

Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers

Huyên PHAM

Université Paris 7

Laboratoire de Probabilités et
Modèles Aléatoires, CNRS UMR 7599
pham@math.jussieu.fr

Version : 2006-2007.

Table des matières

Préface	4
1 Introduction	5
1.1 Le problème des produits dérivés en finance	5
1.1.1 Les contrats à terme	6
1.1.2 Les options	6
1.2 Arbitrage statique	9
1.2.1 Unicité du prix d'instruments financiers à flux identiques	10
1.2.2 Prix à terme	10
1.2.3 Parité call-put	10
1.3 Modèles stochastiques	11
1.4 Exercices	11
1.4.1 Opérations sur les options	11
1.4.2 Relations d'arbitrage sur le call	15
2 Modélisation des marchés financiers en temps continu. Arbitrage, valorisation et couverture d'options	17
2.1 Modèle en temps continu	18
2.2 Portefeuille autofinçant	20
2.3 Arbitrage et probabilité risque-neutre	22
2.4 Evaluation et couverture par arbitrage	26
2.5 Exercices	29
2.5.1 Moments et densité du prix du sous-jacent dans le modèle de Black-Scholes	29
2.5.2 Modèle de Black-Scholes multidimensionnel	30
2.5.3 Existence d'une prime de risque et d'une probabilité risque-neutre dans un modèle BS multidimensionnel	31
2.5.4 Parité call-put par évaluation risque-neutre	35
2.5.5 Evaluation risque-neutre du prix à terme	36

3	Formule et propriétés de Black-Scholes	37
3.1	La formule d'évaluation et couverture	37
3.1.1	L'EDP d'évaluation	37
3.1.2	Valorisation risque-neutre	39
3.2	Formules fermées de Black and Scholes	43
3.2.1	La formule	43
3.2.2	Propriétés du prix des calls	44
3.2.3	Implémentation de la formule	45
3.3	Sensibilité et grecques	46
3.4	Volatilité	47
3.4.1	La volatilité historique	47
3.4.2	La volatilité implicite	48
3.5	Autres types d'options	49
3.5.1	Options américaines	49
3.5.2	Options exotiques	51
3.6	Exercices	53
3.6.1	Convexité du prix	53
3.6.2	Coefficients déterministes dans BS	54
3.6.3	Limite de BS quand σ tend vers 0 et $+\infty$	54
3.6.4	Formule du Put	56
3.6.5	Option à choix	56
3.6.6	Options futures : formule de Black	58
3.6.7	Option puissance	59
3.6.8	Option digitale	60
3.6.9	Options composées	61
3.6.10	Calcul et graphes des grecques	64
3.6.11	Volatilité de l'option	65
3.6.12	Volatilité implicite et robustesse de BS	66
4	Valorisation d'options européennes sur multi sous-jacents	68
4.1	Changement de numéraire	68
4.2	Options d'échange	72
4.3	Options quanto	73
4.4	Exercices	75
4.4.1	Formule de Merton généralisée	75
4.4.2	Formule de Garman-Kolhagen	77
4.4.3	Call géométrique	78
4.4.4	EDP de Black-Scholes sur deux actifs	79
4.4.5	Option basket	81

5	Modèles de taux d'intérêt	84
5.1	Principes de la modélisation	84
5.1.1	Généralités sur les taux d'intérêts	84
5.1.2	Absence d'arbitrage et modélisation de taux	85
5.2	Modèles classiques de taux spot	86
5.2.1	L'EDP des taux	87
5.2.2	Modèle de Vasicek	88
5.2.3	Modèle de Cox-Ingersoll-Ross	90
5.2.4	Extensions	92
5.3	Modèles de déformation de la courbe des taux	92
5.3.1	Le modèle de Heath-Jarrow-Morton	93
5.3.2	Fonction de volatilité déterministe : HJM gaussien	95
5.4	Valorisation de produits dérivés sur taux d'intérêt	96
5.4.1	Les instruments de couverture	96
5.4.2	Méthode d'évaluation forward	97
5.4.3	Exemples	99
5.5	Exercices	102
5.5.1	Taux forward	102
5.5.2	Formule de Vasicek par EDP	103
5.5.3	Moyenne et variance dans le modèle CIR	105
5.5.4	Volatilité exponentielle dans HJM gaussien	106
5.5.5	Option sur obligations à coupons	108
5.5.6	Formules de prix pour les caplets	110
	Bibliographie	114

Préface

Le but de ce cours est de fournir une introduction aux méthodes mathématiques utilisées dans la modélisation en temps continu des marchés financiers. On s'intéressera plus particulièrement aux problèmes de couverture et de valorisation d'options. L'objectif n'est pas de fournir un exposé complet de la théorie mais plutôt d'insister sur les idées et techniques majeures. Les prérequis pour ce cours sont des connaissances basiques en calcul stochastique qui fournit les outils mathématiques adéquats à la description des aléas financiers et des méthodes de calcul de prix d'actifs dérivés. Des exercices corrigés illustrent les résultats du cours.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le problème des produits dérivés en finance

Depuis une trentaine d'années, nous assistons à une révolution de grande ampleur sur les marchés financiers. Cette activité financière se développe à travers de nombreux instruments tels que la circulation de monnaie exprimée dans différentes devises, des opérations de prêts et d'emprunts et bien sûr des actions émises par les entreprises qui reflètent leur capitalisation. Des indices ont été créés (SP500, CAC 40 ...) permettant aux investisseurs étrangers d'avoir une information rapide sur le comportement des actions d'un pays. La grande variabilité et même parfois l'instabilité de ces paramètres (taux d'intérêt, taux de change ...) ou de ces titres a conduit naturellement à une demande de transferts des risques de la part de certains intervenants du marché. Les banques ont donc proposé et créé un certain nombre de nouveaux produits financiers, appelés *produits dérivés*, pour répondre à cette demande. Ces produits financiers sont négociés basiquement selon deux manières : dans des marchés organisés ou des marchés de gré à gré. Les marchés organisés sont soumis à des réglementations précises et ont un certain degré de standardisation (voire rigidité) sur les instruments proposés. Ils garantissent une grande lisibilité des prix affichés et une liquidité sur les titres négociés. Ils peuvent être perçus comme les supermarchés de la finance. A côté de ces marchés, il existe un marché de gré à gré où de grand nombre de produits financiers sont négociés directement entre l'acheteur et le vendeur, via les coups de téléphone et les ordinateurs, sans la garantie d'un marché. Les prix de tels produits financiers ne sont pas affichés sur les écrans Reuters et peuvent varier d'une banque à l'autre.

Un produit dérivé est un instrument financier qui s'achète ou se vend et dont la valeur dérive (est fonction) de celles d'autres actifs financiers de base. Ces actifs sont appelés actifs sous-jacents ou support du produit dérivé.

Les actifs sous-jacents classiques sont négociés dans différents marchés :

- marchés des actions

- marché des changes : achat/vente de devises
- marché des matières premières : pétrole, métaux ...
- marché de l'énergie : électricité, gaz ...
- marché des taux d'intérêt

Ces produits dérivés permettent de se protéger contre un risque déterminé : baisse du cours des actions, risque de taux d'intérêt ... Les produits dérivés les plus couramment négociés sont les *contrats à terme* et les *options*. Dans ce cours, on se focalisera principalement sur le problème des options qui a été le moteur de la théorie et illustre remarquablement les applications des mathématiques à la finance.

1.1.1 Les contrats à terme

Un contrat à terme (*forward* dans la terminologie anglo-saxonne) est un contrat entre deux parties (l'acheteur et le vendeur) pour une opération différée dans le temps : elles se mettent d'accord pour l'achat ou la vente d'un actif à une certaine date future (échéance) et à un prix fixé à l'avance. L'intérêt des contrats à terme pour les intervenants est de figer des cours dans le futur : il s'agit dans ce cas d'une opération de couverture.

Exemple : Un industriel français sait qu'il doit recevoir en dollars une forte somme d'argent dans six mois. Pour se couvrir contre une baisse du dollar, il achète un contrat à terme, d'échéance six mois sur le dollar, en euros. Notons que cette opération de couverture du risque de change peut lui être défavorable si dans six mois, le contrat coûte moins que le taux de change.

Un contrat à terme peut aussi être mis en place à des fins de spéculation lorsque l'opérateur anticipe (contre le marché) un certain type de mouvement et achète ou vend un contrat en espérant réaliser un gain. En France, il existe un marché organisé, le MATIF ou Marché à Terme International de France, créée en 1986, dans lequel sont négociés les contrats à terme.

