F^*)$.

DÉMONSTRATION. Montrons que si $A := i_X - F$ est injectif, alors A est surjectif. Supposons qu'au contraire $X \setminus AX \neq \varnothing$ et posons $X_0 := X$ et $X_{n+1} := AX_n$ (c'est-à-dire $X_n = A^n X$). La suite $(X_n)_n$ est strictement décroissante. En effet, si n était le plus petit élément de $\mathbb{N}$ tel que $X_{n+1} = AX_n = X_n$, alors il existerait $x_0 \in X_{n-1} \setminus X_n$, donc $Ax_0 \in X_n = X_{n+1}$. Par conséquent, il existerait $x_1 \in X_n$ avec $Ax_1 = Ax_0$, donc $x_1 \neq x_0$.

D'autre part, X_n est fermé pour tout n. En effet, observons d'abord que $FX_n \subset X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est vrai pour $n = 0$, et si $n > 0$ et la propriété est vraie pour tout $k < n$, alors, pour tout $y \in X_n$, il existe $x \in X_{n-1}$ tel que $y = x - Fx$, donc $Fy = Fx - F^2x = A(Fx)$ et, comme $Fx \in X_{n-1}$ par hypothèse de récurrence, $Fy \in X_n$. Puisque la restriction $F|_{X_n}$ est compacte, $X_n = AX_{n-1} = (i_X - F)X_{n-1}$ est fermé selon le théorème 2.2.

Grâce au lemme 2.3 de Riesz, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite (x_n) telle que $x_n \in X_n$, $\|x_n\| = 1$ et $\operatorname{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq 1 - \varepsilon$. Donc pour $n > k$

$$\begin{aligned}
Fx_n - Fx_k &= Fx_n - x_n - (Fx_k - x_k) + x_n - x_k\\
&= (Ax_k - Ax_n + x_n) - x_k,
\end{aligned}$$

et $(Ax_k - Ax_n + x_n) \in X_{k+1}$ et par conséquent $\|Fx_n - Fx_k\| \geq 1 - \varepsilon$, ce qui n'est pas passible, car F est compact.

Comme $A = i_X - F$, alors $A^* = i_X - F^*$. D'après (IX.23), si A est surjectif, alors A^* est injectif, donc surjectif, et par conséquent, $A^*X' = X'$ et puisque d'après (IX.22), $\left(A^*X'\right)^\perp = \ker A$, l'opérateur A est injectif.

Montrons d'abord que

$$d^* := \dim\ker(i_X - F^*) \leq \dim\ker(i_X - F) =: d.$$

Si $d < d^*$, alors il existe un espace supplémentaire L de $(i_X - F)X$ avec $\dim L = d^*$ et un opérateur linéaire injectif non-surjectif $\Lambda : \ker(i_X - F) \to L$.

Comme $\dim\ker(i_X - F) < \infty$, alors d'après la proposition IX.9.6, il existe une projection linéaire continue $P : X \to \operatorname{fix} F$. Observons que

$$S = F + \Lambda \circ P$$

est compact (car $\Lambda \circ P$ est de rang fini). Il s'ensuit que $i_X - S$ est injectif.

Effectivement si $0 = x - Sx = x - Fx - \Lambda(Px)$, c'est-à-dire

$$x - Fx = \Lambda(Px),$$

alors $x - Fx = 0 = \Lambda(Px)$, car $\Lambda(PX)$ est supplémentaire de $(i_X - F)X$. Ainsi $x \in \operatorname{fix} F$ et ainsi $Px = 0$, car Λ est injectif. Or P est une projection sur $\operatorname{fix} F$, donc $Px = x = 0$. Par conséquent, $i_X - S$ est surjectif, ce qui donne une contradiction, car dans $L\backslash(i_X - F - \Lambda \circ P)X \neq \varnothing$. On conclut que $d^* \leq d$.

En appliquant ce résultat à F^*, on déduit que

$$\dim(\operatorname{fix} F^{**}) \leq \dim(\operatorname{fix} F^*) \leq \dim(\operatorname{fix} F),$$

et puisque $\operatorname{fix} F \subset \operatorname{fix} F^{**}$, on conclut que $d \leq d^*$. □

3. Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit V et W deux espaces de Hilbert. Un opérateur $F : V \to W$ est dit de *Hilbert-Schmidt* s'il existe une base $\{e_j : j \in J\}$ orthonormale de V telle que

$$\|F\|_{HS}^2 = \sum_{j \in J} \|Fe_j\|^2 < \infty,$$

où la somme est définie par (X.14). On appelle $\|F\|_{HS}$ la *norme de Hilbert-Schmidt* de F. Une application de l'inégalité (Schwarz) de Schwarz montre que $\|F\| \leq \|F\|_{HS}$.

Proposition 3.1. *La norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur ne dépend pas du choix de base.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{f_i : i \in I\}$ une autre base orthonormale de W. D'après l'identité de Parseval (X.17),

$$\begin{aligned} \|F\|_{HS}^2 &= \sum_{j \in J} \|Fe_j\|^2 = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} |\langle Fe_j, f_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\langle e_j, F^* f_i \rangle|^2 = \sum_{i \in I} \|F^* f_i\|^2 = \|F^*\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

Si $\{e_j : j \in J\}$ est remplacée par une autre base orthonormale de V, l'égalité au-dessus ne change pas. □

Soit X, Y deux intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Si W est une partie fermée d'un espace euclidien, alors $L_2(W)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence (égalité presque partout) des fonctions carré-intégrables muni du produit scalaire

$$\langle g, h \rangle := \int_W g(w)h(w)dw.$$

L'espace de Hilbert $L_2(W)$ est séparable, en particulier, ses bases de Hilbert sont dénombrables.

Proposition 3.2. *Si $k \in L_2(X \times Y)$, alors*

$$(Ku)(x) = \int_Y k(x,y)\, u(y)\, dy \tag{XI.5}$$

définit un opérateur de Hilbert-Schmidt de $L_2(Y)$ dans $L_2(X)$. Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est de la forme (XI.5).

DÉMONSTRATION. Si $f \in L_2(X)$ et $g \in L_2(Y)$, alors $f \otimes g \in L_2(X \times Y)$, où

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y).$$

Or, si $\{f_i : i \in I\}, \{g_j : j \in J\}$ sont des bases orthonormales de $L_2(X)$ et $L_2(Y)$ respectivement, alors

$$\{f_i \otimes g_j : i \in I, j \in J\}$$

est une base orthonormale de $L_2(X \times Y)$. Donc $k = \sum_j \sum_j \alpha_{ij} f_i \otimes g_j$, où $\alpha_{ij} = \int_{X \times Y} k \cdot (f_i \otimes g_j)\, dx\, dy$. Maintenant, d'après l'identité de Parseval (X.17),

$$\sum_j \|Kg_j\|^2 = \sum_j \sum_i |\langle Kg_j, f_i\rangle|^2 \tag{XI.6}$$

et

$$\begin{aligned} \langle Kg_j, f_i\rangle &= \int_X \left(\int_Y k(x,y) g_j(y)\, dy \right) f_i(x)\, dx \\ &= \int_Y \int_X k(x,y) f_i(x) g_j(y)\, dx\, dy = \int_{X \times Y} k \cdot (f_i \otimes g_j)\, dx\, dy, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_j \|Kg_j\|^2 = \sum_j \sum_i \int_{X \times Y} |k \cdot (f_i \otimes g_j)|^2\, dx\, dy = \int_Y \int_X |k(x,y)|^2\, dx\, dy < \infty.$$

Réciproquement, si $K : L_2(Y) \to L_2(X)$ et (XI.6) est fini, alors

$$k = \sum_j \sum_i \langle Kg_j, f_i\rangle\, f_i \otimes g_j$$

est un élément de $L_2(X \times Y)$ pour lequel (XI.5). □

Corollaire 3.3. *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact, comme une limite d'opérateurs de rang fini.*

4. Résolvante, spectre, valeurs propres

Soit F un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach réel X. On définit la *résolvante* $\rho(F)$ de F

$$\rho(F) := \{\lambda : F - \lambda i_X \text{ est bijectif}\}$$

et le *spectre* $\sigma(F)$ de F comme le complémentaire de la résolvante.

Un nombre réel est dite une *valeur propre* de F si $F - \lambda i_X$ n'est pas injectif. Autrement dit, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de F si le sous-espace vectoriel $\{x \in X : Fx = \lambda x\}$ des *vecteurs propres* de F ne se réduit pas à $\{0\}$.

Rappelons que tout opérateur linéaire continu bijectif d'un espace de Banach dans l'autre est un homéomorphisme (corollaire IX.7.4).

Si F est compact et $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de F, alors d'après le théorème 2.4, $F - \lambda i_X$ n'est pas surjectif.

Proposition 4.1. *Si X est un espace de Banach de dimension infinie et $F : X \to X$ est un opérateur linéaire continu compact, alors $0 \in \sigma(F)$.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $0 \notin \sigma(F)$ alors F^{-1} est continu, donc l'identité $i_X = F^{-1}F$ est compacte et, par conséquent, $\dim X < \infty$. □

Observons que 0 n'est pas forcément une valeur propre de F.

Proposition 4.2. *Si F est linéaire et continu, alors $\sigma(F)$ est fermé et inclus dans $[-\|F\|, \|F\|]$.*

DÉMONSTRATION. Montrons que si $|\lambda| > \|F\|$, alors $\lambda \in \rho(F)$. Effectivement, pour tout $y \in X$, l'application $x \mapsto \frac{1}{\lambda}(Fx - y)$ est contractante, donc d'après le théorème VI.6.1 de Banach, il existe x tel que $x = \frac{1}{\lambda}(Fx - y)$, ce qui veut dire que $Fx - \lambda x = y$ admet une solution pour tout $y \in X$.

Montrons que la résolvante est ouverte. Si $\lambda_0 \in \rho(F)$ alors tout λ tel que

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|F - \lambda_0 i_X\|}$$

appartient à $\rho(F)$. Montrons que pour un tel $\lambda \neq \lambda_0$ et pour $y \in X$, il existe $x \in X$ tel que

$$Fx - \lambda x = y. \tag{XI.7}$$

Si un tel x existe, alors $Fx - \lambda_0 x = y + (\lambda - \lambda_0)x$. Soit

$$S_y(x) := (\lambda - \lambda_0)(F - \lambda_0 i_X)^{-1}\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_0} y + x\right).$$

Observons que l'opérateur S_y est contractant si

$$|\lambda - \lambda_0| \|(F - \lambda_0 i_X)^{-1}\| < 1,$$

et alors il existe $x = S_y(x)$, c'est-à-dire x vérifie (XI.7). □

Théorème 4.3. *Si F est compact, alors tout $\lambda \in \sigma(F) \setminus \{0\}$ est isolé.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $(\lambda_n)_n$ est une suite injective d'éléments de $\sigma(F)\backslash\{0\}$ et $\lim_{n\to\infty}\lambda_n$ existe. Nous montrerons que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$.

Soit $0 \neq e_n \in \ker(F - \lambda_n i_X)$ et

$$E_n = \mathrm{lin}\{e_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Alors l'ensemble $\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ est linéairement indépendant : admettons le résultat à l'ordre n et supposons que $e_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, alors

$$\lambda_{n+1}\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = \lambda_{n+1}e_{n+1} = Fe_{n+1} = \sum_{k=1}^n \alpha_k F e_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k e_k,$$

donc $\sum_{k=1}^n \alpha_k(\lambda_{n+1}-\lambda_k)e_k = 0$, ainsi $\alpha_k(\lambda_{n+1}-\lambda_k) = 0$ et, par conséquent, $\alpha_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$, ce qui est absurde. Ainsi $(E_n)_n$ est strictement croissante.

D'autre part,

$$(F - \lambda_n i_X)E_n \subset E_{n-1}.$$

Effectivement, $Fe_k - \lambda_n e_k = (\lambda_k - \lambda_n)e_k$, donc $(F - \lambda_n i_X)e_k \in E_k$ si $k < n$ et $Fe_n - \lambda_n e_n = 0$. Selon le lemme 2.3 de Riesz, il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$ et

$$\mathrm{dist}(x_n, E_{n-1}) \geq 1 - \varepsilon. \tag{XI.8}$$

Donc, pour $2 \leq m < n$,

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n,$$

et puisque les trois premiers termes à droite de l'égalité suivante

$$\frac{Fx_m}{\lambda_m} - \frac{Fx_n}{\lambda_n} = \frac{Fx_m - \lambda_m x_m}{\lambda_m} + x_m - \frac{Fx_n - \lambda_n x_n}{\lambda_n} - x_n$$

appartiennent à E_{n-1}, nous pouvons utiliser (XI.8). Ainsi si $\lambda = \lim_{n\to\infty}\lambda_n \neq 0$, alors il existe n_0 tel que $0 < |\lambda_n|, |\lambda_m| < 2|\lambda|$, donc

$$\|Fx_n - Fx_m\| \geq \frac{1}{2|\lambda|}(1-\varepsilon)$$

pour $n, m > n_0$, ce qui donne une contradiction, car F est compact. $\square$

5. Décomposition spectrale

Soit X un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire continu $F : X \to X$ est dit *auto-adjoint* si $F^* = F$. On pose

$$m = \inf\{\langle Fx, x\rangle : \|x\| \leq 1\} \text{ et } M = \sup\{\langle Fx, x\rangle : \|x\| \leq 1\}.$$

Proposition 5.1. *Si F est un opérateur continu auto-adjoint, alors $\sigma(F) \subset [m, M]$ et $m, M \in \sigma(F)$.*

DÉMONSTRATION. Si $\lambda > M$, alors puisque $\langle Fx, x\rangle \leq M\langle x, x\rangle$,

$$\langle \lambda x - Fx, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle - \langle Fx, x\rangle \geq \lambda\langle x, x\rangle - M\langle x, x\rangle = (\lambda - M)\|x\|^2,$$

pour tout $x \in X$. D'après le théorème 1.3 de Lax-Milgram appliqué à $b(x,h) = \langle \lambda x - Fx, h\rangle$, l'opérateur $\lambda i_X - F$ est bijectif, donc $\lambda \in \rho(F)$. Nous allons montrer que $M \in \sigma(F)$, la preuve de $m \in \sigma(F)$ étant analogue.

La forme $b(x,y) = \langle Mx - Fx, y\rangle$ est bilinéaire, continue, symétrique et

$$b(x,x) = \langle Mx - Fx, x\rangle \geq 0.$$

D'après l'inégalité (X.2) de Schwarz,

$$|\langle Mx - Fx, y\rangle| \leq \langle Mx - Fx, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle My - Fy, y\rangle^{\frac{1}{2}},$$

donc en divisant cette inégalité par $\|y\|$, on déduit qu'il existe $c(y) \geq 0$ tel que

$$\|Mx - Fx\| \leq c(y)\langle Mx - Fx, x\rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{XI.9}$$

pour tout $x \in X$. Si $(x_n)_n$ est une suite telle que $\|x_n\| = 1$ et $M = \lim_{n\to\infty}\langle Fx_n, x_n\rangle$, alors grâce à (XI.9) $\lim_{n\to\infty}\|Mx_n - Fx_n\| = 0$.

Si M appartenait à $\rho(F)$, alors $(M\,i_X - F)^{-1}$ serait continu, donc

$$x_n = (M\,i_X - F)^{-1}(Mx_n - Fx_n),$$

et, par conséquent, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, contrairement à $\|x_n\| = 1$. Ceci montre que $M \in \sigma(F)$ □

Proposition 5.2. *Si F est auto-adjoint et $\sigma(F) = \{0\}$, alors $F = 0$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 5.1, $\langle Fx, x\rangle = 0$ pour tout $x \in X$, donc

$$2\langle Fx, y\rangle = \langle F(x+y), x+y\rangle - \langle Fx, x\rangle - \langle Fy, y\rangle = 0$$

pour chaque $x, y \in X$ donc $F = 0$. □

Théorème 5.3. *Si X est un espace de Hilbert séparable, $F : X \to X$ est un opérateur compact auto-adjoint, alors X admet une base de Hilbert formée de vecteurs propres de F.*

DÉMONSTRATION. Puisque, en vertu du théorème 4.3, le spectre d'un opérateur compact ne peut avoir d'autres points d'accumulation que 0, $\sigma(F)$ est dénombrable.

Soit $\{\lambda_n : n \in N\}$, où $N \subset \mathbb{N}$, l'ensemble des valeurs propres distinctes de F, tel que $\lambda_0 := 0$ si 0 est une valeur propre de F. Posons

$$E_n := \ker(F - \lambda_n\, i_X).$$

On sait déjà que $0 < \dim E_n < \infty$ pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq \dim E_0 \leq \infty$. Les sous-espaces E_n sont orthogonaux, car si $n \neq m, x_n \in E_n$ et $x_m \in E_m$, alors

$$\lambda_m\langle x_n, x_m\rangle = \langle x_n, Fx_m\rangle = \langle Fx_n, x_m\rangle = \lambda_n\langle x_n, x_m\rangle,$$

donc $(\lambda_m - \lambda_n)\langle x_n, x_m\rangle = 0$ et alors $\langle x_n, x_m\rangle = 0$.

Montrons que $E := \operatorname{lin}(\bigcup_{n\in N} E_n)$ est dense dans X. Si $y \in E^\perp$ alors $Fy \in E^\perp$. Effectivement si $x \in E$ alors $Fx \in E$, car E consiste des vecteurs propres de F, donc $\langle x, Fy\rangle = \langle Fx, y\rangle = 0$. La restriction F_0 de F à $E^\perp$ est un opérateur compact et $\sigma(F_0) = \{0\}$ parce que toute valeur propre de F_0 est aussi celle de F. Ainsi l'espace des vecteurs propres de F est inclus dans E, donc orthogonale au domaine de F_0.

Par conséquent, $F_0 = 0$ et alors $E^\perp = \{0\}$. □

Puisque pour tout $x \in X$ et tout $n \in N$ il existe $x_n \in E_n$ telle que $x = \sum_{n\in N} x_n$,

Corollaire 5.4. *Si F est un opérateur compact auto-adjoint dans un espace de Hilbert X et $\{\lambda_n : n \in N\}$ est son spectre, alors pour tout $x \in X$ et tout $n \in N$, il existe un vecteur propre x_n correspondant à λ_n de sorte que*

$$Fx = \sum_{n\in N} Fx_n = \sum_{n\in N} \lambda_n x_n.$$

6. Théorie de Sturm-Liouville

La théorie des équations différentielles linéaires, ordinaires et partielles, est un domaine où la théorie spectrale joue un rôle important. Elle permet de résoudre de telles équations en décomposant des espaces fonctionnels selon les valeurs et vecteurs propres des opérateurs différentiels correspondants.

FIGURE XI.2. Charles Sturm (1803-1855) et Joseph Liouville (1809-1882)

C'est pourquoi nous allons esquisser dans cette section la théorie spectrale des *opérateurs différentiels* et ses applications aux problèmes dits *aux limites.*

Considérons l'opérateur

$$L(w) := (pw')' - qw, \tag{XI.10}$$

où $p, p', q \in C([0,1])$ et $p(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Le domaine de L consiste des éléments de $L_2(0,1)$ coïncidant presque partout avec un élément de $C^2([0,1])$ (l'espace vectoriel des fonctions 2-fois continûment dérivables).

Le *problème de Sturm-Liouville* consiste à trouver les fonctions w telles que

$$\text{(XI.11)} \qquad \begin{aligned} L(w)(x) &= -f(x), \\ B_0 w = 0 &= B_1 w, \end{aligned}$$

où L est de la forme (XI.10), f est continue et les conditions au bord sont données par deux opérateurs (de *trace*) de dimension 1,

$$\text{(XI.12)} \qquad \begin{aligned} B_0 w &= \alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0), \\ B_1 w &= \alpha_1 w(1) + \beta_1 w'(1), \end{aligned}$$

tels que $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$ et $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$. Les conditions au bord déterminent un sous-espace vectoriel auquel on restreint l'opérateur L.

Exemple 6.1. Soit $L_\lambda(w) := w'' - \lambda w$ pour $w \in C^2([0,1])$. Cet opérateur correspond à (XI.10) avec $p = 1$ et $q = \lambda$. La solution complexe générale de

$$\text{(XI.13)} \qquad w'' - \lambda w = 0,$$

est $w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$, où $a, b \in \mathbb{C}$. Les conditions au bord

$$\text{(XI.14)} \qquad w(0) = 0 = w(1),$$

entraînent $0 = w(0) = a + b$ et $0 = w(1) = ae^{\sqrt{\lambda}} + be^{-\sqrt{\lambda}}$. Par conséquent, $b = -a$ et si $a \neq 0$, alors

$$e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}},$$

c'est-à-dire $e^{2\sqrt{\lambda}} = 1$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2\sqrt{\lambda} = 2\pi n$. Il s'ensuit que λ est nécessairement de la forme $\lambda = -\pi^2 n^2$ donc $\sqrt{\lambda} = \pm i\pi n$ et, par conséquent, $w(x) = a(e^{i\pi nx} - e^{-i\pi nx}) = 2ai \sin n\pi x$. On conclut qu'une partie réelle de la solution est $\Re w(x) = r \sin n\pi x$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}$.

Dans cet exemple, nous avons considéré la restriction $\widehat{L}_\lambda$ d'un opérateur linéaire $L_\lambda : C^2([0,1]) \to C([0,1])$ à l'espace vectoriel

$$W := \left\{ w \in C^2([0,1]) : w(0) = 0 = w(1) \right\}.$$

Compte tenu des applications, notamment aux équations aux dérivées partielles, on situe souvent L_λ dans $L_2(0,1)$ en précisant le sens dans ce cas de la dérivation et des conditions au bord, en obtenant ainsi le problème de la description du noyau de $\widehat{L}_\lambda : \operatorname{dom} \widehat{L}_\lambda \to L_2(0,1)$.

La recherche des $w \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\widehat{L}_\lambda w = 0$ équivaut à la recherche des valeurs propres λ et des vecteurs propres correspondants de l'opérateur Δ, défini par $\Delta w := w''$ (le *laplacien* uni-dimensionnel), restreint à W. Autrement dit, on cherche à déterminer les λ et w tels que

$$\widehat{\Delta} w = \lambda w.$$

Exemple 6.2. Pour le même problème (XI.13), mais avec les conditions au bord, par exemple,

$$w'(0) = 0 = w'(1), \tag{XI.15}$$

la solution générale $w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$ de (XI.13) doit remplir les conditions (XI.15), c'est-à-dire $0 = w'(0) = \sqrt{\lambda}(a-b)$ et $0 = w'(1) = \sqrt{\lambda}(ae^{\sqrt{\lambda}} - be^{-\sqrt{\lambda}})$. Or, $\lambda = 0$ donne la solution constante égale à 0 et si $\lambda \neq 0$, alors $a = b$ et $e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}}$, donc, comme dans l'exemple 6.1, $\sqrt{\lambda} = \pm i\pi n$. Ceci donne $w(x) = a(e^{i\pi nx} + e^{-i\pi nx}) = 2a\cos n\pi x$, donc c'est une solution réelle pour tout $a \in \mathbb{R}$ tout $n \in \mathbb{N}_1$.

Proposition 6.3. *L'opérateur* (XI.10) *vérifie la* formule de Green *suivante*

$$\int_0^1 [uL(v) - vL(u)]\, dx = p\,[uv' - vu']_0^1 \tag{XI.16}$$

pour tous $u, v \in C^2([0,1])$

Démonstration. L'exercice 3. □

On cherche les solutions de (XI.11) de la forme

$$w(x) = \int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Une fonction $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ s'appelle une *solution fondamentale* ou une *fonction de Green* de L si G est continue, G_x et G_{xx} sont continues dans $\{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : x < y\}$ et dans $\{(x,y) \in [0,1]\times[0,1] : y < x\}$ et

$$\begin{aligned} B_0G(\cdot,y) &= 0 = B_1G(\cdot,y),\\ LG(\cdot,y)(x) &= 0 \text{ pour } x \neq y,\\ G_x(y_+,y) - G_x(y_-,y) &= -\frac{1}{p(y)} \end{aligned} \tag{Green}$$

et pour tout $y \in [0,1]$.

Théorème 6.4. *Si f est continue par morceaux et G est une fonction de Green pour* (XI.11), *alors u est une solution de* (XI.11) *si et seulement si*

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy. \tag{XI.17}$$

Démonstration. Puisque $\frac{1}{p}$ est bornée, G_x est bornée, donc on peut passer avec $\frac{d}{dx}$ sous le signe d'intégrale dans (XI.17), obtenant

$$u'(x) = \int_0^1 G_x(x,y) f(y)\, dy.$$

Compte tenu de la discontinuité de G_x en $x = y$, on tire

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x G_x(x,y)f(y)\,dy + \int_x^1 G_x(x,y)f(y)\,dy\right] \\
&= \int_0^1 G_{xx}(x,y)f(y)\,dy + f(x)\left[G_x(x,x_-) - G_x(x,x_+)\right] \\
&= \int_0^1 G_{xx}(x,y)f(y)\,dy + f(x)\left[G_x(x_+,x) - G_x(x_-,x)\right] \\
&= \int_0^1 G_{xx}(x,y)f(y)\,dy - \frac{f(x)}{p(x)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
L(u)(x) &= \left[pu'' + p'u' - qu\right](x) \\
&= \int_0^1 \left[pG_{xx} + p_xG_x - qG\right](x,y)\; f(y)\,dy - f(x) \\
&= \int_0^1 LG\,(\cdot,y)\;(x)f\,(y)dy - f(x) = -f(x),
\end{aligned}$$

car $LG\,(\cdot,y) = 0$ presque partout.

Réciproquement, si u est une solution de (XI.11) avec des conditions au bord, alors en appliquant la formule de Green (XI.16) à u et G, on obtient

$$-\int_0^1 G(x,y)\,f(y)\,dy = \int_0^1 G(x,y)\,L(u)(y)\,dy$$

$$= \int_0^1 uL(G(x,\cdot)(y)dy + p\left[u'G - G'u\right]_0^x + p\left[u'G - G'u\right]_x^1$$

$$= \left(G'(x,x+) - G'(x,x-)\right)\,p(x)\,u(x) = -u(x).$$

□

Si u_0 est une solution de $L(u_0) = 0$ vérifiant $B_0u_0 = 0$, alors une solution générale est de la forme c_0u_0, et u_1 est une solution de $L(u_1) = 0$ vérifiant $B_1u_1 = 0$, alors une solution générale est de la forme c_1u_1.

Si le *Wronskian*

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_0(x) & u_1(x) \\ u_0'(x) & u_1'(x) \end{vmatrix} = u_0(x)u_1'(x) - u_1(x)u_0'(x)$$

n'est pas nul, les deux familles de solutions sont indépendantes. Alors en $x \in]0,1[$, les courbes de ces deux familles ne peuvent pas avoir un *point de contact*, c'est-à-dire x tel que $c_0u_0(x) - c_1u_1(x) = 0$ et $c_0u_0'(x) - c_1u_1'(x) = 0$, car ceci signifierait que $c_0 = c_1 = 0$.

Lemme 6.5. *Si W est le Wronskian pour L de* (XI.11), *alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $p(x)W(x) = a$.*

DÉMONSTRATION. On a $W = u_0u_1' - u_0'u_1$ et on calcule

$$\begin{aligned} W' &= u_0'u_1' + u_0u_1'' - u_1'u_0' - u_1u_0'' \\ &= u_0u_1'' - u_1u_0''. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (pW)' &= p'W + pW' \\ &= p'u_0u_1' - p'u_0'u_1 + p(u_0u_1'' - u_1u_0'') \\ &= u_0L(u_1) - u_1L(u_0) = 0, \end{aligned}$$

car L est auto-adjoint et u_0, u_1 satisfont aux conditions au bord. Donc $p(x)W(x)$ est constante. □

Autrement dit, il y une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$c\left(u_0(x)u_1'(x) - u_1(x)u_0'(x)\right) = -\frac{1}{p(x)}$$

Par conséquent, en choisissant

$$G(x,y) = \begin{cases} c\,u_0(x)u_1(y), & \text{si } x \leq y, \\ c\,u_1(x)u_0(y), & \text{si } y \leq x, \end{cases}$$

nous obtenons une coïncidence pour $x = y$, et

$$\begin{aligned} G_x(x,y)|_{x=y+} - G_x(x,y)|_{x=y-} &= c\left(u_0(y)u_1'(y) - u_0'(y)u_1(y)\right) \\ &= cW(y) = -\frac{1}{p(y)}. \end{aligned}$$

Si le problème (XI.11) admet une fonction G telle que

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\,f(y)dy$$

en est une solution, alors en posant $f = -\lambda u$, nous transformons le problème des valeurs et des fonctions propres

$$L(u) = \lambda u$$

au problème

$$u(x) = -\lambda \int_0^1 G(x,y)\,u(y)\,dy.$$

Par conséquent, $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de L si et seulement si $-\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de l'opérateur intégral $(Ku)(x) = \int_0^1 G(x,y)\,u(y)\,dy$.

Théorème 6.6. *Si L est de type* (XI.11) *admet une fonction de Green, alors ses valeurs propres sont simples formant une suite $(\lambda_n)_n$ décroissante vers $-\infty$ et il existe une base orthonormale $(v_n)_n$ composée des fonctions propres correspondantes.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 5.3, si $(\frac{1}{\lambda_n})_n$ admet un point d'accumulation λ, alors nécessairement $\lambda = 0$. D'autre part, λ_n sont simples et $\sup_{n<\infty} \lambda_n < \infty$. En plus, leurs valeurs propres forment une base hilbertienne, donc $(\lambda_n)_n$ doit être infinie et $\lim_n \lambda_n = -\infty$. □

La théorie de Sturm-Liouville est appliquée aux équations aux dérivées partielles.

Exemple 6.7. L'équation de l'onde

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx}, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ &u(x,0) = f(x);\ u_t(x,0) = g(x), \end{aligned} \tag{XI.18}$$

modélise une *corde vibrante* dans un plan, fixée à ses extrémités, telle que sa position au moment $t = 0$ est donnée par une fonction f et sa vitesse initiale (dans le même plan) par une fonction g.

On suppose que $u : [0,1] \times]0,\infty[$ soit continue et 2 fois dérivable dans $]0,1[\times]0,\infty[$, les dérivées partielles de v par rapport rapport à x et t sont notée par v_x et v_t respectivement. Souvent on généralise les conditions initiales comme les limites $\lim_{t\to 0} \|u(\cdot,t) - f\|_2$ et $\lim_{t\to 0} \|u_t(\cdot,t) - g\|_2$. Ainsi (XI.18) peut être interprétée comme un problème d'évolution dans $L_2(0,1)$.

En supposant qu'une solution est de la forme $u(x,t) = w(x) \cdot h(t)$ (*séparation de variables*), on obtient

$$w(x) \cdot h_{tt}(t) = w_{xx}(x)h(t)$$

pour tout $x \in]0,1[$ et $t > 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{h_{tt}(t)}{h(t)} = \frac{w_{xx}(x)}{w(x)} = \lambda$$

pour x et t pour lesquels $u(x,t) \neq 0$, c'est-à-dire le système d'équations

$$\begin{cases} h_{tt} - \lambda h = 0, \\ w_{xx} - \lambda w = 0. \end{cases} \tag{XI.19}$$

La seconde équation est celle de l'exemple 6.1. En conséquence, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_n = -\pi^2 n^2$ et $w_n(x) = a \sin \pi n x$. Pour tout n, on résout la première équation de (XI.19)

$$h_{tt} + \pi^2 n^2 h = 0.$$

La solution générale (réelle) est $h_n(t) = a_n \cos \pi n t + b_n \sin \pi n t$, où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Ainsi la solution générale de (XI.18) est

$$u(x,t) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x (a_n \cos \pi n t + b_n \sin \pi n t).$$

Selon l'exercice X.3, $\{\sin \pi n t : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{\cos \pi n t : n \in \mathbb{N}\}$ constitue une base de Hilbert dans $L_2(0,1)$. Donc d'après les conditions initiales,

$$\begin{aligned} f(x) = u(x,0) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x, \\ g(x) = u_t(x,0) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \pi n \sin \pi n x, \end{aligned} \tag{XI.20}$$

c'est-à-dire,

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx,\ b_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 g(x)\sin n\pi x\,dx,$$

selon la *méthode de Fourier*. Si $f, g \in L_2(0,1)$, alors les conditions initiales (XI.20) sont interprétées au sens de la convergence dans $L_2(0,1)$.

Exemple 6.8. L'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\\ &u(x,0) = f(x), \end{aligned} \tag{XI.21}$$

décrit à l'évolution de la température dans un *fil conducteur isolé*, dont les bouts sont maintenus dans la température constante 0 et dont la température initiale est donnée par f. En supposant qu'une solution est de la forme $u(x,t) = w(x)\cdot h(t)$, on obtient

$$w(x)\cdot h_t(t) = w_{xx}(x)h(t),$$

donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{h_t(t)}{h(t)} = \frac{w_{xx}(x)}{w(x)} = \lambda$$

pour x et t pour lesquels $u(x,t) \neq 0$, ce qui devient

$$\begin{cases} h_t - \lambda h = 0,\\ w_{xx} - \lambda w = 0. \end{cases} \tag{XI.22}$$

Comme avant, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_n = -\pi^2 n^2$ et $w_n(x) = a\sin\pi n x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on résout la première équation de (XI.22) en obtenant $h_n(t) = ae^{-\pi^2 n^2 t}$. Ainsi la solution générale de l'équation de la chaleur (XI.21) est

$$u(x,t) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \sin\pi n x\cdot e^{-\pi^2 n^2 t}, \tag{XI.23}$$

et d'après les conditions initiales,

$$f(x) = u(x,0) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \sin\pi n x,$$

où

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx.$$

Exercices

Solutions : pages 340-343.

(1) Montrer que l'espace $K(X,Y)$ des opérateurs compacts est fermé dans $L_c(X,Y)$.

(2) Montrer que si $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x,y)\, u(y)\, dy$$

est compact dans $C([0,1])$, donc dans $L_2(0,1)$.

(3) Soit $p > 0, p', q \in C([0,1]), u, v, w \in C^2([0,1])$ et

$$L(w) := (pw')' - qw. \tag{XI.24}$$

Montrer

(a) la formule de Green

$$\int_0^1 [uL(v) - vL(u)]\, dx = p\left[uv' - vu'\right]_0^1.$$

(b) que L restreint aux w vérifiant

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) = 0 = \alpha_1 w(1) + \beta_1 w'(1),$$

est auto-adjoint,

(c) que toutes ses valeurs propres sont inférieures à

$$-\inf\left\{q(x) : 0 \le x \le 1\right\}.$$

(4) Montrer que toute fonction de Green (XI.16) est symétrique.

ANNEXE A

Nombres ordinaux

1. Ordre

Soit X un ensemble ordonné par $\leq$, c'est-à-dire, une relation binaire sur X vérifiant

$$x \leq x, \tag{A.1}$$

$$x_0 \leq x_1 \ \wedge \ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow x_0 \leq x_2, \tag{A.2}$$

$$x_0 \leq x_1 \ \wedge \ x_1 \leq x_0 \Longrightarrow x_0 = x_1. \tag{A.3}$$

L'ordre strict $<$ associé à $\leq$ est défini par $x_0 < x_1$ si $x_0 \leq x_1$ et $x_0 \neq x_1$. Si X et Y sont deux ensembles ordonnés et $f : X \to Y$ est une application, alors f est dite *croissante* si

$$x_0 \leq x_1 \Longrightarrow f(x_0) \leq f(x_1),$$

et *strictement croissante* si

$$x_0 < x_1 \Longrightarrow f(x_0) < f(x_1).$$

Bien sûr, une application croissante et injective est strictement croissante.

Si f est croissante et bijective et si l'application réciproque f^{-1} est croissante, alors f s'appelle *isomorphisme (d'ordre)*. Deux ensembles ordonnés X, Y sont *isomorphe* ($X \simeq Y$), s'il existe un isomorphisme entre eux. Si A est une partie d'un ensemble ordonné X, alors notons

$$\begin{aligned} \operatorname{Min} A \ &: \ = \big\{a \in A : \underset{x \in A}{\forall} \ a \leq x\big\}, \\ \operatorname{Max} A \ &: \ = \big\{a \in A : \underset{x \in A}{\forall} \ x \leq a\big\}. \end{aligned}$$

Si $A = \varnothing$, alors $\operatorname{Min} A = \operatorname{Max} A$.[1] Si $\operatorname{Min} A$ (respectivement, $\operatorname{Max} A$) n'est pas vide, alors c'est un singleton[2]. On écrit alors $\operatorname{Min} A = \{\min A\}$ et $\operatorname{Max} A = \{\max A\}$.

La *borne supérieure (supremum)* $\sup B$ de B est définie comme le plus petit élément de l'ensemble $\{x \in X : \underset{b \in B}{\forall} b \leq x\}$ (des *majorants* de B). La *borne inférieure (infimum)* $\inf A$ de A est définie comme le plus grand élément de l'ensemble $\{x \in X : \underset{b \in B}{\forall} b \geq x\}$ (des *minorants* de B).

---

1. La proposition $\forall_{x \in \varnothing} \varphi(x, a)$ est vraie pour tout a, donc $\{a \in \varnothing : \forall_{x \in \varnothing} \varphi(x, a)\} = \varnothing$.
2. Si $a_0, a_1 \in \operatorname{Min} A$, alors, d'après la définition, $a_0 \leq a_1$ et $a_1 \leq a_0$, donc $a_0 = a_1$ d'après (A.3).

Un ensemble ordonné X est *totalement ordonné* si pour chaque couple $x_0, x_1 \in X$, ou $x_0 \leq x_1$ ou bien $x_0 \geq x_1$.

2. Bon ordre

Un ensemble ordonné X est *bien ordonné* si $\operatorname{Min} A \neq \varnothing$ pour tout $\varnothing \neq A \subset X$. Une partie d'un ensemble bien ordonné est bien ordonnée. Tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné, car pour chaque couple $x_0, x_1 \in X$, l'ensemble $\{x_0, x_1\}$ admet l'élément plus petit des deux.

Exemple 2.1. On voit facilement qu'avec l'ordre naturel, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ et $[0,1]$ ne sont pas bien ordonnés, tandis que $\mathbb{N}$ est bien ordonné[3].

Proposition 2.2. *Soit X un ensemble bien ordonné et $f : X \to X$ strictement croissante, alors pour tout $x \in X$,*

$$x \leq f(x).$$

DÉMONSTRATION. Sinon, l'ensemble

$$A := \{x \in X : x > f(x)\} \neq \varnothing.$$

Comme X est bien ordonné, il existe $x_0 = \min A$. Alors $x_1 := f(x_0) < x_0$ et, puisque f est strictement croissante, $f(x_1) < f(x_0) = x_1$, c'est-à-dire $x_1 \in A$ et $x_1 < \min A$: une contradiction. □

Proposition 2.3. *Si X est un ensemble bien ordonné et $f : X \to X$ est un isomorphisme (d'ordre), alors f est l'identité : $f(x) = x$ pour tout $x \in X$.*

DÉMONSTRATION. Si f est un isomorphisme, alors, d'après la proposition 2.2, $x \leq f(x)$ et d'autre part $y \leq f^{-1}(y)$ pour tout $y \in X$, donc $x \leq f(x) \leq f^{-1}(f(x)) = x$. □

Proposition 2.4. *Si X et Y sont bien ordonnés et isomorphes, alors il existe un seul isomorphisme entre X et Y.*

DÉMONSTRATION. Si $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont des isomorphismes, alors $g^{-1} \circ f : X \to X$ est un isomorphisme, donc d'après la proposition 2.3, $g^{-1} \circ f = i_X$ et par conséquent, $g = f$. □

Proposition 2.5. *Si X, Y sont totalement ordonnés et $f : X \to Y$ est une bijection strictement croissante, alors f est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Montrons que $f^{-1} : Y \to X$ est strictement croissante. Si $y_0 < y_1$ mais il n'est pas vrai que $f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y_1)$, alors $f^{-1}(y_0) \geq f^{-1}(y_1)$, car l'ordre de X est total. Donc

$$y_0 = f(f^{-1}(y_0)) \geq f(f^{-1}(y_1)) = y_1,$$

ce qui est une contradiction. □

Cette proposition n'est plus valable pour un ordre qui n'est pas total.

---

3. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet le plus petit élément.

Exemple 2.6. Soit $X = 2^{\{0,1\}}$ avec l'ordre défini par l'inclusion. On considère un second ordre $\leq$ sur X défini par $\varnothing \leq \{0\} \leq \{1\} \leq \{0,1\}$. Alors l'identité est strictement croissante de $(X, \subset)$ sur $(X, \leq)$ sans être un isomorphisme d'ordre.

$$\begin{tikzcd}
& \{0,1\} & \\
\{0\} \arrow[ur] & & \{1\} \arrow[ul] \\
& \varnothing \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE A.1. Toute flèche représente l'inclusion stricte $\subsetneq$.

Si W est bien ordonné, alors pour tout $x \in W$ l'ensemble

$$W(x) := \{w \in W : w < x\}$$

est appelé le *segment initial* de W correspondant à x.

Proposition 2.7. *Un ensemble bien ordonné n'est isomorphe à aucun de ses segments initiaux.*

DÉMONSTRATION. Si W est bien ordonné, $x \in W$ et $f : W \to W(x)$ est strictement croissante, alors $f(x) \in W(x)$, donc $f(x) < x$ contredisant la proposition 2.2. □

Théorème 2.8 (Trichotomie). *Si X, Y sont deux ensembles bien ordonnés, alors on a une des possibilités :*

(1) $X \simeq Y$

(2) Il existe $y_0 \in Y$ tel que $X \simeq Y(y_0)$

(3) Il existe $x_0 \in X$ tel que $Y \simeq X(x_0)$.

DÉMONSTRATION. Considérons la relation

$$F := \{(x, y) \in X \times Y : X(x) \simeq Y(y)\}.$$

Alors F et F^{-1} sont injectives. Effectivement, si $y_0, y_1 \in F(x)$ alors $Y(y_0) \simeq X(x) \simeq Y(y_1)$, donc $y_0 = y_1$, et de même pour F^{-1}. Par conséquent, il existe une application $f : F^{-1}(Y) \to F(X)$ telle que $F(x) = \{f(x)\}$ pour tout $x \in F^{-1}(Y)$.

Si $(x_0, y_0) \in F$, et $h : X(x_0) \to Y(y_0)$ est l'isomorphisme, alors pour tout $x < x_0$ on a $X(x) \simeq Y(h(x))$, donc $(x, h(x)) \in F$ et $h(x) < y_0$. Ceci montre que f est strictement croissante et que si $x < x_0$ et $x_0 \in F^{-1}(Y)$, alors $x \in F^{-1}(Y)$. Symétriquement, si $y < y_0 \in F(X)$ alors $y \in F(X)$.

Si $F(X) = Y$ alors $X \simeq Y$ d'après la proposition 2.5, car f est strictement croissante et bijective.

Si $F(X) \neq Y$ alors il existe $y_0 = \min(Y \setminus F(X))$ et par conséquent $F(X) = Y(y_0)$. Nécessairement, $F^{-1}(Y) = X$, car autrement il existe $x_0 = \min(X \setminus F^{-1}(Y))$ et l'application $f : X(x_0) \to Y(y_0)$ est bijective et monotone, donc un isomorphisme, ce qui entraîne $(x_0, y_0) \in F$ en contradiction avec $x_0 = \min(X \setminus F^{-1}(Y))$. Il suit que $X \simeq Y(y_0)$. Symétriquement, si $F(X) = Y$, mais $F^{-1}(Y) \neq X$, alors il existe $x_0 = \min(X \setminus F^{-1}(Y))$ et par conséquent $X(x_0) \simeq Y$. $\square$

Deux ensembles ordonnés ont le même *type d'ordre* s'ils sont isomorphes. Ceci définit une relation d'équivalence dans la classe des ensembles ordonnés. On note $t(X)$ la classe d'équivalence de X.

3. Nombres ordinaux

Un *(nombre) ordinal* est un type d'ordre d'ensemble bien ordonné (4). La classe de tous les ordinaux est notée Ord. Pour tout ordinal β, la classe $\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \beta\}$ est un ensemble (5).

On appelle 0, le type d'ordre de l'ensemble vide (6), n le type de bon ordre d'un ensemble de cardinalité n. Tous les types d'ordres totaux d'un ensemble de n éléments sont équivalents (7). L'ordre naturel de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels est noté ω_0 ou ω.

D'après le théorème 2.8, la classe des ordinaux est bien ordonnée par la relation suivante : $\alpha < \beta$ s'il existent X, Y tels que $t(X) = \alpha, t(Y) = \beta$ et il existe $y \in Y$ tel que $X \simeq Y(y)$. En particulier,

$$0 < 1 < \ldots < n < \omega_0$$

pour tout nombre naturel n.

Exemple 3.1. Soit X un ensemble dénombrable infini. On a vu que ω_0 est un bon ordre de X. Soit $x_\infty \in X$ et soit $X_0 := X \setminus \{x_\infty\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ où tous les termes sont distincts. On définit

$$\underset{0 \leq n \in \mathbb{N}}{\forall} \; x_n < x_{n+1} < x_\infty.$$

Ainsi ordonné X est bien ordonné. Son type s'appelle $\omega_0 + 1$. On observe que le type de X_0 est ω_0 et que X_0 est isomorphe avec le segment initial $X(x_\infty)$ de X.

Exemple 3.2. Dans les ensembles suivants

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},$$

considérons la relation d'appartenance $\in$. C'est une relation d'ordre strict. On voit facilement que l'ordre associé ($x \leq y$ si $x \in y$ ou $x = y$) est bon. On

---

4. Une autre définition équivalente de *nombre ordinal*, due à J. von Neumann : un ordre ordinal α est un ensemble bien ordonné transitif, c'est-à-dire tel que $\beta \in \alpha$ entraîne $\beta \subset \alpha$.

5. Car elle est isomorphe à un ensemble bien ordonné.

6. Il n'y en a qu'un, donc nécessairement bon.

7. Les isomorphismes coïncident avec les permutations.

observe que $t(\varnothing) = 0, t(\{\varnothing\}) = 1, t(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = 2, t(\{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}) = 3$, etc.

Tout ordinal α est le type d'ordre de l'ensemble de ses prédécesseurs $\{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$. Effectivement,

Proposition 3.3. *Pour tout ordinal α,*

$$\alpha = t(\{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}).$$

DÉMONSTRATION. Soit X un ensemble bien ordonné tel que $t(X) = \alpha$. D'après le théorème 2.8, $\beta < \alpha$ si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $\beta = t(X(x))$. Réciproquement, $t(X(x)) < \alpha$ pour tout $x \in X$. Donc $X \simeq \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$. □

Théorème 3.4 (Zermelo). *L'axiome du choix implique que tout ensemble peut être bien ordonné.*

DÉMONSTRATION. L'ensemble vide $\varnothing$ est bien ordonné par 0. Si $X \neq \varnothing$ alors d'après l'axiome I.2.2 du choix, il existe une application $f : 2^X \setminus \{\varnothing\} \to X$, telle que $f(A) \in A$ pour tout $\varnothing \neq A \subset X$. Soit

$$a_0 = f(X) \text{ et } a_\beta := f(X \setminus \{a_\xi : \xi < \beta\})$$

pourvu que $X \setminus \{a_\xi : \xi < \beta\}$ ne soit pas vide. On pose

$$\tau := \min\bigl\{\beta : X = \{a_\xi : \xi < \beta\}\bigr\}.$$

Alors $X = \{a_\xi : \xi < \tau\}$ est un bon ordre de X. □

Proposition 3.5 (Successeur). *Pour tout ordinal α, il existe le* successeur *de α, c'est-à-dire l'ordinal β le plus petit tel que $\alpha < \beta$.*

DÉMONSTRATION. Soit X un ensemble bien ordonné tel que $t(X) = \alpha$. D'après le théorème 3.4 de Zermelo, il existe un bon ordre sur l'ensemble 2^X. Si β est le type d'un bon ordre sur 2^X, alors $\alpha < \beta$, donc il existe le plus petit ordinal dans $\{\beta \in \mathrm{Ord} : \alpha < \beta\}$. □

D'ores et déjà nous utiliserons, sans mention, l'axiome I.2.2 du choix et le théorème 3.4 de Zermelo que tout ensemble peut être bien ordonné.

On note $S(\alpha)$ le *successeur* α. Un ordinal β est dit *ordinal successeur* s'il existe α tel que $S(\alpha) = \beta$; si un ordinal n'est pas successeur, alors il est dit *ordinal limite*. Par exemple, tout nombre naturel $n > 0$ est un ordinal successeur, et $0, \omega_0$ sont des ordinaux limite. On adopte la convention que $\sup \varnothing = 0$.

Proposition 3.6. *Un ordinal β est un ordinal limite, si et seulement si $\beta = \sup\{\alpha : \alpha < \beta\}$.*

DÉMONSTRATION. Si β est un ordinal, alors, par définition,

$$\sup\{\alpha : \alpha < \beta\} = \min\bigl\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \underset{\alpha<\beta}{\forall}\ \alpha \leq \gamma\bigr\}.$$

Bien sûr, $\min\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \forall_{\alpha<\beta}\ \alpha \le \gamma\} \le \beta$. Si β est ordinal successeur, alors $S(\min\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \forall_{\alpha<\beta}\ \alpha \le \gamma\}) = \beta$, sinon

$$\min\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \underset{\alpha<\beta}{\forall}\ \alpha \le \gamma\} = \beta.$$

□

Sur tout ensemble fini de cardinalité plus grand que 1, il existe plusieurs bons ordres. Plus précisément, si $\mathrm{card}\, X = n$ alors il y en a $n!$ bons ordres, mais tous ses bons ordres sont isomorphes. Par contre, sur un ensemble infini, il peut y avoir plusieurs bons ordres de type différent [8].

Exemple 3.7. Soit X un ensemble infini dénombrable. Alors, il existe sur X un (bon) ordre isomorphe avec l'ordre naturel de $\mathbb{N}$. Soit J un ensemble dénombrable bien ordonné, fini ou infini, et $\{A_j : j \in J\}$ une partition de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $\mathbb{N} = \bigcup_{j\in J} A_j$ et $A_j \cap A_k = \varnothing$ si $j \neq k$) telle que $\mathrm{card}\, A_j = \aleph_0$ pour tout $j \in J$. [9] Soit $f : \mathbb{N} \to X$ une bijection. Alors pour tout $x \in X$ il existe $j(x) \in J$ et un seul tel que $x \in f(A_{j(x)})$. Donc si $x_0 \neq x_1$, alors on définit

$$x_0 < x_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} j(x_0) < j(x_1), \\ j(x_0) = j(x_1) \text{ et } f^{-1}(x_0) < f^{-1}(x_1). \end{cases}$$

Les ordres obtenus ainsi à partir de deux J de cardinalités différentes ne sont pas isomorphes.

Si X est non dénombrable, alors tout type de bon ordre sur X et strictement supérieur à ω_0, car il n'y pas d'injection $f : X \to \mathbb{N}$. On note

$$\omega_1 := \min\{t(X) : \mathrm{card}\, X > \aleph_0\}.$$

Si α est un nombre ordinal et X un ensemble. On appelle une *suite de longueur* α sur X une application $\xi \mapsto x_\xi$ de $\{\xi \in \mathrm{Ord} : \xi < \alpha\}$ dans X et on la note $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$. Bien entendu, une suite $(\gamma_n)_n$ au sens classique est un cas particulier (de longueur ω_0).

Proposition 3.8. *Toute suite décroissante d'ordinaux est stationnaire.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{\gamma_\xi : \xi < \alpha\}$ telle que $\zeta < \xi$ implique $\gamma_\zeta \ge \gamma_\xi$. Supposons qu'elle ne soit pas stationnaire, c'est-à-dire il existe une suite $\{\xi_n : n < \omega\}$ telle que $\{\gamma_{\xi_n} : n < \omega\}$ a des termes distincts.

Comme $\{\gamma_{\xi_n} : n < \omega\}$ est bien ordonné, il existe $n_0 < \omega$ tel que $\gamma_{\xi_{n_0}} \le \gamma_{\xi_n}$ pour tout $n < \omega$. Donc $\gamma_{\xi_{n_0}} = \gamma_{\xi_n}$ pour tout $n_0 \le n < \omega$. Une contradiction. □

La *limite* d'une suite croissante $(\gamma_\xi)_{\xi<\alpha}$ est définie par

$$\lim\nolimits_{\xi\to\alpha} \gamma_\xi := \sup\{\gamma_\xi : \xi < \alpha\}.$$

8. On verra plus tard, que c'est vrai pour tout ensemble infini.

9. Une telle partition existe toujours. Par exemple, si J est infini, alors on peut définir $A_j := \{n \in \mathbb{N} : 2^j \nmid n\}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Une suite $(\gamma_\xi)_{\xi<\beta}$ est dite *continue*, si

$$\lim_{\xi\to\delta}\gamma_\xi = \gamma_\delta$$

pour tout ordinal limite $\delta < \beta$.

Proposition 3.9. *Pour tout ordinal ξ, soit γ_ξ un ordinal. On suppose que $\xi < \zeta$ implique $\gamma_\xi < \gamma_\zeta$. Si pour tout ordinal β, la suite $(\gamma_\xi)_{\xi<\beta}$ est continue, alors*

$$\underset{\alpha}{\forall}\underset{\beta}{\exists}\,(\alpha < \beta \text{ et } \gamma_\beta = \beta).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha_0 := \alpha$ et $\alpha_{n+1} := \gamma_{\alpha_n}$ pour $n > 0$. Puisque pour tout η la suite $(\gamma_\xi)_{\xi<\eta}$ est strictement croissante, $\alpha_{n+1} = \gamma_{\alpha_n} \geq \alpha_n > \alpha$ pour tout $n > 0$. Alors $\beta := \lim_{n\to\omega}\alpha_{n+1} = \lim_{n\to\omega}\gamma_{\alpha_n} = \gamma_\beta$. ☐

Théorème 3.10 (Récurrence transfinie). *Soit γ un ordinal et P une partie de $\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \gamma\}$ telle que*

$$0 \in P, \tag{A.4}$$

$$\Big(\underset{\alpha<\beta<\gamma}{\forall}\ \alpha \in P\Big) \Longrightarrow \beta \in P, \tag{A.5}$$

alors $P = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \gamma\}$.

DÉMONSTRATION. Sinon $\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \gamma\} \setminus P \neq \varnothing$ et alors il existe $\beta = \min(\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \gamma\} \setminus P)$. D'après (A.4)(A.5), $\beta \in P$: une contradiction. ☐

Théorème 3.11 (Zorn-Kuratowski). *Soit X un ensemble ordonné par $\leq$. Si pour toute partie totalement ordonnée L de X, il existe $w \in X$ tel que $l \leq w$ pour tout $l \in L$, alors pour tout $x \in X$ il existe un élément maximal $u \in X$ tel que $x \leq u$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$ et $x_0 := x$. Supposons que nous avons trouvé une suite strictement croissante $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ d'éléments de X. Soit

$$A_\alpha := \Big\{x \in X : \underset{\xi<\alpha}{\forall}\ x_\xi < x\Big\}.$$

Si $A_\alpha \neq \varnothing$, alors d'après l'axiome I.2.2 du choix, il existe $x_\alpha \in A_\alpha$. Il existe un ordinal β tel que $A_\beta = \varnothing$, car pour une suite $(x_\xi)_{\xi<\beta}$ d'éléments distincts de X, la cardinalité de β ne peut pas dépasser $\operatorname{card} X$. Puisque $\{x_\xi : \xi < \beta\}$ est totalement ordonnée, il existe $u \in X$ tel que $x_\xi \leq u$ pour tout $\xi < \beta$. Mais comme $A_\beta = \varnothing$, on en déduit que $u \in \{x_\xi : \xi < \beta\}$, donc $u = \max\{x_\xi : \xi < \beta\}$ et il n'existe pas dans X d'élément $y > u$. ☐

4. Arithmétique des ordinaux

Si α est le type de X ordonné par $\leq_X$ et β est le type de Y ordonné par $\leq_Y$, alors la *somme* $\alpha + \beta$ est le type de l'union disjointe $X \cup Y$ ordonnée par

$$v < w \Longleftrightarrow \begin{cases} v \in X, w \in Y \text{ ou} \\ v, w \in X, v <_X w \text{ ou} \\ v, w \in Y, v <_Y w. \end{cases}$$

On observe que
$$1+\omega=\omega<\omega+1=S(\omega).$$
Donc l'addition n'est pas commutative.

D'après l'exercice 3,

Proposition 4.1. *Soit α,β,γ ordinaux.*

(1) Si $\alpha<\beta$, alors $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

(2) Si $\alpha\leq\beta$, alors $\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$.

Le *produit* $\alpha\beta$ est le type de $X\times Y$ ordonné lexicographiquement à droite :
$$(x_0,y_0)<(x_1,y_1)\iff\begin{cases}y_0<y_1,\\ y_0=y_1 \text{ et } x_0<x_1.\end{cases}$$

D'après la proposition 3.6, l'ordinal 2 est le type d'ordre naturel de $\{0,1\}$. D'après la définition ci-dessus, $\omega_0 2$ est le type d'ordre de
$$(0,0)<(1,0)<\ldots<(n,0),\ldots<(0,1)<(1,1)<\ldots<(n,1),\ldots$$
pour tout $1<n<\omega_0$, tandis que 2ω est le type d'ordre de
$$(0,0)<(0,1)<(1,0)<(1,1)\ldots<(n,0)<(n,1),\ldots$$
En particulier,
$$2\omega_0=\omega_0<\omega_0 2=\omega_0+\omega_0.$$
Il est facile de montrer que (voir l'exercice 3)

Proposition 4.2. *Soit α,β,γ ordinaux.*

(1) Si $\alpha<\beta$, alors $\gamma\alpha<\gamma\beta$.

(2) Si $\alpha\leq\beta$, alors $\alpha\gamma\leq\beta\gamma$.

La *puissance* est définie par récurrence
$$\alpha^0=1,$$
$$\alpha^{\beta+1}:=\alpha^\beta\cdot\alpha,$$
$$\beta \text{ limite }\implies\alpha^\beta:=\sup\nolimits_{\xi<\beta}\alpha^\xi.$$
En particulier, on a
$$\begin{aligned}0 &< \omega_0<\omega_0 2=\omega_0+\omega_0<\ldots<\omega_0^2:=\omega_0\omega_0\\ &< \ldots<\omega_0^{\omega_0}<\ldots<\omega_1<\omega_1+1<\omega_1+\omega_0\ldots\end{aligned}$$

Pour tout ordinal α on définit l'*ordre canonique* de l'ensemble $\alpha\times\alpha:=\{(x,y):x,y<\alpha\}$, par l'ordre strict associé suivant :
$$(x_0,y_0)\prec(x_1,y_1)\iff\begin{cases}\max(x_0,y_0)<\max(x_1,y_1) \text{ ou}\\ \max(x_0,y_0)=\max(x_1,y_1) \text{ et } x_0<x_1 \text{ ou}\\ \max(x_0,y_0)=\max(x_1,y_1) \text{ et } x_0=x_1 \text{ et } y_0<y_1.\end{cases}$$
Par exemple, les premiers éléments pour $\prec$ sont : $(0,0)\prec(0,1)\prec(1,0)\prec(1,1)\prec(0,2)\prec(1,2)\prec(2,0)\prec(2,1)\prec(2,2)\prec$, etc.

Proposition 4.3. *Pour tout ordinal θ, l'ensemble $\theta \times \theta$ avec l'ordre canonique est bien ordonné.*

DÉMONSTRATION. Si $\varnothing \neq A \subset \theta \times \theta$, alors soit

$$\alpha_0 := \min \{\max(\beta, \delta) : (\beta, \delta) \in A\}.$$

Ceci existe car $\varnothing \neq \{\max(\beta, \delta) : (\beta, \delta) \in A\} \subset \mathrm{Ord}$. Soit

$$B := \{(\beta, \delta) \in A : \alpha_0 = \max(\beta, \delta)\}.$$

Si $\beta = \alpha_0$ pour tout $(\beta, \delta) \in B$, alors $\delta_0 := \min \{\delta : (\alpha_0, \delta) \in B\}$ vérifie $(\alpha_0, \delta_0) = \min A$. S'il existe $(\beta, \delta) \in B$ tel que $\beta < \alpha_0$, alors $(\beta, \delta) = (\beta, \alpha_0)$, alors $\beta_0 := \min \{\beta : (\beta, \alpha_0) \in B\}$ vérifie $(\beta_0, \alpha_0) = \min A$. □

On observe que $\alpha \times \alpha := \{(\xi, \eta) : \xi < \alpha, \eta < \alpha\}$ est le segment initial de $(0, \alpha)$.

Soit $\Gamma(\alpha, \beta)$ le type ordinal de $\{(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \prec (\alpha, \beta)\}$. Si $(\alpha_0, \beta_0) \prec (\alpha_1, \beta_1)$ alors $\Gamma(\alpha_0, \beta_0) < \Gamma(\alpha_1, \beta_1)$, car $\Gamma(\alpha_0, \beta_0)$ est un segment initial de $\Gamma(\alpha_1, \beta_1)$.

Proposition 4.4. *Pour tout ordinal θ il existe des ordinaux α et β tels que $\theta = \Gamma(\alpha, \beta)$.*

DÉMONSTRATION. Bien sûr, $0 = \Gamma(0, 0)$. Supposons que pour tout $\xi < \delta$ il existe des ordinaux x_ξ, y_ξ tels que $\Gamma(x_\xi, y_\xi) = \xi$. Alors

$$\sup \{\Gamma(x_\xi, y_\xi) + 1 : \xi < \delta\} = \sup \{\xi + 1 : \xi < \delta\} = \delta.$$

On conclut grâce au théorème 3.10. □

Soit

$$\gamma(\alpha) := \Gamma(\alpha, \alpha). \tag{A.6}$$

Comme la fonction γ est strictement croissante, $\alpha \leq \gamma(\alpha)$. Observons que $\gamma(\omega_0) = \omega_0$.

5. Nombres ordinaux-cardinaux

Pour tout nombre ordinal α on note $\operatorname{card} \alpha$, la cardinalité d'un ensemble bien ordonné de type α. Un ordinal α est dit *ordinal-cardinal* si $\operatorname{card} \beta < \operatorname{card} \alpha$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$.

On note ω_1 le premier ordinal non dénombrable. Bien sûr,

$$\omega_1 = \min \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \aleph_0 < \operatorname{card} \alpha\}.$$

Exemple 5.1. Tous les ordinaux finis, ω_0 et ω_1 sont des ordinaux-cardinaux. Par contre, $\omega_0 + 1$, $\omega_0 2$, ω_0^2 ne sont pas ordinaux-cardinaux, car ils ont la même cardinalité que ω_0 qui est un ordinal strictement petit que chacun d'entre eux.

Il existe donc une bijection entre les ordinaux-cardinaux et les cardinaux considérés dans la section I.5.

Il y a pourtant une distinction importante entre les ordinaux-cardinaux et les cardinaux. Dans le premier cas, l'addition n'est pas commutative, dans l'autre elle l'est. Par exemple, ω_0 et ω_1 sont des ordinaux-cardinaux. On a $\omega_1 < \omega_1 + \omega_0$, mais $\operatorname{card}\omega_1 = \operatorname{card}\omega_1 + \operatorname{card}\omega_0$, comme on le verra par la suite.

Il faut donc distinguer entre les deux types d'opérations arithmétiques sur les ordinaux-cardinaux et sur les cardinaux.

Proposition 5.2. *Pour tout ordinal β il existe un ordinal-cardinal plus grand que β.*

DÉMONSTRATION. Pour tout ensemble X on définit le *nombre de Hartogs*

$$h(X) = \min\{\alpha : \operatorname{card}\alpha > \operatorname{card}X\}.$$

Puisque les bons ordres sur 2^X forment un ensemble et pour tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$ avec $\operatorname{card}\alpha = 2^{\operatorname{card}X} > \operatorname{card}X$, $h(X)$ existe. Si $\beta \in \mathrm{Ord}$, alors $\operatorname{card}\beta < h(\operatorname{card}\beta)$, donc $\beta < h(\operatorname{card}\beta)$. □

Corollaire 5.3. *Pour tout ordinal β, il existe le plus petit ordinal-cardinal λ tel que $\beta < \lambda$. Sa cardinalité est notée* $\operatorname{card}(\beta)^+$.

Comme nous avons observé, ω_0 est l'ordinal-cardinal dénombrable infini, c'est-à-dire $\operatorname{card}\omega_0 = \aleph_0$.

On définit d'autres *alephs* par $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$ et $\aleph_\alpha := \sup\{\aleph_\gamma : \gamma < \alpha\}$ si α est un ordinal limite.

Nous avons dit qu'il existe une correspondance bijective entre cardinaux et ordinaux-cardinaux. Le nombre ordinal-cardinal correspondant à $\aleph_\alpha$ est noté ω_a, c'est-à-dire

$$\aleph_\alpha = \operatorname{card}\omega_\alpha.$$

Le plus petit cardinal non dénombrable est $\aleph_1$. Le plus petit cardinal strictement plus grand que $\aleph_1$ est noté $\aleph_2$, ainsi de suite. On a donc, pour tout n naturel,

$$0 < n < \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots < \aleph_n < \aleph_{\omega_0} < \aleph_{\omega_0+1} < \ldots$$

Corollaire 5.4. *Tout cardinal infini est un aleph.*

Comme $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ n'est pas dénombrable,

$$\aleph_0 < \aleph_1 \leq \mathfrak{c}.$$

La proposition $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ (ainsi que son contraire : $\aleph_1 < \mathfrak{c}$) est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles et s'appelle l'*hypothèse du continu*(10).

10. L'hypothèse du continu fut formulée dans les années 1880 par Georg Cantor qui essaya de la démontrer sans succès. Kurt Gödel montra en 1940 qu'elle n'est pas contradictoire avec le système **ZFC**, c'est-à-dire qu'on ne peut pas, à partir de ce système, montrer qu'elle soit fausse. Enfin, en 1963 Paul J. Cohen, à l'âge de 29 ans, a montré que l'on ne peut pas la déduire de **ZFC**, donc qu'elle est indépendante.

On peut l'ajouter comme un axiome supplémentaire de cette théorie sans nuire à sa consistance. De la même manière, on peut ajouter $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Il en résulte deux théories cohérentes, ayant une partie de théorèmes communs, et une partie qui diffère (là où intervient l'hypothèse du continu ou sa négation).

Théorème 5.5. $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ *pour tout ordinal* α.

DÉMONSTRATION. Soit $\Gamma(\alpha, \beta)$ le type d'ordre canonique de

$$\{(\xi, \eta) : (\xi, \eta) \prec (\alpha, \beta)\}$$

et $\gamma(\alpha) := \Gamma(\alpha, \alpha)$ comme dans (A.6). On montrera que $\gamma(\omega_\alpha) := \Gamma(\omega_\alpha, \omega_\alpha) = \omega_\alpha$ pour tout ordinal α. C'est vrai pour $\alpha = 0$.

Si $\{\alpha : \omega_\alpha \prec \gamma(\omega_\alpha)\} \neq \varnothing$, alors dans cet ensemble il existe l'élément α_0 le plus petit. Donc ω_{α_0} est un segment initial de $\Gamma(\omega_{\alpha_0}, \omega_{\alpha_0})$. Soit $x, y < \omega_{\alpha_0}$ tels que $\Gamma(x, y) = \omega_\alpha$. Puisque ω_{α_0} est limite, il existe un δ tel que $x, y < \delta < \omega_{\alpha_0}$. Or, $\delta \times \delta$ est un segment initial (donné par $(0, \delta)$) contenant x et y, on a $\omega_{\alpha_0} \subset \Gamma(\delta, \delta)$ donc $\operatorname{card}(\delta \times \delta) \geq \aleph_{\alpha_0}$. Mais $\operatorname{card}(\delta \times \delta) = \operatorname{card} \delta \cdot \operatorname{card} \delta$ et par l'hypothèse $\operatorname{card} \delta \cdot \operatorname{card} \delta = \operatorname{card} \delta < \aleph_{\alpha_0}$: une contradiction. □

Ce théorème nous permet d'établir d'importants faits sur l'arithmétique des cardinaux.

Théorème 5.6. *Soit* κ, λ *des nombres cardinaux infinis. Alors*

$$\kappa = \kappa + \kappa = \kappa \cdot \kappa, \tag{A.7}$$

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda), \tag{A.8}$$

$$\kappa \leq \lambda \Longrightarrow \kappa^\lambda = 2^\lambda. \tag{A.9}$$

DÉMONSTRATION. (A.7) D'une part, $\kappa \leq \kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$, et de l'autre, il existe un ordinal α tel que $\kappa = \aleph_\alpha$. Ainsi $\kappa \cdot \kappa = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha = \kappa$, d'après le théorème 5.5.

