Cours d'Instruments Financiers

2 février 2014

Benjamin Bruder

Master M2MO Paris VII

Merci de ne pas diffuser

Disclaimer Important : Ce document n'est surtout pas destiné à être diffusé, merci de ne pas le faire ! Ceci est un ensemble de note personnelle, il n'est absolument pas exempt d'erreurs, et est très incomplet. Ce support sera amélioré au cours du temps jusqu'à devenir acceptable. Cette version est fournie aux élèves dans le cas où leurs notes de cours seraient incomplètes. Si vous voyez une des erreurs dans ce document, merci de m'en faire part à benjamin.bruder[arrowbase]lyxor.com.

Inspirations :

John Hull : Options, Futures and Other Derivatives (huitième édition)

Première partie

Description des instruments financiers simples

Un instrument financier est un titre (en opposition au bien physiques) qui peuvent s'échanger sur les marchés ou avec des contreparties très spécifiques. On peut approximativement les séparer en deux catégories :

- Les produits financiers de base (actions, obligations, titres de prpopriété divers...)
- Les produits dérivés (qui sont des produits dont la valeur dépend directement de la veleurs d'autres variables plus simples).

Il existe une très grande variété de produits dérivés, que nous allons étudier dans ce cours. La valorisation de ces produits nécessitement parfois des connaissances techniques importantes, ce qui a provoqué l'arrivée des ingénieurs et autres mathématiciens au sein des salles des marchés.

1 Les marchés

1.1 Les marchés OTC (de gré à gré)

1.1.1 Definition

Ce sont des marchés dans lesquels les contreparties s'entendent entre elles. Dans le cas où un acteur veut traiter, soit :
- il appelle differentes contreparties (banques etc...) pour connaitres leur prix d'achat et de vente
- il peut passer par l'intermédiaire d'une broker qui fait ce travail a sa place et joue le role d'intermédaire.

Dans tous les cas, la transaction implique deux contreparties clairement identifiées *(la banque A vend une obligation XYZ à la banque A)*. Il se peut aussi dans le cas de produits dérivés que le vendeur emmette directement le titre au moment de la vente *(la banque B crée un titre (Certificat de Depot par exemple) et le vend à une entreprise A). Ces achats/ventes se font en général à la voix (enregistrés).*

1.1.2 Avantages et inconvénients

Avantages :
- Ceci permet une grande flexibilité dans les produits achetés et vendus qui peuvent être faits sur mesure, *contrairement aux marchés listés qui sont standardisés (par exemple la maturité d'un placement n'est pas necessairement en fin de mois ou de trimestre).*

Inconvenients :
- On n'est pas sur d'avoir le meilleurs prix *(ou alors au prix d'un effort certain)*
- Pour les produits dérivés, cela introduit un risque de contrepartie *(quand typiquement ceux ci sont emis par le vendeur).*

1.2 Les marchés listés

1.2.1 Definition

Ce sont des marchés où les actif financiers sont standardisés, en nombre limités, et sur lesquels beaucoup d'acteurs traitent ensemble. L'organisateur du marché (NYSE/Euronex en france par exemple), se charge de maintenir constamment un carnet d'ordre (alimenté par les acteurs du marché), et assure les transactions. On ne sait pas avec qui l'on traite dans un tel marché. On place une ordre (acheteur par exemple) et c'est l'exchange (la place de bourse) qui le mettra en face d'un ordre (vendeur par exemple) pour que la transaction aie lieu.

1.2.2 Différents types d'ordres

Les différents types d'ordres que l'on peut passer dans un marché listé sont :

- Les ordres "au marché" (market order) (i.e. a tout prix). L'ordre est executé imméditement au meilleur prix possible. *Cela peut être dangeureux si il y a peu de personnes en face de l'odre car possibilité d'être executé à un très mauvais prix.*
- Les ordres "limite". L'ordre est executé seulement si le prix le meilleur prix possible est égal ou meilleur qu'un prix donné. *Par exemple si on passe un ordre d'achat limite sur l'action SocGen à 20€, l'ordre sera executé uniquement si d'autres acteurs sont prêts à vendre à un prix inférieur ou égal à 20€ (via des ordres au marché ou des ordres limite en dessous de 20€ par exemple).* Si il n'y a pas de contrepartie proposant un tel prix l'ordre est mis en attente dans le carnet d'ordre.

Schéma du carnet d'ordre

- Les ordres "stop" ou "stop-loss". Lorsqu'un prix limite (défavorable, c'est à dire bas à la vente ou haut à l'achat) est touché, l'ordre devient un ordre au marché. *Pour un stop à la vente (aussi appellé stop loss) : Si l'action vaut 20€, l'ordre stop à la vente à 15€ devient un ordre de vente au marché dès que le prix de l'action vaut moins de 15€ (il pourra être executé à 15€ mais pas forcément). Cela peut permette de limiter les pertes eventuelles. Existe aussi à l'achat quand le prix dépasse un certain montant.*
- Un ordre "Stop-limit" est un ordre stop qui devient un ordre limit lorsque le prix "stop" est touché (au lieu d'un ordre au marché). Il y a donc deux quantités à rensigner : *le prix de déclenchement et la limite en question. Quand ces deux prix sont les mêmes on appelle cela un ordre "stop et limit" ("stop and limit").* Donner un exemple.
- Un ordre "Market-if-touched" devient un ordre au marché lorsque le prix touche des conditions plus favorables que le prix spécifié. *A l'achat, il s'active lorsque le prix passe en dessous du prix spécifié. A la vente il s'active lorsque le prix dépasse un certain seuil. Cela permet d'opérer automatiquement des prises de bénéfice. Est en quelque sorte le symétrique de l'ordre stop (s'active dans les cas favorablees et non les cas défavorables).*
- Et d'autres comme par exemple des ordres s'executant à une certaine période de la journée (typiquement au close), qui disparaissent au bout d'un moment etc...

Dans tous les cas ces ordres disparaissent à la cloture du marché en fin de journée.

1.2.3 Avantages et inconvénients

- Avantage : Ce systeme permet d'obtenir directement le meilleur prix sans appeller différentes contreparties. Permet de suivre parfaitement l'évolution des cours. Limite grandement le risque de contrepartie.
- Inconvénient : Fonctionne pour un nombre limité de contrats standardisés (impossible de faire du "sur mesure"). Demande à ce que beaucoup d'acteurs soients présent pour animer le marché. *Ne peut donc être mis en place que pour les contrats standards sur lesquels l'offre et la demande sont importants (donc pas ou peu d'obligations sur ces marchés).*

2 Les produits financiers de base

On ne va pas cherche à faire ici une liste exhaustive (on va oublier l'immobilier etc...) mais on va plutot chercher à décrire ceux qui sont le plus souvent utilisés dans les salles de marchés.

2.1 Les devises, le marché monétaire

Autrement appellé cash, il est en général placé sur un compte rémunéré dans un banque ou chez un dépositaire. Les devises peuvent s'échanger entre elles sur les marchés organisés. C'est le premier marché au monde en terme de volume.

2.2 Les obligations (bonds)

Ce sont des titres de créance émis par des entreprises, des banques, des états ou des organismes supranationaux. L'organisme en question (l'emmeteur, ou issuer) emet le titre et le vend sur les marchés, ce qui lui permet d'obtenir le cash (qu'elle devra rembouser selon les termes précisés dans le contrat).

Les remboursements s'étalent de la facon suivante :

- Le principal correspond en général au montant emprunté *(c'est a dire le prix initial de l'obligation).*
- Les coupons sont versé périodiquement et correspondent au paiement des intérêts. (en general chaque année ou trimestre) *(auparavant c'etait phisiquement de vrais coupons à détacher...)*

Placer le schéma des flux de l'oblig. Ils peuvent aussi dépendre d'un taux d'intérêt, on parle alors de coupons flottants (qui bougent...).

Le paiement d'un coupon est appellé détachement du coupon. Lors de ce détachement, le prix de l'obligation chute d'un montant égal au coupon détaché. Ainsi on obtient (en cas de taux d'intérets constants...) la valorisation suivante. (on verra les formules exactes plus tard).

On appelle le coupon couru :

$$\frac{tempsdedpuislederniercoupon}{tempsentredeuxcoupon} \times ValeurDuCoupon$$

Ce coupon couru peut être ou non valorisé dans le prix de l'obligation. On parle de :

- Dirty price : Prix de l'obligation
- Clean price : Prix de l'obligation sans coupon couru.

Tout manquement aux conditions exactes du contrat (retard etc...) est appellé défaut de paiement. Ces coupons sont en général d'un montant fixe.

Tout manquement à un des paiements ou modification des modalités est appellé défaut de paiement (qui ne veut pas dire faillite). La faillite quand à elle provoque une liquidation de l'entreprise (tout ce qu'elle a est vendu). Les fruits de la liquidation seront donnés aux détenteurs d'obligation, par ordre de séniorité. Cette séniorité est stipulée dans le contrat obligataire. On rembourse toujours en premier les contrats les plus "séniors". Dans l'ordre :

- Les contrats de gré à gré (produits dérivés, fournisseurs etc...)
- Les obligations "senior"
- Les obligation subordonnées
- Les dépots (vérifier)
- Les actionnaires

2.3 Les actions (equities)

Les actions sont les titres de propriété d'une entreprise. Elles rémunèrent les actionnaires en distribuant des dividendes, ou par des montages plus complexes (rachat d'actions par exemple). Il peut arriver différente opération sur ces titres :

- OPA/OPE
- Distribution de dividendes en cash ou en actions gratuites (ou au choix)
- Rachat d'actions
- Augmentation de capital (emmission de nouvelles actions).

Et bien evidemment la faillite. La valeur des actions est justifiée par ces flux de cash futurs : Grosso modo les dividendes futurs et la valuer eventuelle le jour de la liquidation de l'entreprise.

On utilise aussi beaucoup les indices actions. *Un indice action est un chiffre publié par un fournisseur d'incide (par exemple, S&P, FTSE, Euronext, Dow Jones...), censé répliquer la performance d'un portefeuille d'action suivant des règles de pondérations données, en général les pondérations proportionnelles à la capitalisation boursière. Ces indices peuvent prendre en compte ou non les dividendes. Si les dividendes ne sont pas comptés, on parle d'indice Price Index (exemple : CAC40). Si les dividendes sont comptés, et réivestits, on parle d'indice total return. Si les dividendes sont comptés, soumis à taxation puis reinvestits on parle de Net Return. Les indices net return sont ceux qui correspondent le mieux à la performance d'un portefeuille. Les indice price index sous estiment la valeur du portefeuille et les indices total return la surestime.*

3 Les produits dérivés simples

3.1 Contrats à terme (contrat "Forward")

3.1.1 Definition

Un contrat "Forward" est un accord entre deux contreparties pour acheter/vendre :

- un actif sous jacent donné (i.e. n'importe quoi)
- à une date donnée (appellée maturité, noté T)
- pour un prix donné (appellé prix forward, noté parfois K parfois F_t^T)

Ces trois élements étant convenus à la souscription du contrat. L'acheteur est OBLIGE d'acheter au prix et à la date fixé et le vendeur OBLIGE de vendre.

Ce type de contrat est à distinguer du contrat "spot" (au comptant) qui spécifie que l'achat/vente se font aujourd'hui. Ces contrats forward entre deux contreparties sont OTC (de gré à gré).

Celui qui s'engage à acheter a une position longue. Celui qui s'engage à vendre une position short.

Les actifs sur lesquels des contrats à terme existent sont très variés :

- Actions
- Obligations
- Matières premières
- Change
- Indices
- Etc...

3.1.2 Utilité

Permet :

- De se couvrir contre des variations de prix.

Ce type de contrat est particulièrement populaire sur les marchés de change. Il peut par exemple servir à couvrir une rentré de devises pour un entreprise. Par exemple pour une entreprise francaise (Airbus) qui va vendre 10 avions à une compagnie Americaine qui va le payer en Dollar dans deux ans. Airbus sait qu'il va recevoir 1 milliards de dollards dans deux ans, mais ses couts de production sont en Euros (700 millions d'Euros i.e. 910 millions de dollards). Il est donc en risque sur le change euro/dollar (il perd de l'argent si le dollar passe sous 0.7 euros pour un dollar) et va vendre pour 1.5 milliards de dollar forward à 2 ans contre 1.5/1.3 milliard d'euros environ.

- De prendre des paris à la hausse ou à la baisse (celui qui réalise la vente forward ne possède pas forcément l'actif aujourd'hui).

3.1.3 Payoff (profit résultant du contrat ?)

Pour l'acheteur (position longue) Profits et pertes de l'acheteur d'un contrat forward : Admettons qu'une entreprise achète 10000 action l'Oréal à maturité 2 janvier 2014 pour un prix forward de 100€.

A maturité :

- Il paye 10000*100€ = 1 million €
- Il recoit 10000 actions l'Oréal

Juste avant la maturité la valeur du contrat (pour l'acheteur) sera de :

10000*prix de l'action - 1 million €

Soit :

$$(S_T - K) * nombred'actions$$

Pour un contrat portant sur une action le payoff sera :

$$S_T - K$$

où K est le prix forward et S_T le prix spot de l'action à la date T. En effet :

- Si le prix $S_T = K$, l'acheteur peut revendre immédiatement ses action et fait 0 profit

- Si $S_T > K$ il achète des action moins cher que leur prix courant et il réalise un profit
- Si $S_T < K$ il achète les action plus cher que le prix de marché, il réalise donc une perte et le contrat forward a une valeur négative

En résumé : Graphe

Pour le vendeur (position Short) De même sa contrepartie, vendeuse de 10000 action l'Oréal au prix forward de 100€ :

A maturité :
- Donne 10000 actions l'Oréal (qu'il vient sans doute d'acheter spot)
- Recoit 1 million d'Euros.

On fait les mêmes raisonnement, le payoff sera :

$$K - S_T$$

Résumé : Graphe

On voit que le vendeur gagne quand le prix de l'action baisse. Les contrats forwards permettent donc de vendre des action “a découvert”, *c'est à dire de faire comme si on possédait une quantité négative d'actions.*

3.2 Options d'achat (Call) ou de vente (Put)

3.2.1 Definition

Un Call, ou option d'achat est un produit dérivé donnant le DROIT à son détenteur d'acheter :
- un actif sous jacent donné
- à une date donnée (appellée maturité, noté T)
- pour un prix donné (appellé strike de l'option, ou prix d'exercice, noté K)

Un Put, ou option de vente est un produit dérivé donnant le DROIT à son détenteur de vendre
- un actif sous jacent donné
- à une date donnée (appellée maturité, noté T)
- pour un prix donné (appellé strike de l'option, ou prix d'exercice, noté K)

Il y a deux type d'options :
- Les option Européennes (qui peuvent être exercées uniquement à la maturité, comme ci dessus)
- Les options Americaines peuvent être exercées n'importe quand avant la maturité *(elles sont donc mieux)*

Comme c'est un droit, il est necessaire de payer pour ce droit. Les options on donc une valeur positive,, contrairement aux contrats forward dont le prix démarrer souvent à 0. Le nom peut être trompeur : il se vend aussi des options Americaines en Europe et des options Européenes aux Etats unis.

3.2.2 Payoff des options

Acheteur de Call Profit et pertes d'un acheteur d'un call (option d'achat) l'Oreal, Strike K =100€, maturité T =2 jan 2012, achetée C_0 =2€.

A maturité faut il acheter l'action (valant S_T) pour le prix K ? Si le prix de marché l'action $S_T \leq K$, l'option n'a pas d'interêt à être exercée. En revanche si le prix actuel de l'action $S_T > K$, celui qui possède l'option a intérêt à l'exercer qui à revendre l'action immédiatement après pour empocher la différence :$S_T - K$. Le profit de celui qui possède le call est donc

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{si} & S_T \leq K \\ S_T - K & \text{si} & S_T > K \end{array}$$

Soit :

$$max\,(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+$$

Il ne faut pas oublier qu'il a payé initialement la prime C_0. Sont profit total est donc :

$$(S_T - K)_+ - C_0$$

Desssin du profil

A quoi peut servir un call en terme de couverture ? Par exemple un call sur change peut être utilisé pour couvrir le change (ou les matières premières) pour un contrat qui n'est pas sur d'être remporté (option d'achat sur l'aluminium pour airbus par exemple...).

Pour un investisseur, cela permet de profiter d'une forte indexation à la hausse sans risque de perdre beaucoup : le profil est assymétrique.

Vendeur de Call Le vendeur du call, lui, subit la décision de l'acheteur du call, son payoff est donc :

$$-\,(S_T - K)_+$$

Acheteur du put L'acheteur du put de Strike K, maturité T et acheté P_0.

A maturité, faut il vendre l'action (valant S_T) pour le prix K ? Si le prix de l'action est supérieur à K, aucun intérêt à exercer l'option. En revanche si $S_T \leq K$ on a gagne $K - S_T$ par rapport à la valeur de marché. Si l'on ne possède pas l'action on peut l'acheter pour le prix S_T, le renvendre au prix K via l'option et gagner $K - S_T$. En résumé on a donc :

$$\begin{array}{rcl} 0 & \text{si} & S_T \geq K \\ K - S_T & \text{si} & K > S_T \end{array}$$

D'où

$$max\,(K - S_T, 0) = (K - S_T)_+$$

Et le profit est donc :

$$(K - S_T)_+ - P_0$$

Ce type de profil permet de protéger contre les baisses trop importantes d'un actif, il peut être vu comme l'achat d'une assurance contre les baisses.

Vendeur de put Le vendeur de put subit le profil inverse :

$$-(K - S_T)_+$$

3.2.3 Cash delivery vs Phisical Delivery

L'option d'achat, et les contrat forwards ne donnent pas forcement lieu à l'achange du sous jacent car cela peut être compliqué (par exemple dans le cas d'option sur indices comportant 5000 actions). L'option verse alors directement sont payoff en cash (d'après les formules précedentes). Cela permet d'eviter les coûts de transaction.

Comme on verse directement des flux de cash, pourquoi se limiter ? On peut créer des contrats versant a maturité n'importe quuelle fonction du prix du spot $g(S_T)$, voire une fonction du prix de plusieurs actifs à plusieurs dates. On parle alors d'options "exotiques" contrairement aux options "vanille" que sont les calls et les puts. *La valorisation de ces contrats demande des outils mathématiques complexes (que l'on apprend dans ce Master). C'est le besoin de valoriser les optiions qui a provoqué l'arrivée des ingénieurs dans les salles de marché.*

Par extension, comme on n'a plus besoin de s'échanger l'actif, on peut ensuite créer des contrats sur des données non échangeables (call sur la quantité de neige ou la température en montagne...)

3.3 Contrats à terme "Futures"

3.3.1 Intérêt

Les contrats à terme forward posent quelques problèmes :
- Ce sont des contrats OTC (pas d'assurance d'avoir le meilleur prix)
- Il y a un risque de contrepartie (faillite d'un des deux signataires).