1.1.2 Les options

Une option standard est un contrat donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif à ou jusqu'à une date (échéance ou maturité) fixée et à un prix convenu à l'avance. Le détenteur ou acheteur de ce contrat d'option est dit être en position *longue* alors que sa contrepartie, l'émetteur ou vendeur du contrat, est en position *courte*. Le MONEP ou Marché des Options Négociables de Paris, créée en 1987, est un marché organisé d'options très actif.

Les options *européennes* sont les options qui peuvent être exercées seulement le jour de l'échéance, et les options américaines sont celles pouvant être exercées à tout instant avant leur échéance.

Les options standard traitées sont des options d'achat (*call* dans la terminologie anglo-saxonne) ou options de vente (*put*) selon qu'il donne le droit à leur détenteur d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent (action, obligation, devise ...).

Les paramètres d'une option standard (*vanille* en anglais) sont donc :

- l'échéance ou maturité de l'option qui limite sa durée d'exercice. Dans les marchés organisés, trois échéances sont cotées simultanément : 3, 6 et 9 mois. Toutefois, pour le CAC 40, l'échéance est mensuelle.

- le prix d'exercice (*strike* dans la terminologie anglo-saxonne) est le prix fixé à l'avance auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option. Trois prix d'exercice au minimum sont cotés sur chaque action et pour chacune des trois échéances. Ces prix d'exercice sont fixés en général à des cours proches de celui de l'action. On dit que l'option est *à la monnaie* si le cours de l'action est égal (ou très proche) du prix d'exercice. L'option *call* est *dans la monnaie* si le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice et *en dehors de la monnaie* s'il est inférieur. Pour le *put*, la terminologie est inversée.

- la *prime* est le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option. Pour un contrat portant typiquement sur 100 actions support sur les marchés organisés, l'acheteur doit payer 100 fois la prime. Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. Et même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché.

Exemple : option (*call*) de change sur un dollar dans 6 mois pour K euros. Si le dollar monte, on exerce l'option et on achète le dollar à K euros. Si le dollar baisse, on n'exerce pas l'option et on achète au prix du dollar. La prime est perdue.

Les options offrent aussi un fort effet de levier comme l'illustre l'exemple suivant.

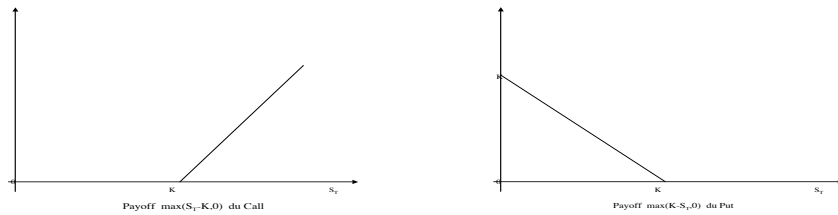
Exemple : Considérons un investisseur qui anticipe une hausse du cours d'une action valant aujourd'hui 98 euros. Il pourrait acheter l'action immédiatement mais l'achat d'un *call* de 6 mois sur ce titre peut lui permettre de réaliser un fort effet de levier. Prenons le cas d'un prix d'exercice du *call* de 100 et une prime de 4,8. Supposons qu'au bout de 6 mois, le cours vaut 107. Si l'investisseur avait acheté le sous-jacent, il va obtenir un gain relatif de $\frac{107-98}{98} = 9,2\%$, alors qu'en achetant le *call*, il obtiendra un gain relatif de $\frac{107-100-4,8}{4,8} = 45,8\%$. Si par contre, le cours vaut 100 au bout de six mois, l'investissement dans le sous-jacent rapporte un gain relatif de $\frac{100-98}{98} = 2,4\%$ alors que l'achat du *call* entraîne $\frac{100-100-4,8}{4,8} = -100\%$ de gain : l'option est plus risquée mais la perte est limitée à la prime.

La problématique majeure que nous rencontrons pour les options est le calcul de la prime. Pour formaliser les idées, considérons le cas d'un *call* européen sur une action dont le cours à la date t est S_t , de maturité T et de prix d'exercice K . Si à l'échéance

T , le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice, i.e. $S_T > K$, le détenteur de l'option va exercer son droit puisqu'il lui permet de réaliser un profit égal à $S_T - K$ correspondant à l'achat au coût K de l'action valant S_T . Par contre, si $S_T \leq K$, il est clair que le détenteur du call n'a pas intérêt à exercer son droit. La valeur intrinsèque à la maturité de l'option (on dit aussi flux ou *payoff* terminal dans la terminologie anglo-saxonne) du call est donc égale à :

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0).$$

De manière similaire, on voit que le flux terminal du put européen est égal à $(K - S_T)_+$.



D'autre part, pour le vendeur de l'option, il s'agit en cas d'exercice, par exemple du call, i.e. $S_T > K$, d'être en mesure de fournir une action au prix K et par conséquent de pouvoir produire à la maturité une richesse égale à $(S_T - K)_+$. Au moment de l'émission du contrat, le cours S_T est inconnu dans un monde aléatoire et deux questions cruciales se posent :

1. Quelle est la *prime* de l'option, c'est à dire le prix du contrat payé par l'acheteur au vendeur de l'option ? Autrement dit comment évaluer à la date de signature du contrat, prise comme origine des temps $t = 0$, une valeur $(S_T - K)_+$ (dans le cas du call) à la maturité $T > 0$? C'est le problème de la valorisation (*pricing*).

2. Comment le vendeur de l'option, qui touche la prime à $t = 0$, peut-il produire une richesse $(S_T - K)_+$ (dans le cas du call) à la date T ? C'est le problème de la couverture (*hedging*).

La réponse à ces deux questions qui sont intimement liées, repose bien entendu sur un minimum d'hypothèses que l'on doit faire : une hypothèse de modélisation des marchés et en particulier du cours des actifs financiers et une hypothèse de non arbitrage qui dit essentiellement qu'il n'est pas possible de faire des profits sans prendre des risques. Nous reviendrons dans ce cours sur cette notion d'arbitrage qui est à la base des méthodes de valorisation et couverture d'options. Initiées à l'origine dans

le cadre du modèle de Black-Scholes pour les options vanilles, ces méthodes se sont largement développées, parallèlement à l'essor considérable des marchés financiers, à des modèles plus réalistes et à des options de plus en plus complexes n'ayant de limite que l'imagination des professionnels. Parmi ces options, dites exotiques, nous citons :

- les *options quantos* : ce sont des call ou des put écrits sur des titres d'un marché étranger mais payées en monnaie domestique.

- les *options digitales* : un call digital est une option qui paye un nominal connu à son détenteur si le cours de l'actif sous-jacent à la maturité dépasse un prix d'exercice fixé et rien sinon. Un put digital a les mêmes caractéristiques mais le nominal est payé si le cours est inférieur au prix d'exercice. C'est un produit très spéculatif au voisinage de l'échéance car il est du type tout ou rien.

- les *options asiatiques* : ce sont des options dont le sous-jacent est la moyenne des cours sur une période donnée. Elles ont été introduites pour lutter contre la manipulation des cours au voisinage de la maturité.

- les *options lookback* : ce sont des options dont le sous-jacent est le minimum ou maximum du cours sur une période donnée. En général, la valeur intrinsèque est la différence entre la valeur du cours et la valeur du minimum ou du maximum.

Ces deux derniers types d'options font partie des options dites *path-dependent* car elles dépendent de toute l'évolution du cours du sous-jacent et pas seulement de son cours à la maturité.

- les *options barrières* : ce sont des options qui autorisent l'exercice seulement si le cours de l'actif sous-jacent a franchi un seuil fixé dans le contrat, appelé barrière.