(A.8) Si, par exemple, $\lambda = \max(\kappa, \lambda)$, alors, $\lambda \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$, et d'après (A.7), $\kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda$.

(A.9) En effet, $\kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\max(\kappa, \lambda)} = 2^\lambda$ d'après (A.8). □

Exercices

Solutions : pages 343-346.

(1) Montrer que, pour tout ensemble A d'ordinaux,

   (a) il existe l'ordinal $\sup A$,

   (b) si tout $\alpha \in A$ est limite, alors $\sup A$ est limite.

(2) Montrer que si $\alpha \leq \beta$, alors il existe un unique ordinal γ tel que $\alpha + \gamma = \beta$. On le note $\beta - \alpha$.

(3) Soit α, β, γ ordinaux. Montrer que

   (a) Si $\alpha < \beta$, alors $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.

   (b) Si $\alpha < \beta$, alors $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

(c) $\alpha + \beta = \sup_{\xi<\beta}(\alpha + \xi)$.

(d) $\omega = \sup_{\xi<\omega}(\xi + \omega) < \omega + \omega$.

(e) Si $\alpha < \beta$, alors $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

(f) Si $\alpha < \beta$, alors $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

(4) Montrer que tout ordinal α est de la forme $\alpha_0 + n$, où α_0 est un ordinal limite et n est naturel.

(5) Un ordinal γ est *décomposable* s'il existe $\alpha, \beta < \gamma$ tels que $\alpha + \beta = \gamma$; sinon il est *indécomposable*. Notons Ord_I la *classe d'ordinaux indécomposables*.

(a) Parmi les ordinaux suivants, quels sont ceux qui sont indécomposables : ordinaux finis, $\omega_0, \omega_0 + 1, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}$.

(b) Montrer que tout ordinal-cardinal γ est indécomposable.

(c) Montrer qu'un ordinal γ est indécomposable si et seulement si $\alpha + \gamma = \gamma$ pour tout $\alpha < \gamma$.

(d) Montrer que pour tout ordinal α il existe un choix unique de $n < \omega, \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots, \alpha_n$ ordinaux indécomposables, et $m_0, \ldots, m_n < \omega$ tels que

$$\alpha = \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n.$$

(6) Montrer que tout ordinal-cardinal infini est limite.

(7) Montrer que la classe de tous les ordinaux n'est pas un ensemble.

(8) Soit γ un ordinal. On définit sur $\gamma + 1 = \{\xi : \xi \leq \gamma\}$ la topologie canonique, où chaque $\xi < \gamma$ est isolé et V est un voisinage de γ s'il existe $\xi_V < \gamma$ tel que $\{\xi : \xi_V < \xi \leq \gamma\} \subset V$. Montrer que la topologie canonique de $(\omega_0 + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus \{(\omega_0, \omega_1)\}$

(a) est régulière,

(b) mais n'est pas normale.

(9) (!) (R. Frič [**14**]) Soit cl_a l'opérateur de fermeture algébrique dans $\mathbb{R}^2$ (défini dans VIII.4). On définit $\mathrm{cl}_a^0 A := A$ et pour tout ordinal $\gamma > 0$,

$$\mathrm{cl}_a^\gamma A := \mathrm{cl}_a\Big(\bigcup\nolimits_{\alpha<\gamma} \mathrm{cl}_a^\alpha A\Big).$$

Montrer que

(a) $\mathrm{cl}_a^{\omega_1}$ est idempotent,

(b) $\mathrm{cl}_a^{\omega_1}$ est l'opérateur de fermeture pour la topologie radiale (voir l'exercice III.34),

(c) si $\gamma < \omega_1$, alors cl_a^γ n'est pas idempotent.

Espaces topologiques compacts

Dans le chapitre V nous avons défini les espaces métriques compacts en termes de suites. Puis nous les avons caractérisé, dans le théorème V.2.3 de Borel-Lebesgue, en termes de recouvrements. Dans le cadre d'espaces topologiques, cette caractérisation devient définition.

Un espace topologique X est dit *compact* si pour toute famille $\mathcal{H}$ d'ouverts telle que $X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$ il existe une sous-famille finie $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ telle que $X = \bigcup_{H \in \mathcal{H}_0} H$.[1]

La définition de compacité que nous avons adopté dans le cas métrique, devient celle de compacité séquentielle dans le cas topologique général.

Un espace topologique X est dit *séquentiellement compact* si pour toute suite $(x_n)_n$ il existe une suite $(n_k)_k$ tendant vers ∞ et $x_\infty \in X$ tels que $(x_{n_k})_k$ converge vers x_∞.

Dans le domaine des topologies générales, la *compacité* et la *compacité séquentielle* sont deux propriétés distinctes. Autrement dit, dans ce domaine le théorème de Borel-Lebesgue n'est plus valable, comme le témoignent les exemples 5.1 et 5.2.

1. Grilles

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux familles de parties d'un ensemble X, alors nous disons que $\mathcal{B}$ est *plus fine* que $\mathcal{A}$ (et notons $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$) si pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $B \subset A$. Bien sûr, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ alors $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

Exemple 1.1. Si $\mathcal{B}$ est une base de voisinages de x, alors $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(x)$, donc $\mathcal{B} \leq \mathcal{V}(x)$, mais aussi $\mathcal{B} \geq \mathcal{V}(x)$.

On dit que $\mathcal{A}$ *grille* $\mathcal{B}$ (en symboles, $\mathcal{A}\#\mathcal{B}$) si $A \cap B \neq \varnothing$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$. Si $\mathcal{A} = \{A\}$, alors $A\#\mathcal{B}$ est une abréviation de $\{A\}\#\mathcal{B}$. La famille

$$\mathcal{A}^{\#} := \left\{ H \subset X : \underset{A \in \mathcal{A}}{\forall} \; H \cap A \neq \varnothing \right\}$$

s'appelle la *grille* de $\mathcal{A}$.

Si $D \subset X \times Y$ est une relation et $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, alors on note $D(\mathcal{A}) := \{DA : A \in \mathcal{A}\}$.

Proposition 1.2. *Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, $\mathcal{H}$ est une famille de parties de Y et $D \subset X \times Y$, alors*

$$D(\mathcal{A})\#\mathcal{H} \iff \mathcal{A}\#D^{-1}(\mathcal{H}).$$

1. Plusieurs auteurs ajoutent une condition supplémentaire que l'espace soit *séparé*.

DÉMONSTRATION. Car $DA \cap H \neq \varnothing$ équivaut à $A \cap D^{-1}H \neq \varnothing$ d'après (I.2). $\square$

Corollaire 1.3. *Si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de X, $\mathcal{H}$ est une famille de parties de Y et $f : X \to Y$, alors*

$$f(\mathcal{A})\#\mathcal{H} \iff \mathcal{A}\#f^{-1}(\mathcal{H}).$$

2. Filtres

Le concept de filtre est un outil très efficace, en particulier dans l'étude de la compacité. Les filtres généralisent à la fois les suites et les familles de voisinages. La notion de filtre est indissociable de celle de topologie (*cf.*, la remarque 2.4).

Soit X un ensemble non vide. Une famille non vide $\mathcal{F}$ de parties de X est appelée un *filtre* si

(B.1) $$\varnothing \notin \mathcal{F},$$

(B.2) $$F_0, F_1 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F},$$

(B.3) $$F \in \mathcal{F} \text{ et } F \subset G \Longrightarrow G \in \mathcal{F}.$$

Une famille $\mathcal{B}$ de parties de X est une *base* du filtre $\mathcal{F}$ sur X si $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{F}$. On dit alors que $\mathcal{B}$ *engendre* $\mathcal{F}$ et on note

$$\mathcal{F} = \mathcal{B}^{\uparrow}.$$

Tout filtre est une base de soi-même. Pour qu'une famille non vide $\mathcal{B}$ de parties de X soit une base de filtre, il faut et il suffit que

(B.4) $$\varnothing \notin \mathcal{B},$$

(B.5) $$B_0, B_1 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \underset{B \in \mathcal{B}}{\exists} \; B \subset B_0 \cap B_1.$$

Remarque 2.1. Si $\mathcal{F}$ est un filtre, alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\#}$. Si $\mathcal{B}$ est une base d'un filtre $\mathcal{F}$ alors $\mathcal{B}^{\#} = \mathcal{F}^{\#}$.

Un filtre $\mathcal{F}$ est dit *libre* si le *noyau* $\ker(\mathcal{F}) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ de $\mathcal{F}$ est vide. Si $\varnothing \neq A \subset X$, alors la famille $\{H \subset X : A \subset H\}$ s'appelle le *filtre principal* (de A).

Exemple 2.2. Soit (x_n) une suite sur X. La famille

$$\{\{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

est une base de filtre. Un filtre engendré par une suite s'appelle *séquentiel*[2].

Exemple 2.3. L'ensemble $\mathcal{V}(x)$ de tous les voisinages d'un élément x d'un espace topologique est un filtre. On observe que $x \in V$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$.

2. Traditionnellement, les filtres engendrés par des suites s'appellent *filtres de Fréchet*.

Remarque 2.4. Réciproquement, tout filtre définit une topologie. Si $\mathcal{F}$ est un filtre libre sur X, alors on définit la *topologie associée* à $\mathcal{F}$ sur $X \cup \{\infty\}$, où $\infty \notin X$: tous les éléments de X sont isolés et V est un voisinage de ∞ si (et seulement si) $V \cap X \in \mathcal{F}$ et $\infty \in V$. Autrement dit, O est ouvert pour cette topologie si $\infty \in O$ entraîne $O \cap X \in \mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X qui n'est pas libre, alors la *topologie associée* à $\mathcal{F}$ sur X est définie comme suit : $\mathcal{V}(x) := \mathcal{F}$ pour tout $x \in \ker(\mathcal{F})$ et x est isolé si $x \notin \ker(\mathcal{F})$.

L'ensemble des filtres sur X est muni de l'ordre d'inclusion $\subset$ induit de 2^X. Cet ordre coïncide avec la relation $\leq$ introduite pour des familles quelconques de parties.

Si $\mathbf{F}$ est un ensemble de filtres sur X, alors l'infimum $\bigwedge \mathbf{F}$ de $\mathbb{F}$ est, bien évidemment, $\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathbf{F}} \mathcal{F}$.

Proposition 2.5. *Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux filtres sur X, alors le supremum $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ existe si et seulement si $\mathcal{F} \# \mathcal{G}$.*

Démonstration. Par définition, $\mathcal{F} \# \mathcal{G}$ si et seulement si $F \cap G \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tout $G \in \mathcal{G}$, ce qui veut dire que

$$\{F \cap G : F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$$

est une base de filtre. Bien entendu, c'est le plus petit filtre incluant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, donc il est égal à $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$. □

Plus généralement, $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \dots \vee \mathcal{F}_n = \{\bigcap_{k=1}^n F_k : F_k \in \mathcal{F}_k\}$ pourvu que $\bigcap_{k=1}^n F_k \neq \varnothing$ pour tout choix $F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}_n$. Enfin, si $\mathbf{F}$ est un ensemble de filtres sur X, alors le supremum $\bigvee \mathbf{F}$ de $\mathbf{F}$ existe si et seulement si $\bigvee \mathbb{H}$ existe pour toute partie finie $\mathbb{H}$ de $\mathbb{F}$. Dans ce cas,

$$\bigvee \mathbf{F} = \bigcup \{\bigvee \mathbb{H} : \mathbb{H} \subset \mathbf{F}, \operatorname{card} \mathbb{H} < \infty\}.$$

Le filtre sur X le plus grossier (le plus petit élément pour cet ordre) est le filtre principal de X tout entier.

Un filtre $\mathcal{U}$ est appelé un *ultrafiltre* s'il est *maximal*, c'est-à-dire si $\mathcal{G}$ est un filtre tel que $\mathcal{G} \geq \mathcal{U}$, alors $\mathcal{G} = \mathcal{U}$.

Proposition 2.6. *Pour tout filtre $\mathcal{F}$ il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Si $\mathbb{F}$ est une famille de filtres sur X totalement ordonnée, alors $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbf{F}} \mathcal{F}$ est aussi un filtre, donc d'après le théorème I.2.3 de Zorn-Kuratowski, la proposition est démontrée. □

Corollaire 2.7. *Si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont deux filtres, alors $\mathcal{F} \# \mathcal{G}$ si et seulement il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{U} \geq \mathcal{F}$ et $\mathcal{U} \geq \mathcal{G}$.*

Proposition 2.8. *Un filtre $\mathcal{G}$ est un ultrafiltre si et seulement si*

$$G_0 \cup G_1 \in \mathcal{G} \Longrightarrow (G_0 \in \mathcal{G} \vee G_1 \in \mathcal{G}). \tag{B.6}$$

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que $\mathcal{G}$ est un ultrafiltre si et seulement si

(B.7) $$A \notin \mathcal{G} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{G}.$$

En effet, si $\mathcal{G}$ n'est pas maximal, alors il existe $A \notin \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G} \cup \{A\}$ est une base de filtre ; en particulier, pour tout $G \in \mathcal{G}$, on a $G \cap A \neq \varnothing$, donc $A^c \notin \mathcal{G}$.

Si maintenant il existe une partie A telle que $A \notin \mathcal{G}$ et $A^c \notin \mathcal{G}$, alors la deuxième relation entraîne que $A \cap G \neq \varnothing$ pour tout $G \in \mathcal{G}$. Par conséquent, $\{A \cap G : G \in \mathcal{G}\}$ engendre un filtre strictement plus fin que $\mathcal{G}$.

Pour conclure observons que (B.6) entraîne (B.7) ; d'autre part, si $G_0 \notin \mathcal{G}$ et $G_1 \notin \mathcal{G}$, alors, vu (B.7), $G_0^c, G_1^c \in \mathcal{G}$, donc $(G_0 \cup G_1)^c = G_0^c \cap G_1^c \notin \mathcal{G}$ d'après (B.2). Donc $G_0 \cup G_1 \notin \mathcal{G}$, ce qui prouve (B.6). □

Lemme 2.9. *Un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si $\mathcal{F}^\# = \mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà vu que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^\#$ pour tout filtre $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et $H \in \mathcal{F}^\#$, alors $\mathcal{F} \vee H := \{F \cap H : F \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre et comme $\mathcal{F}$ est maximal, $\mathcal{F} \vee H \leq \mathcal{F}$. En particulier, $H \in \mathcal{F}$. S'il existe $H \in \mathcal{F}^\# \setminus \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F} \vee H \geq \mathcal{F}$ mais $\mathcal{F}$ n'est pas plus fin que $\mathcal{F} \vee H$, donc $\mathcal{F}$ n'est pas maximal. □

Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, alors $f(\mathcal{F})$ est une base de filtre sur Y.

Proposition 2.10. *Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X et $f : X \to Y$, alors $f(\mathcal{U})$ est une base d'ultrafiltre sur Y.*

DÉMONSTRATION. Si $H \# f(\mathcal{U})$ alors $f^{-1}(H) \# \mathcal{U}$ donc $f^{-1}(H) \in \mathcal{U}$ et par conséquent $H \supset f(f^{-1}(H)) \in f(\mathcal{U})$, donc $f(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre d'après le lemme 2.9. □

3. Convergence des filtres

Si X est un espace topologique, alors pour tout $x \in X$, la famille $\mathcal{V}(x)$ (des voisinages de x) est un filtre.

Un filtre $\mathcal{F}$ sur X *converge* vers x (x est une *limite* de $\mathcal{F}$)

$$x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$$

si $\mathcal{F} \geq \mathcal{V}(x)$. En particulier, $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{V}(x)$. Plus généralement, pour une famille $\mathcal{B}$ de parties de X on note $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{B}$ si $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{V}(x)$.

Si $\operatorname{Lim} \mathcal{F}$ est un singleton, alors on note $\lim \mathcal{F}$ son unique élément, c'est-à-dire $\operatorname{Lim} \mathcal{F} = \{\lim \mathcal{F}\}$.

Proposition 3.1. *Pour qu'une topologie soit séparée il faut et il suffit que* $\operatorname{card}(\operatorname{Lim} \mathcal{F}) \leq 1$ *pour tout filtre $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Une topologie n'est pas séparée si et seulement s'il existe deux éléments distincts x_0, x_1 tel que $V_0 \cap V_1 \neq \varnothing$ pour tout $V_0 \in \mathcal{V}(x_0)$ et tout $V_0 \in \mathcal{V}(x_1)$, c'est-à-dire $\mathcal{V}(x_0) \# \mathcal{V}(x_1)$. De façon équivalente, le filtre $\mathcal{V}(x_0) \vee \mathcal{V}(x_1)$ existe et, bien entendu, converge vers x_0 et vers x_1. □

Proposition 3.2. *Une suite (x_n) converge vers x si et seulement si le filtre engendré par (x_n) converge vers x.*

DÉMONSTRATION. Par définition, $x \in \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n$ si pour tout voisinage V de x, il existe n_V tel que $\{x_n : n \geq n_V\} \subset V$. □

En termes de filtres,

$$x \in \operatorname{cl} A \iff \underset{\mathcal{F} \ni A}{\exists}\ x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}.$$

En effet, $x \in \operatorname{cl} A$ si et seulement si pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \varnothing$, c'est-à-dire $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}(x)\}$ est une base de filtre notée $\mathcal{V}(x) \vee A$. Bien évidemment, $A \in \mathcal{V}(x) \vee A$ et $\mathcal{V}(x) \vee A$ converge vers x.[3]

Proposition 3.3. *Une application $f : X \to Y$ est continue en x si et seulement si $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$ implique $f(x) \in \operatorname{Lim} f(\mathcal{F})$.*

DÉMONSTRATION. Soit f continue et $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$. Si $V \in \mathcal{V}(f(x))$ alors $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$. Par conséquent, $V \supset f(f^{-1}(V)) \in f(\mathcal{F})$, c'est-à-dire il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $f(F) \subset V$, donc $f(\mathcal{F}) \geq \mathcal{V}(x)$.

Inversement, la condition implique que $f(\mathcal{V}(x))$ est plus fine que $\mathcal{V}(f(x))$, ce qui veut dire que pour tout $V \in \mathcal{V}(f(x))$ il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(W) \subset V$ et par conséquent $W \subset f^{-1}(f(W)) \subset f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$, c'est-à-dire $f(x) \in \operatorname{Lim} f(\mathcal{F})$. □

4. Compacité

Rappelons qu'une partie K d'un espace topologique X est dite *compacte* si pour toute famille $\mathcal{H}$ d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$, il existe une sous-famille finie $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ telle que $K \subset \bigcup_{H\in\mathcal{H}_0} H$. En particulier, un espace topologique X est compact, si la partie X de X est compacte.

Exemple 4.1. Considérons la topologie de Sierpiński $ sur $\{0,1\}$ de l'exemple III.3.3. Les ouverts sont $\varnothing$, $\{1\}$ et $\{0,1\}$. Toute partie de $\{0,1\}$ est compacte, car finie. Cependant $\{1\}$ n'est pas fermée.

Proposition 4.2. *Une partie K d'un espace topologique est compacte si et seulement si $K \cap \operatorname{Lim} \mathcal{U} \neq \varnothing$ pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que $K \in \mathcal{U}$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que K est compact et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre avec $K \in \mathcal{U}$. Si $\mathcal{U}$ n'est pas plus fin que $\mathcal{V}(x)$ pour tout $x \in K$, alors pour chaque x il existe un ouvert O_x contenant x et tel que $O_x \notin \mathcal{U}$. Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} O_x$, il existe une partie finie F de K telle que $K \subset \bigcup_{x\in F} O_x$ donc $\bigcup_{x\in F} O_x \in \mathcal{U}$, et par conséquent il existe $x \in F$ tel que $O_x \in \mathcal{U}$ contrairement à l'hypothèse $O_x \notin \mathcal{U}$.

3. Dualement, $x \in \operatorname{int} A$ si et seulement si pour tout filtre convergeant vers x, on a $A \in \mathcal{F}$ Comme conséquence, une partie O est ouverte si et seulement si tout filtre $\mathcal{F}$ pour lequel $\lim \mathcal{F} \in O$ contient O.

Réciproquement, si K n'est pas compact, alors il existe une famille d'ouverts $\mathcal{H}$ telle que $K \subset \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$ et $K \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{H}_0} H \neq \varnothing$ pour toute famille finie $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$, alors

$$\mathcal{B} := \left\{K \cap \bigcap\nolimits_{H\in\mathcal{H}_0} H^c : \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}, \operatorname{card}\mathcal{H}_0 < \infty\right\}$$

est une base (composée de fermés) de filtre. Soit $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre plus fin que $\mathcal{B}$. S'il était convergent, alors $\operatorname{Lim}\mathcal{U} \subset \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = K \cap \bigcap_{H\in\mathcal{H}} H^c = \varnothing$, ce qui nous donne une contradiction. □

Proposition 4.3. *Si $f : X \to Y$ est continue et K est une partie compacte de X, alors $f(K)$ est compacte.*

Preuve (en termes de recouvrements). Si $\mathcal{H}$ est une famille d'ouverts telle que $f(K) \subset \bigcup_{H\in\mathcal{H}} H$, alors $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{H\in\mathcal{H}} f^{-1}(H)$. Comme f est continue, $f^{-1}(H)$ est ouvert pour tout $H \in \mathcal{H}$, donc d'après la compacité de K, il existe une sous-famille finie $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ telle que $K \subset \bigcup_{H\in\mathcal{H}_0} f^{-1}(H)$ et, par conséquent,

$$f(K) \subset \bigcup\nolimits_{H\in\mathcal{H}_0} f(f^{-1}(H)) \subset \bigcup\nolimits_{H\in\mathcal{H}_0} H.$$

□

Preuve (en termes de filtres). Si $\mathcal{W}$ est un ultrafiltre tel que $f(K) \in \mathcal{W}$, de façon équivalente $f(K) \in \mathcal{W}^{\#}$, alors, d'après le corollaire 1.3, $K \in f^{-1}(\mathcal{W})^{\#}$, donc il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $f^{-1}(\mathcal{W}) \vee K$ et $\operatorname{Lim}\mathcal{U} \cap K \neq \varnothing$. Comme f est continue, $\operatorname{Lim} f(\mathcal{U}) \cap f(K) \neq \varnothing$. D'autre part, $\mathcal{U} \# f^{-1}(\mathcal{W})$ et d'après le corollaire 1.3, $f(\mathcal{U}) \# \mathcal{W}$. Comme $f(\mathcal{U})$ est une base d'ultrafiltre et $\mathcal{W}$ est un ultrafiltre, $f(\mathcal{U})$ est une base de $\mathcal{W}$. □

Théorème 4.4 (Tikhonov). *Le produit $\prod_{j\in J} X_j$ est compact si et seulement si X_j est compact pour tout $j \in J$.*

Démonstration. Si $\prod_{j\in J} X_j$ alors, d'après la proposition 4.3, X_j est compact pour tout $j \in J$, car toute projection est continue.

Réciproquement, si X_j est compact pour tout $j \in J$ et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\prod_{j\in J} X_j$, alors $\pi_j(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre sur X_j, donc il existe $x_j \in X_j$ avec $x_j \in \operatorname{Lim}\, \pi_j(\mathcal{U})$, donc $\pi_j(\mathcal{U}) \geq \mathcal{V}_{X_j}(x_j)$ pour tout $j \in J$. Par conséquent, $\mathcal{U} \geq \bigvee_{j\in J} \mathcal{V}_{X_j}(x_j)$ et ce dernier est le filtre de voisinages de x tel que $x(j) := x_j$ pour tout $j \in J$. Ceci signifie que $x \in \operatorname{Lim}\mathcal{U}$. □

Par conséquent,

Corollaire 4.5. *Si X est un espace topologique, alors une partie fermée de $C(X, \mathbb{R})$ est compacte pour $\sigma(X, \mathbb{R})$ si et seulement si elle est simplement bornée.*

Les propositions V.4.1, V.4.4, V.4.4 et le théorème V.4.2 restent valables si X est un espace topologique. Ainsi le théorème V.4.5 d'Arzelà-Ascoli s'étend au

Théorème 4.6 (Arzelà-Ascoli). *Si X est un espace topologique séparé compact, alors une partie fermée de $C(X,\mathbb{R})$ est compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si elle est bornée et équicontinue.*

DÉMONSTRATION. Notons σ la topologie de la convergence simple et τ la topologie de la convergence uniforme. Si $\mathcal{F}$ est une partie de $C(X,\mathbb{R})$ compacte pour τ, elle est compacte pour σ d'après la proposition 4.3. En vertu du théorème 4.4 de Tikhonov, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est compacte dans $\mathbb{R}$, donc bornée, pour tout $x \in X$.

Si $\mathcal{F}$ n'est pas équicontinue, alors existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $f_V \in \mathcal{F}$ et $x_V \in V$ avec $|f_V(x_V) - f_V(x)| \geq \varepsilon$. D'après la compacité de $\mathcal{F}$, il existe f_∞ dans l'adhérence du filtre engendré par $\{\{f_V : V \subset W\} : W \in \mathcal{V}(x)\}$. Soit $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$\begin{aligned} \sup\{|f_\infty(w) - f_\infty(x)| : w \in W\} &< \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{et } \sup\{|f_W(v) - f_\infty(v)| : v \in X\} &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f_W(x_W) - f_W(x)| \\ &\leq |f_W(x_W) - f_\infty(x_W)| + |f_\infty(x_W) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_W(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

est une contradiction.

Supposons que $\mathcal{F}$ soit τ-fermée, bornée et équicontinue. Puisque $\mathcal{F}$ est bornée, donc simplement bornée, $\mathrm{cl}_\sigma \mathcal{F}$ est σ-compacte grâce au théorème 4.4 de Tikhonov, et comme $\mathcal{F}$ est équicontinue, $\mathrm{cl}_\sigma \mathcal{F}$ est équicontinue selon la proposition V.4.4. Puisque σ et τ coïncident sur $\mathrm{cl}_\sigma \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} = \mathrm{cl}_\tau \mathcal{F} = \mathrm{cl}_\sigma \mathcal{F}$ est τ-compacte. □

5. Compacité versus compacité séquentielle

Comme nous l'avons dit, en général ni la compacité implique la compacité séquentielle, ni vice versa.

Exemple 5.1 (espace compact non séquentiellement compact). Soit

$$X = \prod\nolimits_{r \in [0,1]} \{0,1\}$$

muni de la topologie-produit, où $\{0,1\}$ est muni la topologie discrète. D'après le théorème de Tikhonov, X est compact. Soit

$$r = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n},$$

la représentation de r avec $r_n \in \{0,1\}$ (en série finie s'il y a deux représentations). Les éléments f de X sont des fonctions $f : [0,1] \to \{0,1\}$. Considérons une suite $(f_n)_n \subset X$ définie pour tout r par

$$f_n(r) = r_n.$$

Cette suite n'admet aucune suite extraite convergente. En effet, supposons que $(f_{n_k})_k$ converge vers f. Alors, pour tout $r \in [0,1]$, il existe $k(r) \in \mathbb{N}$ tel que $f_{n_k}(r) = f(r)$ pour $k \geq k(r)$. Ceci donne une contradiction si r a un nombre infini de 0 et un nombre infini de 1 parmi $(r_{n_k})_k$.

Exemple 5.2 (espace séquentiellement compact non compact). Soit X le sous-espace de $\prod_{r\in[0,1]}\{0,1\}$ formé des f pour lesquelles l'ensemble

$$s(f) := \{r : f(r) \neq 0\}$$

est (au plus) dénombrable. Bien sûr, X n'est pas égal à $\prod_{r\in[0,1]}\{0,1\}$. D'autre part, X est dense, donc n'est pas fermé et, par conséquent, n'est pas compact. En effet, pour tout $f_0 \in \Pi_{n\in[0,1]}\{0,1\}$ et tout voisinage V de f_0, il existe une partie finie F de $[0,1]$ telle que

$$\text{(B.8)} \qquad \{f \in X : \underset{s\in F}{\forall}\ f(s) = f_0(s)\}$$

est un voisinage de f_0 inclus dans V. L'élément f de X tel que $s(x) = F$ et qui coïncide avec f_0 sur F appartient à (B.8), donc à V.

Soit $(f_n)_n$ une suite dans X. L'ensemble $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(f_n)$ est dénombrable. Puisque $\{0,1\}$ est séquentiellement compact, l'espace $\prod_{r\in S}\{0,1\}$ est séquentiellement compact et homéomorphe à un sous-espace de X.

En conséquence, il existe une suite convergente extraite de $(f_n)_n$.

6. Topologie de Stone

La topologie de Stone est la *compactification de Čech-Stone* de l'espace dénombrable discret, par exemple celui des nombres naturels. C'est un cas particulier de compactification de Čech-Stone d'un espace topologique complètement régulier [(4)].

Soit X un ensemble dénombrable infini et βX l'ensemble des ultrafiltres sur X. Si A est une partie de X, alors notons

$$\text{(B.9)} \qquad \beta(A) := \{\mathcal{U} \in \beta X : A \in \mathcal{U}\}.$$

Observons que pour chaque couple $A_0, A_1 \subset X$, on a

$$\text{(B.10)} \qquad \beta(A_0 \cap A_1) = \beta(A_0) \cap \beta(A_1).$$

6.1. Les ouverts. La *topologie de Stone* β sur βX est définie moyennant ses voisinages : B est un voisinage de $\mathcal{U} \in \beta(X)$ s'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\beta(U) \subset B$. Notons que pour tout $A \subset X$, l'ensemble $\beta(A)$ est ouvert pour la topologie de Stone, car $\beta(A)$ est un voisinage de tout $\mathcal{U} \in \beta(A)$. [(5)]

---

4. Un espace topologique X est dit *complètement régulier* si pour tout fermé A et $x \notin A$ il existe une fonction continue $f : X \to \mathbf{R}$ telle que $f(A) = 0$ et $f(x) = 1$.

5. On sait (c.f. [**12**, Theorem 3.6.11] que toute base d'ouverts de βX a la cardinalité supérieure ou égale à $2^{\operatorname{card} X}$ et que la cardinalité de βX est $2^{2^{\operatorname{card} X}}$.

6.2. Disconnexité. *La topologie de Stone est zéro-dimensionnelle.* En effet, pour tout $A \subset X$, l'ensemble $\beta(A)$ est fermée, car

$$\beta X \setminus \beta(A) = \beta(X \setminus A). \tag{B.11}$$

Effectivement, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X tel que $\mathcal{U} \notin \beta(A)$, autrement dit, $A \notin \mathcal{U}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{U}$, donc, de façon équivalente, $\mathcal{U} \in \beta(X \setminus A)$.

6.3. Séparation. *La topologie de Stone est séparée.* En effet, si $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ sont deux ultrafiltres distincts, alors il existe $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$. Par conséquent, $X \setminus A \in \mathcal{W}$, donc $\beta(A)$ est un voisinage de $\mathcal{U}$, tandis que $\beta(X \setminus A)$ est un voisinage de $\mathcal{W}$ disjoint de $\beta(A)$ d'après (B.11).

6.4. Compacité. *La topologie de Stone est compacte.* Soit $\mathcal{P}$ un recouvrement par des ouverts de βX. Alors pour tout $\mathcal{U}$ il existe $A_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$ et $P_{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}$ tel que $\mathcal{U} \in \beta(A) \subset P_{\mathcal{U}}$.[6] Bien entendu, $\{\beta(A_{\mathcal{U}}) : \mathcal{U} \in \beta X\}$ est un recouvrement par des ouverts de βX. S'il n'existe pas une partie finie $\mathbf{F}$ de βX pour laquelle $\{\beta(A_{\mathcal{U}}) : \mathcal{U} \in \mathbf{F}\}$ est un recouvrement de βX, alors pour toute partie finie $\mathbf{F}$ de βX,

$$\bigcap\nolimits_{\mathcal{U} \in \mathbf{F}} \beta(X \setminus A_{\mathcal{U}}) = \beta X \setminus \bigcup\nolimits_{\mathcal{U} \in \mathbf{F}} \beta(A_{\mathcal{U}}) \neq \varnothing.$$

Or $\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathbf{F}} \beta(X \setminus A_{\mathcal{U}}) = \beta(\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathbf{F}}(X \setminus A_{\mathcal{U}}))$ d'après (B.10). Par conséquent,

$$\mathcal{G} = \{\bigcap\nolimits_{\mathcal{U} \in \mathbf{F}} (X \setminus A_{\mathcal{U}}) : \mathbf{F} \subset \beta(X), \mathbf{F} \text{ finie}\} \tag{B.12}$$

est une base de filtre. Soit $\mathcal{W}$ un ultrafiltre incluant $\mathcal{G}$. D'après (B.12), il existe $A_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$ tel que $X \setminus A_{\mathcal{W}} \in \mathcal{G} \subset \mathcal{W}$, ce qui donne une contradiction.

6.5. Séparabilité. *Si X est dénombrable, alors βX est séparable.* En effet,

$$\{\beta(\{x\}) : x \in X\}$$

est dense dans βX, car pour tout $\mathcal{U} \in \beta X$ et tout $U \in \mathcal{U}$ il existe $x \in U$ (car U est non vide). Par conséquent, $\beta(\{x\}) \in \beta(U)$.

Si X est dénombrable infini, alors $\beta_0 X := \beta X \setminus \{\beta(\{x\}) : x \in X\}$ est compact mais n'est pas séparable. Puisque pour tout $x \in X$, l'ensemble $\beta(\{x\})$ est ouvert, $\beta_0 X$ est une partie fermée de βX, donc $\beta_0 X$ est compact.

Si $(\mathcal{U}_n)_n$ est une suite d'éléments de $\beta_0 X$, alors, par récurrence, il existe une suite $(U_n)_n$ de parties infinies disjointes de X telle que $\beta(U_n) \setminus U_n$ est un voisinage de $\mathcal{U}_n$ dans $\beta_0 X$. Si $x_n \in U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $U := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est presque disjoint de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\beta(U) \setminus U$ est un ouvert non vide de $\beta_0 X$ disjoint de $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ceci montre également que $\beta_0 X$ n'a pas de base dénombrable d'ouverts.

Nous allons montrer que si X est dénombrable infini, alors la cardinalité de βX est $2^{\mathfrak{c}}$.

Nous avons vu (la proposition IV.1.2) que la cardinalité d'un espace métrique séparable ne dépasse pas le continu $\mathfrak{c}$. Nous avons également vu

6. Autrement dit, $\{\beta(A_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \beta X\}$ est un *raffinement* de $\mathcal{P}$.

(la proposition IV.1.6) que tout produit dénombrable d'espaces métriques séparables est séparable. Nous montrerons maintenant que tout produit de $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ espaces topologiques séparables est encore séparable. Par conséquent, il ne peut pas être métrique.

6.6. Théorème de densité. Soit X un espace topologique. Le plus petit cardinal κ tel qu'il existe une partie dense A de X telle que $\operatorname{card} A = \kappa$, s'appelle la *densité* de X et est notée $d(X)$. Le plus petit cardinal κ tel qu'il existe une base d'ouverts de cardinalité λ de X s'appelle le *poids* de X.

Proposition 6.1. *Si X est un espace topologique discret de cardinalité κ, alors la densité de $\prod_{t\in 2^\kappa} X$ est κ.*

DÉMONSTRATION. Le produit $\prod_{t\in\kappa}\{0,1\}$, où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète, admet une base $\mathcal{B}$ de cardinalité κ, par exemple, celle composée de $\left\{f \in \prod_{t\in\kappa}\{0,1\} : f(t_i) = \alpha_i, i = 1,\dots,n\right\}$, où $n < \omega, \alpha_i \in \{0,1\}$ et $t_i \in \kappa$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties finies disjointes $\{B_1,\dots,B_n\}$ de $\mathcal{B}$ ($n < \omega, B_k \in \mathcal{B}$ pour $1 \le k \le n$). Alors $\operatorname{card} \mathcal{T} = \kappa$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments F de $\prod_{t\in 2^\kappa} X$ tels qu'il existe $n < \omega$ et $\{B_1,\dots,B_n\} \in \mathcal{T}$ et F est constante sur B_k pour $1 \le k \le n$ ainsi que sur $2^\kappa \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k$. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\prod_{t\in 2^\kappa} X$.

Effectivement, une base d'ouverts de $\prod_{t\in 2^\kappa} X$ est composée de

$$\mathcal{F} := \left\{F \in \prod\nolimits_{t\in 2^\kappa} X : \underset{k=1,\dots,n}{\forall} F(t_k) = x_k\right\},$$

où $n < \omega, t_1,\dots t_n \in 2^\kappa$ et $x_1,\dots,x_n \in X$. Puisque 2^κ est séparée, il existe $\{B_1,\dots,B_n\} \in \mathcal{T}$ tel que $t_k \in B_k$ pour $1 \le k \le n$. Donc il existe $F \in \prod_{t\in 2^\kappa} X$, constante par morceaux, telle que $F^{-1}(x_k) = B_k$ pour $1 \le k \le n$. Par conséquent, $F \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}$. □

Ici X_t désigne un espace topologique.

Théorème 6.2 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery). *Si κ est infini et $d(X_t) \le \kappa$ pour tout $t \in 2^\kappa$, alors $d(\prod_{t\in 2^\kappa} X_t) \le \kappa$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $t \in 2^\kappa$ il existe une partie A_t de cardinalité κ dense de X_t. Il est immédiat que $\prod_{t\in 2^\kappa} A_t$ est dense dans $\prod_{t\in 2^\kappa} X_t$. Il suffit de montrer que $\prod_{t\in 2^\kappa} A_t$ inclut une partie dense de cardinalité κ. Si Y_t est un espace topologique de cardinalité κ pour tout $t \in 2^\kappa$, alors il existe une bijection continue de $\prod_{t\in 2^\kappa} Y_t$ sur $\prod_{t\in 2^\kappa} A_t$. Il suffit donc de montrer que la densité de $\prod_{t\in 2^\kappa} Y_t$ est κ, ce qui est prouvé dans la proposition 6.1. □

(Voir, par exemple, [**12**, Theorem 2.3.15]). En particulier,

Proposition 6.3. *Le cube de Cantor $\prod_{t\in\mathfrak{c}}\{0,1\}$ (de dimension $\mathfrak{c}$) est compact et séparable. Son poids est $\mathfrak{c}$ et sa cardinalité est $2^{\mathfrak{c}}$.*

6.7. Cardinalité. Nous voyons que, différemment du cas métrique, un espace topologique séparable peut avoir la cardinalité supérieure au continu. Nous avons vu qu'un espace compact n'est pas forcément séparable.

Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble X est dite *indépendante* si pour toute sous-famille finie $\mathcal{A}_0$ et toute application $h : \mathcal{A}_0 \to \{0,1\}$,

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}_0} A^{h(A)} \neq \varnothing,$$

où $A^0 := A$ et $A^1 := X \setminus A$.

Théorème 6.4 (Hausdorff). *Si X est un ensemble dénombrable, alors il existe une famille indépendante $\mathcal{A}$ de parties de X de cardinalité $\mathfrak{c}$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 6.3, il existe une partie dénombrable dense de $\prod_{t\in\mathfrak{c}}\{0,1\}$. Donc pour toute partie finie F de $\mathfrak{c}$ et tout $f : \mathfrak{c} \to \{0,1\}$, le voisinage $\bigcap_{t\in F}\pi_t^{-1}(h(t))$ de f intersecte X. Par conséquent, $\mathcal{A} := \left\{\pi_t^{-1}(0) : t \in \mathfrak{c}\right\} \cap X$ est indépendante et sa cardinalité est $\mathfrak{c}$. □

Corollaire 6.5. *La cardinalité de $\beta\mathbb{N}$ est $2^{\mathfrak{c}}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{A}$ une famille indépendante de cardinalité $\mathfrak{c}$ sur $\mathbb{N}$. Pour toute application $f : \mathcal{A} \to \{0,1\}$, la famille $\mathcal{A}_f := \left\{A^{f(A)} : A \in \mathcal{A}\right\}$ est une base de filtre, car la famille $\mathcal{A}$ est indépendante. De plus, si $f_0, f_1 : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ sont distinctes, alors $\mathcal{A}_{f_0}$ et $\mathcal{A}_{f_1}$ ne se grillent pas, car il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A^{f_0(A)} \in \mathcal{A}_{f_0}$ et $A^{f_1(A)} \in \mathcal{A}_{f_1}$ et $A^{f_0(A)} \cap A^{f_1(A)} = \varnothing$. À tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{A}_f$, on associe $f \in \{0,1\}^{\mathcal{A}}$, en obtenant ainsi une application d'une partie de $\beta\mathbb{N}$ sur $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ d'après le corollaire 2.7. Elle est surjective, ce qui montre que $\mathrm{card}(\beta\mathbb{N}) \geq \mathrm{card}(\{0,1\}^{\mathcal{A}}) = 2^{\mathfrak{c}}$. Puisque $\mathcal{U} \in 2^{2^{\mathbb{N}}}$ pour tout ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, $\mathrm{card}(\beta\mathbb{N}) \leq \mathrm{card}(2^{2^{\mathbb{N}}}) = 2^{\mathfrak{c}}$. □

7. Filtres de parties fonctionnellement fermées

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique X est dite *fonctionnellement fermée* s'il existe $f \in C(X,\mathbb{R})$ telle que $A = f^{-1}(0)$. Une partie de la forme

$$\{h > 0\} := \{x \in X : h(x) > 0\},$$

où $h \in C(X,\mathbb{R})$, est appelée *fonctionnellement ouverte.* Bien entendu, une partie est fonctionnellement ouverte si et seulement si son complémentaire est fonctionnellement fermé[7].

Puisque la fonction $\mathrm{dist}(\cdot, A)$ est continue pour toute partie A d'un espace métrique, tout fermé dans un espace métrisable est fonctionnellement fermé. Plus généralement, d'après le théorème de Vedenisov (exercice III.21), tout fermé d'un espace parfaitement normal est fonctionnellement fermé.

Notons $\mathcal{Z}(X)$ l'ensemble de toutes les parties fonctionnellement fermées de X. Rappelons qu'une famille $\mathcal{D}$ de fermés d'un espace topologique est dite une *base de fermés* si tout fermé est une intersection d'éléments de $\mathcal{D}$.

7. En effet, car $\{h > 0\} = X \setminus \{\max(h,0) = 0\}$. D'autre part, $X \setminus \{f = 0\} = \{|f| > 0\}$.

Proposition 7.1. *Un espace séparé est complètement régulier si et seulement s'il existe une base de fermés composée de parties fonctionnellement fermées.*

DÉMONSTRATION. Si F est un fermé d'un espace complètement régulier et $x \notin F$, alors d'après la définition, il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $F \subset f^{-1}(0)$ et $f(x) = 1$, donc $x \notin f^{-1}(0) \supset F$. □

Proposition 7.2. *Si X est complètement régulier et $x \in X$, alors $\mathcal{V}(x)$ admet une base composée de parties fonctionnellement fermées.*

DÉMONSTRATION. Si V est un voisinage ouvert de x, alors il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $X \setminus V \subset f^{-1}(0)$ et $f(x) = 1$. Ainsi $x \in \{f > \frac{1}{2}\} \subset \{f \geq \frac{1}{2}\} \subset V$. □

Lemme 7.3. *Si $Z_0, Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$ et $Z_0 \cap Z_1 = \varnothing$, alors il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $Z_0 \subset f^{-1}(0)$ et $Z_1 \subset f^{-1}(1)$.*

DÉMONSTRATION. Si $Z_0, Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$ et $Z_0 \cap Z_1 = \varnothing$, alors il existe $f_0, f_1 \in C(X, [0,1])$ telle que $Z_0 = \{f_0 = 0\}$ et $Z_1 = \{f_1 = 0\}$. Ainsi $f_0(x) + f_1(x) > 0$ pour tout $x \in X$, donc si on définit

$$f := \frac{f_0}{f_0 + f_1}, \tag{B.13}$$

alors $f \in C(X, [0,1]), Z_0 \subset f^{-1}(0)$ et $Z_1 \subset f^{-1}(1)$. □

Corollaire 7.4. *Si $Z_0, Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$ et $Z_0 \cap Z_1 = \varnothing$, alors il existe $W_0, W_1 \in \mathcal{Z}(X)$ tels que $W_0 \cup W_1 = X$ et*

$$Z_0 \subset X \setminus W_0 \text{ et } Z_1 \subset X \setminus W_1.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de poser $W_0 := \{f \geq \frac{1}{2}\}$ et $W_1 := \{f \leq \frac{1}{2}\}$, où f est donnée par (B.13). □

Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{Z}(X)$ est dite un 0-*filtre* si

$$\varnothing \notin \mathcal{F},$$
$$F_0, F_1 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F},$$
$$F \in \mathcal{F} \text{ et } F \subset G \in \mathcal{Z}(X) \Longrightarrow G \in \mathcal{F}.$$

Si $\mathcal{H}$ est un filtre sur X alors $\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}(X)$ est un 0-filtre sur X. D'autre part, tout 0-filtre est une base de filtre.

Remarque 7.5. Si X est un espace topologique discret, alors $\mathcal{Z}(X) = 2^X$, donc, dans ce cas, $\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}(X) = \mathcal{H}$ pour tout filtre $\mathcal{H}$ sur X, c'est-à-dire les filtres et les 0-filtres coïncident.

Observons qu'en général,

$$(\mathcal{H} \cap \mathcal{Z}(X))^{\uparrow} \subset \mathcal{H},$$

mais il n'y a pas forcément égalité.

D'après le théorème I.2.3 de Zorn-Kuratowski, pour tout 0-filtre $\mathcal{F}$ il existe un 0-filtre maximal $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Les 0-filtres maximaux sont appelés 0-*ultrafiltres*. Notons $\mathbb{Z}(X)$ l'ensemble des 0-ultrafiltres sur X.

Proposition 7.6. *Un 0-filtre $\mathcal{F}$ est un 0-ultrafiltre si et seulement si $Z \in \mathcal{Z}(X)$ et $Z \in \mathcal{F}^{\#}$ implique $Z \in \mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Si $Z \in \mathcal{Z}(X)$ et $Z \in \mathcal{F}^{\#}$, alors $\{Z \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ est une base de 0-filtre $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Par conséquent, $Z = Z \cap X \in \mathcal{U}$. Ainsi si $\mathcal{F}$ est un 0-ultrafiltre, alors $\mathcal{F} = \mathcal{U}$, donc $Z \in \mathcal{F}$.

Réciproquement, s'il existe un 0-filtre $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$ et $Z \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$, alors $Z \in \mathcal{U}^{\#} \subset \mathcal{F}^{\#}$. □

Un 0-filtre $\mathcal{F}$ est dit *premier* si pour tous $Z_0, Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$,

$$Z_0 \cup Z_1 \in \mathcal{F} \Longrightarrow (Z_0 \in \mathcal{F}) \wedge (Z_1 \in \mathcal{F}).$$

Proposition 7.7. *Tout 0-ultrafiltre est premier.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $\mathcal{U}$ est un 0-ultrafiltre, $Z_0 \notin \mathcal{U}$ et $Z_1 \notin \mathcal{U}$, alors d'après la proposition 7.6, il existe $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ tels que $U_0 \cap Z_0 = \varnothing$ et $U_1 \cap Z_1 = \varnothing$ et, par conséquent, $(U_0 \cap U_1) \cap (Z_0 \cup Z_1) = \varnothing$, c'est-à-dire $Z_0 \cup Z_1 \notin \mathcal{U}^{\#}$, et parce que $\mathcal{U}$ est un 0-ultrafiltre, $Z_0 \cup Z_1 \notin \mathcal{U}$. □

D'après la proposition 2.8, la réciproque de la proposition 7.7 est vraie si l'espace topologique est discret. Afin de nous convaincre que ce n'est pas le cas en général, observons d'abord que

Proposition 7.8. *Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X, alors $\mathcal{U} \cap \mathcal{Z}(X)$ est un 0-filtre premier.*

DÉMONSTRATION. Comme $Z_0 \cup Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$ pour tous $Z_0, Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$, l'énoncé découle de la proposition 2.8. □

Exemple 7.9. Soit $X = \mathbb{R}$ avec sa topologie naturelle. Alors toute partie fermée est une partie fonctionnellement fermée. Soit $\mathcal{W}_+$ un ultrafiltre contenant $\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ et $\mathcal{W}_-$ un ultrafiltre contenant $\{-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}, \ldots\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. Alors $\mathcal{W}_+ \cap \mathcal{Z}(X)$ et $\mathcal{W}_- \cap \mathcal{Z}(X)$ sont des 0-filtres premiers différents, mais pas des 0-ultrafiltres. En effet, $0 \in Z \subset \mathbb{R}_+$ si $Z \in \mathcal{W}_+ \cap \mathcal{Z}(X)$ et $0 \in Z \subset \mathbb{R}_-$ si $Z \in \mathcal{W}_- \cap \mathcal{Z}(X)$. Donc le 0-ultrafiltre principal de $\{Z \in \mathcal{Z}(X) : 0 \in Z\}$ inclut $\mathcal{W}_+ \cap \mathcal{Z}(X)$ et $\mathcal{W}_- \cap \mathcal{Z}(X)$.

Si $\mathcal{U}$ est un 0-ultrafiltre et $x \in \lim \mathcal{U}$, alors $x \in U$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Ceci signifie que $\mathcal{U} = \{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}$, c'est-à-dire $\mathcal{U}$ est le 0-ultrafiltre principal de x.

Proposition 7.10. *Si $\mathcal{F}$ est un 0-filtre premier dans un espace complètement régulier et $x \in \operatorname{adh} \mathcal{F}$, alors $x = \lim \mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \operatorname{adh} \mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ et soit V un voisinage fonctionnellement fermé de x. Puisque X est complètement régulier, il existe $Z \in \mathcal{Z}(X)$ tel que $X \setminus Z$ est un voisinage de x inclus dans V. Ainsi $V \cup Z = X$ et comme $\mathcal{F}$ est premier, $V \in \mathcal{F}$ ou $Z \in \mathcal{F}$. Or $Z \notin \mathcal{F}$ car $x \notin Z$. □

Proposition 7.11. *Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ sont deux* 0*-ultrafiltres distincts, alors il existe $U \in \mathcal{U}$ et $W \in \mathcal{W}$ tels que $U \cap W = \varnothing$.*

DÉMONSTRATION. Sinon, $\{U \cap W : U \in \mathcal{U}, W \in \mathcal{W}\}$ est une base de 0-filtre incluant $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{W}$. □

Soit X, T deux espaces topologiques, $f \in C(X,T)$ et $\mathcal{F}$ un 0-filtre sur X. Notons

(B.14) $$f^{\rightarrow}(\mathcal{F}) := \left\{Z \in \mathcal{Z}(T) : f^{-1}(Z) \in \mathcal{F}\right\}$$

et observons que $f^{\rightarrow}(\mathcal{F}) = f(\mathcal{F}) \cap \mathcal{Z}(T)$. (8)

Proposition 7.12. *Si $\mathcal{F}$ est un* 0*-filtre, alors $f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ est un* 0*-filtre. Si $\mathcal{F}$ est premier, alors $f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ est premier.*

DÉMONSTRATION. En effet, comme $\varnothing = f^{-1}(\varnothing) \notin \mathcal{F}$, d'après (B.14), $\varnothing \notin f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$. Si $W \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ et $W \subset Z \in \mathcal{Z}(T)$, alors $f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Z) \in \mathcal{Z}(X)$ et $f^{-1}(W) \in \mathcal{F}$, donc $f^{-1}(Z) \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $Z \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$. Enfin, si $Z_0, Z_1 \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$, alors $f^{-1}(Z_0) \in \mathcal{F}$ et $f^{-1}(Z_1) \in \mathcal{F}$, donc $f^{-1}(Z_0 \cap Z_1) = f^{-1}(Z_0) \cap f^{-1}(Z_1) \in \mathcal{F}$ et d'après la définition (B.14), $Z_0 \cap Z_1 \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$. Ceci montre que $f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ est un filtre.

Si $Z_0 \cup Z_1 \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$, alors $f^{-1}(Z_0 \cup Z_1) = f^{-1}(Z_0) \cup f^{-1}(Z_1) \in \mathcal{F}$ et comme $\mathcal{F}$ est premier, $f^{-1}(Z_0) \in \mathcal{F}$ ou $f^{-1}(Z_1) \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $Z_0 \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ ou $Z_1 \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$, ce qui montre que $f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ est premier. □

8. Compactification de Čech-Stone

Dans cette section, nous appelons une *compactification* d'un espace topologique X, un espace topologique compact séparé Y tel qu'il existe un plongement dense de X dans Y.

Puisque, par définition, X est homéomorphe à l'image $f(X)$ du plongement, le plus souvent, nous allons sous-entendre qu'une compactification Y de X est un topologique compact séparé tel que X est une partie dense de Y.

Il s'ensuit qu'un espace X qui admet une compactification est nécessairement séparé. Puisque toute topologie compacte séparée est complètement régulière et tout sous-espace d'un espace complètement régulier est complètement régulier, pour qu'un espace topologique admette une compactification il faut qu'il soit complètement régulier. Il s'avère que la régularité complète est aussi une condition suffisante.

Si Y_0, Y_1 sont deux compactifications de X, alors on dit que Y_0 est *plus grande* que Y_1 ($Y_0 \geq Y_1$) s'il existe un prolongement continu $f : Y_0 \to Y_1$ de l'identité $i_X : X \to X$. Il est évident que $\geq$ est une relation transitive et réflexive. On montre facilement que, sur les classes d'équivalence par rapport aux homéomorphismes, elle est antisymétrique, donc un ordre.

---

8. Effectivement, si $Z \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$ alors $f^{-1}(Z) \in \mathcal{F}$, donc $Z \supset ff^{-1}(Z) \in f(\mathcal{F})$. Réciproquement, si $F \in \mathcal{F}$ et $f(F) \in \mathcal{Z}(T)$, alors $f^{-1}f(F) \supset F \in \mathcal{F}$, donc $f(F) \in f^{\rightarrow}(\mathcal{F})$.

Si Y est une compactification d'un espace X, alors $\operatorname{adh}_Y \mathcal{U} \neq \varnothing$ pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ contenant X. Ainsi une méthode de construction d'une compactification de X est d'adjoindre à X un élément nouveau $y_{\mathcal{U}}$ pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X, pour lequel $\operatorname{adh}_X \mathcal{U} = \varnothing$ de telle sorte que $y_{\mathcal{U}} = \lim_Y \mathcal{U}$.

Théorème 8.1. *Soit X dense dans un espace complètement régulier Y. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) Toute application continue de X dans un espace compact séparé admet un prolongement continu à Y.

(2) Toute fonction réelle continue bornée sur X admet un prolongement continu à Y.

(3) Si deux parties fonctionnellement fermées de X sont disjointes, alors leurs fermetures dans Y sont disjointes.

(4) Si $F_0, F_1 \in \mathcal{Z}(X)$, alors

$$\operatorname{cl}_Y (F_0 \cap F_1) = \operatorname{cl}_Y F_0 \cap \operatorname{cl}_Y F_1.$$

(5) Pour tout $y \in Y$ il existe un unique 0-ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X tel que $y = \lim_Y \mathcal{U}$.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2). Si $f \in C(X, \mathbb{R})$ est bornée, alors $K = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}} f(X)$ est compact.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Si $F_0, F_1 \in \mathcal{Z}(X)$ et $F_0 \cap F_1 = \varnothing$, alors selon le lemme 7.3, il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $F_0 \subset f^{-1}(0)$ et $F_1 \subset f^{-1}(1)$. Soit $\widetilde{f}$ un prolongement continu de f. Ainsi $\widetilde{f}^{-1}(0), \widetilde{f}^{-1}(1)$ sont deux fermés disjoints de Y et $F_0 \subset \widetilde{f}^{-1}(0)$ et $F_1 \subset \widetilde{f}^{-1}(1)$. Ainsi $\operatorname{cl}_Y F_0 \cap \operatorname{cl}_Y F_1 = \varnothing$.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Si $y \in \operatorname{cl}_Y F_0 \cap \operatorname{cl}_Y F_1$, alors

$$V \cap F_0 \neq \varnothing \neq V \cap F_1$$

pour tout $V \in \mathcal{V}(y) \cap \mathcal{Z}(Y)$. Ainsi $y \in \operatorname{cl}_Y(V \cap F_0)$ et $y \in \operatorname{cl}_Y(V \cap F_1)$, et d'après (3), $V \cap (F_0 \cap F_1) \neq \varnothing$ (pour tout $V \in \mathcal{V}(y) \cap \mathcal{Z}(Y)$), ce qui prouve que $y \in \operatorname{cl}_Y (F_0 \cap F_1)$.

(4) $\Longrightarrow$ (5). Puisque X est dense dans Y, pour chaque $y \in Y$ et tout $V \in \mathcal{V}(y) \cap \mathcal{Z}(Y)$, l'intersection $V \cap X \in \mathcal{Z}(X)$ est non vide. Ainsi

$$\{V \cap X : V \in \mathcal{V}(y) \cap \mathcal{Z}(Y)\}$$

est inclus dans un 0-ultrafiltre convergeant vers y. D'autre part, si $\mathcal{U}_0 \neq \mathcal{U}_1$ sont deux 0-ultrafiltres sur X, alors il existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ et $U_1 \in \mathcal{U}_1$ tel que $U_0 \cap U_1 = \varnothing$. D'après (4), $\operatorname{cl}_Y U_0 \cap \operatorname{cl}_Y U_1 = \varnothing$, donc deux 0-ultrafiltres distincts ne peuvent pas converger vers le même y.

(5) $\Longrightarrow$ (1). Soit K est un espace compact séparé et $f \in C(X, K)$. Selon (5), pour tout $y \in Y$ il existe un unique 0-ultrafiltre $\mathcal{U}_y$ sur X convergeant vers y. Comme K est compact, $\operatorname{adh}_K f^{\rightarrow}(\mathcal{U}_y) \neq \varnothing$ et, puisque le 0-filtre $f^{\rightarrow}(\mathcal{U}_y)$ est premier, il est convergent grâce à la proposition 7.10. Soit

$$\widetilde{f}(y) := \lim_K f^{\rightarrow}(\mathcal{U}_y).$$

Si $x \in X$ alors $\mathcal{U}_x$ est le 0-ultrafiltre principal de x, donc $\widetilde{f}$ coïncide avec f sur X. D'après la définition, si Z est fonctionnellement fermé, alors $y \in \widetilde{f}^{-1}(Z)$ si et seulement si $f^{-1}(Z) \in \mathcal{U}_y$, c'est-à-dire $y \in \mathrm{cl}_Y f^{-1}(Z)$, donc

$$\widetilde{f}^{-1}(Z) = \mathrm{cl}_Y f^{-1}(Z)$$

pour tout $Z \in \mathcal{Z}(X)$.

Il reste à montrer que $\widetilde{f}$ est continue. Soit $y \in Y$ et W_0 un voisinage fonctionnellement fermé de $\widetilde{f}(y)$. Soit W_1 une partie fonctionnellement fermée de K telle que $K \setminus W_1$ soit un voisinage de $\widetilde{f}(y)$. Ainsi $K = W_0 \cup W_1$ donc $X = f^{-1}(W_0) \cup f^{-1}(W_1)$. Puisque $y \notin \widetilde{f}^{-1}(W_1) = \mathrm{cl}_Y f^{-1}(W_1)$, donc $Y \setminus \widetilde{f}^{-1}(W_1)$ est un voisinage de y et

$$Y \setminus \widetilde{f}^{-1}(W_1) = \widetilde{f}^{-1}(K \setminus W_1) \subset \widetilde{f}^{-1}(W_0).$$

□

On appelle une *compactification de Čech-Stone* de X, toute compactification Y de X telle que chaque application continue de X à valeurs dans un espace compact séparé admet un prolongement continu à Y. Bien entendu, comme X est dense dans Y et $\widetilde{f} \in C(Y, K)$ est un prolongement de $f \in C(X, K)$, alors $\widetilde{f}$ est unique d'après la proposition III.4.4.

Exemple 8.2. Considérons les compactifications de l'intervalle $]0,1[$. L'intervalle fermé $[0,1]$ en est une et le cercle $S = \left\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\right\}$ de l'exemple III.11.3 en est une autre, car $f(x) := e^{2\pi i x}$ est un plongement de $]0,1[$ dans S. On voit aussitôt que $[0,1] \geq S$. On observe que ces compactifications ne sont pas de Čech-Stone. En effet, si $g :]0,1[\to [-1,1]$ est donnée par $g(x) := \sin(\frac{1}{x})$, alors elle n'admet pas de prolongement continu ni sur $[0,1]$ ni, *a fortiori*, sur S. Puisque pour tout $r \in [-1,1]$ il existe un 0-ultrafiltre contenant $\{x \in]0,1[: g(x) = r\}$, $\beta(]0,1[) \setminus]0,1[$ a au moins $\mathfrak{c}$ éléments.

Puisque $]0,1[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$, les espaces $[0,1]$ et S sont des compactifications de $\mathbb{R}$, mais pas des compactifications de Čech-Stone de $\mathbb{R}$.

Si X est un espace topologique (complètement régulier), alors $\mathbb{Z}(X)$ désigne l'ensemble des 0-ultrafiltres sur X. Traditionnellement, βX désigne l'ensemble des 0-ultrafiltres sur X muni d'une topologie canonique qui le rend une compactification de Čech-Stone de X.

Si X est un espace topologique discret, alors tout ultrafiltre sur X est un 0-ultrafiltre. Ainsi, si X est discret, alors βX est l'ensemble des ultrafiltres sur X et sa topologie de Stone en fait une compactification de Čech-Stone de X. Dans ce cas particulier, nous ne faisions pas de distinction dans la notation entre l'ensemble des ultrafiltres et le même ensemble muni de la topologie de Stone. Dans le cas général, une telle distinction s'avère utile. À tout $\mathcal{U} \in \mathbb{Z}(X)$ on associe sa copie $\mathcal{U}^\flat$ appartenant à βX. Ainsi

(B.15) $$^\flat : \mathbb{Z}(X) \to \beta X$$

est une bijection entre l'espace $\mathbb{Z}(X)$ des 0-ultrafiltres sur X et une compactification βX de X. Comme βX est une compactification de X, l'espace X est dense dans βX et correspond aux 0-ultrafiltres principaux. Par conséquent, pour tout $x \in X$,

$$\{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}^\flat = x.$$

Pour tout $Z \in \mathcal{Z}(X)$, soit

$$\beta_\flat(Z) := \left\{\mathcal{U}^\flat : Z \in \mathcal{U} \in \mathbb{Z}(X)\right\}.$$

Si A est une partie fonctionnellement ouverte de X, alors $X \setminus A \in \mathcal{Z}(X)$, et on définit

$$\beta_\natural(A) := \beta X \setminus \beta_\flat(X \setminus A).$$

Dans le cas de la topologie discrète sur X, toute partie est à la fois ouverte et fermée. Il n'y avait donc pas de nécessité de distinguer entre $\beta_\flat$ et $\beta_\natural$.

Il est immédiat que

$$\begin{aligned} \beta_\flat(Z_0 \cap Z_1) &= \beta_\flat(Z_0) \cap \beta_\flat(Z_1), \\ \beta_\flat(Z_0 \cup Z_1) &= \beta_\flat(Z_0) \cup \beta_\flat(Z_1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_\natural(A_0 \cap A_1) &= \beta_\natural(A_0) \cap \beta_\natural(A_1), \\ \beta_\natural(A_0 \cup A_1) &= \beta_\natural(A_0) \cup \beta_\natural(A_1). \end{aligned}$$

Lemme 8.3. *Si $\mathcal{U} \in \mathbb{Z}(X)$ et A est une partie fonctionnellement ouverte de X, alors $\mathcal{U}^\flat \in \beta_\natural(A)$ si et seulement s'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \subset A$.*

Démonstration. En effet, si $\mathcal{U} \in \mathbb{Z}(X)$ et $X \setminus A \in \mathcal{Z}(X)$, alors $\mathcal{U}^\flat \in \beta_\natural(A)$ si et seulement si $\mathcal{U}^\flat \notin \beta_\flat(X \setminus A)$, c'est-à-dire $X \setminus A \notin \mathcal{U}$. Selon la proposition 7.6, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$, donc $U \subset A$. □

Théorème 8.4. *Tout espace complètement régulier admet une compactification de Čech-Stone, unique à homéomorphisme près.*

Démonstration. Soit X un espace complètement régulier. Sur l'ensemble βX donné par (B.15), définissons une topologie en prenant

$$\{\beta_\natural(A) : X \setminus A \in \mathcal{Z}(X)\}$$

pour une base d'ouverts.

Montrons que $\mathcal{U}^\flat = \lim_Y \mathcal{U}$ pour tout 0-ultrafiltre $\mathcal{U}$. En effet, si $\mathcal{U}^\flat \in \beta_\natural(A)$, alors, selon le lemme 8.3, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $U \subset A$. Alors si $\mathcal{W}$ est un 0-ultrafiltre tel que $U \in \mathcal{W}$, alors $X \setminus A \notin \mathcal{W}$ donc $\mathcal{W}^\flat \in \beta_\natural(A)$. Ainsi $\beta_\flat(U) \subset \beta_\natural(A)$, ce qui veut dire que $\beta_\natural(A) \in \mathcal{U}^\uparrow$.

Observons que $x \in \beta_\natural(A) \cap X$ si $X \setminus A \notin \{Z \in \mathcal{Z}(X) : x \in Z\}^\flat$, c'est-à-dire $x \in A$. Ainsi la topologie de βX coïncide sur X avec la topologie originelle de X.

D'autre part, X est dense dans βX, car si $y \in \beta X \setminus X$ et $y \in \beta_\natural(A)$, alors $\varnothing \neq A \subset X$.

La topologie de βX est séparée. Si $y_0 \neq y_1$ alors il existe deux 0-ultrafiltres distincts $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_1$ tels que $\mathcal{U}_0^\flat = y_0$ et $\mathcal{U}_1^\flat = y_1$. En vertu de la proposition 7.11, il existe $Z_0, Z_1 \in \mathcal{Z}(X)$ tels que $Z_0 \in \mathcal{U}_0^\flat$ et $Z_1 \in \mathcal{U}_1^\flat$ et $Z_0 \cap Z_1 = \varnothing$. Alors, d'après le lemme 7.3, il existe deux parties fonctionnellement ouvertes A_0, A_1 telles que $Z_0 \subset A_0, Z_1 \subset A_1$ et $A_0 \cap A_1 = \varnothing$, donc $\beta_\natural(A_0) \cap \beta_\natural(A_1) = \varnothing, y_0 \in \beta_\natural(A_0)$ et $y_1 \in \beta_\natural(A_0)$.

La topologie est compacte. Montrons que $\varnothing \neq \operatorname{adh}_Y \mathcal{F}$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur βX. La famille

$$\widehat{\mathcal{F}} := \bigcup\nolimits_{F \in \mathcal{F}} \{Z \in \mathcal{Z}(X) : F \subset \operatorname{cl}_Y Z\}$$

est un 0-filtre sur X, donc il existe un 0-ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\widehat{\mathcal{F}}$ et, d'après la définition de la topologie, $\lim_Y \mathcal{U} = \mathcal{U}^\flat$. En conséquence,

$$\mathcal{U}^\flat \in \operatorname{adh}_Y \widehat{\mathcal{F}} = \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}} \bigcap\nolimits_{\operatorname{cl}_Y Z \supset F} \operatorname{cl}_Y Z = \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}} \operatorname{cl}_Y F = \operatorname{adh}_Y \mathcal{F}.$$

Puisque pour tout élément y de βX, il existe un unique 0-ultrafiltre sur X convergeant vers y, l'espace βX est une compactification de Čech-Stone de X en vertu du théorème 8.1.

Supposons que Y est une autre compactification de Čech-Stone de X. Alors l'injection $j \in C(X, Y)$ admet un prolongement $\widetilde{j} \in C(\beta X, Y)$ qui de surcroît est une bijection, car Y est une compactification de Čech-Stone de X. Comme Y est compact séparé, $\widetilde{j}$ est un homéomorphisme. □

Puisque la compactification de Čech-Stone est unique à homéomorphisme près, on note βX un représentant de la classe des compactifications de Čech-Stone de X. Il se trouve que

Proposition 8.5. *La compactification de Čech-Stone d'un espace est la plus grande de toutes les compactifications de cet espace.*

DÉMONSTRATION. Soit Y une compactification de X et soit $f : X \to Y$ le plongement canonique. D'après la définition, il existe un prolongement $\widetilde{f} \in C(\beta X, Y)$. Ainsi $\beta X \geq Y$. □

Exemple 8.6. D'après la construction même, on observe que l'espace topologique de Stone $\beta\mathbb{N}$ est la compactification de Čech-Stone de $\mathbb{N}$. Puisque $\mathbb{N}$ est un espace topologique localement compact séparé, il est ouvert dans $\beta\mathbb{N}$.[9] Donc $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ est compact. Nous savons déjà que $\beta\mathbb{N}$ est un espace zéro-dimensionnel. Le théorème 8.1 en donne une autre justification à partir du fait que $\mathbb{N}$ est zéro-dimensionnel.