Les contrats futures ont été crées afin de résoudre ces problèmes. Ce sont des contrats :
- Standardisés
- Sur les marchés listés
- Regulés par une chambre de compensation

Les futures portent sur :
- Des taux de change
- Des indices action (CAC40, S&P500...)
- Des matières premières
- Des obligations d'état
- Des taux d'intérêt

3.3.2 Spécifications

Les caractéristiques d'un contrat future sont :
- L'actif : *la description peut être assez complexe (spécification de ce qu'est une vache, du mais, du jus d'orange) ou un tout petit peu complexe (cas des obligations, ou la maturité est encadrée)*

- La taille du contrat *(nombre de vaches, de tonnes de mais, d'obligations), celle ci est faible pour les agricoles, forte pour les purement financières (options sur indice)*
- Les details de livraison *(ou mettre le jus d'orange ?) Décidé par le vendeur en cas de choix*
- Les mois de livraison *(contrats trimestriels ou mensuels)*

On recoit d'abord une notice d'intention de livraison détaillant les spécifiicités puis le produit est livré.

En règle générale, la livraison n'a pas lieu car les contrats sont dénoués avant leur échéance. Les short rachètent des futures et les longs revendent. Tout cela avant l'échance des futurs (sinon la banque se fait livrer du betail...).

3.3.3 Les margins

Pour éviter le risque de contrapartie, les contrats futures sont centralisés par les exchanges.

Lorsque quelqu'un prend une position (acheteuse ou vendeuse) sur des contrats futures, un certain pourcentage du montant total du contrat (de l'ordre de 15% par exemple) est déposé sur un compte dans un chambre de compensation. *Sur un achat de 100 contrats sur le pétrole à 10000€ le contrat (notionel total 1000000€), cela represente alors 150000€.* Lorsque le prix futur bouge, ce compte est crédité ou débité des gains ou pertes du jour. *Par exemple si le contrat passe à 10100€, le compte est crédité de 100€*100 et donc passe à 160000€.* Si la position est trop perdant, le compte à la chambre de compensation se vide. Lorsqu'il passe en dessous d'un certain pourcentage de la position ouverte, (par exemple 12.5%), l'investisseur doit recréditer le compte pour revenir à 15% de sa position, sous peine de voire sa position liquidée (annulée). Inversement lorsque le compte est trop plein, l'investisseur peut récupérer de l'argent pour revenir à 15%. L'argent est intégralement récupéré lorsque la position est close.

Ce systeme permet d'éviter le risque de contrepartie et s'est montré très robuste. Les niveaux de marge dépendent du risque actuel pesant sur les prix.

3.4 Les swaps

Un swap est contrat spécifiant un échange de flux programmé dans le temps entre deux contreparties.

Les flux payés par chaque contreparties sont appellés pattes du swap.

Souvent, une des deux patte du swap est fixe. Celui qui paye la patte fixe est appellé acheteur du swap.

Les pattes variable, versées periodiquement, peuvent être :

- Des taux d'intérêts versés périodiquement
- Les rendements d'un portefeuille
- Des payoff optionnels...

On peut avoir deux pattes variables dans un swap.

3.5 La titrisation

Apparue dans le monde du crédit. Titre regroupant la propriété d'un certain nombre de dettes diverse, ou des tranches de portefeuille de dette

- MBS : ensemble de prets immobiliers
- CDO : Ensemble de dettes, tranchées en différentes séniorités
- ABS : ensemble d'actifs divers (credit conso etc...)
- Et bien d'autres...

Parfois (MBS par exemple) garanties de l'emmeteur.

4 Les intervenants sur les marchés

4.1 Les différents types d'intervenants

Trois type de movitivation pour aller sur les marchés :

- La couverture des risques : *Entreprises cherchant à réduire les risques qu'elle subit naturellement en les compensant par des opérations sur les marchés*
- La spéculation (i.e. l'investissement) : *Chercher à gagner de l'argent en prenant des paris (comme par exemple tout investissement dans une entreprise)*
- Les arbitragistes : Chercher à profiter des incohérences du marché pour gagner à coup sur. Par exemple si le prix d'une action est différent sur deux marchés (Paris et NY) ils svont acheter sur la plce la moins chère et vendre sur la place la plus chère.

La présence des arbitragistes "assèche" aautomatiquement toute possibilité d'arbitrage. On considérera donc par la suite qu'il n'y a jamais d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire que l'on ne peut jamais gagner de l'argent à coup sur (au dela du taux sans risque).

4.2 Les différents types d'organisation sur les marchés

- Banque d'investissement (compte propre bancaire, desk exotique, desk flux...)
- Les asset managers (gerant d'actif
- Les assureurs
- Les hedge funds
- Certains corpo sur les commodities.

Et les clients :

- Les corporate
- Les fonds de pension
- Les fonds souverains
- Les reseaux de distribution (resau, banque privée...)

4.3 Organisation d'une salle de marchés

Dans une salle des marchés qui emet des options exotiques, il y a :

4.3.1 Front office

- Des traders qui passent les opérations sur les marchés :
  - Vendre les options aux client
  - Executer les stratégies de couverture
- Des commerciaux, qui vendent les options aux clients *(absents dans une salle de compte propre)*
- Des structureurs, ou ingénieurs qui créent les options : *(absents dans une salle de compte propre)*
  - Coté juridique (vehicule exact etc...)
  - Coté technique (pricing) (valorisation des options, strategie de couverture, risques liés à la couverture...)
- De informaticiens : devellopement d'outils necessaires aux traders et aux "pricers"...
- Souvent un département de recherche
- Chez les gérants d'actifs : analystes, stratégistes etc...

4.3.2 Middle office

- Le département des risques :
  - Controle les risques pris par les traders
- Controles de la comptabilité etc...
- Des informaticiens

4.3.3 Back office

Livraison effective des achats/vente, envoi/réception des flux de cash. *Beaucoup d'informaticiens aussi...*

5 Taux d'intérêt

Les taux d'intérêt définit ce que l'emprunteur promet de payer au prêteur. Celui ci dépend de la devise, de la qualité de l'emprunteur (risque de crédit), de la maturité du prêt et de la structure de remboursement. Il y a beaucoup de conventions pour les taux d'intérêt, et beaucoup de types de taux d'intérêt.

Pour plus de précisions : cours et slides de Phillipe Priaulet : L. Martellini et P. Priaulet, «Produits de taux d'intérêt : Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture»,

5.1 Taux d'interet de reference

- Les taux d'intérêt gouvernementaux : Provient des prix des obligation gouvenementales. Représente en général le taux sans risque. Existe jusqu'à

30 ans de maturité.
- Le LIBOR (London Interbank Offered Rate) : Moyenne des taux auquels les banques (notées > AA) déclarent pouvoir emprunter. Existe de 1 semaine à 1 an.
- Le taux repo : Taux pratiqué pour des prêts collateralisé : on prête de l'argent en échange d'actifs laissés en collatéral (ayant la même valeur). Réduit considérablement le risque de crédit. *Si l'une des deux parties fait faillite, le contrat se dénoue et les pertes en capital sont faibles. En pratique la partie qui prête achète l'actif à l'emprunteur et signe un contrat promettant la vente à un prix donné (qui sera le montant remboursé par l'emprunteur).*
- Et d'autres : Prets pour chaque entreprise, hypothecaires etc...
- Taux sans risque : se réferre en général au taux souverain *(moins vrai en Europe maintenant)*, au Libor *(moins vrai depuis 2007 et les crises bancaires)*, ou au taux OIS *(reference à un montage permettant de baisser le risque de défaut). Ne pas oublier que le taux sans risque est une vue de l'esprit.*
- En Europe le taux overnight (prêt aujourd'hui remboursement demain) interbancaire est appellé EONIA. En Angleterre SONIA et aux USA Fed Fund effective.

5.2 Convention de taux d'interêt

Que veut dire un taux d'intérêt de 10% sur un placemeent de 100 au bout d'un an :

Composition annuelle : 100*(100%+10%)=110

Composition tous les six mois : 100*(100%+5%)*(100%+5%)=110.25

Composition tous les mois :100*(100%*10/12%)^12=110.47

Composition tous les jours :100*(100%*10/365%)^365=110.52

Donc 10% composés tous les jours équivaut à 10.52% coomposés annuellement.

Formule générale de la valeur terminal d'un pret pour un taux d'intéret R pendant n années composés m fois par an :

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{nm}$$

Quand m tend vers l'infinin obtient :

$$Ae^{Rn}$$

Faire la demo par la formule précédente puis par EDO. Formule très proche de la composition journalière.

Exercices : Passage d'une convention à l'autre (typiquement taux continu-> taux m fois par an) puis m fois par an -> k fois par an.

5.3 Taux court

Le taux dit “court”, sans risque est le taux d’un prêt en aujourd’hui et demain (overnight). Le pret à très court terme, sans risque de crédit est l’actif le plus sans risque à court terme (on sait exactement la valeur de notre investissement demain).

Entre aujourd’hui et demain (t et t+dt) on a le taux r_t. Le cash C_t placé au taux court évolue selon :

$$\begin{aligned} C_{t+dt} &= C_t\left(1+r_t dt\right) \\ dC_t &= C_t r_t dt \end{aligned}$$

D’où :

$$C_T = C_0 e^{\int_0^T r_t dt}$$

On voit qu’en revanche on ne connait pas la valeur du placement à long terme (dépend de l’écolution de r_t)

5.4 Taux zero coupon

Un zero coupon est une obligation ne versant pas de coupon, et versant donc uniquement le principal (ou notionel).

On note $B\left(t,T\right)$ le prix en t d’un zero coupon versant 1€ à la date T.

L’achat d’un zero coupon coute $B\left(t,T\right)$ en t et rapporte 1€ en T. Si on investit une somme X en t on peut acheter $\frac{X}{B(t,T)}$ zero coupons. On recevra donc $\frac{X}{B(t,T)}$ euros en T.

Chaque Euro investit rapporte $\frac{1}{B(t,T)}$ le taux d’intérêt est donc donné par :

$$e^{R_B(t,T)(T-t)} = \frac{1}{B\left(t,T\right)}$$

Avec $(T-t)$, exprimé en nombre d’années, la maturité restante. Ce taux est appellé taux zero coupon, ou taux d’escompte (discount rate).

D’où

$$B\left(t,T\right) = e^{R_B(t,T)(T-t)}$$

Les zeros coupons sont les briques de base permettant de valoriser les obligations. Ils forment la courbe de taux zero coupons. Mais ils sont peu disponibles sur les marchés (mis à part à court terme $<$1an). C’est donc une courbe avec beaucoup de trous qu’il faut combler en dérivant les prix de ZC à partir d’autre prix (courbe implicite).

En général cette courbe est croissante (la dessiner). On peut interpréter cela par le fait que les gens on envie de préter à court terme face à des gens qui veulent emprunter à long terme. D’où une méthode répandue pour zssayer de gagner de l’argent : emprunter à court terme et préter à long terme (stratégie souvent payante mais risquée...).

5.5 Valorisation d'obligations à coupons deterministes

5.5.1 A partir des zero coupons

Considérons une obligation versant des coupons C_i à des dates t_i, et versant le notionel $(N + C_n)$ en $T = t_n$.(FAIRE LE DESSIN DES FLUX) Supposons que tous les ZC sont disponibles dans le marché. Par absence d'opportunité d'arbitrage son prix $O(t)$ doit être égal au prix du portefeuille de zero-coupon versant les mêmes flux :

$$O(t) = \sum_{i=1}^{n} 1_{t<t_i} B(t, t_i) C_i + B(t, T) N$$

Si les prix sont différents, en achetant l'un (le moins cher) et en shortant le plus cher, on obtient un portefeuille versant des flux nuls plus une somme d'argent initiale, ce qui est un arbitrage.

Le sprix des zeros coupons permettent donc de valoriser toutes les obligations ayant des coupons fixes. C'est pour cela que l'on appelle $B(t, t_i)$ le facteur d'actualisation (discount factor). Il permet de convertir le prix de flux certain à la date t_i en flux certains à la date t.

5.5.2 Caractérisation via un taux unique

Taux actuariel (bond yield, Yield to Maturity) *La formule ci dessus fait appel à de multiples taux (un par coupon) ce qui rend les choses peu intuitives, et permet mal de savoir combien l'investissement peut rapporter.*

$$O(t) = \sum_{i=1}^{n} 1_{t<t_i} e^{R(t,t_i)(t_i-t)} C_i + e^{R(t,T)(T-t)} N$$

Si on veut faire simple, on peut chercher le taux zero coupon unique (independant de la maturité) qui donnerait le même prix $O(t)$ pour l'obligation :

$$O(t) = \sum_{i=1}^{n} 1_{t<t_i} e^{R_p(t_i-t)} C_i + e^{R_p(T-t)} N$$

Ce taux est appellé taux actuariel, il correspond au modèle simplifié de la courbe de taux plate. *On utilise des algorithmes numeriques pour le determiner.*

Le taux zero coupon est le taux actuariel d'un obligation ne versant pas de coupons....

Taux de rendement au pair (par yield) Si l'on connait le prix des zero coupons, on peut calculer le taux de coupon c qui rendraient une obligation "au pair", c'est à dire de prix égale à son nominel N (principal).

La valeur de chaque coupon est donnée par :

$$C_{t_i} = (t_i - t_{i-1}) Nc$$

on suppose que les coupon sont versés à fréquence fixe $\Delta t = (t_i - t_{i-1})\,\forall i$. Le prix de l'obligation versant de tels coupons est alors :

$$O(t) = \sum_{i=1}^{n} B(t, t_i)\, Nc\Delta t + B(t, T)\, N$$

Pour que l'obligation soit au pair on a alors :

$$N = \sum_{i=1}^{n} B(t, t_i)\, Nc\Delta t + B(t, T)\, N$$

$$c = \frac{1 - B(t, T)}{\sum_{i=1}^{n} B(t, t_i)} \frac{1}{\Delta t}$$

Comme le temps est en années $m = \frac{1}{\Delta t}$ est le nombre de coupons par an. *Typiquement $m = 1$ pour des coupons annuels, $m = 4$ pour des coupons trimestriels..* et $\sum_{i=1}^{n} B(t, t_i)$ est le prix d'un produit versant des coupons 1€ à cette fréquence m/an (on appelle cette quantité le level). On a :

$$c_m(T) = \frac{1 - B(t, T)}{\sum_{i=1}^{n} B(t, t_i)} m$$

Ce taux de rendement au pair dépend donc de la courbe ZC, de la maturité et de la fréquence des coupons. Cette courbe est disponible en général sur les marchés pour des frequences semestrielles.

5.6 Determination des taux zero coupon : Bootstrap

La courbe zero coupon peut être tirée des obligation "strip" ne versant pas de coupons. Mais celle ci sont rares (et courtes en general).

Neanmoins on peut calculer une courbe de zero coupons implicites à partir d'obligations versant des coupons :

Supposons que l'on aie les obligations sans risque suivantes (exemple issu du Hull) :

Nominal	Maturité restante	Coupon semestriel	Prix
100	0.25	0	$O_{0.25}$ =97.5
100	0.5	0	$O_{0.5}$ =94.9
100	1	0	O_1 =90
100	1.5	8	$O_{1.5}$ =96
100	2	12	O_2 =101.6

Les trois premier sont des zero coupons :

$$\begin{aligned} B(0.25) &= \frac{O_{0.25}}{100} \\ B(0.5) &= \frac{O_{0.5}}{100} \\ B(1) &= \frac{O_1}{100} \end{aligned}$$

Pour le quatrieme, on obtient 4€ dans 6 mois, 4€ dans 1an et 104€ dans 1 an et demi

On peut calculer le taux zero coupon 1.5 an à partir de l'obligation 1.5 an. Supposons que ce zero coupon existe. On peut construire un portefeuille de zero coupons replicant exactement $O_{1.5}$. Par absence d'opportunité d'arbitrage, l'obligation $O_{1.5}$ devrait avoir la même valeur que ce portefeuille :

$$O_{1.5} = CB\left(0.5\right) + CB\left(1\right) + \left(N + C\right) B\left(1.5\right)$$

soit $B\left(1.5\right)$ le prix de ce zero coupon. D'où on obtient le prix du zero coupon de maturité 1.5ans :

$$B\left(1.5\right) = \frac{O_{1.5} - CB\left(0.5\right) - CB\left(1\right)}{N + C}$$

On a alors le prix du zero coupon si jamais celui ci existait. On peut faire de même avec l'obligation suivante, avec la formule :

$$B\left(T_n\right) = \frac{O_{T_n} - C_n \sum_{i=1}^{n-1} B\left(T_i\right)}{N + C_n}$$

En suite on prend :

$$R\left(T_n\right) = -\frac{\ln\left(B\left(T_n\right)\right)}{T_n}$$

Cette methode de decomposition des obligations s'appelle le bootstrap *(comme on met les lacets un a un dans les trous d'une botte...)*

On obtient finalement :

Maturite	Taux ZC
0.25	10.127%
0.5	10.469%
1	10.536%
1.5	10.681%
2	10.808%

Pour les maturité intermédiaires, on interpole linéairement entre deux dates. Pour les maturités antérieures à la première et postérieures à la deuxieme on va prendre une courbe de taux plate (voir dessin).

En pratique on n'a exactement les quantités qui tombent juste, on est obligé d'interpoler un peu ou de tatonner un peu pour trouver une courbe qui reproduit bien les prix des obligations...

5.7 Taux forwards

5.7.1 Forward rate agreement

Un FRA est un contrat OTC permettant d'assurer qu'un taux d'intérêt fixé R_K sera appliqué entre deux deux dates pour l'emprunt/le placement d'un certain montant (notionel).

Definition A une date t, le taux forward entre T_1 et T_2 est le taux d'interêt qu'il est possible de convenir à l'avance en t, a cout nul en t, pour en emprunt à la date T_1 remboursé en T_2. C'est le taux d'interêt qui rend la valeur du FRA nulle en t.

Replication d'un FRA On suppose que l'on peut placer et emprunter sans spread de crédit, ni frais, ni risque de défaut... On procède de la manière suivante, pour un notionel N à rembourser en T_2 (cf Schema) :

- On emprunte, en t, $N \times B(t,T_2)$à maturité T_2. Il faudra donc rembourser N en T_2
- On place, en t, $N \times B(t,T_2)$à maturité T_1. Cela nous permet d'acheter en t, $N\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$ ZC de maturité T_1
- En T_1 on récupère $N\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$. On aura donc ce argent disponible en T_1 et on devra rembourser N en T_2.

On appelle $B^{T_1}(t,T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$ la valeur T_1 forward du zero coupon de matrutié T_2. C'est comme si l'on avait fixé en t le prix d'acat du ZC de maturité T_2au prix $B^{T_1}(t,T_2)$.

Proposition *Placons nous à une date t. Le taux forward entre deux date futures T_1 et T_2, est le taux d'interêt que l'on peut impliciter entre ces deux dates à partir de la courbe des zeros coupons aujourd'hui, en faisant l'hypothèse que les taux soient deterministes (et donc les prix des zero coupons sont deterministes aussi, on connait tous les prix à l'avance).*

Taux prevus dans un modèle deterministe *Soient deux zeros coupons $B(t,T_1)$ et $B(t,T_2)$, avec $T_1 < T_2$. A la date T_1, si les prix sont deterministes, un investissement de 1€ en t dans le ZC de maturité T_1 vaut en T_1 :*

$$\frac{1}{B(t,T_1)}$$

C'est à dire le nombre de ZC de maturité T_1 que l'on a pu acheter en t.