1.2 Arbitrage statique

La notion d'arbitrage est la base de la théorie et couverture d'options. Cette notion économique qui signifie essentiellement qu'on ne peut gagner de l'argent sûrement sans prendre de risques sera formalisée mathématiquement au chapitre suivant. Dans ce paragraphe, nous présentons la notion basique d'arbitrage statique. Sur les marchés financiers, il existe des *arbitragistes* dont l'activité est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte tenu des autres prix de marché et d'en tirer parti pour faire des profits sans risque. Leur intervention est *statique* au sens où ils prennent seulement des positions aujourd'hui, qu'ils liquideront sans les renégocier à une date future. Ils contraignent les prix à vérifier certaines relations, comme nous le montrons sur les quelques exemples suivants. Nous supposons aussi que les marchés sont sans frictions, i.e. il n'y a pas de coûts de transactions ni de contraintes sur les ventes à découvert. Nous supposons aussi l'existence sur le marché de zéro-coupons. Un zéro-coupon de maturité T est un produit financier qui assure un nominal fixe en T . Nous notons par $B(t, T)$ son prix à la date $t \leq T$ pour un nominal

de 1 euro. Notons qu'il est strictement positif par absence d'arbitrage. Par exemple s'il est possible d'emprunter et de placer de l'argent à un taux constant r , on a $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$.

1.2.1 Unicité du prix d'instruments financiers à flux identiques

Considérons deux instruments financiers X et Y versant le même flux $X_T = Y_T$ à l'échéance T . Alors, ces deux instruments ont la même valeur à toute date intermédiaire.

Corrigé. Notons par X_t et Y_t la valeur de ces instruments à la date $t < T$ et supposons par l'absurde que $Y_t > X_t$. Alors en achetant en t l'instrument X , en vendant l'instrument Y et en investissant le reste $(Y_t - X_t)$ dans un zéro-coupon de maturité T , nous constituons un portefeuille de valeur initiale nulle en t . Mais à l'horizon T , ce portefeuille garantit un flux $X_T - Y_T + (Y_t - X_t)/B(t, T) = (Y_t - X_t)/B(t, T) > 0$. C'est donc une opportunité d'arbitrage.

Corrigé. Remarque Par le même raisonnement, on voit que si le flux de l'instrument X est toujours inférieur à celui de l'instrument Y , alors son prix est aussi inférieur à toute date intermédiaire.

1.2.2 Prix à terme

Soit un contrat à terme sur un titre S . Notons par $F^S(t, T)$ le prix fixé à la date t auquel sera négocié le titre S en T : c'est le prix à terme ou le prix forward de S en T . Notons que l'acheteur du contrat a l'obligation (et non le droit comme pour une option d'achat) d'acheter le titre au prix $F^S(t, T)$ convenu à l'avance.

Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix forward au prix du titre sous-jacent, on dit aussi prix *spot*, S . Il y a en effet deux stratégies possibles pour obtenir le titre S en T :

- la première consiste à acheter le titre en t , au prix S_t , et le garder jusqu'en T .
- la deuxième consiste à acheter le contrat forward en t , ce qui garantit de recevoir le titre S en payant $F^S(t, T)$ en T . Pour pouvoir payer cette somme en T , il suffit d'acheter $F^S(t, T)$ zéro-coupons de maturité T , ce qui coûte en t : $F^S(t, T)B(t, T)$.

Par absence d'arbitrage, on a donc :

$$F^S(t, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}.$$

1.2.3 Parité call-put

Notons par C_t et P_t les prix respectifs en t du call et du put européen de strike K et de maturité T sur un sous-jacent S . En achetant le call et en vendant le put en t , au prix $C_t - P_t$, on est garanti d'obtenir à l'échéance le flux $(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+$

$= S_T - K$. D'autre part, ce flux en T peut aussi être obtenu en achetant le titre S et en vendant K zéro-coupons en t , au prix $S_t - KB(t, T)$.

L'absence d'arbitrage montre donc la relation dite de parité call-put :

$$C_t - P_t = S_t - KB(t, T).$$

1.3 Modèles stochastiques

Pour calculer le prix d'un produit dérivé, nous avons besoin d'un modèle stochastique pour décrire l'évolution incertaine du ou des titres sous-jacents. Un modèle stochastique doit refléter les observations de l'historique des prix aussi bien que possible d'un point de vue statistique. Parallèlement, le modèle stochastique doit s'intégrer dans un cadre mathématique qui permet une analyse efficace des prix d'options. Un "bon" modèle doit donc capturer à la fois les propriétés statistiques de la dynamique des prix et s'intégrer efficacement dans la théorie de l'analyse stochastique. Le célèbre modèle de Black-Scholes est un compromis entre ces deux exigences et donne dans de nombreux cas des formules explicites de prix d'options. Dans ce cours d'introduction aux mathématiques financières, nous étudierons principalement ce modèle. Au paragraphe précédent, nous avons vu (voir aussi en exercices) comment des raisonnements d'arbitrage statiques permettent d'obtenir simplement certaines relations sur les prix d'options. Mais a priori, il n'y a pas de raison de se restreindre à des stratégies statiques : le gestionnaire sait qu'il pourra renégocier à l'avenir son portefeuille et pratique donc une gestion dynamique. Ces caractéristiques seront décrites au chapitre suivant grâce à la théorie de l'intégrale stochastique qui formalise mathématiquement le concept de portefeuille autofinçant de couverture.

Il y a eu ces dernières années un engouement important pour développer des modèles plus généraux que le modèle de Black-Scholes afin de mieux "coller" aux observations historiques des prix. Ce sont des modèles dits à volatilité stochastique, avec sauts ... Quel que soit le modèle utilisé, il faut ensuite déterminer les paramètres en jeu du modèle à partir de l'observation des prix sous-jacents et même des prix d'options cotés : c'est le problème de l'estimation et de la calibration des modèles. Bien entendu, plus le modèle ou l'option est complexe, plus il est difficile d'obtenir des formules de prix d'options explicites. On a alors recours à des méthodes numériques pour calculer ces prix.

1.4 Exercices

1.4.1 Opérations sur les options

Call couvert

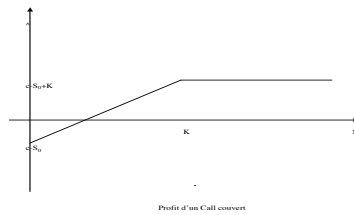
Un call couvert est une stratégie de portefeuille consistant en l'émission (vente ou position courte) d'un call et la détention (achat ou position longue) d'une unité du sous-jacent.

QUEL EST L'INTÉRÊT DU CALL COUVERT ? Cette stratégie permet pour l'émetteur du call de se couvrir contre une hausse du cours du sous-jacent car il pourra toujours délivrer à la maturité le titre sous-jacent à l'acheteur du call.

CALCULER ET REPRÉSENTER LE PROFIT NET D'UNE STRATÉGIE CALL COUVERT. Notons par S le titre sous-jacent, K le strike, T la maturité et c la prime du call. Le payoff d'un call couvert est égal à $S_T - (S_T - K)_+$ et le profit net associé est donc :

$$S_T - (S_T - K)_+ - (S_0 - c) = \begin{cases} c - S_0 + K & \text{si } S_T \geq K \\ c - S_0 + S_T & \text{si } S_T < K. \end{cases}$$

On observe ainsi que si $S_T \geq K$, le profit net reste constant alors que si $S_T < K$, il croît linéairement avec S_T , voir figure ?



Put protectif

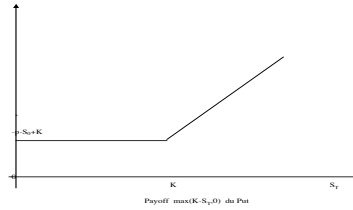
Un put protectif est une stratégie de portefeuille consistant en une position longue dans un put et dans le sous-jacent.

QUEL EST L'INTÉRÊT DU PUT PROTECTIF ? Cet instrument financier protège contre une baisse du cours du sous-jacent : si celui-ci décroît, la valeur du put augmente.

CALCULER ET REPRÉSENTER LE PROFIT NET D'UN PUT PROTECTIF. Notons par S le titre sous-jacent, K le strike, T la maturité et p la prime du put. Le payoff d'un put protectif est égal à $S_T + (K - S_T)_+$ et le profit net associé est donc :

$$S_T + (K - S_T)_+ - (S_0 + p) = \begin{cases} -p - S_0 + S_T & \text{si } S_T \geq K \\ -p - S_0 + K & \text{si } S_T < K. \end{cases}$$

On observe ainsi que si $S_T < K$, le profit net reste constant alors que si $S_T \geq K$, il croît linéairement avec S_T .