On dit que deux éléments x_0, x_1 d'un espace topologique X sont de même *type* s'il existe un homéomorphisme $f : X \to X$ tel que $f(x_0) = x_1$. Un espace topologique X est dit *homogène* si tous ces éléments sont de même type. La topologie discrète $\mathbb{N}$ est bien entendu homogène. La question d'homogénéité

9. Grâce à la généralisation aux espaces topologiques séparés de la proposition VI.5.7.

de $\beta\mathbb{N}$ a eu une solution étonnante, à savoir non seulement $\beta\mathbb{N}$ n'est pas homogène [28], mais de surcroît, le nombre des types différents de ces éléments est $2^{\mathfrak{c}}$ [15].

Exemple 8.7. Comme nous avons vu dans l'exemple 8.2, la cardinalité de $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ est au moins $\mathfrak{c}$. Il se trouve que

$$\operatorname{card}(\beta\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) = 2^{\mathfrak{c}}.$$

En effet, si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ est une bijection, on peut considérer f comme un élément de $C(\mathbb{N}, \beta\mathbb{R})$. Alors il existe un prolongement $\widetilde{f} \in C(\beta\mathbb{N}, \beta\mathbb{R})$ de f, donc $\widetilde{f}(\beta\mathbb{N}) = \operatorname{cl}_{\beta\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \beta\mathbb{R}$ et ainsi $\operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) \geq \operatorname{card}(\beta\mathbb{R})$. D'autre part, $\operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\beta\mathbb{R})$, car toute fonction bornée sur $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ admet un prolongement continu sur $\beta\mathbb{R}$, donc $\beta\mathbb{N} \subset \beta\mathbb{R}$.

Puisque tout ultrafiltre (contenant un) borné converge dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ est nécessairement composé des limites des 0-ultrafiltres non bornés, c'est-à-dire contenant $\mathbb{R}_{\geq r} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq r\}$ pour tout r ou bien $\mathbb{R}_{\leq r} := \{x \in \mathbb{R} : x \leq r\}$ pour tout r. Autrement dit, si $y \in \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$, alors $V \cap \mathbb{R}_{\geq r} \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$ et chaque $\mathbb{R}_{\geq r}$, ou bien $V \cap \mathbb{R}_{\leq r} \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(y)$ et chaque $\mathbb{R}_{\leq r}$. Ainsi on peut imaginer $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ comme deux amas autour de $+\infty$ et $-\infty$.

Puisque toute fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_{\geq r}$ admet un prolongement continu sur $\beta\mathbb{R}$ (d'après la définition de la compactification de Čech-Stone), nous pouvons considérer $\beta\mathbb{R}_{\geq r}$ comme une partie de $\beta\mathbb{R}$, ce que nous allons faire dans la suite. Ainsi $\beta\mathbb{R}_{\geq r} \setminus \mathbb{R}_{\geq r} \subset \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. Comme les voisinages des éléments de $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ne sont pas bornés, $\beta\mathbb{R}_{\geq r} \setminus \mathbb{R}_{\geq r}$ ne dépend pas de $r \in \mathbb{R}$ et est compact, car $\mathbb{R}_{\geq r}$ est localement compact, donc ouvert dans $\beta\mathbb{R}_{\geq r}$. En particulier,

$$\beta\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} = \bigcap\nolimits_{r \in \mathbb{R}} \beta\mathbb{R}_{\geq r},$$

et en conséquence, $\beta\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ est connexe en raison de l'exercice VII.4. [10] Il est bien sûr de même avec l'espace homéomorphe $\beta\mathbb{R}_{\leq 0} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. La compactification $\beta\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ est connexe en tant que fermeture d'un ensemble connexe $\mathbb{R}$. Cependant,

$$\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = (\beta\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}) \cup (\beta\mathbb{R}_{\leq 0} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0})$$

s'avère disconnexe. Effectivement, la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ admet un prolongement $f \in C(\beta\mathbb{R}, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right])$. Puisque les voisinages des éléments de $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ ne sont pas bornés, $f(\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R})$ est égale à $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$.

Exemple 8.8. Puisque $\mathbb{Q}$ est zéro-dimensionnel, la compactification de Čech-Stone $\beta\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ est zéro-dimensionnel en raison du théorème 8.1. Pour tout $y \in \beta\mathbb{Q}$ et tout $V \in \mathcal{V}(y)$, il existe un compact $W \subset V$ tel que $W \in \mathcal{V}(y)$. Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact, $W \cap (\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$, ce qui veut dire que $\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\beta\mathbb{Q}$.

10. Qui reste valable dans le cadre des espaces topologique séparés.

Comme dans le cas de $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$, la différence $\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ consiste de deux morceaux (mais bien sûr disconnexes) autour de $-\infty$ et $+\infty$, correspondant aux ultrafiltres contenant respectivement $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ et $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ pour tout r. D'autre part, toute fonction continue bornée sur $\mathbb{Q}$ admet un prolongement continu (unique) sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\beta\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ possède encore un morceaux, à savoir $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Comme $\operatorname{card}\mathbb{Q} = \operatorname{card}\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est discret, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ et $f \in C(\mathbb{N}, \beta\mathbb{Q})$. Ainsi, il existe $\widetilde{f} \in C(\beta\mathbb{N}, \beta\mathbb{Q})$, donc $\widetilde{f}(\beta\mathbb{N}) = \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{Q}} f(\mathbb{N}) = \beta\mathbb{Q}$, car $\widetilde{f}(\beta\mathbb{N})$ est compact, ce qui implique que $\operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) \geq \operatorname{card}(\beta\mathbb{Q})$. En fait,

$$\operatorname{card}(\beta\mathbb{Q}) = \operatorname{card}(\beta\mathbb{N}),$$

car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, donc $\beta\mathbb{N} \subset \beta\mathbb{Q}$ et ainsi $\operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) \leq \operatorname{card}(\beta\mathbb{Q})$.

Exercices

Solutions : pages 346-354.

(1) Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble X est appelée *isotone* si $A \in \mathcal{A}$ et $A \subset B$ entraîne que $B \in \mathcal{A}$. Soit

$$\mathcal{A}^* := \{D : X \setminus D \notin \mathcal{A}\}.$$

Montrer que

(a) $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$,

(b) $\mathcal{A}^{\#} \subset \mathcal{A}^*$,

(c) $\mathcal{A}^{\#} = \mathcal{A}^*$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est isotone.

(2) Une famille $\mathcal{A}$ est une grille d'un filtre si et seulement si

$$A_0 \cup A_1 \in \mathcal{A} \Longrightarrow A_0 \in \mathcal{A} \text{ ou } A_1 \in \mathcal{A}.$$

(3) Soit $\mathcal{A}$ une famille isotone de parties d'un ensemble X et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_{H\in\mathcal{A}^{\#}} \inf\nolimits_{x\in H} f(x) &= \inf\nolimits_{A\in\mathcal{A}} \sup\nolimits_{x\in A} f(x), \\ \sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}} \inf\nolimits_{x\in A} f(x) &= \inf\nolimits_{H\in\mathcal{A}^{\#}} \sup\nolimits_{x\in H} f(x). \end{aligned}$$

(4) Montrer que

(a) si X est infini, alors $\mathcal{E}_X := \{X \setminus A : A \subset X, \operatorname{card} A < \infty\}$ est un filtre libre sur X. Il s'appelle le *filtre cofini de* X,

(b) si X est dénombrable infini, alors le filtre cofini de X est le filtre engendré par $(x_n)_n$, où $(x_n)_n$ est une suite libre arbitraire telle que $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) tout filtre libre sur X est plus fin que le filtre cofini de X,

(d) une famille $\mathcal{F}$ est dite un *filtre dégénéré* si elle vérifie (B.2) et (B.3), mais pas (B.1). Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est dégénéré si et seulement si $\mathcal{F} = 2^X$,

(e) pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, il existe une paire unique de filtres $\mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}^\bullet$ (possiblement dégénérés) telle que $\mathcal{F}^\circ$ est libre, $\mathcal{F}^\bullet$ est principal, et

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\circ \wedge \mathcal{F}^\bullet \text{ et } \mathcal{F}^\circ \vee \mathcal{F}^\bullet = 2^X,$$

(f) si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X, alors $\mathcal{U}$ est libre ou bien il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{U} = \{U \subset X : x \in U\}$.

(5) Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. On note $\beta(\mathcal{F})$ l'ensemble des ultrafiltres $\mathcal{U}$ tels que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$. Montrer que

(a) $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U}$,

(b) $\mathcal{F}^\# = \bigcup_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U}$.

(6) Un espace topologique est appelé *dénombrablement compact* si pour toute famille dénombrable $\mathcal{P}$ d'ouverts telle que $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = X$, il existe une sous-famille finie $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ telle que $\bigcup_{P \in \mathcal{P}_0} P = X$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(a) X est dénombrablement compact,

(b) pour tout filtre $\mathcal{F}$ à base dénombrable $\operatorname{Adh} \mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \operatorname{cl} F$ n'est pas vide,

(c) pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X, l'adhérence $\operatorname{adh}_{n \to \infty} x_n$ n'est pas vide.

(7) Soit A une partie d'un espace topologique X. Rappelons que $x \in X$ est dit un *point d'accumulation* de A si $x \in \operatorname{cl}(A \setminus \{x\})$. Montrer qu'un espace topologique séparé X est dénombrablement compact si et seulement si toute partie infinie A de X admet un point d'accumulation.

(8) Soit $X := \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \omega_1\}$. On définit sur X la *topologie d'ordre*, c'est-à-dire, V est un voisinage de α s'il existe $\gamma < \alpha$ tel que $\{\delta : \gamma < \delta \leq \alpha\} \subset V$. Alors X est séquentiellement compact, mais pas compact.

(9) Une partie A d'un espace topologique est dite *séquentiellement fermée* si la limite de toute suite d'éléments de A, est incluse dans A. Un espace topologique est dit *séquentiel* si toute partie séquentiellement fermée est fermée. Montrer que

(a) l'image d'un espace dénombrablement compact par une application continue est dénombrablement compacte,

(b) tout espace compact est dénombrablement compact,

(c) tout espace séquentiellement compact est dénombrablement compact,

(d) il existe un espace dénombrablement compact qui ne soit ni compact ni séquentiellement compact,

(e) tout espace dénombrablement compact et séquentiel est séquentiellement compact,

(f) tout espace métrisable dénombrablement compact est compact,

(g) (!) il existe X, Y dénombrablement compacts tels que $X \times Y$ n'est pas dénombrablement compact.

(10) Un espace topologique est dit *localement compact* si tout son élément admet une base de voisinages compacts. Montrer que tout espace compact séparé est localement compact.

(11) Soit X un espace topologique. La *compactification d'Alexandrov* de X est définie sur $X \cup \{\infty\}$, où $\infty \notin X$ comme suit : $\mathcal{V}(\infty)$ admet une base $\{B : X \setminus B$ compact de $X\}$; si $x \in X$, alors $V \in \mathcal{V}(x)$ si $V \cap X$ est un voisinage de x dans X. Montrer que

(a) si X est localement compact séparé, alors sa compactification d'Alexandrov est un espace compact séparé,

(b) si X est discret, alors sa compactification d'Alexandrov est la topologie cofinie autour de ∞ de $X \cup \{\infty\}$.

(12) Pour tout nombre premier p, soit $A_p := \{n \in \mathbb{N} : p | n\}$ (des nombres divisibles par p). Montrer que $\mathcal{A} := \{A_p : p$ premier$\}$ est indépendante (Voir B.6.7).

(13) Rappelons que pour tout $A \subset \mathbb{N}$,

$$\beta(A) := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\},$$
$$\beta_0(A) := \beta(A) \setminus \{\beta(\{x\}) : x \in \mathbb{N}\},$$

désignent, respectivement, les ensembles des ultrafiltres et des ultrafiltres libres, contenant A. Montrer que

(a) si A est fini, alors $\beta(A) = \{\beta(\{x\}) : x \in A\}$ (l'ensemble des ultrafiltres principaux des éléments de A),

(b) $\beta_0(A_0) = \beta_0(A_1)$ si et seulement si $(A_0 \setminus A_1) \cap (A_1 \setminus A_0)$ est fini, c'est-à-dire A_0, A_1 sont presque égaux (Voir l'exercice I.16),

(c) $\beta_0(A_0) \subset \beta_0(A_1)$ si et seulement si $A_0 \setminus A_1$ est fini, c'est-à-dire A_0 est presque inclus dans A_1,

(d) si $(A_n)_n$ est une suite décroissante de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que $A_n \setminus A_{n+1}$ est infini, alors il existe une partie infinie A_∞ de $\mathbb{N}$ telle que $\beta_0(A_\infty) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \beta_0(A_n)$ et $\beta_0(A_n) \setminus \beta_0(A_\infty) \neq \varnothing$ (Voir le lemme V.4.9),

(e) $\chi(x) > \aleph_0$ dans $\beta\mathbb{N}$ pour tout $x \in \beta_0(\mathbb{N})$,

(f) il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts de $\beta\mathbb{N}$.

(14) Soit $\beta_0\mathbb{N} := \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ munie de la topologie héritée de $\beta\mathbb{N}$. Montrer que $\beta_0\mathbb{N}$ est compact non séparable, de cardinalité $2^{\mathfrak{c}}$ et de poids $\mathfrak{c}$.

(15) Montrer que si F, K sont deux fermés disjoints d'un espace complètement régulier et K est compact, alors il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $f(F) = \{0\}$ et $f(K) = \{1\}$.

(16) Montrer que

(a) toute union finie de parties fonctionnellement fermées est fonctionnellement fermée,

(b) toute intersection dénombrable de parties fonctionnellement fermées est fonctionnellement fermée.

(17) Montrer que si X est un espace séparé localement compact, alors la compactification d'Alexandrov de X est la plus petite de toutes les compactifications de X.

ANNEXE C

Métrisation

Dans la section III.7 nous avons donné des conditions nécessaires pour qu'un espace topologique soit métrisable et, dans le cas des espaces topologiques séparables, une caractérisation de métrisabilité (théorème III.7.7 de Urysohn). Les critères de métrisabilité des espaces topologiques furent un des thèmes centraux de la topologie générale jusque dans les années soixante. Y ont contribué, entre autres, Nagata, Smirnov, Bing, Hanai, Morita, Stone, Moore, Alexandrov et Arhangel'skii.

Dans cette annexe nous allons démontrer quelques théorèmes classiques de métrisabilité. Notre approche est basée sur la théorie des partitions de J. Dydak [11] permettant d'éviter des calculs, parfois ingrats, inhérents à l'abord classique.

1. Partitions

Rappelons que si f est une fonction réelle, alors on abrège la notation

$$\{f > 0\} := \{x \in X : f(x) > 0\}.$$

Soit X un espace topologique et $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}_+)$. La famille

$$\perp\mathcal{F} := \{\{f > 0\} : f \in \mathcal{F}\}$$

est dite le *socle* de $\mathcal{F}$. Bien entendu, puisque $\mathcal{F}$ est composée de fonctions continues, tout socle est une famille d'ouverts. Une famille $\mathcal{F}$ d'éléments de $C(X, \mathbb{R}_+)$ est dite une *partition* (sur X) si pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) > 0$.

Autrement dit, $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}_+)$ est une partition sur X si et seulement si $\sup_{f \in \mathcal{F}} f(x) > 0$ pour tout $x \in X$. Bien entendu,

Proposition 1.1. *Une famille $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R}_+)$ est une partition sur X si et seulement si son socle $\perp\mathcal{F}$ est un recouvrement de X.*

Un tel recouvrement est ouvert, car une partition est composée de fonctions continues. Rappelons que pour une partie $A \subset \mathbb{R}_+$, on définit

$$\sum_{r \in A} r := \sup\{\sum_{r \in T} r : T \subset A, \operatorname{card} T < \infty\}. \tag{C.1}$$

Une partition $\mathcal{F}$ sur X est appelée une *partition* d'une fonction $h : X \to]0, +\infty]$ si $h = \sum_{f \in \mathcal{F}} f$. D'après la définition (C.1),

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = \sup\{\sum_{f \in \mathcal{T}} f(x) : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, \operatorname{card} \mathcal{T} < \infty\}. \tag{C.2}$$

En particulier, une partition $\mathcal{F}$ est dite une *partition de l'unité* si

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) = 1$$

pour tout $x \in X$.

Nous allons définir des propriétés des partitions à partir des propriétés analogues des recouvrements.

Exemple 1.2. Rappelons qu'une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un espace topologique X est dite *discrète* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V de x tel que $\operatorname{card}\{A \in \mathcal{A} : V \cap A \neq \varnothing\} \leq 1$. Ainsi une partition $\mathcal{F}$ sur X est dite *discrète* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V de x tel que

$$\{f \in \mathcal{F} : \sup_V f > 0\}$$

est un singleton.

Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un espace topologique X est dite *localement finie* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V de x tel que le nombre de $A \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap V \neq \varnothing$ est fini.

Une partition $\mathcal{F}$ sur un espace topologique X est dite *localement finie* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage V de x tel que $\{f \in \mathcal{F} : \sup_V f > 0\}$ est fini.

Moyennant les socles, nous transposons des propriétés entre deux recouvrements en relations entre un recouvrement et une partition et même entre deux partitions.

Rappelons qu'une famille $\mathcal{W}$ est un raffinement d'une famille $\mathcal{U}$ si pour tout $W \in \mathcal{W}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $W \subset U$.

On dit qu'une partition $\mathcal{F}$ est un *raffinement* d'un recouvrement $\mathcal{U}$ (traditionnellement, $\mathcal{F}$ est dite *subordonnée* à $\mathcal{U}$) si le socle de $\mathcal{F}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$. En particulier, une partition $\mathcal{F}$ est dite un *raffinement* d'une partition $\mathcal{H}$ si (le socle de) $\mathcal{F}$ est un raffinement du socle de $\mathcal{H}$.

Une propriété importante, plus forte que la normalité, est l'existence d'une partition de l'unité plus fine pour tout recouvrement ouvert. Avant d'aborder l'examen de cette propriété, caractérisons les partitions dont la somme est continue.

Une partition $\mathcal{F}$ sur X est dite *localement presque finie* si pour chaque $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ et une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ telle que

$$\sup_{u \in U} \sum_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}} f(u) < \varepsilon. \tag{C.3}$$

En généralisant un critère concernant les séries de fonctions positives, on observe que

Proposition 1.3. *Si $\mathcal{F}$ est une partition et pour tout $x \in X$,*

$$h(x) := \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) < \infty, \tag{C.4}$$

alors h est continue si et seulement si $\mathcal{F}$ est localement presque finie.

DÉMONSTRATION. On suppose que $h(x) < \infty$ pour tout $x \in X$. Soit $\mathcal{F}$ localement presque finie. Si $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, alors selon (C.2), il existe une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ telle que $\sum_{f\in\mathcal{T}} f(x) > h(x) - \frac{\varepsilon}{2}$. En tant que somme finie de fonctions continues, $\sum_{f\in\mathcal{T}} f$ est continue, donc il existe un voisinage U_0 de x tel que

$$h(x) - \varepsilon < \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(x) - \tfrac{\varepsilon}{2} < \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(u) \leq h(u)$$

pour tout $u \in U_0$.

Puisque $\mathcal{F}$ est localement presque finie, pour $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ et un voisinage U_1 de x tels que

$$h(u) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(u) = \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(u) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $u \in U_1$. Comme $\sum_{f\in\mathcal{T}} f$ est continue, il existe un voisinage U de x, inclus dans $U_0 \cap U_1$, et tel que, pour tout $u \in U$,

$$h(x) + \varepsilon \geq \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(x) + \varepsilon$$

$$> \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(u) + \tfrac{\varepsilon}{2} = h(u) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(u) + \tfrac{\varepsilon}{2} > h(u).$$

Réciproquement, soit h continue. Si $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, alors d'après (C.2) il existe une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ telle que $h(x) - \sum_{f\in\mathcal{T}} f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque h est continue, $\sum_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f = h - \sum_{f\in\mathcal{T}} f$ est continue, donc il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$\sup\nolimits_{u\in U} \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(u) < \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(x) + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\mathcal{F}$ est localement finie. □

Si $\mathcal{F}$ est une partition, alors

$$\mathcal{F}_{\text{fin}} := \{\sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, \operatorname{card} \mathcal{T} < \infty\}$$

est une partition et $\sum_{f\in\mathcal{F}} f = \sum_{f\in\mathcal{F}_{\text{fin}}} \varphi$. Observons que si $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue, alors $\mathcal{F}$ est équicontinue. Cependant l'implication réciproque n'est pas valable, car les sommes finies $\sum_{f\in\mathcal{T}} f$ constituant $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ n'ont pas de longueur limitée.

Proposition 1.4. *Si* (C.4), *alors h est continue si et seulement si $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue.*

DÉMONSTRATION. Si $\sum_{f\in\mathcal{F}} f$ est continue, alors, d'après la proposition 1.3, $\mathcal{F}$ est localement presque finie, c'est-à-dire pour chaque $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $U \in \mathcal{V}(x)$ et une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ telle que

$$\sup\nolimits_{u\in U} \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(u) < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Donc si $\mathcal{S}$ est une partie finie de $\mathcal{F}$, alors $\sup_{u\in U} \sum_{f\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{T}} f(u) < \frac{\varepsilon}{4}$, donc

$$\sup\nolimits_{u\in U} \left| \sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{T}} f(u) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{T}} f(x) \right| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, la famille de fonctions continues $\{\sum_{f\in\mathcal{P}} f : \mathcal{S}\cap\mathcal{T}\}$ est finie, donc équicontinue, et par conséquent, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$\text{(C.5)} \qquad \left|\sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}\cap\mathcal{T}} f(x) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}\cap\mathcal{T}} f(u)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $f \in \mathcal{P}$ et $u \in V$. Ainsi

$$\left|\sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}} f(x) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{S}} f(u)\right| < \varepsilon$$

pour toute partie finie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}$ et tout $u \in U \cap V$, ce qui montre que $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue.

Réciproquement, selon la définition de la somme (C.2), pour tout $w \in X$ il existe une partie finie $\mathcal{T}_w$ de $\mathcal{F}$ telle que

$$\left|h(w) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}_w} f(w)\right| < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Par définition, si $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue sur X, alors pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x tel que

$$\left|\sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(v) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

pour toute partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ et chaque $v \in V$. Si $v \in V$ et $\mathcal{T} = \mathcal{T}_v \cup \mathcal{T}_x$, alors

$$|h(v) - h(x)| \leq$$

$$\left|h(v) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(v)\right| + \left|\sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(v) - \sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(x)\right| + \left|\sum\nolimits_{f\in\mathcal{T}} f(x) - h(x)\right|,$$

donc $|h(v) - h(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire h est continue en x pour tout $x \in X$. □

Proposition 1.5. *Soit $\mathcal{F}$ une partition de X telle que* (C.4) *pour tout $x \in X$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathcal{F}$ est équicontinue,

(2) $\{\max(f - g, 0) : f \in \mathcal{F}\}$ est localement finie pour toute fonction continue $g : X \to]0, \infty[$,

(3) $\{\max(f - \varepsilon, 0) : f \in \mathcal{F}\}$ est localement finie pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Si $\mathcal{F}$ est équicontinue, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ et un voisinage V de x tels que $f(v) < \varepsilon$ pour tout $v \in V$ et $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$.

Effectivement, soit V un voisinage de x tel que $|f(v) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $v \in V$. D'après la condition (C.4), il existe une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ telle que $h(x) - \sum_{f\in\mathcal{T}} f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et, par conséquent, $f(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $f \in \mathcal{F}\setminus\mathcal{T}$. Donc si $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$ et $v \in V$, alors

$$f(v) < f(x) + \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Si maintenant $0 < \varepsilon < g(x)$, alors il existe un voisinage W de x inclus dans V et tel que $\varepsilon < g(v)$ pour tout $v \in W$. Donc

$$f(v) - g(v) < f(v) - \varepsilon < 0$$

pour tout $v \in W$ et $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$, ce qui veut dire que $\{\max(f-g,0) : f \in \mathcal{F}\}$ est localement finie.

(2) $\Longrightarrow$ (3) pour $f(x) := \varepsilon > 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : La condition (3) signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ et un voisinage V de x tels que $f(v) < \varepsilon$ pour chaque $v \in V$ et pour tout $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$, donc $|f(v) - f(x)| < 2\varepsilon$ pour chaque $v \in V$ et pour tout $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$. Puisque $\mathcal{T}$ est finie, il existe un voisinage W de x inclus dans V tel que $|f(v) - f(x)| < 2\varepsilon$ pour chaque $v \in W$ et pour tout $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Lemme 1.6. *Si $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$ équicontinue et* $\sup\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} < \infty$ *pour tout $x \in X$, alors*

$$\{\sup_{f \in \mathcal{T}} f : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}\}$$

est équicontinue.

DÉMONSTRATION. Posons $f_{\mathcal{T}} := \sup_{f \in \mathcal{T}} f$. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors $f_{\mathcal{T}}(x) + \varepsilon \geq f(x) + \varepsilon$ pour tout $f \in \mathcal{T}$ et pour tout $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$. D'après l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que pour tout $v \in V$ et chaque $f \in \mathcal{T}$,

$$f_{\mathcal{T}}(x) + \varepsilon \geq f(x) + \varepsilon \geq f(v),$$

donc $f_{\mathcal{T}}(x) + \varepsilon \geq \sup_{f \in \mathcal{T}} f(v) = f_{\mathcal{T}}(v)$ pour tout $v \in V$. D'autre part, pour tout $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, il existe $g_{\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$ telle que $g_{\mathcal{T}}(x) > f_{\mathcal{T}}(x) - \varepsilon$ et comme $\mathcal{F}$ est équicontinue, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$f_{\mathcal{T}}(v) \geq g_{\mathcal{T}}(v) \geq f_{\mathcal{T}}(x) - \varepsilon$$

pour tout $v \in V$ et tout $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}$. $\square$

Une famille $\mathcal{W}$ est dite un *raffinement régulier* d'une famille $\mathcal{U}$ si pour tout $W \in \mathcal{W}$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $\operatorname{cl} W \subset U$. Une partition $\mathcal{G}$ s'appelle un *raffinement régulier* d'une partition $\mathcal{F}$ si le socle $\perp\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$est un raffinement régulier du socle $\perp\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$.

On dit qu'une partition $\mathcal{G}$ est une *minorante* (respectivement, *minorante stricte*) d'une partition $\mathcal{F}$ si pour tout $f \in \mathcal{F}$ il correspond un unique $g_f \in \mathcal{G}$ tel que $g_f(x) \leq f(x)$ (respectivement, $g_f(x) < f(x)$) pour tout $f \in \mathcal{F}$.

Bien entendu, toute minorante de $\mathcal{F}$ est un raffinement de $\mathcal{F}$. D'autre part, si $\mathcal{G}$ est une minorante de $\mathcal{F}$, alors

$$\sum\nolimits_{g \in \mathcal{G}} g \leq \sum\nolimits_{f \in \mathcal{F}} f.$$

Lemme 1.7. *Toute minorante stricte d'une partition est son raffinement régulier.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{G} = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ une minorante stricte de $\mathcal{F}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{F}$,

$$\{g_f > 0\} \subset \operatorname{cl}\{g_f > 0\} \subset \{g_f \geq 0\} \subset \{f > 0\},$$

donc $\mathcal{G}$ est un raffinement régulier de $\mathcal{F}$. $\square$

Proposition 1.8. *Si $\mathcal{G}$ est une minorante de $\mathcal{F}$ et $\sum_{f\in\mathcal{F}} f$ est continue, alors $\sum_{g\in\mathcal{G}} g$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\sum_{f\in\mathcal{F}} f$ est continue, $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue grâce à la proposition 1.4, donc vérifie la condition (3) de la proposition 1.5. Il est évident que si $\mathcal{G}$ est une minorante de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{G}_{\text{fin}}$ vérifie également la même condition donc est équicontinue en raison de la proposition 1.5, car $\sum_{g\in\mathcal{G}} g(x) \leq \sum_{f\in\mathcal{F}} f(x) < \infty$. Par conséquent, $\sum_{g\in\mathcal{G}} g$ est continue, eu regard à la proposition 1.4. □

Proposition 1.9. *Toute partition équicontinue $\mathcal{F}$ d'une fonction finie admet une minorante localement finie qui est un raffinement régulier de $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{F}$ est une partition équicontinue d'une fonction finie sur X, alors $\{\min(f,1) : f \in \mathcal{F}\}$ l'est aussi, donc on peut supposer que $\mathcal{F} \subset C(X,[0,1])$. D'après la proposition 1.4 et le lemme 1.6,

$$F(x) := \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$$

est strictement positive et continue. En conséquence,

$$\mathcal{G} := \{\max(0, f - \tfrac{1}{2}F) : f \in \mathcal{F}\}$$

est une minorante stricte de $\mathcal{F}$, donc un raffinement régulier $\mathcal{F}$, compte tenu du lemme 1.7. Enfin, grâce à la proposition 1.5, $\mathcal{G}$ est localement finie. □

Corollaire 1.10. *Toute partition de l'unité admet une partition de l'unité localement finie qui la raffine.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{F}$ est une partition de l'unité, alors à cause de la proposition 1.9, il existe une minorante localement finie $\mathcal{G}$ raffinant $\mathcal{F}$, donc $h := \sum_{g\in\mathcal{G}} g$ est continue et strictement positive d'après la proposition 1.8. Ainsi $\{g/h : g \in \mathcal{G}\}$ est une partition localement finie de l'unité. □

Corollaire 1.11. *Si un recouvrement ouvert d'un espace topologique admet une partition de l'unité qui le raffine, alors il admet une partition localement finie de l'unité qui le raffine.*

2. Topologies paracompactes

Une topologie est dite *paracompacte* si tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert localement fini qui le raffine.

Il s'ensuit que toute topologie compacte est paracompacte[1].

Lemme 2.1. *Si F_0, F_1 sont deux fermés d'un espace paracompact X tels que pour tout $x \in F_0$ il existe $U_x \in \mathcal{N}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(F_1)$ avec $U_x \cap V_x = \varnothing$, alors $\mathcal{V}(F_0)$ et $\mathcal{V}(F_1)$ ne se grillent pas.*

1. Voir l'exercice 5 pour un résultat plus fort dans le cadre des espaces topologiques réguliers.

DÉMONSTRATION. La famille $\mathcal{U} := \{U_x : x \in F_0\} \cup \{X \setminus F_0\}$ est un recouvrement ouvert de X. Soit $\mathcal{W}$ un raffinement localement fini de $\mathcal{U}$.

Si on pose $\mathcal{W}_0 := \{W \in \mathcal{W} : W \cap F_0 \neq \varnothing\}$, alors $\operatorname{cl} W \cap F_1 = \varnothing$ pour tout $W \in \mathcal{W}_0$ et

$$F_0 \subset \bigcup\nolimits_{W \in \mathcal{W}_0} W \subset \operatorname{cl}(\bigcup\nolimits_{W \in \mathcal{W}_0} W) = \bigcup\nolimits_{W \in \mathcal{W}_0} \operatorname{cl} W,$$

selon l'exercice 2. Ainsi $\bigcup_{W \in \mathcal{W}_0} W \in \mathcal{V}(F_0)$ et $X \setminus \bigcup_{W \in \mathcal{W}_0} \operatorname{cl} W \in \mathcal{N}(F_1)$. □

Si F_0 est fermé et $x \notin F_0$, alors selon le lemme 2.1 avec $F_1 := \{x\}$,

Corollaire 2.2. *Tout espace paracompact séparé est régulier.*

Théorème 2.3. *Toute topologie séparée paracompacte est normale.*

DÉMONSTRATION. Si F_0, F_1 sont deux fermés d'un espace paracompact X. Grâce au corollaire 2.2, pour tout $x \in F_0$ il existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ et $V_x \in \mathcal{V}(F_1)$ tels que $U_x \cap V_x = \varnothing$. En vertu du lemme 2.1, $\mathcal{V}(F_0)$ et $\mathcal{V}(F_1)$ ne se grillent pas. □

Proposition 2.4. *Si X est un espace topologique séparé, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) X est paracompact ;

(2) pour tout recouvrement ouvert de X il existe une partition localement finie de l'unité plus fine ;

(3) pour tout recouvrement ouvert de X il existe une partition de l'unité plus fine.

DÉMONSTRATION. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Si X est séparé et paracompact, alors tout recouvrement ouvert possède un raffinement localement fini $\mathcal{W}$ recouvrant X. D'après le théorème 2.3, X est normal, donc régulier, ainsi il existe un recouvrement $\{F_W : W \in \mathcal{W}\}$ telle que $\operatorname{cl} F_W \subset W$ pour tout $W \in \mathcal{W}$. Comme X est normal, selon le lemme III.6.1 de Urysohn, pour tout $W \in \mathcal{W}$ il existe une fonction continue $f_W : X \to [0,1]$ telle que $f_W(F_W) = \{1\}$ et $f_W(X \setminus W) = \{0\}$. Puisque $\mathcal{W}$ et $\{F_W : W \in \mathcal{W}\}$ sont des recouvrements localement finies, $\{f_W : W \in \mathcal{W}\}$ est une partition localement finie, donc $\sum_{V \in \mathcal{W}} f_V$ est une fonction continue strictement positive. Ainsi $\{f_W / \sum_{V \in \mathcal{W}} f_V : W \in \mathcal{W}\}$ est une partition localement finie de l'unité raffinant $\mathcal{W}$.

Évidemment, (2) $\Longrightarrow$ (3).

(3) $\Longrightarrow$ (2) : Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert et $\mathcal{F}$ est une partition de l'unité raffinant $\mathcal{U}$, alors en vertu du corollaire 1.11, il existe une partition localement finie de l'unité $\mathcal{G}$ raffinant $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{U}$. □

Une partition $\mathcal{F}$ sur X est dite *bornée* s'il existe $c > 0$ tel que

$$\sup\{f(x) : x \in X, f \in \mathcal{F}\} \leq c.$$

Il s'avère que tout recouvrement ouvert d'un espace topologique normal admet une partition bornée plus fine (Voir l'exercice 4).

Lemme 2.5. *Pour toute partition bornée équicontinue, il existe une partition plus fine, équicontinue, d'une fonction bornée.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{F}$ une partition bornée par $c > 0$. On peut indexer $\mathcal{F} = \{f_s : s \in S\}$, où S est bien ordonné. Posons

$$g_s(x) := \max(0, f_s(x) - \sup_{t<s} f_t(x)).$$

pour tout $x \in X$ et $s \in S$. Selon le lemme 1.6, $\{f_s - \sup_{t<s} f_t : s \in S\}$ est équicontinue, donc $\{g_s : s \in S\}$ est équicontinue.

Puisque chaque f_s est positive,

$$t < s \Longrightarrow g_s(x) \leq f_s(x) - f_t(x) \tag{C.6}$$

pour tout $x \in X$. Soit $s(x)$ le plus petit s tel que $f_s(x) > 0$. Alors $f_{s(x)}(x) = g_{s(x)}(x)$, donc $\sum_{s\in S} g_s(x) > 0$.

Pour toute partie finie croissante $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ de $\{s \in S : g_s(x) > 0\}$, en vertu de (C.6),

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{t\in T} g_t(x) \\ &\leq f_{t_1}(x) + (f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x)) + \ldots + (f_{t_n}(x) - f_{t_{n-1}}(x)) \\ &= f_{t_n}(x) \leq c, \end{aligned}$$

et ainsi $g(x) := \sum_{s\in S} g_s(x) \leq c$ d'après (C.2). En conséquence, $\{g_s : s \in S\}$ est une partition équicontinue d'une fonction bornée raffinant $\mathcal{F}$. □

Théorème 2.6. *Soit X un espace topologique normal. S'il existe une partition équicontinue raffinant un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, alors il existe une partition de l'unité raffinant $\mathcal{U}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace normal X et soit $\mathcal{F}$ une partition équicontinue raffinant (2)

$$\{\bigcup\nolimits_{U\in\mathcal{T}} U : \mathcal{T} \subset \mathcal{U}, \operatorname{card}\mathcal{T} < \infty\}.$$

Ainsi $\mathcal{F}_1 := \{\min(1, f) : f \in \mathcal{F}\}$ est bornée et possède toutes les propriétés de $\mathcal{F}$ ci-dessus mentionnées. D'après le lemme 2.5, il existe une partition équicontinue $\mathcal{G}$ d'une fonction bornée raffinant $\mathcal{F}$. D'après la proposition 1.9, il existe une partition $\mathcal{H}$ localement finie plus fine que $\mathcal{U}$. Il s'ensuit que $\sum_{h\in\mathcal{H}} h$ est continue et strictement positive, donc en divisant tout élément de $\mathcal{H}$ par la fonction $\sum_{h\in\mathcal{H}} h$, on obtient une partition de l'unité raffinant $\mathcal{U}$. □

Théorème 2.7 (A. H. Stone). *Tout espace métrisable est paracompact.*

DÉMONSTRATION. Si d est une métrique bornée par 1 sur X et si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, alors $\mathcal{F} = \{d(\cdot, X \setminus U) : U \in \mathcal{U}\}$ est une partition équicontinue bornée raffinant $\mathcal{U}$. En vertu du théorème 2.6, il existe une partition de l'unité raffinant $\mathcal{U}$, donc grâce à la proposition 2.4, X est paracompact. □

2. L'*enveloppe additive* de $\mathcal{U}$

Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un espace topologique X est dite *σ-localement finie*, s'il existe une suite $(\mathcal{A}_n)_n$ de familles localement finies telle que $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Lemme 2.8. *Toute topologie régulière admettant une base σ-localement finie est parfaitement normale.*

Démonstration. Soit X un espace régulier et $(\mathcal{B}_n)_n$ une suite de familles localement finies d'ouverts telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ est une base d'ouverts de X. Soit F_0, F_1 deux fermés disjoints de X. Pour chaque $x \in X \setminus F_1$ il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ et $W(x) \in \mathcal{B}_n$ tels que $x \in W(x) \subset \operatorname{cl} W(x) \subset X \setminus F_1$, car X est régulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $W_n := \bigcup\{W(x) : n(x) = n\}$. Comme $\mathcal{B}_n$ est une famille localement finie pour n, en raison de l'exercice 2, $\operatorname{cl} W_n = \bigcup\{\operatorname{cl} W(x) : n(x) = n\}$. Il s'ensuit que $F_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n = X \setminus F_1$, ce qui entraîne la normalité de X, eu égard à la proposition III.2.3. En plus, ceci montre que tout ouvert est l'union dénombrable de fermés, donc tout fermé est un G_δ, donc X est parfaitement normale en raison de l'exercice III.21. □

Corollaire 2.9. *Tout espace métrisable admet une base σ-localement finie.*

Démonstration. Si X est un espace métrisable et d est une métrique compatible, alors d'après le théorème 2.7, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, le recouvrement $\mathcal{B}_n := \{B_d(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ de X admet un recouvrement localement fini $\mathcal{U}_n$ raffinant $\mathcal{B}_n$. Donc $\mathcal{U} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \mathcal{U}_n$ est une base d'ouverts σ-localement finie. □

3. Fragmentations des partitions de l'unité

À partir d'une partition de l'unité nous allons construire, de manière canonique, une partition plus fine avec quelques propriétés supplémentaires.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues positives sur X. Une famille

$$\Phi := \{\varphi_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, 0 \neq \operatorname{card} \mathcal{T} < \infty\} \tag{C.7}$$

de fonctions continues positives, indexées par les parties finies de $\mathcal{F}$, est appelée une *fragmentation* de $\mathcal{F}$ si pour chaque $f \in \mathcal{F}$,

$$f = \sum\nolimits_{\mathcal{T}\ni f} \frac{1}{\operatorname{card} \mathcal{T}} \varphi_{\mathcal{T}} \tag{C.8}$$

et $\Phi_x := \{\mathcal{T} : \varphi_{\mathcal{T}}(x) > 0\}$ est totalement ordonné par inclusion pour tout $x \in X$.

Notons que si Φ est une fragmentation de $\mathcal{F}$, alors $\perp\Phi$ est un raffinement pas seulement de $\perp\mathcal{F}$, mais également de l'ensemble des intersections finies de $\perp\mathcal{F}$. En effet, d'après (C.8), $\{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\} \subset \bigcap_{f\in\mathcal{T}} \{f > 0\}$.

Proposition 3.1. *Si* (C.8), *alors* Φ *est un raffinement de* $\mathcal{F}$ *et*

$$\sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}} f = \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}} \sum\nolimits_{\mathcal{T}\ni f} \frac{1}{\operatorname{card} \mathcal{T}} \varphi_{\mathcal{T}} = \sum\nolimits_{\mathcal{T}\subset\mathcal{F}} \varphi_{\mathcal{T}}. \tag{C.9}$$

DÉMONSTRATION. En effet, si $\mathcal{T}$ est une partie finie de $\mathcal{F}$ et $f \in \mathcal{T}$, alors (C.8) implique $\{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\} \subset \{f > 0\}$. Pour justifier (C.9), notons que dans la somme double ci-dessus, toute partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$ apparaît $\operatorname{card} \mathcal{T}$ fois. □

Corollaire 3.2. *Une famille est une partition de l'unité si et seulement si sa fragmentation est une partition de l'unité.*

Pour toute partie finie non vide $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$, soit

$$\gamma_{\mathcal{T}} := \operatorname{card} \mathcal{T} \cdot \max(0, \min_{f \in \mathcal{T}} f - \sup_{f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}} f) \tag{C.10}$$

et soit

$$\mathcal{F}' := \{\gamma_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, 0 \neq \operatorname{card} \mathcal{T} < \infty\}.$$

Exemple 3.3. Si $X := \mathbb{R}$, alors $\mathcal{F} := \{\sin^2, \cos^2\}$ est une partition de l'unité. En posant $f_0 := \sin^2, f_1 := \cos^2$, nous calculons $\mathcal{F}'$ en utilisant l'identité $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$,

$$\gamma_{\{0\}}(x) = \max(0, -\cos 2x),$$
$$\gamma_{\{1\}}(x) = \max(0, \cos 2x),$$
$$\gamma_{\{0,1\}}(x) = 2\min(\cos^2 x, \sin^2 x).$$

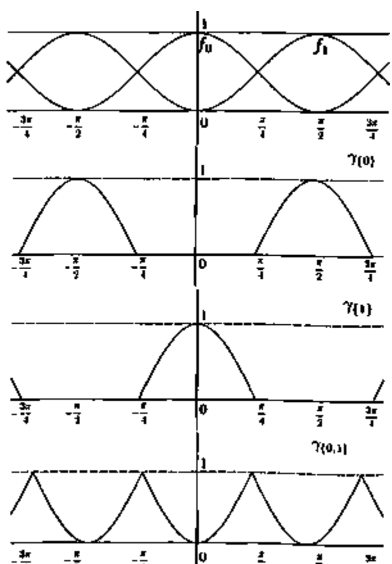


FIGURE C.1. La partition $\{f_0, f_1\}$, où $f_0(x) = \cos^2 x$ et $f_1(x) = \sin^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et sa fragmentation $\{\gamma_{\{0\}}, \gamma_{\{1\}}, \gamma_{\{0,1\}}\}$.

Théorème 3.4. *Si $\mathcal{F}$ est une partition de l'unité, alors $\mathcal{F}'$ est son unique fragmentation.*

DÉMONSTRATION. Montrons que $\mathcal{F}'$ est une fragmentation de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F}$ est une partition d'une fonctions continue, d'après la proposition 1.4, $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue, donc $\mathcal{F}$ est équicontinue, donc le lemme 1.6,

implique que tous les suprema d'éléments de $\mathcal{F}$ sont continues et, par conséquent, $\mathcal{F}'$ est composée de fonctions continues.

Prouvons que $\mathcal{F}'_x := \{\mathcal{T} : \gamma_{\mathcal{T}}(x) > 0\}$ est totalement ordonné pour tout $x \in X$. Si $\mathcal{T} \in \mathcal{F}'_x$ c'est-à-dire $\gamma_{\mathcal{T}}(x) > 0$, alors d'après (C.10),

$$\min_{f\in\mathcal{T}} f(x) > \sup_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(x).$$

Donc si $f \in \mathcal{T}$, alors $f(x) > g(x)$ pour tout $g \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$. Par conséquent, si $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1 \in \mathcal{F}'_x$, $f_1 \in \mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}_0$ et $f_0 \in \mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T}_1$, alors $f_1(x) > f_0(x)$ et $f_0(x) > f_1(x)$, ce qui est impossible. On conclut que $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ ou $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$.

Il reste à montrer (C.8). Soit $x \in X$. Puisque $\mathcal{F}$ est une partition de l'unité, en raison de la proposition X.5.3, il existe $m(x) \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$ et une partie

$$\mathcal{F}_x = \{f_n : 0 \leq n < m(x)\}$$

de $\mathcal{F}$ telle que $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) > 0$ pour tout $n < m(x)$ et $f(x) = 0$ si $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_x$. Par conséquent, $f(x) = 0$ si et seulement si $f \notin \mathcal{F}_x$. Donc si $f \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{F}_x$, alors d'après (C.10), $\gamma_{\mathcal{T}}(x) = 0$, ce qui prouve (C.8) dans ce cas.

Si $f \in \mathcal{F}_x$, alors il existe $n_0 < m(x)$ tel que $f = f_{n_0}$. Alors d'après (C.10), $\gamma_{\mathcal{T}}(x) > 0$ si et seulement si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_k := \{f_n : 0 \leq n \leq k\}$ où $k \geq n_0$ et (C.10), $\max(0, \min_{f\in\mathcal{T}_k} f(x) - \sup_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}_k} f(x)) = f_k(x) - f_{k+1}(x)$

$$\frac{1}{\operatorname{card}\mathcal{T}_k}\,\gamma_{\mathcal{T}_k}(x) = \begin{cases} f_k(x) - f_{k+1}(x) \text{ si } k < m(x), \\ f_k(x) \text{ si } k = m(x). \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum\nolimits_{n_0\leq k<m(x)} (f_k(x) - f_{k+1}(x)) \\ &= \sum\nolimits_{n_0\leq k<m(x)} \frac{1}{\operatorname{card}\mathcal{T}_k}\,\gamma_{\mathcal{T}_k}(x), \end{aligned}$$

ce qui revient à (C.8).

Afin d'établir l'unicité, supposons que

$$\Phi = \{\varphi_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, 0 \neq \operatorname{card}\mathcal{T} < \infty\}$$

est une fragmentation de $\mathcal{F}$.

Si $x \in X$ alors $\Phi_x = \{\mathcal{T} : \varphi_{\mathcal{T}}(x) > 0\}$ est dénombrable non vide, car Φ est une partition de l'unité. Puisque Φ_x est totalement ordonné, il existe $n(x) \in \mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$ tel que

$$\Phi_x = \{\mathcal{T}_n : 1 \leq n < n(x)\}$$

et $\mathcal{T}_n$ est strictement inclus dans $\mathcal{T}_{n+1}$ si $n + 1 < n(x)$.

Bien entendu, $f(x) > 0$ si et seulement si $f \in \bigcup_{n<n(x)} \mathcal{T}_n$ et alors $f(x) = s_n(x)$, où

$$s_n(x) := \sum\nolimits_{n\leq k<n(x)} \frac{1}{\operatorname{card}\mathcal{T}_k}\,\varphi_{\mathcal{T}_k}(x), \tag{C.11}$$

si et seulement si n est le plus petit élément de $\mathbb{N}_1$ pour lequel $f \in \mathcal{T}_n$.

Montrons que les éléments de Φ sont de la forme (C.10).

Fixons $x \in X$ et considérons une partie finie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{F}$. Si $f \in \mathcal{T} \setminus \bigcup_1^{n(x)} \mathcal{T}_n$, alors $\varphi_{\mathcal{T}}(x) = 0$ et $f(x) = 0$, ainsi $\gamma_{\mathcal{T}}(x) = 0$, donc $\gamma_{\mathcal{T}}(x) = \varphi_{\mathcal{T}}(x)$.

Si $\mathcal{T} \subset \bigcup_1^{n(x)} \mathcal{T}_n$, alors soit n le plus petit nombre naturel, pour lequel $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_n$. S'il existe $f \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}$ alors $\varphi_{\mathcal{T}}(x) = 0$, car $\mathcal{T} \notin \Phi_x$. Ainsi $f(x) \geq g(x)$ pour tout $g \in \mathcal{T}$, donc $\gamma_{\mathcal{T}}(x) = 0$ et $\gamma_{\mathcal{T}}(x) = \varphi_{\mathcal{T}}(x)$ et, par conséquent, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$.

Soit $f \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$ si $n > 1$ (et $f \in \mathcal{T}_1$ si $n = 1$). Alors $f(x) = \min_{h \in \mathcal{T}_n} h(x) = s_n(x)$ selon (C.11). D'autre part, $s_{n+1}(x) = \sup_{g \notin \mathcal{T}_n} g(x)$ et en conséquence,

$$0 < s_n(x) - s_{n+1}(x) = \min_{h \in \mathcal{T}_n} h(x) - \sup_{g \notin \mathcal{T}_n} g(x) = \frac{1}{\operatorname{card} \mathcal{T}_n} \gamma_{\mathcal{T}_n}(x),$$

ce qui montre que $\varphi_{\mathcal{T}_n}(x) = \gamma_{\mathcal{T}_n}(x)$. □

Une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un espace topologique X est dite *σ-discrète*, s'il existe une suite $(\mathcal{A}_n)_n$ de familles discrètes telle que $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Théorème 3.5. *Tout recouvrement ouvert d'un espace métrisable possède un raffinement ouvert localement fini et σ-discret.*

Démonstration. Soit X un espace métrisable et d est une métrique compatible, bornée par 1.Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, alors la famille

$$\{d(\cdot, X \setminus U) : U \in \mathcal{U}\}$$

est une partition équicontinue et bornée qui raffine $\mathcal{U}$. Comme X est normal, d'après le théorème 2.6, il existe une partition de l'unité qui raffine $\mathcal{U}$, donc, en vertu du corollaire 1.10, il existe une partition localement finie $\mathcal{F}$ de l'unité qui raffine $\mathcal{U}$. Ainsi la fragmentation $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ raffine $\mathcal{U}$, car $\mathcal{F}'$ raffine $\mathcal{F}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les éléments de $\mathcal{W}_n := \{\{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\} : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, \operatorname{card} \mathcal{T} = n\}$ sont disjoints deux à deux. En effet, si $\{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\} \cap \{\varphi_{\mathcal{S}} > 0\} \neq \varnothing$ alors $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ ou bien $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, donc $\mathcal{T} = \mathcal{S}$, car $\operatorname{card} \mathcal{T} = \operatorname{card} \mathcal{S}$.

En vertu du théorème 3.4, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_1$, la famille

$$\mathcal{W}_{n,k} := \{\{\varphi_{\mathcal{T}} > \frac{1}{k}\} : \mathcal{T} \subset \mathcal{F}, \operatorname{card} \mathcal{T} = n\}$$

est un raffinement régulier localement fini de $\mathcal{W}_n$. Ainsi $\mathcal{W}_{n,k}$ est discrète, car si $x \in X$ et V est un voisinage rencontrant un nombre fini d'éléments de $\mathcal{W}_{n,k}$, alors il existe au plus un $\mathcal{T}$ avec $\operatorname{card} \mathcal{T} = n$ tel que $x \in \operatorname{cl}\{\varphi_{\mathcal{T}} > \frac{1}{k}\}$. Donc il existe un voisinage W de x tel que $W \cap \operatorname{cl}\{\varphi_{\mathcal{S}} > \frac{1}{k}\} = \varnothing$ pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ avec $\operatorname{card} \mathcal{S} = n$. □

4. Théorèmes de métrisation

Une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est appelée *pseudométrique* si pour tous $x, y, z \in X$,

$$d(x,y) = d(y,x), \tag{C.12}$$

$$d(x,x) = 0, \tag{C.13}$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \tag{C.14}$$

Bien entendu, une pseudométrique d est une métrique si $d(x,y) = 0$ implique $x = y$. Une famille $\mathcal{D}$ de pseudométriques est dite *compatible* avec une topologie de X si $x \in \operatorname{Lim} \mathcal{F}$ si et seulement si $\{y \in X : d(x,y) < r\} \in \mathcal{F}$ pour toute $d \in \mathcal{D}$ pour tout $r > 0$ et pour tout filtre $\mathcal{F}$. Bien entendu, s'il existe une famille de pseudométriques compatible avec une topologie, alors il existe une famille de pseudométriques bornées par 1 compatible avec cette topologie.

On dit qu'une famille $\mathcal{D}$ de pseudométriques *distingue les points des fermés* si pour tout fermé F de X et $x \notin F$, il existe $d \in \mathcal{D}$ telle que $d(x,F) > 0$.

Proposition 4.1. *Si $\mathcal{D}$ est une famille dénombrable de pseudométriques distinguant points des fermés d'un espace séparé, alors la topologie compatible est métrisable.*

Démonstration. Si $\mathcal{D} := \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une famille de pseudométriques bornées par 1, alors la topologie compatible est de caractère dénombrable. Il est immédiat que

$$d(x,y) := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} d_n(x,y). \tag{C.15}$$

est une pseudométrique bornée par 2. Si $\mathcal{D}$ distingue les points des fermés alors (C.15) est une métrique, car $d(x,y) = 0$ entraîne $d_n(x,y) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $x = y$.

Puisque la topologie compatible est de caractère dénombrable, il suffit de montrer que les suites convergentes pour la topologie et pour la métrique (C.15) sont les mêmes. Si $0 = \lim_{k\to\infty} d(x_k, x)$, alors $\lim_{k\to\infty} d_n(x_k, x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $\lim_{k\to\infty} d_n(x_k, x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum\nolimits_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y) \leq \sum\nolimits_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous $x, y \in X$. D'autre part pour tout $n < n_\varepsilon$, il existe $k_n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $d_n(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{4}$ pourvu que $k > k_n(\varepsilon)$. Ainsi, pour $k > \max_{n<n_\varepsilon} k_n(\varepsilon)$,

$$d(x_k, x) \leq \frac{\varepsilon}{4} \sum\nolimits_{n<n_\varepsilon} \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Théorème 4.2 (Dydak). *Un espace topologique séparé X est métrisable si et seulement s'il existe une partition de l'unité $\mathcal{F}$ sur X telle que*

$$\{\{f > 0\} : f \in \mathcal{F}\}$$

est une base d'ouverts de X.

DÉMONSTRATION. Si X est métrisable et d est une métrique compatible, alors $\mathcal{B}_n := \{\, B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X pour tout $n \geq 1$ et $\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \mathcal{B}_n$ est une base d'ouverts de X. Si $\{f_{x,n} : x \in X\}$ est une partition de l'unité raffinant $\mathcal{B}_n$, alors $\{\frac{1}{2^n} f_{x,n} : n \in \mathbb{N}_1, x \in X\}$ est une partition de l'unité de X raffinant $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{F}$ une partition de l'unité sur X telle que $\{\{f > 0\} : f \in \mathcal{F}\}$ est une base d'ouverts de X. Il est évident que la fonction

$$d(x, y) = \sum\nolimits_{f\in\mathcal{F}} |f(x) - f(y)|$$

est une métrique sur X. Montrons que d est compatible avec la topologie de X. Pour tout $x \in X$, la fonction $y \longmapsto d(x,y)$ est continue, car $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ est équicontinue en tant que partition d'une fonction continue, donc $\{|f(x) - f| : f \in \mathcal{F}\}_{\text{fin}}$ est équicontinue, et ainsi la boule

$$B := \{y \in X : d(x, y) < f_0(x)\}$$

est ouverte pour la topologie de X. Ceci signifie que la topologie engendrée par d est plus fine que la topologie originelle de X.

Réciproquement, si O est un ouvert de X et $x \in O$, alors il existe $f_0 \in \mathcal{F}$ telle que $x \in \{f_0 > 0\} \subset O$. Afin de montrer qu'elle est incluse dans O, considérons $y \notin O$. Alors $f_0(y) = 0$ et, d'autre part, $d(x, y) \geq |f_0(x) - f_0(y)| = f_0(x) > 0$, ce qui signifie que $y \notin B$, donc $B \subset O$ et ainsi la topologie originelle de X est plus fine que celle engendrée par d. □

Théorème 4.3 (Nagata-Smirnov). *Un espace topologique est métrisable si et seulement s'il est régulier et admet une base σ-localement finie d'ouverts.*

DÉMONSTRATION. La nécessité découle du corollaire 2.9. Réciproquement, soit X un espace topologique régulier et $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ est une base d'ouverts de X telle que $\mathcal{B}_n$ est localement finie pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. En ajoutant un ouvert incluant $\bigcup_{B\in\mathcal{B}_n} B$ si nécessaire, on peut supposer que $\mathcal{B}_n$ est un recouvrement ouvert de X pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. En vertu du lemme 2.8, X est parfaitement normal.

Pour tout $B \in \mathcal{B}$, soit $f_B \in C(X, [0,1])$ telle que $B = \{f_B > 0\}$. Puisque $\mathcal{B}_n$ est un recouvrement ouvert localement fini de X, la fonction $:= \sum_{B\in\mathcal{B}_n} f_B$ est continue strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}_1$. Ainsi $\{f_B/f_n : B \in \mathcal{B}_n\}$ est une partition de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, donc

$$\Big\{\frac{f_B}{2^n f_n} : B \in \mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N}_1\Big\}$$

est une partie de l'unité, dont le socle $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X. En vertu du théorème 4.2 de Dydak, X est métrisable. □

Puisque toute famille σ-discrète est σ-localement finie, on en déduit

Théorème 4.4 (Bing). *Un espace topologique est métrisable si et seulement s'il est régulier et admet une base σ-discrète d'ouverts.*

Exercices

Solutions : pages 354-357.

(1) Soit $\mathcal{H}$ une famille de fonctions réelles. Montrer que

$$\{\sup_{h\in\mathcal{H}} h > 0\} = \bigcup_{h\in\mathcal{H}} \{h > 0\},$$

$$\operatorname{card}\mathcal{H} < \infty \Longrightarrow \{\min_{h\in\mathcal{H}} h > 0\} = \bigcap_{h\in\mathcal{H}} \{h > 0\}.$$

(2) Si $\mathcal{A}$ est une famille localement finie d'un espace topologique X, alors

$$\operatorname{cl}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A$$

(Comparer avec l'exercice III.12).

(3) Montrer qu'un espace topologique séparé X est normal si et seulement si tout recouvrement ouvert fini de X admet une partition finie de l'unité qui le raffine.

(4) Montrer que tout recouvrement ouvert d'un espace topologique normal admet une partition bornée plus fine.

(5) Un espace topologique est appelé de *Lindelöf* si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement dénombrable. Montrer que tout espace topologique régulier de Lindelöf est paracompact.

(6) Soit $X = [0,1]$ et $\mathcal{F} = \{1-x, x\}$ une partition de l'unité. Trouver la fragmentation $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ et la fragmentation $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}'$.

(7) Si $\mathcal{U}$ est famille de parties de X et $A \subset X$. Alors

$$\mathcal{U}^*(A) := \bigcup\{U \in \mathcal{U} : A \cap U \neq \varnothing\}$$

s'appelle la *$\mathcal{U}$-étoile* de A. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une partition de l'unité, alors les $\perp\mathcal{F}'$-étoiles des points de X forment un raffinement de $\perp\mathcal{F}$.

ANNEXE D

Espaces normés fonctionnels

Dans ce chapitre, nous étudions des espaces fondamentaux de fonctions mesurables. Rappelons quelques notions de la théorie de la mesure sans entrer dans les détails[1]. La dernière section est basée sur [**17**] de G. H. Greco.

1. Mesure et intégrale

Une famille non vide $\mathfrak{M}$ de parties d'un ensemble T est appelée *σ-algèbre* si $T \in \mathfrak{M}$, $T \setminus A \in \mathfrak{M}$ pour tout $A \in \mathfrak{M}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathfrak{M}$.

Il s'ensuit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{M}$ également. Les éléments de $\mathfrak{M}$ s'appellent ensembles *mesurables*. Une fonction $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ est dite une *mesure positive*, si $\mu(\varnothing) = 0$ et si elle est *dénombrablement additive*, c'est-à-dire si

(D.1) $$\mu(\bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments disjoints deux à deux de $\mathfrak{M}$. On appelle $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ un *espace mesuré.*

Une propriété P est dite être valable *μ-presque partout*, si $\{t \in T : \neg P(t)\}$ est mesurable et $\mu(\{t \in T : \neg P(t)\}) = 0$.

Une mesure est dite *complète*, si $M \in \mathfrak{M}$, $\mu(M) = 0$ et $A \subset M$ impliquent $A \in \mathfrak{M}$ et, par conséquent, $\mu(A) = 0$. On note alors $\mathfrak{M}^*$ la plus petite σ-algèbre incluant $\mathfrak{M}$ et pour laquelle μ est complète.

La plus petite σ-algèbre $\mathfrak{B}$ sur un espace topologique contenant tous les ouverts est dite *borelienne* et ses éléments s'appellent ensembles *boreliens* et l'espace mesuré $(T, \mathfrak{B}, \mu)$ *borelien*. Une mesure est dite *borelienne* si elle est définie sur une σ-algèbre borelienne. Notons $\mathfrak{B}$ la σ-algèbre borelienne.

Si $\mathfrak{M}$ est une σ-algèbre sur T, alors une fonction f de T dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite *mesurable* par rapport à une σ-algèbre $\mathfrak{M}$ si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{M}$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$ (*borelienne* si elle mesurable par rapport à une σ-algèbre borelienne). Il s'ensuit que f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(O) \in \mathfrak{M}$ pour tout ouvert de O. Une fonction f est dite *simple* si $f(T)$ est finie, *étagée* si elle est simple et $f^{-1}(r) \in \mathfrak{M}$ pour tout r dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$). Bien sûr, toute fonction étagée est mesurable. D'autre part (voir l'exercice 1),

Lemme 1.1. *Si f est positive et mesurable, alors il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions positives étagées telle que $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in T$.*

---

1. Que l'on peut trouver dans de nombreux ouvrages, par exemple, dans [**29**].

Si $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ est un espace mesuré, alors on définit l'*intégrale de Lebesgue* d'une fonction mesurable $f : T \to \mathbb{R}_+$ à partir des intégrales des *fonctions étagées.*

Si f est étagée et positive, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$, disjoints deux à deux, et $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n$, tels que $f = \sum_{k=1}^n r_k \chi_{A_k}$. Ainsi on définit

$$\int \left(\sum_{k=1}^n r_k \chi_{A_k}\right) d\mu := \sum_{k=1}^n r_k \mu(A_k).$$

Si $f : T \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors selon le lemme 1.1, f est la limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées $(f_n)_n$, ainsi on définit [2]

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu. \tag{D.2}$$

Si $f : T \to \mathbb{R}$, alors on définit

$$\int f \, d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

où $f^+ := \max(f, 0)$ et $f^- := -\max(f, 0)$, pourvu que $\int f^+ d\mu$ ou $\int f^- d\mu$ soit finie. Une fonction mesurable f est dite *μ-intégrable* si $\int |f| \, d\mu < \infty$. Si $f : T \to \mathbb{C}$ est une fonction telle que $\Re f$ et $\Im f$ soient intégrables, alors on pose $\int f \, d\mu := \int \Re f \, d\mu + i \int \Im f \, d\mu$.

Nous allons quelquefois faire recours aux théorème fondamentaux de Beppo Levi de *convergence monotone* et de Lebesgue de *convergence dominée* [3]. Soit $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 1.2 (Beppo Levi). *Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives mesurables, alors $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Théorème 1.3 (Lebesgue). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables (réelles ou complexes), $h : T \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable telle que $|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in T$ et tout n. Alors $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

Proposition 1.4. *Soit μ une mesure positive sur T avec $\mu(T) < \infty$, soit f une fonction intégrable à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit F un fermé de $\mathbb{C}$. Si pour tout A mesurable tel que $\mu(A) > 0$,*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in F,$$

alors $f(t) \in F$ pour μ-presque tout t.

---

2. Comme $(f_n)_n$ est croissante, la limite existe. On vérifie facilement qu'elle ne dépend pas du choix de telle suite.

3. Des démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans des livres sur la théorie de la mesure et de l'intégrale ou ailleurs, par exemple, dans **[29]**.

DÉMONSTRATION. Supposons que $m := \mu(\{t : f(t) \notin F\}) > 0$. Comme on peut écrire $\mathbb{C} \setminus F = \bigcup_n B(z_n, r_n)$ avec $r_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$m \leq \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n),$$

où $A_n = f^{-1}(B(z_n, r_n))$. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$, pour lequel $\mu(A_n) > 0$. Or,

$$\left| z_n - \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f d\mu \right| = \left| \frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} (f(x) - z_n) d\mu(x) \right| < r_n,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f\, d\mu \in B(z_n, r_n),$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

Soit $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré borelien. Alors μ est dite *régulière* si pour tout $A \in \mathfrak{M}$ tel que $\mu(A) < \infty$,

$$\sup\{\mu(K) : K \in \mathcal{K}_T\} = \mu(A) = \inf\{\mu(Q) : Q \in \mathcal{O}_T\},$$

où $\mathcal{K}_T$ et $\mathcal{O}_T$ désignent respectivement les familles des compacts et des ouverts de T.

Dans l'espace euclidien, il existe une unique mesure complète m sur $\mathfrak{B}^*$ qui est invariante par translations

$$m(A + x) = m(A),$$

qui coïncide avec le volume usuel sur les cubes. Elle est dite *mesure de Lebesgue* et les éléments de $\mathfrak{B}^*$ sont appelés ensembles de *Lebesgue*[(4)]. Il est facile à prouver que la mesure de Lebesgue est régulière.

Soit $\mathfrak{M}$ une σ-algèbre de parties d'un ensemble X. Une fonction $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ est dite une *mesure complexe* si (D.1) pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments disjoints de $\mathfrak{M}$. Il s'ensuit de la définition que (D.1) doit rester valable pour chaque permutation de la suite (A_n) : la convergence dans (D.1) est absolue.

Il existe une plus petite mesure positive λ telle que $|\mu(A)| \leq \lambda(A)$ pour chaque $A \in \mu$. Cette mesure s'appelle la *variation totale* de μ et elle est notée $|\mu|$. On vérifie directement que

$$|\mu|(A) = \sup \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} |\mu(A_n)|,$$

où $(A_n)_n$ sont des suites de parties disjointes deux à deux telles que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. On montre que si μ est une mesure complexe sur X, alors $|\mu|(X) < \infty$.

Si μ est une mesure complexe prenant seulement des valeurs réelles : $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, alors on note

$$\mu^+ := \tfrac{1}{2}(|\mu| + \mu), \text{ et } \mu^- := \tfrac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Alors μ^+ et μ^- sont des mesures finies telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Une fonction sur la σ-algèbre borelienne d'un espace euclidien

4. Toute mesure positive complète sur $\mathfrak{B}^*$ qui est invariante par translations et finie sur les compacts et égale à $c \cdot m$, où m est la mesure de Lebesgue.

est dite *mesure de Radon* si sa restriction à tout compact est une mesure complexe. Une mesure complexe borelienne μ est dite *régulière* si $|\mu|$ est régulière.

2. Espaces normés des fonctions mesurables

Soit $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Alors l'ensemble des fonctions réelles mesurables f telles que

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

est notée $\mathcal{L}_p(\mu)$. On dit que deux fonctions mesurables f, g sont *équivalentes* (par rapport à μ) si [5]

$$\mu\{f \neq g\} = 0. \tag{D.3}$$

Par la suite, l'intégrale d'une classe d'équivalence est définie comme l'intégrale de n'importe quelle fonction appartenant à cette classe.

Notons $L_p(\mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à (D.3) des éléments de $\mathcal{L}_p(\mu)$. [6] Bien évidemment, si f et g sont μ-équivalentes, alors $\|f\|_p = \|g\|_p$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

On observe que

$$\|f + h\|_1 = \int |f + h| \, d\mu \leq \int (|f| + |h|) \, d\mu = \|f\|_1 + \|h\|_1 , \tag{D.4}$$

donc $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L_1(\mu)$.

Les nombres réels (étendus) $1 \leq p, q \leq \infty$ sont dits *conjugués* si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$.

Proposition 2.1 (Inégalité de Hölder). *Si $1 < p < \infty$ et p, q sont conjugués et $f \in L_p(\mu), g \in L_q(\mu)$, alors*

$$\left|\int f \, g \, d\mu\right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q , \tag{D.5}$$

avec l'égalité si et seulement si $|f|^p = |g|^q$ et $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} g$ presque partout.

Pour simplifier la démarche, nous discuterons dans la suite de cette section le cas des espaces réels, mais quelques simples adaptations permettent d'obtenir le cas complexe.