Donc par absence d'opportinité d'arbitrage, comme les taux sont supposés deterministes, l'investissement 1€ à la date t dans le zero coupon de maturité T_2 doit avoir la même valeur $\frac{1}{B(t,T_1)}$ en T_1. Donc le ZC de maturité T_2 coutant $B(t,T_2)$€ à la date t , sa valeur en T_1 doit être de :

$$B(T_1,T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$$

En pratique la courbe n'est pas deterministe donc on ne connait pas la valeur de$B(T_1,T_2)$ mais cela définit néanmoins la valeur T_1-forward du zero coupon de maturité T_2 :

$$B^{T_1}(t,T_2) = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$$

Les taux forwards peuvent enfin etre interprétés comme une prévision d'un taux d'intérêt futur par le marché.

5.7.2 Formule du taux forward

On peut alors trouver le taux forward entre T_1 et T_2 a partir de :

$$e^{-R^f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)} = \frac{e^{-R(t,T_2)(T_2-t)}}{e^{-R(t,T_1)(T_1-t)}}$$

D'où :

$$-R^f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1) = R(t,T_1)(T_1-t) - R(t,T_2)(T_2-t)$$

En notant$\tilde{T}_1 = T_1 - t$ et $\tilde{T}_2 = T_2 - t$ les temps jusqu'à maturité et $R_1 = R(t,T_1)$ et $R_2 = R(t,T_1)$. On a :

$$R^f(t,T_1,T_2) = \frac{R_2\tilde{T}_2 - R_1\tilde{T}_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}$$

Soit :

$$R^f(t,T_1,T_2) = R_2 + \tilde{T}_1\frac{R_2 - R_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1}$$

On reconnait le terme $\frac{R_2-R_1}{\tilde{T}_2-\tilde{T}_1}$ de pente de la courbe de taux. Si la courbe de taux est croissante le taux forward est supérieur au taux ZC, si elle est décroissante, le taux forward est inféreur au taux ZC. Si $T_2 \to T_1 = T$ On a par passage à la limite le taux forward instantané entre T et $T + dt$:

$$R^{f,inst}(t,T) = R(t,T) + (T-t)\frac{\partial R}{\partial T}(t,T)$$

D'où on obtient, comme $B(t,T) = e^{-(T-t)R(t,T)}$:

$$R^{f,inst}(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(t,T))$$

D'où enfin l'espresiion du prix du zero coupon comme un intégrale de taux forwards instantanés :

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T R^{f,inst}(t,x)dx}$$

On peut donc tout repricer à partir des taux forwards instantanés.

5.7.3 Valeur du FRA

On l'on dispose d'un FRA assurant l'emprunt à un taux R_K entre T_1 et T_2 pour un notionel N remboursé en T_2. Cela permettra de toucher en T_1 :

$$NB^K(T_1,T_2) = N\exp(-R_K(T_2-T_1))$$

Donc :
- en T_1 : on touche $NB^K(T_1,T_2)$
- en T_2 : on rembourse N

On peut voir la valeur du FRA comme celle d'une obligation versant un flux positif en T_1 et négatif en T_2 . Par AOA, la valeur en t de ce FRA est donc, comme il est connu en t, donné par les prix des ZC :

$$\begin{aligned} N\left(B\left(t,T_1\right)B^K\left(T_1,T_2\right)-B\left(t,T_2\right)\right) &= NB\left(t,T_1\right)\left(e^{-R_K(T_2-T_1)}-e^{-R^f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}\right) \\ &\approx NB\left(t,T_1\right)\left(R^f\left(t,T_1,T_2\right)-R_K\right)\left(T_2-T_1\right) \end{aligned}$$

Et comme la partie 2. du montage avait une valeur nulle si le taux du FRA est le taux forward. On constate que la valeur de ce FRA est positive pour l'emprunteur si les taux montent (normal, on a bloqué des taux d'intérêt plus bas) et négative si les taux baissent (on a bloqué des taux d'intérêts hauts). On voit aussi que la valeur est proportionnelle à la durée de l'emprunt et bien sur au nominal. Notons enfin que d'habitude on prend plutot en compte le montant emprunté au début (qui s'écrit $\tilde{N}=NB^K\left(T_1,T_2\right)$). Il suffit de remplacer N par $\frac{\tilde{N}}{B^K(T_1,T_2)}$ partout.

5.7.4 Utilisation des FRA

Il est possible d'utiliser des FRA pour :
- Bloquer des taux d'emprunts/placement futurs
- Jouer sur la non réalisation des taux forwards et gagner à la baisse des taux si FRA placeur, ou a la hausse si FRA emprunteur.

Evidemment cela peut être dangeureux, cf l'histoire du conté d'Orange et de monsieur Citron....

5.8 Duration

5.8.1 Definition

La duration (Macaulay duration) d'un instrument financier à taux fixe, comme une obligation, est la durée de vie moyenne de ses flux financiers P_i pondérée par leur valeur actualisée :

$$\begin{aligned} D &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i P_i e^{-Rt_i}}{O} \\ &= \sum_{i=1}^n t_i\left[\frac{P_i e^{-Rt_i}}{O}\right] \end{aligned}$$

Avec $O=\sum_{i=1}^n P_i e^{-Rt_i}$ le prix de l'obligation et y est le taux actuariel de l'obligation. Un zero coupon de maturité restante T a une duration T.

5.8.2 Sensibilité au taux d'intérêt

En calculant la sensibilité de O au taux d'intérêt y on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial O}{\partial R} &= -\sum_{i=1}^{n} t_i P_i e^{-Rt_i} \\ &= -OD\end{aligned}$$

On a donc, pour un mouvement de taux d'intérêt :

$$\frac{(\Delta O)}{O} = -D\,(\Delta R)$$

La duration est donc la sensibilité relative du prix de l'obligation au taux d'intérêt actuariel.

5.8.3 Duration modifiée

Si l'on est en composition periodique (par ex : mensuelle, annuelle...) et non plus continue la formule du prix devient, pour des taux composés m fois par an :

$$O = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{-t_i m}$$

D'où la sensibilité au taux d'intérêt actuariel composé de cette facon :

$$\begin{aligned}\frac{\partial O}{\partial R_m} &= -\sum_{i=1}^{n} P_i \left[t_i \frac{m}{m} \left(\frac{\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{-t_i m}}{1+\frac{R_m}{m}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{1+\frac{R_m}{m}} \sum_{i=1}^{n} P_i t_i \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{-t_i m} \\ &= -\frac{OD}{1+\frac{R_m}{m}}\end{aligned}$$

Où D est la duration précédente (Macaulay).

Definition La duration modifiée est définie par :

$$D^* = \frac{D}{1+\frac{R_m}{m}}$$

C'est la sensibilité relative du prix de l'obligation à un mouvement de son taux actuariel avec une convention de composition m fois par an.

5.8.4 Duration d'un portefeuille

La duration d'un portefeuille d'obligations est la moyenne des durations les obligation du portefeuille, pondérées par leur prix et rapporté à la valeur totale du portefeuille. On voit que cette mesure est cohérente car :

$$\frac{\sum D_k O_k}{\sum O_k} = \frac{\sum_{i,k} t_{i,k} P_{i,k} e^{-R_k t_{i,k}}}{\sum O_k}$$

C'est la sensibilité du portefeuille à des variations du taux actuariel, en supposant que ces taux soient tous égaux.

5.9 Convexité

Le prix des obligation n'étant pas linéaire par rapport au taux, on peut dévelloper la formule du devellopement limité du prix à l'ordre 2 en introduisant la convexité :

$$C = \frac{1}{O}\frac{\partial^2 O}{\partial R^2} = \frac{\sum c_i t_i^2 e^{-R t_i}}{O}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Delta O &= \frac{\partial O}{\partial R}\Delta R + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial R^2}(\Delta R)^2 \\ &= O\left(-D\Delta R + \frac{1}{2}C(\Delta R)^2\right) \end{aligned}$$

Pour une duration donnée, la convexité est maximale quand les paiements sont equirépartis dans le temps. Ce raffinement permet d'obtenir des portefeuilles mieux couverts en taux (pour des mouvements paralleles de la courbe).

Deuxième partie
Pricing de dérivés simples

6 Dynamique des portefeuilles

6.1 Notations

On supposera dans toute la suite, sauf mention contraire :
- Absence de couts de transaction
- Que l'on peut emprunter et placer au même taux "sans risque" interbancaire à toutes les maturités
- Qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage dans le marché

On suppose qu'il y a dans le marché :
- n actifs risqués (actions, obligations,...) de prix S_t^i

- Chacun des ces actifs versant potentiellement des flux dQ_t^i (par exemple de la forme $q_t^i dt$) entre t et $t+dt$ (exemple : dividendes, coupons...). Q_t^i est la somme des flux versés par unités d'actifs jusqu'à la date t.
- Du cash (placé ou emprunté au taux court "sans risque" interbancaire, noté r_t)

On peut noter la composition du portefeuille de différentes manières :
- En nombre d'actifs (ce que l'on fait pour la couverture des dérivés) : on note $\delta^1, ..., \delta^n$
- En montant (ce que l'on fait pour le cash...)
- En proportion de richesse (en gestion d'actifs et problèmes d'investissement) $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n$

La valeur d'un portefeuille (valeur liquidative) est la somme des valeurs de tous les éléments du portefeuille. Par définition, la valeur du portfeuille est telle que :

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i S_t^i + C_t$$

La quantité de cash présente dans le portefeuille est donc :

$$C_t = V_t - \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i S_t^i$$

On est préteur si $C_t > 0$ emprunteur sinon.

6.2 Dynamique d'un portefeuille "long only"

Comme il n'y a pas de couts de transaction, effectuer une transaction ne change pas la valuer du portefeuille : Quand on achète une unité d'actif 1, on paye S_t^1 en cash et on recoit un actif qui vaut exactement ce prix. $V_t = \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i S_t^i + C_t$ reste donc inchangé dan ce cas.

Dessinner un tableau du portefeuille...

Les changements de valeur du portefeuille peuvet être dus :
- Aux variations des prix des actifs, passe de S_t^i à S_{t+dt}^i
- Aux flux de cash émanant des actifs dQ_t^i
- Aux intérêts sur le cash $r_t C_t dt$

On a donc entre t et $t+dt$:

$$\begin{aligned} dV_t &= \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(dS_t^i + dQ_t^i \right) + C_t r dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(dS_t^i + dQ_t^i \right) + \left(V_t - \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i S_t^i \right) r dt \end{aligned}$$

Si de plus on prête les titres pour emprunter à taux taux diferrent r_t^i et placer ensuite à r_t on a :

$$\begin{aligned} dV_t &= \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(dS_t^i + dQ_t^i + \left(r_t - r_t^i\right) S_t^i\right) + \left(V_t - \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i S_t^i\right) rdt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(dS_t^i + dQ_t^i - r_t^i S_t^i\right) + V_t rdt \end{aligned}$$

6.3 Short selling d'actifs

On suppose que dans notre portefeuille,

- on place un montant cash C_1 pour emprunter des titres via une operation de repo sur δ titres :
  - On achète δ titres en t. Cela coute δS_t
  - On a accepté en t de vendre les titres à un prix $\delta S_t\left(1 + r_{repo}dt\right)$ en $t+dt$
  - Tout dividendes etc... entre t et $t+dt$, notés dQ_t reviennent à celui qui a prété les titres
  - Le reste $C_1 - \delta S_t$ st placé au taux r.
  - Cette opération en temps normal fait passer la richesse investie de C_1 à

$$\left(C_1 - \delta S_t\right)(1 + rdt) + \delta S_t\left(1 + r_{repo}dt\right) = C_1 rdt + \left(r_{repo} - r\right)\delta S_t dt$$

- On réedite l'opération sauf que en plus :
  - On vend les titres empruntés en t, pour un prix total δS_t
  - On place C_1au taux sans risque entre t et $t+dt$. Cela rapporte $C_1 rdt$
  - On doit toujours payer les dividendes des titres que l'on ne possède plus...
  - On rachète les titres au prix total δS_{t+dt} en $t+dt$ pour les rendre à son propriétaire

Au total les flux de l'opération sont :

$$\begin{aligned} C_1 rdt + C_1\left(1 + r_{repo}dt - \frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) - \delta dQ_t &= C_1 rdt + \delta\left(S_t - S_{t+dt} + S_t r_{repo}dt - dQ_t\right) \\ &= C_1 rdt + \delta\left(-dS_t + S_t r_{repo}dt - dQ_t\right) \end{aligned}$$

C'est exactement comme si on avait acheté une quantité négative dactions dans le portefeuille.... Cela permet ainsi de shorter les actifs !

6.4 Conclusion

Dans la suite on supposera les taux courts tous égaux. La valeur V_t de tout portefeuille autofinancé évoluera donc selon :

$$dV_t = \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(dS_t^i + dQ_t^i\right) + \left(V_t - \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i S_t^i\right) rdt$$

avec δ de signe quelconque

7 Pricing de contrats forwards

Ici on va chercher à connaitre, pour différents actifs, le prix forward F_t^T de maturité T annulant le prix du contrat forward en t . On notera :
- S_t le prix spot de l'actif en t
- t la date courante où est pricée le forward
- $r_B(t,T)$ la valeur en t du zero coupon de maturité T, parfois noté simplement r

7.1 Actif financier ne versant pas de flux (et shortable)

7.1.1 Valorisation des flux

C'est le cas le plus simple. Le contrat forward fournit en T un flux :

$$S_T - F$$

On sépare ce contrat en deux flux :
- Un flux fournissant S_T (inconnu en t)
- Un flux négatif $-F$, connu en t

Comme on l'a vu précedemment, le flux connu en t, $-F$ a pour valeur $-B(t,T)\,F$.

Le flux S_T a quand à lui pour valeuur S_t. En effet il peut être synthétisé par un portefeuille valant S_t au départ, et achetant une unité d'actif. On a alors :

$$dV_u = dS_u + dQ_u + (V_u - S_u)\,rdu$$

Or comme $dQ_t = 0$ on a alors :

$$dV_u = dS_u + (V_u - S_u)\,rdu$$

et on voit que S_u est solution de cette équation. Donc ce portefeuille vaut S_T en T.

On a donc, en sommant les deux pattes, un contrat forward valant :

$$S_t - B(t,T)\,F$$

Et donc le prix forward annullant le prix de ce contrat est :

$$F_t = \frac{S_t}{B(t,T)} = S_t e^{-r(t,T)(T-t)}$$

7.1.2 Arbitrage si le prix forward est différent

Si le prix forward est différent pour un contrat de valeur nulle, on peut réaliser un arbitrage suivant si le prix foward est trop élevé (ou l'arbitrage inverse...) :
- On achète S_t en t
- On emprunte S_t en t à maturité T. On devra alors rembourser $\frac{S_t}{B(t,T)}$ en T.
- On vend le contrat forward, ce qui nous permet de vendre l'actif S plus chher que $\frac{S_t}{B(t,T)}$ en T.

7.1.3 Valeur du contrat forward passé

On note que le contrat forward valant :

$$S_t - B(t,T)\,F$$

Si l'on note F_t le prix forward annulant la valeur de ce contrat, on a, pour un contrat déjà passé (en 0 par exemple) avec un strike F, la valeur de ce contrat en t :

$$B(t,T)\,(F_t - F)$$

7.2 Prix forward d'un actif versant des dividendes ou des coupons deterministes

On suppose ici que les dividendes ou coupons sont deterministes ; Cela nous donnera une idée de comment on peut pricer des contrats forwards sur action, obligation, ou meme sur indice.

7.2.1 Deterministes dans l'absolu

On reprend la démarche d'arbitrage précédente. On sépare toujours le contrat forward en deux.

- Le flux négatif $-F$ *correspondant au paiement de l'actif dans le contrat*, connu en t vaut toujours $-B(t,T)\,F$
- En revanche le flux S_T ne vaut plus S_t à cause des dividendes ou des coupons

En effet, acheter l'actif en t rapporte en T :

- La détention de l'actif en T, valant S_T en T
- Les coupons ou dividendes percus entre temps

Les dividendes ou coupons sont connus en t on peut donc les valoriser par arbitrage comme une obligation, grace au prix des zero coupons :

$$\int_t^T B(t,u)\,dQ_u$$

Proposition : Dans ce cadre de dividendes absolus deterministes, la valeur du flux S_T en T est de $S_t - \int_t^T B(t,u)\,dQ_u$ en t.

Donc pour avoir exactement S_T en T on peut en t :

- Acheter un actif risqué au prix S_t
- Emprunter le montant de chaque coupon dQ_u à la maturité u. Cela permet d'emprunter au total $\int_t^T B(t,u)\,dQ_u$. Cet emprunt sera remboursé par les dividendes de l'actif risqué. *La somme empruntée représente donc la valeur en t des dividendes futurs.*

Le prix en t de cette stratégie valant S_T en T est donc :

$$S_t - \int_t^T B(t,u)\,dQ_u$$

Le prix du contrat forward est donc ce prix moins le prix de $-F$ en T :

$$S_T - \int_t^T B(t,u)\, dQ_u - B(t,T)\, F$$

Le prix forward en t annule la valeur de ce contrat :

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{S_T}{B(t,T)} - \int_t^T \frac{B(t,u)}{B(t,T)} dQ_u \\ &= \frac{S_T}{B(t,T)} - \int_t^T \frac{dQ_u}{B(t,u,T)} \end{aligned}$$

7.2.2 Deterministe en proportion de l'actif risqué

On reprend la démarche d'arbitrage précédente. On a le même problème : A cause des dividendes avoir S_T en T vaut moins que S_t qui permet aussi d'avoir les dividendes.

Cette fois ci on pose :

$$dQ_t = S_t dA_t$$

Et l'on a A_t deterministe.

Proposition 1. *Dans le cadre de dividendes proportionnels deterministes, la valeur du flux S_T en T est $S_t \exp\left(-\int_t^T dA_u\right)$*

Démonstration. Il faut encore trouver une stratégie valant exactement S_T en T. Pour cela on fait la stratégie suivante, 100% investie dans l'actif risqué (coupons compris) :

$$\delta_t = \frac{V_t}{S_t}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{V_t}{S_t}(dS_t + dQ_t) \\ \frac{dV_t}{V_t} &= \frac{dS_t}{S_t} + dA_t \end{aligned}$$

Ce qui peut etre écrit comme :

$$d \ln V_t = d \ln S_t + dA_t + \frac{1}{2}\left(\left\langle \frac{dS_t}{S_t} \right\rangle - \left\langle \frac{dV_t}{V_t} \right\rangle\right)$$

Ce qui, en oubliant les termes d'Ito donne la solution, entre 0 et t :

$$\frac{V_t}{V_0} = \frac{S_t}{S_0} e^{\int_0^t dA_u}$$

En effet quand on différencie par rapport à t :

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 \frac{S_t}{S_0} e^{\int_0^t dA_u} \\ dV_t &= V_0 \frac{S_t}{S_0} e^{\int_0^t dA_u} dA_t + V_0 \frac{1}{S_0} e^{\int_0^t dA_u} dS_t \\ &= V_t dA_t + \frac{V_t}{S_t} dS_t \end{aligned}$$

On a donc de même entre t et T la valeur V_T de la stratégie :

$$V_T = V_t \frac{S_T}{S_t} e^{\int_t^T dA_u}$$

Ainsi, comme on veut une stratégie valant S_T en T, il suffit d'executer la stratégie avec une richesse de départ :

$$V_t = S_t e^{-\int_t^T dA_u}$$

Ce qui est rendu possible car A est une processus entièrement connu en t. $\square$

La valeur du contrat foward à la date t est donc :

$$S_t e^{-\int_t^T dA_u} - FB(t,T)$$

et le prix forward est donné par :

$$F_t = \frac{S_t e^{-\int_t^T dA_u}}{B(t,T)} = S_t e^{\int_t^T \left(r^{f,inst}(t,u) du - dA_u \right)}$$

Ou si l'actif dégage un taux de dividendes constant :

$$dA_u = q du$$

$$F_t = S_t e^{(T-t)(R(t,T)-q)}$$

En pratique les dividendes sont inconnus, et ils sont d'ailleurs plutott estimés implicietement à partir des prix forward et des prix futures...