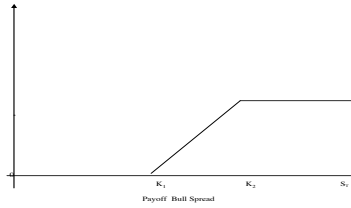


Spread

Un spread est une combinaison de deux ou plusieurs options de même type (call ou put) avec certaines en position longue et d'autres en position courte. Les deux stratégies de spread les plus courantes sont le spread *vertical* et le spread *horizontal*. Dans un spread vertical, une option est achetée, l'autre vendue, les deux sur le même sous-jacent à la même maturité mais à des strikes différents. Parmi les spreads verticaux, on distingue les *bull* spread et les *bear* spread. Un bull spread (resp. bear) spread fait référence à un flux de profit qui bénéficie d'une hausse (resp. baisse) du sous-jacent. Par exemple, un bull spread peut être formé avec l'achat d'un call de strike K_1 , de prime c_1 , et la vente d'un call de strike $K_2 > K_1$, de prime $c_2 < c_1$. Ceci requiert un coût initial positif $c_1 - c_2$ mais moindre par rapport à un call simple et donne à la maturité commune T un payoff :

$$(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & \text{si } K_1 < S_T < K_2 \\ K_2 - K_1 & \text{si } S_T \geq K_2 \end{cases}$$

On observe donc qu'un bull spread coûte moins cher qu'un call simple mais fournit un potentiel de profit moins important, en fait intéressant au voisinage des strikes.



De manière similaire, un bear spread peut être formé par l'achat d'un call de strike K_1 et la vente d'un call de strike $K_2 < K_1$. Le diagramme de profit est inversée par rapport à celui du bear spread ci-dessus.

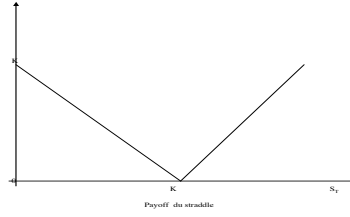
Dans un spread horizontal, une option est achetée, l'autre vendue, les deux sur le même sous-jacent au même prix d'exercice mais à des maturités différentes. Le diagramme de profit est plus complexe que pour les spread verticaux car on doit connaître le prix de l'option restant en vie.

Straddle

Un straddle est une combinaison de deux ou plusieurs options de type différents sur le même sous-jacent S . Un exemple populaire est le *bottom straddle* qui consiste en l'achat d'un call et d'un put de même strike K et même maturité T . Le payoff d'un bottom straddle est donc égal à :

$$(S_T - K)_+ + (K - S_T)_+ = \begin{cases} K - S_T & \text{si } S_T \leq K \\ S_T - K & \text{si } S_T > K. \end{cases}$$

L'intérêt d'un bottom straddle est de fournir un profit lorsque le prix du titre à l'échéance est loin du strike et de limiter la perte, due au coût d'achat des options, lorsque le prix du titre est proche du strike.



Un *top straddle* est simplement l'inverse d'un bottom straddle et est obtenue par la vente d'un call et d'un put de même strike et de même maturité. Il génère des profits lorsque le prix du titre à l'échéance est proche du strike mais peut causer de grandes pertes lorsque le prix s'éloigne du strike.

1.4.2 Relations d'arbitrage sur le call

Nous montrons comment déduire à partir de raisonnements d'arbitrage statiques des bornes sur les call européens (le cas des puts est traitée de manière similaire). On note par $C(S_0, K, T)$ le prix aujourd'hui en $t = 0$, d'un call européen sur un sous-jacent S de maturité T et de strike K .

Bornes intrinsèques

On a les bornes suivantes :

$$(S_0 - KB(0, T))_+ \leq C(S_0, K, T) \leq S_0. \quad (1.1)$$

PREUVE. Pour simplifier les notations, on écrit $C = C(S_0, K, T)$. La borne supérieure $C \leq S_0$ est claire car le payoff du call $(S_T - K)_+$ est inférieure au payoff du sous-jacent S_T en T . Le payoff du call étant positif, il est aussi immédiat que $C \geq 0$. Il reste donc à montrer $C \geq S_0 - KB(0, T)$. On raisonne par l'absurde en supposant $C < S_0 - KB(0, T)$. Considérons alors le portefeuille constitué d'une position longue dans le call, courte dans le titre et d'un achat de K zéro-coupons de maturité T . La valeur initiale de ce portefeuille est donc $C - S_0 + KB(0, T) < 0$. De plus, ce portefeuille garantit un flux terminal $(S_T - K)_+ - S_T + K$ qui est toujours positif. C'est donc une opportunité d'arbitrage.

Prix du call en fonction du strike

On a la relation suivante :

$$C(S_0, K_2, T) \leq C(S_0, K_1, T) \quad \text{si } K_1 \leq K_2$$

Ceci est immédiat car le payoff d'un call est décroissant avec le strike.

On a aussi la propriété de convexité :

$$C(S_0, \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2, T) \leq \lambda C(S_0, K_1, T) + (1 - \lambda)C(S_0, K_2, T),$$

si $K_1 \leq K_2$ et $0 \leq \lambda \leq 1$.

PREUVE. On note $K = \lambda K_1 + (1 - \lambda)K_2$ et pour simplifier $C_i = C(S_0, K_i, T)$, $i = 1, 2$, $C = C(S_0, K, T)$. On raisonne par l'absurde en supposant $C > \lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2$. Considérons alors la stratégie de portefeuille consistant en l'achat de λ unités de call de strike K_1 et $(1 - \lambda)$ de call de strike K_2 et la vente du call de strike K . Ce portefeuille a pour valeur initiale $\lambda C_1 + (1 - \lambda)C_2 - C < 0$. De plus, il garantit un flux terminal

$$\begin{aligned} & \lambda(S_T - K_1)_+ + (1 - \lambda)(S_T - K_2)_+ - (S_T - K)_+ \\ = & \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq K_1 \\ \lambda(S_T - K_1) & \text{si } K_1 < S_T \leq K \\ (1 - \lambda)(K_2 - S_T) & \text{si } K < S_T \leq K_2 \\ 0 & \text{si } S_T > K_2. \end{cases} \end{aligned}$$

qui est toujours positif ou nul. C'est donc une opportunité d'arbitrage.

Chapitre 2

Modélisation des marchés financiers en temps continu. Arbitrage, valorisation et couverture d'options

Ce chapitre introduit les principes fondamentaux de modèles de marchés financiers en temps continu dont le modèle de Black-Scholes est une référence standard. Les modèles en temps continu sont des modèles où les agents sont autorisés à négocier continûment sur le marché et où l'on doit donc modéliser l'évolution des prix des actifs comme des processus en temps continu. Comme les investissements sur les marchés sont exécutés sur des intervalles de temps très courts (relativement à l'horizon d'investissement), ces modèles sont une approximation raisonnable des marchés réels. Très souvent, l'unité de temps est l'année et les observations et investissements ont lieu tous les jours : l'intervalle de temps entre deux prix est donc $1/360$, avec la convention qu'il y a en moyenne 360 jours négociables dans l'année. Cette approximation est aussi largement utilisée dans la finance moderne pour des raisons mathématiques. Même si les modèles en temps continu requièrent des outils mathématiques plus sophistiqués que pour le temps discret, ils permettent des formules explicites grâce au calcul différentiel stochastique.

On fait les hypothèses idéalisées sur les marchés financiers : il n'y a pas de frictions de marchés, i.e. pas de coûts de transaction pour la vente et l'achat de titres, pas de restrictions sur les ventes à découvert, les actifs sont indéfiniment fractionnables et à tout instant il existe des acheteurs et des vendeurs pour tous les titres du marché.

2.1 Modèle en temps continu

Espace de probabilité de référence

L'incertitude sur les marchés financiers est modélisée par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ où

- Ω représente tous les états du monde
- la tribu \mathcal{F} représente la structure d'information globale disponible sur le marché
- (\mathcal{F}_t) est une filtration croissante décrivant l'information disponible aux agents du marché à la date t , $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Dans le cas où l'horizon T des investisseurs sur le marché est fini, on suppose usuellement $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. La propriété de croissance $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, si $s \leq t$, traduit le fait que le marché n'oublie rien et donc qu'on dispose de plus en plus d'informations au fur et à mesure du temps.
- une probabilité \mathbb{P} qui donne les probabilités à priori des événements considérés. C'est la probabilité historique ou objective. Comme nous le verrons par la suite, pour les problèmes de pricing en finance qui nous intéressent, l'identification exacte de \mathbb{P} n'est pas un objectif majeur et c'est une caractéristique principale des modèles en finance.

Nous distinguons les titres de base, actions, obligations, ... qui sont les éléments constitutifs des portefeuilles et les produits dérivés, options, contrats à terme qui font l'objet du problème de la valorisation et couverture.