Démonstration. D'après l'inégalité (VIII.25) de Young,

$$\left|\int f \, g \, d\mu\right| \leq \int |f \, g| \, d\mu \leq \int (\tfrac{1}{p} |f|^p + \tfrac{1}{q} |g|^q) \, d\mu = \tfrac{1}{q} \|f\|_p^p + \tfrac{1}{q} \|g\|_q^q .$$

5. $\{f \neq g\} := \{t \in T : f(t) \neq g(t)\}$.
6. Certains auteurs les notent $L^p(\mu)$ plutôt que $L_p(\mu)$.

Alors si $\|f\|_p^p = 1$ et $\|g\|_q^q = 1$, alors

$$\left|\int f\, g\, d\mu\right| \leq 1.$$

Autrement, remplaçons dans la formule ci-dessus f et g par $\frac{f}{\|f\|_p}$ et $\frac{g}{\|g\|_p}$ respectivement, ce qui prouve l'inégalité (D.5) de Hölder.

Si $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} g$, alors $f\, g \geq 0$ (presque partout), donc

$$\left|\int f\, g\, d\mu\right| = \int |f\, g|\; d\mu.$$

D'après l'exercice VIII.10, $|f\, g| = \frac{1}{p}\, |f|^p + \frac{1}{q}\, |g|^q$ si et seulement si $|f|^p = |g|^q$ (presque partout). □

Corollaire 2.2. *Si $1 < p < \infty$ et p, q sont conjugués et $f \in L_p(\mu)$, alors*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\left|\int f\, g\, d\mu\right| : \|g\|_q = 1\right\}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.1,

$$\|f\|_p \geq \left|\int f\, g\, d\mu\right|$$

pour tout g avec $\|g\|_q = 1$. Si $\|f\|_p = 1$ alors, l'égalité est atteinte si $g := \operatorname{sgn} f\; |f|^{\frac{p}{q}}$ presque partout. En général, si $\|f\|_p \neq 0$, alors en divisant f par $\|f\|_p$, on obtient

$$1 = \left|\int \frac{f}{\|f\|_p} \tilde{g}\, d\mu\right|,$$

où $\tilde{g} := \operatorname{sgn} f\, (\frac{|f|}{\|f\|_p})^{\frac{p}{q}}$ et $\|\tilde{g}\|_q = 1$, ce qui prouve le corollaire. □

Proposition 2.3 (Inégalité de Minkowski). *Si $1 < p < \infty$, alors*

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p\,. \tag{D.6}$$

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 2.2,

$$\begin{aligned} \|f+h\|_p &= \sup\left\{\left|\int (f+h)\, g\, d\mu\right| : \|g\|_q \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int |f\, g|\; d\mu + \int |h\, g|\; d\mu : \|g\|_q \leq 1\right\} \\ &\leq \|f\|_p + \|h\|_p\,. \end{aligned}$$

□

D'après (D.6), pour $1 \leq p < \infty$, la fonction $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L_p(\mu)$. Les espaces l_p de l'exemple IX.1.3 sont des cas particuliers, où $\mathbb{N}$ est munie de la *mesure de comptage* μ, c'est-à-dire telle que $\mu(A) := \operatorname{card} A$ pour tout $A \subset T$.

Corollaire 2.4. *Si $1 < p < \infty$ et p, q sont conjugués, alors pour tout $g \in L_q(\mu)$, la forme linéaire $f \mapsto \langle f, g\rangle$ est continue sur $L_p(\mu)$.*

Le *supremum essentiel* du module de f est défini par

$$\|f\|_\infty := \inf\{r > 0 : \mu\{|f| > r\} = 0\}. \tag{D.7}$$

L'ensemble des classes d'équivalences par rapport à (D.3) des fonctions mesurables f pour lesquelles $\|f\|_\infty < \infty$ est noté $L_\infty(\mu)$.

Il est immédiat que (D.7) est une norme. On observe que cet espace est complet, donc de Banach (voir l'exercice 2). L'espace l_∞ de l'exemple IX.1.4 est un cas particulier avec $T := \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage.

3. Décomposition de Lebesgue et le théorème de Radon-Nikodym

Soit $\mathfrak{M}$ une σ-algèbre, λ une mesure complexe et μ une mesure positive. On dit que λ est *absolument continue* par rapport à μ ($\lambda \ll \mu$) si pour tout $A \in \mathfrak{M}$,

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \lambda(A) = 0.$$

Une mesure complexe ν est *portée* par $N \in \mathfrak{M}$, si $\nu(A) = \nu(A \cap N)$ pour tout $A \in \mathfrak{M}$. Si deux mesures ν_0, ν_1 sont portées par deux parties disjointes, alors on dit qu'elles sont *mutuellement singulières* et on note : $\nu_0 \perp \nu_1$. Il est facile de voir que

$$\lambda_0 \perp \nu, \lambda_1 \perp \nu \Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 \perp \nu, \tag{D.8}$$

$$\lambda_0 \ll \nu, \lambda_1 \ll \mu \Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 \ll \mu, \tag{D.9}$$

$$\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu, \tag{D.10}$$

$$\lambda \ll \mu, \nu \perp \mu \Rightarrow \lambda \perp \nu, \tag{D.11}$$

$$\lambda \ll \mu, \lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0. \tag{D.12}$$

Observons que s'il existe une fonction $h \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $A \in \mathfrak{M}$,

$$\lambda(A) = \int_A h\, d\mu,$$

alors λ est absolument continue par rapport à μ.

Théorème 3.1 (Lebesgue). *Soit λ une mesure complexe et μ une mesure positive σ-finie sur $\mathfrak{M}$. Alors il existe un couple unique de mesures (complexes) λ_0 et λ_1 tel que*

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 \ll \mu, \lambda_1 \perp \mu. \tag{D.13}$$

Théorème 3.2 (Radon-Nikodym). *Soit λ une mesure complexe et μ une mesure positive σ-finie sur $\mathfrak{M}$. Si $\lambda \ll \mu$, alors il existe un unique élément h de $L_1(\mu)$ tel que*

$$\lambda(A) = \int_A h\, d\mu \tag{D.14}$$

pour tout $A \in \mathfrak{M}$.

Cette preuve simultanée des théorèmes 3.1 et 3.2 est due à J. von Neumann.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que μ, λ sont positives et finies. Si

$$\kappa = \lambda + \mu,$$

alors, pour $f \in L_2(\kappa)$,

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \leq \int_X |f|\,d\lambda \leq \int_X |f|\,\chi_X d\kappa \leq \kappa(X)^{\frac{1}{2}}(\int_X |f|^2\,d\kappa)^{\frac{1}{2}},$$

selon l'inégalité (D.5) de Hölder. Il en résulte que

$$\Phi(f) := \int_X f\,d\lambda$$

est une forme linéaire continue sur $L_2(\kappa)$. D'après le théorème X.5.1 de Riesz-Fischer, il existe $g \in L_2(\kappa)$ telle que

$$\text{(D.15)} \qquad \int_X f\;d\lambda = \int_X f\,g\,d\kappa$$

pour tout $f \in L_2(\kappa)$.

Puisque κ est finie, $\kappa(A) < \infty$ pour toute partie mesurable A, donc la fonction caractéristique χ_A est dans $L_2(\kappa)$. Grâce à (D.15) avec $f = \chi_A$, on obtient $\lambda(A) = \int_A g\,d\kappa$. Si $0 < \kappa(A)$, alors cela entraîne

$$\text{(D.16)} \qquad 0 \leq \frac{1}{\kappa(A)} \int_A g\,d\kappa \leq 1.$$

D'après la proposition 1.4, toute fonction g vérifiant (D.16) pour chaque $A \in \mathfrak{M}$ avec $0 < \kappa(A)$, vérifie $0 \leq g(x) \leq 1$ pour κ-presque chaque x. On peut donc supposer sans altérer nos formules que ceci soit valable pour tout x. Puisque $\kappa = \lambda + \mu$, (D.15) implique

$$\text{(D.17)} \qquad \int_X f(1-g)d\lambda = \int_X fg\,d\mu.$$

La fonction g partage X en deux parties :

$$E_0 = \{0 \leq g < 1\} \text{ et } E_1 = \{g = 1\}.$$

Il est clair que $\int_{E_1} f(1-g)d\lambda = 0$, donc c'est sur E_1, où λ est indépendante de μ. Posons pour chaque $A \in \mathfrak{M}$,

$$\text{(D.18)} \qquad \lambda_0(A) = \lambda(A \cap E_0) \text{ et } \lambda_1(A) = \lambda(A \cap E_1).$$

Pour $f = \chi_{E_1}$ dans (D.17) on a $\mu(E_1) = \int_{E_1} 0\,d\lambda = 0$, ce qui montre $\lambda_1 \perp \mu$.

En posant $f := (1 + g + ... + g^n)\chi_A$ dans (D.17), on obtient

$$\text{(D.19)} \qquad \int_A (1 - g^{n+1})d\lambda = \int_A g(1 + g + ... + g^n)d\mu.$$

D'une part,

$$\text{(D.20)} \qquad \int_A (1 - g^{n+1})\,d\lambda = \int_{A\cap E_0} (1 - g^{n+1})\,d\lambda = \int_A (1 - g^{n+1})d\lambda_0$$

et g^{n+1} tend vers 0 sur E_0 de manière monotone, donc l'intégrale de (D.20) tend vers $\lambda_0(A)$. D'autre part, $g(1+\ldots+g^n)$ tend de manière monotone vers une fonction mesurable h, donc, d'après le théorème 1.2 de Beppo Levi sur la convergence monotone, $\lambda_0(A) = \int_A h\,d\mu$. Comme h est positive et λ_0 est finie, $h \in L_1(\mu)$. En conséquence, λ_0 est absolument continue par rapport à μ. Nous avons démontré (D.13) (pour μ, λ positives et finies).

Maintenant si $\lambda \ll \mu$, alors $\lambda = \lambda_0$, d'où découle (D.14). En effet $\lambda_1 \leq \lambda$ donc $\lambda_1 \ll \mu$ et d'autre part, $\lambda_1 \perp \mu$ ce qui, grâce à (D.12), entraîne $\lambda_1 = 0$.

En ce qui concerne l'unicité, s'il y avait une autre décomposition ν_0, ν_1 vérifiant (D.13), alors on aurait $\lambda_0 - \nu_0 = \nu_1 - \lambda_1$ et grâce à (D.8) et (D.9), $\lambda_0 - \nu_0 \ll \mu$ et $\nu_1 - \lambda_1 \perp \mu$. En vertu de (D.12), $\lambda_0 = \nu_0$ et $\nu_1 = \lambda_1$. L'unicité de h vient du fait que si $\int_A (h_0 - h_1)\,d\mu = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{M}$, alors $\mu\{h_0 \neq h_1\} = 0$.

Si μ est σ-finie, alors il existe une suite $(X_n)_n$ de parties disjointes de X telle que $\mu_n = \mu|_{X_n}$ est finie pour tout n. Ayant effectué la décomposition par rapport à toute μ_n, on recolle les morceaux. Les fonctions h_n sont recollées en une fonction mesurable h sur X tout entier et puisque λ est finie, $h \in L_1(\mu)$.

Finalement, si λ est une mesure complexe, alors on a $\lambda = \Re\lambda + i\Im\lambda$ et encore $\lambda = (\Re\lambda)^+ - (\Re\lambda)^- + i(\Im\lambda)^+ - i(\Im\lambda)^-$. Il suffit d'appliquer nos résultats à chacune des quatre mesures positives (et finies!) séparément et recoller les morceaux. □

4. Structure du dual de L_p

Soit μ une mesure positive σ-finie. Soit $1 \leq p, q \leq \infty$ exposants conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), où on admet $0 = \frac{1}{\infty}$. Si $g \in L_q(\mu)$, alors

$$\Phi(f) = \int fg\,d\mu \tag{D.21}$$

est une forme linéaire continue sur $L_p(\mu)$ et $\|\Phi\| \leq \|g\|_q$ grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\left|\int fg\,d\mu\right| \leq \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_q\,\|f\|_p. \tag{D.22}$$

Il s'avère que toute forme linéaire continue sur $L_p(\mu)$ est de la forme (D.21) pourvu que $p < \infty$.

Théorème 4.1. *Soit μ une mesure positive σ-finie, $1 \leq p < \infty$. Si $\Phi \in (L_p(\mu))'$, alors il existe l'unique $g \in L_q(\mu)$ telle que pour chaque $f \in L_p(\mu)$,*

$$\Phi(f) = \int fg\,d\mu, \text{ et } \|\Phi\| = \|g\|_q.$$

DÉMONSTRATION. Soit μ une telle mesure sur une σ-algèbre $\mathfrak{M}$ de parties d'un ensemble X. Il convient de démontrer le théorème d'abord dans le cas où μ est finie.

Montrons d'abord que toute forme Φ qui est linéaire continue sur $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ définit sur μ une mesure complexe. Posons

$$\varphi(A) := \Phi(\chi_A)$$

pour tout $A \in \mathfrak{M}$. La fonction d'ensemble φ est une mesure complexe. Effectivement, si $A \cap B = \varnothing$, alors $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, donc

$$\varphi(A \cup B) = \Phi(\chi_A + \chi_B) = \Phi(\chi_A) + \Phi(\chi_B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

Si maintenant $A = \bigcup_n A_n$ et A_n sont disjoints deux à deux, alors on a $\varphi(A) = \sum_n \varphi(A_n)$, car $\mu(A) = \sum_n^\infty \mu(A_n)$, donc pour $1 \leq p < \infty$, la différence

$$\mu(A) - \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) = \int (\sum_{i=n+1}^{\infty} \chi_{A_i}) d\mu$$

tend vers 0 et puisque Φ est continue sur $L_p(\mu)$, la suite $\varphi(A) - \sum_{i=0}^{n} \varphi(A_i) = \Phi(\sum_{i=n+1}^{\infty} \chi_{A_i})$ tend vers 0 également. Si $\mu(A) = 0$, alors $\|\chi_A\|_p = 0$, donc $\varphi(A) = \Phi(\chi_A) = 0$ et alors $\varphi \ll \mu$.

Le théorème de Radon-Nikodym assure l'existence de $g \in L^1(\mu)$ telle que pour tout $A \in \mathfrak{M}$,

$$\Phi(\chi_A) = \varphi(A) = \int_A g \, d\mu.$$

En conséquence, (D.21) est satisfaite pour toute fonction étagée, et comme toute fonction $f \in L^\infty(\mu)$ est une limite uniforme de fonctions étagées et *a fortiori* une limite dans $L_p(\mu)$ pour $1 \leq p < \infty$, (D.21) est valable pour $f \in L^\infty(\mu)$.

Montrons que si $\Phi \in [L_p(\mu)]'$ et $1 \leq p < \infty$, alors $g \in L_q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et que (D.21) reste valable pour chaque $f \in L_p(\mu)$. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mu$,

$$\left| \int_A g \, d\mu \right| \;=\; |\Phi(\chi_A)| \leq \|\Phi\| \|\chi_A\|_{L^1(\mu)} \;=\; \|\Phi\| \mu(A).$$

En conséquence, grâce à la proposition 1.4, pour μ-presque tout x on a $|g(x)| \leq \|\Phi\|$, donc $\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leq \|\Phi\|$, ce qui entraîne l'égalité. Si $p > 1$, alors considérons $G_n = \{|g| \leq n\}$ et la fonction suivante

$$g_n = \alpha |g|^{q-1} \chi_{G_n}$$

où α est une fonction complexe telle que $|g(x)| = \alpha(x) g(x)$ (donc $|\alpha(x)| = 1$) pour tout x. Comme $g_n \in L^\infty(\mu)$, on peut poser $f := g_n$ dans (D.21) ayant pour effet

$$\text{(D.23)} \qquad \left| \int g_n g \, d\mu \right| = |\Phi(g_n)| \leq \|\Phi\| \left(\int |g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme les intégrandes dans (D.23) s'écrivent, respectivement, $g_n g = |g|^q \chi_{G_n}$ et $|g_n|^p = |g|^{pq-p} \chi_{G_n} = |g|^q \chi_{G_n}$, la formule (D.23) devient

$$\int |g|^q \chi_{G_n} d\mu \leq \|\Phi\| \Big(\int |g|^q \chi_{G_n} d\mu \Big)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui entraîne

$$\left(\int |g|^q \chi_{G_n} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\Phi\|$$

et, après un passage à la limite pour une suite monotone, on a $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$, donc selon (D.22), $\|g\|_{L_q(\mu)} = \|\Phi\|$. Par conséquent, la forme linéaire intégrale dans (D.21) est L_p-continue. Or, Φ est L_p-continue par hypothèse et puisque $L^\infty(\mu)$ est dense dans $L_p(\mu)$ pour $p \geq 1$, la formule (D.21) est valable sur $L_p(\mu)$ tout entier.

Revenons au cas général : μ est une mesure positive σ-finie. Alors $X = \bigcup_n X_n$ ou $\mu(X_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $A \in \mathfrak{M}$, on a $\|\chi_A f\|_p \leq \|f\|_p$, la forme $f \mapsto \Phi(\chi_A f)$ est continue. D'après le premier cas, pour tout n, il existe $g_n \in L_q(\mu)$ telle que

$$\Phi(\chi_{X_n} f) = \int_{X_n} f g_n \, d\mu.$$

Bien entendu, on peut poser $g_n := g_n \chi_{X_n}$. Il s'ensuit alors que

$$\left\|\sum\nolimits_{i=0}^{n} g_i\right\|_q \leq \|\Phi\|,$$

donc en vertu du théorème 1.2 de Beppo Levi sur la convergence monotone $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ vérifie (D.21) et $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$. □

Corollaire 4.2. *Si $1 < p < \infty$, alors L_p est un espace de Banach réflexif.*

DÉMONSTRATION. Puisque L_p est le dual de $L_{\frac{p}{p-1}}$, donc $(L_p)'' = L_p$. □

5. Structure des duaux de L_∞ et de $C(K)$

Il nous reste le cas d'une représentation de l'espace dual de L_∞. Il est préférable de considérer d'abord le dual de l'espace $l_\infty(T)$ de fonctions réelles bornées f sur un ensemble T, avec la norme

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in T\}.$$

Une fonction $\nu : 2^T \to \mathbb{R}$ est dite une *mesure additive (finie)* si $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ si $A \cap B = \varnothing$. En particulier, $\nu(\varnothing) = 0$.

Une mesure additive est dite *positive* si $\nu(A) \geq 0$ pour tout $A \subset T$. Si ν est positive, alors elle est *monotone*, c'est-à-dire $A \subset D$ entraîne $\nu(A) \leq \nu(D)$.

On note $\mathbf{M}(T)$ l'espace vectoriel des mesures additives positives finies. Ses éléments s'appellent *mesures additives de variation bornée* sur T. Pour toute $\nu \in \mathbf{M}(T)$ il existe deux mesures additives positives ν_+, ν_- telles que $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A)$ pour tout $A \subset T$. On munit $\mathbf{M}(T)$ de la norme

$$\text{(D.24)} \qquad \|\nu\| := \sup\left\{\sum\nolimits_{A \in \mathcal{A}} |\nu(A)| : \mathcal{A} \text{ partition finie de } T\right\}.$$

Exemple 5.1. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre libre sur un ensemble T, alors $\nu_{\mathcal{U}}$ définie par

$$\nu_{\mathcal{U}}(A) := \begin{cases} 1, \text{ si } A \in \mathcal{U}, \\ 0, \text{ si } A \notin \mathcal{U}, \end{cases}$$

est une mesure additive, c'est-à-dire $\nu_{\mathcal{U}}(A_0 \cup A_1) = \nu_{\mathcal{U}}(A_0) + \nu_{\mathcal{U}}(A_1)$ pourvu que $A_0 \cap A_1 = \varnothing$. Puisque $\nu_{\mathcal{U}}$ ne prend que deux valeurs, 0 et 1, il suffit de prouver que $\nu_{\mathcal{U}}(A_0 \cup A_1) = 1$ si et seulement si $\nu_{\mathcal{U}}(A_0) + \nu_{\mathcal{U}}(A_1) = 1$.

Or $\nu_{\mathcal{U}}(A_0 \cup A_1) = 1$ si et seulement si $A_0 \cup A_1 \in \mathcal{U}$ et comme $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre $A_0 \in \mathcal{U}$ ou $A_1 \in \mathcal{U}$, c'est-à-dire $\nu_{\mathcal{U}}(A_0) = 1$ ou $\nu_{\mathcal{U}}(A_1) = 1$. Or $A_0 \in \mathcal{U}$ si et seulement si $A_1 \notin \mathcal{U}$, car $A_0 \cap A_1 = \varnothing$ et $\mathcal{U}$ est un filtre. Il s'ensuit que $\nu_{\mathcal{U}}(A_0) + \nu_{\mathcal{U}}(A_1) = 1$.

Si ν est une mesure additive positive finie, alors pour toute $f \in l_\infty(T)$, on définit l'intégrale $\int f\,d\nu$ comme on a fait dans (D.2) en sachant que, dans notre cas, toute partie de T est mesurable. Ainsi l'intégrale est le supremum des combinaisons linéaires de $\{\nu(A) : A \in \mathcal{A}\}$, où $\mathcal{A}$ sont des partitions finies de T. Puisque ν est positive, $\nu(T) < \infty$ et f est bornée, $\int f\,d\nu$ existe et est finie.

Si $\nu \in \mathbf{M}(T)$, alors

$$\int f\,d\nu := \int f\,d\nu_+ - \int f\,d\nu_-.$$

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser le dual de $l_\infty(T)$.

Exemple 5.2. Si $\nu_{\mathcal{U}}$ est une mesure additive associée à un ultrafiltre $\mathcal{U}$ comme dans l'exemple 5.1, alors

$$\int f\,d\nu_{\mathcal{U}} = \lim f(\mathcal{U}) \tag{D.25}$$

pour tout $f \in l_\infty$. La limite existe pour tout $f \in l_\infty$, car l'ultrafiltre $f(\mathcal{U})$ contient un compact $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$, donc est convergent.

Il suffit d'établir (D.25) pour une fonction f positive et bornée. Si $\varepsilon > 0$ alors il existe une famille finie disjointe de parties de T et l'ensemble des nombres strictement positifs $\{r_A : A \in \mathcal{A}\}$ tels que $s = \sum_{A\in\mathcal{A}} r_A \chi_A \leq f$ et $\|f - s\|_\infty < \varepsilon$. Ainsi il existe $A_0 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{A}$ et, par conséquent, $\int s\,d\nu_{\mathcal{U}} = \sum_{A\in\mathcal{A}} r_A \nu_{\mathcal{U}}(A) = r_{A_0}$. Ainsi (voir l'exercice B.3)

$$\begin{aligned} \int f\,d\nu_{\mathcal{U}} &= \sup\nolimits_{U\in\mathcal{U}} \inf\nolimits_{n\in U} f(t) \\ &= \inf\nolimits_{U\in\mathcal{U}} \sup\nolimits_{n\in U} f(t), \end{aligned}$$

car $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, donc $\int f\,d\nu_{\mathcal{U}} = \lim f(\mathcal{U})$.

Théorème 5.3. *Si $\nu \in \mathbf{M}(T)$, alors*

$$F_\nu(f) := \int f\,d\nu \tag{D.26}$$

est une forme linéaire continue sur $l_\infty(T)$ et $\|F_\nu\| = \|\nu\|$. Réciproquement, si $F \in l_\infty(T)'$, alors il existe $\nu_F \in \mathbb{M}(T)$ telle que (D.26).

DÉMONSTRATION. Il découle de la définition que F_ν est linéaire. Puisque $\{\chi_A : A \subset T\}$ est totale dans $l_\infty(T)$, si $\|f\|_\infty \leq 1$, alors

$$|F_\nu(f)| \leq \|\nu\|,$$

l'inégalité devenant l'égalité si pour toute partition finie $\mathcal{A}$ de T on prend $f_{\mathcal{A}}(t) := \operatorname{sgn} \nu(A)$ pourvu que $t \in A$.

Si $F \in l_\infty(T)'$, alors $\nu(A) := F(\chi_A)$ pour tout $A \subset T$ définit une mesure additive. On pose $\nu_+(A) := \sup\{\nu(D) : D \subset A\}$ et on constate que ν_+ est une mesure additive positive, car $F(\chi_\varnothing) = 0$. Comme $\nu(A) \leq \nu_+(A)$ pour tout $A \subset T$, la mesure $\nu_- := \nu - \nu_+$ est également positive, donc $\nu \in \mathbb{M}(T)$. Enfin $F(f) = \int f\,d\nu$ pour toute $f \in l_\infty(T)$, puisque les formes linéaires continues F et ν coïncident sur $\{\chi_A : A \subset T\}$ qui est une partie totale de $l_\infty(T)$. □

Corollaire 5.4. *L'espace dual de l_∞ est isométriquement isomorphe à* $\mathbb{M}(\mathbb{N})$.

L'exemple suivant montre que $(l_\infty)' \setminus l_1 \neq \varnothing$.

Exemple 5.5. Nous avons vu dans l'exemple 5.2 que tout ultrafiltre libre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ définit une forme linéaire continue sur l_∞ et $F_{\mathcal{U}}(f) := \lim f(\mathcal{U})$. Il n'existe aucun $g \in l_1$ tel que $F_{\mathcal{U}}(f) = \langle f, g\rangle$. En effet, si $g \equiv 0$, alors pour $f \equiv 1$, on a $F_{\mathcal{U}}(f) = 1$ et $\langle f, g\rangle = 0$; s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) \neq 0$, alors pour $f(k) = \delta_n^k$, on a $F_{\mathcal{U}}(f) = 0$ et $\langle f, g\rangle = g(n)$.

Si maintenant $\mathcal{M}$ est une σ-algèbre sur T et μ est une mesure positive σ-additive sur $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_\mu$ est l'ensemble des parties N de T telles que $\mu(N) = 0$, alors

$$\mathbb{M}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\mu) := \{\nu|_{\mathcal{M}} : \nu \in \mathbb{M}(T) \text{ et } N \in \mathcal{N}_\mu \Rightarrow \nu(N) = 0\}$$

est un espace vectoriel qu'on munit de la norme (D.24).

Théorème 5.6. *L'espace dual de $L_\infty(\mu)$ est isométriquement isomorphe à* $\mathbb{M}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\mu)$.

Soit K un espace métrique compact et $C(K)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues avec la norme (IX.18). Le théorème suivant caractérise le dual de $C(K)$.

Théorème 5.7. *La forme* (D.26) *est linéaire continue sur $C(K)$ pour tout $\nu \in \mathbb{M}(K)$ et sa norme vérifie*

$$\|\nu\|_{C(K)} = \sup\{\int_K f\,d\nu : f \in C(K), \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

L'application $\nu \longmapsto F_\nu$ est linéaire et surjective de $\mathbb{M}(K)$ à $C(K)'$ et ν est dans son noyau si et seulement si $\|\nu\|_{C(K)} = 0$.

DÉMONSTRATION. Selon le théorème 5.3, chaque $\nu \in \mathbb{M}(K)$ définit une forme linéaire continue sur $l_\infty(K)$ moyennant (D.26), donc la restriction de F_ν sur $C(K)$ est linéaire et continue. Réciproquement, si $F \in C(K)'$ alors en vertu du théorème IX.3.1 de Hahn-Banach, il existe un prolongement linéaire continu $\widetilde{F}$ de F sur $l_\infty(K)$ tel que $\|\widetilde{F}\| = \|F\|$. D'après le théorème 5.3, il existe $\nu_{\widetilde{F}} \in \mathbb{M}(K)$ telle que $\widetilde{F}(f) = \int_K f\,d\nu_{\widetilde{F}}$ pour tout $f \in l_\infty(K)$. Ainsi, $\|F\| = \|\nu\|_{C(K)}$.[7] □

On montre que la restriction d'une mesure additive sur la σ-algèbre des parties boreliennes s'un compact K est σ-additive. Ainsi on obtient

Théorème 5.8 (théorème de Riesz). *Une forme linéaire F sur $C(K)$ est continue si et seulement s'il existe une mesure ν_F telle que $F(f) = \int f\,d\nu_F$ pour tout $f \in C(K)$.*

Exercices

Solutions : pages 357-359.

(1) Montrer que

(a) si f est positive et mesurable, alors il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions positives étagées telle que $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in T$,

(b) si en plus $\|f\|_\infty < \infty$, alors la convergence est uniforme presque partout.

(2) Soit $L_\infty(\mu)$ l'espace des fonctions mesurables f (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$), pour lesquelles

$$\|f\|_\infty := \inf\{r > 0 : \mu\{|f| > r\} = 0\} < \infty.$$

Montrer que

(a) la convergence en $\|\cdot\|_\infty$ est la convergence simple presque partout,

(b) $L_\infty(\mu)$ est complet.

(3) (Inégalité de Jensen) Soit $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace de *probabilité* (c'est-à-dire espace mesuré avec $\mu(T) = 1$), $f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable et $\varphi : \operatorname{conv} T \to \mathbb{R}$ est convexe. Montrer que

$$(*) \qquad \varphi\Big(\int_T f\,d\mu\Big) \le \int_T \varphi \circ f\,d\mu.$$

(4) (théorème de Soit $(T, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace borelien, où T est complètement régulier et μ est régulière. Si $\mu(E) < \infty$ et $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in C(T, \mathbb{R})$ et un compact K tels que $K \subset \{h = f\}$ et $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$. Montrer ce théorème progressivement pour les fonctions

(a) caractéristiques,

7. La définition de $\|\nu_{C(K)}\|$ ne change pas si on remplace $\int_K f\,d\nu$ par $\left|\int_K f\,d\nu\right|$.

(b) étagées,

(c) positives bornées,

(d) positives,

(e) réelles.

(5) Soit $1 \leq p < \infty, T$ un espace localement compact et $(T, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace borelien. Montrer que l'espace $C_c(T)$ (des fonctions continues à support compact) est dense dans $L_p(T)$.

Solutions des exercices

I. Théorie des ensembles

Solutions (exercices des pages 17-21)

Exercice I.1. *Soit $P, R \subset X \times Y$. Vérifier que*

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$,

(b) $P \subset R \Longrightarrow P^{-1} \subset R^{-1}$,

(c) $R^{-1}B = \{x \in X : R\{x\} \cap B \neq \varnothing\}$.

Solution. (a) Par définition,

$$(x,y) \in (R^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow (y,x) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (x,y) \in R.$$

(b) Car $(x,y) \in R \Longleftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$. (c) Par définition, $x \in R^{-1}B$ si et seulement s'il existe $y \in B$ tel que $x \in R^{-1}\{y\}$, c'est-à-dire $y \in R\{x\}$, autrement dit, $R\{x\} \cap B \neq \varnothing$.

Exercice I.2. *Soit X, Y deux ensembles et $R \subset X \times Y$. Montrer que*

(a) *si $A_j \subset X$ pour tout $j \in J$, alors $R(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} RA_j$,*

(b) *il existe R telle que $R(A \cap B) \neq RA \cap RB$,*

(c) *si R est injective, alors $R(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} RA_j$,*

(d) *sont équivalentes :*

(i) $$RA \cap B \neq \varnothing,$$

(ii) $$A \cap R^{-1}B \neq \varnothing,$$

(iii) $$(A \times B) \cap R \neq \varnothing.$$

Solution. (a) Par définition, $y \in R(\bigcup_{j\in J} A_j)$ pourvu qu'il existe $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$ tel que $y \in R\{x\}$, de façon équivalente, s'il existe $j \in J$ et $x \in A_j$ tels que $y \in R\{x\}$, c'est-à-dire il existe $j \in J$ tel que $y \in RA_j$, ce qui revient à $y \in \bigcup_{j\in J} RA_j$.

(b) Soit $X := \{0,1\}, Y := \{0\}, R := X \times Y, A := \{0\}$ et $B := \{1\}$. Alors $R(A \cap B) = \varnothing$ et $RA \cap RB = \{0\}$.

(c) Si $y \in \bigcap_{j\in J} RA_j$, alors pour tout $j \in J$, il existe $x_j \in A_j$ tel que $y \in R\{x_j\}$. Il s'ensuit que $R\{x_j\} \cap R\{x_k\} \neq \varnothing$ pour tous $j, k \in J$, donc il existe x tel que $x = x_j$ pour tout $j \in J$, car R est injective. Ainsi $y \in R\{x\}$ et $x \in \bigcap_{j\in J} A_j$, ce qu'il fallait montrer.

(d) Notons d'abord que $y \in R\{x\}$ équivaut à $(x,y) \in R$ et à $x \in R^{-1}\{y\}$. Ainsi (i) si et seulement s'il existe $y \in RA$ tel que $y \in B$. De manière équivalente, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y \in R\{x\}$, d'où les équivalences entre (i),(ii) et (iii).

Exercice I.3. *Montrer que*

(a) $C \cap (S \circ R)A \neq \varnothing \Longleftrightarrow RA \cap S^{-1}C \neq \varnothing$,

(b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Solution. (a) Par définition, $C \cap (S \circ R)A \neq \varnothing$ si et seulement s'il existe $z \in C$ et $x \in A$ tels que $z \in SR\{x\}$, c'est-à-dire il existe $y \in R\{x\}$ tel que $z \in S\{y\}$, ce qui revient à $S^{-1}\{z\} \cap R\{x\} \neq \varnothing$, et de façon équivalente, $RA \cap S^{-1}C \neq \varnothing$.

(b) $x \in (S \circ R)^{-1}\{z\}$ si et seulement si $z \in S \circ R\{x\}$, c'est-à-dire s'il existe $y \in R\{x\}$ tel que $z \in S\{y\}$, c'est-à-dire $x \in R^{-1}\{y\}$ et $y \in S^{-1}\{z\}$, donc $x \in R^{-1} \circ S^{-1}\{z\}$.

Exercice I.4. *Soit $f : X \to Y, A_j \subset X$ et $B_k \subset Y$ pour tous $j \in J, k \in K$. Montrer que*

(a) $f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} fA_j$,

(b) $f^{-1}(\bigcup_{k\in K} B_k) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}B_k$,

(c) $f^{-1}(\bigcap_{k\in K} B_k) = \bigcap_{k\in K} f^{-1}B_k$,

(d) *si $A \subset X$ et $B \subset Y$, alors $A \subset \left(f^{-1} \circ f\right)A$, $(f \circ f^{-1})B \subset B$.*

Solution. Puisque f et f^{-1} sont des relations, les deux premières égalités suivent de l'exercice I.2 (b). Pour la troisième, on peut utiliser le fait que la relation f^{-1} est injective pour toute application f et conclure grâce à l'exercice I.2 (d) ou directement : si $x \in \bigcap_{k\in K} f^{-1}B_k$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}B_k$ pour tout $k \in K$, et alors pour tout $k \in K$, il existe $y_k \in B_k$ tel que $f(x) = y_k$, ainsi $f(x) \in \bigcap_{k\in K} B_k$.

(d) Si $x \notin f^{-1}fA$, alors $f\{x\} \cap fA = \varnothing$, donc $x \notin A$. Si $y \in (f \circ f^{-1})B$, alors $\varnothing \neq f^{-1}\{y\} \cap f^{-1}B$ et d'après (c) $\varnothing \neq f^{-1}(\{y\} \cap B)$, donc $\varnothing \neq \{y\} \cap B$, c'est-à-dire $y \in B$.

Exercice I.5. *Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une fonction f moyennant les compositions $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$.*

Solution. f est injective si et seulement si $A \supset (f^{-1} \circ f)A$ pour tout $A \subset X$.

En effet, f n'est pas injective si et seulement s'il existe x_0, x_1 tels que $x_0 \neq x_1$ et $f(x_0) = f(x_1)$. Alors $x_0 \in f^{-1}(f\{x_1\}) \setminus \{x_1\}$. Réciproquement, s'il existe x_0 tel que $x_0 \in (f^{-1} \circ f)A \setminus A$, alors $f(x_0) \in fA$, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $f(x_0) = f(x_1)$ et $x_0 \neq x_1$, car $x_0 \notin A$.

f est surjective si et seulement si $B \subset (f \circ f^{-1})B$ pour tout $B \subset Y$.

Effectivement, une fonction f n'est pas surjective, si et seulement s'il existe $y \in Y$ tel que $f^{-1}\{y\} = \varnothing$, c'est-à-dire $\varnothing = (f \circ f^{-1})\{y\}$ donc $\{y\}$

n'est pas inclus dans $(f \circ f^{-1})\{y\}$. S'il existe $y \in B \setminus (f \circ f^{-1})B$, alors d'une part $f^{-1}\{y\} \subset f^{-1}B$ et de l'autre $f^{-1}\{y\} \cap f^{-1}B = \varnothing$, donc $f^{-1}\{y\} = \varnothing$.

Exercice I.6. *Montrer*

(a) *les équivalences :*

$$B \subset R^* A,$$
$$A \subset (R^{-1})^* B,$$
$$A \times B \subset R,$$

(b) $R^*(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcap_{j \in J} R^* A_j$.

Solution. (a) Par définition, $B \subset R^* A$ si et seulement si $y \in R\{x\}$ pour tous $y \in B, x \in A$. De façon équivalente, $x \in R^{-1}\{y\}$ pour tous $y \in B, x \in A$, c'est-à-dire $A \subset (R^{-1})^* B$. Ceci équivaut à $(x, y) \in R$ pour tous $x \in A$ et $y \in B$, ce qui veut dire $A \times B \subset R$.

(b) $y \in R^*(\bigcup_{j \in J} A_j)$ si et seulement si $y \in R\{x\}$ pour tout $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$, de façon équivalente, pour tout $x \in A_j$ pour tout $j \in J$, c'est-à-dire $y \in R^* A_j$ pour tout $j \in J$.

Exercice I.7. *Soit $R \subset X \times X$ et $I \subset X \times X$, la relation diagonale. Vérifier que*

(a) $R \circ I = I \circ R = R$,

(b) *R est symétrique $\iff R \subset R^{-1} \iff R^{-1} = R$,*

(c) *R est transitive $\iff R \circ R \subset R$,*

(d) *R est réflexive $\iff I \subset R$,*

(e) *R est une équivalence $\iff$ R est réflexive et $R^{-1} \circ R \subset R$.*

Solution. (a) $z \in (R \circ I)\{x\}$ si et seulement s'il existe $y \in X$ tel que $z \in R\{y\}$ et $y \in I\{x\}$, donc $y = x$ et $z \in R\{x\}$.

De la même manière, $z \in (I \circ R)\{x\}$ si et seulement s'il existe $y \in X$ tel que $z \in I\{y\}$ et $y \in R\{x\}$, donc $z = y$ et $z \in R\{x\}$.

(b) Par définition, R est symétrique si et seulement si $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \in R$, c'est-à-dire $(x, y) \in R^{-1}$. En échangeant le rôle des variables, on obtient la condition équivalente $R^{-1} \subset R$, d'où la dernière équivalence.

(c) Par définition, R est transitive si $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ implique $(x, z) \in R$. Or, $(x, y) \in R$ et $(y, z) \in R$ signifie que $(x, z) \in R \circ R$, d'où l'équivalence.

(d) Par définition, R est réflexive si $(x, x) \in R$ pour tout x, c'est-à-dire $I \subset R$.

(e) Si R est une équivalence, alors la condition est vérifiée. Réciproquement, $I \subset R$, car R est réflexive, donc $R^{-1} = R^{-1} \circ I \subset R^{-1} \circ R \subset R$, ce qui montre la symétrie. Il s'ensuit que $R \circ R = R^{-1} \circ R \subset R$, ce qui donne la transitivité.

Exercice I.8. *Toute application f admet une décomposition $f = h \circ g$, telle que g est surjective et h est injective.*

Solution. Considérons une application $f : X \to Y$. Soit $g : X \to X/\widetilde{f}$ l'application quotient, c'est-à-dire $g(x) := \widetilde{f}^{-1}\{f(x)\}$ pour tout $x \in X$. D'après la proposition I.3.4, g est surjective. Puisque $w \in \widetilde{f}^{-1}\{f(x)\}$ si et seulement si $f(w) = f(x)$, l'application f restreinte à $\widetilde{f}^{-1}\{f(x)\}$ est constante (égale à $f(x)$). Donc

$$h(\widetilde{f}^{-1}\{f(x)\}) := f(x)$$

définit une application de $X/\widetilde{f}$ dans Y et $f(x) = h(g(x))$ pour tout $x \in X$. Or, h est une injection, car si $h(\widetilde{f}^{-1}\{f(x_0)\}) = h(\widetilde{f}^{-1}\{f(x_1)\})$, alors $f(x_0) = f(x_1)$, donc $x_1 \in \widetilde{f}^{-1}\{f(x_0)\}$, d'où $\widetilde{f}^{-1}\{f(x_0)\} = \widetilde{f}^{-1}\{f(x_1)\}$. Par conséquent, si f est surjective, alors il existe $g : X \to X/f$ et $h : X/f \to Y$ telles que $f = h \circ g$, où g est une application quotient et h est une bijection.

Exercice I.9. *Montrer que*

(a) *$f : X \to Y$ est surjective si et seulement s'il existe une application injective $g : Y \to X$ telle que $f \circ g = i_Y$.*

(b) *s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = i_X$, alors f est injective et g est surjective.*

Solution. Si f est surjective, alors d'après l'axiome I.2.2 du choix, pour tout $y \in Y$ il existe $g(y) \in f^{-1}\{y\}$, donc $f(g(y)) = y$. Or $y_0 \neq y_1$ implique $f^{-1}\{y_0\} \cap f^{-1}\{y_1\} = \varnothing$, on déduit que $g(y_0) \neq g(y_1)$. Réciproquement si $f \circ g = i_Y$, alors $f(X) \supset f(g(Y)) = Y$.

(b) Si $x = (g \circ f)(x)$, alors $g^{-1}\{x\} \ni f(x)$ et, puisque $x_0 \neq x_1$ implique $g^{-1}\{x_0\} \cap g^{-1}\{x_1\} = \varnothing$, on déduit que $f(x_0) \neq f(x_1)$. La surjectivité de g est une conséquence de (a).

Exercice I.10. *Calculer le noyau des suites suivantes et déterminer si elles sont libres ou principales :*

(a) $x_n := \max\left\{(-\frac{1}{n})^n, 0\right\}$ *pour* $n \in \mathbb{N}_1$,

(b) $y_k := \frac{1}{n}$ si $\frac{(n-1)n}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$ *pour* $n \in \mathbb{N}_1$ *et* $k \in \mathbb{N}$,

(c) $z_k := \frac{2}{2k-(n-1)n+2}$ *si* $\frac{(n-1)n}{2} \leq k < \frac{n(n+1)}{2}$ *pour* $n \in \mathbb{N}_1$ *et* $k \in \mathbb{N}$.

Solution. (a) $\ker_{n\to\infty} x_n = \{0\}$ et $\{k : x_k \notin \ker_{n\to\infty} x_n\}$ est infini, donc la suite n'est ni principale ni libre, (b) toute valeur se répète un nombre fini de fois, donc $\ker_{n\to\infty} y_n = \varnothing$ et par conséquent la suite est libre (c) On vérifie que $(z_k)_k$ s'écrit $1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, donc $\ker_{k\to\infty} y_k = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\}$ est égal à l'image de la suite. Il s'ensuit que la suite est principale.

Exercice I.11. *Montrer que tout intervalle de longueur non nulle de $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.*

Solution 1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\operatorname{card} I \leq \operatorname{card} \mathbb{R}$. D'autre part, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $]a, b[\subset I$. La fonction affine

$$f(x) := \tfrac{\pi}{b-a}(x - \tfrac{b+a}{2})$$

est une bijection de $]a, b[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan \circ f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une bijection, donc $\operatorname{card} I \geq \operatorname{card} \mathbb{R}$.

Solution 2. Pour montrer $\operatorname{card} I \geq \operatorname{card} \mathbb{R}$, on peut utiliser $g :]a, b[\to \mathbb{R}$

$$g(x) := \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}.$$

Elle est continue dans $]a, b[$, $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to b} g(x) = -\infty$. Donc d'après le théorème VII.1.10 de Bolzano, g est surjective.

Exercice I.12. *Montrer que*

(a) *si X est un ensemble fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que* $\operatorname{card} X = n$,

(b) *si X est un ensemble fini et si $y \notin X$, alors $X \cup \{y\}$ est fini,*

(c) *toute union finie d'ensembles finis est finie,*

(d) *tout produit fini d'ensembles finis est fini,*

(e) *si X, Y sont finis, alors Y^X est fini.*

Solution. (a) Si $X = \varnothing$, alors $\operatorname{card} X = 0$, sinon il existe $x_1 \in X$. Par récurrence on construit une suite d'éléments de X telle que

$$x_k \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}.$$

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} = \varnothing$, c'est-à-dire $X \sim \{1, \ldots, n\}$. En effet, dans le cas contraire, X contiendrait une suite injective $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et par conséquent $\operatorname{card} \mathbb{N} \leq \operatorname{card} X$, ce qui est une contradiction.

(b) Soit $f : X \cup \{y\} \to X \cup \{y\}$ injective. Si $f(X) \subset X$, alors $f(X) = X$, car X est fini et par conséquent, $f(y) = y$, donc f est surjective.

Si $y \in f(X)$, alors il existe un seul $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = y$. D'autre part, soit $x_1 := f(y)$. Soit $h : X \cup \{y\} \to X \cup \{y\}$ une bijection dont tous les points sauf x_0 et x_1 sont fixes. Alors $g := h \circ f$ est une injection telle que $g(x_0) = y$ et $g(y) = x_0$. Ainsi $g(X \setminus \{x_0\}) \subset X \setminus \{x_0\}$ et, comme $X \setminus \{x_0\}$ est fini, $g(X \setminus \{x_0\}) = X \setminus \{x_0\}$. D'autre part, $g(\{x_0, y\}) = \{x_0, y\}$, ce qui montre que g est surjective. Il s'ensuit que $f = h^{-1} \circ g$ est surjective.

(c) D'après (a) et (b), il s'ensuit par récurrence que l'union de deux ensembles finis est finie. Ensuite utiliser la récurrence sur le nombre d'ensembles.

(d) Il découle de (c) que le produit de deux ensembles finis est fini. Ensuite utiliser la récurrence sur le nombre d'ensembles.

(e) Ceci découle de (d), car Y^X est équipotent à $\prod_{x \in X} Y$.

Exercice I.13. *Si X_0 équipotent à X_1 et Y_0 équipotent à Y_1, alors*

(a) *si $X_0 \cap Y_0 = \varnothing$ et $X_1 \cap Y_1 = \varnothing$, alors $X_0 \cup Y_0$ est équipotent à $X_1 \cup Y_1$.*

(b) *$X_0 \times Y_0$ est équipotent à $X_1 \times Y_1$.*

(c) ${Y_0}^{X_0}$ *est équipotent à* ${Y_1}^{X_1}$.

Solution. Soit $f : X_0 \to X_1$ et $g : Y_0 \to Y_1$ deux bijections.

(a) On définit $h : X_0 \cup Y_0 \to X_1 \cup Y_1$ par

$$h(w) := \begin{cases} f(w) \text{ si } w \in X_0, \\ g(w) \text{ si } w \in Y_0. \end{cases}$$

Soit $h(v) = h(w)$. Si $h(v) = h(w) \in X_1$, alors $f(v) = f(w)$, donc $v = w$ car f est injective. Si $h(v) = h(w) \in Y_1$, alors $g(v) = g(w)$, donc $v = w$ car g est injective. Par conséquent, h est injective.

Soit $z \in X_1 \cup Y_1$. Si $z \in X_1$, alors il existe $w \in X_0$ tel que $f(w) = z$, car f est surjective. Si $z \in Y_1$, alors il existe $w \in X_1$ tel que $g(w) = z$, car g est surjective. Il s'ensuit que h est bijective.

(b) Soit $h : X_0 \times Y_0 \to X_1 \times Y_1$ donnée par $h(x, y) := (f(x), g(y))$. Si $h(x, y) = h(x', y')$, alors $f(x) = f(x')$ et $g(y) = g(y')$, donc $x = x'$ et $y = y'$, car f et g sont injectives, ce qui montre que h est injective.

Si $(x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1$, alors il existe $(x_0, y_0) \in X_0 \times Y_0$ tels que $f(x_0) = x_1$ et $g(y_0) = y_1$, car f et g sont surjectives. Donc h est surjective.

(c) Soit $F : {Y_0}^{X_0} \to {Y_1}^{X_1}$ définie par

$$F(\varphi) := g \circ \varphi \circ f^{-1}.$$

Si $F(\varphi) = F(\psi)$, alors pour tout $x_1 \in X_1$ il existe $x_0 \in X_0$ tel que

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Y_0 \arrow[d, "g"] \\ X_1 \arrow[r, "\psi"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

$f^{-1}(x_1) = x_0$, car f est bijective. Donc $g(\varphi(f^{-1}(x_1))) = g(\psi(f^{-1}(x_1)))$, donc $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, car g est injective. Ceci montre que $\varphi = \psi$, donc F est injective.

Soit $\xi : X_1 \to Y_1$. On veut trouver φ tel que $\xi = g \circ \varphi \circ f^{-1}$. En effet $\varphi := g^{-1} \circ \psi \circ f$ convient, ce qui montre que F est surjective.

Exercice I.14. *Soit κ, λ, μ des nombres cardinaux.*

(a) *Montrer que si $\kappa \leq \lambda$, alors*

(i) $$\kappa + \mu \leq \lambda + \mu,$$

(ii) $$\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu,$$

(iii) $$\kappa^\mu \leq \lambda^\mu,$$

(iv) $$\mu^\kappa \leq \mu^\lambda \text{ si } 0 < \kappa \leq \lambda.$$

(b) *Observer que* $\kappa < \lambda$ *n'implique pas les inégalités strictes dans* (i)-(iv).

(c) *Montrer que*

(v) $$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu},$$

(vi) $$(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}.$$

Solution. (a) Nous raisonnons comme dans l'exercice I.13. Soit X, Y, Z trois ensembles tels que $\operatorname{card} X = \mu, \operatorname{card} Y = \kappa, \operatorname{card} Z = \lambda$. Puisque $\kappa \leq \lambda$ il existe une application injective $f : Y \to Z$. Soit $X \cap Y = \varnothing = X \times Z$. Alors $h : Y \cup X \to Z \cup X$ définie par $h(w) := f(w)$ si $w \in Y$ et $h(w) := w$ si $w \in X$ est injective, d'où (i). Aussi $k : Y \times X \to Z \times X$ définie par $k(y, x) := (z, x)$ est injective, d'où (ii). Si $\varphi \in Y^X$, alors $F(\varphi) \in Z^X$, où $F : Y^X \to Z^X$ définie par $F(\varphi) := f \circ \varphi$, est injective, d'où (iii). Enfin, si $Z \neq \varnothing$, alors l'application $G : X^Z \to X^Y$ définie par $G(\psi) := \psi \circ g^{-1}$ est injective, d'où (iv).

(b) Si on pose $\kappa = 2$ et $\lambda = \mu = \aleph_0$, alors on obtient l'égalité dans (i),(ii) et (iii). On obtient l'égalité dans (iv) en posant $\kappa = 1, \lambda = 2$ et $\mu = \aleph_0$.

(c) Soit X, Y, Z trois ensembles tels que $X \cap Y = \varnothing, \operatorname{card} X = \lambda, \operatorname{card} Y = \mu$ et $\operatorname{card} Z = \kappa$.

(v) Si $(f, g) \in Z^X \times Z^Y$, alors on définit $F(f, g) \in Z^{X\cup Y}$ par

$$F(f,g)(w) := \begin{cases} f(w), & \text{si } w \in X, \\ g(w), & \text{si } w \in Y. \end{cases}$$

L'application F est une injection, car si $F(f_0, g_0) = F(f_1, g_1)$, alors $f_0(w) = f_1(w)$ pour tout $w \in X$, donc $f_0 = f_1$ et $g_0(w) = g_1(w)$ pour tout $w \in Y$, donc $g_0 = g_1$.

D'autre part F est une surjection, car si $h \in Z^{X\cup Y}$, alors pour $f_h(x) := h(x)$ pour $x \in X$ et $g_h(y) := h(y)$ pour $y \in Y$, donc $h = F(f_h, g_h)$.

(vi) Si $f \in (Z^X)^Y$, alors $f(y) \in Z^X$ pour tout $y \in Y$, c'est-à-dire $f(y)(x) \in Z$ pour tout $x \in X$. Soit

$$H(f)(x, y) := f(y)(x).$$

Il est évident que H est une injection. Si $g \in Z^{X\times Y}$, alors $f(y)(x) := g(x, y)$ vérifie $H(f)(x, y) = g(x, y)$, donc H est surjective.

Exercice I.15. *Combien y a-t-il de*

(a) *fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *?*

(b) *parties finies de* $\mathbb{N}$ *?*

(c) *suites à valeurs dans* $\{0, 1\}$ *?*

(d) *suites à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *?*

(e) *suites à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *?*

(f) *polynômes à coefficients entiers ?*

(g) *nombres algébriques ?*

Solution. Il y a : (a) $(\operatorname{card}\mathbb{R})^{\operatorname{card}\mathbb{R}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (b) $\aleph_0$ de parties finies de $\mathbb{N}$, car le nombre de parties de $\mathbb{N}$ de k éléments est majorée par $(\operatorname{card}\mathbb{N})^k = {\aleph_0}^k = \aleph_0$. Notons N_k l'ensemble des parties de k éléments de $\mathbb{N}$. Alors $\operatorname{card}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k) \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, (c) $2^{\operatorname{card}\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ de suites à valeurs dans $\{0,1\}$, (d) $(\operatorname{card}\mathbb{N})^{\operatorname{card}\mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ de suites à valeurs dans $\mathbb{N}$, (e) $(\operatorname{card}\mathbb{R})^{\operatorname{card}\mathbb{N}} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ de suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, (f) $\aleph_0$ de polynômes à coefficients entiers, car un tel polynôme est déterminé par un ensemble fini de $\mathbb{N}$, (g) $\aleph_0$ de nombres algébriques, car tout polynôme de rang k a au plus k racines réelles.

Exercice I.16. *Montrer que*

(a) *deux parties sont presque égales si et seulement si la différence symétrique* $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *est finie,*

(b) *la relation* $=^*$ *est une relation d'équivalence,*

(c) *deux suites libres n'ont aucune suite extraite commune si et seulement si leurs images sont presque disjointes.*

Solution. (a) $A\Delta B$ est finie si et seulement si A est presque inclus dans B et B est presque inclus dans A, c'est-à-dire $A =^* B$.

(b) Comme $A =^* B$ si et seulement si $A\Delta B$ est finie, la relation $=^*$ est symétrique et réflexive. Pour voir qu'elle est transitive, il suffit de montrer que $\subset^*$ est transitive. En effet, si $A \setminus B$ est fini et $B \setminus C$ est fini, alors $A \setminus C$ est fini. Formellement, puisque $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, alors

$$A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (A \cap B \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C),$$

donc $A \setminus C$ est fini.

(c) Soit A et B les images respectives de deux suite libres f et g dans X. Si $h : \mathbb{N} \to X$ est une suite extraite commune, alors $h(\mathbb{N}) \setminus (A \cap B)$ est finie. Donc, si $A \cap B$ est finie, alors $h(\mathbb{N})$ est finie et, par conséquent, h n'est pas libre, donc ne peut pas être une suite extraite d'une suite libre. Si $A \cap B$ est infinie, alors il existe une application injective $h : \mathbb{N} \to A \cap B$. C'est une suite extraite commune de f et g, car si n_k est tel que $h(k) = f(n_k)$, alors $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, car $f^{-1}(h(k))$ est fini pour tout k (pareil pour g).

Exercice I.17. *Soit X un ensemble dénombrable infini et $\mathcal{A}$ une famille de parties de X. Montrer que*

(a) *si* $\mathcal{A} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *est une suite presque disjointe de termes distincts, alors il existe une partie* $A_\infty \notin \mathcal{A}$ *telle que* $\mathcal{A} \cup \{A_\infty\}$ *est presque disjointe,*

(b) *si $\mathcal{A}$ est une famille presque disjointe, alors il existe une famille presque disjointe maximale $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$,*

(c) *une famille $\mathcal{A}$ est presque disjointe est maximale si et seulement pour toute partie infinie B il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B \cap A$ est infinie,*

(d) *si $\mathcal{A}$ est une famille infinie presque disjointe maximale, alors* $\operatorname{card}\mathcal{A} > \aleph_0$,

(e) *il existe sur X une famille presque disjointe de cardinalité $\mathfrak{c}$.*

Solution. (a) Si la suite $(A_n)_n$ est presque disjointe, alors $A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$ est infini pour tout n, donc si $a_n \in A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$, alors $A_\infty := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ a tous les termes distincts et $A_\infty \cap A_n$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si $\mathbb{A}$ est un ensemble totalement ordonné (par inclusion) de familles presque disjointes, alors $\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathbb{A}} \mathcal{A}$ est presque disjointe. En effet, si $A_0, A_1 \in \bigcup_{\mathcal{A}\in\mathbb{A}} \mathcal{A}$, alors il existe $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in \mathbb{A}$ telles que $A_0 \in \mathcal{A}_0$ et $A_1 \in \mathcal{A}_1$. Puisque $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \in \mathbb{A}$, l'intersection $A_0 \cap A_1$ est finie. On conclut grâce au théorème I.2.3 de Zorn-Kuratowski.

(c) S'il existe une partie infinie B tel que $B \cap A$ est fini pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} \cup \{B\}$ est presque disjointe, de façon équivalente, $\mathcal{A}$ n'est pas maximale.

(d) Si $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ était presque disjointe maximale et de termes distincts, alors on aurait une contradiction d'après (a).

(e) L'ensemble X est équipotent avec $\mathbb{Q}$. Pour tout $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ soit $f_r \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to\infty} f_r(k) = r$. Une telle suite est nécessairement libre. D'après l'unicité de la limite (proposition I.2.1), $f_{r_0} \neq f_{r_1}$ si $r_0 \neq r_1$. Donc la famille

$$\mathcal{A} := \{f_r(\mathbb{N}) : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

est de cardinalité $\mathfrak{c}$. Comme, pour $r_0 \neq r_1$, les suites f_{r_0} et f_{r_1} n'ont pas de suite extraite commune, $\mathcal{A}$ est presque disjointe.

II. Espaces métriques

Solutions (exercices des pages 39-42)

Exercice. II.1. *Montrer que la fonction $i : X\times X \to \mathbb{R}$ définie par $i(x,y) := 0$, si $x = y$ et $i(x,y) := 1$, si $x \neq y$, est une métrique.*

Solution. Il est clair que i est positive, symétrique et $i(x,y) := 0$ si et seulement si $x = y$. Pour montrer l'inégalité triangulaire, il suffit de considérer le cas $i(x,y) + i(y,z) = 0$. Dans ce cas, $i(x,y) = 0$ et $i(y,z) = 0$, c'est-à-dire $x = y$ et $y = z$, donc $x = z$, ainsi $i(x,z) = 0$.

Exercice II.2. *Décrire toutes les métriques sur $\{0,1\}$.*

Solution. Si $d : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \mathbb{R}_+$ est une métrique, alors $d(0,0) = d(1,1) = 0$ et $r := d(0,1) = d(1,0) > 0$. Donc $d(x,y) = r \cdot i(x,y)$, où i est la métrique de l'exercice II.1.

Exercice II.3. *Vérifier que si d est une métrique et $t > 0$, alors δ définie par $\delta(x,y) := \min(d(x,y),t)$, est une métrique.*

Solution. Il est évident que δ est symétrique et $0 = \delta(x,y)$ si et seulement si $0 = d(x,y)$, donc si et seulement si $x = y$. Enfin, pour tous x, y, z,

$$\begin{aligned}\delta(x,z) &= \min(d(x,z),t) \leq \min(d(x,y)+d(y,z),t)\\ &\leq \min(d(x,y),t) + \min(d(y,z),t) = \delta(x,y) + \delta(y,z),\end{aligned}$$

car si $a, b, t \geq 0$, alors

(inégalité) $$\min(a+b, t) \leq \min(a, t) + \min(b, t).$$

Cas 1 : si $a + b \leq t$, alors (inégalité) devient $a + b = a + b$. Cas 2 : si $t < a$ ou $t < b$ (donc $t < a + b$), alors (inégalité) devient $t \leq t + \min(b, t)$ ou $t \leq \min(a, t) + t$. Cas 3 : si $t < a + b, a \leq t$ et $b \leq t$, alors (inégalité) devient $t \leq a + b$.

Exercice II.4. *Montrer que si d est une métrique sur X, alors*

$$h(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une métrique bornée par 1 *topologiquement équivalente à d.*

Solution. La fonction h est bornée par 1, symétrique, et $h(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Pour tous x, y, z,

$$\begin{aligned} h(x, y) + h(y, z) &\geq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{d(x, y) + d(y, z)}} \\ &\geq \frac{1}{1 + \dfrac{1}{d(x, z)}} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = h(x, z). \end{aligned}$$

Enfin $\lim_{n\to\infty} h(x_n, x) = 0$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Exercice II.5. *Soit*

$$d_2(x, y) := \|x - y\|_2, \; d_1(x, y) := \|x - y\|_1, \; d_\infty(x, y) := \|x - y\|_\infty .$$

Montrer que

(a) d_2, d_1, d_∞ *sont des métriques et*

(b) $\frac{1}{n} d_1(x, y) \leq d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$.

Solution. (a) Ces fonctions sont positives et symétriques. L'inégalité triangulaire pour les métriques d_2, d_1, d_∞ est une conséquence immédiate de celle pour les normes respectives. Ainsi

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \|x\|_1 + \|y\|_1 ,$$
$$\|x + y\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k + y_k| \leq \sup_{1\leq k\leq n} |x_k| + \sup_{1\leq k\leq n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

Pour la norme $\|\cdot\|_2$, montrons d'abord l'*inégalité de Schwarz* :

(Schwarz) $$\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 = \|x\|_2^2 \, \|y\|_2^2$$

En effet, pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k + r y_k)(x_k + r y_k) = \|x\|_2^2 + 2r \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + r^2 \|y\|_2^2 .$$

Cette forme quadratique par rapport à r est toujours positive, donc son discriminant est négatif

$$4\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - 4\|x\|_2^2\|y\|_2^2 \leq 0,$$

d'où l'inégalité (Schwarz). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2 = \|x\|_2^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2.\end{aligned}$$

(b) Posons $h := x - y$ et notons h_k la k-ième composante de h. Alors $|h_k| \leq \max\{|h_l| : 1 \leq l \leq n\} = \|h\|_\infty$ pour tout k, donc $\sum_{k=1}^{n}|h_k| \leq n\|h\|_\infty$, d'où la première inégalité. Si l est tel que $\|h\|_\infty = |h_l|$, alors $\|h\|_\infty^2 = |h_l|^2 \leq \sum_{k=1}^{n}|h_k|^2 = \|h\|_2^2$, d'où la deuxième inégalité. En appliquant la racine quadratique à $\sum_{k=1}^{n}|h_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^{n}|h_k|)^2$, on obtient la dernière inégalité.

Exercice II.6. *Soit $(X_1, g_1), (X_2, g_2), \ldots, (X_n, g_n)$ des espaces métriques et*

$$D_2(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} g_k(x_k,y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D_1(x,y) := \sum_{k=1}^{n} g_k(x_k,y_k),$$

$$D_\infty(x,y) := \max\nolimits_{1\leq k\leq n} g_k(x_k,y_k).$$

Montrer que les fonctions D_2, D_1, D_∞ sont des métriques équivalentes sur $\prod_{k=1}^{n} X_k$.

Solution. Réduisons le problème à celui de l'exercice précédent. Soit $H : \prod_{k=1}^{n} X_k \to \prod_{k=1}^{n}\mathbb{R}$ définie par

$$H(x,y)(k) := g_k(x_k,y_k).$$

Alors $D_p(x,y) = \|H(x,y)\|_p$ pour $p \in \{1,2,\infty\}$. Ainsi D_p vérifie (II.1)-(II.3), car g_k est une métrique pour tout $1 \leq k \leq n$. En posant $h := H(x,y)$ dans la partie (b) de l'exercice précédent, on obtient

$$\tfrac{1}{n}D_1(x,y) \leq D_\infty(x,y) \leq D_2(x,y) \leq D_1(x,y).$$

Exercice II.7. *Montrer que*

$$D(f,g) := \sup\nolimits_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

est une métrique sur $C_b(X,Y)$.

Solution. La fonction D est positive symétrique, et $D(f,g) = 0$ équivaut à $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$, donc à $f = g$. Si $f, g, h \in C_b(X,Y)$, alors

$$\begin{aligned}D(f,h) &= \sup\nolimits_{x\in X} d(f(x),h(x)) \leq \sup\nolimits_{x\in X}(d(f(x),g(x)) + d(g(x),h(x))) \\ &\leq \sup\nolimits_{x\in X} d(f(x),g(x)) + \sup\nolimits_{x\in X} d(g(x),h(x)) = D(f,g) + D(g,h).\end{aligned}$$

Exercice II.8. *Montrer que*

(a) $B_r^{-1} = B_r$,

(b) $y \in B_r A \iff B_r\{y\} \cap A \neq \varnothing$,

(c) $D \cap B_r A \neq \varnothing \iff B_r D \cap A \neq \varnothing$.

Solution. Appliquer l'exercice I.2 à la relation $R := B_r$.

Exercice II.9. *Montrer que* $\operatorname{diam}(B_r A) \leq \operatorname{diam}(A) + 2r$.

Solution. Si $x, y \in B_r A$, alors il existe $x', y' \in A$ tels que $d(x,x') < r$ et $d(y,y') < r$. Donc

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y,y') < d(x',y') + 2r.$$

Ainsi $\operatorname{diam}(B_r A) = \sup_{x,y \in B_r A} d(x,y) \leq \sup_{x',y' \in A} d(x',y') + 2r \leq \operatorname{diam}(A) + 2r$.

Exercice II.10. *Montrer que l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de x vérifie*

(v0) $$\underset{x \in X}{\forall}\ X \in \mathcal{V}(x),$$

(v1) $$V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow x \in V,$$

(v2) $$W \supset V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow W \in \mathcal{V}(x),$$

(v3) $$V_0, V_1 \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow V_0 \cap V_1 \in \mathcal{V}(x),$$

(v4) $$V \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow \underset{W \in \mathcal{V}(x)}{\exists}\ \underset{w \in W}{\forall}\ V \in \mathcal{V}(w).$$

Solution. (v0),(v1) et (v2) sont une conséquence immédiate de la définition. Si $V_0, V_1 \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$ tels que $B(x,r_0) \subset V_0$ et $B(x,r_1) \subset V_1$, donc $B(x, \min(r_0,r_1)) \subset V_0 \cap V_1$, d'où (v3). Si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$. Soit $0 < s < r$ et $W := B(x,s)$. Si $w \in W$ et $y \in B(w, r-s)$, alors

$$d(x,y) \leq d(x,w) + d(w,y) < s + (r-s) = r,$$

donc $B(w, r-s) \subset B(x,r) \subset V$, ce qui implique que $V \in \mathcal{V}(w)$.

Exercice II.11. *Montrer que toute suite convergente principale est stationnaire.*

Solution. Si $(x_n)_n$ est principale, alors il existe N tel que $\{x_n : n > N\} = \ker_{n\to\infty} x_n \neq \varnothing$. Si maintenant $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors

$$\ker_{n\to\infty} x_n \subset \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \{x\}.$$

Exercice II.12. *Montrer que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ si et seulement si pour toute suite extraite $(x_{n_k})_k$ il existe une suite extraite $(x_{n_{k_p}})_p$ telle que $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_{k_p}}$.*

Solution. Une conséquence immédiate des propositions II.2.7 et II.2.8.

Exercice II.13. *Montrer que si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n,k}$ pour tout $n \in N$, alors il existe $(n_p)_p, (k_p)_p$ tendant vers ∞ telles que $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_p,k_p}$.*

Solution. Comme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, pour tout $p \in \mathbb{N}_1$ il existe $n_p \in \mathbb{N}_p$ tel que $x_{n_p} \in B(x, \frac{1}{p})$. Puisque $B(x, \frac{1}{p})$ est ouvert et $x_{n_p} = \lim_{k\to\infty} x_{n_p,k}$, il existe $k_p > n_p$ tel que $x_{n_p,k_p} \in B(x, \frac{1}{p})$. Ainsi $x = \lim_{p\to\infty} x_{n_p,k_p}$. Comme $k_{n_p} > n_p \geq p$, $(n_p)_p$ et $(k_p)_p$ tendent vers ∞.

Exercice II.14. *Soit d une métrique sur X. Montrer que*

(a) *pour tout $y \in X$ la fonction $x \mapsto d(x, y)$ est continue,*

(b) $|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$ *pour tous $x, x', y, y' \in X$,*

(c) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *est continue.*

Solution. (a) Si $x_0, x_1 \in X$, alors selon l'inégalité triangulaire,

$$|d(x_0, y) - d(x_1, y)| \leq d(x_0, x_1),$$

ce qui montre que $d(\cdot, y)$ est lipschitzienne, donc continue. Alternativement, appliquer la proposition II.3.7 avec $A := \{y\}$.