7.3 Forwards de change

Pour un forward de change, il convient de modéliser le bon actif. Sopposons que l'on cherche en t à acheter forward (de maturité T) une unité de la monnaie étrangère (le yen par exemple, noté f comme foreign) contre notre propre monnaie domestique, notée d comme domestic (l'euro).

Le bon sous jacent à considérer n'est surtout pas le cash de la monnaie étrangère!!!!!

Le bon sous jacent à considérer est le ZC de maturité étrangère, dont le prix en monnaie étrangère est noté $B^f(t,T)$, en effet ce ZC vaut exactement une unité de monnaie étrangère (1yen) en T, contrairement au cash donc on ne connait pas la valeur en T (dépend de l'évolution du taux court).

Donc la stratégie de réplication d'un achat de contrat forward est toujours la même :

– Achète un zero coupon de monnaie étrangère de maturité T
– Pour le financer on emprunte à maturité T (i.e. on vend des ZC de monnaie domestique à decouvert).

On note X_t le prix d'une unité de monnaie étrangère en monnaie domestique en t (i.e. combien d'euros peut on avoir pour un yen). Quand X_t est élevé la monnaie étrangère est chère. Le prix du zero coupon de monnaie étrangère est donc, en t :

$$X_t B^f (t, T)$$

Ceci est le prix en t d'une unité de monnaie étrangère en T.

Le prix du contrat forward de strike F est donc :

$$X_t B^f (t, T) - F B^d (t, T)$$

D'où le prix foward annulant sa valeur :

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{B^f (t, T)}{B^d (t, T)} X_t \\ &= X_t \exp \left(\left(r_d (t, T) - r_f (t, T) \right) (T - t) \right) \end{aligned}$$

On voit que si $r_d > r_f$, les prix forward indiquent que X_t devrait augmenter (et donc que la monnaie étrangère va s'apprécier pour compenser les taux plus faibles). Inversement, si les taux d'intérêt étrangers sont plus élevés, les taux de change forward indiquent que la monnaie étrangère risque de se déprécier.

7.4 Forward sur matières premières

7.4.1 Couts de stockage

Les matières premières physiques doivent être stockées, cela a un coût, parfois élevé. Ce coût peut être vu comme des dividendes négatifs et notés $dQ_t = -cdt$.

On peut agir comme pour des dividendes absolus connus pour voir que le coût de cette stratégie afin d'avoir une unité de matière première en T est :

$$V_t = S_t + \int_t^T cB (t, u) \, du = S_t + C_{t,T}$$

Où C désigne l'ensemble des coûts de stockage entre t et T.

7.4.2 Bornes d'arbitrage

Borne haute Si le prix forward F_t de maturité T d'une matrière première est au dessus de $\frac{S_t + C_{t,T}}{B(t,T)}$ on peut :

– En t, démarrer la stratégie avec une richesse initiale nulle :
  – Emprunter $S_t + C_{t,T}$ à maturité T (on devra rembourser $\frac{S_t + C_{t,T}}{B(t,T)}$)
  – Acheter la matière première avec S_t et placer le reste $C_{t,T}$ afin de payer les couts de stockage jusqu'en T
  – Vendre un contrat forward

- En T avoir une richesse initiale positive :
  - Vendre notre matière première via le contrat forward pour un prix supérieur à $\frac{S_t+C_{t,T}}{B(t,T)}$
  - Rembourser notre emprunt en payant $\frac{S_t+C_{t,T}}{B(t,T)}$

On réalise un arbitrage. Le prix forward est donc inférieur à $\frac{S_t+C_{t,T}}{B(t,T)}$

Borne basse Si le prix forward est plus bas que $\frac{S_t+C_{t,T}}{B(t,T)}$, l'arbitrage serait de :

- Acheter le contrat forward
- Vendre la matière première.

Or, la matière première n'est en général pas shortable (difficile de l'emprunter, de la vendre et de la rendre après). *Cependant, lorsque les contrats ne sont pas shortable, des investisseurs possédant déjà l'actif peuvent le vendre pour opérer l'arbitrage. Cela est très suceptible d'arriver sur des matières premières d'investissement (par exemple l'or).* Cependant, si la matière première est consommable ou transformable il n'est pas sur qu'il soit profitable d'opérer l'arbitrage car :

- Si le prix du forward est bas par rapport au spot c'est sans doute que le spot est élevé
- Si le spot est élevé c'est qu'il y a forte demande (ou faible offre) pour la matière première *maintenant (mauvaise recolte de blé cette année par exemple)*
- Personne n'est donc suceptible de prêter la matière maintenant (durant le pénurie) pour la retrouver plus tard (quand elle sera abondante et moins chère).

Ainsi il n'y a souvent pas d'arbitrage possible et donc pas de borne basse sur le prix du forward.

Proposition. *Le prix forward de maturité T d'une matière première de prix spot S_t et de couts de stockage valant $C_{t,T}$ entre t et T est compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{S_t+C_{t,T}}{B(t,T)}\right]$ à la date t.*

7.4.3 Convenience yield

Comme on a le prix futur :$F_t \leq \frac{S_t+C_{t,T}}{B(t,T)}$. On peut donc toujours écrire :

$$F_t = \exp\left(-y\left(t,T\right)\left(T-t\right)\right)\frac{S_t+C_{t,T}}{B\left(t,T\right)}$$

avec $y\left(t,T\right) \geq 0$. Ce taux est appellé le convenience yield. Il est fort quand le prix spot est très elevé par rapport au prix forward. *Ce taux est élevé lorsque les industriels préfèrent nettement avoir la matière première maintenant que plus tard (situation de pénurie citée à la section précédente par exemple).*

7.5 Valeur forward d'une stratégie

7.5.1 Valeur du contrat forward passé

On note que dans tous les cas, comme le prix forward annulle la valeur du contrat forward, on a toujours la valeur du contrat forward à un autre prix (portant sur le même nombre d'actifs) :

$$B(t,T)(F_t - F)$$

Car la seule différence entre le vieux contrat et le contrat au pair est la différence $F_t - F$ entre les deux flux deterministes payés en T.

7.5.2 Valeur forward d'une stratégie autofinancée

Soit V_t la valeur en T d'une stratégie autofinancée (et shortable). Si l'on passe un contrate forward sur la valeur de cette stratégie à l'instant T, on peut, pour répliquer ce forward :

- Emprunter V_t à maturité T et rembourser $\frac{V_t}{B(t,T)}$ en T
- Investir V_t dans la stratégie entre t et T

Cette stratégie, de prix nul en 0, réplique un contrat forward de prix forward $V_t^T = \frac{V_t}{B(t,T)}$. C'est donc le prix forward de la stratégie.

7.5.3 Dynamique de la valeur forward d'une stratégie autofinancée

Proposition. *La dynamique de la valeur T-forward d'un portefeuille uniquement investi dans des contrats forwards de maturité T et des zero coupons de maturité T est donnée par :*

$$dV_t^T = \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i dF_t^i$$

Où δ_t^i est le nombre de chaque contrat forward acheté et F_t^i le prix forward au pair de chaque contrat.

Admettons que cette stratégie soit uniquement investie dans des contrats forwards de maturité T et que le reste soit investi dans N_t zero coupon de maturité T *(en particulier il n'y a pas de cash)*. Alors la valeur de chaque contrat forward est donnée par :

$$X_t^i = B(t,T)\left(F_t^i - F^i\right)$$

La valeur liquidative de la stratégie est donnée par :

$$\begin{aligned} V_t &= \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i X_t^i + N_t B(t,T) \\ &= B(t,T)\left(\sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(F_t^i - F^i\right) + N_t\right) \end{aligned}$$

Et la valeur forward de la stratégie est donc :

$$V_t^T = \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i \left(F_t^i - F^i\right) + N_t$$

Cette égalité est dans le numéraire (i.e. “la monnaie”) zero coupon. Si il n’y a pas de transaction entre t et $t + dt$ on bien que l’on a la variation de richesse forward :

$$dV_t^T = \sum_{i=1}^{n} \delta_t^i dF_t^i$$

Ainsi, comme la variation de richesse est exclusivement due à la variation de prix des actifs *(y compris dans le numéraire zero coupon)* on a bien l’égalité ci dessus lorsque l’on fait des transactions *(sans cout de transaction).*

De plus, comme on peut synthétiser les forwards a partir des actifs et des zeros coupons, on peut synthétiser les actifs a partir des forwards et des zero-coupons, ce qui donne tout son intérêt à cette proposition.

8 Swaps

8.1 Definition générale

Un swap est un contrat OTC entre deux contreparties, qui s’engagent à verser des flux de cash dans le futur. Le contrat définit :
- Les dates auquelles les flux doivent être payés
- La manière dont ces flux vont etre calculés (flux fixe, dependant du taux d’intérêt, du taux de change, de la performance d’un actif...)

C’est un type de contrat très utilisé par les banques car très flexible et mobilisant peu de capital. Les options et les contrats fowards peuvent être crées comme des swaps. Dans ce cas les flux de cash sont échangés à une seule date.

8.2 Swaps de taux

8.2.1 Definition

C’est le type de swap le plus courant. Dans ce swap, une des deux contreparties :
- Paye à une certaine fréquence (par exemple chaque mois), pendant un certaine durée, un taux d’intérêt fixe sur un nominal. Cela engendre des flux dont le montant est connu à la création du swap.
- Recoit en échange à la même fréquence (et au meme moment) un taux d’intérêt variable (par exemple le Libor 1 mois chaque mois) sur le même nominal. Ces flux dépendent de l’évolution de la courbe de taux d’intérêt (inconnue à la création du swap).

La premiere série de flux s’appelle la patte variable, la deuxième la patte fixe. Le taux fixe rendant le swap de valeur nulle à la date d ecréation est appellé taux swap (ou taux au pair).

La convention de taux utilisés pour les échanges de flux est en règle générale linéaire. Les flux variables sont payés à la maturité du taux d'intérêt considéré *(par exemple pour un flux variable Libor 1M, on paye fin fevrier le taux constaté fin janvier puis fin mars le taux constaté fin février etc...). Cela est pertinent et facilite les choses.* En effet ces flux représentent donc effectivement les gains apportés par un placement pendant la période du taux.

8.2.2 Utilité du swap

Les swaps permettent de passer un emprunt ou un placement d'un taux fixe à un taux variable. Si par exemple, une entreprise emprunte à taux variable (si elle emprunte chaque mois à maturité un mois par exemple), contrater un swap dans lequel elle recevra un taux variable et paiera un taux fixe permettra de passer de manière synthétique à un emprunt à taux fixe. *L'inverse est evidemment possible : On peut passer d'un emprunt à taux fixe vers une taux variable, ou transformer un obligation dans le portefeuille à taux fixe en in investissement à taux variable.* L'intérêt du swap est qu'il permet de changer le type de taux d'intérêt sans échange de capital (c'est à dire du notionel).

8.2.3 Determination du prix de chaque patte

On va commencer par faire le pricing d'un swap versant un taux fixe K et recevant Libor 1 mois (du mois précédent) chaque fin de mois sur un notionel N. On note $t_1, ..., t_n$ les date d'échange de flux et $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ la période entre chaque flux (ici un mois). On va pricer séparément chaque patte :

- La patte fixe verse $K\Delta t$ à chaque date t_i. Sa valeur est donc en t, comme pour une obligation versant des coupons fixes et pas de nominal à la fin :

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{t_i>t} B(t, t_i) NK\Delta t$$

  Cette quantité est souvent appellée le level.
- La patte variable verse le Libor 1mois chaque mois. La méthode utiliser pour pricer cette patte est plus originale :

Prix de la patte variable Pour chaque mois obtenir le taux Libor sur un nominal N, il suffit de placer N chaque mois à horizon un mois. A la fin de chaque mois on obtiendra donc N + le taux d'intérêt voulu. Donc supposons que l'on se place à une date $t = t_i$ de determination du taux flottant (c'est à dire à la création du swap ou juste après un paiement de flux variable). Pour obtenir les LIBOR suivants il suffit de :

- Avoir dans son portefeuille un montant N en t. Pour cela on :
  - on emprunte en t un montant $NB(t, T)$ à maturité T, impliquant un remboursement de N en T
  - On suppose que l'on possédait déjà une mise de départ $N(1 - B(t, T))$
- Placer N à chaque date t_i (i.e. chaque mois) pour obtenir les Libor à payer

– En T, il nous reste N, on rembourse notre emprunt de valeur N. Il ne nous reste plus rien en portefeuille.

Le prix des flux Libor payés est donc la valeur de la mise de départ $N(1 - B(t,T))$. Cela siterprète bien : la différence en tre la valeur de N euros en t et en T s'écrit comme cela, et correspond effectivement au paiement des intérêts entre t et T.

Le prix de la patte variable est donc juste au moment d'une date de paiement t_i :

$$N(1 - B(t,T))$$

Si jamais on est entre deux dates de paiement t_{i-1} et $t_i$alors la patte variable se décompose en :

– Paiement en t_i du taux $R(t_{i-1}, t_i)$ constaté en t_{i-1}. Cela fait un flux $NR(t_{i-1}, t_i)\Delta t$ en t_i valant $NB(t,t_i)R(t_{i-1},t_i)\Delta t$ en t.
– A partir de t_i on revient à la situation précédente, la patte variable vaudra $N(1 - B(t,T))$ soit le prix de N euros en t_i (valant $NB(t,t_i)$ en t) moins N Zero Coupons de maturité T valant $NB(t,T)$ en t. Les flux suivant t_i valent donc $N(B(t,t_i) - B(t,T))$ en t.

En additionnant ces deux parties on obtient donc :

$$NB(t,t_i)R(t_{i-1},t_i)\Delta t + N(B(t,t_i) - B(t,T))$$

8.2.4 Taux swap

Le taux swap est le taux rendant le swap de valeur nulle à l'emmission du swap. Pour cela il faut que la valeur de la patte fixe soit égale à celle de la patte variable. Il faut donc :

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{t_i>t} B(t,t_i)NK\Delta t = N(1 - B(t,T))$$

$$K = \frac{1 - B(t,T)}{\sum_{i=1}^{n} 1_{t_i>t} B(t,t_i)\Delta t}$$

8.2.5 Vue comme une somme de FRA

On peut aussi voir le swap de taux comme une somme de FRA. En effet, entre chaque date t_i et t_{i+1} on a un echange de taux fixe (le taux du FRA) contre un taux variable (ce que rapporte le notionel du FRA pendant la période $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Comme on l'avait vu, le FRA sur un nominal emprunté N en t_i et remboursé sur un taux K linéarisé en t_{i+1} (c.a.d. on rembourse $N(1 + K\Delta t)$ en t_{i+1}) a une valeur :

$$N\left(B(t,t_i) - \frac{B(t,t_{i+1})}{B^K(t_i,t_{i+1})}\right) = N(B(t,t_i) - B(t,t_{i+1})(1 + K\Delta t))$$

Et donc en sommant tous ces FRA on obtient en $t = t_0$:

$$\begin{aligned}\sum_i N\left(B\left(t,t_i\right) - B\left(t,t_{i+1}\right)\left(1+K\Delta t\right)\right) &= N\sum_{i=0}^{n}\left(B\left(t,t_i\right) - B\left(t,t_{i+1}\right)\right) - N\sum_{i=0}^{n} B\left(t,t_{i+1}\right)K\Delta t \\ &= N\left(B\left(t,t\right) - B\left(t,T\right)\right) - N\sum_{i=1}^{n} B\left(t,t_i\right)K\Delta t\end{aligned}$$

Soit la même formule que précedemment pour le swap receveur du variable et payeur du fixe.

8.3 Overnight Indexed Swaps

Ce sont des swap qui échangent le paiement du taux overnight tout les jours contre un paiement d'un intérêt fixe à maturité (3 mois par exemple).

Théoriquement, sans risque de crédit, le taux fixe devrait être égale au taux zero coupon LIBOR linéarisé à maturité. Or ce n'est pas le cas, car le risque sur l'EONIA (taux overnight) étant plus faible et le risque de crédit du swap OIS portant uniquement sur les intérêts, on a un taux swap OIS plus faible que le LIBOR. C'est maintenant ce taux swap OIS qui sert comme référence de taux "sans risque". En effet, il permet pour un pret de maturité T :

- De préter au jour le jour à taux EONIA donc quasi sans risque.
- Via le swap de revoir convertir les intérêts percus au jour le jour en une somme fixe à maturité T.

8.4 Swaps de change

Les swaps de change sont des swaps de flux d'argent dans différentes monnaies, basés sur des taux d'intérêt fixes ou variables, et avec échange ou non de nominal à la fin. Les flux des swaps peuvent être fixes ou variables selon un taux d'intérêt à la fin.

Pour pricer ceux ci il convient comme toujours de pricer séparément les deux pattes dans chacunes de leur monnaie respectives, puis de convertir une des deux monnaies dans l'autre via le taux de change.

Troisième partie
Pricing et couverture d'options vanille

9 Pricing d'options Europeenes uniques

On va ici chercher à donner le prix (ou au moins encadrer celui ci) d'options Européennes sur un sous jacent donné, versant un payoff donné en T, et à connaitre les stratégies de couverture associées.

On notera :

- S_t le prix en t du sous jacent
- T la maturité de l'option
- $g(S_T)$ le payoff de l'option versé en T
- C_t le prix (pas forcément unique) de l'option Européenne
- F_t^T le prix T-forward de S en t
- $dQ_t = q_t dt$ les dividendes eventuels versés par le sous jacent *(intégrant les revenus du repo etc...), que l'on supposera constants au debut*
- r_t le taux court sans risque *(que l'on supposera constant au debut)*
- $B(t,T)$ le prix du Zero Coupon d ematurité T

On supposera dans toute la suite qu'il existe un marché de contrats forwards, ou que l'on peut les repliquer de manière triviale.