Les titres de base

Il y a $d + 1$ actifs de base sur le marché, notés S^0, S^1, \dots, S^d , pouvant être négociés à toute date $t \geq 0$. $S_t^i(\omega)$ est le prix de l'actif i à la date t dans l'état du monde $\omega \in \Omega$. Dans ce cours, on supposera que les processus de prix $(S_t^i)_{t \geq 0}$ sont continus en temps, i.e. pour presque tout ω , l'application $t \rightarrow S_t^i(\omega)$ est continue. On note $X = (S^0, S^1, \dots, S^d)$ le processus de prix des $d + 1$ actifs.

L'actif S^0 est le *cash*, i.e. le produit financier qui décrit la valeur de 1 euro capitalisé au jour le jour à la banque. Il est considéré comme sans risque car son rendement dans un intervalle de temps $[t, t + dt]$ est connu à la date t de l'opération. On note r le taux d'intérêt par unité de temps, supposé constant, pour un placement entre t et $t + dt$ à la banque. L'évolution de l'actif cash S^0 est donc :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0 = 1. \quad (2.1)$$

Autrement dit, 1 euro capitalisé dans la banque rapporte :

$$S_t^0 = e^{rt}$$

euros à la date t .

Les actifs $S = (S^1, \dots, S^d)$ représentent usuellement les prix des actifs risqués comme les actions, obligations ... Notre modélisation de référence sera donnée par le célèbre modèle de Black-Scholes-Merton pour $d = 1$ actif risqué :

$$dS_t = S_t(bdt + \sigma dW_t), \quad (2.2)$$

où W est un mouvement Brownien par rapport à \mathbb{F} sa filtration, et b, σ sont des constantes. Ce modèle a été introduit par Black, Scholes et Merton en 1973 (Merton et Scholes ont reçu le prix Nobel en 1997 pour ces travaux ; Black est décédé avant). Il y a en fait une formule explicite pour le prix donné par :

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma W_t + \left(b - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right). \quad (2.3)$$

Cette formule s'obtient de deux méthodes : La première en appliquant la formule d'Itô à $S_t = f(t, W_t)$ où f est la fonction C^2 écrite ci-dessus ; on voit alors que $f(t, W_t)$ satisfait l'EDS (2.2) et on conclut par unicité de l'EDS à coefficients Lipschitziens. La deuxième méthode consiste à appliquer la formule d'Itô à $Y_t = \ln S_t$ sur $]0, \tau[$ où $\tau = \inf\{t \geq 0 : S_t = 0\}$ et remarquer ensuite que $S_t > 0$, i.e. $\tau = \infty$. Notons que la filtration engendrée par W et S est identique car on a une relation de correspondance entre S et W : $S_t = f(W_t)$ et $W_t = f^{-1}(S_t)$.

La distribution de S_t est appelée log-normale de paramètres b et σ^2 car le logarithme de S_t est normalement distribuée et on a :

- les rendements $\ln S_t - \ln S_s$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s)$ et de variance $\sigma^2(t - s)$.
- pour tous $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$, les accroissements relatifs $\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}, \dots, \frac{S_{t_n}}{S_{t_{n-1}}}$ sont indépendants et de même loi.

On dit aussi que le processus de prix S suit un mouvement Brownien géométrique. L'interprétation de b et σ est la suivante en utilisant les propriétés de l'intégrale d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} \right] &= bt \\ \text{Var} \left[\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} \right] &= \sigma^2 t. \end{aligned}$$

En voyant dS_t/S_t comme le rendement relatif de l'actif sur une courte période de temps, on interprète b comme le rendement relatif espéré par unité de temps : il mesure la tendance du marché et est souvent comparé au taux sans risque r . La constante σ mesure l'aléa de l'actif risqué et est appelée volatilité. On se reportera au paragraphe 3.4 pour le problème de l'estimation des paramètres b et σ (voir aussi le cours d'économétrie de la finance). Le modèle de Black-Scholes est une simplification idéalisée des cours réels et est assez intuitif pour les praticiens du marché pour être utilisé et adapté si besoin. Sa force, et en même temps sa faiblesse est qu'il ne requiert qu'un petit nombre de paramètres : en fait, seulement le paramètre de volatilité pour le problème de pricing.

Un modèle multidimensionnel de Black-Scholes avec d actifs et un mouvement

Brownien multidimensionnel est donnée par la dynamique :

$$dS_t^i = S_t^i \left(b^i dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} dW_t^j \right) \quad (2.4)$$

où W^1, \dots, W^n sont n mouvement Browniens indépendants. On dit aussi que $W = (W^1, \dots, W^n)$ est un n -mouvement Brownien. Le vecteur b dans \mathbb{R}^d de composantes b^i est le vecteur des taux de rendements des actifs risqués de base, et la matrice σ de dimension $d \times n$ de terme général σ^{ij} est la matrice des volatilités des actifs. Le système (2.4) est appelé aussi mouvement Brownien géométrique multidimensionnel. Plus généralement, on peut considérer des modèles où les coefficients b et σ sont déterministes : $b = b(t)$, $\sigma = \sigma(t)$, sont des fonctions du temps et du prix : $b = b(t, s)$, $\sigma = \sigma(t, s)$, on parle alors de modèle de diffusion avec volatilité locale, ou encore des processus aléatoires : $b = b_t(\omega)$, $\sigma = \sigma_t(\omega)$, on parle dans ce cas de processus d'Itô.

2.2 Portefeuille autofinçant

Nous modélisons le concept de gestion dynamique de portefeuille. Considérons un agent qui peut investir dans les actifs de base du marché. Une stratégie de portefeuille est la donnée d'un processus adapté $\phi = (\phi^0, \varphi)$ où ϕ^0 et $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ représente le nombre de parts investi dans l'actif S^0 et les actifs $S = (S^1, \dots, S^d)$ à la date t , et dont la valeur est déterminée sur la base des informations disponibles juste avant t . ϕ_t^0 et φ_t^i peuvent prendre des valeurs positives ou négatives correspondent à un achat ou une vente et puisqu'on a supposé que les actifs sont indéfiniment fractionnables. La valeur (ou richesse) de ce portefeuille à la date t est définie par

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot X_t = \phi_t^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i S_t^i$$

Dans les modèles discrets où l'investisseur ne peut négocier les titres qu'aux dates $t_0 = 0, \dots, t_k$, la condition d'autofinancement s'écrit :

$$\phi_{t_k} \cdot X_{t_k} = \phi_{t_{k+1}} \cdot X_{t_k}$$

ou encore de manière équivalente en mettant en évidence la variation des actifs entre deux dates :

$$\begin{aligned} V_{t_{k+1}}(\phi) &= \phi_{t_{k+1}} \cdot X_{t_{k+1}} = \phi_{t_k} \cdot X_{t_k} + \phi_{t_{k+1}} \cdot (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \\ &= V_{t_k}(\phi) + \phi_{t_{k+1}} \cdot (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ceci traduit l'idée suivante : à l'instant t_k , après avoir pris connaissances des cours X_{t_k} , l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_{t_k} à

$\phi_{t_{k+1}}$, le réajustement se faisant au cours de la date t_k sans apport ni retrait de fonds extérieur. Autrement dit, les variations de la valeur d'un portefeuille autofinancant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs. En notant $\Delta X_{t_{k+1}} = X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, on remarque d'après (2.5) que la valeur d'un portefeuille autofinancant s'écrit :

$$V_{t_k}(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{l=1}^k \phi_{t_l} \cdot \Delta X_{t_l}.$$

Dans un modèle en temps continu, une stratégie de portefeuille autofinancante (dans les actifs $X = (S^0, \dots, S^d)$) est la donnée d'un processus adapté $\phi = (\phi^0, \varphi)$ tel que l'intégrale stochastique $\int \phi \cdot dX$ existe et dont la valeur de portefeuille est caractérisée par :

$$V_t(\phi) := \phi_t \cdot X_t = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u \cdot dX_u$$

On écrit aussi la dynamique de la valeur d'un portefeuille autofinancant sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} dV_t(\phi) &= \phi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t \cdot dS_t = (V_t(\phi) - \varphi_t \cdot S_t) r dt + \varphi_t \cdot dS_t \\ &= r V_t(\phi) dt + \varphi_t \cdot (-r S_t dt + dS_t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Actualisation par le cash