(b) D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y),$$

d'où $d(x,y) - d(x,x') \leq d(x',y') + d(y',y)$. En échangeant le rôle de (x,y) et (x',y'), on obtient l'inégalité recherchée.

(c) $D((x,y),(x',y')) := d(x,x') + d(y,y')$ est une métrique sur $X \times X$ compatible avec la convergence produit.

Exercice II.15. *Montrer que dans un espace métrique toute boule large est fermée.*

Solution. En tant qu'image réciproque par l'application continue d'un ouvert $B(x,r) = d(\cdot,x)^{-1}(]-\infty, r[)$.

Exercice II.16. *Montrer que dans un espace métrique toute boule large est fermée.*

Solution. 1. En tant que image réciproque par l'application continue d'un fermé : $B^{\leq}(x,r) = d(\cdot,x)^{-1}([0,r])$.

Solution. 2. Soit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ et $x_n \in B^{\leq}(x,r)$, c'est-à-dire $d(x_n,x) \leq r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $d(x_\infty, x) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n,x) \leq r$, d'après l'exercice II.14. Autrement dit, $x_\infty \in B^{\leq}(x,r)$, ce qui montre que $B^{\leq}(x,r)$ est fermée.

Exercice II.17. *Soit A une partie non vide. Montrer que*

(a) $B(A,r)$ *est ouverte pour tout $r > 0$,*

(b) $\bigcap_{r>0} B(A,r) = \operatorname{cl} A$.

Solution. (a) Effectivement, $B(A,r) = \bigcup_{x\in A}\{y \in X : d(x,y) < r\} = \bigcup_{x\in A} B(x,r)$ est ouverte comme l'union de parties ouvertes.

(b) Notons que $x \in \bigcap_{r>0} B(A,r)$ si et seulement si $x \in B(A,r)$, c'est-à-dire $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, ce qui veut dire que $x \in \operatorname{cl} A$.

Exercice II.18. *Montrer que*

(a) *C est homéomorphe à son carré $C \times C$,*

(b) *C est homéomorphe à C^n pour tout $n \in N_1$,*

(c) *C est homéomorphe à $C^{\aleph_0}$.*

Solution. Selon le corollaire II.4.7, C est homéomorphe au cube de Cantor $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}$. Notons que si $p : \mathbb{N} \to A$ est une bijection, alors

$$f(x)(a) := x(p^{-1}(a))$$

est un homéomorphisme de $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ et $\prod_{a \in A} \{0,1\}$, car les produits sont munis de la convergence simple.

(a) Il suffit de montrer que $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,1\}$ est homéomorphe au

$$\prod_{n \in D_0} \{0,1\} \times \prod_{n \in D_1} \{0,1\},$$

où D_0, D_1 sont deux ensembles disjoints dénombrables infinis, en prenant n'importe quelle bijection $p : \mathbb{N} \to D_0 \cup D_1$.

(b) Récurrence.

(c) Il suffit de prendre une bijection $p : \mathbb{N} \to \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$, où $\{D_k : k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'ensembles disjoints dénombrables infinis.

Voici une construction explicite. Soit $D_k := \{n \in \mathbb{N} : 2^k \mid n, 2^{k+1} \nmid n\}$. Ainsi $\mathbb{N}$ est égale à l'union disjointe $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$. Donc $X_k := \prod_{n \in D_k} \{0,1\}$ est homéomorphe à X. L'application $h : \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k \to X$ définie par

$$h(x_0, x_1, \ldots)(n) := x_k(n) \text{ si } n \in D_k,$$

est un homéomorphisme.

Exercice II.19. *Montrer que si un espace métrique a au moins 2 éléments, alors il admet au moins 4 ouverts différents.*

Solution. Si (X,d) est un espace métrique et $\operatorname{card} X > 1$. D'après l'hypothèse, il existe deux éléments distincts x_0, x_1 de X. Donc il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \cap B(x_1, r) = \varnothing$. Ainsi $\varnothing, X, B(x_0, r), B(x_1, r)$ sont quatre ouverts distincts.

Exercice II.20. *Déterminer* $\operatorname{int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ *et* $\operatorname{cl}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$.

Solution. Par définition, $r \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\subset \mathbb{Q}$. Ceci n'est possible pour aucun $r \in \mathbb{R}$, car $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contient des nombres irrationnels. Donc $\operatorname{int}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \varnothing$. Puisque tout $r \in \mathbb{R}$ est la limite d'une suite de nombres rationnels (par exemple, la suite des approximations décimales de r), $\operatorname{cl}_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Exercice II.21. *Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.*

Solution. Si $r \notin \mathbb{Z}$, alors $z_r := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\} < r < z_r + 1$. Or, l'intervalle $]z_r, z_r + 1[$ est disjoint de $\mathbb{Z}$, contient r et est une partie ouverte de $\mathbb{R}$ (en tant que boule stricte autour de $z_r + \frac{1}{2}$).

Exercice II.22. *Montrer que*

(a) $A \subset C \Longrightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} C$,

(b) $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$,

(c) $\operatorname{cl}(A \cap B) \subset \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$,

(d) *il existe* A, B *tels que* $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B \neq \operatorname{cl}(A \cap B)$.

Solution. (a) car tout fermé incluant C inclut A.

(b) $\operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B \subset \operatorname{cl}(A \cup B)$ d'après (a). Si $x \in \operatorname{cl}(A \cup B)$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $A \cup B$ convergeant vers x. Alors au moins un des ensembles $N_A := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ et $N_B := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$ est infini, donc $(x_n)_{n \in N_A}$ ou $(x_n)_{n \in N_B}$ est une suite extraite de $(x_n)_n$, donc converge vers x. Ainsi $x \in \operatorname{cl} A$ ou $x \in \operatorname{cl} B$.

(c) d'après (a).

(d) $A =]-\infty, 0[$, $B =]0, \infty[$. Alors $A \cap B = \varnothing$, donc $\operatorname{cl}(A \cap B) = \varnothing$, tandis que $\operatorname{cl} A =]-\infty, 0]$ et $\operatorname{cl} B = [0, \infty[$, donc $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B = \{0\}$.

Exercice II.23. *Observer que si* $A \subset Y \subset X$, *alors*

(a) $\operatorname{cl}_Y A = Y \cap \operatorname{cl}_X A$,

(b) *si* Y *est fermé dans* X, *alors* $\operatorname{cl}_Y A = \operatorname{cl}_X A$.

(c) *si* Y *est dense dans* X *et* O *est un ouvert de* X, *alors*

$$\operatorname{cl}_X (O \cap Y) = \operatorname{cl}_X O.$$

Solution. (a) Par définition, $\operatorname{cl}_Y A$ est l'intersection de

$$\mathcal{F} := \{F \subset Y : A \subset F = \operatorname{cl}_Y F\}.$$

Or, F est un fermé de Y si et seulement si il existe un fermé H de X tel que $F = Y \cap H$. Donc si $\mathcal{H}_F := \{H \subset X : F = Y \cap H, H = \operatorname{cl}_X H\}$, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{cl}_Y A &= \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}} F = Y \cap \bigcap\nolimits_{F \in \mathcal{F}} \bigcap\nolimits_{H \in \mathcal{H}_F} H \\ &= Y \cap \{H \subset X : A \subset H, H = \operatorname{cl}_X H\} = Y \cap \operatorname{cl}_X A. \end{aligned}$$

(b) Si Y est fermé et $A \subset Y$, alors $\operatorname{cl}_X A \subset Y$, donc d'après (a), $\operatorname{cl}_Y A = Y \cap \operatorname{cl}_X A = \operatorname{cl}_X A$.

(c) Si $x \in \operatorname{cl}_X O$ alors $B(x, r) \cap O \neq \varnothing$ pour $r > 0$. Puisque $B(x, r) \cap O$ est ouvert et Y est dense, $B(x, r) \cap O \cap Y \neq \varnothing$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{cl}_X (O \cap Y)$.

Exercice II.24. *Montrer que tout ouvert non vide de* $\mathbb{R}$ *est l'union dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.*

Solution. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $x \in O$. Alors il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $x \in]a, b[\subset O$. L'union de tous les intervalles avec cette propriété est un intervalle ouvert $]a_x, b_x[$ tel que $x \in]a_x, b_x[\subset O$, où $-\infty \leq a_x < b_x \leq \infty$.

Si $x, y \in O$, alors $]a_x, b_x[\cap]a_y, b_y[= \varnothing$ ou $]a_x, b_x[=]a_y, b_y[$. Ainsi $O = \bigcup_{x \in O}]a_x, b_x[$. Il existe une partie dénombrable (finie ou infinie) $\{q_n : n \in N\}$

de $\mathbb{Q}$ telle que pour tout $x \in O$, il existe un seul $n \in N$ avec $q_n \in]a_x, b_x[$. Notons $I_n :=]a_x, b_x[$ avec cette propriété. Ainsi $O = \bigcup_{n \in N} I_n$ et $I_n \cap I_m = \varnothing$ si $n \neq m$.

Exercice II.25. *Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de termes distincts telle que*

$$\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ et } A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} B(q_n, \tfrac{1}{n^2}).$$

Montrer que

(a) *A est ouvert,*

(b) $\operatorname{cl} A = \mathbb{R}$,

(c) $A \neq \mathbb{R}$.

Solution. (a) A est ouvert en tant qu'union d'ouverts.

(b) Comme $\mathbb{Q} \subset A$ et $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} = \operatorname{cl} \mathbb{Q} \subset \operatorname{cl} A$.

(c) $\operatorname{diam} A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{diam} B(q_n, \frac{1}{n^2}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ et $\operatorname{diam} \mathbb{R} = \infty$.

Exercice II.26. *Soit $X := \bigcup_{j \in J} X_j$ union disjointe, et d_j une métrique sur X_j, bornée par 1, pour tout $j \in J$. Montrer que*

(a) *la fonction $d(x, y) := d_j(x, y)$, s'il existe $j \in J$ tel que $x, y \in X_j$ et sinon $d(x, y) := 1$, est une métrique,*

(b) *si $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, alors il existe n_0 et $j \in J$ tel que $x_n \in X_j$ pour tout $n \geq n_0$,*

(c) *la partie X_j de X est ouverte et fermée pour tout $j \in J$.*

(d) *Observer que si $X_j := \{x_j\}$, alors (X, d) est un espace discret.*

Solution. (a) La fonction d est symétrique, et $d(x, y) = 0$ si et seulement s'il existe $j \in J$ tel que $d(x, y) = d_j(x, y) = 0$, c'est-à-dire $x, y \in X_j$ et $x = y$. Montrons que

$$\text{(triangulaire)} \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

pour tous $x, y, z \in X$. Puisque $d(x, z) \leq 1$, il suffit de considérer le cas où $d(x, y) + d(y, z) < 1$. Alors $d(x, y) < 1$ et $d(y, z) < 1$. Ainsi il existe $j, k \in J$ tels que $x, y \in X_j$ et $y, z \in X_k$, et, par conséquent, $j = k$, donc l'inégalité (triangulaire) devient $d_j(x, z) \leq d_j(x, y) + d_j(y, z)$.

(b) Si $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X_j$, alors $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$, donc il existe n_0 tel que $d(x_n, x) < 1$ pour $n \geq n_0$. Il s'ensuit que $x_n \in X_j$ pour tout $n \geq n_0$ et $x \in X_j$.

(c) Si $x \in X_j$, alors $X_j = \{y \in X : d(y, x) < 1\}$, donc X_j est ouverte en tant que l'image réciproque de $]-\infty, 1[$ par la fonction continue $d(\cdot, x)$. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X_j et $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, alors il existe n_0 tel que $d(x_n, x) < 1$ pour $n \geq n_0$, donc $d(x_n, x) = d_j(x_n, x)$ et, par conséquent, $x \in X_j$.

(d) Si $X_j := \{x_j\}$, alors (X, d) est un espace discret, car tout singleton est ouvert.

Exercice II.27. *Soit X, Y espaces métriques et $f : X \to Y$. Montrer les équivalences :*

(a) *f est continue,*

(b) *$f^{-1}(O)$ est ouverte pour tout ouvert O de Y,*

(c) *$f^{-1}(F)$ est fermée pour tout fermé F de Y.*

Solution. (a) $\Longrightarrow$ (b) : si O est ouvert et $x \in f^{-1}(O)$, alors $f(x) \in O$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(f(x)) \subset O$. D'après la définition de continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Donc $f^{-1}(O) \supset f^{-1}f(B_\delta(x)) \supset B_\delta(x)$, ce qui prouve l'ouverture de $f^{-1}(O)$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : si F est fermé, alors $Y \setminus F$ est ouvert, donc $f^{-1}(Y \setminus F)$ est ouvert. D'autre part, $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$, donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : si f n'est pas continue, alors il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $f(B_{\frac{1}{n}}(x)) \setminus B_\varepsilon(f(x)) \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, autrement dit, il existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ tel que $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(x))$, donc $x_n \notin f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

Ainsi $x_n \in f^{-1}(Y \setminus B_\varepsilon(f(x))$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Or $Y \setminus B_\varepsilon(f(x))$ est fermé mais, $f^{-1}(Y \setminus B_\varepsilon(f(x))$ ne l'est pas, car $x \notin f^{-1}(Y \setminus B_\varepsilon(f(x)))$.

Exercice II.28. *Donner un exemple d'application continue injective qui n'est ni ouverte ni fermée.*

Solution. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) := x$. Si $\mathbb{R}$ et $[0,1[$ sont munis de leurs métriques usuelles, alors f est continue, car $f^{-1}(O) = O \cap [0,1[$ est un ouvert dans $[0,1[$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. D'autre part, $[0,1[$ est ouvert et fermé dans $[0,1[$, mais $[0,1[= f([0,1[)$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice II.29. *Si $f : X \to Y$, alors* $\mathrm{Gr}(f) := \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ *est le graphe de f. Montrer que*

(a) *si f est continue, alors* $\mathrm{Gr}(f)$ *est fermé dans l'espace produit $X \times Y$,*

(b) *il existe une fonction qui n'est pas continue et dont le graphe est fermé,*

(c) *si f est continue, alors* $\mathrm{Gr}(f)$ *est homéomorphe à X.*

Solution. (a) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$ et $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}(f)$, c'est-à-dire $f(x_n) = y_n$ pour tout n. Alors, d'après la continuité, $y = f(x)$, donc $(x,y) \in \mathrm{Gr}(f)$.

(b) Par exemple, $f(x) := \dfrac{1}{x}$ quand $x \neq 0$ et $f(0) := 0$, n'est pas continue en 0. Pourtant $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé. En effet, si $\lim_{n\to\infty}(x_n, f(x_n)) = (x,y)$, alors $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sont bornées. Par conséquent, il existe n_0 et $r > 0$ tels que $r \leq |x_n|$ pour $n \geq n_0$, donc $0 < |x|$, ou bien $x_n = f(x_n) = 0$ pour $n \geq n_0$, donc $x = y = 0$. Dans le premier cas $y = f(x)$, car f est continue si $0 < |x|$. De toute façon, $(x,y) \in \mathrm{Gr}(f)$.

(c) L'application $x \longmapsto (x, f(x))$ est continue de X dans $X \times Y$, car ses composantes sont continues. Par définition, son image est

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Elle est injective, car si $(x_0, f(x_0)) = (x_1, f(x_1))$, alors $x_0 = x_1$. Enfin, sa fonction réciproque de $h : \mathrm{Gr}(f) \to X$ est continue, car $h((x, f(x))) = x$ pour tout élément $(x, f(x))$ de $\mathrm{Gr}(f)$.

III. Espaces topologiques

Solutions (exercices des pages 70-75)

Exercice III.1. *Si X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *f est continue,*

(b) $\mathrm{cl}\, f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}\, B)$ *pour tout* $B \subset Y$,

(c) $f(\mathrm{cl}\, A) \subset \mathrm{cl}\, f(A)$ *pour tout* $A \subset X$.

Solution. (a) $\Longrightarrow$ (b) : Puisque f est continue et $\mathrm{cl}\, B$ est un fermé, $f^{-1}(\mathrm{cl}\, B)$ est un fermé incluant $f^{-1}(B)$. Or $\mathrm{cl}\, f^{-1}(B)$ est le plus petit fermé qui inclut $f^{-1}(B)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Si F est une partie fermée de Y, alors $\mathrm{cl}\, F \subset F$, donc d'après (b) $\mathrm{cl}\, f^{-1}(F) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}\, F) \subset f^{-1}(F)$, ce qui montre que $f^{-1}(F)$ est fermée.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Si $B := f(A)$, alors (b) implique

$$f^{-1}(\mathrm{cl}\, f(A)) \supset \mathrm{cl}\, f^{-1}(f(A)) \supset \mathrm{cl}\, A$$

(Voir l'exercice I.4). En appliquant f à cette inclusion, on obtient (c).

(c) $\Longrightarrow$ (b) : En posant $A := f^{-1}(B)$, nous obtenons $f(\mathrm{cl}\, f^{-1}(B)) \subset \mathrm{cl}\, f(f^{-1}(B)) \subset \mathrm{cl}\, B$. Appliquons f^{-1} à cette inclusion :

$$\mathrm{cl}\, f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(\mathrm{cl}\, f^{-1}(B))) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}\, B).$$

Exercice III.2. *Montrer que la relation diagonale I_Y est fermée dans $Y \times Y$ si et seulement si Y est séparé.*

Solution. Si $(y_0, y_1) \notin I_Y$, alors $y_0 \neq y_1$ et, comme Y est séparé, il existe deux ouverts O_0, O_1 tels que $y_0 \in O_0, y_1 \in O_1$ et $O_0 \cap O_1 = \varnothing$, c'est-à-dire $(O_0 \times O_1) \cap I_Y = \varnothing$. Réciproquement, si Y n'est pas séparé, alors il existe deux éléments distincts y_0, y_1 de Y tels que $O_0 \cap O_1 \neq \varnothing$ pour tous les ouverts O_0, O_1 tels que $y_0 \in O_0, y_1 \in O_1$. Ainsi $(y_0, y_1) \notin I_Y$, mais $(O_0 \times O_1) \cap I_Y \neq \varnothing$, donc $(y_0, y_1) \in \mathrm{cl}\, I_Y$.

Exercice III.3. *Soit X, Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que*

(a) *si Y est séparé, alors le graphe* $\mathrm{Gr}(f)$ *de f est fermé,*

(b) *il existe une application continue, dont le graphe n'est pas fermé,*

(c) *si f est continue, alors* $\mathrm{Gr}(f)$ *est homéomorphe à X.*

Solution. (a) Si $(x, y) \notin \mathrm{Gr}(f)$, alors $y \neq f(x)$, donc il existe deux ouverts disjoints O, P tels que $y \in O$ et $f(x) \in P$. Puisque f est continue, $f^{-1}(P)$ est un ouvert contenant x. Donc $f^{-1}(P) \times O$ est un voisinage ouvert de (x, y) et disjoint de $\mathrm{Gr}(f)$. En effet, si $(v,w) \in f^{-1}(P) \times O$, alors $f(v) \in P$ et $w \in O$, donc $w \neq f(v)$.

(b) Par exemple, si $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ est l'identité, la topologie du domaine est discrète et celle de l'image est $\$$ de Sierpiński (Voir l'exemple III.3.3). Toute application de domaine discret est continue. D'autre part, $\mathrm{Gr}(f) = \{(0,0),(1,1)\}$ et puisque $\{0,1\}$ est le seul voisinage de 0 pour $\$$, le seul voisinage de $(1,0)$ pour la topologie produit $\iota \times \$$ est $\{1\} \times \{0,1\}$. Or $(\{1\} \times \{0,1\}) \cap \mathrm{Gr}(f) \neq \varnothing$, donc $(1,0) \in \mathrm{cl}\,\mathrm{Gr}(f) \setminus \mathrm{Gr}(f)$.

(c) Le même raisonnement comme dans le cas métrique.

Exercice III.4. Montrer que

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ *est continue en* x_0 *si et seulement si* f *est semi-continue inférieurement et supérieurement en* x_0,

(b) f *semi-continue inférieurement si et seulement si* $\mathrm{epi}\, f$ *est fermée,*

(c) f *semi-continue inférieurement si et seulement si* $\{x : f(x) \leq r\}$ *est fermée pour tout* $r \in \mathbb{R}$,

(d) *si* $\mathcal{F}$ *est une famille de fonctions semi-continues inférieurement, alors* $\sup \mathcal{F}$ *est semi-continue inférieurement.*

Solution. (a) D'après la définition, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si pour tout $r < f(x_0)$ il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $r < f(x)$ pour tout $x \in V$; est semi-continue supérieurement en x_0 si et seulement si pour tout $s > f(x_0)$ il existe $W \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $s > f(x)$ pour tout $x \in W$. Ainsi $r < f(x) < s$ pour tout $x \in V \cap W$, c'est-à-dire f est continue en x_0.

(b) Soit f semi-continue inférieurement et $(x,r) \notin \mathrm{epi}\, f$, c'est-à-dire $r < f(x)$. Selon la définition, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $r < \inf_{v \in V} f(v)$, ainsi $(V \times \,]-\infty, r[\,) \cap \mathrm{epi}\, f = \varnothing$, donc $\mathrm{epi}\, f$ est fermé.

(c) Car $\{x : f(x) \leq r\} = \mathrm{epi}\, f \cap (X \times \,]-\infty, r]\,)$, l'intersection de deux fermés. Pour montrer la réciproque, soit $r < f(x_0)$, donc $x_0 \notin \{x : f(x) \leq r\}$ et comme $\{x : f(x) \leq r\}$ est fermée, il existe un voisinage V de x_0 tel que $V \cap \{x : f(x) \leq r\} = \varnothing$, ainsi $r \leq \inf_{x \in V} f(x)$, donc $r \leq \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf_{x \in V} f(x)$, ce qui prouve (III.15).

(d) Si $r < \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x_0)$ alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $r < f(x_0)$, donc il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $r < f(x) < \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$ pour tout $x \in V$.

Exercice III.5. *Montrer que toute partie finie d'un espace topologique séparé est fermée.*

Solution. Si X est séparé, alors $\{x\}$ est fermé pour tout $x \in X$, car *a fortiori* pour tout $y \notin \{x\}$ il existe un ouvert O tel que $y \in O$ et $x \notin O$. Par conséquent, toute partie finie (union finie de fermés) est fermée.

Exercice III.6. *Montrer que toute topologie plus fine qu'une topologie séparée est séparée.*

Solution. Si τ est séparée et $\xi \geq \tau$, alors ξ est séparée, car tout τ-fermé est ξ-fermé.

Exercice III.7. *Dénombrer toutes les topologies sur* $\{0,1\}$. *Lesquelles sont séparées ?*

Solution. On liste les ouverts pour ces topologies :
la topologie chaotique $\{\varnothing, \{0,1\}\}$,
les topologies de Sierpiński $\{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\}$ et $\{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}$
et la topologie discrète $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Il n'y en a pas plus, car $\{0,1\}$ a 4 parties, et chaque famille des ouverts pour une topologie sur $\{0,1\}$ contient $\varnothing$ et $\{0,1\}$. Seulement la topologie discrète est séparée.

Exercice III.8. *Soit X un espace topologique et $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie cofinie autour de ∞. Alors la suite $(x_n)_n$ converge vers x dans X si et seulement si $h : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$ définie par $h(n) = x_n$ et $h(\infty) = x$, est continue.*

Solution. Effectivement, h est continue si et seulement si elle continue en ∞ (car tous les autres points sont isolés), c'est-à-dire si $h^{-1}(V)$ est cofinie pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, ce qui veut dire que $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin V\}$ est fini.

Exercice III.9. *Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique discret X. Alors* $\mathrm{adh}_{n\to\infty} x_n = \ker_{n\to\infty} x_n$.

Solution. Si ι est la topologie discrète sur X, alors $\mathrm{cl}_\iota A = A$ pour tout $A \subset X$. Par conséquent,

$$\mathrm{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_\iota \{x_k : k \geq n\} = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \{x_k : k \geq n\} = \ker_{n\to\infty} x_n.$$

Exercice III.10. *Montrer que pour tout x et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \in \mathcal{V}(w)$ pour chaque $w \in W$.*

Solution. Par définition, si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe un ouvert W tel que $x \in W \subset V$. Si $w \in W$, alors $W \in \mathcal{V}(w)$ (en particulier, $W \in \mathcal{V}(x)$), donc $V \in \mathcal{V}(w)$.

Exercice III.11. *Montrer que* $\mathrm{cl}\,(A_0 \cup A_1) = \mathrm{cl}\,A_0 \cup \mathrm{cl}\,A_1$.

Solution. Comme $A_0 \subset A_0 \cup A_1$ et $A_1 \subset A_0 \cup A_1$ alors $\mathrm{cl}\,A_0 \subset \mathrm{cl}\,(A_0 \cup A_1)$ et $\mathrm{cl}\,A_1 \subset \mathrm{cl}\,(A_0 \cup A_1)$. Réciproquement,

$$x \notin \mathrm{cl}\,A_0 \cup \mathrm{cl}\,A_1 \iff x \in \mathrm{int}\,A_0^c \cup \mathrm{int}\,A_1^c \iff A_0^c, A_1^c \in \mathcal{V}(x)$$
$$\implies A_0^c \cap A_1^c \in \mathcal{V}(x) \iff x \in \mathrm{int}\,(A_0^c \cap A_1^c) \iff x \notin \mathrm{cl}\,(A_0 \cup A_1).$$

Exercice III.12. *Montrer que*

(a) *si $\mathcal{F}$ est une famille discrète, alors*

$$\mathrm{cl}(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F) = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F.$$

(b) *si $(x_n)_n$ est une suite injective dans un espace métrique telle que la famille $\{\{x_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ est discrète, alors il existe une suite $(r_n)_n$ de nombres strictement positifs telle que $B^{\leq}(x_n, r_n)$ sont disjointes deux à deux, et $\{\overline{B}(x_n, r_n) : n \in N\}$ est discrète.*

Solution. (a) Bien sûr, $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F \subset \mathrm{cl}(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F)$ est toujours vrai. Si $x \in \mathrm{cl}(\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F)$, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $F_V \in \mathcal{F}$ tel que $V \cap F_V \neq \varnothing$. Comme $\mathcal{F}$ est discrète, il existe $V_0 \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V_0 \cap F = \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ et $F \neq F_{V_0}$. Alors $V \cap V_0 \cap F_{V_0} \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{N}(x)$, donc $x \in \mathrm{cl}\, F_{V_0} \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F$.

(b) Procédons par récurrence. Comme $F_1 = \{x_l : l \geq 1\}$ est fermé et $x_0 \notin F_1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $B^{\leq}(x_0, r_0) \cap F_1 = \varnothing$. S'il existe des nombres strictement positifs $r_0, r_1, \ldots, r_n$ tels que F_{n+1} et $B^{\leq}(x_k, r_k)$ sont deux à deux disjoints pour $k = 0, \ldots, n$, alors $x_{n+1} \notin F_n \cup \bigcup_{k=0}^{n} B^{\leq}(x_k, r_k)$. Comme cet ensemble est fermé, il existe $r_{n+1} > 0$ tel que $B^{\leq}(x_{n+1}, r_{n+1})$ est disjoint de $F_n \cup \bigcup_{k=0}^{n} B^{\leq}(x_k, r_k)$.

En remplaçant r_k par $\min(r_k, \frac{1}{k})$ s'il en était besoin, nous pouvons demander que $(r_k)_k$ tend vers 0. Observons que si $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, alors l'ensemble

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B^{\leq}(x_k, r_k)$$

est fermé, ce qui implique que $\{B^{\leq}(x_k, r_k) : k \in \mathbb{N}\}$ est discrète. Si $(y_l)_l$ est une suite de ses éléments telle que $\lim_{l\to\infty} y_l = y$, alors pour tout l il existe k_l tel que $y_l \in B^{\leq}(x_{k_l}, r_{k_l})$. Si $\{l : y_l \in B^{\leq}(x_{k_l}, r_{k_l})\}$ est infini, alors $y \in B^{\leq}(x_{k_l}, r_{k_l})$. Sinon $\lim_{l\to\infty} k_l = \infty$ et $\lim_{l\to\infty} d(y_l, x_{k_l}) = 0$, ce qui contredit la convergence de $(y_l)_l$, car $\mathrm{adh}_{n\to\infty}\, x_n = \varnothing$.

Exercice III.13. *Montrer que*

(a) *si X un espace métrisable, alors $\chi(x) \leq \aleph_0$ pour tout $x \in X$,*

(b) *si $\chi(x) < \aleph_0$, alors $\chi(x) = 1$,*

(c) *si le caractère de x est fini et X est séparée, alors $\{\{x\}\}$ est une base de x,*

(d) *si* $\mathrm{card}\, X < \infty$ *et X est séparée, alors X est discret.*

Solution. (a) Si d est une métrique compatible, alors $\{B_d(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}_1\}$ est une base de voisinages de x.

(b) Si $\mathcal{B}$ est une base finie de voisinages de x, alors $B_0 := \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B$ est un voisinage de x, et si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B_0 \subset B \subset V$, donc $\{B_0\}$ est une base de $\mathcal{V}(x)$.

(c) Si $\chi(x)$ est fini, alors $\chi(x) = 1$. Soit $\{B\}$ est une base de $\mathcal{V}(x)$ et $y \in B$ tel que $y \neq x$. Comme X est séparée, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $y \notin V$. Mais $B \cap V \in \mathcal{V}(x)$ et $B \subset B \cap V$, puisque $\{B\}$ est une base de $\mathcal{V}(x)$, donc $y \in B \subset V$, ce qui est une contradiction.

(d) Une conséquence immédiate de (c).

Exercice III.14. *Montrer que si A_0, A_1 sont deux fermés disjoints dans un espace métrique, alors il existe deux ouverts O_0, O_1 disjoints tels que $A_0 \subset O_0$ et $A_1 \subset O_1$.*

Solution. On peut utiliser la proposition III.7.3. Une preuve alternative : Pour tout $x \in A_0$ soit $r(x) > 0$ tel que $2r(x) = d(x, A_1)$.

Si $O_0 := \bigcup_{x \in A_0} B(x, r(x))$, alors $\operatorname{cl} O_0 \cap A_1 = \varnothing$. Sinon il existe $y \in A_1$ et deux suites $(x_n)_n$ dans A_0 et $(y_n)_n$ telle que $d(x_n, y_n) < \min(r(x_n), \frac{1}{n})$ pour tout n et $\lim_n y_n = y$. Par conséquent, $\lim_n x_n = y$ et, puisque A_0 est fermé, $y \in A_0 \cap A_1$, contrairement à l'hypothèse. De la même façon, on montre qu'il existe un ouvert O_1 incluant A_1 et tel que $\operatorname{cl} O_1 \cap \operatorname{cl} O_0 = \varnothing$.

Exercice III.15. *Montrer que la topologie cofinie autour de x_∞ sur un ensemble infini X est*

(a) *séparée,*

(b) *normale,*

(c) *de caractère égal à* $\operatorname{card} X$.

Solution. (a) Soit deux éléments distincts v et w de X. Au moins un d'eux (par exemple, v) est différent de x_∞. Alors $\{v\}$ est un voisinage de v et $X \setminus \{v\}$ est une partie cofinie contenant w, donc voisinage de w.

(b) Soit F_0, F_1 deux fermés tels que $F_0 \cap F_1 = \varnothing$. Si $x_\infty \notin F_0$, alors F_0 est également ouvert. Donc F_0 et $X \setminus F_0$ sont deux ouverts disjoints incluant F_0 et F_1, respectivement. Si $x_\infty \in F_0$, alors $x_\infty \notin F_1$, donc on ramène le raisonnement au cas précédent, en échangeant les rôles de F_0 et F_1 (Une situation plus générale est discutée dans l'exercice III.20 plus loin).

(c) Le caractère de tout $x \neq x_\infty$ est 1, tandis que le caractère de x_∞ est égal à la cardinalité de X. Effectivement, $\chi(x_\infty) \leq \operatorname{card} X$ puisque la cardinalité de l'ensemble des parties finies de X est égale à $\operatorname{card} X$. De l'autre côté, s'il existait une base $\mathcal{B}$ de x_∞ de cardinalité $\lambda < \operatorname{card} X$, alors la cardinalité de $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} (X \setminus B) = X \setminus \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ est inférieur à $\operatorname{card} X$, en particulier $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ est infini, donc cette intersection contient $x \neq x_\infty$. Par conséquent, $X \setminus \{x\}$ est un voisinage de x_∞, mais aucun $B \in \mathcal{B}$ n'est inclus dans $X \setminus \{x\}$.

Exercice III.16. *Soit X, Y deux ensembles non dénombrables avec la topologie cofinie autour de x_∞ sur X et la topologie codénombrable autour de y_∞ sur Y. Montrer que*

(a) *si $g : Y \to X$ et $g(y_\infty) \neq x_\infty$, alors g est continue si et seulement si $\{y \in Y : g(y) \neq g(y_\infty)\}$ est dénombrable,*

(b) *si $g : Y \to X$ et $g(y_\infty) = x_\infty$, alors g est continue si et seulement si $g^{-1}(y)$ est dénombrable pour tout $y \neq y_\infty$.*

Solution. (a) Si $g(y_\infty) = x \neq x_\infty$, alors $g^{-1}(x)$ est un ouvert contenant y_∞, donc $\{y \in Y : g(y) \neq g(y_\infty)\}$ est dénombrable. C'est une condition suffisante de continuité, car y est isolé si $y \neq y_\infty$.

(b) Soit g continue. Comme $X \setminus \{x\} \in \mathcal{V}(x_\infty)$ pour tout $x \neq x_\infty$, alors $g^{-1}(x)$ est dénombrable. Réciproquement, si $g^{-1}(x)$ est dénombrable pour tout $x \neq x_\infty$, et $V \in \mathcal{V}(x_\infty)$, alors $Y \setminus V$ est finie, donc $g^{-1}(Y \setminus V)$ est dénombrable, ainsi $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(y_\infty)$, donc g est continue.

Exercice III.17. *Soit X un ensemble non dénombrables muni de la topologie codénombrable autour de $x_\infty \in X$. Montrer que toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est constante sur une partie codénombrable de X.*

Solution. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe un voisinage V_n de x_∞ tel que $|f(x) - f(x_\infty)| < \frac{1}{n}$. Ainsi $f(x) = f(x_\infty)$ pour tout $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} V_n$. Comme $X \setminus V_n$ est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} V_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1}(X \setminus V_n)$ est dénombrable.

Exercice III.18. *Soit X, Y deux ensembles non dénombrables munis de la topologie codénombrable autour de $x_\infty \in X$ et $y_\infty \in Y$. Soit $f : X \to Y$. Montrer que*

(a) *si $f(x_\infty) \neq y_\infty$, alors f est continue si et seulement si*
$$\{x \in X : f(x) \neq f(x_\infty)\}$$
est dénombrable,

(b) *si $f(x_\infty) = y_\infty$, alors f est continue si et seulement si $f^{-1}(y)$ est dénombrable pour tout $y \neq y_\infty$.*

Solution. (a) Si f est continue et $f(x_\infty) = y \neq y_\infty$, alors comme $\{y\}$ est un ouvert, $f^{-1}(y)$ est un ouvert contenant x_∞, donc une partie codénombrable de X et, bien sûr, f constante sur $f^{-1}(y)$. Cette condition est suffisante pour que f soit continue, car $X \setminus f^{-1}(y)$ est composé de points isolés.

(b) Si f est continue, $f(x_\infty) = y_\infty$ et si $y \neq y_\infty$, alors $Y \setminus \{y\} \in \mathcal{V}(y_\infty)$, donc $f^{-1}(Y \setminus \{y\}) \in \mathcal{V}(x_\infty)$, donc $f^{-1}(Y \setminus \{y\}) = X \setminus f^{-1}(y)$ est codénombrable, et par conséquent $f^{-1}(y)$ est dénombrable.

Réciproquement, si $f(x_\infty) = y_\infty$ et $f^{-1}(y)$ est dénombrable pour tout $y \neq y_\infty$, alors il suffit de prouver que f est continue en x_∞, car tous les autres points de X sont isolés. Si $V \in \mathcal{V}(y_\infty)$, alors $Y \setminus V$ est dénombrable. D'après l'hypothèse, $f^{-1}(y)$ est dénombrable pour tout $y \in Y \setminus V$, donc $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ est dénombrable, ainsi $f^{-1}(V)$ est codénombrable et $x_\infty \in f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_\infty)$.

Exercice III.19. *Soit X, Y deux ensembles non dénombrables avec la topologie cofinie autour x_∞ sur X et la topologie codénombrable autour y_∞ sur Y. Montrer que $f : X \to Y$ est continue si et seulement si*

$$\{x \in X : f(x) \neq f(x_\infty)\}$$

est fini.

Solution. Soit f continue. Si $f(x_\infty) = y \neq y_\infty$, alors $f^{-1}(y) \in \mathcal{V}(x_\infty)$, c'est-à-dire $\{x \in X : f(x) \neq f(x_\infty)\}$ est fini.

Si $f(x_\infty) = y_\infty$, mais $\{x \in X : f(x) \neq f(x_\infty)\}$ n'est pas fini, alors il existe une suite libre $(x_n)_n$ telle que $f(x_n) \neq y_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, toute suite libre converge vers x_∞, donc $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_\infty) = y_\infty$, donc $\{n \in \mathbb{N} : f(x_n) = y_\infty\}$ est cofinie, ce qui est une contradiction.

Exercice III.20. *Montrer que toute topologie primale est normale.*

Solution. Si une topologie primale n'est pas discrète, appelons ∞ le point non isolé. Soit A_0, A_1 deux fermés disjoints. Si A est fermé et $\infty \notin A$ alors A^c est un voisinage de ∞ et A est aussi ouvert en tant qu'union de points isolés. Donc si $\infty \notin A_0$ alors A_0^c est un voisinage ouvert de ∞, A_0 est ouvert et $A_1 \subset A_0^c$, donc A_0 et A_0^c sont deux ouverts disjoints incluant A_0 et A_1 respectivement. Si $\infty \in A_0$ alors $\infty \notin A_1$, donc on se ramène au cas précédent.

Exercice III.21. *Montrer que*

(a) *tout espace métrisable est parfaitement normal,*

(b) *(théorème de Vedenisov) un espace topologique séparé est parfaitement normal si et seulement si tous les ouverts sont fonctionnellement ouverts,*

(c) *un espace est parfaitement normal si et seulement s'il est normal et tout fermé est un G_δ,*

(d) *il existe un espace normal qui n'est pas parfaitement normal.*

Solution. (a) D'après la preuve de la proposition III.7.3.

(b) Soit X parfaitement normal et soit U un ouvert de X. Si $U = X$, alors $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Si $U = \varnothing$, alors $U = \{x \in X : 0(x) > 0\}$. Alors soit U une partie propre de X et soit $u \in U$. Puisque X est séparé, $\{u\}$ est fermé. Ainsi il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $f^{-1}(1) = \{u\}$ et $f^{-1}(0) = \{f = 0\} = X \setminus U$. Bien entendu, $\{f > 0\} = U$.

Réciproquement, assumons la condition et prenons deux parties fermés disjointes F_0, F_1 de X. D'après la condition il existe $f_0, f_1 \in C(X, [0,1])$ telles que $X \setminus F_0 = \{f_0 > 0\}$ et $X \setminus F_1 = \{f_1 > 0\}$. Autrement dit, $F_0 = \{f_0 = 0\}$ et $F_1 = \{f_1 = 0\}$. Soit

$$f(x) := \frac{f_0(x)}{f_0(x) + f_1(x)}.$$

Comme F_0, F_1 sont disjointes, $f_0(x) + f_1(x) > 0$ pour chaque $x \in X$, et ainsi f est bien définie et continue. Si $x \in F_0$ alors $f(x) = 0$, et si $x \in F_1$, alors $f(x) = 1$. Enfin, si $x \notin F_0 \cup F_1$, alors $0 < f_0(x)$ et $0 < f_1(x)$, donc $0 < f(x) < 1$.

(c) Soit X parfaitement normal et F un fermé de X. D'après le théorème de Vedenisov (b), il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $F = \{f = 0\}$. Alors $F = \bigcap_{0<n<\omega}\{f < \frac{1}{n}\}$. Or F est inclus dans l'intersection, car $\{f = 0\} \subset \{f < \frac{1}{n}\}$. D'autre part, si $0 \leq f(x) < \frac{1}{n}$ pour tout n, donc $f(x) = 0$.

(d) Soit X un ensemble non dénombrable muni de la topologie cofinie autour de x_∞. Alors X est normal, car sa topologie est primale. Cependant X n'est pas parfaitement normal, car $\{x_\infty\}$ est fermé mais n'est pas G_δ. En effet, si $\{x_\infty\} = \bigcap_{n<\omega} G_n$, où G_n est ouvert pour tout $n < \omega$, alors $X \setminus G_n$ est finie, donc

$$\bigcup_{n<\omega}(X \setminus G_n) = X \setminus \bigcap_{n<\omega} G_n = X \setminus \{x_\infty\}$$

est dénombrable en contradiction avec l'hypothèse.

Exercice III.22. *Montrer que la topologie (non métrisable) de Sorgenfrey (exemple III.7.8) est parfaitement normale*

Solution. Puisque l'espace de Sorgenfrey est normal, en vertu de l'exercice III. 21 (c), il suffit de montrer que tout ouvert O de l'espace de Sorgenfrey est l'union dénombrable de fermés. Si P est l'intérieur de O pour la topologie usuelle de la droite, alors P est l'union dénombrable d'intervalles (a, b), et tout (a, b) est l'union dénombrable d'intervalles de la forme $[a_n, b)$, où $(a_n)_n$ est une suite décroissante d'éléments de (a, b) telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Tout $[a_n, b)$ est ouvert et fermé pour la topologie de Sorgenfrey. Si $x \in O \setminus P$, alors il existe t_x tel que $[x, t_x) \subset O$. Si $y \in O \setminus P, x \neq y$ et r_y est tel que $[y, r_y) \subset O$, alors $[x, t_x) \cap [y, r_y) = \varnothing$, sinon x ou y appartiendrait à P. En effet, si $[x, t_x) \cap [y, r_y) \neq \varnothing$ et, par exemple, $x < y$, alors $(x, r_y) \subset O$, donc $y \in (x, r_y) \subset P$, ce qui est une contradiction. Puisque tout $[x, t_x)$ contient un nombre rationnel, $O \setminus P$ est dénombrable.

Exercice III.23. *Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$. Montrer que*

(a) *Si ξ est une topologie sur X, alors il existe sur Y la topologie la plus fine (notée $f\xi$) telle que f est continue de ξ vers $f\xi$.*

(b) *Si τ est une topologie sur Y, alors il existe sur X la topologie la moins fine (notée $f^{-1}\tau$) telle que f est continue de $f^{-1}\tau$. vers τ.*

Solution. (a) Soit $\xi \in \mathcal{T}(X)$ et

$$\mathcal{Y} := \{\tau \in \mathcal{T}(Y) : f \in C(\xi, \tau)\},$$

où $\mathcal{T}(Y)$ désigne l'ensemble des topologies sur Y. L'ensemble $\mathcal{Y}$ n'est pas vide, car la topologie antidiscrète o_Y y appartient. Si O est un ouvert de $\bigvee \mathcal{Y}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in \mathcal{T}$ et $O_1 \in \mathcal{O}_{\tau_1}, O_2 \in \mathcal{O}_{\tau_2}, \ldots, O_n \in \mathcal{O}_{\tau_n}$ tels que $O = O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n$. Donc $f^{-1}(O_k) \in \mathcal{O}_\xi$, et, par conséquent, $f^{-1}(O) = f^{-1}(\bigcap_{k=1}^n O_k) = \bigcap_{k=1}^n f^{-1}(O_k) \in \mathcal{O}_\xi$. Donc $\bigvee \mathcal{Y} \in \mathcal{Y}$.

(b) Soit $\tau \in \mathcal{T}(Y)$ et $\mathcal{X} := \{\xi \in \mathcal{T}(X) : f \in C(\xi, \tau)\}$. L'ensemble $\mathcal{X}$ n'est pas vide, car la topologie discrète ι_X y appartient. Par définition, $f^{-1}(O) \in$

$\mathcal{O}_\xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{X}$ et $O \in \mathcal{O}_\tau$, donc $f^{-1}(O) \in \bigcap_{\xi\in\mathcal{X}} \mathcal{O}_\xi$, c'est-à-dire $\bigwedge \mathcal{X} \in \mathcal{X}$.

Exercice III.24. *Montrer que*

(a) *Une application $f : X \to \{0,1\}$ est continue de τ dans \$ si et seulement si $\{x \in X : f(x) = 1\}$ est τ-ouvert.*

(b) *Chaque topologie τ vérifie $\tau = \bigvee_{f\in C(\tau,\$)} f^{-1}\$$.*

Solution. (a) Soit $f \in C(\tau, \$)$. Puisque $\{1\}$ est \$-ouvert,

$$f^{-1}(1) = \{x \in X : f(x) = 1\}$$

est τ-ouvert. Cette condition est suffisante, puisque $\{1\}$ est l'unique partie \$-ouverte propre de $\{0,1\}$.

(b) Bien sûr, $\tau \geq f^{-1}\$$ pour chaque $f \in C(\tau, \$)$, donc $\tau \geq \bigvee_{f\in C(\tau,\$)} f^{-1}\$$. D'autre part, si O est τ-ouvert, alors $\chi_O \in C(\tau, \$)$ et $\chi_O^{-1}(1) = O$, donc $\tau \leq \bigvee_{f\in C(\tau,\$)} f^{-1}\$$.

Exercice III.25. *Soit X un ensemble infini. Pour tout $x \in X$ soit τ_x la topologie cofinie autour de x. Trouver $\bigvee_{x\in X} \tau_x$* et *$\bigwedge_{x\in X} \tau_x$.*

Solution. $\bigvee_{x\in X} \tau_x = \iota$, car pour tout $y \in X$, il existe $x \in X \setminus \{y\}$, donc $\{y\} \in \mathcal{O}_{\tau_x} \subset \bigcup_{v\in X} \mathcal{O}_{\tau_v}$. D'autre part, $\bigwedge_{x\in X} \tau_x$ est la *topologie cofinie* de X, car $O \in \mathcal{O}_{\tau_x}$ si $X \setminus O$ est fini pourvu que $x \in O$. Donc $O \in \bigcap_{x\in X} \mathcal{O}_{\tau_x}$ si et seulement si $X \setminus O$ est fini.

Exercice III.26. *Montrer que*

(a) *toute union de parties sans point isolé est sans point isolé.*

(b) *la fermeture de toute partie sans point isolé est sans point isolé.*

(c) *pour X tout espace métrique il existe une décomposition $X = X_\infty \cup X_1$, où X_∞ est parfait et X_1 est clairsemé.*

(d) *toute partie parfaite de la droite réelle a la cardinalité au moins $\mathfrak{c}$.*

Solution. (a) Soit $\mathcal{A}$ une famille de parties sans point isolé d'un espace topologique X. Si $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $V \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$. *A fortiori* $V \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \setminus \{x\} \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$.

(b) Si A n'a pas de point isolé et $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$, alors $V \cap A \neq \varnothing$ pour tout voisinage V de x et, comme $x \notin A$, aussi $V \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$.

(c) Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties sans point isolé de X. Selon (a), $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ est sans point isolé et, selon (b), la partie $X_\infty := \operatorname{cl}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A)$ est parfaite, donc $X_\infty \in \mathcal{A}$ et $A \subset X_\infty$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. En conséquence, si $B \neq \varnothing$ et $B \cap X_\infty = \varnothing$, alors $B \notin \mathcal{A}$, ce qui prouve que $X_1 := X \setminus X_\infty$ est clairsemée.

(d) Soit A une partie parfaite de $\mathbb{R}$. Nous allons associer à toute suite finie (de longueur non nulle) s à valeurs dans $\{0,1\}$ un élément r_s de A. Si s est une suite de longueur $n \in \mathbb{N}_1$, alors $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \prod_{k=1}^{n} \{0,1\}$. On note $s \frown 0 := (s_1, \ldots, s_n, 0)$ et $s \frown 1 := (s_1, \ldots, s_n, 1)$. Puisque $A \neq \varnothing$, il existe $r_{(0)} \in A$ et, comme $r_{(0)}$ n'est pas isolé dans A, soit $r_{(1)} \in A$ tel que $r_{(0)} \neq r_{(1)}$. Si nous avons déjà défini $\{r_s : s \in \prod_{k=1}^n \{0,1\}\} \subset A$ tels que $r_s \neq r_t$ si $s \neq t$, alors soit

$$\varepsilon_n := \tfrac{1}{4} \min\{|r_s - r_t| : s \neq t \in \prod\nolimits_{k=1}^{n} \{0,1\}\}.$$

Puisque r_s n'est pas isolé dans A pour tout $s \in \prod_{k=1}^n \{0,1\}$, il existe $r_{s\frown 1} \neq r_s$ tel que $r_{s\frown 1} \in A \cap B(r_s, \varepsilon_n)$. On pose $r_{s\frown 0} := r_s$. Pour $f \in \prod_{k=1}^\infty \{0,1\}$, soit $f_n := (f(1), \ldots, f(n)) \in \prod_{k=1}^n \{0,1\}$. Donc $(r_{f_n})_n$ est une suite de Cauchy d'éléments de A. Soit $F(f) := \lim_{n\to\infty} (r_{f_n})_n$. Ainsi $|F(f) - r_{f(n)}| \leq \frac{4}{3}\varepsilon_n$. Si $f_0 \neq f_1$, alors il existe le plus petit n tel que $f_0(n) \neq f_1(n)$. Donc

$$|F(f_0) - F(f_1)| \geq \varepsilon_n(4 - 2\tfrac{4}{3}) > \varepsilon_n > 0,$$

ce qui montre que $F : \prod_{k=1}^\infty \{0,1\} \to A$ est injective, donc $\mathfrak{c} \leq \operatorname{card} A$.

Exercice III.27. *Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Montrer que*

(a) *si* $\operatorname{card} X > 1$, *alors la famille $\mathcal{B}$ des intervalles*

(base) $\quad \{x \in X : x < b\}, \{x \in X : a < x < b\}, \{x \in X : a < x\},$

où $a, b \in X$ et $a < b$, est une base d'ouverts d'une topologie,

(b) *si D est une partie discrète de X, alors il existe une famille disjointe $\{B_x : x \in D\} \subset \mathcal{B}$,*

(c) *tout espace totalement ordonné est normal,*

(d) *tout espace dénombrable, totalement ordonné, dense et non borné est homéomorphe à $\mathbb{Q}$, donc à $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$.*

Solution. (a) Soit $x \in X$. S'il existe $b > x$, alors $x \in \{w \in X : w < b\} \in \mathcal{B}$. S'il n'existe pas $b > x$, alors il existe $a < x$, car $\operatorname{card} X > 1$. Ainsi $x \in \{w \in X : a < w\} \in \mathcal{B}$. D'autre part, l'intersection de deux ensembles de la forme (base) est de la même forme.

(b) Soit $x \in D$. Comme D est discrète, pour tout $x \in D$ il existe un élément B_x de $\mathcal{B}$ tel que $B_x \cap D = \{x\}$. Alors

$$a_x := \sup\{w \in D : w < x\} < x < \inf\{w \in D : x < w\} =: b_x.$$

Ainsi $x \in B_x := \{w \in X : a_x < w < b_x\} \in \mathcal{B}$ et si $x_0 < x_1$, alors $x_0 < b_{x_0} \leq x_1$ et $x_0 \leq a_{x_1} < x_1$, donc $b_{x_0} \leq a_{x_1}$ et ainsi $B_{x_0} \cap B_{x_1} = \varnothing$.

(c) Soit F_0, F_1 deux fermés disjoints. Soit

$$\begin{aligned} W_0 &:= \bigcup\{]a,b[: a,b \in F_0,]a,b[\cap F_1 = \varnothing\}, \\ W_1 &:= \bigcup\{]a,b[: a,b \in F_1,]a,b[\cap F_0 = \varnothing\}. \end{aligned}$$

Alors $F_0 \cap \operatorname{cl} W_1 = \varnothing = \operatorname{cl} W_0 \cap F_1$. En particulier, si $a, b \in F_1$ et $]a,b[\cap F_0 = \varnothing$, alors $[a,b] \subset \operatorname{cl} W_1$ et

$$H_1 := \bigcup\{[a,b] : a,b \in F_1, [a,b] \cap F_0 = \varnothing\} \cap F_0 = \varnothing.$$

Si maintenant $x \in \operatorname{cl} H_1 \setminus H_1$, alors ou $x = \inf\{w \in H_1 : x < w\}$ ou bien $x = \sup\{w \in H_1 : w < x\}$.

Dans le premier cas, pour tout $w \in H_1$ il existe $a_w, b_w \in F_1$ tels que $x < w$ et $a_w < w < b_w$. Mais $]a_w, b_w[\cap F_0 = \varnothing$, donc $x < a_w < w$ pour tout $w \in H_1$ tel que $x < w$, donc $x = \inf\{a_w : w \in H_1, x < w\} \in F_1$, car F_1 est fermé, une contradiction.

Observons maintenant que $(F_0 \setminus W_0) \cup (F_1 \setminus W_1)$ est discret. En effet, si $x \in F_0 \setminus W_0$, alors il existe $a < x < b$ tels que $]a, b[\cap F_1 = \varnothing$ et $a \notin F_0$ ou $b \notin F_0$, donc il existe $a < x < b$ tels que $]a, b[\cap F_0 = \{x\}$. Selon (b) il existe une famille disjointe d'ouverts $\{B_x : x \in (F_0 \setminus W_0) \cup (F_1 \setminus W_1)\}$. Ainsi

$$\bigcup_{x \in F_0 \setminus W_0} B_x \cup W_0 \text{ et } \bigcup_{x \in F_1 \setminus W_1} B_x \cup W_1$$

sont deux ouverts disjoints incluant respectivement F_0 et F_1.

(d) Soit $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un tel espace et $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, où $q_n \neq q_k$ si $n \neq k$. Nous allons construire un isomorphisme d'ordre $f : \mathbb{Q} \to X$ qui est également un homéomorphisme, car la topologie est déterminée par l'ordre.

Soit $f(q_0) := x_0$ et soit $f^{-1}(x_1) \in \mathbb{Q}$ tel que f préserve l'ordre. Supposons que f est déjà définie et préserve l'ordre pour $k < n$ et pas encore pour q_n. Alors il existe $f(q_n) \in X$ tel que f persiste à préserver l'ordre, car X est dense et non borné. Si x_n n'est pas encore une valeur de f, alors soit $f^{-1}(x_n) \in \mathbb{Q}$ tel que f persiste à préserver l'ordre, ce qui est toujours possible, car $\mathbb{Q}$ est dense et non borné. L'application f ainsi construite par récurrence est un isomorphisme d'ordre.

Exercice III.28. *Montrer que*

(a) *tout sous-espace d'un espace topologique régulier est régulier,*

(b) *tout produit d'espaces topologiques réguliers est régulier,*

(c) *(!) il existe un espace topologique normal X tel que $X \times X$ n'est pas normal (Voir l'exercice VI.14),*

(d) *un sous-espace d'un espace topologique normal n'est pas forcément normal.*

Solution. (a) Soit X_j régulier pour tout $j \in J, x \in \prod_{j \in J} X_j$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors il existe une partie finie F de J et $V_j \in \mathcal{V}(\pi_j(x))$ pour $j \in F$ tels que $\bigcap_{j \in F} \pi_j^{-1}(V_j) \subset V$. Puisque tout X_j est régulier, pour tout $j \in F$ il existe $W_j \in \mathcal{V}(\pi_j(x))$ tels que $\operatorname{cl} W_j = W_j \subset V_j$. donc $\bigcap_{j \in F} \pi_j^{-1}(W_j)$ est un voisinage fermé de x inclus dans V.

(b) Soit Y régulier et $X \subset Y$. Soit A une partie fermée de X et $x_0 \in X \setminus A$. Par définition de sous-espace, il existe un fermé H de Y tel que $A = H \cap X$. Il s'ensuit que $x_0 \notin H$ et puisque Y est régulier, il existe deux ouverts disjoints O_0, O_1 de Y tels que $x_0 \in O_0$ et $H \subset O_1$. Par conséquent, $O_0 \cap X, O_1 \cap X$ sont deux ouverts disjoints de X tels que $x_0 \in O_0 \cap X$ et $A \subset H \cap X \subset O_1 \cap X$.

(d) Dans l'exercice A.8, l'espace $(\omega_0 + 1) \times (\omega_1 + 1)$ est compact, donc normal, mais $(\omega_0 + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus \{(\omega_0, \omega_1)\}$ n'est pas normal.

Exercice III.29. *Soit* $(X_n)_n$ *une suite d'ensembles dénombrables infinis et* $(x_n)_n$ *telle que* $x_n \in X_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_1$. *On suppose que* $X_n \cap X_m = \varnothing$ *pour* $n \neq m$ *et soit* $x_\infty \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. *On considère sur chaque* X_n *la topologie* τ_n *cofinie autour de* x_n.

(a) *Est-ce que* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ *est métrisable sur* $X := \{x_\infty\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} X_n$ *? Si oui, définir une de ses métriques.*

(b) *Soit* $f : X \to X$ *telle que* $f(x) := x$ *si* $x \neq x_n$ *et* $f(x_n) := x_0$ *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*). Soit* $f\tau$ *la topologie quotient. Est-ce que c'est une topologie métrisable ?*

Solution. (a) Selon l'exemple III.3.5, tout ensemble dénombrable avec la topologie cofinie autour d'un point est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$, donc métrisable. Si d_n est une métrique bornée par 1 de X_n, où $X_0 := \{x_\infty\}$, alors $d(x,y) := d_n(x,y)$ si $x, y \in X_n$ et $d(x,y) := 1$ sinon est une métrique compatible avec $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$.

(b) Non, car c'est la topologie de l'éventail séquentiel.

Exercice III.30. *Montrer que*

(a) *toute application surjective continue ouverte est quotient,*

(b) *toute application surjective continue fermée est quotient,*

(c) *il existe une application quotient qui n'est ni ouverte ni fermée.*

Solution. (a) Soit $f : X \to Y$ une application surjective continue ouverte et D une partie de Y telle que $f^{-1}(D)$ est ouverte. Donc $f(f^{-1}(D)) = D$, car f est surjective, et ouverte, car f est ouverte.

(b) Soit $f : X \to Y$ une application surjective continue ouverte et D une partie de Y telle que $f^{-1}(D)$ est fermée. Donc $f(f^{-1}(D)) = D$, car f est surjective, et fermée, car f est fermée.

(c) Soit $f : [0, 3\pi[\to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ donnée par $f(x) := e^{ix}$. D'après la construction, f est quotient. Or $[0,\pi[$ est un ouvert, mais $f([0,\pi[)$ n'est pas ouverte, car $f(0) = 1 \notin \operatorname{int} f([0,\pi[)$. D'autre part, $[2\pi, 3\pi[$ est un fermé, mais $-1 \in \operatorname{cl} f([2\pi, 3\pi[) \setminus f([2\pi, 3\pi[)$.

Exercice III.31. *Montrer que*

(a) X *est de Fréchet si et seulement si* $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A = \operatorname{cl} A$ *pour tout* $A \subset X$,

(b) *tout espace de caractère dénombrable est de Fréchet,*

(c) *l'éventail séquentiel de la section III.12 est de Fréchet, mais son caractère n'est pas dénombrable,*

(d) *la bisuite de l'exemple III.3.7 n'est pas de Fréchet.*

Solution. (a) C'est une reformulation de la définition.

(b) Si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathcal{V}(x)$ et $x \in \operatorname{cl} A$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in B_n \cap A$. Si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \subset V$, donc $x_k \in V$ pour $k \geq n$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n$.

(c) Nous avons montré que si $x_\infty \in \operatorname{cl} A \setminus A$, alors il existe sur A une suite convergeant vers x_∞. Comme tous les autres points sont isolés, l'espace est de Fréchet. Nous avons montré que $\chi(x_\infty)$ n'est pas dénombrable.

(d) Nous avons vu que $x_\infty \in \operatorname{cl}\{x_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$, mais aucune suite sur $\{x_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ ne converge vers x_∞.

Exercice III.32. *Montrer que*

(a) *une topologie est séquentielle si et seulement si*

(seq) $$\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A \subset A \Longrightarrow \operatorname{cl} A \subset A$$

pour toute partie A,

(b) *toute topologie de Fréchet est séquentielle,*

(c) *la bisuite de l'exemple III.3.7 est séquentielle,*

(d) *la topologie de Arens III.3.8 n'est pas séquentielle,*

(e) *pour toute topologie τ il existe la topologie $T_{\mathrm{Seq}}\tau$ la moins fine des topologies séquentielles ξ plus fine que τ.*

(f) *Quelle est $T_{\mathrm{Seq}}\tau$ pour la topologie de Arens τ ?*

Solution. (a) Il suffit de noter que $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A \subset A$ signifie que A est séquentiellement fermée et $\operatorname{cl} A \subset A$ signifie que A est fermée. La seconde affirmation est évidente. En ce qui concerne la première,

$$\bigcup\{\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n : (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}\} = \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A \subset A$$

si et seulement si $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x_n \subset A$ pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A.

(b) Puisqu'une topologie est de Fréchet si et seulement si $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A = \operatorname{cl} A$ pour toute partie A, (seq) est vérifiée, donc elle est séquentielle.

(c) Soit $X := \{x_\infty\} \cup X_0 \cup X_1$, où $X_0 := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $X_1 := \{x_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$, muni de la topologie de bisuite. Montrons que $\operatorname{cl}^3_{\mathrm{Seq}} A = \operatorname{cl}^2_{\mathrm{Seq}} A$ pour toute partie A de X. Comme

$$\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A = \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}}(A \cap \{x_\infty\}) \cup \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}}(A \cap X_0) \cup \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}}(A \cap X_1),$$

Il suffit de considérer $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_0$, où $A_0 \subset X_0$ et $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_1$, où $A_1 \subset X_1$. Or, $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_0 \subset A_0 \cup \{x_\infty\}$, donc $\operatorname{cl}^2_{\mathrm{Seq}} A_0 = \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_0$. D'autre part, soit $A_0 := \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_1 \cap X_0$. Alors $\operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_1 \subset A_1 \cup A_0$, donc

$$\operatorname{cl}^2_{\mathrm{Seq}} A_1 \subset \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_1 \cup \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A_0 \subset A_1 \cup A_0 \cup \{x_\infty\}.$$

Ainsi $\operatorname{cl}^3_{\mathrm{Seq}} A_1 = \operatorname{cl}^2_{\mathrm{Seq}} A_1$.

(c) *(deuxième solution)* Soit A une partie non fermée, c'est-à-dire il existe $x \in \operatorname{cl} A \setminus A$. Alors $x = x_\infty$ ou $x = x_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, car tous les autres points sont isolés. Si $x_n \in \operatorname{cl} A \setminus A$, alors $N := \{k : x_{n,k} \in A\}$ est infini. Par conséquent, $\lim_{N \ni k \to\infty} x_{n,k} = x$, ce qui montre que A n'est pas séquentiellement fermée. Il reste le cas $x_\infty \in \operatorname{cl} A \setminus A$. Alors il existe une suite croissante $(n_p)_p$ telle que $x_{n_p} \in \operatorname{cl}_{\mathrm{Seq}} A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Sinon il existerait n_0 tel que

$x_n \notin \mathrm{cl}_{\mathrm{Seq}} A$ pour tout $n \geq n_0$, et par conséquent, pour tout $n \geq n_0$ il existe k_n tel que $\{x_{n,k} : k \geq k_n\} \cap A = \varnothing$. Donc

$$\{x_\infty\} \cup \{x_n : n \geq n_0\} \cup \bigcup\nolimits_{n \geq n_0} \{x_{n,k} : k \geq k_n\} \cap A = \varnothing,$$

c'est-à-dire $x_\infty \notin \mathrm{cl}\, A$, contrairement à l'hypothèse.

(d) Si Y est l'espace de Arens, alors $Y \setminus \{x_\infty\}$ n'est pas fermée, mais séquentiellement fermée, car les suites convergentes sont stationnaires.

(e) Observons que l'ensemble des parties séquentiellement fermées d'une topologie τ, vérifient (F1)-(F3) du chapitre III, donc constitue l'ensemble des fermés pour une topologie, que l'on note $T_{\mathrm{Seq}}\tau$. Puisque tout fermé est séquentiellement fermé, $\tau \leq T_{\mathrm{Seq}}\tau$. D'autre part, si $\tau \leq \xi$ et ξ est séquentielle, alors $\xi = T_{\mathrm{Seq}}\xi$.

(f) Puisque les suites convergeant pour la topologie de Arens sont stationnaires, toute partie est séquentiellement fermée. Donc $T_{\mathrm{Seq}}\tau = \iota$ (la topologie discrète).

Exercice III.33.

(a) *Observer que toute application continue est séquentiellement continue.*

(b) *Montrer que si $f : X \to Y$ est séquentiellement et X est un espace séquentiel, alors f est continue.*

Solution. (a) Si $x \in \mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n$ et $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Puisque f est continue, il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(W) \subset V$. D'après la convergence, $\{n : x_n \in W\}$ est cofini, donc $\{n : f(x_n) \in V\}$ est cofini et ainsi $f(x) \in \mathrm{Lim}_{n\to\infty} f(x_n)$.

(b) Soit $f : X \to Y$ est séquentiellement continue et F une partie fermée de Y. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $f^{-1}(F)$ telle que $x \in \mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n$, alors $f(x) \in \mathrm{Lim}_{n\to\infty} f(x_n)$ et $f(x_n) \in F$ pour tout n. Comme F est fermée, $f(x) \in F$ et ainsi $x \in f^{-1}(F)$. Ceci montre que $f^{-1}(F)$ est séquentiellement fermée, donc fermée, car X est séquentiel. En conséquence f est continue.

Exercice III.34. *Une partie O de $\mathbb{R}^2$ est ouverte pour la topologie radiale si $O \cap L$ est une partie ouverte de L pour toute droite L de $\mathbb{R}^2$. Montrer que*

(a) *si une suite $(x_k)_k$ est convergente pour la topologie radiale, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et des droites $L_1, L_2, \ldots, L_n$ telles que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$,*

(b) *la topologie radiale n'est pas de Fréchet,*

(c) *la topologie radiale est séquentielle.*

Solution. (a) Soit $(x_n)_n$ une suite convergeant vers x. Supposons que la condition ne soit pas vérifiée. On construit par récurrence une suite extraite $(x_{n_k})_k$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}_1$, l'intersection de toute droite L avec $\{x_{n_k} : k \leq m\}$ n'a pas plus que 2 éléments. C'est évidemment possible pour $m = 1$. Si c'est vrai à l'ordre $m > 1$, alors l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites passant par deux éléments de $\{x_{n_k} : k \leq m\}$, est fini. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $n_{m+1} > n_m$ tel que $x_{n_{m+1}} \notin \bigcup_{L \in \mathcal{L}} L$. Par conséquent, pour toute droite L, l'ensemble $\{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \cap L$ est fini (a au plus 2 points), donc fermé dans L et, par définition de la topologie, fermé. Ainsi

$$\mathrm{adh}_{k\to\infty} x_{n_k} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\,\{x_{n_k} : k \geq m\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{x_{n_k} : k \geq m\} = \varnothing,$$

ce qui contredit la convergence de $(x_n)_n$.

(b) Nous allons construire une partie A de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\,\mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\, A \neq \mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\, A$, donc $\mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\, A \neq \mathrm{cl}\, A$, car cl est idempotent. Soit

$$A := \left\{(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{k}) : \tfrac{1}{k} < \tfrac{1}{n^2}, n, k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

Alors $\mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\, A \backslash A = \left\{(\frac{1}{n}, 0) : n < \omega\right\}$, donc $(0,0) \notin \mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\, A$. En effet, pour toute droite L passant par $(0,0)$ il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $L = \{(rt, st) : t \in \mathbb{R}\}$. On observe qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\{(\alpha t, \beta t) : |t| < \delta\} \cap A = \varnothing$. D'autre part, $(0,0) \in \mathrm{cl}_{\mathsf{Seq}}\, A$, car $((\frac{1}{n}, 0))_n$ converge vers $(0,0)$.

(c) La topologie radiale est séquentielle, car si A est séquentiellement fermé et L est une droite, alors $A \cap L$ est séquentiellement fermé dans L, donc fermé dans L et, par conséquent, A est fermé.

IV. Espaces métriques séparables

Solutions (exercices des pages 80-80)

Exercice IV.1. *Si X est un espace métrique séparable, alors* $\mathrm{card}\, X \leq \mathfrak{c}$.