9.1 Inégalités d'arbitrage indépendantes du modèle

9.1.1 Cadre général

Proposition 2. *Soit une option de payoff $g(S_T)$ telle que : $ax + b \leq g(x)\, \forall x$, alors le prix de l'option C_t est est tel que :*

$$B(t,T)\left(aF_t^T + b\right) \leq C_t$$

De même si $g(x) \leq cx + d$ on a :

$$C_t \leq B(t,T)\left(cF_t^T + d\right)$$

Lemme. *Le prix en t de $aS_T + b$ payé en T est $B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$*

Démonstration. Preuve du lemme : Si en t l'on achète a contrats fowards (a cout nul et et qui valent $a\left(S_T - F_t^T\right)$ en T) et que l'on achète en t $aF_t^T + b$ ZC de maturité t on a : □

Action	Prix en t	Prix en T
Acheter a contrats Fwd	0	$a\left(S_T - F_t^T\right)$
Placer $B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$ (i.e. acheter des ZC)	$B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$	$\left(aF_t^T + b\right)$
Total	$B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$	$aS_T + b$

Démonstration. Prenons la première inégalité. Supposons que $ax + b \leq g(x)$. Par AOA on a donc $B(t,T)\left(aF_t^T + b\right) < C_t$ car l'option vaut plus cher en T que le portefeuille versant

Pour avoir l'abuitrage complet, considérons la stratégie consistant à (faire un tableau) : □

- Vendre a contrants T-forwards en t pour un prix d'exercice F_t^T (a cout nul). En T cela donne le flux $-a\left(S_T - F_t^T\right)$
- Emprunter $B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$ en t et rembourser $aF_t^T + b$ en T
- Acheter l'option Europenne pour un prix C_t.

Action	Prix en t	Prix en T
Vendre a contrats Fwd	0	$-a\left(S_T - F_t^T\right)$
Emprunter $B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$ (i.e. vendre des ZC)	$-B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$	$-\left(aF_t^T + b\right)$
Acheter l'option	C_t	$g(S_T)$
Total	$C_t - B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$	$g(S_T) - aS_T - b$

Le prix du portefeuille en T est toujours positif donc par AOA le prix du portefeuille en t est lui aussi toujours poitif. Donc $C_t - B(t,T)\left(aF_t^T + b\right)$.

Corollaire. *Si les dividendes proportionnels $dQ_t = q_t S_t dt$ sont connus à l'avance alors le prix de $aS_T + b$ payé en T est :*

$$aS_t e^{-\int_t^T q_u du} + B(t,T)\, b$$

9.1.2 Application aux Calls et aux Puts

Puts Un put a un payoff :

$$g(S_T) = (K - S_T)_+$$

(Dessinner le profil) Les seules inégalités linéaires dont on dispose sont :

$$0 \leq g(S_T) \leq K$$

Et donc le prix du Put de maturité T est compris entre :

$$0 \leq P_t \leq B(t,T)\, K$$

Et enfin :

$$(K - S_T)_+ \geq K - S_T$$

Ce qui donne :

$$P_t \geq B(t,T)\left(K - F_t^T\right)$$

Soit dans un monde avec div deterministe :

$$P_t \geq B(t,T)\, K - S_t e^{-\int_t^T q_u du}$$

Proposition 3. *Le prix du Put est compris dans les bornes :*

$$\begin{aligned} B(t,T)\left(K - F_t^T\right)_+ &\leq P_t \leq B(t,T)\, K \\ \left(B(t,T)\, K - S_t e^{-\int_t^T q_u du}\right)_+ &\leq P_t \leq B(t,T)\, K \end{aligned}$$

Faire un dessin

Calls Le call a un payoff :

$$g\left(S_T\right)=\left(K-S_T\right)_+$$

On a evidemment :

$$g\left(S_T\right)\Rightarrow C_t\geq 0$$

Mais aussi, comme on a $g\left(S_T\right)\geq\left(S_T-K\right)$:

$$C_t\geq B\left(t,T\right)\left(F_t^T-K\right)$$

Et enfin, comme $g\left(S_T\right)\leq S_T$:

$$C_T\leq B\left(t,T\right)F_t^T$$

Doù les inégalités d'arbitrage :

Proposition 4. *Le prix du call est compris entre les bornes :*

$$\begin{aligned} B\left(t,T\right)\left(F_t^T-K\right)_+ &\leq C_t\leq B\left(t,T\right)F_t^T \\ S_te^{-\int_t^T q_u du}-B\left(t,T\right)K_+ &\leq C_t\leq S_te^{-\int_t^T q_u du} \end{aligned}$$

Notons que l'on trouve toujours des modèles atteignant (asymptotiquement) ces bornes.

Parité Call/Put On a, en soustrayant le payoff du put à celui du call :

$$\begin{aligned} g_C\left(S_T\right)-g_P\left(S_T\right) &= \left(S_T-K\right)_+-\left(K-S_T\right)_+ \\ &= \max\left(S_T-K,0\right)-\max\left(K-S_T,0\right) \\ &= \max\left(S_T-K,0\right)+\min\left(S_T-K,0\right) \\ &= S_T-K \end{aligned}$$

Donc le prix de Call-Put est de :

$$\begin{aligned} C_t-P_t &= B\left(t,T\right)\left(F_t^T-K\right) \\ &= S_te^{-\int_t^T q_u du}-B\left(t,T\right)K \text{ dans le cas de dividendes deterministes} \end{aligned}$$

Donc si l'on connait le prix du call, on connait le prix du put et vice versa.

9.2 Couverture dynamique et pricing sous Black-Scholes

9.2.1 Modèle

On suppose que l'actif risqué évolue selon :

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu_tdt+\sigma_tdW_t^{\mathbb{P}}$$

On supppose que l'on a vendu une option de prix C_t. Et que l'on dispose d'une quantité δ_t d'actif risqué (en nombre). Ainsi, la richesse, quand à elle évolue de la manière suivante :

$$dV_t=\delta_t\left(dS_t+q_tdt\right)-dC_t+\left(V_t-\delta_tS_t+C_t\right)r_tdt$$

9.2.2 Existence du prix

Pour que ce prix existe de manière unique, c'est à dire que l'option soit réplicable. Justification (dans le cas de taux et dividendes nuls, **et où W est la seule source d'aléa**) :

On se place sous la proba risque neutre, telle que :

$$dS_t = \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

et la richesse évolue selon :

$$dV_t = \delta_t dS_t = \delta_t \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

D'après le théorème d'Ito, comme le payoff est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ adaptée et que $W_t^{\mathbb{Q}}$ est la seule source d'aléa on a :

$$g(S_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(S_T)|\mathcal{F}_t) + \int_t^T Z_u dW_u^{\mathbb{Q}}$$

Donc, en prenant $\delta_u = \frac{Z_u}{\sigma S_u}$ et $V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(g(S_T)|\mathcal{F}_t)$ on a :

$$\begin{aligned} V_T &= V_t + \int_t^T \delta_u dS_u \\ &= V_t + \int_t^T Z_u dW_u^{\mathbb{Q}} \\ &= g(S_T) \end{aligned}$$

et donc la stratégie démarrant en t couvre parfaitement le payoff de l'option en T, son prix est donc unique et determiné par absence d'opportunité arbitrage.

9.2.3 Caractérisation du prix sous forme d'EDP

On part de la dynamique :

$$dV_t = \delta_t (dS_t + q_t dt) - dC_t + (V_t - \delta_t S_t + C_t) r_t dt$$

En faisant l'hypothèse que le prix est de la forme :

$$C_t = C(t, S_t)$$

On applique la formule d'Ito pour connaitre dC_t

$$\begin{aligned} dC_t &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \langle dS_t \rangle \\ &= \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt \end{aligned}$$

On reinjecte dans la dynamique de la richesse, on obtient :

$$dV_t = \delta_t (dS_t + S_t q_t dt) - \frac{\partial C}{\partial t} dt - \frac{\partial C}{\partial S} dS_t - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt + (V_t - \delta_t S_t + C_t) r_t dt$$

Si le trader cherche à couvrir son option (pour sécuriser la marge prise à son client quand il lui a vendu l'option, par exemple), alors il va chercher à minimiser son risque. Pour cela il annule le terme en dS_t qui sont les variations de richesse dues à la variation (aleatoire) du sous jacent. Il choisit donc :

$$\delta_t = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Cela donne ainsi l'évolution de la richesse :

$$dV_t = \left[-\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} S_t q_t - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(V_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t + C_t\right) r_t\right] dt$$

On suppose mainteant le taux court la volatilité et les dividendes sont deterministes. Cette variation de richesse est en dt elle est donc parfaitement prévisible entre t et $t + dt$. Comme on a une richesse parfaitement connue en t et $t + dt$ elle doit evoluer au taux sans risque par absence d'opportunité darbitrage :

$$dV_t = r_t V_t dt = \left[-\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} S_t q_t - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(V_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t + C_t\right) r_t\right] dt$$

D'où l'EDP de Black Scholes :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} S_t q_t - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - \frac{\partial C}{\partial S} S_t r_t + C r_t &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} + S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - C r_t &= 0 \end{aligned}$$

Avec cette EDP, on a le prix, car on a aussi la condition terminale $C(T, S_T) = g(S_T)$.

9.2.4 Interprétations et grecques

Les inputs aui comptent ici sont.
- Le niveau du spot
- Les taux d'intérêts
- Les dividendes
- la volatilité
- La maturité restante

Les grecques sont :
- Le delta : $\frac{\partial C}{\partial S}$ sensibilité du prix par rapport au spot
- Le gamma : $\frac{\partial^2 C}{\partial S}$ convexité du profil
- Le thêta : $\frac{\partial C}{\partial t}$ opposé de la sensibilité au prix à la maturité restante
- Le vega : sensibilité du prix par rapport à la volatilité

Dans un portefeuille on a tendance à annuler le delta, (voire le vega pour ne plus être sensible au paramètre de volatilité, bien que cela ne soit pas très cohérent car nous sommes dans un modèle où la volatilité est fixe). Le thêta lui représente les provisions que l'on a prévu pour faire face au coût de la couverture :

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = -Cr + S(r - q) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

Faire le dessin de la couverture :
- La couverture annule le P&L du aux mouvements du spot
- Le gamma genètre des coûts dus à la convexité du payoff
- Le theta compense ces coûts

Calculs des coûts de convexité du payoff :

Ce terme est donné directement par la formule d'Ito, mais on peut chercher à le retrouver directement. Si l'on se place en (t, S_t), le prix est localement de la forme :

$$C(t+dt, S_{t+dt}) = C(t+dt, S_t) + (S_{t+dt} - S_t)\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}(S_{t+dt} - S_t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + O\left((S_{t+dt} - S_t)^3\right)$$

Si l'on suppose que l'on a couvert le prix de l'option en delta, on a donc un portefeuille de couverture ayant une valeur :

$$X_{t+dt} = C(t, S_t) + (S_{t+dt} - S_t)\frac{\partial C}{\partial S}$$

Donc le potefeuille au total donne :

$$X_{t+dt} - C(t+dt, S_{t+dt}) = C(t, S_t) - C(t+dt, S_t) - \frac{1}{2}(S_{t+dt} - S_t)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + O\left((S - S_t)^3\right)$$

Or S_{t+dt} est distribué selon une $\mathcal{N}\left(S_t, \sigma S_t \sqrt{dt}\right)$Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{t+dt} - C(t+dt, S_{t+dt})\right] &= -\frac{\partial C}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(S_{t+dt} - S_t)^2\right]\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + O\left((S - S_t)^3\right) \\
&= -\frac{\partial C}{\partial t}dt - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + O\left((S - S_t)^3\right)
\end{aligned}$$

On voit que le delta permet de couvrir les mouvements du spot, puis que le montant à provisionner est proportionnel à la convexité du payoff : Le theta compense le gamma et les coûts dus à la détention de la couverture.

9.2.5 Pricing via des forwards

On note maintenant :
- F_t^T et $C_t^T = \frac{C_t}{B(t,T)}$ les prix T-forward du sous jacent et de l'option. En T on a bien $F_t^T = S_T$ et $C_t^T = g(S_T)$.
- On note $V_t^T = \frac{V_t}{B(t,T)}$la richesse T-forward (avec $V_T^T = V_T$).
- Le prix $B^T(t,T)$ T-forward du ZC est toujours égal à $B^T(t,T) = 1$

D'après le cours précédent, la dynamique de la richesse T-forward, d'un portefeuille uniquement investi dans δ contrats T-forwards sur S, des Zero-coupon de maturité T , et short d'un call on a, d'après les chapitres précédents :

$$dV_t^T = \delta_t dF_t^T - dC_t^T$$

Tout se passe comme si l'on était dans un monde où les taux étaient nuls, ou l'actif avait une valeur F_t^T et ne distribuait pas de dividendes, et où l'option portait sur cet actif. En effet, en T :

$$C_T^T = C_T = g\left(S_T\right) = g\left(F_T^T\right)$$

Donc on peut refaire le même raisonnement que précedemment à taux et dividendes nuls, en remplacant la valeur du sous jacent et de l'option par leur valeur forward. On a l'equation de BS :

$$\frac{\partial C^T}{\partial t} + \frac{1}{2} F^2 \sigma_F^2 \frac{\partial^2 C^T}{\partial F^2} = 0$$

En prenant bien garde à considérer la volatilité σ_F du contrat forward.

9.3 Pricing sous forme d'espérance et changement de numeraire

9.3.1 Esperance sous la probabilité forward neutre

En considérant $\mathbb{Q}^T$ la probabilité sous laquelle les prix T-forwards sont des martingales :

$$\frac{dF_t^T}{F_t^T} = \sigma_F dW_t^T$$

La richesse vérifie donc :

$$dV_t^T = \delta_t dF_t^T = \delta_t \sigma_F F_t^T dW_t^T$$

C'est donc une martingale. En supposant que l'on peut couvrir parfaitement le call on a donc :

$$C^T\left(t, F_t^T\right) + \int_t^T \delta_u dF_u^T = g\left(F_T^T\right) = g\left(S_T\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} C_t^T &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left(g\left(F_T^T\right)|\mathcal{F}_t\right) \\ C\left(t, F_t^T\right) &= B\left(t,T\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left(g\left(S_T\right)|\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

9.3.2 Probabilité risque neutre

De la même facon on définit la probabilité risque neutre comme la probabilité sous laquelle les prix et le valeurs de portefeuilles, actualisés au taux sans risque (c'est à dire divisés par le cash composé $e^{\int_0^t r_u du}$) sont des martingales. Sous cette probabilité on a donc (si S ne verse pas de dividendes) :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

on aen notant $\tilde{V}_t = V_t \exp^{-\int_t^T r_u du}$, on obtient que $\tilde{V}$ est une martingale sous cette probabilité risque neutre :

$$d\tilde{V}_t = \delta_t S_t \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

On a donc la formule de pricing :

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\exp^{-\int_t^T r_u du} g\left(S_T\right) | \mathcal{F}_t \right)$$

9.3.3 Changement de numeraire et changement de probabilité

En utilisant le fait que :

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\exp^{-\int_t^T r_u du} g\left(S_T\right) | \mathcal{F}_t \right) = B\left(t, T\right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(g\left(S_T\right) | \mathcal{F}_t \right)$$

On obtient alors :

$$\exp^{-\int_t^T r_u du} d\mathbb{Q} = B\left(t, T\right) d\mathbb{Q}^T$$

Or on peut passer de la probabilité risque neutre à la probabilité forward neutre par la formule de changement de numéraire :

$$\left(\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \right)_t = \frac{\exp^{-\int_t^T r_u du}}{B\left(t, T\right)}$$

Notons que l'on a raisonné avec les numéraires zero coupon ($B\left(t, T\right)$) et cash ($\exp^{\int_t^T r_u du}$). On peut refaire ce raisonnement avec n'importe quel actif dont le prix reste positif, que l'on peut alors choisir comme "monnaie" c'est à dire comme numériaire.

Par exemple, on pourra parfois être amenés à choisir un actif risqué S comme numéraire. Dans ce numéraire S les taux d'intérêts seront égaux aux dividendes versés par l'actif risqué, et seront donc nuls si il n'y a pas de dividendes. Dans le cas où les taux sont nuls dans le nouveau numéraire, on introduit alors la probabilité $\mathbb{Q}^S$ sous laquelle les prix et les portefeuille exprimés dans la monnaie S sont des martingales.

9.3.4 Existence et unicité de la probabilité risque neutre

Les deux formules ci dessus (avec probabilité risque neutre et forward neutre) sont plus générales que le cadre avec volatilité deterministe du forward. En règle générale on a :

- Existence des probas risque neutre et forward neutre dès qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage.
- Unicité de ces probabilité si les marchés sont "complets", c'est à dire que tous les payoffs (i.e. les variables aléatoires $\mathcal{F}$ mesurables) sont réplicables

A partir du moment où il y a AOA on a l'ensemble des prix non arbitrables :

$$C_t \in \left\{ B\left(t, T\right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(g\left(S_T\right) \right) | \mathbb{Q}^T \text{ proba T-forward neutre} \right\}$$

En effet, en partant de la richesse C_t^T, on aura toujours la richesse terminale quelle que soit la stratégie en actif risqué adoptée :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(V_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left(C_t^T + \int_t^T \delta_u dW_u^T\right) = C_t^T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(g(S_T))$$

Donc vendre le call et pour un prix $C_t = B(t,T)\,C_t^T$ donnera toujours une richesse en T telle que :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(V_T - g(S_T)) = 0$$

Donc V_T ne peut être toujours supérieur à $g(S_T)$ (sinon l'espérance serait strictement positive)). Donc tout prix dans cet ensemble est non arbitrable. Montrer qu'un prix en dehors de cet ensemble est arbitrage est (beacoup) plus difficile... nous ne le ferons pas ici (mais la demonstration existe).

En revanche, si il n'y a qu'une seule probabilité Risque-Neutre, le prix est unique.

9.4 Robustesse de Black-Scholes

9.4.1 Formule de robustesse

On suppose que l'on a le modèle suivant pour la richesse :

$$dV_t = \delta_t(dS_t + q_t dt) - dC_t + (V_t - \delta_t S_t + C_t)\,r_t dt$$

Où les paramètres r_t,q_t et σ_t sont des processus stochastiques indeterminés. Supposons une règlee de pricing $C(t, S_t)$. On a, d'après ce qui précède :

$$dV_t = \left[-\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} S_t q_t - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(V_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t + C_t\right) r_t\right] dt$$

Supposons maintenant que l'on a pricé notre option dans un modèle de BS avec des taux $\hat{r}$, des divs $\hat{q}$ et une volatilité $\hat{\sigma}$. On a alors :

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = -C\hat{r} + S(\hat{r} - \hat{q})\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \hat{\sigma}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

Et en reinjectant dans le P&L on obtient :

$$dV_t - r_t V_t dt = \left[\frac{\partial C}{\partial S} S_t (q_t - \hat{q}) + \frac{1}{2} S_t^2 \left(\hat{\sigma}^2 - \sigma_t^2\right) \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(C_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t\right)(r_t - \hat{r})\right] dt$$

On voit que pour un payoff delta et gamma positif :
- On est sur de gagner de l'argent si on a surestimé la volatilité dans notre modèle de pricing par rapport à la volatilité réalisée
- On est surs de gagner si on a sous estimé les dividendes par rapport à ce qui se réalise

Donc, en pratique lorsqu'il a un doute le trader préfère toujours surestimer la volatilité et sous estimer les dividendes lorsqu'iil vend des calls...