Nous examinons la condition d'autofinancement lorsqu'on actualise par le cash. On note $\tilde{S}_t^i = S_t^i / S_t^0 = e^{-rt} S_t^i$, $i = 1, \dots, d$, le prix actualisé (par rapport au cash) des actifs risqués, et $\tilde{V}_t(\phi) = V_t(\phi) / S_t^0 = e^{-rt} V_t(\phi)$ la richesse actualisée. Alors par la formule d'Itô et (2.6), la dynamique de la valeur d'un portefeuille autofinancant est :

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\phi) &= -r e^{-rt} V_t(\phi) dt + e^{-rt} dV_t(\phi) = e^{-rt} [-r V_t(\phi) dt + dV_t(\phi)] \\ &= e^{-rt} \varphi_t \cdot (-r S_t dt + dS_t) \\ &= \varphi_t \cdot d\tilde{S}_t, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u \quad (2.7)$$

Remarque. Cette dernière relation montre donc qu'une stratégie de portefeuille autofinancant est complètement déterminée par la valeur initiale de sa richesse v et les composantes $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ dans les actifs risqués S^1, \dots, S^d . En effet, en posant

$$\begin{aligned} V_t &= S_t^0 \left(v + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u \right), \\ \phi_t^0 &= \frac{V_t - \varphi_t \cdot S_t}{S_t^0}, \end{aligned}$$

alors V est la valeur de richesse du portefeuille autofinanciant correspondant à un investissement ϕ^0 dans le cash S^0 , φ dans les actifs risqués S , et de richesse initiale $V_0 = v$. Autrement dit, une stratégie de portefeuille autofinancante est caractérisée par la donnée d'un couple (V, φ) de processus adaptés à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ solution de l'équation :

$$dV_t = rV_t + \varphi_t \cdot (-rS_t dt + dS_t).$$

V est la valeur de portefeuille, φ le nombre de parts investi dans les actifs risqués S , et en conséquence $\phi^0 = (V - \varphi \cdot S)/S^0$ est le nombre de parts investi dans l'actif sans risque S^0 . Il sera parfois commode, pour alléger les notations, de supposer $S^0 = 1$, i.e. $r = 0$, ce qui revient à raisonner directement sur les quantités actualisées.

Exemple. Dans le cadre du modèle de Black-Scholes (2.2), la dynamique de la richesse V d'un portefeuille autofinanciant de stratégie φ dans l'actif S est :

$$dV_t = rV_t dt + \varphi_t S_t [(b - r)dt + \sigma dW_t],$$

et celle de la richesse actualisée est donc :

$$d\tilde{V}_t = \varphi_t \tilde{S}_t [(b - r)dt + \sigma dW_t].$$

Il est parfois commode (voir usuel) de travailler sur les montants au lieu des nombres d'unités investis en posant $\theta_t = \varphi_t S_t$. Bien entendu les deux formulations sont équivalentes lorsque le prix est strictement positif. La dynamique de la richesse autofinancante associée à un montant θ dans l'actif risqué S s'écrit :

$$\begin{aligned} dV_t &= (V_t - \theta_t)rdt + \theta_t \frac{dS_t}{S_t} \\ &= rV_t dt + \theta_t [(b - r)dt + \sigma dW_t]. \end{aligned}$$

2.3 Arbitrage et probabilité risque-neutre

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage est une condition cruciale dans la théorie de la valorisation de produits dérivés. Nous formalisons ce concept avec la définition suivante.

Définition 2.3.1 Une opportunité d'arbitrage sur $[0, T]$ est une stratégie de portefeuille autofinanciant ϕ dont la valeur $V(\phi)$ vérifie :

$$(i) \ V_0(\phi) = 0, \quad (ii) \ V_T(\phi) \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}[V_T(\phi)] > 0.$$

Ainsi, un arbitrage représente la gestion dynamique d'un portefeuille autofinanciant permettant à partir d'un capital nul, de créer sans risque un profit sûr.

Dans les modèles en temps continu, nous serons amenés à faire des hypothèses supplémentaires d'intégrabilité sur les stratégies de portefeuille pour garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Il existe en effet des stratégies qui sont des opportunités d'arbitrage comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit un marché avec un actif sans risque $S^0 = 1$ et un actif risqué $S_t = W_t$ mouvement Brownien. Soit $x > 0$ et τ_x le temps d'arrêt correspondant au premier instant où $S = W$ touche x . Considérons la stratégie en actif risqué $\varphi = 1_{]0, \tau_x]}$. Alors partant d'une richesse initiale nulle $V_0 = 0$, la valeur de ce portefeuille est $V_t = \int_0^t 1_{]0, \tau_x]}(u) dW_u = W_{t \wedge \tau_x}$ et tend vers une richesse positive $W_{\tau_x} = x > 0$ pour un horizon infini.

Nous préciserons ultérieurement les conditions d'intégrabilité sur les stratégies pour exclure ce genre de pathologies. Nous appellerons stratégies *admissibles* de telles stratégies. Cet ensemble de stratégies admissibles doit être assez riche pour permettre l'évaluation et la couverture de nombreux produits dérivés et pas trop gros pour éviter les opportunités d'arbitrage. Par exemple, des hypothèses de type carré intégrable ou encore des stratégies qui assurent une valeur de richesse toujours bornée inférieurement, i.e. ne conduisant pas à une banqueroute, sont suffisantes. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :

(AOA) Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage parmi les stratégies de portefeuille admissibles. On dit que le marché est viable.

Nous énonçons une propriété simple mais importante de la condition d'AOA.

Proposition 2.3.1 *Sous l'hypothèse d'AOA, deux portefeuilles admissibles ayant la même valeur p.s. en T ont la même valeur p.s. à toute date intermédiaire t .*

Preuve. Pour simplifier les notations, on raisonne pour $t = 0$. Soit ϕ et ψ deux stratégies de portefeuille admissibles tels que $V_T(\phi) = V_T(\psi)$ p.s. et supposons par l'absurde que $V_0(\phi) > V_0(\psi)$. Considérons alors la stratégie de portefeuille autofinanciant qui consiste à $t = 0$ en une position $\psi - \phi$ dans les actifs, de valeur initiale $V_0(\psi) - V_0(\phi)$, et à investir le reste de gain positif $V_0(\phi) - V_0(\psi)$ dans le cash. La valeur initiale de ce portefeuille est donc nulle et vaut à la date T :

$$V_T(\psi) - V_T(\phi) + (V_0(\phi) - V_0(\psi)) S_T^0 = (V_0(\phi) - V_0(\psi)) S_T^0 > 0.$$

C'est une opportunité d'arbitrage. □

La condition d'AOA impose aussi des conditions sur les prix. Dans un modèle en temps discret, par exemple le modèle binomial, on sait que la condition d'AOA implique l'existence d'une probabilité \mathbb{Q} , appelée risque-neutre, équivalente à la probabilité objective telle que le prix des actifs actualisés soit une martingale. Ceci traduit l'idée que plus un titre est risqué, plus son rendement doit être élevé sous peine d'être exclu

dans les stratégies de portefeuille. Ce résultat fondamental de la finance a une version analogue en temps continu mais il est beaucoup plus délicat à montrer. Pour expliquer et justifier ce résultat en temps continu, nous commençons par examiner le cas simple d'un modèle de Black-Scholes avec deux actifs de même volatilité σ et gouvernés par le même mouvement Brownien :

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(b_1 dt + \sigma dW_t) \\ dS_t^2 &= S_t^2(b_2 dt + \sigma dW_t). \end{aligned}$$

Montrons alors que $b_1 = b_2$. Supposons le contraire, par exemple $b_1 > b_2$. Considérons alors la stratégie où l'on achète 1 part de l'actif S^1 , vend S_0^1/S_0^2 parts de l'actif S^2 , et on garde cette position jusqu'en T . La valeur initiale V_0 de cette stratégie est nulle et conduit en T à un profit strictement positif :

$$V_T = S_T^1 - \frac{S_0^1}{S_0^2} S_T^2 = S_0^1 \exp\left(\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2} T\right) (e^{b_1 T} - e^{b_2 T}) > 0.$$

C'est donc un arbitrage. Notons aussi que si $\sigma = 0$, i.e. S^1 et S^2 sont des actifs sans risque, alors ils doivent avoir le même rendement que S^0 , i.e. $b_1 = b_2 = r$ sinon il serait facile de construire un arbitrage. On a donc l'existence d'un processus λ (constant ici dans le modèle de Black-Scholes) tel que :

$$b_1 = b_2 = r + \sigma \lambda.$$

λ est appelé *prix du marché du risque* ou *prime de risque*. L'interprétation est la suivante : dans un marché financier, le rendement des titres risqués doit être supérieur à celui des titres sans risque pour qu'ils soient conservés, ceci traduisant le fait que les investisseurs ont une aversion pour le risque. La prime de risque mesure donc l'écart entre le rendement instantané des actifs risqués et celui du cash.