Solution. Voir la proposition IV.1.2.

Exercice IV.2. *Combien y a-t-il de fonctions réelles continues sur un espace séparable ?*

Solution. Puisque toute fonction continue est déterminée par ses valeurs sur un ensemble dense, il y a ${\aleph_0}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ de fonctions continues.

Exercice IV.3. *Soit X un espace métrique. Alors X est séparable si et seulement s'il existe une base dénombrable d'ouverts de X.*

Solution. Voir la proposition IV.1.3.

Exercice IV.4. *Dans tout espace métrique séparable X il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $X = \mathrm{adh}_{n\to\infty}(x_n)_n$.*

Solution. Effectivement, si A est dénombrable et dense, alors il existe une suite $(a_n)_n$ de termes distincts telle que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Soit $(x_k)_k$ la suite définie par

$$a_0, a_1, a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Si $x \in \mathrm{cl}\, A$ alors il existe une suite $(y_p)_p$ à valeurs dans A telle que $x = \lim_{p\to\infty} y_p$, donc il existe $(n_p)_p$ telle que $y_p = a_{n_p}$. Dans le cas où $x \in A$, il existe n tel qu'on peut poser $y_p = x = a_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe $(k_p)_p$ tendant vers ∞ telle que $x_{k_p} = a_n$ donc $x \in \mathrm{adh}_{n\to\infty} x_n$. Si $x \notin A$, alors $(n_p)_p$ tend vers ∞ et il existe une suite $(k_p)_p$ telle que $x_{k_p} = a_{n_p}$. Forcément $(k_p)_p$ tend vers ∞, donc $x \in \mathrm{adh}_{n\to\infty} x_n$.

Exercice IV.5. *(Théorème de Cantor-Bendixson) Tout espace métrique séparable est l'union disjointe de deux ensembles, dont un est parfait et l'autre est dénombrable.*

Solution. Notons X^0 l'ensemble des points de condensation de X. Montrons que $X \setminus X^0$ est dénombrable. D'après la proposition IV.1.3, il existe une base $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ d'ouverts de X. Pour tout $x \notin X^0$ il existe un ouvert dénombrable O_x tel que $x \in O_x$, donc $O_x \cap X^0 = \varnothing$. Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_n \subset O_x$. En particulier, B_n est dénombrable. Si N est l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x \in B_n \subset O_x$ pour un $x \notin X^0$, alors

$$X \setminus X^0 \subset \bigcup\nolimits_{n \in N} B_n$$

est dénombrable. Si $x \in X^0$, alors $x \in \operatorname{cl}(X \setminus \{x\})$, c'est-à-dire x est un point d'accumulation. D'autre part, si $x \in \operatorname{cl} X^0$ alors $O \cap X^0 \neq \varnothing$, pour tout ouvert O contenant x, donc O n'est pas dénombrable, et ainsi $x \in X^0$. En conséquence X^0 est parfait.

V. Espaces métriques compacts

Solutions (exercices des pages 93-95)

Exercice V.1. *Soit F, K deux parties fermées d'un espace métrique (X, d). Montrer que*

(a) *si $F \cap K = \varnothing$ et K compacte, alors* $\operatorname{dist}(F, K) > 0$,

(b) *l'hypothèse de compacité est essentielle.*

Solution. 1. (a) D'après la proposition II.3.7, la distance $d(\cdot, F)$ est continue et comme K est compact, selon le théorème V.1.21, il existe $x_0 \in K$ tel que $d(x_0, F) = \inf_{x \in K} d(x, F)$. Or $\operatorname{dist}(K, F) = d(x_0, F) > 0$, car F est fermé et $x_0 \notin F$.

(b) Les parties $\mathbb{N}$ et $F := \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\}$ de $\mathbb{R}$ sont fermées et disjointes, mais $0 \leq \operatorname{dist}(\mathbb{N}, F) \leq \inf\{d(n, n + \frac{1}{n})\} = 0$.

Solution. 2. (a) Supposons que $\operatorname{dist}(K, F) = \inf\{d(x, y) : x \in K, y \in F\} = 0$, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, il existe $x_n \in K$ et $y_n \in F$ tels que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Puisque K est compact, il existe une suite $(x_{n_k})_k$ extraite de $(x_n)_n$ telle que $x_\infty := \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in K$. Mais également $x_\infty := \lim_{k \to \infty} y_{n_k}$, car $d(x_\infty, y_{n_k}) \leq d(x_\infty, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k})$, et comme F est fermé, $x_\infty \in F$, ce qui est une contradiction.

Exercice V.2. *Toute union finie de parties compactes est compacte. En particulier, toute partie finie est compacte.*

Solution. 1. Soit $K_1, \ldots, K_m$ parties compactes d'un espace métrique et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\bigcup_{j=1}^m K_j$. Alors il existe j tel que $A_j := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in K_j\}$ est infini. Ainsi $(x_n)_{n \in A_j}$ est une suite d'éléments d'une partie compacte K_j, donc il existe une partie infinie A de A_j telle que $(x_n)_{n\in A}$ converge vers un élément de $K_j \subset \bigcup_{j=1}^m K_j$.

Solution. 2. Soit $K_1, \ldots, K_m$ parties compactes d'un espace métrique et soit $\mathcal{P}$ une famille d'ouverts telle que $\bigcup_{j=1}^m K_j \subset \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$. Pour tout $j = 1, \ldots, m$, il existe une sous-famille finie $\mathcal{P}_j$ de $\mathcal{P}$ telle que $K_j \subset \bigcup_{P\in\mathcal{P}_j} P$, car K_j est compact. Alors $\bigcup_{j=1}^m \mathcal{P}_j$ est finie et

$$\bigcup_{j=1}^m K_j \subset \bigcup_{P\in\bigcup_{j=1}^m \mathcal{P}_j} P.$$

Exercice V.3. *Une partie d'un espace euclidien est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Solution. Soit $F \subset \mathbb{R}^n = \prod_{k=1}^n \mathbb{R}$. Si F est compacte, alors F est fermée. Comme, pour tout k, la projection π_k est continue, $\pi_k(F)$ est compacte dans $\mathbb{R}$, donc bornée. Or, $F \subset \prod_{k=1}^n \pi_k(F)$, ainsi F est bornée. Si F est bornée et fermée, alors $\pi_k(F)$ est bornée pour tout k, donc $\operatorname{cl}\pi_k(F)$ est fermée et bornée, donc compacte d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß. Par conséquent, F est une partie fermée d'un compact $\prod_{k=1}^n \operatorname{cl}\pi_k(F)$, donc F est compacte.

Exercice V.4. *Soit $(A_n)_n$ une suite de parties d'un espace métrique X. Montrer que*

(a) $x \in \operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n$ *si et seulement s'il existe une suite strictement croissante* $(n_k)_k$ *et* $x_k \in A_{n_k}$ *pour tout* $k \in N$ *de telle sorte que* $x = \lim_{k\to\infty} x_k$,

(b) *si* $A_n = \{a_n\}$ *pour tout* n, *alors* $\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n = \operatorname{adh}_{n\to\infty} a_n$,

(c) *si* $A_n \supset A_{n+1}$ *pour tout* n, *alors* $\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} A_n$,

(d) *si* X *est compact, alors pour tout ouvert* $O \supset \operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n$ *il existe* n_O *tel que* $A_n \subset O$ *pour tout* $n \geq n_O$.

Solution. (a) Par définition, $x \in \operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n$ si $x \in \operatorname{cl}(\bigcup_{k\geq n} A_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $B(x, \frac{1}{n}) \cap \bigcup_{k\geq n} A_k \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi il existe $k_n \geq n$ et $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A_{k_n}$. Bien évidemment, $\lim_{n\to\infty} x_n$. Il suffit maintenant de changer le rôle de n et k. Réciproquement, si $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ et $x_k \in A_{n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout n il existe $k(n)$ tel que $x_k \in \bigcup_{l\geq n} A_l$ pour $k \geq k(n)$. Par conséquent, $x \in \operatorname{cl}(\bigcup_{l\geq n} A_l)$ pour tout n, donc $x \in \operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n$.

(b) Si $A_n = \{a_n\}$, alors

$$\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{a_k : k \geq n\} = \operatorname{adh}_{n\to\infty} a_n.$$

(c) Si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n, alors $\bigcup_{k\geq n} A_k$, d'où la conclusion.

(d) Supposons qu'il existe un ouvert O tel que $\operatorname{Adh}_{n\to\infty} A_n \subset O$ et une suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que $A_{n_k} \setminus O \neq \varnothing$, autrement dit, il existe $x_k \in A_{n_k} \setminus O$ pour tout k.

La suite $(x_k)_k$ d'éléments d'une partie compacte $X \setminus O$ admet une suite extraite $\left(x_{k_p}\right)_p$ convergeant vers un élément x_∞ de $X \setminus O$. Puisque $x_{k_p} \in A_{n_{k_p}}$ pour tout p, d'après (a), $x_\infty \in \mathrm{Adh}_{n\to\infty} A_n \subset O$, ce qui est une contradiction.

Exercice V.5. *Soit X un espace métrique, $A_\infty \subset X$ et $(A_n)_n$ une suite de parties de X.*

Si pour tout ouvert $O \supset A_\infty$ il existe n_O tel que $A_n \subset O$ pour tout $n \geq n_O$, alors il existe une partie compacte K de A_∞ telle que pour tout ouvert $O \supset K$ il existe n_O tel que $A_n \setminus A_\infty \subset O$ pour tout $n \geq n_O$.

Solution. L'ensemble $K := \mathrm{Adh}_{n\to\infty}(A_n \setminus A_\infty)$ est compact. Supposons qu'au contraire il existe une suite $(y_k)_k$ d'éléments distincts de K sans aucune suite extraite convergente (K étant fermé). Alors il existe une suite $(n_k)_k$ extraite de $(n)_n$ et $x_k \in A_{n_k} \setminus A_\infty$ pour tout k tels que $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$.

Par conséquent, aucune suite extraite de $(x_k)_k$ n'est convergente, ce qui implique que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ est fermé et disjoint de A_∞. D'après l'hypothèse, il existe N tel que $A_n \cap \{x_k : k \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ pour tout $n > N$, ce qui est une contradiction.

Si $x \in K \setminus A_\infty$, alors il existe une suite croissante $(n_k)_k$ et $x_k \in A_{n_k} \setminus A_\infty$ telles que $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Par conséquent, $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un fermé disjoint de A_∞, donc disjoint de A_n à partir d'un certain rang, ce qui est une contradiction.

Soit O un ouvert incluant K. Supposons qu'il existe une suite croissante $(n_k)_k$ et $x_k \in A_{n_k} \setminus A_\infty \setminus O$. Si $(x_k)_k$ a une suite extraite convergente vers x, alors $x \in K \setminus O$, car $X \setminus O$ est fermé ; sinon $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ est un fermé disjoint de A_∞ : une contradiction dans les deux cas.

Exercice V.6.

(a) *Montrer qu'une partie K d'un espace métrique est compacte si et seulement si pour toute base de filtre $\mathcal{F}$ telle que $K \cap F \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, alors $K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F \neq \varnothing$.*

(b) *Soit X un espace métrique compact, $\mathcal{F}$ une base de filtre. Montrer que si O est un ouvert tel que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F \subset O$, alors il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{cl}\, F \subset O$.*

Solution. (a) Soit K une partie compacte de X. Supposons qu'il existe une base de filtre $\mathcal{F}$ telle que $K \cap F \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, mais $K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F = \varnothing$, c'est-à-dire $K \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}}(X \setminus \mathrm{cl}\, F)$. Puisque K est compact, d'après le théorème V.2.3 de Borel-Lebesgue, il existe une sous famille finie $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ telle que $K \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}}(X \setminus \mathrm{cl}\, F)$, ce qui veut dire que $K \cap \bigcap_{F\in\mathcal{F}_0} \mathrm{cl}\, F = \varnothing$ et comme $\mathcal{F}$ est une base de filtre, il existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tel que $F_0 \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}_0} F \subset \bigcap_{F\in\mathcal{F}_0} \mathrm{cl}\, F$, en contradiction avec $K \cap F \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Si K n'est pas compact, alors d'après le théorème V.2.3 de Borel-Lebesgue, il existe une famille $\mathcal{P}$ d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$, mais $K \setminus \bigcup_{P\in\mathcal{P}_0} P \neq \varnothing$ pour toute sous-famille $\mathcal{P}_0$ finie de $\mathcal{P}$. Or la famille composée de $\bigcap_{P\in\mathcal{P}_0}(X \setminus P)$, où $\mathcal{P}_0$ est une sous-famille finie de $\mathcal{P}$, est une base de filtre, dont tout élément intersecte K. En conséquence, $\varnothing \neq K \cap \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathrm{cl}(X \setminus P) = K \cap \bigcap_{P\in\mathcal{P}}(X \setminus P)$, c'est-à-dire $K \subset \bigcup_{P\in\mathcal{P}} P$, contrairement à l'hypothèse.

(b) Sinon, $\mathrm{cl}\, F\setminus O \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$, ainsi $\{\mathrm{cl}\, F\setminus O : F \in \mathcal{F}\}$ est une base de filtre composée de fermés dans un espace compact. Il découle de (a) que $(\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F)\setminus O = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}(\mathrm{cl}\, F\setminus O) \neq \varnothing$, ce qui contredit $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F \subset O$.

Exercice V.7. *Le graphe* $\mathrm{Gr}\,(f)$ *est compact si et seulement si le domaine est compact et* f *est continue.*

Solution. Si f est continue, alors le graphe

$$\mathrm{Gr}\,(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

de f est fermé. Si en plus X est compact, alors $f(X)$ est compact et $\mathrm{Gr}\,(f) \subset X \times f(X)$, donc le graphe est une partie fermée d'un espace métrique compact $X \times f(X)$.

Réciproquement, si $\mathrm{Gr}\,(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ est compact, alors $X = \pi_X\,(\mathrm{Gr}(f))$, donc X est compact car π_X est continue. Puisque π_X restreinte à $\mathrm{Gr}(f)$ est bijective, continue et son image est compacte, l'application réciproque $\pi_X^{-1} : X \to \mathrm{Gr}\,(f)$ est continue. Donc $f = \pi_Y \circ \pi_X^{-1}$ est continue en tant que la composition de deux applications continues.

Exercice V.8. *Montrer que si* (X,d) *est compact,* $f : X \to X$ *est continue et si* f *n'a pas de point fixe, alors il existe* $r > 0$ *tel que* $d(x, f(x)) \geq r$ *pour tout* x.

Solution. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $x_n \in X$ tel que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Comme X est compact, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ convergeant vers un élément x de X. Comme f est continue, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, et $0 = \lim_{k\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = d(x, f(x))$, d'après la continuité jointe de d. Ainsi $x = f(x)$.

Exercice V.9. *Montrer que*

(a) C_n *est, à la fois, fermée et ouverte dans* C *(pour tout* n*),*

(b) C_n *est homéomorphe à* C *(pour tout* n*),*

(c) $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ *est une base d'ouverts de* C*,*

(d) *pour tout ouvert* O *de* C*, il existe* $A \subset N$ *tel que pour* $n \neq m$*,*

$$O = \bigcup_{n\in A} C_n, \text{ où } C_n \cap C_m = \varnothing\ .$$

(e) *si* F *est une partie fermée de* C *et* $O = C \setminus F$*, alors pour tout* $n \in A$ *il existe* $y_n \in F$ *tel que*

$$d(y_n, C_n) = \mathrm{dist}(F, C_n) > 0.$$

Solution. (a) Pour tout n, la partie C_n de C est fermée, car elle est l'intersection d'un fermé de $\mathbb{R}$ avec C. D'autre part, C_n est une partie complémentaire d'un nombre fini de parties fermées (de son niveau).

(b) Si C_n est au niveau m, alors $f_n : C_n \to C$ définie par $f_n(x) := 3^m(x - \min C_n)$ est une bijection, donc un homéomorphisme (c'est une restriction d'une bijection affine d'un intervalle fermé sur $[0,1]$).

(c) Si O est un ouvert, alors il existe un ouvert P de $\mathbb{R}$, tel que $O = P \cap C$. Si $x \in O$, alors il existe un intervalle $a < x < b$ tels que $(a,b) \subset P$, donc il existe n tel que $x \in C_n \subset C \cap (a,b) \subset O$.

(d) Soit O une partie ouverte de C. Soit n_0 le plus petit n tel que $C_n \subset O$. Si $C_{n_0} = O$, alors $A = \{n_0\}$, sinon soit n_1 le plus petit n tel que $C_n \subset O \setminus C_{n_0}$, ce qui possible, car $O \setminus C_{n_0}$ est ouvert.

Ainsi on construit par récurrence une suite $(C_{n_k})_k$ telle que n_{k+1} est le plus petit n tel que $C_n \subset O \setminus (C_{n_0} \cup \ldots \cup C_{n_k})$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $O = C_{n_0} \cup \ldots \cup C_{n_k}$, alors $A = \{n_0, \ldots, n_k\}$, sinon $(n_k)_k$ est strictement croissante et $O = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_{n_k}$, alors $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$.

(e) Car F et C_n sont deux fermés disjoints dans un espace compact.

Exercice V.10. *Si F est une partie fermée de C, alors $F = C \setminus \bigcup_{n \in A} C_n$, où $C_n \cap C_m = \varnothing$ si $n \neq m$. Montrer que la projection $\pi_F : C \to F$,* définie par

$$\pi_F(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in F, \\ y_n, & \text{si } x \in C_n, \end{cases}$$

est continue.

Solution. Soit $(x_p)_p$ une suite d'éléments de C telle que $x = \lim_{p\to\infty} x_p$. Soit il existe $n \in A$ telle que $x \in C_n$, soit $x \in F$. Dans le premier cas, il existe p_0 tel que $x_p \in C_n$ pour $p \geq p_0$, donc $\pi_C(x_p) = y_n = \pi_C(x)$, car C_n est ouvert.

Soit $x \in F$, donc $\pi_C(x) = x$.

Si A est fini, alors F est ouvert, donc il existe p_0 tel que $x_p \in F$ et par conséquent, $\pi_C(x_p) = x_p$ pour $p \geq p_0$. Ainsi $\pi_C(x) = x = \lim_{p\to\infty} \pi_C(x_p)$.

Si A est infini, alors il suffit de supposer que $x_p \notin C$ pour tout p. Soit $h : \mathbb{N} \to A$ définie par

$$h(p) := n, \text{ si } x_p \in C_n.$$

Il s'ensuit que $\pi_C(x_p) = y_{h(p)}$. Notons que, pour tout n, l'ensemble $h^{-1}(n)$ est fini, car sinon il existerait une suite extraite de $(x_p)_p$, entièrement contenue dans C_n. Elle convergerait vers x, donc $x \in C_n \cap F$, une contradiction. Donc $\lim_{p\to\infty} \operatorname{diam} C_{h(p)}$. Ainsi

$$d(x, y_{h(p)}) \leq d(x, x_p) + d(x_p, y_{h(p)})$$
$$\leq d(x, x_p) + \operatorname{dist}(F, C_{h(p)}) + \operatorname{diam} C_{h(p)} \leq 2d(x, x_p) + \operatorname{diam} C_{h(p)},$$

car $\operatorname{dist}(F, C_{h(p)}) \leq d(x, x_p)$, ce qui prouve $x = \lim_{p\to\infty} \pi_C(x_p)$.

(e) Soit $(x_p)_p$.

(f) D'après l'exercice V.11 (d), tout espace métrique compact non vide X est l'image continue d'une partie fermée F de C. Selon (e), F est l'image continue de C.

Exercice V.11. *Montrer que*

(a) *φ est surjective et continue,*

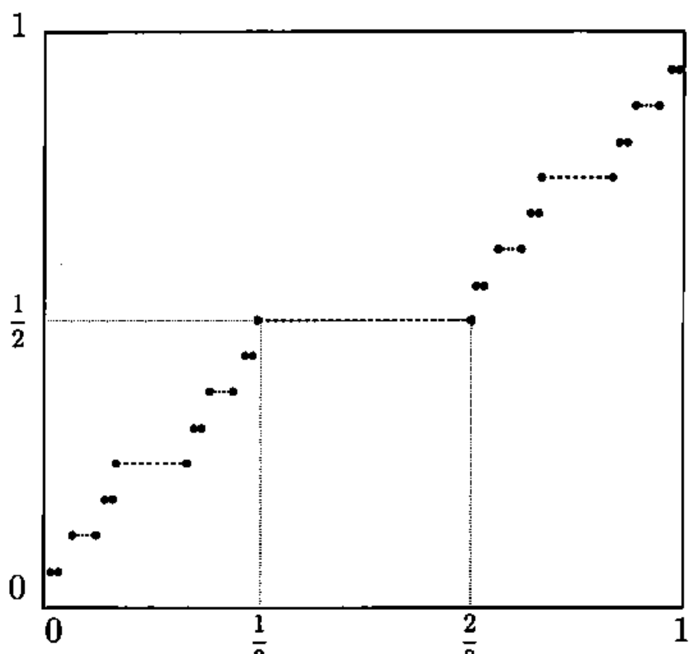
(b) *φ n'est pas bijective,*

(c) *il existe une application continue surjective de l'ensemble de Cantor sur le cube de Hilbert $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, 1]$,*

(d) *tout espace compact non-vide est l'image continue d'une partie fermée de l'ensemble de Cantor C,*

(e) *tout espace compact non-vide est l'image continue de l'ensemble de Cantor C.*

Solution. (a) $\varphi : C \to [0, 1]$ est surjective, car si $y \in [0, 1]$ et $y\,(n)$ désigne le n-ième chiffre d'une représentation binaire de y, alors $x(n) := 2y(n)$ donne le n-ième chiffre de la représentation ternaire d'un élément de C. Si $(x_k)_k$ est une suite d'éléments de C telle que $x = \lim_{k\to\infty} x_k$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $k(n)$ tel que $x(n) = x_k(n)$ pour tout $k \geq k(n)$, donc $\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k)$.



Seulement les extrémités de tout plateau correspondent aux valeurs de φ ; l'intérieur est hors de l'ensemble de Cantor.

(b) Puisque l'ensemble de Cantor est compact, si φ était bijective et continue, alors φ serait un homéomorphisme. Ceci n'est pas possible, car C admet des parties propres ouvertes-fermées.

Nous pouvons également décrire explicitement les points de non injectivité. Soit y un élément de l'intervalle $]0,1[$ ayant une représentation

$$y = \sum_{n=1}^{\#y} \frac{y(n)}{2^n},$$

où $\#y$ est le plus grand $n \in \mathbb{N}_1$ tel que $y(n) = 0$ pour $n > \#y$. Alors $y(\#y) = 1$, donc

$$y = \sum_{n=1}^{\#y-1} \frac{y(n)}{2^n} + \sum_{n=\#y+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

est une seconde représentation de y, car

$$\frac{1}{2^{\#y}} = \sum_{n=\#y+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi

$$x_0(y) := \sum_{n=1}^{\#y} \frac{2y(n)}{3^n} \text{ et } x_1(y) := \sum_{n=1}^{\#y-1} \frac{2y(n)}{3^n} + \sum_{n=\#y}^{\infty} \frac{2}{3^n}$$

sont deux éléments distincts de C tels que $\varphi(x_0(y)) = \varphi(x_1(y)) = y$.

(c) D'après l'exercice II.18, il existe un homéomorphisme $\psi : C \to \prod_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit C_n une copie de l'ensemble de Cantor, I_n une copie de $[0,1]$ et $\varphi_n : C_n \to I_n$ une copie de l'application φ de (b).

Si π_n désigne la projection sur la n-ième composante de produit dénombrable, alors l'application $\Phi : \prod_{n\in\mathbb{N}} C_n \to \prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, définie par

$$\pi_n(\Phi(x)) := \varphi_n(\pi_n(x))$$

pour tout n, est évidemment surjective et continue, puisque la convergence dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} C_n$ et $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est simple (composante par composante). Par conséquent, $f := \psi \circ \Phi$ est une surjection continue.

(d) D'après le corollaire V.1.17, tout espace métrique compact est homéomorphe à une partie fermée X du cube de Hilbert $\prod_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Alors $f^{-1}(X)$ est une partie fermée de C.

(e) Il suffit de composer f avec la projection $\pi_{f^{-1}(X)}$.

VI. Espaces métriques complets

Solutions (exercices des pages 107-109)

Exercice VI.1. *Montrer que toute partie ouverte d'un espace métrique X est homéomorphe à une partie fermée de $X \times \mathbb{R}$.*

Solution. C'est évident pour la partie vide, car elle est ouverte et fermée. Si O est un ouvert non vide de X, alors la distance $d(\cdot, X \setminus O) : O \to \mathbb{R}$ est continue et strictement positive grâce à la proposition II.3.7. Puisque $h(r) := \dfrac{1}{r}$ est continue sur $]0,\infty[$, la composition de ces deux fonctions

$$(f) \qquad f(x) := \frac{1}{d(x, X \setminus O)}$$

est continue, donc d'après l'exercice II.29 (c), O est homéomorphe à son graphe
$$G(f) = \{(x,y) : y \cdot d(x, X \setminus O) = 1, x \in O\}.$$
Observons que ce graphe est fermé dans $X \times \mathbb{R}$. Effectivement, si $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y)$, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, donc, en particulier, $(y_n)_n$ est bornée. Or
$$y_n = \frac{1}{d(x_n, X \setminus O)},$$
ce qui entraîne l'existence de $\delta > 0$ tel que $d(x_n, X \setminus O) \geq \delta$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, X \setminus O) = d(x, X \setminus O)$, ce qui montre que $x \in O$ et $y = f(x)$.

Exercice VI.2. *Montrer que toute partie ouverte d'un espace métrique complet est complètement métrisable.*

Solution. D'après l'exercice VI. 1, toute partie ouverte O de X est homéomorphe à une partie fermée $f(O)$ de $X \times \mathbb{R}$. Puisque X et $\mathbb{R}$ sont complet, le produit $X \times \mathbb{R}$ est complet pour toute métrique-produit, donc, selon la proposition VI.1.5, $f(O)$ est complet pour la restriction de cette métrique. Ainsi O est complètement métrisable. Bien sûr, une métrique complète de O ne peut pas être celle induite de X, si O n'est pas également fermée (voir la proposition VI.1.6).

Exercice VI.3. *Soit d une métrique complète de X et soit O une partie (non vide) de X. Donner explicitement une métrique complète de O.*

Solution. D'après l'exercice VI.1, l'homéomorphisme de O sur une partie fermée de $X \times \mathbb{R}$ est donnée par (f). Prenons une métrique produit de $X \times \mathbb{R}$ et composons la avec f. Ainsi nous obtiendrons des métriques complètes
$$h_\infty(x,y) := \max\Big(d(x,y), \Big|\frac{1}{d(x, X\setminus O)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O)}\Big|\Big),$$
$$h_2(x,y) := \Big(d(x,y)^2 + \Big|\frac{1}{d(x, X\setminus O)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O)}\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$
$$h_1(x,y) := d(x,y) + \Big|\frac{1}{d(x, X\setminus O)} - \frac{1}{d(y, X \setminus O)}\Big|.$$

Exercice VI.4. *Montrer que toute partie G_δ d'un espace métrique X est homéomorphe à une partie fermée de $X \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$.*

Solution. Soit D un G_δ de X et $(O_n)_n$ une suite décroissante d'ouverts de X telle que $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Alors
$$f_n(x) := \frac{1}{d(x, X \setminus O_n)}$$
définie sur D est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\varphi : D \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x)(n) := f_n(x)$, est continue d'après le corollaire II.4.2.

Selon l'exercice II.29 (c), D est homéomorphe à $\mathrm{Gr}(\varphi)$. Montrons que $\mathrm{Gr}(\varphi)$ est fermé dans $X \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

Si $((x_k, \varphi(x_k)))_k$ est une suite d'éléments de $\mathrm{Gr}(\varphi)$ et $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ et $\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = y \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$, alors $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = y(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en particulier la suite $(f_n(x_k))_k$ est bornée, donc il existe $\delta_n > 0$ tel que

$$d(x, X \setminus O_n) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, X \setminus O_n) \geq \delta_n,$$

ce qui prouve que $x \in O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent $x \in D$. Ainsi $y(n) = f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\varphi(x) = y$, donc $(x, y) \in \mathrm{Gr}(\varphi)$.

Exercice VI.5. *Montrer que tout G_δ d'un espace métrique complet est complètement métrisable.*

Solution. D'après l'exercice VI.4, tout G_δ de X est homéomorphe à une partie fermée de $X \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$. Cet espace muni d'une métrique-produit est complet, car X et $\mathbb{R}$ sont complets, donc toute partie fermée de $X \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ est complète, ce qui implique que l'espace qui lui est homéomorphe est complètement métrisable.

Exercice VI.6. *Montrer qu'un espace métrique est complet si et seulement si $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F$ est un singleton pour toute base de filtre de Cauchy $\mathcal{F}$.*

Solution. Si la condition est remplie, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$ pour toute suite décroissante de fermés non vides $(F_n)_n$, donc l'espace est complet conformément au théorème VI.1.12 de Cantor.

Réciproquement si (X, d) est complet, et $\mathcal{F}$ est de Cauchy, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $F_n \in \mathcal{F}$ tel que $\mathrm{diam}\, F_n < \frac{1}{n}$ et $F_n \supset \mathrm{cl}\, F_{n+1}$ pour tout n. D'après le théorème VI.1.12 de Cantor, il existe $x \in X$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, F_n = \{x\}$. Comme $\mathcal{F}$ est une base de filtre, $F \cap F_n \neq \varnothing$ pour tout $F \in \mathcal{F}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n \subset B(x, \varepsilon)$, donc $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \varnothing$. Par conséquent, $x \in \mathrm{cl}\, F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. Il s'ensuit que

$$x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\, F \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, F_n = \{x\}.$$

Exercice VI.7. *Montrer que*

(a) *toute application ouverte est presque ouverte,*

(b) *il existe des applications presque ouvertes qui ne sont pas ouvertes,*

(c) *l'image d'un espace métrique localement compact par une application continue presque ouverte est localement compacte.*

Solution. (a) Si $f : X \to Y$ est ouverte et $y \in Y$, alors pour tout $x \in f^{-1}(y)$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$ l'ensemble $\mathrm{int}\, V$ est ouvert et $x \in \mathrm{int}\, V$, donc d'après l'hypothèse, $f(\mathrm{int}\, V)$ est ouvert contenant $f(x) = y$. Ainsi $f(V) \supset f(\mathrm{int}\, V) \in \mathcal{V}(y)$.

(b) Par exemple, $X := [0,1] \times [0,1], Y := [0,1]$. On munit Y de la topologie usuelle et X de la topologie, où $V \in \mathcal{V}(r,r)$ s'il existe $W \in \mathcal{V}(r)$ tel que $\{(t,t) : t \in W\} \subset V$, et les points hors de la diagonale sont isolés. C'est une topologie métrisable[1]. Soit $f : X \to Y$ la projection sur la première variable, c'est-à-dire $f(r,s) := r$ pour tout $(r,s) \in X$. Alors, pour tout $r \in Y$, l'ensemble $f(V) \in \mathcal{V}(r)$, où $V \in \mathcal{V}(r,r)$. Mais, si $s \neq r$, alors $\{(r,s)\} \in \mathcal{V}(r,s)$ et $f(r,s) \notin \mathcal{V}(r)$.

(c) Soit $y \in Y$ et $x \in f^{-1}(y)$ vérifiant la condition. Puisque X est localement compact, il existe un compact K tel que $K \in \mathcal{V}(x)$. Par conséquent, $f(K) \in \mathcal{V}(y)$ et puisque f est continue, $f(K)$ est un compact.

Exercice VI.8. *Montrer que l'image d'un espace métrique localement compact par une application continue parfaite est localement compacte.*

Solution. Soit $y \in Y$ et W un voisinage ouvert de y. Alors $f^{-1}(y)$ est un compact inclus dans la partie $f^{-1}(W)$, qui est ouverte, car f est continue. Puisque $f^{-1}(y)$ est compact et chaque $x \in f^{-1}(y)$ admet un voisinage compact, il existe un compact K tel que

$$f^{-1}(y) \subset \operatorname{int} K \subset K \subset f^{-1}(W).$$

Donc

$$\begin{gathered} X \setminus f^{-1}(y) \supset X \setminus \operatorname{int} K \supset X \setminus K \supset X \setminus f^{-1}(W) \Longrightarrow \\ Y \setminus \{y\} \supset f(X \setminus \operatorname{int} K) \supset f(X \setminus K) \supset Y \setminus W \Longrightarrow \\ y \in Y \setminus f(X \setminus \operatorname{int} K) \subset Y \setminus f(X \setminus K) \subset W. \end{gathered}$$

Or, $f(X \setminus \operatorname{int} K)$ est un fermé, car f est fermée, donc $Y \setminus f(X \setminus \operatorname{int} K)$ est un ouvert. D'autre part, $Y \setminus f(X \setminus K) \subset f(K)$. Effectivement, si $z \notin f(K)$, de façon équivalente, $f^{-1}(z) \cap K = \varnothing$, alors $f^{-1}(z) \subset X \setminus K$, donc $z \in f(f^{-1}(z)) \subset f(X \setminus K)$ et, par conséquent, $z \notin Y \setminus f(X \setminus K)$. Or $f(K)$ est compact, car f est continue. Ainsi $f(K)$ est un voisinage compact inclus dans W.

Exercice VI.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable telle que pour tout $x \in R$ il existe $n \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors*

(a) *il existe un intervalle ouvert I tel que $f|_I$ est polynomiale,*

(b) *pour tout intervalle ouvert J, il existe un intervalle ouvert $I \subset J$ tel que $f|_I$ est polynomiale,*

(c) *f est polynomiale*[2].

Solution. (a) Si $F_n := \left\{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\right\}$, alors selon l'hypothèse $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Puisque F_n est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le corollaire VI.4.2

1. Posons $d((r_0,s_0),(r_1,s_1)) := |r_0 - s_0|$ si $r_0 = r_1$ et $s_0 = s_1$ et $d((r_0,s_0),(r_1,s_1)) := \delta_{r_0-s_0}^{r_1-s_1}$ (de Kronecker) autrement.

2. H. D. Brunk, R. P. Boas, Advanced Problems and Solutions : Solutions : 4813. Amer. Math. Monthly 66 (1959), no. 7, 599.

de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I := \operatorname{int} F_n \neq \varnothing$. En intégrant n fois sur I la fonction $f^{(n)}$, on obtient une fonction polynomiale avec n coefficients paramètres égale à f sur I pour un choix de ces paramètres.

(b) Puisque tout intervalle non vide J est complètement métrisable, on adapte le raisonnement de (a) à ce cas.

(c) Selon (b), il existe une famille $\mathcal{I}$ d'intervalles ouverts telle que $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ est dense et $f|_I$ est polynomiale pour tout $I \in \mathcal{I}$. Les composantes connexes de $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ forment une famille (dénombrable) $\mathcal{J}_0$ d'intervalles ouverts disjoints. Puisque deux fonctions polynomiales coïncidant sur un intervalle non vide sont identiques, $f|_J$ est polynomiale pour tout $J \in \mathcal{J}_0$. Soit $\mathcal{J}$ la famille d'intervalles disjoints telle que $f|_J$ est polynomiale pour tout $J \in \mathcal{J}_0$. En particulier, $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$.

L'ensemble complémentaire H est fermé, donc complètement métrisable. Il s'avère que H n'a pas de points isolés. Effectivement, si $x \in H$ est isolé, alors il existe $a < x < b$ tel que $]a, x[$ et $]x, b[$ appartiennent à $\mathcal{J}$. Puisque f est polynomiale sur $]a, x[$ et $]x, b[$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est polynomiale sur $]a, b[$ et par conséquent $x \notin H$.

En vertu du corollaire VI.4.2 de Baire il existe un intervalle ouvert I tel que f est polynomiale sur l'ensemble non vide $H \cap I$. Puisque $\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$ est dense, $I \cap \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J \neq \varnothing$, donc il existe $J \in \mathcal{J}$ tel que $I \cap J \neq \varnothing$. Ainsi $I \cup J$ est une partie d'un élément de $\mathcal{J}$. Une contradiction montrant que $H = \varnothing$. Ainsi $\bigcup_{J \in \mathcal{J}} J = \mathbb{R}$, ce qui veut dire que $\mathbb{R} \in \mathcal{J}$.

Exercice VI.10. *Notons* $\Omega(f) := \{x \in X : \omega(f, x) = 0\}$. *Montrer que*

(a) *si f est continue en x, alors $x \in \Omega(f)$,*

(b) *si f est continue et (Y, g) est complet, alors il existe $F : \Omega(f) \to Y$ continue et telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$,*

(c) *si f est uniformément continue, alors $\Omega(f) = X$,*

(d) *si f est uniformément continue et (Y, g) est complet, alors f peut être prolongée à une application uniformément continue de X dans Y.*

Solution. (a) Si f est continue en x, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(V \cap D) \subset B(f(x), \varepsilon)$, donc $\operatorname{diam} f(V \cap D) \leq 2\varepsilon$. Ainsi $\omega(f, x) = 0$.

(b) Si $x \in \Omega(f)$, alors $\mathcal{H} := \{f(V \cap D) : V \in \mathcal{V}(x)\}$ est une base de Cauchy dans l'espace complet (Y, g), donc il existe $F(x) \in Y$ tel que $\{F(x)\} = \bigcap_{h \in \mathcal{H}} \operatorname{cl} H$. Si $x \in D$, alors $f(x) \in f(V \cap D)$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ et, par conséquent, $f(x) = F(x)$. Si $\varepsilon > 0$, alors il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\operatorname{cl} f(V \cap D) \subset B(F(x), \varepsilon)$. Or, $V \in \mathcal{V}(v)$ pour tout $v \in V$, donc $F(v) \in \operatorname{cl} f(V \cap D) \subset B(F(x), \varepsilon)$, ce qui prouve la continuité de F.

(c) et (d) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in X$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $f(B(w, \delta) \cap D) \subset B(f(w), \varepsilon)$ pour tout $w \in D$. Puisque D est dense, il existe $w \in B(x, \delta) \cap D$. Comme $V := B(w, \delta) \in \mathcal{V}(x)$, on a $\operatorname{diam} f(V \cap D) < 2\varepsilon$, ce qui montre que $\omega(f, x) = 0$.

Exercice VI.11. *Notons* $\Omega_r(f) := \{x \in X : \omega(f, x) \leq r\}$. *Montrer que*

(a) *$\omega(f, x) = 0$ si et seulement si f est continue en x,*

(c) *il n'existe pas de fonction continue* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\Omega(f) = \mathbb{Q}$,

(d) *tout nombre rationnel non nul admet une unique représentation* $\frac{p}{q}$, *où* p, q *sont premiers entre eux. Si* $\frac{p}{q}$ *est une telle représentation de* x, *alors on note* $\psi(x) = (p, q)$,

$$h(x) := \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ si } \psi(x) = (p,q), \end{cases}$$

(e) $\Omega(h) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution. (a) D'après la définition, $\omega(f, x) = 0$ si et seulement si pour tout $r > 0$ il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\operatorname{diam} f(V) < r$, en particulier $f(V) \subset B(x, r)$, car $x \in V$, donc f est continue en x. Réciproquement, si f est continue en x, alors pour tout $r > 0$ il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(V) \subset B(x, r)$, donc $\operatorname{diam} f(V) < 2r$.

(b) Il suffit de montrer que $\{x \in X : \omega(f, x) < r\}$ est ouvert. Si $\omega(f, x) < r$, alors il existe un voisinage ouvert O de X tel que $\operatorname{diam} f(O) < r$. Il s'ensuit que $O \subset \{x \in X : \omega(f, x) < r\}$.

(c) Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complètement métrisable, il n'est pas G_δ d'après l'exercice VI.5.

(d) Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $h(x) > 0$ et $]x - \delta, x + \delta[\setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$ pour tout $\delta > 0$, d'où $\operatorname{diam} h(]x - \delta, x + \delta[) \geq h(x)$, donc $\omega(h, x) \geq h(x)$. Si $x \notin \mathbb{Q}$ et $r > 0$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $\sup h(]x - \delta, x + \delta[) < r$. Sinon, il existerait $r > 0$ et une suite $(x_n)_n$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $h(x_n) \geq r$, c'est-à-dire $\frac{1}{q_n} \geq r$ et $\psi(x_n) = (p_n, q_n)$. Ainsi

$$|x_n - x_k| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{|p_n q_k - p_k q_n|}{q_n q_k} \geq r^2 \left|p_n q_k - p_k q_n\right|.$$

Puisque $(x_n)_n$ est de Cauchy, il existe n_0 tel que $|p_n q_k - p_k q_n| \leq \frac{1}{2}$ pour $n, k \geq n_0$, donc $|p_n q_k - p_k q_n| = 0$, donc $(x_n)_n$ est stationnaire. Alors $x \in \mathbb{Q}$, contrairement à l'hypothèse.

Exercice VI.12. *Soit* (X, d) *un espace complet et* $(f_n)_n$ *une suite d'applications continues de* X *dans* Y *et* $f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Soit*

$$E_r(f, g) := \{x \in X : d(f(x), g(x)) \leq r\}.$$

Montrer que, pour tout $r > 0$,

(a) *l'ensemble* $E_r(f_n) := \bigcap_{m>n} E_r(f_n, f_m)$ *est fermé,*

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_r(f_n) = X$,

(c) $E_r(f_n) \subset E_r(f_n, f_\infty)$,

(d) *il existe* $x_0 \in X$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que* $B(x_0, \varepsilon) \subset E_r(f_n, f_\infty)$,

(e) *il existe* $0 < \eta < \varepsilon$ *tel que* $\operatorname{diam} f_\infty(B(x_0, \eta)) < 3r$, *donc* $B(x_0, \eta) \subset \Omega_{3r}(f_\infty)$,

(f) *il existe un ouvert dense* W_r *de* X *tel que* $W_r \subset \Omega_r(f_\infty)$,

(g) $\Omega(f_\infty)$ *est dense.*

Solution. (a) Puisque la métrique est continue jointement et f_n, f_m sont continues, $E_r(f_n, f_m)$ est l'image réciproque d'une partie fermée par une fonction continue, donc est fermée. Toute intersection de fermés est fermée.

(b) Pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_n$ est convergente, donc de Cauchy. Ainsi pour tout $r > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(f_m(x), f_n(x)) < r$ pour tout $m > n$, c'est-à-dire $x \in E_r(f_n, f_m)$ pour $m > n$.

(c) Si $x \in E_r(f_n)$, alors $d(f_m(x), f_n(x)) \leq r$ pour tout $m > n$, donc $d(f_\infty(x), f_n(x)) = \lim_{m\to\infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq r$, c'est-à-dire $x \in E_r(f_n, f_\infty)$.

(d) En vertu du corollaire VI.4.2 et du théorème VI.4.1 de Baire, (b) implique l'existence de n tel que $\operatorname{int} E_r(f_n) \neq \varnothing$ et comme une conséquence de (c), $\operatorname{int} E_r(f_n, f_\infty) \neq \varnothing$.

(e) Puisque f_n est continue, il existe η tel que $0 < \eta < \varepsilon$, pour lequel $\operatorname{diam} f_n(B(x_0, \eta)) < r$. Si $x, w \in B(x_0, \eta)$, alors $x, w \in E_r(f_n, f_\infty)$, c'est-à-dire $d(f_\infty(x), f_n(x)) \leq r$ et $d(f_\infty(w), f_n(w)) \leq r$ donc

$$\begin{aligned} &d(f_\infty(x), f_\infty(w)) \\ &\leq d(f_\infty(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(w)) + d(f_n(w), f_\infty(w)) < 3r. \end{aligned}$$

(f) Puisque $\omega(f|_O, x) = \omega(f, x)$ si O est une partie ouverte de X et $x \in O$, on déduit de (e) que $\operatorname{int} \Omega_r(f_\infty|_O) \neq \varnothing$ pour tout $r > 0$ et tout ouvert O, car O est complètement métrisable.

(g) $\Omega(f_\infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} \Omega_{\frac{1}{n}}(f_\infty) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}_1} W_{\frac{1}{n}}$ est dense grâce au théorème VI.4.1 de Baire.

Exercice VI.13. *Montrer que la topologie de Niemytzki*

(a) *est de caractère dénombrable,*

(b) *est régulière,*

(c) *n'est pas normale.*

Solution. Observons d'abord que toute partie A de $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(r,0) : r \in \mathbb{R}\}$ est fermée, car si $(s,t) \notin A$ et $t > 0$, alors $B((s,t), t) \cap A = \varnothing$ et si $(s,0) \notin A$, alors $\{(s,0)\} \cup \{(r,t) : r \in \mathbb{R}, t > 0\}$ est ouvert et disjoint de A.

(a) Évident.

(b) Si (s,t) et $t > 0$ et $t > 2\varepsilon > 0$, alors $B((s,t), 2\varepsilon) \supset \operatorname{cl} B((s,t), \varepsilon) = B^{\leq}((s,t), \varepsilon)$, et si $s \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors $\{(s,0)\} \cup D(s, 2\varepsilon) \supset \{(s,0)\} \cup \operatorname{cl} D(s, \varepsilon)$.

(c) Les parties $P := \{(r,0) : r \notin \mathbb{P}\}$ et $Q := \{(r,0) : r \in \mathbb{Q}\}$ sont fermées disjointes. Supposons que O_P, O_Q sont deux ouverts tels que $P \subset O_P$ et $Q \subset O_Q$. Alors pour tout $r \in P$ il existe $\varepsilon(r) > 0$ tel que $D(r, \varepsilon) \subset O_P$. Par conséquent, $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où $A_n := \left\{r \in \mathbb{P} : \varepsilon(r) < \frac{1}{n}\right\}$.

Puisque l'espace $\mathbb{P}$ (des nombres irrationnels avec la métrique usuelle) est complètement métrisable, et *a fortiori* $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}_{\mathbb{P}} A_n$, d'après le corollaire VI.4.2 de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}_1, r \in \mathbb{P}$ et $\delta > 0$ tels que $\mathbb{P} \cap B(r, \delta) \subset \operatorname{cl}_{\mathbb{P}} A_n$.

Par conséquent,

$$B_\delta(r) \times \{t : 0 < t < \tfrac{1}{n}\} \subset \bigcup\nolimits_{r \in \mathrm{cl}_P A_n} D_{\frac{1}{n}}(r) \subset O_P.$$

Si $q \in B(r,\delta) \cap \mathbb{Q}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(q,\varepsilon) \subset O_Q$ et comme $D(q,\varepsilon)$ intersecte $B(r,\delta) \times \left\{t : 0 < t < \frac{1}{n}\right\}$, nous avons obtenu une contradiction.

Exercice VI.14. *Montrer que si X est l'espace de Sorgenfrey, alors $X \times X$ n'est pas normal.*

Solution. La diagonale $\Delta := \{(x,-x) : x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$, car $[x,r[\times[y,r[\cap\Delta = \varnothing$ si $3r < |x+y|$ pour tout (x,y) tel que $y \neq -x$. Puisque $[x,x+\delta[\times[-x,-x+\delta[\cap\Delta = \{(x,-x)\}$ pour tout $\delta > 0$, la topologie du sous-espace Δ est discrète, donc $\{(x,-x) : x \in A\}$ est fermé dans $X \times X$ pour toute partie A de X.

En particulier, $F_0 := \{(x,-x) : x \in \mathbb{Q}\}$ et $F_1 := \{(x,-x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ sont fermés. Si O est un ouvert tel que $F_1 \subset O$, alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ il existe $\delta(x) > 0$ tel que $[x, x+\delta(x)[\times[-x,-x+\delta(x)[\subset O$.

Si $A_n := \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \delta(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$, alors

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}_1} A_n = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}_1} \mathrm{cl}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} A_n,$$

où $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ désigne la fermeture dans l'espace $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels avec la topologie induite de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est complètement métrisable, en vertu du corollaire VI.4.2, il existe n tel que $\mathrm{int}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \mathrm{cl}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} A_n \neq \varnothing$.

Si $a < b$ sont tels que $]a,b[\subset \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} F_n$, alors $]x, x+\frac{1}{n}[\times]-x,-x+\frac{1}{n}[\subset O$ pour tout $x \in]a,b[$, en particulier pour $x \in \mathbb{Q}\cap]a,b[$. Donc si $x \in \mathbb{Q}\cap]a,b[$, alors tout voisinage de $(x,-x)$ intersecte O.

VII. Espaces métriques connexes et disconnexes

Solutions (exercices des pages 127-131)

Exercice VII.1. *Montrer que*

(a) *tout espace métrique connexe est bien enchaîné,*

(b) *tout espace métrique compact bien enchaîné est connexe,*

(c) *il existe un espace métrique bien enchaîné qui ne soit pas connexe.*

Solution. (a) Soit (X,d) connexe et $v \in X$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $J_\varepsilon(v)$ l'ensemble de tous les points de X joignables de v par une ε-chaîne.

Notons que $J_\varepsilon(v)$ est ouvert. Effectivement, si $x \in J_\varepsilon(v)$, alors il existe une suite $v = x_0, x_1, \ldots, x_n = x$ telle que $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ pour tout $0 \leq k < n$. Alors $B(x,\varepsilon) \subset J_\varepsilon(v)$, car si $w \in B(x,\varepsilon)$, alors $\{v, x_1, \ldots, x_n, w\}$ est une ε-chaîne.

Mais $J_\varepsilon(v)$ est également fermé. Effectivement, soit $(w_m)_m$ une suite d'éléments de $J_\varepsilon(v)$ telle que $\lim_{m\to\infty} w_m = w$. Alors il existe m tel que $d(w_m, w) < \varepsilon$. Puisque w_m est joignable de v par une ε-chaîne, w en est aussi.

Comme X est connexe, et $J_\varepsilon(v)$ est un ouvert-fermé non vide, $J_\varepsilon(v) = X$, donc $\bigcap_{\varepsilon>0} J_\varepsilon(v) = X$ (pour tout $v \in X$) c'est-à-dire X est bien enchaîné.

(b) Supposons que X est compact, bien enchaîné, mais pas connexe. Alors il existe deux fermés disjoints non vides X_0, X_1 tels que $X_0 \cup X_1 = X$. Alors, d'après l'exercice V.1, la distance

$$d(X_0, X_1) := \inf\{d(x_0, x_1) : x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\} > 0.$$

Donc si $\varepsilon > 0$ est plus petit que cette distance, alors il n'existe pas de ε-chaîne joignant un élément de X_0 avec un élément de X_1.

(c) Par exemple, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont bien enchaînés non connexes.

Exercice VII.2. *Montrer que*

(a) *toute partie convexe d'un espace euclidien est connexe,*

(b) *toute partie connexe de $\mathbb{R}$ est convexe, c'est-à-dire un intervalle.*

Solution. (a) D'après la définition, tout convexe est connexe par arcs, donc connexe.

(b) Rappelons que dans un espace vectoriel, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit

$$x_s := (1-s)x_0 + sx_1.$$

Ainsi si $x_0 \neq x_1$, la droite passant par x_0 et x_1 est donnée par $\{x_s : s \in \mathbb{R}\}$. Si une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas convexe, alors il existe $x_0, x_1 \in A$ et $0 < r < 1$ tel que $x_r \notin A$, c'est-à-dire A n'est pas un intervalle. Les ensembles $\{x_s : s < r\}$ et $\{x_s : s > r\}$ sont séparés, non vides (le premier contient x_0 et le second x_1) et $A \subset \{x_s : s < r\} \cup \{x_s : s > r\}$. Selon la proposition VII.1.12, A n'est pas connexe.

D'autre part, tout intervalle non vide I est de la forme $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, où $(a_n)_n$ est une suite décroissante et $(b_n)_n$ est une suite croissante et par conséquent, I est convexe.

Exercice VII.3. *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue. Montrer qu'il existe x_∞ tel que $f(x_\infty) = x_\infty$.*

Solution. Soit $h(x) := f(x) - x$. Alors $h(0) \geq 0$ et $h(1) \leq 1$. Comme $[0,1]$ est connexe, d'après le théorème VII.1.10, il existe $x_\infty \in [0,1]$ tel que $h(x_\infty) = 0$, donc $f(x_\infty) = x_\infty$.

Exercice VII.4. *Soit $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ parties connexes d'un espace métrique X et $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n. Soit*

$$A_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Montrer que

(a) *si A_n est compact pour tout n, alors A_∞ est connexe,*

(b) *si A_n est fermé pour tout n et $A_\infty \neq \varnothing$, alors A_∞ n'est pas forcément connexe. Donner un exemple.*

Solution. (a) Puisque A_0 est compact, on peut se restreindre à un sous-espace compact de X. Supposons que A_∞ n'est pas connexe. Comme il est compact, donc fermé, alors il existe deux parties fermées, non vides et disjointes M et N telles que $A_\infty = M \cup N$.

Alors il existe deux parties ouvertes disjointes O et P de X telles que $O \cap A_\infty = M$ et $P \cap A_\infty = N$. Bien entendu, O et P sont séparées. Alors $M_n := A_n \setminus P$ et $N_n := A_n \setminus O$ sont compacts non vides, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n = N$. Selon l'exercice V.4, il existe n tel que $A_n \subset O \cup P, M_n \subset O$ et $N_n \subset P$, donc $A_n = M_n \cup N_n$, c'est-à-dire A_n est l'union de deux parties séparées non vides.

(b) Soit $M := \{(x, y) : x > 0, yx = 1\}$, $N := \{(x, y) : y = 0\}$. La partie $A_n := M \cup N \cup \{(x, y) : x = n\}$ est connexe pour tout n, mais leur intersection est $M \cup N$, donc disconnexe.

Exercice VII.5. *Composantes et quasi-composantes.*

(a) *Quelles sont les composantes de* $X := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}$?

(b) *Est-ce que toute composante est ouverte ?*

(c) *Si* $n \in \mathbb{N}_1$ *et* $\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ *est une famille de connexes, fermés, non vides, disjoints et* $X = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$, *alors* $C_0, C_1, \ldots, C_n$ *sont les composantes de* X.

(d) *Si la famille de fermés, connexes, non vides n'est pas finie, alors la conclusion ci-dessus n'est plus valable.*

(e) *Si* $C^{(x)}$ *est la composante de* x *et* $Q^{(x)}$ *est la quasi-composante de* x, *alors* $C^{(x)} \subset Q^{(x)}$.

Solution. (a) Les singletons.

(b) Non. Par exemple, $\{0\}$ de (a) n'est pas ouvert.

(c) Conséquence immédiate de la définition.

(d) Considérer la famille $\{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(e) S'il y avait $w \in C^{(x)} \setminus Q^{(x)}$, alors il existerait un ouvert-fermé Q tel que $w \notin Q$ et $x \in Q$. Ainsi $Q \cap C^{(x)}$ et $C^{(x)} \setminus Q$ seraient deux ouverts-fermés non vides et disjoints de $C^{(x)}$ en contradiction avec la connexité de $C^{(x)}$.

Exercice VII.6. *Montrer que*

(a) *tout espace métrique discret est localement connexe,*

(b) X *est localement connexe si et seulement si les composantes de chaque partie ouverte de* X *sont ouvertes dans* X,

(c) *l'image continue d'un espace localement connexe n'est pas forcément localement connexe,*

(d) *l'image d'un espace localement connexe par une application quotient est localement connexe,*

(e) *il existe un espace connexe qui n'est pas localement connexe.*

Solution. (a) Tout élément x admet un voisinage $\{x\}$ qui est connexe.

(b) Soit X localement connexe, O une partie ouverte de X et C une composante de O. Si $x \in C$, alors, suivant la définition, il existe un voisinage connexe V de x tel que $V \subset O$. Par conséquent, $V \subset C$, ce qui montre que C est ouvert.

Si la condition est vérifiée et O est un voisinage ouvert de x, alors la composante C de x dans O est un ouvert connexe inclut dans O, c'est-à-dire l'espace est localement connexe.

(c) L'ensemble $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\}$ avec la topologie discrète est localement connexe, mais n'est pas localement connexe pour la topologie héritée de la droite réelle. L'identité est continue de la topologie discrète vers la topologie usuelle.

(d) Soit $f : X \to Y$ une application quotient et X un espace localement connexe. Soit O un ouvert de Y et C sa composante. Puisque f est une application quotient, afin de prouver que C est un ouvert, il suffit de montrer que $f^{-1}(C)$ est ouverte. Soit $x \in f^{-1}(C) \subset f^{-1}(O)$. Comme X est localement connexe, il existe un voisinage connexe V de x tel que $V \subset f^{-1}(O)$. Comme f est continue, $f(V)$ est connexe et $f(x) \in f(V) \subset O$ et $f(x) \in C$. Ainsi $f(V) \subset C$ et par conséquent, $V \subset f^{-1}(C)$. Nous avons montré que $f^{-1}(C)$ est ouvert.

(e) Dans $\mathbb{R}^2$ on définit S comme l'union des intervalles $[(0,0), (\frac{1}{n}, 1)]$ et de $[(0,0), (0,1)]$. Chaque intervalle est connexe et $(0,0)$ est l'élément commun de tous ces intervalles. Ainsi S est connexe. Si $0 < r \leq 1$ et V est un voisinage fermé de $(0,r)$ de diamètre inférieur à r, alors il existe n_0 tel que $V \cap [(0,0), (\frac{1}{n}, 1)]$ et $V \cap [(0,0), (0,1)]$ sont des composantes de V pour $n \geq n_0$. Ceci montre que S n'est pas localement connexe.

Exercice VII.7. *Montrer que*

(a) *un espace localement connexe par arcs est localement connexe,*

(b) *si un espace métrique (X, d) est compact et localement connexe par arcs, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(w, x) < \delta$, alors il existe un arc de diamètre inférieur à ε joignant w et x.*

Solution. (a) Soit X localement connexe par arcs $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que si $v, w \in B(x, \delta)$, donc il existe un arc $L_{v,w}$ joignant v avec w et $\operatorname{diam} L_{v,w} < \varepsilon$. Donc $V := \bigcup \{L_{x,w} : w \in B(x,\delta)\}$ est connexe et $B(x,\delta) \subset V \subset B(x,\varepsilon)$.

(b) Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ il existe $w_n, x_n \in X$ tels que $d(w_n, x_n) < \frac{1}{n}$ mais tout arc les joignant est de diamètre supérieur à ε. Puisque X est compact, il existe une suite strictement croissante $(n_k)_k$ telle que $x_\infty := \lim_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. D'après l'hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que tout couple d'éléments de $B(x_\infty, \delta)$ est joignable par un arc et de diamètre inférieur à ε. D'autre part, il existe k tel que $w_{n_k}, x_{n_k} \in B(x_\infty, \delta)$, une contradiction.

Exercice VII.8. *Montrer que*

(a) *(Théorème de Hahn-Mazurkiewicz) tout espace métrique compact, connexe et localement connexe par arcs est l'image continue de* $[0,1]$,

(b) *le cube de Hilbert est l'image continue de* $[0,1]$,

(c) *(courbe de Peano)* $[0,1]^2$ *est l'image continue de* $[0,1]$.

Solution. (a) Comme X est un espace métrique compact, alors d'après le théorème V.1.19, il existe une application continue f de l'ensemble de Cantor C sur X. L'ensemble $[0,1]\setminus C$ est l'union d'une suite d'intervalles ouverts $]a_n,b_n[$. Alors $\lim_{n\to\infty}|f(b_n)-f(a_n)| = 0$, car $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ et f est uniformément continue. D'après l'exercice VII.7, il existe une suite d'applications continues $f_n : [a_n,b_n \to X$ telles que $f_n(a_n)=f(a_n)$ et $f_n(b_n)=f(b_n)$ avec $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam} f_n([a_n,b_n])=0$. La fonction $F(x) := f(x)$ si $x\in C$ et $f(x) := f_n(x)$ si $a_n<x<b_n$, est continue et prolonge f sur $[0,1]$.

(b) Le cube de Hilbert est compact et connexe en tant que produit d'espaces métriques compacts connexes.

Si $f,g\in\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$, alors $F(t) := (1-t)f+tg$ pour $t\in[0,1]$ définit un arc dans le cube de Hilbert joignant f et g. Pour tout $f\in\prod_{n\in\mathbb{N}}[0,1]$, l'ensemble

$$V_{F,\varepsilon}(f) := \{g : n\in F \Longrightarrow |g(n)-f(n)|<\varepsilon\}$$

est évidemment connexe par arcs. Puisque $\{V_{F,\varepsilon}(f) : \operatorname{card} F<\infty, \epsilon>0\}$ forment une base des voisinages de f, la proposition est une conséquence de (a).

(c) Une conséquence immédiate du théorème VII.8 de Hahn-Mazurkiewicz. Esquissons une démonstration directe (semblable à celle de Hilbert).

Divisons $[0,1]^2$ en 4^n carrés égaux $Q^n_{j,k}$, où $1\le j,k\le 2^n$ pour $n\in\mathbb{N}_1$. On ordonne $Q^1_{0,0}, Q^1_{0,1}, Q^1_{1,1}, Q^1_{1,0}$ et soit $f_1 : [0,1]\to[0,1]^2$ affine par morceaux telle que $f_1(0,\frac14)\subset Q^1_{0,0}$, $f_1(\frac14,\frac12)\subset Q^1_{0,1}$, $f_1(\frac12,\frac34)\subset Q^1_{1,1}$ et $f_1(\frac34,1)\subset Q^1_{1,0}$. Par récurrence, on divise chaque carré $Q^n_{j,k}$ en quatre carrés, et tout intervalle correspondant en quatre intervalles, et on définit f_n, affine par morceaux, comme avant.

Ainsi, $f_n([0,1])\cap Q^m_{j,k}\neq\varnothing$ pour $n\ge m$ et la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy pour la convergence uniforme. Par conséquent, la limite $f_\infty : [0,1]\to[0,1]^2$ est continue et $f_\infty([0,1])$ est dense, mais également fermée en tant qu'image continue d'un compact.

Construction originale de Peano [27] : Peano utilisa la représentation ternaire de $t=0,a_1a_2\ldots$ de $[0,1]$ pour définir les représentations ternaires des coordonnées $(x(t),y(t))$ de $f(t)\in[0,1]^2$.

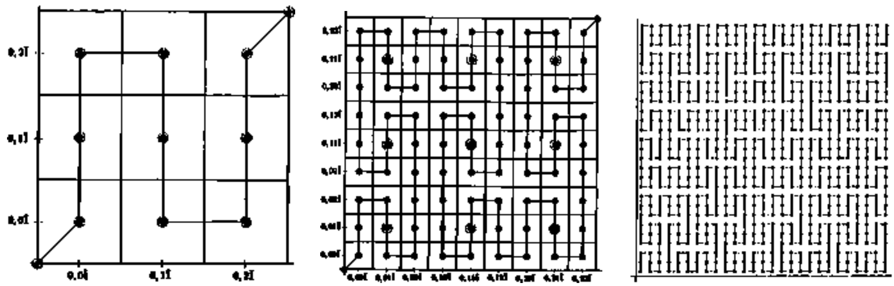
$$x(t)=0,b_1b_2\ldots \text{ et } y(t)=0,c_1c_2\ldots,$$

Il se servit de l'involution $\boldsymbol{k} : \{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ par

$$\boldsymbol{k}(0)=2,\ \boldsymbol{k}(1)=1,\ \boldsymbol{k}(2)=0.$$

Ainsi $\boldsymbol{k}^n(a)=a$ si n est pair et $\boldsymbol{k}^n(a)=\boldsymbol{k}(a)$ si n est impair. L'application $f : [0,1]\to[0,1]^2$ est définie par

$$b_n=\boldsymbol{k}^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}}(a_{2n-1}) \text{ et } c_n=\boldsymbol{k}^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}(a_{2n}).$$



Les trois approximations successives de la courbe originelle de Peano.

Dans l'illustration les sommets des trois interpolations suivantes de f sont données

$$0, a_1 a_2 \overline{1},\ 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \overline{1},\ 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \overline{1}$$

pour $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \{0, 1, 2\}$, où $\overline{1}$ désigne 1 périodique.

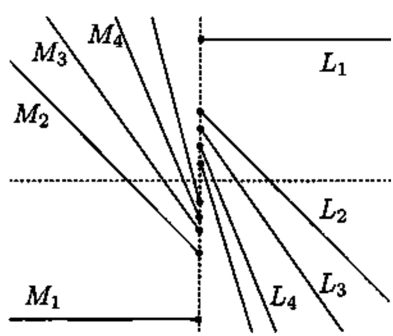
Exercice VII.9. *Trouver un sous-espace connexe de $\mathbb{R}^2$ qui est l'union dénombrable disjointe de fermés connexes.*

Solution. 1. Soit [3]

$$L_n := \left\{ \left(x, \tfrac{1}{n} - nx \right) : x \geq 0 \right\},\ M_n := \left\{ \left(x, -\tfrac{1}{n} - nx \right) : x \leq 0 \right\}.$$

Alors $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} (L_n \cup M_n)$ est connexe car, pour tout n,

$$M_n \cap \mathrm{cl}\left(\bigcup\nolimits_{k \in \mathbb{N}_1} L_k\right) \neq \varnothing \text{ et } L_n \cap \mathrm{cl}\left(\bigcup\nolimits_{k \in \mathbb{N}_1} M_k\right) \neq \varnothing.$$



Un connexe qui est l'union dénombrable disjointe de fermés connexes.

Solution. 2. Pour $n \in \mathbb{N}_1$,

$$D_n := \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 = n^2 \right\} \text{ et } L_n := \left\{ \left(x, \tfrac{1}{n}\right) : x \geq 0 \right\}.$$

3. Communiquée par mes étudiants Yohan Fleuriot et Louis Singrelin (3 janvier 2012).

Soit θ_n et x_n tels que $D_n \cap L_n = \{(x_n, \frac{1}{n})\}$ et $\varphi(x_n, \frac{1}{n}) = (n, \theta_n)$, où $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le changement en variables polaires. Définissons $F_0 := \{(0,0)\}$ et

$$F_n := \{(x, \tfrac{1}{n}) : 0 \leq x \leq x_n\} \cup \{(n, \theta) : \theta_n \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Alors F_n est fermé et connexe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $n \neq k$ alors $F_n \cap F_k = \varnothing$. L'ensemble $X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est connexe, car si $\varnothing \neq A \subset \mathbb{N}$ est tel que $\mathbb{N} \setminus A \neq \varnothing$, alors

$$(\mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus A} F_n \cap \bigcup_{n\in A} F_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus A} F_n \cap \mathrm{cl} \bigcup_{n\in A} F_n) \neq \varnothing.$$

Exercice VII.10. *Montrer que*

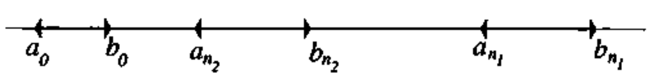
(a) *on peut décomposer $\mathbb{R}^2$ en une famille de fermés disjoints, chacun étant de cardinalité $\mathfrak{c}$,*

(b) *on ne peut pas représenter $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, où $a_n \leq b_n$, où $a_n \leq b_n$ et $[a_n, b_n] \cap [a_m, b_m] = \varnothing$ si $n \neq m$,*

(c) *on ne peut pas représenter $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, où tous les D_n sont des disques fermés non vides et disjoints deux à deux.*

Solution. (a) Par exemple, $\{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ est une telle famille.

(b) Soit n_1 le plus petit nombre naturel tel que $b_0 < a_{n_1}$, c'est-à-dire $[a_{n_1}, b_{n_1}]$ est le premier intervalle de la suite $([a_n, b_n])_n$ qui se trouve à droite de $[a_0, b_0]$. Bien entendu, il existe le plus n_2 tel que $b_0 < a_{n_2} \leq b_{n_2} < a_{n_1}$,



c'est-à-dire $[a_{n_2}, b_{n_2}]$ est le premier intervalle qui est situé entre $[a_0, b_0]$ et $[a_{n_1}, b_{n_1}]$. Ainsi de suite. Si nous avons trouvé $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (avec k pair) tels que

$$b_0 \leq a_{n_1} \leq b_{n_1} < \ldots < b_{n_k} < \ldots < a_{n_{k-1}} < a_{n_2} \leq b_{n_2} < a_{n_1},$$

alors il existe le plus petit n_{k+1} tel que $b_{n_k} < a_{n_{k+1}} \leq b_{n_{k+1}} < a_{n_{k-1}}$. On observe que $\bigcup_{n=0}^{n_{k+1}} [a_n, b_n]$ est disjoint de $[a_{n_{k+1}}, b_{n_{k+1}}]$. Donc il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{p\to\infty} b_{n_{2p}} \leq r \leq \lim_{p\to\infty} a_{n_{2p+1}}$ and $r \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \mathbb{R}$, ce qui est une contradiction.