En pratique on peut aussi se couvrir en utilisant plutot les contrats forwards, on a donc :

$$dV_t^T = \left[\frac{1}{2}F_t^2\left(\hat{\sigma}_F^2 - \sigma_{F,t}^2\right)\frac{\partial^2 C}{\partial F^2}\right]dt$$

On n'a plus qu'à se concentrer sur la volatilité du forward.

On voit ici que la convexité du profil couvert compte énormément. Cette relation est très utilisée pour pricer des options lorsqu'il n'y a pas de marché d'autres options.

9.4.2 Signe des grecques

On se place sous le modèle de BS avec paramètres constants on a :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r-q)\,dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$S_T = S_t \exp\left[\sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}\right) + (r-q)(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]$$

Donc :

$$\begin{aligned} C_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}g(S_T)\,|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}g\left(S_t\frac{X_T}{X_t}\right)|\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Donc on a, comme $X_{t,T} = \frac{S_T}{S_t}$ est complètement indépendant de S_t alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial S_t} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}X_{t,T}g'(S_tX_{t,T})\,|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}\frac{S_T}{S_t}g'(S_T)\,|\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Et de plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}X_{t,T}^2 g"(S_T)\,|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}\frac{S_T^2}{S_t^2}g"(S_T)\,|\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Donc, comme $e^{-r(T-t)}\frac{S_T}{S_t} > 0$ et $e^{-r(T-t)}\left(\frac{X_T}{X_t}\right)^2 > 0$.

- Si la dérivée du payoff est de signe constant, alors le delta est du même signe.
- Un payoff convexe (resp. concave) donne une option dont le gamma est positif (resp négatif).

Donc de plus on a :

$$S_t^2 \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} S_T^2 g\text{"} \left(S_T \right) | \mathcal{F}_t \right)$$

Donc $S_t^2 e^{-rt} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ est un martingale sous $\mathbb{Q}$

Enfin, pour le vega on utilise l'EDP (avec les forwards) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} = 0$$

On pose C comme une fonction $C(t, F, \sigma)$. On dérive par rapport à σ on obtient l'equation :

$$\frac{\partial C}{\partial t \partial \sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2 \partial \sigma} + \sigma F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} = 0$$

Donc en posant le vega :$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 v}{\partial F^2} + \sigma F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} = 0$$

Ce qui, par Feynman-Kac donne, etant donné que le vega à maturité est nul, et en prenant $\sigma F^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2}$ comme un terme de consommation :

$$\begin{aligned} vega &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(\int_t^T \sigma F_u^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} (u, F_u) \, du \right) \\ &= \sigma \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left(\int_t^T F_u^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} (u, F_u) \, du \right) \end{aligned}$$

Or comme on est à taux nuls, d'après ce qui précède, $F_u^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2}$ est une martigale on a donc :

$$vega = (T - t) \, \sigma F_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial F^2} (t, F_t)$$

Donc le véga est du même signe que le gamma si celui ci est constant. En particulier il est positif pour un call.

Attention, ceci n'est vrai que sous le modèle de Black&Scholes en dimension 1...

9.5 Modèle Avellaneda (vol min / max)

On suppose que la volatilité de l'actif risqué (ou du forward si on le modélise)σ_t est aléatoire et non couvrable (on ne peut se couvrir qu'avec le spot). On ne cherche pas à connaitre la dynamique de son processus. On suppose juste que, à chaque instant t, $\sigma_t \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$. On cherche à connaitre le prix et la stratégie tel que, pour tout processus $\sigma_t \in [\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$, le P&L de la couverture soit positif ou nul.

On suppose que l'on regarde les prix dépendant uniquement du prix de l'actif risqué (ou du forward) et du temps. On suppose ici que les taux et dividendes sont constants (ils sont nuls si on regarde des forwards). On obtient comme précédemment la formule du P&L entre deux dates :

$$dP\&L = dV_t - r_t V_t dt = \left[-\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} S_t q - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(-\frac{\partial C}{\partial S} S_t + C_t \right) r \right] dt$$

Et l'on veut que ce P&L soit toujours positif, quelle que soit la volatilité. On cherche donc un prix telle que dans le pire cas, le P&L soit nul :

$$\begin{aligned} \inf_{\sigma_t \in [\sigma^-, \sigma^+]} dP\&L &= \inf_{\sigma_t \in [\sigma^-, \sigma^+]} \left\{ -\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} S_t q - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(-\frac{\partial C}{\partial S} S_t + C_t \right) r \right\} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation du prix :

$$\begin{aligned} \inf_{\sigma \in [\sigma^-, \sigma^+]} \left\{ -\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} Sq - \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \left(-\frac{\partial C}{\partial S} s + C \right) r \right\} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial S} Sq + \sup_{\sigma \in [\sigma^-, \sigma^+]} \left\{ \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right\} + \left(\frac{\partial C}{\partial S} s - C \right) r &= 0 \end{aligned}$$

On prend donc la volaitlité max lorsque le gamma est positif et la volaitlité min lorsque le gamma est négatif. Ce prix réplique exactement lorsque la volaitlité suit cette trajectoire de pire cas, et surreplique dans les autres cas.

Lorsque le payoff est convexe, alors le prix par cette méthode est exactement le prix Black Scholes avec volatilité maximale. *En effet, ce prix vérifie l'équation : il est toujours tel que* $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \geq 0$ *par les propriétés de Black Scholes, et donc on fait bien toujours appel à la vol max, ce qui donne l'équation de Black Scholes avec vol max.*

De même les payoffs concaves sont pricés par un prix Black Scholes avec volatilité minimale σ_{min}.

En revanche les payoffs ni concaves ni convexes (type call spread) sont plus complexes à résoudre.

Cette méthode est très utilisée lorsqu'il n'y a pas de marché d'options pour couvrir les variations de la volatilité.

10 Nappe de volatilité implicite

10.1 Surface de volatilité implicite

La formule d'un call sous BS dépend en définitive :
- Du strike
- De la maturité restante
- Du niveau du contrat forward de même maturité
- de la volatilité du forward

On a donc une fonction :

$$C\left(t,T,K,F_t^T,\sigma_F\right)$$

Les trois premiers paramètres (strike, maturité restante et forward) sont parfaitement connus. En revanche σ_F n'est pas directement observable. De plus, l'estimation de la volatilité des marchés tend à montrer que celle ci bouge dans le temps, contrairement aux hypothèses de Black Scholes.

En revanche, si l'on dispose d'un prix de marché donnée $\hat{C}_t$ vérifiant les inégalités d'arbitrage indépendantes du modèle :

$$B\left(t,T\right)\left(F_t^T-K\right)_+\leq\hat{C}_t<B\left(t,T\right)F_t^T$$

Or les prix d'option vont de $B\left(t,T\right)\left(F_t^T-K\right)_+$ pour une volatilité nulle à $B\left(t,T\right)F_t^T$ quand la volatilité tend vers l'infini. Comme $C\left(\sigma\right)$ est croissante et continue, alors on peut trouver une volatilité $\hat{\sigma}_F$ telle que :

$$C\left(t,T,K,F_t^T,\hat{\sigma}\right)=\hat{C}_t$$

Ceci permet pour chaque call de définir sa volatilité implicite $\hat{\sigma}$ *(via un solveur numerique) donnée par le marché.* Cette volatilité $\hat{\sigma}$ est potentiellement différente pour chaque call *(i.e. pour chaque couple strike/maturité).* On a donc une nappe de volatilité implicite $\hat{\sigma}\left(T,K\right)$ fournie par le marché *(en pratique on observe uniquement quelques points de la nappe car tous les couples strike/maturité ne sont pas disponibles dans le marché).*

Faire un exemple de nappe de vol.

Si le modèle Black Scholes était vérifié, on aurait une nappe "plate" c'est à dire constante. *Le fait que cette nappe soit non plate invalide Black Scholes.*

10.2 Obtention du prix d'option Europeennes (formule de Carr-Madan)

Cette formule permet d'obtenir exactement le prix et la couverture statique d'une option Européenne en fonction des calls (ou puts) de différents strikes. Les calls définissent donc l'ensemble des prix d'options Europennes.

Proposition 5. *Le prix d'une option Européenne de maturité T et de payoff g est donné par :*

$$P_t=\left(g\left(0\right)+g'\left(0\right)F_t^T\right)B\left(t,T\right)+\int_0^{+\infty}C\left(t,S_t,T,K\right)g"\left(K\right)dK$$

Où $C\left(t,S_t,T,K\right)$ est le prix en t d'un call de strike K et de maturité T.

Démonstration. Si l'on se place en T, on a :

$$\begin{aligned}
g(S_T) &= g(0) + \int_0^{S_T} g'(s)\, ds \\
&= g(0) + \int_0^{\infty} 1_{s<S_T} g'(s)\, ds \\
&= g(0) + \int_0^{\infty} (S_T - s)_+ g"(s)\, ds - \left[(S_T - s)_+ g'(s)\right]_0^{\infty} \\
&= g(0) + S_T g'(0) + \int_0^{\infty} (S_T - K)_+ g"(K)\, dK
\end{aligned}$$

en faisant l'intégration par partie à la troisième ligne, utilisant $\frac{\partial (S_T - s)_+}{\partial s} = -1_{s<S_T}$ et en changeant la notation s en K à la quatrieme. On voit que l'on a décomposé le payoff termiinal en payoff linéaire plus une somme de calls. Par AOA, le prix de l'option est donc le prix de la partie linéaire (replicable par un ZC et un Forward) plus le prix du portefeuille de calls. □

10.3 Inégalités d'arbitrage sur la nappe de prix d'options

On va tout d'abord ici voir quelles sont les nappes qui sont admissibles dans le sens ou elles n'induisent pas d'arbitrages.

Call spread Le prix du call est décroissant par rapport au strike. En effet si on a $K - \epsilon$ et $K + \epsilon$ on a :

$$(S_T - (K - \epsilon))_+ > (S_T - (K + \epsilon))_+$$

dessinner le payoff. Donc par AOA on a :

$$C(T, K - \epsilon) \geq C(T, K + \epsilon)$$

D'où, si la nappe de prix de call est dérivable :

$$\frac{\partial C}{\partial K} \leq 0$$

Butterfly spread On suppose le portefeuille d'options suivant de même maturité T :
- Achat d'un call de strike $K - \epsilon$
- Vendre de deux calls de strike K
- Achat d'un call de strike $K + \epsilon$

Ceci donne un payoff total positif :

$$g(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad S_T \in [0, K - \epsilon] \cup [K + \epsilon, +\infty) \\ S_T - K - \epsilon & \text{si} \quad S_T \in [K - \epsilon, K] \\ K + \epsilon - S_T & \text{si} \quad S_T \in [K, K + \epsilon] \end{cases}$$

Donc le prix en t de ce payoff positif est positif par AOA. On a donc :

$$C(T, K-\epsilon) + C(T, K+\epsilon) - 2C(T, K) \geq 0$$

Ce qui veut dire en d'autre termes que la nappe de prix de calls est convexe par rapport au strike. Si celle ci est dérivable deux fois par rapport à K on a :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \geq 0$$

Calendar spread On suppose que les taux et les dividendes sont deterministe (on va même ici les prendre constants).

Proposition 6. *Supposons les taux et les dividendes constants. Soit $T_2 \geq T_1$ et K un strike quelconque, alors on a, à toute date $t \leq T_1$:*

$$C(t, T_1, K) \leq e^{q(T_2-T_1)} C\left(t, T_2, Ke^{(r-q)(T_2-T_1)}\right)$$

Quand les taux et les dividendes sont nuls, on a que le call est une fonction croissante de sa maturité.

L'idée est (aux teux d'intérêt et divs près) qu'un call de maturité longue est toujours plus cher qu'un call de maturité courte. Cela vient du fait (a taux et divs nuls) que le prix du call est au dessus de son payoff.

On suppose que l'on achète un call de maturité longue et que l'on vend un call de maturité plus courte. On constitue le portefeuille de la manière suivante :

- On vend un call de maturité courte T_1 et de strike K_1
- On achète $e^{q(T_2-T_1)}$ calls de maturité T_2 et de strike $K_2 = K_1 e^{(r-q)(T_2-T_1)}$

Afin de montrer que pour toute date t, $C(t, T_1, K_1) \leq e^{q(T_2-T_1)} C(t, T_2, K_2)$ (on voit qu'il est essentiel d'avoir q et r deterministe), on va le montrer en T_1. En se placant en T_1 on a la valeur du portefeuille :

$$X_{T_1} = e^{q(T_2-T_1)} C(T_1, T_2, K_2) - (S_{T_1} - K_1)_+$$

On rappelle que la valeur d'un call est toujours telle que :

$$\begin{aligned} B(t,T)\left(F_t^T - K\right)_+ &\leq C_t \leq B(t,T) F_t^T \\ \left(S_t e^{-\int_t^T q_u du} - K e^{-\int_t^T r_u du}\right)_+ &\leq C_t \leq S_t e^{-\int_t^T q_u du} \end{aligned}$$

D'où :

$$\left(S_{T_1} e^{-(T_2-T_1)q} - K_2 e^{-(T_2-T_1)r}\right)_+ \leq C(T_1, T_2, K_2)$$

Donc, en utilisant $K_2 = K_1 e^{(r-q)(T_2-T_1)}$

$$\left(S_{T_1} e^{-(T_2-T_1)q} - K_1 e^{-(T_2-T_1)q}\right)_+ \leq C(T_1, T_2, K_2)$$

Donc finalement, on a bien :

$$e^{q(T_2-T_1)} C(T_1, T_2, K_2) - (S_{T_1} - K_1)_+ \geq 0$$

Donc le portefeuille X a bien toujours une valeur positive en T_1. Par AOA, il a donc une valeur positive en $t \leq T_1$.

En faisant tendre T_2 vers T_1 on obtient la relation :

$$\frac{\partial e^{q\Delta T} C\left(t, T+\Delta T, K e^{(r-q)\Delta T}\right)}{\partial\left(\Delta T\right)} = qC\left(t,T,K\right) + \frac{\partial C}{\partial T} + \left(r-q\right) K \frac{\partial C}{\partial K} \geq 0$$

Corollaire 7. *On déduit de la proposition précédente, la relation de non arbitrage sur la nappe de prix de calls :*

$$qC\left(t,T,K\right) + \frac{\partial C}{\partial T} + \left(r-q\right) K \frac{\partial C}{\partial K} \geq 0$$

11 Modèlisation de la volatilité

11.1 Modèle à volatilité locale

Definition et pricing On suppose les dividendes et les tauxx constants (cela marche aussi avec les taux et div deterministes). Le modèle à volatilité locale suppose que la volatilité est une fonction derterministe du temps et du spot. Cela donne la dynamique historique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_{loc}\left(t, S_t\right) dW_t^{\mathbb{P}}$$

et la dynamique risque neutre :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(r-q\right) dt + \sigma_{loc}\left(t, S_t\right) dW_t^{\mathbb{Q}}$$

On a alors l'EDP de pricing, en utilisant les mêmes arguments que pour Black-Scholes :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S\left(r-q\right)\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2\left(\sigma_{loc}\left(t,S\right)\right)^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - Cr = 0$$

On a, de même, le prix en volatilité locale :

$$C^{loc}\left(t, S_t\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)} g\left(S_T\right) | S_t\right] = C^{BS}\left(t, S_t, T, K, \hat{\sigma}_{impl}\left(T, K\right)\right)$$

Et on peut inverser C^{BS} pour obtenir la volatilité implicite en fonction du modèle à volatilité locale. *Malheureusement, cette relation n'est pas très intuitive.*

11.2 Lien entre volatilités Implicite-Stochastique-Locale

Formule de la densité de proba du spot *Pour trouver la formule de la volatilité locale, on commence par donner le lemme suivant :*

Lemme 8. *On suppose que l'on a des prix de marché pour tous les Calls. On suppose les taux et les dividendes constants, AOA et que le marché complet (i.e. il existe une seule probabilité risque neutre), avec une volatilité locale ou stochastique quelconque. Alors on a le lien entre la densité de proba du spot $\phi_{\mathcal{F}_t}(T, S_T)$ en T et la dérivée seconde du prix du strike par rapport à la maturité :*

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(t, S_t, T, K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\delta_K(S_T)|S_t\right] = e^{-r(T-t)}\phi_{S_T}(K|\mathcal{F}_t)$$

On part du prix du call :

$$C^{loc}(t, S_t, K, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+|\mathcal{F}_t\right]$$

On derive par rapport au strike :

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[-e^{-r(T-t)}1_{S_T>K}|\mathcal{F}_t\right]$$

Puis encore :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\delta_K(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

Or, si on explicite l'espérance on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\delta_K(S_T)|\mathcal{F}_t\right] &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_{S_T}(x|\mathcal{F}_t)\,\delta_K(x)\,dx \\ &= e^{-r(T-t)}\phi_{S_T}(K|\mathcal{F}_t)\end{aligned}$$

Maintenant, on peut trouver la formule de Dupire liant vol impli, locale et sotchastique.

Théorème 9. *On suppose que l'on a des prix de marché pour tous les Calls. On suppose les taux et les dividendes constants, AOA et que le marché complet (i.e. il existe une seule probabilité risque neutre), avec une volatilité locale ou stochastique quelconque. Alors le processus de volatilité est tel que :*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_T^2|\mathcal{F}_t, S_T = K\right] = \frac{qC(t, T, K) + \frac{\partial C}{\partial T} + (r-q)K\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

Corollaire 10. *En particulier, si l'on se place dans les hypothèses du théorème précédent et que l'on suppose que l'on est dans un modèle a volatilité locale, alors*

$$\sigma^{loc}(T, K) = \frac{qC(t, T, K) + \frac{\partial C}{\partial T} + (r-q)K\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

On a donc, pour tout modèle a volatilité stochastique, un modèle a volatilité locale, donné par : $\sigma^{loc}(T, K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_T^2|\mathcal{F}_t, S_T = K\right]$ donne en t les mêmes prix pour les calls et les puts.