En utilisant la prime de risque $\lambda = (b - r)/\sigma$ dans le modèle de Black-Scholes (2.2), on voit que la dynamique du prix de l'actif risqué s'écrit :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t (\lambda dt + dW_t).$$

On observe ainsi qu'on peut annuler l'effet de la prime de risque en faisant un changement de probabilité sous lequel $dW_t + \lambda dt$ sera un mouvement Brownien. Ceci est possible justement grâce au théorème de Girsanov : il existe une probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} sous laquelle :

$$\widehat{W}_t = W_t + \lambda t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{est un } \mathbb{Q} - \text{mouvement Brownien.}$$

Cette probabilité a pour densité de Radon-Nikodym par rapport à \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{F}_T) :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T\right). \quad (2.8)$$

La dynamique du prix de l'actif sous \mathbb{Q} satisfait :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t,$$

ce qui se formule de manière équivalente en écrivant que la dynamique du prix actualisé \tilde{S} sous \mathbb{Q} est :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\widehat{W}_t.$$

Ceci signifie que le prix actualisé \tilde{S} est une intégrale stochastique par rapport au \mathbb{Q} -mouvement Brownien \widehat{W} et est donc une \mathbb{Q} -martingale. On dit que \mathbb{Q} est une *probabilité risque-neutre* ou *probabilité martingale*.

De manière générale, on introduit alors la définition suivante.

Définition 2.3.2 Une probabilité \mathbb{Q} est appelée *probabilité risque-neutre* ou *probabilité martingale* si \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P} et si le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ est une martingale sous \mathbb{Q} .

La condition d'équivalence entre \mathbb{Q} et \mathbb{P} signifie que pour tout évènement $A \subset \Omega$, si $\mathbb{P}(A) > 0$ alors $\mathbb{Q}(A) > 0$ et vice versa. Autrement dit, ce que \mathbb{P} prédit avec une probabilité strictement positive, \mathbb{Q} le prédit aussi et la réciproque est vraie. Le nom *martingale* vient naturellement de la propriété martingale du prix actualisé. Le mot *risque-neutre* vient du fait que le rendement des actifs est égal au taux d'intérêt r sous \mathbb{Q} .

On vient ainsi de voir l'existence d'une probabilité risque-neutre dans le modèle de Black-Scholes. Ce résultat d'existence est en fait très général dans les modèles en temps continu et découle comme pour les modèles discrets de la condition d'AOA. Il est connu sous le nom de premier théorème fondamental de la finance et souligne l'importance du concept de probabilité martingale. On en donnera une démonstration dans le cadre du modèle multidimensionnel de Black-Scholes (voir exercice 2.5.3). Ici, nous admettrons l'existence d'une probabilité risque-neutre comme caractérisation de la condition d'AOA.

(AOA) Il existe une probabilité risque-neutre.

Remarque. Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, on se convainc aisément et on peut le montrer, qu'il n'y a qu'une manière de rendre le processus de prix actualisé martingale, en faisant de $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$ un mouvement Brownien. Ceci implique l'unicité d'une probabilité risque-neutre, à savoir la probabilité \mathbb{Q} définie en (2.8).

On a ainsi deux univers de probabilité parallèles. L'espace de probabilité original (Ω, \mathbb{P}) où le processus de prix est originellement défini et en parallèle un monde risque-neutre défini par l'espace de probabilité (Ω, \mathbb{Q}) où le rendement de l'actif est r , le taux

sans risque. Alors que le premier espace sert à modéliser les prix, nous verrons dans la section suivante que le second espace servira pour la valorisation d'options.

Nous terminons cette section en précisant les conditions d'admissibilité sur les stratégies de portefeuille. Fixons une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} et notons que d'après l'expression (2.7), la richesse actualisée d'une stratégie de portefeuille autofinçant est une intégrale stochastique par rapport à une martingale sous \mathbb{Q} . Sous des conditions d'intégrabilité sur l'intégrand φ , c'est une martingale sous \mathbb{Q} . On dira donc qu'une stratégie de portefeuille est \mathbb{Q} -admissible si sa richesse actualisée est une martingale sous \mathbb{Q} .

Remarque. Dans le modèle de Black-Scholes, la dynamique de la richesse actualisée \tilde{V} d'un portefeuille autofinçant de stratégie φ dans l'actif S est sous \mathbb{Q} :

$$d\tilde{V}_t = \varphi_t \sigma \tilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

Une condition suffisante garantissant que \tilde{V} est une martingale sous \mathbb{Q} est la condition de carré intégrabilité sur l'intégrand φ :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_0^T |\varphi_t \sigma \tilde{S}_t|^2 dt \right] < +\infty.$$

Ceci implique en effet que l'intégrale stochastique caractérisant \tilde{V} est une \mathbb{Q} -martingale de carré intégrable.

Remarque. Soit ϕ une stratégie \mathbb{Q} -admissible. Si ϕ était une opportunité d'arbitrage, on aurait $\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\varphi) = 0$ et $\tilde{V}_T(\phi) \geq 0$, $\mathbb{Q}[\tilde{V}_T(\phi)] > 0$ car $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Ceci impliquerait $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T(\phi)] > 0$ ce qui est en contradiction avec la propriété de martingale : $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T(\phi)] = \tilde{V}_0(\phi) = 0$. On voit donc qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage parmi les \mathbb{Q} -stratégies admissibles.

2.4 Evaluation et couverture par arbitrage

Considérons un produit dérivé (on dit aussi actif contingent) représenté par son flux (ou payoff) terminal, H_T , une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable : les cas typiques étant représentés par les options européennes $H_T = h(S_T)$ où h est une fonction mesurable. Par exemple $h(s) = (s - K)_+$ pour un call, $h(s) = (K - s)_+$ pour un put. La question cruciale est de donner un "juste" prix à ce produit dérivé. Pour répondre à cette question, plaçons nous pour fixer les idées du côté du vendeur. A la vente de ce produit dérivé, il reçoit en contrepartie une prime (prix de l'option) de la part de l'acheteur. Il peut alors investir la prime dans un portefeuille d'actifs de manière à avoir une valeur de portefeuille qui va dans le même sens des flux qu'il risque de payer.

La gestion d'un produit dérivé obéit donc aux opérations suivantes :

- suivre régulièrement le prix du produit dérivé dans le marché

- gérer un portefeuille autofinçant, de valeur V_t en t , dont la valeur initiale est la prime de l'option.

- surveiller le $P\&L$ (profit et perte) final, i.e. la différence entre la valeur du portefeuille et le montant du flux à payer (pour le vendeur), soit $V_T - H_T$. On parle aussi de "tracking error".

L'objectif du gestionnaire d'options est de réduire le $P\&L$ final afin d'avoir la variance la plus faible possible. Le "meilleur" portefeuille est appelé *portefeuille de couverture*. En particulier, s'il est possible de trouver un $P\&L$ final de risque nul, i.e. un portefeuille autofinçant de valeur terminale, le payoff de l'option, alors par la condition d'AOA, on pourra définir à toute date le prix de l'option comme la valeur du portefeuille autofinçant. On dit encore que l'option est (parfaitement) répliquable par une stratégie de portefeuille autofinçant, appelé portefeuille de couverture (parfaite) et le prix est appelé prix d'arbitrage. Les questions se posent ensuite de construire un tel portefeuille de couverture et d'avoir une formule pour le prix ? Nous allons répondre à ces problèmes de valorisation et couverture par le principe d'évaluation risque-neutre.