(c) S'il y avait une telle représentation, alors il suffisait de considérer $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \cap L$, où L est une droite telle que $\mathrm{card}\,\{n : L \cap D_n \neq \varnothing\} > 1$ afin de contredire (b).

Exercice VII.11. *Montrer que si X est connexe, x est un point de coupure de X et A, B sont ouverts disjoints non vides tels que $X \setminus \{x\} = A \cup B$, $A \cup \{x\}$ et $B \cup \{x\}$ sont connexes.*

Solution. Si $A \cup \{x\}$ n'est pas connexe, alors comme B est ouvert, $A \cup \{x\}$ est fermé, alors il existe deux fermés disjoints non vides F_0, F_1 tels que

$F_0 \cup F_1 = A \cup \{x\}$ soit disjoint de B. Mais $B \cup \{x\}$ est aussi fermé, et $F_0 \cup F_1 \cup B \cup \{x\} = X$. Or, $x \in F_0 \cup F_1$, par exemple, $x \in F_1$. Donc F_0 et $F_1 \cup B \cup \{x\}$ sont deux fermés disjoints non vides, dont l'union est X, une contradiction.

Exercice VII.12. *Montrer qu'un espace métrique X est connexe et compact et le nombre de ses points de non coupure est deux si et seulement si X est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$.*

Solution. Soit c, d les deux points de non coupure de X. En conséquence, pour tout $x \in X \backslash \{c,d\}$, il existe deux ouverts disjoints $C(x)$ et $D(x)$ tels que $c \in C(x), d \in D(x)$ et $X \setminus \{x\} = C(x) \cup D(x)$. Si $x, w \in X$ et $C(x) \subset D(w)$, alors on écrit $c \leq x \leq w \leq d$.

La relation $\leq$ est évidemment un ordre qui s'avère total, car si $w \neq x$, alors $w \in C(x)$, donc si $w = c$, alors $w < x$, sinon $C(w) \subset C(x)$. Effectivement, $C(x) \cup \{x\} \setminus \{w\}$ est disconnexe.

Sinon

$$X \setminus \{w\} = (C(x) \cup \{x\} \setminus \{w\}) \cup (D(x) \cup \{x\})$$

serait connexe, en tant qu'union de deux connexes ayant un point commun, contrairement à l'hypothèse que w est un point de coupure de X. Donc il existe deux ouverts connexes disjoints O_0 et O_1 telle que $C(x) \cup \{x\} \setminus \{w\} = O_0 \cup O_1$, ce qui veut dire que

$$X \setminus \{w\} = O_0 \cup O_1 \cup (D(x) \cup \{x\}).$$

Comme $x \in O_0 \cup O_1$, par exemple $x \in O_1$, alors $O_1 \cup (D(x) \cup \{x\})$ est connexe contenant d, ainsi $D(w) = O_1 \cup (D(x) \cup \{x\})$ et $C(w) = O_0$.

Comme X est compact et métrisable, il est séparable, donc un ensemble dénombrable dense Q de X ne contenant ni c ni d, et muni d'ordre total est dense (en soi) et non borné, donc homéomorphe à $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ d'après l'exercice III.27.

Soit

$$f : Q \to \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\} \subset [0,1]$$

un homéomorphisme. Si F_0, F_1 sont deux fermés disjoints de $[0,1]$, alors il existe deux fermés disjoints H_0, H_1 qui sont des unions finies d'intervalles fermés, et tels que $F_0 \subset H_0, F_1 \subset H_1$. Il suffit donc de considérer deux intervalles fermés H_0, H_1 tels qu'il existe $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$ pour lesquels $h_0 < q_0 < q_1 < h_1$ pour tout $h_0 \in H_0$ et $h_1 \in H_1$. Donc si $x_0 \in \operatorname{cl} f^{-1}(H_0)$ et $x_1 \in \operatorname{cl} f^{-1}(H_1)$, alors $x_0 \leq f^{-1}(q_0) < f^{-1}(q_1) \leq x_1$. En vertu du théorème VII.3.1, il existe une application continue $\widetilde{f} : X \to [0,1]$ telle que $f(x) = \widetilde{f}(x)$ pour tout $x \in Q$. Comme $\widetilde{f}$ est bijective et $[0,1]$ est compact (séparé), donc $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme.

Exercice VII.13. *Montrer que*

(a) *tout espace connexe par arcs est connexe,*

(b) *la partie $A := \left\{(r,s) : r > 0, s = \sin(\frac{1}{r})\right\}$ de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs,*

(c) $A \cup \{(0,0)\}$ *est connexe,*

(d) $A \cup \{(0,0)\}$ *n'est pas connexe par arcs.*

Solution. (a) Si X est connexe par arcs, mais n'est pas connexe, c'est-à-dire il existe deux fermés, disjoints, non vides F_0, F_1 tels que $F_0 \cup F_1 = X$, alors il existe $x_0 \in F_0$ et $x_1 \in F_1$ et, d'après la proposition VII.1.21, une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = x_0$ et $f(1) = x_1$. Donc $[0,1]$ est décomposé en deux fermés, disjoints, non vides $f^{-1}(F_0)$ et $f^{-1}(F_1)$, ce qui n'est pas possible, car $[0,1]$ est connexe.

(b) A est l'image de $]0,\infty[$ par $\varphi(r) := (r, \sin(\frac{1}{r}))$, qui est continue et injective. Si $r_0, r_1 \in]0,\infty[$, par exemple, $r_0 < r_1$, alors $\varphi([r_0, r_1])$ est un arc.

(c) Puisque $A \subset A \cup \{(0,0)\} \subset \operatorname{cl} A = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$, selon la proposition VII.1.17, $A \cup \{(0,0)\}$ est connexe.

(d) S'il y avait un arc $f : [0,1] \to A \cup \{(0,0)\}$ telle que $f(0) = (0,0)$, alors il existerait $t > 0$ tel que $f([0,t]) \subset \{(r,s) : |s| \leq \frac{1}{2}\} \cap A$, ce qui n'est pas possible, car les composantes de $f(0)$ et $f(t)$ dans $\{(r,s) : |s| \leq \frac{1}{2}\} \cap A$ sont disjointes.

Exercice VII.14. *En utilisant des arguments liés à la connexité, montrer que*

(a) $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}$ *ne sont pas homéomorphes,*

(b) $[-1,1]$ *et* $\left\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\right\}$ *ne sont pas homéomorphes,*

(c) $[-1,1]$ *et* $\mathbb{R}$ *ne sont pas homéomorphes.*

Solution. (a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ était un homéomorphisme, alors l'espace disconnexe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ serait homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ qui est connexe.

(b) $[-1,1]$ privé de $\{1\}$ est connexe, mais $\left\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\right\}$ privé d'un point ne l'est pas.

(c) Si $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ était un homéomorphisme, alors l'espace connexe $[-1,1[$ serait homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus \{g(1)\}$ qui n'est pas connexe.

Exercice VII.15. *Montrer que*

(a) $\mathbb{R}$ *est connexe par arcs,*

(b) $\mathbb{R}^n$ *est connexe par arcs pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

(c) $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ *est connexe par arcs pour tout* $a \in \mathbb{R}^n$ *si* $n > 1$.

Solution. (a) Pour tous $r_0 < r_1$, l'intervalle $[r_0, r_1]$ est homéomorphe à $[0,1]$, c'est-à-dire un arc.

(b) Si x_0, x_1 sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$, alors

$$[x_0, x_1] := \{(1-\alpha)x_0 + \alpha x_1 : \alpha \in [0,1]\}$$

est un arc joignant x_0 et x_1.

(c) Si x_0, x_1 sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, alors $a \notin [x_0, x_1]$ ou bien $a \notin [x_0, x] \cup [x, x_1]$ pour tout $x \notin [x_0, x_1]$. Or $[x_0, x] \cup [x, x_1]$ est un arc dans $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ joignant x_0 et x_1.

Exercice VII.16. *Montrer que si $n > 1$ et A est dénombrable, alors $R^n \setminus A$ est connexe par arcs.*

Solution. Soit $p, q \in \mathbb{R}^n$ avec $n > 1$ et L une droite telle que $p, q \notin L$. Alors pour tout $r \in L$, l'ensemble $[p, r] \cup [r, q]$ est connexe dans $\mathbb{R}^n$. Or $\{r \in L : [p, r] \cup [r, q] \cap A \neq \varnothing\}$ est dénombrable, car A est dénombrable, il existe donc $r \in L$ tel que $[p, r] \cup [r, q] \cap A = \varnothing$. Ceci montre que $\mathbb{R}^n \setminus A$ est connexe.

Exercice VII.17. *Un espace métrique X est connexe par arcs si et seulement si pour tous $x_0, x_1 \in X$ il existe une application continue $l : [0, 1] \to X$ telle que $l(0) = x_0$ et $l(1) = x_1$.*

Solution. Supposons que pour chaque couple d'éléments distincts x_0, x_1 de X, il existe une application continue $l : [0, 1] \to X$ telle que $l(0) = x_0$ et $l(1) = x_1$. Comme $[0, 1]$ est compact, l est une application parfaite, donc quotient, et par conséquent, $l([0, 1])$ est compact, connexe et localement connexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, soit $V_0^n, V_1^n, \ldots, V_{k_n}^n$ connexes ouverts tels que $x_0 \in V_0^n, x_1 \in V_{k_n}^n$, $\operatorname{diam} V_j^n < \frac{1}{n}$ et $V_j^n \cap V_i^n \neq \varnothing$ si et seulement si $|i - j| = 1$ pour tout $0 \leq j, i \leq k_n$, et pour chaque n et une application croissante m_n de $0 \leq j \leq k_n$ dans $0 \leq i \leq k_{n-1}$ tels que $\operatorname{cl} V_j^n \subset V_{m_n(i)}^{n-1}$. Alors

$$S := \bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}_1} \operatorname{cl} \bigcup\nolimits_{0 \leq j \leq k_n} \operatorname{cl} V_j^n$$

est un compact connexe contenant x_0 et x_1 tel que pour tout autre élément x de S, il existe une suite $(j_n)_n$ telle que $0 \leq j_n \leq k_n$ et $m_n(j_n) = j_{n-1}$. Ainsi $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} \operatorname{cl} V_{j_n}^n$ est un point de non coupure de S. Selon l'exercice VII.11 (b), S est homéomorphe à $[0, 1]$ de telle sorte que x_0 correspond à 0 et x_1 à 1.

Exercice VII.18. *Espaces zéro-dimensionnels*

(a) *Montrer que toute composante d'un espace zéro-dimensionnels X est un singleton.*

(b) *Quelles sont les composantes de $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$?*

Solution. (a) Soit x_0, x_1 deux éléments distincts d'une composante D de X. Comme X est un espace métrique zéro-dimensionnel, il existe un voisinage ouvert-fermé V de x_0 tel que $x_1 \notin V$. Alors $D \cap V$ et et $D \setminus V$ sont deux fermés, disjoints non vides, ce qui contredit la connexité de D.

(b) Puisque c'est un espace zéro-dimensionnel, ce sont les singletons.

Exercice VII.19. *Soit C l'ensemble de Cantor et $f : C \to [0, 1]$ une application continue surjective. Montrer que pour tout $0 < r < 1$ et $\varepsilon > 0$ il existe $y \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ tel que* $\operatorname{card} f^{-1}(y) > 1$.

Solution. Sinon il existerait r et ε tels que $f^{-1}([r-\varepsilon, r+\varepsilon])$ serait une partie connexe de cardinalité $\mathfrak{c}$ de l'ensemble de Cantor contrairement à l'exercice VII.18.

Exercice VII.20. *Si $0 < x < y$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
si n est pair, alors $[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] > [a_0, a_1, \ldots, a_n, y]$,
si n est impair, alors $[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] < [a_0, a_1, \ldots, a_n, y]$.

Solution. Si $n = 0$, alors $[a_0, x] = a_0 + \frac{1}{x} > a_0 + \frac{1}{y} = [a_0, y]$. Si $n = 1$, alors d'après le cas $n = 0$,

$$[a_0, a_1, x] = [a_0, [a_1, x]] < [a_0, [a_1, y]] = [a_0, a_1, y].$$

Si $n, k \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leq n \leq k$, l'hypothèse est vraie, alors pour $n = k+1$, l'inégalité sera renversée par rapport à $k = n$, car

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, w] = [a_0, [a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, w]]$$

pour tout $w > 0$.

Exercice VII.21. *Si $1 \leq x < y$ et $n \in \mathbb{N}_1$, alors*

$$|[a_0, a_1, \ldots, a_n, x] - [a_0, a_1, \ldots, a_n, y]| \leq \frac{y-x}{xy+n}.$$

Solution. Si $n = 0$, alors

$$[a_0, x] - [a_0, y] = a_0 + \frac{1}{x} - (a_0 + \frac{1}{y}) = \frac{y-x}{xy}.$$

Supposons que la formule soit valable pour $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
&|[a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, x] - [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}, y]| \\
&= |[a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{x}] - [a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{y}]| \\
&\leq \frac{\left|a_{n+1} + \frac{1}{y} - (a_{n+1} + \frac{1}{x})\right|}{(a_{n+1} + \frac{1}{x})(a_{n+1} + \frac{1}{y}) + n} \leq \frac{\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right|}{1 + (\frac{1}{y} + \frac{1}{x}) + \frac{1}{xy} + n} \\
&= \frac{|x-y|}{xy + y + x + 1 + n} \leq \frac{|x-y|}{xy + (n+1)}.
\end{aligned}$$

VIII. Espaces vectoriels

Solutions (exercices des pages 147-149)

Exercice VIII.1. *Montrer que*

(a) *pour tout partie linéaire A de X, l'image LA (de A par L) est linéaire,*

(b) *si $f : X \to Y$ est une application linéaire, alors $f(A)$ est linéaire pour toute partie linéaire A de X,*

(c) *si $f : X \to Y$ est une application linéaire, alors $f^{-1}(B)$ est linéaire pour toute partie linéaire B de Y.*

Solution. (a) Soit $y_0, y_1 \in LA$ et λ_0, λ_1 deux scalaires. Il s'ensuit qu'il existe $x_0, x_1 \in A$ tels que $(x_0, y_0) \in L$ et $(x_1, y_1) \in L$. Comme L et A sont linéaires,

$$\begin{aligned}(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1, \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1) &= \lambda_0 (x_0, y_0) + \lambda_1 (x_1, y_1) \in L, \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 &\in A,\end{aligned}$$

donc $\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \in LA$, prouvant la linéarité de LA.

(b) Car $f(A) = \widetilde{f}A$, où $\widetilde{f}$ est la relation applicationnelle de f.

(c) Car $f^{-1}(B) = (\widetilde{f})^{-1}B$.

Exercice VIII.2. *Soit X un espace vectoriel réel, $f \in X^*$ et L une partie linéaire de X. Montrer que si* $\sup\{f(x) : x \in L\} < \infty$, *alors* $f(L) = \{0\}$.

Solution. S'il existe $x \in L$ tel que $f(x) \neq 0$, donc $(f(x))^2 > 0$, alors $nf(x)x \in L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi

$$\sup\{f(x) : x \in L\} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} f(nf(x)x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} n(f(x))^2 = \infty.$$

Exercice VIII.3. *Si $f, f_1, \ldots, f_n \in X^*$, alors $\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subset \ker f$ si et seulement si $f \in \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_n\}$.*

Solution. Si $f \in \operatorname{vect}\{f_1, \ldots, f_n\}$, alors il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k$, donc $f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x) = 0$ pour tout $x \in \bigcap_{k=1}^n \ker f_k$.

Réciproquement, soit $\ker f_1 \subset \ker f$. Si $f_1 = 0$, alors $\ker f_1 = X$, donc $f = 0$; sinon il existe e tel que $f_1(e) = 1$, alors tout $x \in X$ admet une unique décomposition $x = h + re$, où $h \in \ker f_1$ et r est un scalaire, donc $f_1(x) = r$. Puisque $h \in \ker f$,

$$f(x) = f(h) + rf(e) = rf(e)f_1(e) = f(e)f_1(x),$$

donc $f = f(e)f_1$. Par récurrence, si l'implication est vraie à l'ordre n, et $\bigcap_{k=1}^{n+1} \ker f_k \subset \ker f$, alors, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $f(h) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(h)$ pour tout $h \in \ker f_{n+1}$. Si $f_{n+1} = 0$, la preuve est finie ; sinon il existe e tel que $f_{n+1}(e) = 1$, alors tout $x \in X$ admet une unique décomposition $x = h + re$, où $h \in \ker f_{n+1}$ et r est un scalaire. Soit

$$\lambda_{n+1} := f(e) - \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(e).$$

Alors pour $x = h + re$, on a

$$f(x) = f(h) + rf(e) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(h) + rf(e)$$
$$= \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(h) + r(\lambda_{n+1} f_{n+1}(e) + \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(e)) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f_k(x).$$

Exercice VIII.4. *Si X_j est un espace vectoriel pour $1 \leq j \leq n$, alors $f \in (\prod_{j=1}^n X_j)^*$ si et seulement si il existe $f_j \in X_j^*$ telles que*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j). \qquad \text{(forme)}$$

Solution. Bien entendu, (forme) est une forme linéaire sur $\prod_{j=1}^{n} X_j$. Réciproquement, si B_j est une base de Hamel de X_j pour $1 \leq j \leq n$, alors $\bigcup_{j=1}^{n} B_j$ en est une pour $\prod_{j=1}^{n} X_j$. Si $f \in (\prod_{j=1}^{n} X_j)^*$, alors $\{f(b) : b \in B_j\}$ détermine $f_j \in X_j^*$ et (forme).

Exercice VIII.5. *Quelle est la dimension de* $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$?

Solution. La cardinalité de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ est $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, donc la dimension n'est pas supérieure à $\mathfrak{c}$. Elle est égale à $\mathfrak{c}$. Effectivement, si $\mathcal{A}$ est une famille presque disjointe de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que $\operatorname{card} \mathcal{A} = \mathfrak{c}$, alors la famille

$$\{\chi_A : A \in \mathcal{A}\}$$

est linéairement indépendante, car si $\sum_{k=1}^{m} r_k \chi_{A_k} = 0$, où $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des éléments (distincts) de $\mathcal{A}$, alors pour tout $1 \leq k \leq m$, il existe $n_k \in A_k \setminus \bigcup \{A_j : 1 \leq j \leq m, j \neq k\}$, donc $0 = \sum_{j=1}^{m} r_j \chi_{A_j}(n_k) = r_k$.

Exercice VIII.6. *Soit X un espace vectoriel. Montrer que*

(a) *si* $\dim X = \aleph_0$ *alors* $\dim(X^*) > \aleph_0$,

Solution. Soit B une base de Hamel de X. Si $f : B \to \mathbf{K}$, alors

$$F_f\Big({\sum}^*_{b\in B} r_b b\Big) := {\sum}^*_{b\in B} r_b f(b),$$

où $\sum^*_{b\in B} r_b b$ signifie que le nombre de b pour lesquels $r_b \neq 0$ est fini, définit une forme linéaire F_f sur X. Il existe une famille presque disjointe maximale $\mathcal{B}$ de parties infinies de B. La cardinalité de $\mathcal{B}$ n'est pas dénombrable. Effectivement, si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{B}$, alors prenons une sélection $B_\infty := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B} \cup \{B_\infty\}$ est presque disjointe, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{B}$. L'ensemble $\{f_D : D \in \mathcal{B}\}$ telle que $f_D(b) = \chi_D(b)$ (où χ_D est la fonction caractéristique de D) est linéairement indépendante dans X^*. Donc $\dim(X^*) > \aleph_0$.

Exercice VIII.7. *Décrire les convexes A dans $\mathbb{R}^n$ tels que $0 \notin A$ et maximaux par rapport à l'inclusion.*

Solution. Dans $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, le seul convexe maximal ne contenant pas 0 est $\varnothing$. Dans $\mathbb{R}$ les convexes coïncident avec les intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$, où $a \leq b$. Ainsi $]-\infty, b[$ et $]a, \infty[$ sont les convexes maximaux ne contenant pas 0.

Dans $\mathbf{R}^2$ pour tout $y, z \neq 0$, l'ensemble

$$\{x : \langle x, y\rangle < 0\} \cup \{x : \langle x, y\rangle = 0, \langle x, y\rangle > 0\}$$

est un convexe maximal ne contenant pas 0.

Dans $X := \mathbb{R}^n$, une partie D est un convexe maximal ne contenant pas 0 si et seulement s'il existe $0 \neq f \in X^*$ tel que $D = \{x \in X : f(x) < 0\} \cup L$, où L est un convexe ne contenant pas 0 maximal de $\ker f$.

Procédons par récurrence. Effectivement, c'est vrai pour $n = 0$ et 1. Supposons que c'est vrai à l'ordre $n \geq 1$ et soit $D = \{f < 0\} \cup L$ une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, où $0 \neq f \in X^*$ et L est un convexe maximal ne contenant 0 de $\ker f$.

Si $f(x_0) < 0$ et $x_1 \in L$, alors pour $0 \leq \alpha < 1$,

$$f(x_\alpha) = f((1-\alpha)\, x_0 + \alpha x_1)) = (1-\alpha)\, f(x_0) + \alpha f(x_1) < 0,$$

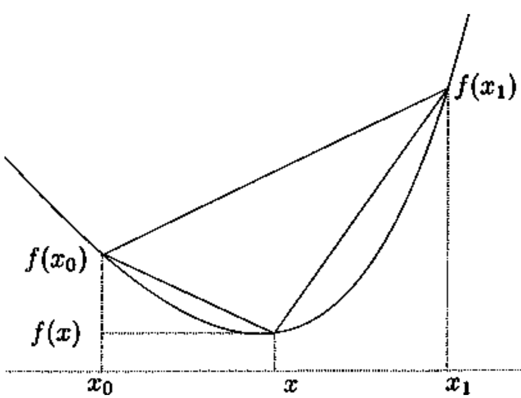
donc $x_\alpha \in \{f < 0\}$ et $x_\alpha \in L$ pour $\alpha = 1$, montrant que D est un convexe (ne contenant pas 0). Si A est un convexe ne contenant pas 0 et incluant D, alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) > 0$ ou $f(x) = 0$, mais $x \notin L$. Dans le premier cas, $-x \in D$ donc $x_{\frac{1}{2}} = 0$, une contradiction. Dans l'autre, $A \cap \ker f$ n'est pas maximal par l'hypothèse de récurrence.

Exercice VIII.8. *Montrer que* $\mathrm{cl}_a\, A \subset A$ *si et seulement si* A *est fermée pour la topologie radiale.*

Solution. Soit L une droite affine dans $\mathbb{R}^2$. Montrons que $\mathrm{cl}_a\, D \subset D$ implique que $D \cap L$ est fermé dans L. Si $x \in \mathrm{cl}_L\,(D \cap L)$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ de $D \cap L$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. S'il existe n_0 tel que $x_{n_0} \neq x$, alors soit $h := x_{n_0} - x$. Ainsi il existe une suite $(t_n)_n$ de nombres réels telle que $x_n = x + t_n h$ pour tout n. Bien entendu, il existe une suite $(t_{n_k})_k$ strictement extraite de $(t_n)_n$, dont tous les termes sont positifs ou tous les termes sont négatifs. Il s'ensuit que $x \in \mathrm{cl}_a\, D$, donc $x \in D \cap L$.

Exercice VIII.9. Montrer que

(a) *si* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *est convexe si et seulement si son épigraphe* $\mathrm{epi}\, f := \{(x,r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ *est une partie convexe,*



Interprétation géométrique de (taux). Les taux d'accroissements correspondent aux tangentes des angles formées par les sécantes respectives.

(b) *si* $x_0 < x < x_1$ *et* $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *est convexe, alors*

$$\text{(taux)} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

(c) *si* $x_0 < x < x_1$ *et* $f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *est convexe, alors* f *est continue,*

(d) *une fonction dérivable f est convexe si et seulement si f' est croissante,*

(e) *$f \in C^1$ est convexe si et seulement si pour tous v, w,*

$$\text{(convexe)} \qquad f(w) - f(v) \geq f'(v)(w - v);$$

strictement convexe si et seulement si pour tous $v \neq w$, l'inégalité dans la formule ci-dessus est stricte,

(f) *une fonction $f \in C^2$ est convexe si et seulement si f'' est positive,*

(g) *la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe.*

Solution. (a) Si f est convexe, (x_0, r_0) et (x_1, r_1) appartiennent à $\operatorname{epi} f$ et $0 < \alpha < 1$, alors avec $x_\alpha := (1 - \alpha) x_0 + \alpha x_1$ et $r_\alpha := (1 - \alpha) r_0 + \alpha r_1$,

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) &\leq (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1) \\ &\leq (1 - \alpha) r_0 + \alpha r_1 = r_\alpha, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(x_\alpha, r_\alpha) \in \operatorname{epi} f$, ce qui montre la convexité de $\operatorname{epi} f$.

Réciproquement, si $\operatorname{epi} f$ est convexe et $x_0, x_1 \in \{f < \infty\}$, alors

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \in \operatorname{epi} f,$$

donc $(x_\alpha, (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1)) \in \operatorname{epi} f$, c'est-à-dire

$$f(x_\alpha) \leq (1 - \alpha) f(x_0) + \alpha f(x_1).$$

(b) Si $x_0 < x < x_1$, alors il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $x = x_\alpha$. Alors, conformément à la définition de la convexité,

$$(1 - \alpha)(f(x_\alpha) - f(x_0)) \leq \alpha (f(x_1) - f(x_\alpha)).$$

Puisque $(1 - \alpha)(x_\alpha - x_0) = \alpha (x_1 - x_\alpha)$, donc

$$\frac{f(x_\alpha) - f(x_0)}{x_\alpha - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_\alpha)}{x_1 - x_\alpha}.$$

D'autre part, la définition est équivalente à $(1 - \alpha)(f(x_1) - f(x_0)) \leq f(x_1) - f(x_\alpha)$ et puisque $x_1 - x_\alpha = (1 - \alpha)(x_1 - x_0)$, on obtient

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_\alpha)}{x_1 - x_\alpha}.$$

(c) Soit $a < x_0 < b$. Si $x_0 < x < b$, alors

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}(x - x_0).$$

En effet, si $x_0 < x < b$, alors la seconde inégalité de (taux), avec x_1 remplacé par b, équivaut à la seconde inégalité.

D'autre part, l'inégalité entre le premier et le troisième terme dans (taux), où $x_0 < x < x_1$ sont remplacés par $a < x_0 < x$, respectivement, devient

$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ce qui équivaut à la première inégalité. On démontre les deux autres inégalités de façon analogue.

(d) Si f est dérivable, alors $f'(x_0)$ est majorée par le premier terme de (taux) et $f'(x_1)$ est minorée par le dernier. Réciproquement, si il y avait $x_0 < x_1$ tels que $f'(x_0) > f'(x_1)$, alors il existerait $t > 0$ tel que $f(x_0+t) - f(x_0) > f(x_1+t) - f(x_1)$, contrairement à (taux).

(e) Si f est convexe et $x \in D$, alors pour tout h tels que $x + h \in D$ et pour $0 < r < 1$,

$$f'(x)\,h = \lim_{r\to 0_+} \frac{f(x+rh) - f(x)}{rh} h \le f(x+h) - f(x).$$

Soit $x_0, x_1 \in D$ et $0 < \alpha < 1$. Selon (convexe),

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_\alpha) &\geq f'(x_\alpha)(x_0 - x_r), \\ f(x_1) - f(x_\alpha) &\geq f'(x_\alpha)(x_1 - x_r). \end{aligned}$$

Sommons la première ligne multipliée par $1 - \alpha$ et la seconde multipliée par α. Il s'ensuit que

$$(1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x_1) \geq f(x_\alpha).$$

(f) D'après la proposition précédente, f est convexe si et seulement si pour tous x et h tels que $x, x+h \in D$,

$$f'(x)h \le f(x+h) - f(x).$$

Grâce au théorème de Taylor (à l'ordre 2), il existe $0 < c(h) < 1$ tel que

$$f'(x)h \le f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x + c(h)\,h)\,h^2}{2},$$

donc $0 \le f''(x + c(h)\,h)$ et par conséquent, $0 \le f''(x)$ d'après la continuité de f''. Réciproquement, si f'' est positive, alors f' est croissante, donc selon (d), f est convexe.

(g) D'après le théorème de Lagrange $e^w - e^v = e^t(w - v)$ où t est entre v et w. Dans tout les cas $e^t(w-v) > e^v(w-v)$.

Exercice VIII.10. *Montrer que $a, b > 0$ et p, q sont conjugués, alors $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, avec l'égalité si et seulement si $a^p = b^q$.*

Solution. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $1 < p < \infty$, alors $0 < \frac{1}{p}, \frac{1}{q} < 1$. Grâce à la convexité de exp,

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln a + \ln b) = \exp(\tfrac{1}{p} p \ln a + \tfrac{1}{q} q \ln b) \\ &\le \tfrac{1}{p}\exp(p \ln a) + \tfrac{1}{q}\exp(q \ln b) = \tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

Puisque exp est strictement convexe, l'égalité a lieu si et seulement si $a^p = b^q$.

IX. Espaces vectoriels normés

Solutions (exercices des pages 172-174)

Exercice IX.1. *Soit X un espace normé et $A, B \subset X$. Montrer que*

(a) *si A est linéaire, alors* $\operatorname{cl} A$ *est linéaire,*

(b) *si A est une partie convexe, alors* $\operatorname{cl} A$ *est convexe,*

(c) *si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert,*

(d) *si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.*

(e) *Donner un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}^2$ tels que $A+B$ n'est pas fermé.*

(f) *Donner un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}$ tels que $A+B$ n'est pas fermé.*

Solution. (a) Soit $x_0, x_1 \in \operatorname{cl} A$ et α_0, α_1 deux scalaires. Montrons que $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \in \operatorname{cl} A$.

Comme $x_0, x_1 \in \operatorname{cl} A$, il existe deux suite $(x_{0,n})_n$ et $(x_{1,n})_n$ d'éléments de A telles que $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{0,n}$ et $x_1 = \lim_{n\to\infty} x_{1,n}$. Puisque A est linéaire, $\alpha_0 x_{0,n} + \alpha_1 x_{1,n} \in A$ pour tout n.

Les opérations d'addition et de multiplication étant continues,

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 = \lim_{n\to\infty}(\alpha_0 x_{0,n} + \alpha_1 x_{1,n}) \in \operatorname{cl} A.$$

(b) Le même raisonnement que dans (a) avec une condition supplémentaire que $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$ et $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$.

(c) Comme A est ouvert, pour tout $a \in A$ il existe $r_a > 0$ tels que $B(a, r_a) = a + B(0, r_a) \subset A$. Si $x \in A+B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Donc

$$x + B(0, r_a) = a + B(0, r_a) + b \subset A + B.$$

(d) Soit $x \in \operatorname{cl}(A+B)$, c'est-à-dire il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $A+B$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, donc il existe une suite $(a_n)_n$ dans A et une suite $(b_n)_n$ dans B telles que $x_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque A est compact, il existe une suite extraite $(a_{n_k})_k$ et $a \in A$ avec $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Donc $b_{n_k} = x_{n_k} - a_{n_k} \in B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et puisque B est fermé,

$$\begin{aligned} b &:= \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k} - a_{n_k}) \\ &= \lim_{k\to\infty} x_{n_k} - \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x - a \in B. \end{aligned}$$

Donc $x = a + (x-a) \in A + B$.

(e) Soit

$$\begin{aligned} A &:= \{(w, \tfrac{1}{w}) \in \mathbb{R}^2 : w > 0\} \text{ et} \\ B &:= \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

L'ensemble A est fermé. En effet, si $(x,y) \in \operatorname{cl} A$, alors il existe une suite $(w_n)_n$ telle que $\lim_{n\to\infty}(w_n, \frac{1}{w_n}) = (x,y)$, donc $x = \lim_n w_n$ et $y = \lim_n \frac{1}{w_n}$.

Par conséquent, $\{\frac{1}{w_n} : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$; en particulier, il existe $0 < r < \infty$ tel que $0 < \frac{1}{w_n} \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $0 < \frac{1}{r} \leq x = \lim_n w_n$.

La continuité de $w \mapsto \frac{1}{w}$ sur $\{w : w > 0\}$ entraîne que $y = \frac{1}{x}$ et, en conséquence, $(x,y) \in A$. La partie B est fermée comme l'image réciproque de 0 par la fonction continue $f(x,y) := y$. Or

$$\begin{aligned} A+B &= \bigcup_{w>0}((w,\tfrac{1}{w})+B) = \bigcup_{w>0}\left((w+\mathbb{R})\times\left\{\tfrac{1}{w}\right\}\right) \\ &= \mathbb{R}\times\bigcup_{w>0}\left\{\tfrac{1}{w}\right\} = \mathbb{R}\times\{y : y>0\} = \{(x,y) : y>0\}, \end{aligned}$$

qui n'est pas fermé : $\operatorname{cl}\{(x,y) : y>0\} = \{(x,y) : y \geq 0\}$.

(f) Les parties $A := \mathbb{Z}$ et $B := \{k+\frac{1}{k+1} : k \in \mathbb{N}_1\}$ de $\mathbb{R}$ sont fermées (car toute suite convergente de leurs éléments est stationnaire). Or

$$A+B = \{n+k+\tfrac{1}{k+1} : n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}_1\} = \mathbb{Z}+\{\tfrac{1}{k+1} : k\in\mathbb{N}_1\}.$$

En effet, pour tout $n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}_1$, on a $n+\frac{1}{k+1} = (k+\frac{1}{k+1})+(n-k)$. La partie $A+B$ n'est pas fermée, par exemple, la suite $x_k := \frac{1}{k+1}$ d'éléments de $A+B$ converge vers $0 \notin A+B$.

Exercice IX.2. *Montrer que dans un espace normé, toute boule est convexe.*

Solution. Si $x_0, x_1 \in B(x,r)$ et $0<t<1$, alors

$$\begin{aligned} d(x_t,x) &= \|(1-t)\,x_0+t\,x_1-x\| = \|(1-t)\,(x_0-x)+t(x_1-x)\| \\ &\leq (1-t)\,\|x_0-x\|+t\,\|\,x_1-x\| = (1-t)\,d(x_0,x)+t\,d(x_1,x) \\ &< (1-t)r+tr = r. \end{aligned}$$

Exercice IX.3. *Soit A un convexe dans un espace normé. Montrer que*

(a) *pour* $0 \leq \alpha < 1$,

$$(1-\alpha)\operatorname{int}A+\alpha\operatorname{cl}A \subset \operatorname{int}A,$$

(b) *si* $\operatorname{int}A \neq \varnothing$, *alors* $\operatorname{int}_a A = \operatorname{int}A$.

Solution. (a) Soit $x_0 \in \operatorname{int}A, x_1 \in \operatorname{cl}A$. Il faut montrer que pour tout $0\leq\alpha<1$ on a $x_\alpha\in\operatorname{int}A$. Comme pour $\alpha=0$, on a $x_0\in\operatorname{int}A$, supposons que $0<\alpha<1$. Il existe un voisinage (ouvert) U de 0 tel que $x_0+U\subset A$; d'autre part pour tout $t>0$, l'intersection $(x_1+tU)\cap A$ contient un vecteur x_t. En conséquence,

$$\text{(inclusion)} \qquad (1-\alpha)(x_0+U)+\alpha x_t \subset A.$$

Il nous faut trouver $t>0$ suffisamment petit pour que $x_\alpha = (1-\alpha)x_0+\alpha x_1$ appartienne à l'ouvert de (inclusion), donc à $\operatorname{int}A$. Ceci équivaut à l'existence d'un $h\in U$ tel que

$$(1-\alpha)x_0+\alpha x_1 = (1-\alpha)(x_0+h)+\alpha x_t,$$

ce qui revient à $x_1-x_t = \frac{1-\alpha}{\alpha}h \in \frac{1-\alpha}{\alpha}U$. Il suffit donc de poser $t=\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

(b) En effet, soit $x\in\operatorname{int}_a A$ et $x_0\in\operatorname{int}A$. Par conséquent, il existe $0\leq\alpha<1$ et $x_1\in A$ tel que $x=x_\alpha=(1-\alpha)x_0+\alpha x_1$ (d'après la définition de l'intérieur algébrique). En vertu de (a), $x=x_\alpha\in\operatorname{int}A$.

Exercice IX.4. *Montrer que si L est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé réel X et $x \notin L$, alors il existe $f \in X'$ tel que $f(L) = \{0\}$ et $f(x) = 1$.*

Solution. Si L est un sous-espace vectoriel fermé et $x \notin L$, alors d'après la proposition IX.3.4, il existe $y \in X'$ tel que $y(x) > \sup y(L)$. Selon l'exercice VIII.2, $y(L) = \{0\}$. En posant $f := \dfrac{y}{y(x)}$, on obtient $f(x) = 1$ et $f(L) = \{0\}$.

Exercice IX.5. *Soit*

$$(*) \qquad \|f\| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Montrer que

(a) $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\}$,

(b) $\|f\| = \inf\{r > 0 : \forall_{x\in X}\ \|f(x)\| \leq r\,\|x\|\}$.

(c) (*) *est une norme.*

Solution. (a) Bien sûr,

$$\|f\| \geq \sup\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} : x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\}.$$

D'autre part, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\|\tfrac{1}{\|x\|} f(x)\right\| = \left\|f(\tfrac{x}{\|x\|})\right\|$$

et $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$.

(b) Si $r > \|f\|$, alors $\|f(x)\| < r\,\|x\|$ pour tout $x \neq 0$, donc $\|f(x)\| \leq r\,\|x\|$ pour tout $x \in X$. Bien évidemment, $\|f\|$ est égal à l'infimum de tels r. Si $s < \|f\|$, alors il existe $x_s \neq 0$ tel que $\|f(x_s)\| > s\,\|x_s\|$, alors s n'appartient pas à l'ensemble de $r > 0$ pour lesquels on prend l'infimum.

(c) Si $\|f\| = 0$, alors $\|f(x)\| = 0$, donc $f(x) = 0$, pour tout $x \neq 0$ et, bien entendu $f(0) = 0$ d'après la linéarité de f, donc $\|f(0)\| = 0$. Ainsi $f = 0$. Maintenant, si λ est un scalaire, alors

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup\{\|\lambda f(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\lambda| \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\} = |\lambda|\,\|f\|. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \|f_0 + f_1\| &= \sup\{\|f_0(x) + f_1(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|f_0(x)\| + \|f_1(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|f_0(x)\| : \|x\| = 1\} + \sup\{\|f_1(x)\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|f_0\| + \|f_1\|. \end{aligned}$$

Exercice IX.6. *Montrer que*

(a) *tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé,*

(b) *toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.*

Solution. (a) Soit X un espace normé et E un sous-espace vectoriel de dimension finie de X. Alors E avec la norme induite par X alors E est complet, donc fermée en vertu de la proposition VI.1.6.

(b) On peut appliquer le corollaire IX.7.5, car tout espace normé de dimension finie est de Banach.

Exercice IX.7. *Montrer qu'une partie K d'un espace normé X est totalement bornée si et seulement si K est bornée et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel L de dimension finie de X tel que $K \subset B(L, \varepsilon)$.*

Solution. Une partie K totalement bornée est bornée. Si $\varepsilon > 0$, alors par définition il existe une partie finie F de K telle que $K \subset B(F, \varepsilon)$, donc $K \subset B(\operatorname{vect} F, \varepsilon)$ et $\operatorname{vect} F$ est de dimension finie.

Réciproquement, soit K bornée non vide et $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un sous-espace vectoriel L de dimension finie de X tel que $K \subset B(L, \varepsilon)$. Il s'ensuit que $W := L \cap B(K, \varepsilon)$ est non vide et bornée, donc totalement bornée en vertu de la proposition IX.4.3. Selon la définition, pour tout $w \in W$ il existe $x(w) \in K$ tel que $\|w - x(w)\| < \varepsilon$. Si D une partie finie de W telle que $W \subset B(D, \varepsilon)$, alors $\{x(w) : w \in D\}$ est une partie finie de K.

Si maintenant $x \in K$, alors il existe $y(x) \in L$ avec $\|x - y(x)\| < \varepsilon$, donc $y(x) \in W$ et, par conséquent, il existe $w \in D$ pour lequel $\|y(x) - w\| < \varepsilon$. En conséquence,

$$\|x - x(w)\| \leq \|x - y(x)\| + \|y(x) - w\| + \|w - x(w)\| < 3\varepsilon.$$

Exercice IX.8. *Soit* $\|y\|_f := \inf \{\|x\|_X : f(x) = y\}$. *Montrer que*

(a) $\|\cdot\|_f$ *est une norme sur* $f(X)$,

(b) $\|y\|_Y \leq \|f\| \, \|y\|_f$ *pour tout* $y \in f(X)$.

Solution. (a) Si $0 = \|y\|_f$ alors, pour tout $n > 0$, il existe $x_n \in f^{-1}(y)$ tel que $\|x_n\|_X < \frac{1}{n}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0_X$ et $0_Y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.

Si $\lambda = 0$, alors $\lambda y = 0_Y$, ainsi $f^{-1}(0_Y)$ est le noyau de f, donc contient 0_X. Si $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \|\lambda y\|_f &= \inf \{\|x\|_X : f(x) = \lambda y\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{\|\tfrac{1}{\lambda} x\|_X : f(\tfrac{1}{\lambda} x) = y\right\} = |\lambda| \, \|y\|_f \, . \end{aligned}$$

Puisque la relation f^{-1} est linéaire,

$$\begin{aligned}
\|y_0+y_1\|_f &= \inf\left\{\|x\|_X : x\in f^{-1}(y_0+y_1)\right\}\\
&= \inf\left\{\|x_0+x_1\|_X : x_0\in f^{-1}(y_0), x_1\in f^{-1}(y_1)\right\}\\
&\le \inf\left\{\|x_0\|_X+\|x_1\|_X : x_0\in f^{-1}(y_0), x_1\in f^{-1}(y_1)\right\}\\
&= \inf\left\{\|x_0\|_X : x_0\in f^{-1}(y_0)\right\}+\inf\left\{\|x_1\|_X : x_1\in f^{-1}(y_1)\right\}\\
&= \|y_0\|_f+\|y_1\|_f\,.
\end{aligned}$$

(b) Évidemment, $\|f(x)\|_Y \le \|f\|\,\|x\|_X$ pour tout $x\in X$. Donc si $y=f(x)$, alors

$$\|y\|_Y \le \{\|f\|\,\|x\|_X : x\in f^{-1}(y)\} = \|f\|\,\|y\|_f\,.$$

Exercice IX.9. *Montrer qu'une partie A de X est totale si et seulement si $f(A)=\{0\}$ implique $f=0$ pour tout $f\in X'$.*

Solution. Soit A totale et $f(A)=\{0\}$. Pour tout $x\in\operatorname{vect}A$ il existe $n\in\mathbb{N}_1$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$ et scalaires $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ tels que $x=\sum_{k=1}^n\lambda_k a_k$, donc $f(x)=\sum_{k=1}^n\lambda_k f(a_k)=0$, c'est-à-dire $f(\operatorname{vect}A)=\{0\}$. Ainsi $f=0$, car f est continue et $\operatorname{vect}A$ est dense dans X.

Si A n'est pas totale, alors il existe $x_0\notin\operatorname{cl}(\operatorname{vect}A)$. Puisque $\operatorname{cl}(\operatorname{vect}A)$ est linéaire et fermé, d'après la proposition IX.3.4, il existe $f\in X'$ tel que $f(x_0)>\sup\{f(x) : x\in\operatorname{cl}(\operatorname{vect}A)\}$, donc $f\neq 0$. Selon l'exercice VIII.2,

$$f(A)\subset f(\operatorname{cl}(\operatorname{vect}A))=\{0\}\,.$$

Exercice IX.10. *Soit $B^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées, continûment dérivables et dont la dérivée est bornée. Soit*

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \text{ et } |||f||| := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f'(x)\right|$$

deux normes. Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes (même pas topologiquement).

Solution. Supposons qu'il existe $a>0$ tel que $|||f|||\le a\|f\|$ pour tout $f\in B^1(\mathbb{R})$. Soit $f_n(x):=\sin(nx)$ pour $n\in\mathbb{N}_1$. Alors $f_n'(x)=n\cos(nx)$ donc $|||f_n|||=n$ et $\|f_n\|=1$, ce qui donne une contradiction : $n\le a$ pour tout $n\in\mathbb{N}_1$.

Exercice IX.11. *Pour tout $x\in X$, l'application $j(x) : X'\to K$ est définie par $j(x)(f):=f(x)$. Montrer que*

(a) *$j(x)$ est linéaire et continue, c'est-à-dire $j(x)\in X'':=(X')'$,*

(b)

(sup) $$\|j(x)\| := \sup\{|f(x)| : \|f\|=1\}\,,$$

(c) $\|j(x)\|\le\|x\|$ *pour tout $x\in X$,*

(d) $\|j(x)\|\ge\|x\|$ *pour tout $x\in X$,*

(e) *l'application $j : X\to X''$ est linéaire, injective, continue et $\|j\|=1$.*

Solution. Si $f_0, f_1 \in X'$ et α_0, α_1 sont deux scalaires, alors, par définition,

$$\begin{aligned} & j(x)(\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1) \\ = \; & (\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1)(x) = \alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) \\ = \; & \alpha_0 j(x)(f_0) + \alpha_1 j(x)(f_1). \end{aligned}$$

(b) D'après l'exercice IX.5.

(c) Selon (sup),

$$\|j(x)\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\} \le \sup\{\|f\|\,\|x\| : \|f\| = 1\} = \|x\|.$$

(d) En vertu du corollaire IX.3.2, $\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in X' \text{ et } \|f\| \le 1\}$ et si $\|f\| \le 1$, alors il existe $g \in X'$ avec $\|g\| = 1$ et $\lambda \in [0,1]$ tel que $f = \lambda g$, d'où $|f(x)| = |\lambda|\,|g(x)| \le |g(x)|$.

(e) Elle est linéaire d'après la définition et la linéarité de f pour tout $f \in X'$. Selon (c) et (d) $\|j(x)\| = \|x\|$, donc j est continue. Enfin, si $x_0 \neq x_1$, alors il existe $f \in X'$ tel que $f(x_0) \neq f(x_1)$, donc $j(x_0)(f) \neq j(x_1)(f)$.

Exercice IX.12. *Montrer que si Y est complet, alors $L_c(X, Y)$ est complet.*

Solution. Procéder *mutatis mutandis* comme dans la démonstration de la proposition IX.6.6.

Exercice IX.13. *Montrer que*

(a) *l'espace c_0 des suites convergentes vers 0, est fermé dans l_∞,*

(b) *l'espace c des suites convergentes est fermé dans l_∞,*

(c) *l'espace $c_\bullet$ des suites finies est dense dans c_0.*

(d) *Caractériser le dual de c.*

Solution. (a) Si $(x_k)_k$ est une suite et $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k tel que

$$(**) \qquad \sup\{|x_k(n) - x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon.$$

D'autre part, si $(x_k)_k$ dans c_0, alors il existe n_ε tel $|x_k(n)| < \varepsilon$ que pour $n \ge n_{\varepsilon,k}$. Ainsi $|x(n)| \le |x_k(n)| + |x_k(n) - x(n)| < 2\varepsilon$ si $n \ge n_{\varepsilon,k}$. Comme $|x(n)|$ ne dépend pas de k, on conclut que $\lim_{n\to\infty} |x(n)| = 0$.

(b) Si $(x_k)_k$ est une suite et $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_ε tel que (**) pour tout $k \ge k_\varepsilon$. Soit $w_k := \lim_{n\to\infty} x_k(n)$, donc il existe $n_{k,\varepsilon}$ tel que $|w_k - x_k(n)| < \varepsilon$ si $k \ge k_\varepsilon$ et $n \ge n_{k,\varepsilon}$ et ainsi

$$|w_k - x(n)| \le |w_k - x_k(n)| + |x_k(n) - x(n)| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre en particulier que $\{x(n) : n \ge n_{k,\varepsilon}\}$ est bornée dans $\mathbb{K}$, donc admet une suite extraite convergente vers un élément w de $\mathbb{K}$. Il s'ensuit que $|w_k - w| \le \varepsilon$ pour tout $k \ge k_\varepsilon$, donc $w = \lim_{k\to\infty} w_k$. Ainsi pour $k \ge k_\varepsilon$ et $n \ge n_{k,\varepsilon}$

$$|x(n) - w| \le |x(n) - w_k| + |w_k - x(n)| < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que $w = \lim_{n\to\infty} x(n)$.

(c) Si $x \in c_0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $|x(n)| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$. Ainsi $y \in c_\bullet$ défini par

$$y(n) := \begin{cases} x(n), \text{ si } n < n_\varepsilon, \\ 0, \text{ si } n \geq n_\varepsilon, \end{cases}$$

vérifie $\|x - y\|_\infty < \epsilon$, ce qui prouve la densité de $c_\bullet$ dans c_0.

(d) Nous allons voir que $\varphi \in c'$ si et seulement s'il existe $\varphi_0 \in l_1$ et $\varphi_1 \in \mathbb{K}$ tel que

$$\varphi(x) = \langle \varphi_0, x - \lim_{n\to\infty} x(n) \rangle + \varphi_1 \cdot \lim_{n\to\infty} x(n).$$

Observons d'abord que c est isomorphe à $c_0 \times \mathbb{K}$ (avec la norme $\|(x, \alpha)\| := \|x\|_\infty + |\alpha|$ par exemple). Effectivement, l'application $f : c_0 \times \mathbb{K} \to c$ donnée par

$$f(x, \alpha) := x + \widetilde{\alpha},$$

où $\widetilde{\alpha}(n) := \alpha$ pour tout n, est continue, car

$$\|f(x_0, \alpha_0) - f(x_1, \alpha_1)\|_\infty \leq \sup\{|x_0(n) - x_1(n)| : n \in \mathbb{N}\} + |\alpha_0 - \alpha_1|.$$

Elle est injective, car $f(x_0, \alpha_0) - f(x_1, \alpha_1) = 0$ implique $x_0 - x_1 + \alpha_0 - \alpha_1 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} (x_0 - x_1) = 0$, donc $\alpha_0 = \alpha_1$ et $x_0 = x_1$.

D'autre part, si $y \in c$, alors $f(x, \alpha) = y$, où

$$x := y - \lim_{n\to\infty} y(n) \in c_0, \ \alpha := \lim_{n\to\infty} y(n) \in \mathbb{K}$$

D'après le corollaire IX.7.4, f est un isomorphisme. Selon l'exercice VIII.4, $\varphi \in (c_0 \times \mathbb{K})'$ s'il existe $\varphi_0 \in c_0{}^*$ et $\varphi_1 \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \varphi_0 + \widetilde{\varphi_1}$, donc $\varphi_0 \in (c_0)' \approx l_1$ en vertu de la proposition IX.5.3, où $\approx$ désigne la relation d'être isomorphe.

Exercice IX.14. *Soit $\gamma \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ avec le support dans $[-1, 1]$ et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma(x) dx = 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$ soit $\gamma_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon}\gamma(\dfrac{x}{\varepsilon})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

(a) *il existe une telle fonction,*

(b) $\int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon(x)\, dx = 1$,

(c) $\lim_{\varepsilon\to\infty} \int |\gamma_\varepsilon * f(x) - f(x)|\, dx = 0$.

Solution. (a) Par exemple,

$$(\gamma) \qquad \gamma(r) := \begin{cases} c\exp(\frac{1}{r^2-1}) \text{ pour } |r| \leq 1, \\ 0, \text{ autrement,} \end{cases}$$

où c est choisie de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}} \gamma(x) dx = 1$.

(b) Le changement de variables $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$ entraîne

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\gamma(\frac{x}{\varepsilon}) dx = \int_{\mathbb{R}} \gamma(y)\, dy = 1.$$

(c) En effet,

$$\begin{aligned}
\int |\gamma_\varepsilon * f(x) - f(x)|\,dx &= \int \left| \int f(x-y)\gamma_\varepsilon(y)\,dy - f(x) \right| dx \\
&= \int \left| \int \left(f(x-y) - f(x)\right)\,\gamma_\varepsilon(y)\,dy \right| dx \\
&\leq \int \int |(f(x-y) - f(x))|\,\gamma_\varepsilon(y)\,dy\,dx \\
&\leq \sup_{|y|\leq\varepsilon} \int |f(x-y) - f(x)|\,dx \cdot \int \gamma_\varepsilon(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Exercice IX.15. Montrer que

(a) si $g \in C(T, \mathbb{R})$ et $G(f) := \int_T f(t)g(t)dt$, alors $G \in X'$ et

$$\|G\| = \int_T |g(t)|\,dt,$$

(b) si $t_0 \in T$ et $H(f) := f(t_0)$, alors $H \in X'$ et $\|H\| = 1$,

(c) si $(t_n)_n$ est une suite injective dans T et $(\alpha_n)_n$ une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty$, et

$$F(f) := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n f(t_n),$$

alors $F \in X'$ et $\|F\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$.

Solution. (a) Comme

$$|G(f)| \leq \int_T |f(t)g(t)|\,dt \leq \int_T |g(t)|\,dt\,\|f\|_\infty,$$

on en déduit que $\|G\| \leq \int_T |g(t)|\,dt$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon \subset T$ telle $\int_{T_\varepsilon} |g(t)|\,dt < \varepsilon$ et $T \backslash T_\varepsilon$ est une union finie disjointe d'intervalles $I_0, I_1, \ldots, I_{k_\varepsilon}$ tels que g ne change pas de signe sur I_k pour $0 \leq k \leq k_\varepsilon$.

Soit $(\operatorname{sgn} g)(t) := \dfrac{g(t)}{|g(t)|}$ pour $t \in T \setminus T_\varepsilon$. Alors $\operatorname{sgn} g$ est la limite dans $\|\cdot\|_1$ de $f_n(t) := (\varphi_n * \operatorname{sgn} g)_n(t)$ pour $t \in T$ et $f_n \in C(T, [-1,1])$ avec $\|f_n\|_\infty = 1$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} \left|\int_T |g(t)|\,dt - \int_T |f_n(t)g(t)|\,dt\right| \leq \varepsilon$, ce qui prouve $\|G\| = \int_T |g(t)|\,dt$.

(b) Comme $|H(f)| = |f(t_0)| \leq \|f\|_\infty$ et il existe $f \in C(T, [-1,1])$ avec $|f(t_0)| = 1$, on conclut que $\|H\| = 1$.

(c) L'inégalité

$$|F(f)| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|\,|f(t_n)| \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|\Big)\,\|f\|_\infty,$$

implique $\|F\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_ε tel que $\sum_{n>n_\varepsilon} |\alpha_n| < \varepsilon$ et une fonction $f_\varepsilon \in C(T, [-1,1])$ telle que $f_\varepsilon(t_n) = \dfrac{\alpha_n}{|\alpha_n|}$ si $\alpha_n \neq 0$ et $f_\varepsilon(t_n) = 0$ autrement pour tout $n \leq n_\varepsilon$, par exemple, une fonction affine par morceaux. Ainsi, $\left|F(f_\varepsilon) - \sum_{n\leq n_\varepsilon} |\alpha_n|\right| < \varepsilon$ et $\|f_\varepsilon\|_\infty = 1$, ce qui prouve que $\|F\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$.

Exercice IX.16. Montrer qu'une partie convexe d'un espace normé réel X est fermée si et seulement si elle est faiblement fermée.

Solution. Tout fermé pour la topologie faible est fermé pour la topologie de la norme, car cette dernière est plus fine. Soit A un convexe fermé et $x \notin A$. D'après la proposition IX.3.4, il existe $f \in X'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) > r > \sup_A f$. Or, $\{w \in X : f(w) > r\}$ est un voisinage de x pour la topologie faible et il est disjoint de A.

X. Espaces de Hilbert

Solutions (exercices des pages 184-184)

Exercice X.1. *Montrer que*

(a) $A^\perp$ *est la polaire de* A *par la relation* $\perp$.

(b) $A^\perp$ *est un sous-espace vectoriel fermé pour tout* $A \subset X$,

(c) $A^{\perp\perp} = \operatorname{cl}\operatorname{vect} A$,

(d) $(\bigcup_{j\in J} A_j)^\perp = \bigcap_{j\in J} A_j^\perp$,

(e) *si* A_j *est un sous-espace vectoriel fermé pour tout* $j \in J$, *alors* $(\bigcap_{j\in J} A_j)^\perp = \operatorname{cl}\operatorname{vect}\bigcup_{j\in J} A_j^\perp$.

Solution. (a) Par définition, $A^\perp = \bigcap_{a\in A} \perp \{a\}$.

(b) Si $x_0, x_1 \in A^\perp$ et α_0, α_1 sont deux scalaires, alors

$$\langle \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1, a\rangle = \alpha_0\langle x_0, a\rangle + \alpha_1\langle x_1, a\rangle = 0.$$

(c) Si $a \in A$ alors $a \perp y$ pour tout $y \in A^\perp$, donc $a \in A^{\perp\perp}$. Puisque $A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé et $A \subset A^{\perp\perp}$, il s'ensuit que $\operatorname{cl}\operatorname{vect} A \subset A^{\perp\perp}$. Pour montrer l'inclusion réciproque, soit $x \notin \operatorname{cl}\operatorname{vect} A$. D'après l'exercice IX.4, il existe $f \in X'$ tel que $f(x) = 1$ et $f(A) \subset f(\operatorname{cl}\operatorname{vect} A) = \{0\}$, donc $f \in A^\perp$. Ainsi $x \notin A^{\perp\perp}$, car $f(x) \neq 0$.

(d) D'après l'exercice I.6, puisque $\perp$ est une polarité.

(e) Puisque $\perp$ est une polarité, $A_k^\perp \subset (\bigcap_{j\in J} A_j)^\perp$, car $\bigcap_{j\in J} A_j \subset A_k$ pour tout $k \in J$. Par conséquent, $\bigcup_{j\in J} A_j^\perp \subset (\bigcap_{j\in J} A_j)^\perp$ et, comme ce dernier est un sous-espace vectoriel fermé, $\operatorname{cl}\operatorname{vect}\bigcup_{j\in J} A_j^\perp \subset (\bigcap_{j\in J} A_j)^\perp$. Pour établir l'inclusion inverse, soit $x \notin \operatorname{cl}\operatorname{vect}\bigcup_{j\in J} A_j^\perp$. D'après l'exercice IX.4, il existe $f \in X'$ tel que $f(x) = 1$ et $f(\operatorname{cl}\operatorname{vect}\bigcup_{j\in J} A_j^\perp) = \{0\}$, donc $f \in (\bigcup_{j\in J} A_j^\perp)^\perp = \bigcap_{j\in J} A_j^{\perp\perp} = \bigcap_{j\in J} A_j$, donc $x \notin (\bigcap_{j\in J} A_j)^\perp$, car $f(x) \neq 0$.

Exercice X.2. *Soit* A *un convexe fermé d'un espace réel de Hilbert* X. *Montrer que* $x_A \in A$ *vérifie* $\|x - x_A\| = \operatorname{dist}(x, A)$ *si et seulement si,*

$$\langle y - x_A, x - x_A\rangle \leq 0$$

pour tout $y \in A$.

Solution. En remplaçant A par $A - x$, on ramène le problème à la caractérisation de l'élément de A de norme minimale, c'est-à-dire x_A tel que $r := \|x_A\| = \operatorname{dist}(0, A)$. La condition à vérifier devient donc

$$\text{(condition)} \qquad \underset{y \in A}{\forall} \langle y - x_A, x_A \rangle \geq 0.$$

Si $0 \in A$, alors $x_A = 0$ et la condition est vérifiée. Si $0 \notin A$ et $r = \|x_A\| = \operatorname{dist}(0, A)$, alors

$$\text{(intersection)} \qquad \{x_A\} = B^{\leq}(0, r) \cap A.$$

Puisque $B(0,r) \cap A = \varnothing$ et $B(0,r)$ est ouvert, d'après le théorème VIII.5.4, il existe $z \in X$ tel que $\|z\| = 1$ et $\sup_{y \in B(0,r)} \langle z, y \rangle \leq \inf_{y \in A} \langle z, y \rangle$. Selon (intersection),

$$\sup_{y \in B(0,r)} \langle z, y \rangle = \langle z, x_A \rangle = \inf_{y \in A} \langle z, y \rangle.$$

Par conséquent, $z = \dfrac{x_A}{\|x_A\|}$. Donc

$$\|x_A\| = \frac{\langle x_A, x_A \rangle}{\|x_A\|} \leq \frac{\langle x_A, y \rangle}{\|x_A\|}$$

pour tout $y \in A$, ce qui prouve (condition).

S'il existe $y \in A$ tel que $\langle y - x_A, x_A \rangle < 0$, alors $x_A + t(y - x_A) \in A$ pour $0 < t < 1$. Or

$$\begin{aligned} \|x_A + t(y - x_A)\|^2 &= (1-t)^2 \|x_A\|^2 + 2t \langle y - x_A, x_A \rangle + t^2 \|y\|^2 \\ &< (1-t)^2 \|x_A\|^2 + t^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Le minimum de l'expression à droite est atteint pour $t = \dfrac{\|x_A\|^2}{\|x_A\|^2 + \|y\|^2}$ et est $\dfrac{\|x_A\|^2 \|y\|^2}{\|x_A\|^2 + \|y\|^2} < \|x_A\|^2$.

Exercice X.3. *L'espace* $L_2(-\pi, \pi)$ *à valeurs complexe avec le produit scalaire* (X.11) *est un espace de Hilbert. Montrer que*

(a) *l'ensemble* $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$, *où* $e_n(x) := \exp(inx)$, *est une base de Hilbert de* $L_2(-\pi, \pi)$ *complexe,*

(b) *l'ensemble* $\{h_n : n \in \mathbb{Z}\}$, *où* $h_n(x) := \sin(nx)$ si $n \geq 1$, $h_n(x) := \cos(nx)$ si $n \leq -1$ et $h_0(x) := 1$ *est une base de Hilbert de* $L_2(-\pi, \pi)$ *réel,*

Solution. (a) En effet,

car dans le second cas

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(n-m)x)dx \\
= \quad &\frac{1}{i(n-m)}\left(\exp(i\pi(n-m)) - \exp(i\pi(m-n))\right) = 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $f \in L_2(-\pi,\pi)$ (complexe),

$$f = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} f_n e_n,$$

où $f_n = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-inx)dx$.

(b) Si on pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,
\end{aligned}$$

alors $a_n = (f_n + f_{-n})$ et $b_n = \dfrac{1}{i}(f_{-n} - f_n)$. Comme conséquence, $a_0 = 2f_0$ et $b_0 = 0$. De façon équivalente,

$$f_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \text{ et } f_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} f_n \cdot (\cos nx + i\sin nx) \\
&= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (a_n - ib_n)\cdot(\cos nx + i\sin nx) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (a_n + ib_n)\cdot(\cos nx - i\sin nx),
\end{aligned}$$

et si une fonction f est réelle, alors

$$f \approx \frac{a_0}{2} + \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

XI. Théorie spectrale

Solutions (exercices des pages 201-202)

Exercice XI.1. *Montrer que l'espace $K(X,Y)$ des opérateurs compacts est fermé dans $L_c(X,Y)$.*

Solution. Si $F \in \operatorname{cl} K(X,Y)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $T \in K(X,Y)$ tel que $\|F - T\| < \varepsilon$. Puisque T est compact, $\{Tx : \|x\| \le 1\}$ est totalement borné, donc d'après l'exercice IX.7, il existe un sous-espace vectoriel L de dimension finie tel que $\{Tx : \|x\| \le 1\} \subset B(L,\varepsilon)$. Ainsi

$$\{Fx : \|x\| \le 1\} \subset B(\{Tx : \|x\| \le 1\}, \varepsilon) \subset B(L, 2\varepsilon),$$

ce qui prouve que F est compact.

Exercice XI.2. *Montrer que si* $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors*

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x,y)\, u(y)\, dy$$

est compact dans $C([0,1])$, *donc dans* $L_2(0,1)$.

Solution. On montre que

$$\text{(image)} \qquad \{Tu \in C([0,1]) : \|u\|_\infty \leq 1\}$$

est équicontinu, donc relativement compact grâce au théorème V.4.5 d'Arzelà-Ascoli. En effet, G est uniformément continue (car son domaine est compact), en particulier, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in X$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |G(x,y) - G(x_0,y)| < \varepsilon,$$

donc pour $|x - x_0| < \delta$ et $\|u\|_\infty \leq 1$,

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tu)(x_0)| &\leq \int_0^1 |G(x,y) - G(x_0,y)||u(y)|dy \\ &\leq \varepsilon \|u\|_\infty \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre l'équicontinuité de (image).

Si $\|u\|_2 \leq 1$ et $|x - x_0| < \delta$, alors

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tu)(x_0)| &\leq \int_0^1 |G(x,y) - G(x_0,y)||u(y)|dy \\ &\leq (\int_0^1 |G(x,y) - G(x_0,y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} \|u\|_2 \leq \varepsilon \|u\|_2, \end{aligned}$$

donc

$$\{Tu \in C([0,1]) : \|u\|_2 \leq 1\}$$

est équicontinu dans $C([0,1])$ et par conséquent relativement compact. Puisque

$$\|w\|_2 = \left(\int_0^1 |w(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|w\|_\infty,$$

l'identité est continue de $C([0,1])$ dans $L_2(0,1)$, donc l'image de

$$\mathrm{cl}_C\{Tu \in C([0,1]) : \|u\|_2 \leq 1\}$$

est compact dans $L_2(0,1)$.

Exercice XI.3. *Soit* $p > 0, p', q \in C([0,1])$ *et* $L(u) := (pu')' - qu$. *Montrer*

(a) *la formule de Green*

$$\int_0^1 [uL(v) - vL(u)]\, dx = p\, [v'u - u'v]_0^1 .$$

(b) *que* L *restreint aux* w *vérifiant*

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) = 0 = \alpha_1 w(1) + \beta_1 w'(1),$$

est auto-adjoint,

(c) *que toutes ses valeurs propres sont inférieures à*

$$-\inf\{q(x) : 0 \le x \le 1\}.$$

Solution. (a) En intégrant par parties deux fois, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle &= \int_0^1 L(u)v\,dx = \int_0^1 (pu')'v\,dx - \int_0^1 quv\,dx \\
&= [pu'v]_0^1 - \int_0^1 pu'v'\,dx - \int_0^1 quv\,dx \\
&= [pu'v]_0^1 - \left([pv'u]_0^1 - \int_0^1 u\,(pv')'\,dx\right) - \int_0^1 quv\,dx \\
&= p\left[u'v - uv'\right]_0^1 + \int_0^1 u\,(pv')'\,dx - \int_0^1 qu\,v\,dx \\
&= p\left[u'v - uv'\right]_0^1 + \int_0^1 uL\,(v)\;dx \\
&= p\left[u'v - uv'\right]_0^1 + \langle u, Lv\rangle,
\end{aligned}$$

d'où la formule de Green.

(b) Effectivement, si $\alpha_1 \neq 0$, alors $u(1) = -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}u'(1)$ et $v(1) = -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}v'(1)$, donc

$$v'(1)u(1) - u'(1)v(1) = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}v'(1)u'(1) + \frac{\beta_1}{\alpha_1}v'(1)u'(1) = 0,$$

et si $\beta_1 \neq 0$, alors $u'(1) = -\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}u(1)$ et $v'(1) = -\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}v(1)$, donc

$$v'(1)u(1) - u'(1)v(1) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}v(1)u(1) + \frac{\alpha_1}{\beta_1}v(1)u(1) = 0.$$

De même pour les conditions en $x = 0$. Ainsi

$$\begin{gathered}
\left[v'u - u'v\right]_0^1 = \\
v'(1)u(1) - u'(1)v(1) - v'(0)u(0) + u'(0)v(0) = 0.
\end{gathered}$$

(c) Soit λ une valeur propre de L et u est une fonction propre $\|u\|_{L^2} = 1$ correspondant à λ, alors

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lambda\int_0^1 u^2dx = \int_0^1 (pu')'u\,dx - \int_0^1 qu^2\,dx \\
&= [pu'u]_0^1 - \int_0^1 \left[p(u')^2 + qu^2\right]\,dx \\
&\le -\int_0^1 qu^2\,dx \le -\inf q.
\end{aligned}$$

Exercice XI.4. *Montrer que toute fonction de Green est symétrique.*

Solution. Soit $0 < x < y < 1$. Nous allons montrer que

$$G(x,y) = G(y,x).$$

Appliquons la formule de Green (XI.16) pour un opérateur L avec les conditions au bord B, aux fonctions $u(t) = G(t,x)$ et $w(t) = G(t,y)$ dans les domaines d'intégration $]0,x[,]x,y[$ et $]y,1[$. Puisque $LG(\cdot,x)(t) = 0$ presque partout, et les conditions au bord sont remplies pour $t = 0$ et $t = 1$, on tire

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 (G(t,x)LG(\cdot,y)(t) - G(t,y)LG(\cdot,x)(t))\,dt \\
&= -p(y)[G'(y+,y)G(y,x) - G'(y,x)G(y,y)] \\
&\quad +p(y)[G'(y-,y)G(y,x) - G'(y,x)G(y,y)] \\
&\quad -p(x)[G'(x,y)G(y,x) - G'(x+,x)G(x,y)] \\
&\quad +p(x)[G'(x,y)G(y,x) - G'(x-,x)G(x,x)] \\
&= p(y)G(y,x)\frac{1}{p(y)} - p(x)G(x,y)\frac{1}{p(x)} \\
&= G(y,x) - G(x,y),
\end{aligned}$$

donc $G(y,x) = G(x,y)$.