On va essayer de trouver le prix d'un calendar spread. Si on applique (formellement) la formule d'Ito à la fonction $(X_t - K)_+$, en prenant t comme le temps, on obtient :

$$d\left(X_t - K\right)_+ = 1_{S_t > K} dX_t + \frac{1}{2}\delta_K\left(S_t\right)\langle dX_t\rangle$$

$$\begin{aligned} d\left[\left(S_t e^{(q-r)(t-t_0)} - K\right)_+\right] &= 1_{S_t>K}\left(e^{(q-r)(t-t_0)} dS_t + S_t\left(q-r\right)e^{(q-r)(t-t_0)}dt\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 e^{2(q-r)(t-t_0)}\delta_K\left(S_t\right)dt \\ &= 1_{S_t>K} e^{(q-r)(t-t_0)}\left(dS_t + S_t\left(q-r\right)dt\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 e^{2(q-r)(t-t_0)}\delta_K\left(S_t\right)dt \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_{T_2}e^{(q-r)(T_2-T_1)} - K\right)_+ - \left(S_{T_1} - K\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_{T_1}^{T_2}\sigma_u^2 S_u^2 e^{2(q-r)(u-T_1)}\delta_K\left(S_u\right)du|\mathcal{F}_{t_0}\right] \quad (1)$$

Le membre de gauche donne :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_{T_2}e^{(q-r)(T_2-T_1)} - K\right)_+ - \left(S_{T_1} - K\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] \\ = \; & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_{T_2}e^{(q-r)(T_2-T_1)} - K\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_{T_1} - K\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] \\ = \; & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(q-r)(T_2-T_1)}\left(S_{T_2} - Ke^{(r-q)(T_2-T_1)}\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(S_{T_1} - K\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] \\ = \; & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{(q-r)(T_2-T_1)}\left(S_{T_2} - Ke^{(r-q)(T_2-T_1)}\right)_+ |\mathcal{F}_{t_0}\right] - e^{r(T_1-t_0)}C\left(t_0, T_1, K\right) \\ = \; & e^{q(T_2-T_1)}e^{r(T_1-t_0)}C\left(t_0, T_2, Ke^{(r-q)(T_2-T_1)}\right) - e^{r(T_1-t_0)}C\left(t_0, T_1, K\right) \\ = \; & e^{r(T_1-t_0)}\left[e^{q(T_2-T_1)}C\left(t_0, T_2, Ke^{(r-q)(T_2-T_1)}\right) - C\left(t_0, T_1, K\right)\right] \end{aligned}$$

On fait tendre T_2 vers T_1. On obtient la limite du membre de droite, en posant $\Delta T = T_2 - T_1$:

$$\frac{\partial e^{q\Delta T}C\left(t, T+\Delta T, Ke^{(r-q)\Delta T}\right)}{\partial\left(\Delta T\right)} = qC\left(t, T, K\right) + \frac{\partial C}{\partial T} + \left(r-q\right)K\frac{\partial C}{\partial K}$$

Donc le membre de gauche de l'équation (1) est égal à :

$$e^{r(T_1-t_0)}\left[qC\left(t, T, K\right) + \frac{\partial C}{\partial T} + \left(r-q\right)K\frac{\partial C}{\partial K}\right]\Delta T$$

On a donc, en faisant tendre ΔT vers 0 :

$$\begin{aligned}
e^{r(T_1-t_0)}\left[qC(t,T,K)+\frac{\partial C}{\partial T}+(r-q)K\frac{\partial C}{\partial K}\right] &= \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_{T_1}^2 S_{T_1}^2\delta_K(S_{T_1})|\mathcal{F}_{t_0}\right]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_{T_1}^2 S_{T_1}^2\delta_K(S_{T_1})|\mathcal{F}_{t_0},S_{T_1}\right]|\mathcal{F}_{t_0}\right]\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_{T_1}^2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_{T_1}^2|\mathcal{F}_{t_0},S_{T_1}\right]\delta_K(S_{T_1})|\mathcal{F}_{t_0}\right]\\
&= \frac{1}{2}K^2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_{T_1}^2|\mathcal{F}_{t_0},S_{T_1}=K\right]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\delta_K(S_{T_1})|\mathcal{F}_{t_0}\right]
\end{aligned}$$

Pour ce dernier element, on utilise le lemme précédent :D'où finalement

$$e^{r(T_1-t_0)}\left[qC(t,T,K)+\frac{\partial C}{\partial T}+(r-q)K\frac{\partial C}{\partial K}\right]=\frac{1}{2}e^{r(T_1-t_0)}K^2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sigma_{T_1}^2|\mathcal{F}_{t_0},S_{T_1}=K\right]\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

11.3 Vol implicite en fonction de la vol locale

11.3.1 Formule

Proposition 11. *Si les taux et les dividendes sont nuls, on a la relation entre volatilité implicite $\hat{\sigma}(T,K)$ d'un call en fonction de la volatilité locale $\sigma(t,S_t)$:*

$$\hat{\sigma}^2(T,K)=\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T\sigma_{loc}^2(t,S_t)\frac{1}{2}S_t^2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2}(t,S_t)\,dt|\mathcal{F}_0\right)}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\int_0^T\frac{1}{2}S_t^2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2}(t,S_t)\,dt|\mathcal{F}_0\right)}$$

Où C^{BS} est le prix Black Scholes du call avec une volatilité implicite $\hat{\sigma}^2(T,K)$.

Démonstration. On applique la formule de la robustesse de Black Scholes dans le modèle à vol locale.On suppose que l'on a un call de volatilité implicite $\hat{\sigma}(T,K)$. On se place à taux nul et à dividendes nuls. Dans ce cas, les portefeuilles auto-financés sont des martingales sous la probabilité risque neutre. On suppose que l'on vend le call en au prix du marché et qu'on le couvre et valorise le call en utilisant la formule de Black Scholes avec une volatilité constante $\hat{\sigma}(T,K)$ entre 0 et T. La couverture est donc imparfaite (on couvre dans le mauvais modèle). On a alors d'après la robustesse de Black et Scholes :

$$\begin{aligned}
dV_t &= \frac{1}{2}S_t^2\left(\hat{\sigma}^2(T,K)-\sigma_t^2\right)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S_t)\,dt\\
V_T &= V_0+\int_0^T\frac{1}{2}S_t^2\left(\hat{\sigma}^2(T,K)-\sigma^2(t,S_t)\right)\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2}(t,S_t)\,dt
\end{aligned}$$

Cependant le résultat ci dessus n'est pas très bien jusztifié car on valorise mal le call (on le valorise au prix BS à volatilité constante). En notant Y l'écart entre le prix BS et le vrai prix on a, en utilisant la formule de valorisation correcte :

$$\begin{aligned}
dV_t &= \frac{1}{2}S_t^2\left(\hat{\sigma}^2(T,K)-\sigma_t^2\right)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S_t)\,dt+dY_t\\
V_T &= V_0+\int_0^T\frac{1}{2}S_t^2\left(\hat{\sigma}^2(T,K)-\sigma^2(t,S_t)\right)\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2}(t,S_t)\,dt+Y_T-Y_0
\end{aligned}$$

Or $Y_T = Y_0 = 0$ caron valorise bien le call au début (car on prend la bonne vol impli) et à la fin (car le prix est égalà au payoff). Donc on a bien :

$$V_T = V_0 + \int_0^T \frac{1}{2} S_t^2 \left(\hat{\sigma}^2 (T, K) - \sigma^2 (t, S_t)\right) \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, S_t)\, dt$$

Comme on a traité que des instruments existants dans le marché (y compris le call), la richesse est une martingale sous la proba risque neutre. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (V_T | \mathcal{F}_0) &= V_0 \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T \frac{1}{2} S_t^2 \left(\hat{\sigma}^2 (T, K) - \sigma^2 (t, S_t)\right) \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, S_t)\, dt | \mathcal{F}_0 \right) &= 0 \end{aligned}$$

D'où, en utilisant le fait que $\hat{\sigma}(T, K)$ soit constante :

$$\hat{\sigma}^2 (T, K)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, S_t)\, dt | \mathcal{F}_0 \right) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T \sigma^2 (t, S_t) \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, S_t)\, dt | \mathcal{F}_0 \right)$$

$$\hat{\sigma}^2 (T, K) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T \sigma^2 (t, S_t) \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, S_t)\, dt | \mathcal{F}_0 \right)}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^T \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, S_t)\, dt | \mathcal{F}_0 \right)}$$

$\square$

Soit, en notant $\phi(t, s)$ la densité de proba de S à la date t,vue depuis la date 0 :

$$\hat{\sigma}^2 (T, K) = \frac{\int_0^T \int_0^{+\infty} \sigma_{loc}^2 (t, S_t)\, s^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, s)\, \phi (t, s)\, ds dt}{\int_0^T \int_0^{+\infty} s^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, s)\, \phi (t, s)\, ds dt}$$

On a donc une moyenne de la variance locale pondérée par $s^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial S^2} (t, s)\, \phi (t, s)$. Or cette quantité est maximale sur le chemin qui lie le point $(0, S_0)$ à (T, K). On peut approximer cette moyenne par un moyenne sur le chemin :

$$\hat{\sigma}^2 (T, K) = \frac{\int_0^T \sigma_{loc}^2 (t, S(t))\, dt}{T}$$

Avec $S(t) = S_0 + (K - S_0) \frac{t}{T}$.

Si l'on suppose que la variance locale est linéaire et independante du temps :

$$\sigma_{loc}^2 (t, S) = AS + B$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 (T, K) &= \frac{\int_0^T \left[A \left(S_0 + (K - S_0) \frac{t}{T}\right) + B\right] dt}{T} \\ &= AS_0 + B + A \frac{(K - S_0)}{T^2} \int_0^T t dt \\ &= AS_0 + B + \frac{A}{2} (K - S_0) \end{aligned}$$

La volatilié implicite à la monnaie est la volatilité locale. La pente de la volatilité implcite est la moitié de la pente de la volatilité locale.

11.4 Exemples de modèle de volatilité stochastique

11.4.1 Modèle de Heston

On a le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= \theta \left(V_\infty - V_t\right) dt + \xi \sqrt{V_t} dW_t^2 \\ \left\langle dW_t^1, dW_t^2 \right\rangle &= \rho\end{aligned}$$

On suppose que l'on est en marché complet *(il suffit de deux instruments risqués pour hedger n'importe quoi, typiquement le sous jacent et une option).*

L'influence des paramètres est la suivante :

La volatilité $\sqrt{V_t}$ est la volatilité de court terme à la monnaie.

La volatilité $\sqrt{V_\infty}$ est la valeur stationnaire du processus, c'est donc la volatilité de long terme. Dans le modèle à vol locale correspondant, ccette vol locale tend donc vers $\sqrt{V_\infty}$ quand $t \to \infty$. Il en va donc de même pour la vol implicite (qui est une moyenne de vol locale)

Le terme ξ est la quantité d'aléa sur le processus. Si il n'y a aucun aléa, on est dans Black Scholes (smile plat) si ξ est grand, la vol est très incertaine. On aura alors $\sigma_{loc}^2 (t, K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(V_t | S_t = K\right)$ qui sera très élevé lorsque le spot sera loin de la valeur initiale (car cela veut dire que la volatilité a sans doute été très élevée) et cette expression très basse lorsque l'on est près de la valeur initiale ($K \approx S_0$) car cela veut dire que le spot a peut bougé et que la vol est sans doute basse. On aura donc une volatilité locale (et donc impli) très faible au milieu et très élevée sur les cotés (forme de sourire prononcée) si ξ est élevé.

Le terme ρ représente la corellation entre le spot et la volatilité. Si cette ci est positive, la volatilité risque d'être élevée lorsque le spot est élevé et basse quand le spot est bas. On aura donc un smile croissant en fonction du strike. Au contraire si $\rho < 0$ (cas usuel pour les actions) alors on aura une pente négative du smile. La pente est grosso modo proportionnelle à $\xi\rho$, la covariance entre le spot et la vol.

12 Options exotiques sur actions et indices

12.1 Europennes

12.1.1 Call spread

Un call spread est l'achat d'un call de strike bas K_1 et la vente d'un call de strike haut K_2 de même matrutié T. Ce profil est ni concave ni convexe, et il est toujours posiitif. Il permet de profiter de la hausse d'un actif (tout comme le call) mais avec un gain maximum de $K_2 - K_1$, ce qui permet de baisser le prix de l'option. Plus K_2 est proche de K_1 plus le prix de l'option est bas...

12.1.2 Digitale

C'est une option Europeenne qui verse à maturité :

$$g(S_T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce payoff est discontinu en son strike K. La dérivée du payoff est infinie en K. Ainsi le delta de l'option tend lui aussi vers l'infini autour de K quand l'option s'approche de la maturité. Ceci est très génant car en pratique on ne peut pas implémenter une stratégie de couverture avec un delta si élevé (couvrir un digitale pouvant verser au maximum 1 million d'euros avec un delta de 10 millards paraît déraisonnable).

On couvre donc les digitales avec des call spreads. En pratique on prend un call spread surcouvrant la digitale : pour une digitale de strike K on couvre avec $\frac{1}{\epsilon}$ call spreads de strikes $K - \epsilon$ et K (de delta maximal $\frac{1}{\epsilon}$).

12.1.3 Option d'échange

C'est une option qui permet d'échanger un sous jacent X contre un sous jacent S à une date T. Le payoff de cette option est donc :

$$(S_T - X_T)_+$$

Supposons que X ne verse pas de dividendes et reste toujours strictement positif. Dans ce cas, X peut être vu comme une monnaie dans laquelle les taux d'intérêts sont nuls (on peut compter notre richesse en nombre de X plutot qu'en nombre d'Euros.

Alors dans cette nouvelle uniqté de mesure, la richesse devient :

$$V_t^X = \frac{V_t}{X_t}$$

Le prix de l'actif X reste constant et égal à 1. Le prix de l'actif S est quant à lui :

$$S_t^X = \frac{S_t}{X_t}$$

Et dans cette nouvelle unité de comptage, le payoff de l'option est :

$$\left(S_t^X - 1\right)_+$$

On utilise $\mathbb{Q}^X$ la probabilité sous laquelle les prix exprimés selon X sont des martingales (car le taux dans la monnaie X est nul) et on a donc le prix de l'option en monnaie X :

$$C_t^X = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^X}\left(\left(S_T^X - 1\right)_+ | \mathcal{F}_t\right)$$

Donc le prix de l'option en euros est :

$$\begin{aligned} C_t &= X_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^X} \left(\left(S_T^X - 1 \right)_+ | \mathcal{F}_t \right) \\ &= X_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^X} \left(\left(\frac{S_T^{€}}{X_T} - 1 \right)_+ | \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

Ces changements d enuménaires sont très utiles.

A noter que lorsqu'il y a des dividendes proportionnels ceux ci interviennent comme le taux d'intérêt de la monnaie X.

Sous Black et Scholes on obtient une formule fermée. Dans les modèles les plus complexes on peut utiliser Monte Carlo ou des EDP pour calculer l'espérance sous la proba $\mathbb{Q}^X$.

12.2 Path dependent

12.2.1 Depart forward

Une option à depart forward est une option dont le strike est fixé à une date future T_1 (en fonction du prix du sous jacent à cette date) puis qui mature en T_2. Son payoff est donc, pour un call à départ forward :

$$\left(S_{T_2} - k S_{T_1} \right)_+$$

On peut aussi écrire cela :

$$S_{T_1} \left(\frac{S_{T_2}}{S_{T_1}} - k \right)_+$$

En T_1 cela vaut, sous un modèle Black Scholes :

$$S_{T_1} \times Call^{BS} \left(S = 1, K = k, T - t = T_2 - T_1 \right)$$

Donc le prix en $t \leq T_1$ de l'option est, comme la deuxième partie est deterministe (ne dépend d'aucun paramètre) :

$$B \left(t, T_1 \right) F_t^{T_1} \times Call^{BS} \left(S = 1, K = k, T - t = T_2 - T_1 \right)$$

Où $F_t^{T_1}$ est le prix T_1 forward du sous jacent à la date t. Typiquement $F_t^{T_1} = S_t \frac{e^{-q(T_1 - t)}}{B(t, T_1)}$.

Dans les modèles plus complexes on peut utiliser Monte Carlo ou des EDP pour calculer l'espérance du payoff actualisé sous la proba $\mathbb{Q}$.

12.2.2 Asiatique

Une option asiatique est une option qui porte non pas sur le prix du sous jacent mais sur la moyenne de son prix à différentes dates $\{T_1, ..., T_n\}$. En général le payoff est livré en T_n. Par exemple le payoff d'un call asiatique est donné par :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{T_i} - K \right)_+$$

La première date T_1 de constatation du prix peut être très éloignée ou très proche de la date d'émission T_0 de l'option.

Les options Asiatiques sont en général moins chères que les options Européennes de même maturité. En tous cas cela est toujours vrai en supposant les taux et les dividendes nuls. En effet on a, comme la fonction $x \to (x)_+$ est convexe :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{T_i} - K\right)_+ = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (S_{T_i} - K)\right)_+ \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (S_{T_i} - K)_+$$

Donc on a :

$$CallAsiatiqiue(Mat = T_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} CallEuropeen\,(Mat = T_i)$$

Or à taux et divs nuls, les prix de calls sont une fonction croissante de la maturité.

On peut utiliser Monte Carlo ou des EDP pour calculer l'espérance du payoff actualisé sous la proba $\mathbb{Q}$:

$$C_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_n} r_u du}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{T_i} - K\right)_+ |\mathcal{F}_t\right]$$

12.2.3 Barrière

Une option barrière est une option qui provoque un événement pparticulier (activation ou désactivation de l'option) lorsque l'on passe en dessous ou au dessus d'un prix barrière. Cette activation ou désactivation est définitive.

Les options barrières les plus classiques sont décrites de la manière suivante : (Call/Put) (Down/Up) and (In/Out) de strike K et de barrière B.

- Le terme Down ou Up donne le sens de traversée de la barrère
  - Si l'option est de type down, on dit que la barrière a été traversée si on observe un prix en dessous de B
  - Si l'option est de type Up, on dit que la barrière a été traversée si on observe un prix au dessus de B
- Le terme In ou Out précise le coté Activant ou désactivant de la barrière
  - Si l'option est de type In cela veut dire qu'elle ne peut être exercée uniquement si la barrière a été traversée
  - Si l'option est de type Out cela veut dire que l'option ne peut plus être exercée (elle vaut 0) si la barrière a été traversée
- Le terme Call ou Put désigne la nature du payoff activé ou desactivé par la barrière.

Par exemple un Put Down and Out veut dire que le put peut être exercé uniquement si le prix reste toujours au dessus de la barrière B. La payoff peut s'écrire :

$$1_{\min_{t\in[0,T]}\{S_t\}>B}\,(K - S_T)_+$$

Au contraire un call down and in veut dire que le call ne peut être exercé uniquement si le prix est passé en dessous d'un certain niveau B :

$$1_{\min_{t\in[0,T]}\{S_t\}<B}\left(S_T-K\right)_+$$

Certaines options barrières sont triviales et n'apportent rien : Le call up and in si la barriere est en dessous du strike (toujours égal au call Européen en fait) etc...

En général les options barrières permettent de vendre des options moins chère, en conditionnant le payoff à des évènements de marché.

On peut calculer le prix de ces options facilement par Monte Carlo ou par EDP (la barrière est en fait une condition au bord).

12.2.4 Lookback

Une option Lookback est une option sur minimum ou maximum temporel, ou les deux. Typiquement, on êut avoir des payoffs du type :

$$S_T-\min_{t\in[0,T]}\{S_t\}$$

Ou

$$\max_{t\in[0,T]}\{S_t\}-S_T$$

Ou encore :

$$\left(\max_{[0,T]}S_T-K\right)_+$$

On dispose de formules fermées sous Black Scholes pour la plupart. Pour les modèles plus complexes, on peut utiliser du Monte–Carlo

12.2.5 Américaine

Une option Américaine est une option qui peut être exercée à n'importe quel moment entre la date d'émission et la date de maturité. La politique d'exercice optimale de l'option est la suivante :

- Si le prix de l'option est strictement supérieur au payoff, on n'exerce pas celle ci (car cela nous ferait perdre de l'argent. Mieux vaut revendre l'option par exemple).
- Si le prix de l'option est inférieur ou égal au payoff on exerce.