A. Nombres ordinaux

Solutions des exercices (pages 213-214)

Exercice A.1. *Montrer que, pour tout ensemble A d'ordinaux,*

(a) *il existe l'ordinal* $\sup A$,

(b) *si tout $\alpha \in A$ est limite, alors* $\sup A$ *est limite.*

Solution. Puisque $\{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$ est un ensemble pour tout $\alpha \in A$, l'union $B := \bigcup_{\alpha\in A} \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$ est un ensemble d'après l'axiome de l'union. Selon l'axiome de la puissance, 2^B est un ensemble (de toutes les parties de B) et, en vertu du théorème I.5.7 de Cantor, $\operatorname{card} B < \operatorname{card}(2^B)$. Ainsi il existe un ordinal γ_0 tel que $\alpha < \gamma_0$ pour tout $\alpha \in A$. L'ensemble $\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \underset{\alpha\in A}{\forall} \alpha \leq \gamma < \gamma_0\}$ est bien ordonné, donc possède le plus petit élément, c'est-à-dire $\sup A$.

(b) Si $\sup A$ n'est pas limite, alors il existe γ tel que $\gamma + 1 = \sup A$. En particulier, $\gamma < \sup A$, donc il existe $\alpha \in A$ tel que $\gamma < \alpha \leq \sup A$. Ainsi α n'est pas limite.

Exercice A.2. *Montrer que si $\alpha \leq \beta$, alors il existe un unique ordinal γ tel que $\alpha + \gamma = \beta$.*

Solution. L'ensemble $\{\xi : \alpha + \xi \leq \beta\}$ est isomorphe à un unique ordinal γ, donc $\alpha + \gamma = \beta$.

Exercice A.3. *Soit α, β, γ ordinaux. Montrer que*

(a) *si $\alpha < \beta$, alors $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$,*

(b) *si $\alpha \leq \beta$, alors $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$,*

(c) $\alpha + \beta = \sup_{\xi<\beta}(\alpha + \xi)$,

(d) $\omega = \sup_{\xi<\omega}(\xi + \omega) < \omega + \omega$,

(e) *si $\alpha < \beta$, alors $\gamma\alpha < \gamma\beta$,*

(f) *si $\alpha \leq \beta$, alors $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.*

Solution. (a) Puisque α est isomorphe à un segment initial de β, d'après la définition de la somme, $\gamma + \alpha$ est isomorphe à un segment initial de $\gamma + \beta$.

(b) D'après la définition de la somme.

(c) Selon (a), si $\xi < \beta$, alors $\alpha + \xi < \alpha + \beta$, donc $\sup_{\xi<\beta}(\alpha + \xi) \leq \alpha + \beta$. D'autre part, si $\gamma < \alpha + \beta$, alors il existe un ordinal ξ isomorphe à un segment initial de β tel que $\alpha + \xi = \gamma$, donc $\gamma < \sup_{\xi<\beta}(\alpha + \xi)$.

(d) Si $\xi < \omega$ alors $\xi + \omega = \omega$. En effet, si $\gamma < \xi + \omega$, alors il existe $\theta < \omega$ tel que $\gamma = \xi + \theta$, donc $\gamma < \omega$. Donc $\sup_{\xi<\omega}(\xi + \omega) = \sup_{\xi<\omega} \omega = \omega$.

(e) Si $\alpha < \beta$, alors $\beta - \alpha > 0$, donc $\gamma\beta = \gamma\alpha + \gamma(\beta - \alpha) > \gamma\alpha$ d'après (a).

(f) D'après la définition du produit.

Exercice A.4. *Montrer que tout ordinal α est de la forme $\alpha_0 + n$, où α_0 est un ordinal limite et n est naturel.*

Solution. En vertu de l'exercice A.1 (b), l'ensemble $\alpha_0 := \sup\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \gamma \leq \alpha, \gamma \text{ limite}\}$ est un ordinal limite. Alors ou $\alpha = \alpha_0$ et $n = 0$, ou bien il n'existe pas d'ordinaux limites γ tels que $\alpha_0 < \gamma \leq \alpha$. Par conséquent, $n := \alpha - \alpha_0 < \omega_0$, donc $\alpha = \alpha_0 + n$, où α_0 est un ordinal limite et n est naturel.

Exercice A.5.

(a) *Parmi les ordinaux suivants, quels sont ceux qui sont indécomposables : ordinaux finis, $\omega, \omega + 1, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}$.*

(b) *Montrer que tout ordinal-cardinal γ est indécomposable.*

(c) *Montrer qu'un ordinal γ est indécomposable si et seulement si $\alpha + \gamma = \gamma$ pour tout $\alpha < \gamma$.*

(d) *Pour tout ordinal α il existe un choix unique de $n < \omega, \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots, \alpha_n$ ordinaux indécomposables, et $m_0, \ldots, m_n < \omega$ tels que $\alpha = \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n$.*

Solution. (a) Bien évidemment, $\omega+1$ est décomposable et ω est indécomposable, car si $\alpha, \beta < \omega$ alors $\alpha + \beta < \omega$. Aussi $\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}$ sont indécomposables. En effet, si $\alpha, \beta < \omega^\omega = \sup_{n<\omega} \omega^n$, alors il existe $n, m < \omega$ tels que $\alpha < \omega^n$ et $\beta < \omega^m$, donc, selon l'exercice A.3 (a), $\alpha + \beta < \omega^n + \omega^m \leq \omega^{n+m+1} < \omega^\omega$. De la manière analogue, si $\alpha, \beta < \omega^{\omega^\omega}$, alors il existe $\alpha', \beta' < \omega^\omega$ tels que

$\alpha < \omega^{\alpha'}$ et $\beta < \omega^{\beta'}$, donc, d'après le raisonnement précédent, $\alpha' + \beta' < \omega^{\omega}$, et par conséquent, $\alpha + \beta < \omega^{\alpha'} + \omega^{\beta'} \leq \omega^{\alpha'+\beta'+1} < \omega^{\omega^{\omega}}$.

(b) Si $\alpha, \beta < \gamma$ alors $\operatorname{card}\alpha, \operatorname{card}\beta < \operatorname{card}\gamma$, donc $\operatorname{card}\alpha + \operatorname{card}\beta = \max(\operatorname{card}\alpha, \operatorname{card}\beta) < \operatorname{card}\gamma$ et, par conséquent, $\alpha + \beta < \gamma$.

(c) Si $\alpha + \gamma = \gamma$ alors $\beta < \gamma$ implique $\alpha + \beta < \alpha + \gamma = \gamma$. S'il existe $\alpha < \gamma$ avec $\gamma < \alpha + \gamma$, alors il existe $\beta < \gamma$ tel que $\gamma = \alpha + \beta$.

(d) Si α est indécomposable, alors $n = 0, \alpha = \alpha_0$ et $m_0 = 1$.

Sinon, soit α_0 le plus grand ordinal indécomposable inférieur à α. En effet, $A := \{\gamma \in \mathrm{Ord}_I : \gamma < \alpha\}$ n'est pas vide car $0 \in \mathrm{Ord}_I$ et $\alpha_0 := \sup A$ est indécomposable, car si $\xi, \zeta < \alpha_0$, alors il existe $\gamma \in A$ avec $\xi, \zeta < \gamma \leq \alpha_0$, donc $\xi + \zeta < \gamma \leq \alpha_0$. Il existe le plus grand $m_0 < \omega$ tel que $\alpha_0 m_0 \leq \alpha$, sinon $\alpha_0\omega_0 = \sup\{\alpha_0 m : m < \omega\} \leq \alpha$, mais $\alpha_0\omega_0$ est indécomposable (si $\xi, \zeta < \alpha_0\omega_0$, alors il existe m tels $\xi, \zeta < \alpha_0 m$, donc $\xi + \zeta < \alpha_0(2m) < \alpha_0\omega_0$). Ou $\alpha_0 m_0 = \alpha$ ou $\alpha_0 m_0$ est un segment initial de α, donc il existe $\delta < \alpha_0$ tels que $\alpha = \alpha_0 m_0 + \delta$. Ainsi on obtient les suites évoquées dans le théorème tel que $\alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n \leq \alpha$. Mais une suite descendante d'ordinaux est finie, donc il existe $n < \omega$ tels que $\alpha = \alpha_0 m_0 + \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_n m_n$.

Exercice A.6. *Montrer que tout ordinal-cardinal infini est limite.*

Solution. Si γ n'est pas limite, alors il existe δ tel que $\delta+1 = \gamma$. Si γ est infini, alors δ est infini, donc, selon le théorème A.5.6, $\operatorname{card}\delta = \operatorname{card}\delta + 1 = \operatorname{card}\gamma$, ainsi γ n'est pas cardinal.

Exercice A.7. *Montrer que la classe de tous les ordinaux n'est pas un ensemble.*

Solution. Puisque Ord est bien ordonné, s'il était un ensemble, alors il existerait un ordinal γ isomorphe à son type d'ordre. Par conséquent, $\gamma \notin$ Ord .

Exercice A.8. *Montrer que la topologie canonique de* $(\omega_0 + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus \{(\omega_0, \omega_1)\}$

(a) *est régulière,*

(b) *mais n'est pas normale.*

Solution. (a) D'après l'exercice III.27, les espaces topologiques $\omega_0 + 1$ et $\omega_1 + 1$ sont normaux, donc réguliers. Or, d'après l'exercice III.28, le produit $(\omega_0 + 1) \times (\omega_1 + 1)$ est régulier ainsi que tout son sous-espace, en particulier, $(\omega_0 + 1) \times (\omega_1 + 1) \setminus \{(\omega_0, \omega_1)\}$.

(b) Les parties $\{\omega_0\} \times \omega_1$ et $\omega_0 \times \{\omega_1\}$ sont fermées disjointes. Soit O_0, O_1 deux parties ouvertes telles que $\{\omega_0\} \times \omega_1 \subset O_0$ et $\omega_0 \times \{\omega_1\} \subset O_1$. Pour tout $n < \omega_0$ il existe $\xi_n < \omega_1$ tel que $\{n\} \times \{\xi : \xi_n < \xi \leq \omega_1\} \subset O_1$. Donc il existe θ tel que $\sup_{n<\omega_0} \xi_n < \theta < \omega_1$. Il existe $n_\theta < \omega_0$ tel que $\{n : n_\theta \leq n \leq \omega_0\} \times \{\theta\} \subset O_0$. Mais $(n_\theta, \theta) \in O_0 \cap O_1$, ce qui montre que la topologie n'est pas normale.

Exercice A.9. *Montrer que (a)* $\mathrm{cl}_a^{\omega_1}$ *est idempotent, (b)* $\mathrm{cl}_a^{\omega_1}$ *est l'opérateur de fermeture pour la topologie radiale, (c) si* $\gamma < \omega_1$*, alors* cl_a^{γ} *n'est pas idempotent.*

Solution. (a) Si $x \in \mathrm{cl}_a^{\omega_1} D$, alors il existe une suite croissante $(\alpha_n)_n$ d'ordinaux et une suite $(x_n)_n$ telles que $\alpha_n < \omega_1, x_n \in \mathrm{cl}_a^{\alpha_n} D$ et $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Donc $\alpha := \sup_{n<\omega_0} \alpha_n + 1 < \omega_1$ et $x \in \mathrm{cl}_a(\bigcup_{n<\omega_0} \mathrm{cl}_a^{\alpha_n} D) = \mathrm{cl}_a^{\alpha} D$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{cl}_a^{\omega_1} D = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathrm{cl}_a^{\alpha} D,$$

donc $\mathrm{cl}_a^{\omega_1} \mathrm{cl}_a^{\omega_1} D = \mathrm{cl}_a^{\omega_1} D$.

(b) Pour tout $\alpha \in \mathrm{Ord}$, l'opérateur cl_a^{α} a toutes les propriétés de fermeture topologique, sauf l'idempotence. Une partie D est fermée pour la topologie radiale si et seulement si $\mathrm{cl}_a D \subset D$, ce qui entraîne, par récurrence, que $\mathrm{cl}_a^{\omega_1} D \subset D$, donc $\mathrm{cl}_a^{\omega_1} D = D$.

(c) D'après l'exemple A.4.2, il existe une partie A de $\mathbb{R}^2$ telle que $(0,0) \in \mathrm{int}_a A \setminus \mathrm{int}_a \mathrm{int}_a A$. Soit $D := \mathbb{R}^2 \setminus A$. Donc $(0,0) \in \mathrm{cl}_a \mathrm{cl}_a D \setminus \mathrm{cl}_a D$, plus précisément,

$$D = \left\{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, s \geq \sqrt{r}\right\}.$$

Ceci est également vrai, pour $D_t := D \cap B^{\leq}(,t)$ pour tout $t > 0$.

Soit $\gamma < \omega_1$. Supposons que pour tout $\delta < \gamma$, il existe une partie bornée D_δ de D telle que $(0,0) \in \mathrm{cl}_a^{\delta} D_\delta \setminus \bigcup_{\alpha<\delta} \mathrm{cl}_a^{\alpha} D_\delta$. Comme γ est dénombrable, il existe une suite croissante $(\delta_n)_{n<\omega}$ telle que $\sup_{n<\omega} (\delta_n + 1) = \gamma$.

Soit $(s_n)_n$ une suite strictement décroissante de réels avec $0 = \lim_{n\to\infty} s_n$. En utilisant des homothéties, translations et rotations, si nécessaire, nous trouvons une suite $(D_{\delta_n})_n$ de parties de D, disjointes deux à deux, telles que

$$(0, s_n) \in \mathrm{cl}_a^{\delta_n} D_{\delta_n} \setminus \bigcup_{\alpha<\delta_n} \mathrm{cl}_a^{\alpha} D_{\delta_n}.$$

Soit $D_\gamma := \bigcup_{n<\omega} D_{\delta_n}$. On constate que si $\lambda < \delta_n + 1$, alors $(0, s_n) \notin \mathrm{cl}_a^{\lambda} D_\gamma$, donc $(0,0) \notin \mathrm{cl}_a^{\lambda} D_\gamma$, car toute semi-droite à sommet en $(0,0)$, a un segment initial disjoint de D, donc de D_γ. D'autre part,

$$(0,0) \in \mathrm{cl}_a \{(0, s_n) : n < \omega\} \subset \mathrm{cl}_a^{\gamma} D_\gamma.$$

B. Espaces topologiques compacts

Solutions des exercices (pages 234-237)

Exercice B.1. *Montrer que*

(a) $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$,

(b) $\mathcal{A}^{\#} \subset \mathcal{A}^{*}$,

(c) $\mathcal{A}^{\#} = \mathcal{A}^{*}$ *si et seulement si* $\mathcal{A}$ *est isotone.*

Solution. (a) Selon la définition, $H \in \mathcal{A}^{**} = (\mathcal{A}^*)^*$ si et seulement si $X \setminus H \notin \mathcal{A}^*$, c'est-à-dire si $H = X \setminus (X \setminus H) \in \mathcal{A}$.

(b) Si $H \notin \mathcal{A}^*$, c'est-à-dire $H^c \in \mathcal{A}$, alors $H \notin \mathcal{A}^{\#}$, car $H \cap H^c = \varnothing$.

(c) Si $\mathcal{A}$ est isotone et $H \notin \mathcal{A}^{\#}$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $A \cap H = \varnothing$, c'est-à-dire $A \subset H^c$, donc $H^c \in \mathcal{A}$, ainsi, $H \notin \mathcal{A}^*$. Si $\mathcal{A}$ n'est pas isotone, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ et $B \notin \mathcal{A}$ tels que $A \subset B$, donc $B^c \in \mathcal{A}^*$, mais $A \cap B^c \subset A \cap A^c = \varnothing$, prouvant que $B^c \notin \mathcal{A}^{\#}$.

Exercice B.2. *Une famille $\mathcal{A}$ est une grille d'un filtre si et seulement si* $A_0 \cup A_1 \in \mathcal{A}$ implique $A_0 \in \mathcal{A}$ ou $A_1 \in \mathcal{A}$.

Solution. Soit $\mathcal{F}$ un filtre $\mathcal{A} = \mathcal{F}^{\#}$. Si $A_0, A_1 \notin \mathcal{A}$, alors il existe $F_0, F_1 \in \mathcal{F}$ tels que $A_0 \cap F_0 = A_1 \cap F_1 = \varnothing$, donc $(A_0 \cup A_1) \cap (F_0 \cap F_1) = \varnothing$. Puisque $F_0 \cap F_1 \in \mathcal{F}$, la grille $\mathcal{A}$ ne contient pas $A_0 \cup A_1$. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ vérifie la condition et $F_0, F_1 \in \mathcal{A}^{\#}$, alors $F_0^c, F_1^c \notin \mathcal{A}^{\#\#} = \mathcal{A}$, donc $F_0^c \cup F_1^c \notin \mathcal{A}$. Selon l'exercice B.1, il s'ensuit que $F_0 \cap F_1 \in \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{\#}$, car $\mathcal{A}$ est isotone.

Exercice B.3. *Soit A une famille isotone de parties d'un ensemble X et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_{H \in \mathcal{A}^{\#}} \inf\nolimits_{x \in H} f(x) &= \inf\nolimits_{A \in \mathcal{A}} \sup\nolimits_{x \in A} f(x), \\ \sup\nolimits_{A \in \mathcal{A}} \inf\nolimits_{x \in A} f(x) &= \inf\nolimits_{H \in \mathcal{A}^{\#}} \sup\nolimits_{x \in H} f(x). \end{aligned}$$

Solution. Soit $r < \sup_{H \in \mathcal{A}^{\#}} \inf_{x \in H} f(x)$. Il s'ensuit qu'il existe $H \in \mathcal{A}^{\#}$ tel que $r < f(x)$ pour tout $x \in H$. Or, $A \cap H \neq \varnothing$ pour $A \in \mathcal{A}$, donc $r < \sup_{x \in A} f(x)$ pour $A \in \mathcal{A}$, donc $r \leq \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} f(x)$.

Si $r > \sup_{H \in \mathcal{A}^{\#}} \inf_{x \in H} f(x)$, alors il existe $s < r$ telle que $s > \inf_{x \in H} f(x)$ pour tout $H \in \mathcal{A}^{\#}$. Donc pour tout $H \in \mathcal{A}^{\#}$ il existe $x_H \in H$ tel que $s > f(x_H)$. Si $A_0 := \{x_H : H \in \mathcal{A}^{\#}\}$, alors $r > s \geq \sup_{x \in A_0}$. Or $A_0 \in \mathcal{A}^{\#\#} = \mathcal{A}$, car $\mathcal{A}$ est isotone et, par conséquent, $r \geq \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{x \in A} f(x)$.

La seconde égalité est la conséquence immédiate de $\mathcal{A}^{\#\#} = \mathcal{A}$.

Exercice B.4. *Montrer que*

(a) *si X est infini, alors $\mathcal{E}_X := \{X \setminus A : A \subset X, \operatorname{card} A < \infty\}$ est un filtre libre sur X,*

(b) *si X est dénombrable infini, alors le filtre cofini de X est le filtre engendré par $(x_n)_n$, où $(x_n)_n$ est une suite libre arbitraire telle que $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$,*

(c) *tout filtre libre sur X est plus fin que le filtre cofini de X,*

(d) *une famille $\mathcal{F}$ est dite un filtre dégénéré si elle vérifie (B.2) et (B.3), mais pas (B.1). Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est dégénéré si et seulement si $\mathcal{F} = 2^X$,*

(e) *pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, il existe une paire unique de filtres $\mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}^\bullet$ (possiblement dégénérés) telle que $\mathcal{F}^\circ$ est libre, $\mathcal{F}^\bullet$ est principal, et*

(décomposition) $$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\circ \wedge \mathcal{F}^\bullet \text{ et } \mathcal{F}^\circ \vee \mathcal{F}^\bullet = 2^X,$$

(f) *si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X, alors $\mathcal{U}$ est libre ou bien il existe $x \in X$ tel que $\mathcal{U} = \{U \subset X : x \in U\}$.*

Solution. (a) Si X est infini, alors $X \setminus A \neq \varnothing$ pour toute partie finie de X, donc $\varnothing \notin \mathcal{E}_X$. Si $E_0, E_1 \in \mathcal{E}_X$, alors $A_0 := X \setminus E_0$ et $A_1 := X \setminus E_1$ sont finies, donc $E_0 \cap E_1 = (X \setminus A_0) \cap (X \setminus A_1) = X \setminus (A_0 \cup A_1) \in \mathcal{E}_X$. Si $E \in \mathcal{E}_X$ et $G \supset E$, alors $X \setminus E$ est finie est inclut $X \setminus G$, donc $G \in \mathcal{E}_x$. Enfin si $x \in \ker(\mathcal{E}_x)$, alors $X \setminus \{x\} \in \mathcal{E}_x$, ce qui est une contradiction.

(b) Soit X dénombrable (infini) et $(x_n)_n$ une suite libre surjective. Alors $X \setminus \{x_k : k \geq n\}$ est finie pour tout n, donc $\{x_k : k \geq n\} \in \mathcal{E}_X$. Réciproquement, si $E \in \mathcal{E}_X$, alors $\{n : x_n \notin E\}$ est finie. Si $n_0 := \max\{n : x_n \notin E\}$, alors $E \subset \{x_n : n > n_0\}$, ainsi $\{x_n : n > n_0\} \in \mathcal{E}_X$.

(c) Si $\mathcal{F}$ est un filtre libre sur X, alors $x \notin \ker(\mathcal{F})$ pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $\{x\} \notin \mathcal{F}^{\#}$, donc $X \setminus \{x\} \in \mathcal{F}$. En conséquence, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ pour toute partie finie de X, ce qui prouve que $\mathcal{E}_X \subset \mathcal{F}$.

(d) $\varnothing \in \mathcal{F}$ si et seulement si $F \in \mathcal{F}$ pour tout $F \subset X$ à cause de (B.3).

(e) Soit $\mathcal{F}^{\bullet}$ le filtre principal (possiblement dégénéré), dont le noyau est $F_{\bullet} := \ker \mathcal{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Alors

$$\mathcal{F}^{\circ} = \{F \setminus F_{\bullet} : F \in \mathcal{F}\}$$

est libre (possiblement dégénéré). Puisque les éléments de $\mathcal{F}^{\circ} \wedge \mathcal{F}^{\bullet}$ sont de la forme $F \cup H$, où $F \in \mathcal{F}^{\circ}$ et $H \in \mathcal{F}^{\bullet}$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\circ} \wedge \mathcal{F}^{\bullet}$. D'autre part, $(X \setminus F_{\bullet}) \cap F_{\bullet} = \varnothing$, donc $\mathcal{F}^{\circ} \vee \mathcal{F}^{\bullet}$ est dégénéré.

Si $\{W \subset X : A \subset W\}$ est un filtre principal plus fin que $\mathcal{F}$, alors $A \subset F_{\bullet}$, donc $\mathcal{F} \vee A^c$ est libre si et seulement si $A = F_{\bullet}$, ce qui montre l'unicité de la décomposition.

(f) Si un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur X n'est pas libre, alors il existe $x \in X$ tel que $\{x\} \in \mathcal{U}^{\#} = \mathcal{U}$, c'est-à-dire $\{W \subset X : x \in W\}$.

Exercice B.5. *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. On note $\beta(\mathcal{F})$ l'ensemble des ultrafiltres $\mathcal{U}$ tels que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$. Montrer que*

(a) $\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U}$,

(b) $\mathcal{F}^{\#} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U}$.

Solution. (a) Comme $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$ équivaut à $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ (pour les familles isotones), $\mathcal{F} \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U}$. Réciproquement, si $H \notin \mathcal{F}$, alors $H^c \in \mathcal{F}^{\#}$, donc $\mathcal{F} \vee H^c$ est un filtre (non dégénéré). Bien entendu, $\mathcal{F} \vee H^c$ est plus fin que $\mathcal{F}$ et $H^c \in \mathcal{F} \vee H^c$. Donc il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F} \vee H^c$. Ainsi $\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})$ et $H^c \in \mathcal{U}$, donc $H \notin \mathcal{U}^{\#} = \mathcal{U}$.

(b) D'après (a), $\mathcal{F}^{\#} = (\bigcap_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U})^{\#}$. Or $H \in (\bigcap_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U})^{\#}$ si et seulement si $H^c \notin \bigcap_{\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})} \mathcal{U}$, c'est-à-dire il existe $\mathcal{U} \in \beta(\mathcal{F})$ tel que $H^c \notin \mathcal{U}$, de façon équivalente, $H \in \mathcal{U}$.

Exercice B.6. *Montrer l'équivalence des propositions suivantes :*

(a) *X est dénombrablement compact,*

(b) *pour tout filtre $\mathcal{F}$ à base dénombrable* $\operatorname{Adh} \mathcal{F} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \operatorname{cl} F$ *n'est pas vide,*

(c) *pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X, l'adhérence* $\operatorname{adh}_{n \to \infty} x_n$ *n'est pas vide.*

Solution. (a) $\Longrightarrow$ (b) : Supposons qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ tel que $\operatorname{Adh}\mathcal{F} = \varnothing$. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{F}$, alors $\operatorname{Adh}\mathcal{F} = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} \operatorname{cl} B$. En particulier, si $\mathcal{B}$ une base dénombrable de $\mathcal{F}$, alors $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} \operatorname{cl} B = \varnothing$, de façon équivalente, $\bigcup_{B\in\mathcal{B}}(X \setminus \operatorname{cl} B) = X$ c'est-à-dire $\{X \setminus \operatorname{cl} B : B \in \mathcal{B}\}$ est un recouvrement dénombrable de X par des ouverts, donc il existe une sous-famille finie $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{B}$ telle que $\bigcup_{B\in\mathcal{B}_0}(X \setminus \operatorname{cl} B) = X$, ce qui veut dire que

$$\varnothing = \bigcap_{B\in\mathcal{B}_0} \operatorname{cl} B \supset \bigcap_{B\in\mathcal{B}_0} B \in \mathcal{F},$$

en contradiction avec (B.1).

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X, alors

$$\{\{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}$$

est une base dénombrable de filtre, donc, d'après (b),

$$\varnothing \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_k : k \geq n\} = \operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n.$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Si X n'est pas dénombrablement compact, alors il existe une suite croissante d'ouverts $(O_n)_n$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = X$ et $O_n \neq X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc pour tout n il existe $x_n \notin O_n$. Donc $\{x_k : k \geq n\} \cap O_n = \varnothing$, ainsi $\operatorname{cl}\{x_k : k \geq n\} \cap O_n = \varnothing$. Par conséquent,

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_k : k \geq n\} \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = \varnothing.$$

Exercice B.7. *Montrer qu'un espace topologique séparé X est dénombrablement compact si et seulement si toute partie infinie A de X admet un point d'accumulation.*

Solution. Si A est une partie infinie de X sans point d'accumulation, alors $x \notin \operatorname{cl}(A \setminus \{x\})$ pour tout $x \in A$, donc il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$, autrement dit, A est une partie discrète de X. Par conséquent, toute partie de A est discrète dans X, donc fermée. Comme A est infinie, il existe une suite injective $(x_n)_n$ d'éléments de A. Ainsi

$$\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\{x_k : k \geq n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x_k : k \geq n\} = \varnothing,$$

donc X n'est pas dénombrablement compact d'après l'exercice B.6.

Réciproquement, s'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que $\operatorname{adh}_{n\to\infty} x_n = \varnothing$, alors pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un voisinage V de x tels que $\{x_k : k \geq n\} \cap V = \varnothing$. En particulier, $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ est infinie. Puisque X est séparé, $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est fermée, donc il existe un voisinage W de x tel que $W \cap \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \{x\}$ et par conséquent $V \cap W \cap \{x_k : k \in \mathbb{N}\} = \varnothing$, c'est-à-dire $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de points d'accumulation.

Exercice B.8. *Montrer que $\{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha < \omega_1\}$ est séquentiellement compact, mais pas compact.*

Solution. Si $(\alpha_n)_n$ est une suite dans $\{\alpha \in \text{Ord} : \alpha < \omega_1\}$, alors

$$\alpha_\infty := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\{\alpha_k : k \geq n\} \leq \sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\} < \omega_1,$$

car la borne supérieure d'une quantité dénombrable de nombres dénombrables est dénombrable. Puisque l'espace est bien ordonné, l'infimum dans la formule ci-dessus est un minimum.

Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\{\alpha_k : k \geq n\} = \alpha_\infty$ et par conséquent, pour tout $\alpha < \alpha_\infty$ il existe $k_\alpha \geq n$ tel que $\alpha < \alpha_{k_\alpha} \leq \alpha_\infty$, donc $(\alpha_n)_n$ admet une suite extraite convergente. D'autre part, $\{\alpha \in \text{Ord} : \alpha < \omega_1\}$ n'est pas compact, car il n'est pas fermé dans l'espace séparé $\{\alpha \in \text{Ord} : \alpha \leq \omega_1\}$.

Exercice B.9. *Montrer que*

(a) *l'image d'un espace dénombrablement compact par une application continue est dénombrablement compacte,*

(b) *tout espace compact est dénombrablement compact,*

(c) *tout espace séquentiellement compact est dénombrablement compact,*

(d) *il existe un espace dénombrablement compact qui ne soit ni compact ni séquentiellement compact,*

(e) *tout espace dénombrablement compact et séquentiel est séquentiellement compact,*

(f) *tout espace métrisable dénombrablement compact est compact,*

(g) *il existe X, Y dénombrablement compacts tels que $X \times Y$ n'est pas dénombrablement compact.*

Solution. (a) Soit $f : X \to Y$ et $(O_n)_n$ une suite croissante d'ouverts telle que $f(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Alors

$$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(O_n),$$

et puisque X est dénombrablement compact, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X = f^{-1}(O_n)$, donc $f(X) = f(f^{-1}(O_n)) \subset O_n \subset f(X)$.

(b) Conséquence immédiate des définitions.

(c) Si $(x_n)_n$ est une suite dans un espace topologique, alors $\text{Lim}_{k\to\infty} x_{n_k} \subset \text{adh}_{n\to\infty} x_n$ pour toute suite $(n_k)_k$ qui tend vers ∞.

(d) Voir l'exemple B.5.1.

(e) Soit $(x_n)_n$ une suite de termes distincts dans X. Comme X est dénombrablement compact, il existe $x \in \text{adh}_{n\to\infty} x_n$.

Posons $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Bien sûr, $x \in \text{cl}(A \setminus \{x\})$, donc $A \setminus \{x\}$ n'est pas fermé. Puisque X est séquentiel, il existe une suite $(w_k)_k$ sur $A \setminus \{x\}$ convergeant vers $w \notin A \setminus \{x\}$. Par conséquent $w_k = x_{n_k}$ et (n_k) tend vers ∞. Sinon il existerait une suite extraite $(w_{k_m})_m$ sur $\{x_0, \ldots, x_{n_0}\}$, ce qui n'est pas possible car $\lim_m w_{k_m} \notin A$. Il résulte que $(x_{n_k})_k$ est convergente.

(f) Voir le théorème V.2.3.

(g) Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors A avec sa topologie discrète est homéomorphe à $\mathbb{N}$ (avec la topologie discrète). Donc $\beta(A) \subset \beta\mathbb{N}$ et $\beta(A)$ est homéomorphe à $\beta\mathbb{N}$. Par conséquent, d'après le lemme B.6.5, $\mathrm{card}(\beta A) = \mathrm{card}(\beta\mathbb{N}) = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$.

Pour toute partie dénombrable infinie A de $\beta\mathbb{N}$, soit $\alpha(A) \in A^{\mathrm{d}}$, l'ensemble des points d'accumulation de A. On construit une suite transfinie $(A_\gamma)_{\gamma<\omega_1}$ de parties de $\beta\mathbb{N}$: $A_0 := \mathbb{N}$, et pour $0 < \delta < \omega_1$,

$$A_\delta := \bigcup_{\gamma<\delta} A_\gamma \cup \left\{\alpha(B) : B \in \left[\bigcup_{\gamma<\delta} A_\gamma\right]^{\aleph_0}\right\}.$$

Par conséquent, $X := \bigcup_{\gamma<\omega_1} A_\gamma$ est dénombrablement compact d'après l'exercice B.7. La cardinalité de A_γ ne dépasse pas $\mathfrak{c}$. Effectivement, ceci est vrai pour $\gamma = 0$, et pour $\gamma > 0$, par récurrence, $\mathrm{card}(A_\gamma) \leq \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} + (\aleph_0 \cdot \mathfrak{c})^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Donc $\mathrm{card}(X) \leq \aleph_1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

On pose $Y := \beta\mathbb{N} \setminus X \cup \mathbb{N}$ et on constate que Y est dénombrablement compact, car pour toute partie infinie dénombrable A de Y, l'ensemble $\mathrm{card}(A^{\mathrm{d}}) > \mathfrak{c}$, donc $A^{\mathrm{d}} \setminus X \neq \varnothing$ et, par conséquent, $A^{\mathrm{d}} \cap Y \neq \varnothing$, ce qui veut dire que toute partie infinie dénombrable de Y a un point d'accumulation (dans Y).

Le produit $X \times Y$ n'est pas dénombrablement compact, car il inclut une partie $\{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ sans point d'accumulation. Effectivement, si (x,y) était un tel point, alors il existerait un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers (x,y) dans $X \times Y \subset \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$. Les images $\pi_X(\mathcal{U})$ et $\pi_Y(\mathcal{U})$ sont des copies de même ultrafiltre libre p, donc $x = y = p$; mais $x \in X \setminus \mathbb{N}$ et $y \in Y \setminus \mathbb{N}$ et $(X \setminus \mathbb{N}) \cap (X \setminus \mathbb{N}) = \varnothing$, une contradiction.

Exercice B.10. *Montrer que tout espace compact séparé est localement compact.*

Solution. Soit X un espace compact séparé, $x_0 \in X$ et O un voisinage ouvert de x_0. Comme X est séparé, pour tout $x \notin O$ il existe un voisinage V_x de x_0 et W_x de x tels que $V_x \cap W_x = \varnothing$. Puisque $X \setminus O$ est fermée dans X, donc une partie compacte de X, il existe une partie finie F de $X \setminus O$ telle que $X \setminus O \subset \bigcup_{x\in F} W_x$. Par conséquent,

$$\varnothing = \bigcap_{x\in F} V_x \cap \bigcup_{x\in F} W_x,$$

donc $X \setminus \bigcup_{x\in F} W_x$ est un voisinage compact de x_0 inclus dans O.

Exercice B.11. *Montrer que*

(a) *la compactification d'Alexandrov d'un espace localement compact séparé est un espace compact séparé,*

(b) *si X est discret, alors sa compactification d'Alexandrov est la topologie cofinie autour de ∞ de $X \cup \{\infty\}$.*

Solution. (a) $X \cup \{\infty\}$ est séparé, car X est séparé et pour tout $x \in X$ il existe un voisinage compact K de x dans X, ainsi $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ est un voisinage de ∞ disjoint de K. Pour montrer la compacité de $X \cup \{\infty\}$, prenons un recouvrement ouvert $\mathcal{P}$ de $X \cup \{\infty\}$. Alors il existe $P_\infty \in \mathcal{P}$ tel que P_∞ soit un voisinage de ∞ et, par conséquent, il existe un compact K de X tel que $X \setminus K \subset P_\infty$. Ainsi $K \subset \bigcup_{P \in \mathcal{P} \setminus \{P_\infty\}} P$, donc il existe une partie finie $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P} \setminus \{P_\infty\}$ telle que $K \subset \bigcup_{P \in \mathcal{P}_0} P$. Il s'ensuit que $\{P_\infty\} \cup \mathcal{P}_0$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{P}$.

(b) En effet, toute partie compacte d'un espace discret est finie.

Exercice B.12. *Montrer que* $A := \{A_p : p \text{ premier}\}$ *est indépendante pour tout nombre premier* p, *où* $A_p := \{n \in \mathbb{N} : p|n\}$.

Solution. Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des nombres premiers et $h_1, h_2, \ldots, h_m \in \{0,1\}$, alors $\prod_{k=1}^m p_k^{h_k}$ est divisible par tout p_k pour lequel $h_k = 1$ et n'est pas divisible par p_k pour lequel $h_k = 0$ en vertu du *théorème de Gauß*[4]. Par conséquent, $\prod_{k=1}^m p_k^{h_k} \in \bigcap_{k=1}^m A_{p_k}^{h_k}$.

Exercice B.13. *Montrer que*

(a) *si* A *est fini, alors* $\beta(A) = \{\beta(\{x\}) : x \in A\}$,

(b) $\beta_0(A_0) = \beta_0(A_1)$ *si et seulement si* $(A_0 \setminus A_1) \cap (A_1 \setminus A_0)$ *est fini, c'est-à-dire* A_0, A_1 *sont presque égaux,*

(c) $\beta_0(A_0) \subset \beta_0(A_1)$ *si et seulement si* $A_0 \setminus A_1$ *est fini, c'est-à-dire* A_0 *est presque inclus dans* A_1,

(d) *si* $(A_n)_n$ *est une suite décroissante de parties infinies de* $\mathbb{N}$ *telle que* $A_n \setminus A_{n+1}$ *est infini, alors il existe une partie infinie* A_∞ *de* $\mathbb{N}$ *telle que* $\beta_0(A_\infty) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \beta_0(A_n)$ et $\beta_0(A_n) \setminus \beta_0(A_\infty) \neq \varnothing$,

(e) $\chi(x) > \aleph_0$ *dans* $\beta\mathbb{N}$ *pour tout* $x \in \beta_0(\mathbb{N})$,

(f) *il n'existe pas de base dénombrable d'ouverts de* $\beta\mathbb{N}$.

Solution. (a) Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre et $A \in \mathcal{U}$, alors par récurrence à partir de (B.6), il existe $x \in A$ tel que $\{x\} \in \mathcal{U}$.

(b) Si $A_0 \setminus A_1$ est infinie, alors il existe un ultrafiltre libre $\mathcal{U}$ tel que $A_0 \setminus A_1 \in \mathcal{U}$, donc $A_0 \in \mathcal{U}$ et $A_1 \notin \mathcal{U}$, donc $\beta_0(A_0) \setminus \beta_0(A_1) \neq \varnothing$. Le même raisonnement si $A_1 \setminus A_0$ est infinie.

(c) Nous avons vu que si $A_0 \setminus A_1$ est infinie, alors $\beta_0(A_0) \setminus \beta_0(A_1) \neq \varnothing$. Maintenant, si $A_0 \setminus A_1$ est finie et $\mathcal{U} \in \beta_0(A_0)$, alors $A_0 \setminus A_1 \notin \mathcal{U}$ car $\mathcal{U}$ est libre. D'autre part, $A_1 \cup (A_0 \setminus A_1) \supset A_0 \in \mathcal{U}$, donc $A_1 \in \mathcal{U}$, grâce à (B.6).

(d) Si $a_n \in A_n \setminus A_{n+1}$ et $A_\infty := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, alors $A_\infty \setminus A_n$ est fini pour tout n, donc $\beta_0(A_\infty) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \beta_0(A_n)$ selon (c). D'autre part $\beta_0(A_n) \setminus \beta_0(A_\infty) \neq \varnothing$, car $A_n \setminus A_\infty$ est infini (pour tout n).

(e) Soit $(B_n)_n$ une suite décroissante de voisinages de x dans $\beta\mathbb{N}$ tel que $x \in \beta_0(\mathbb{N})$. Donc il existe une suite $(A_n)_n$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que $B_n = \beta(A_n)$ et $A_{n+1} \setminus A_n$ soit finie. Selon la proposition I.4.9, il existe une partie infinie A_∞ telle que $\beta_0(A_\infty) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, mais $B_n \setminus \beta_0(A_\infty)$.

(f) Le poids d'un espace topologique n'est pas strictement plus petit que le caractère.

4. Si c divise ab et c et a sont premiers entre eux, alors c divise b.

Exercice B.14. *Soit $\beta_0\mathbb{N} := \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ munie de la topologie héritée de $\beta\mathbb{N}$. Montrer que $\beta_0\mathbb{N}$ est compact non séparable, de cardinalité $2^{\mathfrak{c}}$ et de poids $\mathfrak{c}$.*

Solution. Puisque tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont isolés pour la topologie de Stone, $\mathbb{N}$ est ouvert dans $\beta\mathbb{N}$, donc $\beta_0\mathbb{N}$ est compact en tant qu'une partie fermée d'un espace compact $\beta\mathbb{N}$. La cardinalité de $\beta_0\mathbb{N}$ est la même que celle de $\beta\mathbb{N}$, car $\operatorname{card}(\beta\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\beta_0\mathbb{N}) + \operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\beta_0\mathbb{N})$.

Soit $\mathcal{A}$ une famille presque disjointe maximale de parties de $\mathbb{N}$ telle que $\operatorname{card}\mathcal{A} = \mathfrak{c}$. Alors $\{\beta_0 A : A \in \mathcal{A}\}$ est une famille d'ouverts de $\beta_0\mathbb{N}$ disjoints deux à deux. Alors si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\beta_0\mathbb{N}$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ il existe $B_A \in \mathcal{B}$ tel que $B_A \subset \beta_0 A$. Or $A_0 \neq A_1$ implique que $B_{A_0} \cap B_{A_1} = \varnothing$, donc $\operatorname{card}\mathcal{A} \leq \operatorname{card}\mathcal{B}$. D'autre part, si $\mathcal{D}$ est une base d'ouverts de $\beta\mathbb{N}$, alors $\mathcal{B}_{\mathcal{D}} := \{D \setminus \mathbb{N} : D \in \mathcal{D}\}$ est une base d'ouverts de $\beta_0\mathbb{N}$ et $\operatorname{card}\mathcal{B}_{\mathcal{D}} \leq \operatorname{card}\mathcal{D}$.

Raisonnant par absurde, supposons que $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dense de $\beta_0\mathbb{N}$. Soit $p \notin \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un ouvert fermé V_n tel que $p \in V_n$ et $p_n \notin V_n$. Ainsi $W_n := \bigcap_{0 \leq k \leq n} V_n$ est une suite décroissante de parties ouvertes fermées non vides. Alors $\operatorname{int}_{\beta_0}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n)$ n'est pas vide et disjointe de $\operatorname{cl}_{\beta_0}\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$.

En effet, il existe une suite $(A_n)_n$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que $A_{n+1} \setminus A_n$ est finie $\beta_0 A_n = W_n$ pour tout n. Or, d'après la proposition I.4.9, il existe une partie infinie A_∞ de $\mathbb{N}$ telle que $A_\infty \setminus A_n$ est finie pour tout n, donc $\beta_0 A_\infty \subset \beta_0 A_n$ pour tout n.

Exercice B.15. *Montrer que si F, K sont deux fermés disjoints d'un espace complètement régulier et K est compact, alors il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $f(F) = \{0\}$ et $f(K) = \{1\}$.*

Solution. Puisque l'espace est complètement régulier, pour tout $x \in K$ il existe $f_x \in C(X, [0,1])$ *telle que* $f_x(F) = \{0\}$ *et* $f_x(x) = 2$. Ainsi $K \subset \bigcup_{x\in K}\{f_x > 1\}$. Comme K est compact, il existe une partie finie A de K telle que $K \subset \bigcup_{x\in A}\{f_x > 1\}$. La fonction $f(x) := \min(1, \max\{f_y(x) : y \in A\})$ est continue, $f(K) = \{1\}$ et $f(F) = \{0\}$.

Exercice B.16. *Montrer que*

(a) *toute union finie de parties fonctionnellement fermées est fonctionnellement fermée,*

(b) *toute intersection dénombrable de parties fonctionnellement fermées est fonctionnellement fermée.*

Solution. (a) Soit $F_1, \dots, F_n$ parties fonctionnellement fermées de X et $f_1, \dots, f_n \in C(X, \mathbb{R})$ telles que $F_k = f_k^{-1}(0)$ pour $1 \leq k \leq n$. Alors $F_1 \cup \dots \cup F_n = \{x \in X : \min_{1\leq k\leq n} |f_k|(x) = 0\}$.

(b) Si $(F_n)_n$ est une suite de parties fonctionnellement fermées de X, alors il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues sur X à valeurs dans $[0,1]$ telles que $F_n = f_n^{-1}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction

$$f(x) := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

est continue comme la limites uniforme de fonctions continue. D'autre part, $f(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$f^{-1}(0) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(0) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

est fonctionnellement fermée. Bien sûr, dans le cas d'une intersection dénombrable finie de cardinalité N, il suffit de poser $F_{N+k} := \varnothing$ et $f_{N+k}(x) := 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in X$.

Exercice B.17. *Montrer que si X est un espace séparé localement compact, alors la compactification d'Alexandrov de X est la plus petite de toutes les compactifications de X.*

Solution. Soit Y une compactification de X et $X \cup \{\infty\}$ sa compactification d'Alexandrov. Soit $f : Y \to X \cup \{\infty\}$ définie par $f(x) := x$ pour $x \in X$ et $f(y) := \infty$ si $y \in Y \setminus X$.

Il suffit de prouver que f est continue en y pour tout $y \in Y \setminus X$. Si V est un voisinage de $f(y) = \infty$, alors il existe un compact K de X tel que $X \setminus K \cup \{\infty\}$ est un voisinage de ∞ inclus dans V. Puisque $K \subset X \subset Y$, la partie K est également compacte dans Y, donc fermée dans Y, car Y est séparé. Ainsi $Y \setminus K$ est ouvert, contient y et $f(Y \setminus K) \subset X \setminus K \cup \{\infty\} \subset V$.

C. Métrisation

Solutions des exercices (pages 253-253)

Exercice C.1. Soit $\mathcal{H}$ une famille de fonctions réelles. Montrer que

$$\{\sup_{h\in\mathcal{H}} h > 0\} = \bigcup_{h\in\mathcal{H}} \{h > 0\},$$
$$\operatorname{card}\mathcal{H} < \infty \Longrightarrow \{\min_{h\in\mathcal{H}} h > 0\} = \bigcap_{h\in\mathcal{H}} \{h > 0\}.$$

Solution. En effet, $\sup_{h\in\mathcal{H}} h(x) > 0$ si et seulement s'il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que $h(x) > 0$. D'autre part, si $\mathcal{H}$ est fini alors $\min_{h\in\mathcal{H}} h(x) > 0$ équivaut à $h(x) > 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$.

Exercice C.2. *Si $\mathcal{A}$ est une famille localement finie d'un espace topologique X, alors*

$$\operatorname{cl}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A) \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A$$

Solution. Si $x \in \operatorname{cl}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A)$, alors, selon la définition, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\mathcal{A}_V := \{A \in \mathcal{A} : A \cap V \neq \varnothing\}$ est finie. Ainsi $V \cap \operatorname{cl}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_V} A) = V \cap (\bigcup_{A\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_V} A) = \varnothing$, donc $x \in \operatorname{cl}(\bigcup_{A\in\mathcal{A}_V} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_V} \operatorname{cl} A$, car $\mathcal{A}_V$ est finie. En conséquence, il existe $A \in \mathcal{A}_V \subset \mathcal{A}$ tel que $x \in \operatorname{cl} A \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \operatorname{cl} A$.

Exercice C.3. *Montrer qu'un espace topologique séparé X est normal si et seulement si tout recouvrement ouvert fini de X admet une partition finie de l'unité qui le raffine.*

Solution. Si X est normal, alors procédons par récurrence sur la cardinalité de recouvrement. Si $n = 1$, alors $\{X\}$ est un recouvrement ouvert de X de cardinalité 1. Si $n = 2$, alors soit U_0, U_1 deux ouverts tels que $U_0 \cup U_1 = X$, c'est-à-dire $X \setminus U_0$ et $X \setminus U_1$ sont fermés disjoints. Selon le lemme III.6.1 de Urysohn, il existe $f \in C(X, [0, 1])$ telle que $X \setminus U_0 \subset f^{-1}(0)$ et $X \setminus U_1 \subset f^{-1}(1)$, de manière équivalente, $\{f > 0\} \subset U_0$ et $\{1 - f > 0\} \subset U_1$, c'est-à-dire $\{f, 1 - f\}$ est une partition de l'unité raffinant $\{U_0, U_1\}$.

Supposons que la condition soit remplie pour les recouvrements de cardinalité n et soit $\{U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, U_n\}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $\{g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\}$ une partition de l'unité raffinant $\{U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \cup U_n\}$ et soit $\{h_0, h_1\}$ une partition de l'unité raffinant $\{U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}, U_n\}$. Alors

$$\begin{aligned} 1 &= (h_0 + h_1) \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} g_k \\ &= \sum\nolimits_{k=0}^{n-2} (h_0 g_k) + (h_0 + h_1) g_{n-1} + h_1 g_n, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} f_k &:= h_0 g_k, \text{ si } 0 \le k < n - 1, \\ f_{n-1} &:= (h_0 + h_1) g_{n-1}, \\ f_n &:= h_1 g_n \end{aligned}$$

est une partition de l'unité raffinant $\{U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}, U_n\}$.

Exercice C.4. *Montrer que tout recouvrement ouvert d'un espace topologique normal admet une partition bornée plus fine.*

Solution. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace normal X. Si $U \in \mathcal{U}$ et $x \in U$, alors il existe un voisinage V_x de x tel que $\operatorname{cl} V_x \subset U$, car X est régulier. Ainsi $\{V_x : x \in U, U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement ouvert raffinant $\mathcal{U}$. Selon le lemme III.6.1 de Urysohn, pour tout $U \in \mathcal{U}$ et $x \in U$, il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f(V_x) = \{1\}$ et $f(X \setminus U) = \{0\}$. Ainsi la famille de toutes ces fonctions f est une partition bornée sur X plus fine que $\mathcal{U}$.

Exercice C.5. *Montrer que tout espace topologique régulier de Lindelöf est paracompact.*

Solution. Soit $\mathcal{P}$ un recouvrement ouvert d'un espace régulier de Lindelöf X. Donc pour tout $x \in X$ il existe $P_x \in \mathcal{P}$ tel que $x \in P_x$, et d'après la régularité, un ouvert O_x tel que $x \in O_x \subset \operatorname{cl} O_x \subset P_x$. Puisque X est de Lindelöf, il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_{x_n} = X$. Ainsi

$$Q_n := P_{x_n} \setminus \bigcup\nolimits_{k=1}^{n-1} \operatorname{cl} O_{x_k}$$

est un recouvrement ouvert de X. Effectivement, pour tout x il existe un plus petit n tel que $x \in P_{x_n}$, donc $x \notin P_{x_k} \supset \operatorname{cl} O_{x_k}$ pour tout $k < n$, et par conséquent $x \in Q_n$. Il est clair que $\{Q_n : n < \omega\}$ est un raffinement de

$\mathcal{P}$. Enfin, $\{Q_n : n < \omega\}$ est localement fini, car pour tout x il existe un plus petit n tel que $x \in O_{x_n}$ et $Q_{x_l} \cap O_{x_n} = \varnothing$ pour $l > n$.

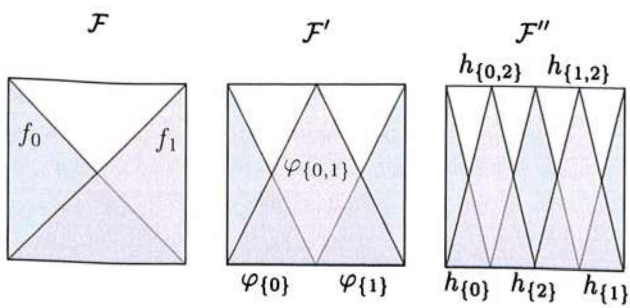
Exercice C.6. *Soit $X = [0,1]$ et $\mathcal{F} = \{1-x, x\}$ une partition de l'unité. Trouver la fragmentation $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ et la fragmentation $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}'$.*

Solution. Soit $f_0(x) = 1 - x$, $f_1(x) = x$ pour $x \in [0,1]$. D'après la définition (C.10),

$$\mathcal{F}' = \{\varphi_{\{0\}}, \varphi_{\{1\}}, \varphi_{\{0,1\}}\},$$

où

$$\varphi_{\{0\}}(x) = \max(0, 1-2x)\,,\ \varphi_{\{1\}}(x) = \max(0, 2x-1)\,,$$
$$\varphi_{\{0,1\}}(x) = 2\min(x, 1-x) = \min(2x, 2-2x)\,.$$



Abrégeons $0 := \{0\}\,, 1 := \{1\}$ et $2 := \{0,1\}$. On considère

$$\mathcal{F}'' = \left\{h_{\{0\}}, h_{\{1\}}, h_{\{2\}}, h_{\{0,1\}}, h_{\{1,2\}}, h_{\{0,2\}}, h_{\{0,1,2\}}\right\}.$$

Selon la définition

$$h_{\{0\}}(x) = \max(0, 1-4x)\,,\ h_{\{1\}}(x) = \max(0, 4x-3)\,,$$
$$h_{\{2\}}(x) = \max(0, \min(4x-1, 3-4x)),$$
$$h_{\{0,2\}}(x) = \max(0, \min(4x, 2-4x)),$$
$$h_{\{1,2\}}(x) = \max(0, \min(4x-2, 4-4x)),$$
$$h_{\{0,1\}}(x) = 0 = h_{\{0,1,2\}}(x).$$

Exercice C.7. *Montrer que si $\mathcal{F}$ est une partition de l'unité, alors les $\perp\mathcal{F}'$-étoiles des points de X forment un raffinement de $\perp\mathcal{F}$.*

Solution. Soit $x \in X$ et soit $\mathcal{T}$ une partie finie de $\mathcal{F}$ telle que $x \in \{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\}$. Soit maintenant $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble de h tels que $h(x) = \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x)$. Alors $\varphi_{\mathcal{H}}(x) > 0$ et $\varphi_{\mathcal{G}}(x) = 0$ si $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{H}$. On conclut que $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}$, car si $h \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{T}$ alors

$$\min_{f\in\mathcal{T}} f(x) < h(x) = \sup_{f\in\mathcal{F}} f(x) = \sup_{f\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{T}} f(x),$$

donc $\varphi_{\mathcal{T}}(x) = 0$. Ainsi si $h_0 \in \mathcal{H} \subset \mathcal{T}$ alors $h_0(y) \geq \dfrac{1}{\operatorname{card}\mathcal{T}}\varphi_{\mathcal{T}}(y) > 0$ pour tout $y \in \{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\}$. Ainsi $\{h_0 > 0\} \supset \bigcup\{\{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\} : x \in \{\varphi_{\mathcal{T}} > 0\}\}$.

D. Espaces normés fonctionnels

Solutions des exercices (pages 267-268)

Exercice D.1. *Montrer que*

(a) *si f est positive et mesurable, alors il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions positives étagées telle que $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in T$,*

(b) *si en plus $\|f\|_\infty < \infty$, alors la convergence est uniforme presque partout.*

Solution. Si $f : T \to \mathbb{R}_+$ est $\mathfrak{M}$-mesurable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}_1$, la fonction

$$f_n(t) := \frac{1}{2^n} E(2^n \min(f(t), 2^n)),$$

où $E(r)$ désigne la *partie entière* de r, alors f_n est simple. Selon la définition, $f_n(t) = 2^n$ si $f(t) > 2^n$ et $f_n(t) = \dfrac{k}{2^n}$ si $\dfrac{k}{2^n} \le f(t) < \dfrac{k+1}{2^n}$ pour $0 \le k \le 4^n$ et ainsi f est mesurable, donc étagée. Si $f(t) = \infty$, alors $f_n(t) = 2^n$ et ainsi $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \infty$. Si $2^n > f(t)$, alors $0 \le f(t) - f_n(t) < \frac{1}{2^n}$, d'où $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$. Il s'ensuit que si en plus $\|f\|_\infty < \infty$, alors il existe $E \in \mathfrak{M}$ telle que $\mu(T \setminus E) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in E} |f(t) - f_n(t)| = 0$.

Exercice D.2. *Montrer que*

(a) *la convergence en $\|\cdot\|_\infty$ est la convergence simple presque partout,*

(b) *$L_\infty(\mu)$ est complet.*

Solution. (a) Si $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, et

$$M_n := \{t : |f_n(t) - f(t)| > \|f_n - f\|_\infty\}$$

pour tout n, alors $\mu(M_n) = 0$ et ainsi $\mu(M) = 0$, où $M := \bigcup_n M_n$. Par conséquent, $\sup_{t\in T\setminus M} |f_n(t) - f(t)| \le \|f_n - f\|_\infty$, c'est-à-dire $(f_n)_n$ converge vers f uniformément, donc simplement, sur $T \setminus M$.

(b) Si $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L_\infty(\mu)$ et

$$A_{n,m} := \{t : |f_n(t) - f_m(t)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$
$$A_n := \{t : |f_n(t)| > \|f_n\|_\infty\},$$

alors $A := \bigcup_n A_n \cup \bigcup_{n,m} A_{n,m}$ est de mesure nulle et $(f_n(t))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) pur tout $t \in T \setminus A$. D'après la complétude de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), pour tout $t \in T \setminus A$ il existe $f(t)$ telle que

$$|f_n(t) - f(t)| \le \|f_n - f\|_\infty .$$

Alors f_∞ définie par $f_\infty(t) := f(t)$ si $t \in T \setminus A$ et $f_\infty(t) := 0$ si $t \in A$, est bornée et mesurable, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ et $f_\infty \in L_\infty(\mu)$.

Exercice D.3. *(Inégalité de Jensen) Soit $(T, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(T) = 1, f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable et $\varphi : \operatorname{conv} T \to \mathbb{R}$ est une* *fonction convexe. Montrer que*

$$(*)\qquad \varphi\Big(\int_T f\,d\mu\Big) \le \int_T \varphi\circ f\,d\mu.$$

Solution. Selon l'exercice VIII.9, φ est continue dans l'intérieur de $I :=$ conv T, donc $\varphi\circ f$ est mesurable. Soit $x_0 := \int_T f\,d\mu$. Selon l'exercice VIII.9, pour tous $x < x_0 < x_1$,

$$\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x} \le \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0}.$$

Si $\alpha := \sup_{x<x_0} \dfrac{\varphi(x_0)-\varphi(x)}{x_0-x}$, alors pour tous $x < x_0 < x_1$,

$$\varphi(x_0)+\alpha(x_1-x_0) \le \varphi(x_1) \text{ et } \varphi(x_0)+\alpha(x-x_0) \le \varphi(x),$$

donc $\varphi(x) \ge \varphi(x_0)+\alpha(x-x_0)$ pour tout $x \in I$, donc pour tout $t \in T$,

$$\varphi\Big(\int_T f\,d\mu\Big)+\alpha\Big(f(t)-\int_T f\,d\mu\Big) \le \varphi(f(t)).$$

En intégrant cette inégalité et tenant compte de $\int_T 1\,d\mu = 1$, on obtient (*).

Exercice D.4. (théorème de Luzin) *Soit $(T,\mathfrak{M},\mu)$ un espace mesuré borelien, où T est complètement régulier et μ est régulière. Si $\mu(E) < \infty$ et $f : E \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in C_c(T,\mathbb{R})$ et un compact K tels que $K \subset \{h = f\}$* et *$\mu(E\setminus K) < \varepsilon$.*

Montrer ce théorème progressivement pour les fonctions (a) caractéristiques, (b) étagées, (c) positives bornées, (d) positives, (e) réelles.

Solution. (a) Puisque la mesure est régulière, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K et un ouvert O tels que $K \subset E \subset O$ et $\mu(O\setminus K) < \varepsilon$. D'après l'exercice B.15, il existe $h \in C(T,[0,1])$ telle que $K \subset h^{-1}(1)$ et $T\setminus O \subset h^{-1}(0)$. Bien entendu, $\mu(\{\chi_E \ne h\}) < \varepsilon$ et $h \le \chi_E$.

(b) Soit $f = \sum_{k=1}^n r_k\chi_{E_k}$ une fonction étagée, où $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ et $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathfrak{M}$ sont disjoints deux à deux. Si pour tout $1 \le k \le n$, la fonction $h_k \in C(T,[0,1])$ est telle que $\mu(\{\chi_{E_k} \ne h_k\}) < \frac{\varepsilon}{n}$ et $h_k \le \chi_{E_k}$, alors

$$h := \sum\nolimits_{k=1}^n r_k h_k$$

est continue, $\mu(\{f \ne h\}) < \varepsilon$ et $h \le f$. Plus précisément, il existe un compact $K \subset \{f = h\}$ tel que $\mu(E\setminus K) < \varepsilon$.

(c) Soit $f : T \to \mathbb{R}_+$ mesurable bornée à support dans E. D'après l'exercice D.1, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ de fonctions étagées à support dans E, convergeant uniformément vers f. Selon (b), pour tout n il existe $h_n \in C(T,[0,1])$ et un compact $K_n \subset \{f_n = h_n\}$ telle que $\mu(E\setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Ainsi $\mu(E\setminus \bigcap_{n=1}^\infty K_n) < \varepsilon$, donc $(h_n)_n$ converge uniformément sur $K := \bigcap_{n=1}^\infty K_n$ vers f. Par conséquent, f coïncide sur K avec une fonction continue (qu'on peut continûment prolonger sur T).

(d) Soit $f : T \to \mathbb{R}_+$ mesurable à support dans E. Soit

$$E_n := \{t \in T : f(t) > n\}.$$

Puisque $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(E_n) < \epsilon$ et $f \cdot \chi_{E\setminus E_n}$ est bornée.

(e) Ceci découle de (d) appliquée aux parties positive et négative de f.

Exercice D.5. *Soit* $1 \leq p < \infty, T$ *un espace localement compact et* $(T, \mathfrak{B}, \mu)$ *un espace borelien. Montrer que l'espace* $C_c(T)$ *est dense dans* $L_p(T)$.

Solution. Si $f \in L_p(T, \mathbb{R}_+)$, alors d'après l'exercice D.1, il existe $(f_n)_n$ de fonctions étagées telle que $0 \leq f_n \leq f$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$. Ainsi $f_n \in L_p(T, \mathbb{R}_+)$ et $|f - f_n|^p \leq f^p$, donc en vertu du théorème D.1.3 de Lebesgue de convergence dominée, $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Si $g \in L_p(T, \mathbb{R}_+)$ est étagée, alors d'après l'exercice D.4, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h \in C(T, \mathbb{R}_+)$ telle que $h \leq g$ et $\mu(\{g \neq h\}) < \varepsilon$. En plus, on peut trouver une telle h à support compact, car T est localement compact. Ainsi $\|g - h\|_p \leq 2\sqrt[p]{\varepsilon}\,\|g\|_p$. Il suffit considérer les parties positive et négative de $f \in L_p(T, \mathbb{R})$ pour conclure que $C_c(T)$ est dense dans $L_p(T)$.

Index

Bibliographie

[1] D. Azé, J.-B. Hiriart-Urruty. *Analyse variationnelle et optimisation.* Cépaduès, 2010.

[2] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Matematyczne, 1932.

[3] R. Beattie, H.-P. Butzmann. *Convergence Structures and Applications to Functional Analysis.* Springer-Verlag, 2002.

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, 1983.

[5] G. Cantor. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen,* **23** : 453–488, 1884.

[6] G. Choquet. Convergences. Annales Université de Grenoble, **23** : 55–112, 1947-48.

[7] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1990.

[8] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Interscience, 1953.

[9] S. Dolecki. An initiation into convergence theory. F. Mynard and E. Pearl ed. *Beyond Topology,* volume 486, pages 115–162. Contemporary Mathematics Series A.M.S., 2009.

[10] N. Dunford, J. T. Schwartz. *Linear operators, Part 1 : General Theory.* Interscience Publ. Inc., New York, 1957.

[11] J. Dydak. Partitions of unity. *Topology Proceedings,* **27**(1) : 125–171, 2003.

[12] R. Engelking. *Topology.* Heldermann Verlag, 1989.

[13] M. Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo,* **22** : 1–74, 1906.

[14] R. Frič. On plane topologies with high sequential order. Comm. Math. Univ. Carolinae, **31**(1) : 33–36, 1990.

[15] Z. Frolík. Sums of ultrafilters. *Bulletin American Mathematical Society,* **73** : 87-91, 1967.

[16] L. Gillman, M. Jerison. *Rings of Continuous Functions.* Van Nostrand Company, Inc., 1960.

[17] G. H. Greco. *Complementi di teoria della misura.* Notes du cours *Analyse fonctionnelle,* Università di Trento, 2007-2008.

[18] G. H. Greco. *Calcolo differenziale e integrale. In occasione del 150° anniversario della nascita di Giuseppe Peano (1858-1934),* volume 1. Aracne, 2008.

[19] H. Hanche-Olsen. *Assorted notes on functional analysis.* http/www. math. ntnu.no/ hanche/ notes/ fnal/fnal.pdf, 2005.

[20] F. Hausdorff. *Set Theory.* Chelsea Publishing Company, 1962.

[21] H. Herrlich. Wann sind alle stetigen Abbildungen in Y konstant. *Math. Zeitschrift.,* **90** : 152–154, 1965.

[22] T. Jech. *Set Theory.* Academic Press, 1978.

[23] K. Kuratowki. *Rachunek Różniczkowy i Całkowy.* PWN, 1964, traduit en anglais dans *Introduction to Calculus.* Pergamon Press, PWN Polish Scientific Publishers, 1972.

[24] K. Kuratowski. *Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii.* PWN, 1965, traduit en anglais dans *Introduction to set theory and topology.* Pergamon Press, Addison Wesley Publ., 1962.

[25] J. R. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, 2000.

[26] G. Peano. Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Mathematische Annalen,* **37** : 182–228, 1890.

[27] G. Peano. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen,* **36** : 157–160, 1890.

[28] W. Rudin. Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications. Duke Math. J. **23** : 409–419, 1956.

[29] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* MacGraw-Hill, 1966, traduit en français dans *Analyse réelle et complexe.* Dunod, 1998.

[30] C. Ryll-Nardzewski. *Funkcje rzeczywiste.* Cours *Fonctions réelles* à l'Université de Wrocław, Notes manuscrites par S. Dolecki, 1970.

[31] H. H. Schaefer. *Topological Vector Spaces.* Springer-Verlag, 1986.

[32] L. A. Steen, J. A. Seebach. *Counterexamples in Topology.* Holt, Rinehart and Winston, 1970.

[33] J. Vaughan. *An introduction to images of the irrational numbers.* Cours donné au IV Taller de Investigacion en Topologia, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Oaxaca City, Mexico, November 14 -16, 1996 (non publié).

[34] E. Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. Mathematische Annalen, **59** : 514–516, 1904.

Achevé d'imprimer en juillet 2013
par la Sté ACORT Europe
www.cogetefi.com

Dépôt légal à parution

Imprimé en France

COLLECTION MÉTHODES

ANALYSE FONDAMENTALE

ESPACES MÉTRIQUES, TOPOLOGIQUES ET NORMÉS

SZYMON DOLECKI

Cet ouvrage, utile aux étudiants en dernière année de Licence et en Master de mathématiques, et autres filières scientifiques, présente dans un premier temps les faits fondamentaux sur les espaces métriques, vectoriels et normés, précédés d'une esquisse de la théorie des ensembles. Les principales classes des espaces métriques (séparables, compacts, complets, connexes et disconnexes) y sont traitées de façon détaillée.
Le volume est conçu de telle sorte qu'on puisse limiter la lecture aux aspects métriques ou bien l'élargir aux concepts topologiques généraux. Les annexes sur les espaces topologiques compacts et sur la métrisation permettent un approfondissement ultérieur. De même, les chapitres traitant les faits essentiels sur les espaces normés et la théorie spectrale sont accompagnés d'une annexe approfondie consacrée aux espaces fonctionnels.
La présentation est enrichie d'informations concises sur les origines et les développements récents des concepts. Plusieurs sujets sont abordés de manière originale : par exemple l'application des partitions aux caractérisations des espaces métrisables.

Szymon Dolecki est professeur à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne. Il a publié en rie des convergences, topologie ensembliste, histoire des mathématiques, analyse fonction optimisation et théorie du contrôle. Il fut professeur adjoint (adiunkt) à l'Institut de Math tiques de l'Académie polonaise des Sciences et professeur à l'Université de Limoges. Il a ens également en tant que professeur invité aux États-Unis, en Italie, en Chine, au Japon Vietnam.

ÉDITIONS HERMANN
Depuis 1876

www.editions-hermann.fr

ISBN 978 2 7056 87

9 782705 6874

37 €