Si on note O_t le prix de l'option en t, alors le temps optimal d'exercice de l'option est donné par :

$$\tau=\inf_{t>0}\{g\left(S_t\right)\geq O_t\}$$

Pour trouver l'équation du prix de cette option, il faut raisonner "Backward". Placons nous dans un modèle Black-Scholes. On peut montrer que le prix de l'option (si elle n'a pas été exercée). Supposons que l'on soit à une date t et que l'on aie déjà la règle pemettant de calculer le prix de l'option en $t+dt$ en fonction de S_{t+dt}.

Il y a deux possibilités : Soit le prix de l'option en t est inférieur ou égal au payoff et l'option sera donc exercée par le détenteur. Dans ce cas on a le prix de l'option qui est égal au payoff : $C(t, S_t) = g(S_t)$

Si on suppose que l'option n'est pas exercée entre t et $t + dt$. Dans ce cas, couvrir l'option revient à couvrir une option Européenne entre t et $t + dt$ avec une maturité $t + dt$ et un payoff $C(t + dt, S_{t+dt})$. Dans ce cas le prix entre t et $t + dt$ satisfait l'équation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - C r_t = 0$$

Or cette option n'est pas exercée ssi : $C(t, S) - g(S) > 0$.

Si au contraire Le prix donné par cette EDP est tel que $C(t, S) - g(S) < 0$ alors il vaut mieux exrercer l'option que la détenir jusqu'een $t + dt$. Le prix de l'option est donc : $C(t, S) = g(S)$. Quand à l'EDP si dessus on aura toujours :

$$-\frac{\partial C}{\partial t} - S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + C r_t \geq 0$$

En effet, on a le prix de l'option non exercable entre t et $t + dt$:

$$\tilde{C}(t, S_t) = C(t + dt, S_t) + \left(S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - C r_t \right) dt$$

Or ce prix est inférieur au vrai prix on a donc :

$$C(t, S_t) \geq C(t + dt, S_t) + \left(S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - C r_t \right) dt$$

$$0 \geq \frac{\partial C}{\partial t} + S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - C r_t$$

Donc en assemblant tous ces cas on obtient l'EDP de pricing :

$$\min \left\{ C(t, S_t) - g(S_t), -\frac{\partial C}{\partial t} - S_t (r_t - q_t) \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + C r_t \right\} = 0$$

Plus la condition terminale à maturité.

Les options Américaines se pricent donc assez facilement par EDP. Par Monte Carlo, c'est plus compliqué. On peut montrer que le prix s'éxprime comme un sup d'espérance sur des temps d'arrêt :

$$C(t, S_t) = \sup_{\tau < T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^\tau r_u du} g(S_\tau) \right)$$

Le sup étant atteint pour la politique d'exercice optimal (mais pour la connaitre on a besoin du prix). Les différentes algorithmes par Monte Carlo cherchent à approximer cette politique d'exercice optimal.

12.2.6 Structurés divers...

Il y a beaucoup de produits structurés différents dans le marché retail et de private banking. Ce sont souvent des produits à capital garanti (on est sûr en T de retrouver sa mise placée en 0), ou au moins protégé (on est sur de retrouver sa mise à la fin sauf si le sous jacent passe en dessous d'un barierre). Les plus simples sont les produits du type zero coupon + call. Dans ce cas on achète 1 zero coupon + une quantité x de call de prix unitaire C pour avoir :

$$1 = B(0,T) + xC$$

Où x est appellé indexation de l'option. De cette facon, le prix garati en T est égal au prix en 0 (car au pire le call vaut 0 en T). Il y a toujours un facteur qui permet d'ajuster le prix du produit structuré afin que le prix initial soit égal au niveau de garantie (strike du call, indexation, niveau d'une barrière etc...)

Autre exemple : Produit autocallable

- Un produit de maturité 5 ans
- Chaque année on regarde si le sous jacent est au dessus d'un certain niveau (par exemple son niveau initial)
  - Si c'est le cas, le produit s'arrête et verse $1+x\times$ nombre d'années passées
  - Sinon on continue
- La dernière année
  - Si le prix du sous jacent est au dessus du niveau l'arrêtant, il paye $1 + x \times$ nombre d'années passées
  - Si il est entre ce niveau et une barrière basse donnée, il verse 1 (on reprend le capital initial)
  - Si il est en dessous on recoit la valeur du sous jacent.

Dans ce produit, il y a de multiples niveaux qu'l'on peut ajuster (niveau des barrières arrêtant le produit, niveau de la barrière pour la protection, niveau x de coupon annuel versé en cas d'arrêt etc...) permettant d'avoir un prix de 11 au départ.

13 Dérivés de taux

Le pricing des dérivés de taux est plus complexe que pour les dérivés action, pour les raisons suivantes :

- Le comportement des taux d'intérêt est plus complexe à modéliser que les actions *(typiquement la volaitlité dépend de la maturité)*
- On doit souvent modéliser énormément de variables (voire la courbe de touax toute entière, de dimension infinie) pour pricer et couvrir un dérivé.
- Les différents spoints de la courbe ont des dynamiques différentes eet sont interdépendants.
- On se sert du taux d'intérêt pour discounter le payoff ainsi que pour calculer celui ci.

Nouzs verrons ici uniquement des pricings de produits dérivés demandant des calculs simples.

13.1 Options sur obligation

13.1.1 Formule de pricing par les forwards

Les options sur obligation sont comparables aux options sur action, où les dividendes sont remplacées par les coupons (qui sont connus à l'avance) et la volatilité dépend de la maturité de l'obligation.

On suppose que l'obligation verse à chaque dare T_i un coupon C_{T_i} (avec remborsement du nominal en T_n). On considère une option sur cette obligation :

- On note $T < T_n$ la maturité de l'option (le cas $T > T_n$ est moins interessant)
- g le payoff de l'option (typiquement un call ou un put)
- O_t le prix de l'obligation en t.
- F_t^T le prix T forward de l'obligation, en t.
- $B(t,T)$ le prix du zero coupon de maturité T.

Le prix forward de l'obligation en t est le suivant :

$$F_t^T = \frac{O_t - \sum_{t \leq T_i < T} C_{T_i} B(t,T_i)}{B(t,T)}$$

La richesse forward d'un individu investissant dans l'obligation et évolue selon :

$$dV_t^T = \delta_T dF_t^T$$

Si l'on suppose que le prix forward de l'obligation évolue selon le modèle à volatilité locale dépendant uniquement du temps :

$$dF_t^T = F_t^T \sigma(t) dW_t$$

On a alors le prix forward en T :

$$O_T = F_t^T \exp\left(\int_t^T \sigma(u) dW_u - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u) du\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \ln \frac{O_T}{F_t^T} &\approx \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u) du, \int_t^T \sigma^2(u) du\right) \\ &\approx \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}T\hat{\sigma}^2, T\hat{\sigma}^2\right) \end{aligned}$$

Où $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\int_t^T \sigma^2(u) du$. On constate que la distribution du rendement du forward est la même que dans un modèle Black Scholes à tendance nulle et à volatilité constante $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^T \sigma^2(u) du}$.

On a donc le prix forward de l'option sur obligation, comme un prix Black Scholes $C_{BS}^T\left(t, F_t^T, T, \hat{\sigma}\right)$ avec :

- Des taux et des dividendes nuls

- Un spot égal à F_t^T
- Une volatilité de pricing de $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^T \sigma^2(u)\,du}$
- Le payoff g

Soit :

$$C_t^T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left(g(S_T)\,|\mathcal{F}_t\right)$$

Le prix spot de l'option est lui égal à

$$C_t = B(t,T)\,C_t^T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left(g(S_T)\,|\mathcal{F}_t\right)$$

13.1.2 Volatiltié du bonds a partir de celle du taux

En général, pour une vision intuitive, on considère non pas la volatilité de l'obligation mais son taux T forward. Si l'on considère ici que la volatilité du taux est constante (en fait cette volatilité a tendance à augmenter en $\frac{1}{\sqrt{T}}$ lorsque la maturité se rapproche). On a donc , en se souvenant de la définition de la duration $D(t)$du forward (le forward est un instrument à taux fixe dont on peut determinet les flux) :

$$dF_t^T \approx D(t)\,\sigma_r(t)\,dW_t$$

Donc si la duration du forward est environ égale à$T_n - T$ (en effet pour des ZC on a $F_t^T = e^{r^f(T-T_n)}$on a :

$$dF_t^T = (T_n - T)\,\sigma_r(t)\,dW_t$$

Enfin on a plus qu'à choisir son modèle pour les taux. Si l'on choisit un modèle où la volatilité des taux est constante on aura :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^T \sigma_r^2 du} = (T_n - T)\,\sigma_r$$

13.2 Caps, floors

13.2.1 Definition

Cap Un cap est un instrument qui fournit à son porteur la différence entre le taux Libor (ou Euribor) x mois et un taux de référence (le strike) si cette différence est positive. Si l'Euribor est en dessous du strike il ne touche rien. Ces flux sont payés à des dates $T_1, ..., T_n$ chacune espacée de x mois, durant une période totale de $T_n - T_0$ qui est la maturité du cap. Les paramètres d'un cap sont :

- Le strike K
- Le notionel N du cap
- Le taux considéré (Libor ou Euribor, en convention linéaire en général).
- La maturité du taux regardé, appellé tenor $\Delta T = T_{i+1} - T_i$. Par exemple un cap sur l'Euribor 3M est de ténor 3 mois. Les Euribors 3M constatés à la date T_i donnent un flux payé en T_{i+1} : $N\left(R_{T_i}(T_i, T_{i+1}) - K\right)_+$où r_{T_i} est l'Euribor 3M constaté en T_i.

– La maturité du cap, $T_n - T_0$ qui est un multiple du ténor (par exemple 5 ans).

Un cap est comparable à un swap qui ne procéderait à l'échange fixe vs variable uniquement quand celui ci avantage celui qui recoit la patte variable. Tout comme pour le swap, les flux des Euribors sont versés en fin de période (on verse dans trois mois l'Euribor 3M - Strike constaté aujourd'hui.

Il peut être aussi vu comme une série de calls sur l'Euribor x Mois.

L'achat d'un cap permet à celui qui emprunte à taux variable d'être sûr payer un taux d'intérêt inférieur à K jusqu'à la fin du cap (la date T_n). *Contrairement à un swap, qui fixe les taux pendant toute la période, le cap permet à l'emprunteur de profiter d'une éventuelle baisse des taux.*

Caplet Les flux d'un cap peuvent être décomposés en n caplets, qui correspondent à chaque flux versé à chaque date T_i. Chacun de ces caplets peuvent être vus comme un call sur taux d'intérêt :

$$g\left(r_{T_{i-1}}\right) = N\left(R_{T_i}\left(T_i, T_{i+1}\right) - K\right)_+$$

Pour pricer un cap on price en général individuellement chaque caplet, ce qui rend le problème plus simple.

Floor et floorlet Un loor est basé sur même principe qu'un cap, sauf qu'il verse la différence entre le taux de référence (strike) et le Libor (ou Euribor) si celle ci est positive. Si l'Euribor est au dessus du strike, il ne touche rien. Ces flux sont payés à des dates $T_1, ..., T_n$ chacune espacée de x mois, durant une période totale de $T_n - T_0$ qui est la maturité du floor. Si paramètres sont les mêmes que pour le cap. En revanche, flux payé à la date T_{i+1} est :

$$N\left(K - R_{T_i}\left(T_i, T_{i+1}\right)\right)_+$$

On peut, tout comme pour le cap, décomposer le floor en floorlets correspondant à chaque paiement.

Un floor est comparable à un swap qui ne procéderait à variable vs fixe uniquement quand celui ci avantage celui qui recoit la patte fixe. Tout comme pour le swap, les flux des Euribors sont versés en fin de période (on verse dans trois mois l'Euribor 3M - Strike constaté aujourd'hui.) Il peuut aussi être vu comme une série de Puts sur Euribor x mois.

L'achat d'un floor permet à celui qui prête à taux variable d'obtenir un taux dintérêt supérieur ou égal à K jusqu'à la fin du floor (la date T_n). *Contrairement à un swap, qui fixe les taux pendant toute la période, le floor permet au préteur de profiter d'une éventuelle hausse des taux.*

13.2.2 Valorisation

Parité Cap/Floor Tout comme la parité Call/Put il existe la parité Cap/Floor : L'achat d'un cap et la vente d'un floor de mêmes caractéristiques donne un swap de taux de taux fixe K (car $\left(R_{T_i}(T_i,T_{i+1})-K\right)_+ - \left(K-R_{T_i}(T_i,T_{i+1})\right)_+ = R_{T_i}(T_i,T_{i+1})-K$). On a donc :

$$\text{Valeur du cap} = \text{Valeur du floor} + \text{Valeur du swap}$$

De même l'achat d'un caplet et la vente d'un floorlet donne un FRA :

$$\text{Valeur du caplet} = \text{Valeur du floorlet} + \text{Valeur du FRA}$$

13.2.3 Pricing de Caplets/Floorlets

Pour couvrir le caplet et le floorlet, il convient de lier le taux $R(T_i,T_{i+1})$ (sur lequel porte le payoff payé en T_{i+1}) à des instruments de marché (Zero coupon). Comme nous l'avions vu aux chapitres précédents, pour avoir $R(T_i,T_{i+1})$ en T_{i+1} il faut avoir en T_i :

$$1-B(T_i,T_{i+1})$$

Soit, à une date précédente :

$$B(t,T_i)-B(t,T_{i+1})$$

Donc le prix T_{i+1} forward de $R(T_i,T_{i+1})$ payé en T_{i+1} est, en t

$$\begin{aligned} R_t^{T_{i+1}}(T_i,T_{i+1}) &= \frac{B(t,T_i)-B(t,T_{i+1})}{B(t,T_{i+1})} \\ &= \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}-1 \end{aligned}$$

Soit, à une constante près l'inverse du prix du zero coupon forward. On peut ensuite modéliser ce taux sous la probabilité $\mathbb{Q}_{T_{i+1}}$ forward, sous laquelle $R_t = R_t^{T_{i+1}}(T_i,T_{i+1})$ est une martingale :

$$\frac{dR_t}{R_t} = \sigma(t,R_t)\,dW_t^{T_{i+1}}$$

Si l'on suppose σ constant, on obtient un prix T_{i+1} forward du caplet (resp. floorlet) donné par une formule de Black Scholes de call (resp. put) pour un cap (resp. floor) :

- Avec taux et dividendes nuls
- Pour un prix initial d'actif risqué $R_t^{T_{i+1}}(T_i,T_{i+1}) = \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})}-1$
- Un strike K
- Une maturité T_i (car à partir de T_i le taux forward ne bouge plus car il a déjà été observé).

On obtient ainsi un prix de Caplet :

$$\begin{aligned} C_t^{T_{i+1}} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{i+1}}}\left(\left(R_{T_i}^{T_{i+1}}(T_i,T_{i+1})-K\right)_+ |\mathcal{F}_t\right) \\ &= C^{BS}\left(t,R_t^{T_{i+1}}(T_i,T_{i+1}),T_i,K\right) \end{aligned}$$

et le prix spot du caplet est juste son prix T_{i+1} forward discounté par le zero coupon de maturité T_{i+1} :

$$\begin{aligned} C_t &= B(t, T_{i+1}) C_t^{T_{i+1}} \\ &= B(t, T_{i+1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{i+1}}} \left(\left(R_{T_i}^{T_{i+1}}(T_i, T_{i+1}) - K \right)_+ |\mathcal{F}_t \right) \\ &= B(t, T_{i+1}) C^{BS} \left(t, R_t^{T_{i+1}}(T_i, T_{i+1}), T_i, K \right) \end{aligned}$$

13.3 Swaptions

13.3.1 Definition

Une swaption est une option permettant à son porteur de rentrer dans un swap de taux avec un taux fixe prédifini R_K (le strike), sur u notionel N, à une date T_0. Ce swap démarre en T_0 et effectuera à des échanges de paiements aux dates $T_1, ..., T_n$. Evidemment, l'investisseur rentrera dans le swap si le strike est plus avantageux que le taux swap au pair du marché à la date T_0. Il existe des swaptions où l'on rentre dans le swap en payant le taux fixe, d'autres où l'on rentre en payant le taux variable.

Il y a deux types de swaptions :

- Les swaptions payeuses du fixe. Si l'investisseur choisit d'exercer l'option en T_0, il recevra les flux $(T_i - T_{i-1}) \times (R_{variable} - R_K) N$ en T_i.
- Celles receveuse du fixe. Si l'investisseur choisit d'exercer l'option en T_0, il recevra les flux $(T_i - T_{i-1}) \times (R_K - R_{variable}) N$ en T_i.

  Evidemment, la la swaption a un prix positif lorsque $t < T_0$.

Si l'on note $S_{T_0}^K$ la valeur du swap de taux fixe R_K à la date d'exercice T_0(c'est à dire la valeur du swap dans lequel peut retrer l'investisseur), alors le payoff de la swaption en T_0 est $\left(S_{T_0}^K\right)_+$.

13.3.2 Valorisation

Supposons que la swaption soit de type payeuse du fixe. En T_0, le prix du swap dans lequel l'investisseur a l'option de rentrer a un valeur $S_{T_0}^K$ qui est la différence de prix des deux pattes :

- La valeur des flux de taux variable, égale à $[1 - B(T_0, T_n)] N$ (cf partie du cours sur les swaps)
- La veleur des flux fixes égale à $\left[\sum_{i=1}^n B(T_0, T_i)\right] R_K N$

On a donc la valeur du swap en T_0 :

$$S_{T_0}^K = \left[1 - B(T_0, T_n) - \left[\sum_{i=1}^n B(T_0, T_i) \right] R_K \right] N$$

On a donc

$$\frac{S_{T_0}^K}{\sum_{i=1}^n B(T_0, T_i)} = \left[\frac{1 - B(T_0, T_n)}{\sum_{i=1}^n B(T_0, T_i)} - R_K \right] N$$

On note $\tilde{R}_t = \frac{B(t,T_0)-B(t,T_n)}{\sum_{i=1}^n B(t,T_i)}$ le taux swap “forward”. On a alors :

$$\frac{S_{T_0}^K}{\sum_{i=1}^n B(T_0, T_i)} = \tilde{R}_{T_0} - R_K$$

D'après ce que l'on a ci dessus, le “bon” numéraire à utiliser est le numéraire “level” égal à $\sum_{i=1}^n B(t, T_i)$. On se place ainsi dans ce numéraire, et sous la proba $\mathbb{Q}^L$ sous laquelle les prix dans ce numéraire sont des martingales. On a donc le prix de la swaption :

$$C_t = \left[\sum_{i=1}^n B(t, T_i)\right] N \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^L}\left[\left(\tilde{R}_{T_0} - R_K\right)_+ |\mathcal{F}_t\right]$$

Sous $\mathbb{Q}^L$, $\tilde{R}_t$ est une martingale de dynamique :

$$\frac{d\tilde{R}_t}{\tilde{R}_t} = \sigma_t d\tilde{W}_t^{\mathbb{Q}^L}$$

Si l'on suppose que σ_t dépend uniquement du temps, l'expression $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^L}\left[\left(\tilde{R}_{T_0} - R_K\right)_+ |\mathcal{F}_t\right]$ est donnée par un formule de Black Scholes à taux et dividendes nuls, a maturité $T_0 - t$, a strike R_K et avec une volatilité $\sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_u^2 du}$

13.4 Modèles de courbe de taux

14 Options Quanto