Etant donnée la modélisation décrite aux sections précédentes, le problème de la valorisation et couverture d'une option de flux H_T se formule mathématiquement en la recherche d'une stratégie de portefeuille autofinçant ϕ tel que $V_T(\phi) = H_T$. Si cela est possible, on dit que l'actif contingent H_T est atteignable ou répliquable (par la stratégie ϕ). Dans la suite, on considère des modèles où tous les actifs contingents (avec une condition d'intégrabilité appropriée) sont atteignables. On dit que le marché est *complet*. C'est le cas du modèle de Black-Scholes comme on le verra au chapitre suivant. On admettra la caractérisation suivante de la complétude de marché, énoncé comme second théorème fondamental de la finance :

Marché complet \equiv unicité d'une probabilité risque-neutre

On se fixe désormais l'unique probabilité \mathbb{Q} risque-neutre et on s'intéresse aux options de flux H_T satisfaisant la condition d'intégrabilité $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}|H_T| < +\infty$, i.e. $H_T \in L^1(\mathbb{Q}, \mathcal{F}_T)$. En marché complet, le flux H_T est atteignable (répliquable), i.e. il existe une stratégie de portefeuille ϕ \mathbb{Q} -admissible tel que $V_T(\phi) = H_T$. D'après la proposition 2.3.1, on peut définir de manière unique le prix d'arbitrage $\Pi_t = \Pi_t(H_T)$ en t de H_T comme la valeur $V_t(\phi)$ de ce portefeuille. ϕ est le portefeuille de couverture. On obtient la règle suivante d'évaluation risque-neutre :

Théorème 2.4.1 *En marché complet, le prix d'arbitrage d'une option de flux H_T est donné à la date t par :*

$$\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} H_T \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.9)$$

Son prix à la date $t = 0$ est

$$\Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} H_T].$$

Preuve. On a vu au paragraphe précédent que la richesse actualisée $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi)$ d'une stratégie ϕ \mathbb{Q} -admissible est une martingale sous \mathbb{Q} . Si le portefeuille ϕ réplique le flux H_T , i.e. $V_T(\phi) = H_T$, on a donc :

$$e^{-rt}V_t(\phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T(\phi)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}H_T|\mathcal{F}_t],$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\Pi_t = V_t(\phi) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}H_T|\mathcal{F}_t].$$

□

La règle d'évaluation risque-neutre est formellement très simple : elle conduit à un calcul d'espérance sous la probabilité risque-neutre du payoff de l'option. En particulier, on verra au chapitre suivant qu'on obtient des formules explicites dans le modèle de Black-Scholes.

Nous discutons maintenant la couverture de l'actif contingent H_T . Il s'agit donc de déterminer une stratégie de portefeuille $\phi = (\phi^0, \varphi)$ telle que $V_T(\phi) = H_T$. Puisque $e^{-rt}\Pi_t = \tilde{V}_t(\phi)$ et par la condition d'autofinancement (2.7), on a avec le théorème 2.4.1 :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}H_T|\mathcal{F}_t] = \Pi_0 + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u \quad (2.10)$$

C'est une équation intégrale d'inconnue le processus φ , avec un terme connu dans le membre de gauche et une intégrale stochastique d'intégrand inconnue dans le terme de droite. Par exemple, dans le cas d'un modèle de Black-Scholes, cette équation intégrale s'écrit encore :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}H_T|\mathcal{F}_t] = \Pi_0 + \int_0^t \varphi_u \sigma \tilde{S}_u d\widehat{W}_u.$$

Comment résoudre une telle équation ? Si dans le terme de droite, à la place de l'intégrale d'Itô, on avait une intégrale standard dt par rapport au temps, on identifierait l'intégrand avec φ par différentiation par rapport au temps des termes de droite et gauche comme dans le cas d'une équation intégrale ordinaire. Dans notre cas, nous avons une intégrale d'Itô et une telle dérivation n'est bien sûr pas autorisée. En fait, il existe un calcul différentiel approprié pour ces intégrales d'Itô utilisant les dérivées de Malliavin. Ces dérivées font appel à des notions avancées d'analyse stochastique que nous n'aborderons pas dans le cadre de ce cours. En fait, dans le cas d'un modèle de diffusion avec des payoff européens $H_T = h(S_T)$, on peut résoudre simplement cette équation par application de la formule d'Itô. Nous détaillerons au chapitre suivant ces calculs dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

Remarque 2.4.1 L'évaluation et la couverture d'un actif contingent H_T par arbitrage peut se formuler aussi de la manière suivante : trouver un couple de processus (Π_t, φ_t) tel que Π_t soit la valeur d'un portefeuille autofinçant de composition φ_t dans l'actif risqué, répliquant H_T . D'après l'équation d'évolution (2.6) de la valeur d'un portefeuille autofinçant, on cherche donc un couple de processus adaptés (Π_t, φ_t) tel que :

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt + \varphi_t \cdot (-rS_t dt + dS_t) \quad (2.11)$$

$$\Pi_T = H_T. \quad (2.12)$$

Π_t est alors le prix de H_T et φ_t est la stratégie de portefeuille en actif S à la date t . Un tel système (2.11)- (2.12) est appelé équation *rétrograde* (*backward* en anglais) car on se donne la condition terminale et on cherche un couple de solutions dont la première composante doit atteindre l'objectif final H_T . Ceci contraste avec les équations différentielles stochastiques usuelles où l'on se donne la condition initiale. Notons que dans cette approche, il n'est pas nécessaire de travailler sous la probabilité risque-neutre. On peut se placer sous la probabilité objective. Par exemple, dans le modèle de Black-Scholes, l'équation rétrograde (2.11)- (2.12) s'écrit encore :

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt + \varphi_t S_t ((b - r)dt + \sigma dW_t)$$

$$\Pi_T = H_T.$$

C'est d'ailleurs formellement selon cette méthode et en utilisant les équations aux dérivées partielles (EDP) que Black et Scholes ont originellement découvert leur formule de prix et couverture. Bien entendu, les deux approches risque-neutre et backward sont équivalentes : Le couple (Π_t, φ_t) donné par (2.9), (2.10) est solution de l'équation (2.11)- (2.12). Nous expliciterons les calculs de ces deux méthodes au chapitre suivant dans le modèle de Black-Scholes.

2.5 Exercices

2.5.1 Moments et densité du prix du sous-jacent dans le modèle de Black-Scholes

1) Soit S un mouvement géométrique selon (2.2) de condition initiale $S_0 = x$. Calculer pour tout $p \geq 1$, $\mathbb{E}[|S_t|^p]$. En déduire le ratio de Sharpe

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\mathbb{E}[S_t] - x}{\sqrt{\text{Var}(S_t)}}.$$

2) Montrer que la densité $z \rightarrow \ell_{b, \sigma^2}(t, x, z)$ de S_t est

$$\begin{aligned} \ell_{b, \sigma^2}(t, x, z) &= \frac{1}{z\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{1}{2}d_2^2(t, xe^{bt}, z)\right) 1_{z>0} \\ d_2(t, x, z) &= \frac{\ln(x/z) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Corrigé. 1) C'est une conséquence du résultat sur la transformée de Laplace d'une loi gaussienne : si U est une loi normale de moyenne m et de variance γ^2 alors

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda U)] = \exp\left(\lambda m + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

En particulier, si W est un mouvement Brownien, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right] = 1.$$

Pour tout $p \geq 1$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|S_t|^p] &= x^p \mathbb{E}\left[\exp\left(p\sigma W_t + p\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right] \\ &= x^p \mathbb{E}\left[\exp\left\{\left(p\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}p^2\sigma^2\right)t\right\}\right]. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\mathbb{E}[S_t] = x \exp(bt), \quad \text{Var}(S_t) = x^2 \exp(2bt)(\exp(\sigma^2 t) - 1),$$

d'où :

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{\exp(bt) - 1}{\exp(bt)\sqrt{\exp(\sigma^2 t) - 1}}.$$

On note que le ratio de Sharpe est indépendant du prix initial x .

2) D'après l'expression explicite (2.3) du mouvement Brownien géométrique, on a

$$Y_t = \ln S_t \sim \mathcal{N}(\ln x + (b - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t).$$

Pour toute fonction g bornée sur \mathbb{R}_+^* , on a avec le changement de variable $z = e^y$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(S_t)] &= \mathbb{E}[g(\exp(Y_t))] \\ &= \int g(e^y) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 t}(y - \ln x - (b - \sigma^2/2)t)^2\right) dy \\ &= \int_0^{+\infty} g(z) \ell_{b, \sigma^2}(t, x, z) dz. \end{aligned}$$

2.5.2 Modèle de Black-Scholes multidimensionnel

1) Montrer que la solution du mouvement Brownien géométrique multidimensionnel (2.4) est :

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\left(b^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\sigma^{ij}|^2\right)t + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} W_t^j\right), \quad i = 1, \dots, d.$$

2) On considère un mouvement Brownien géométrique (2.4) avec $d = n = 2$ et avec les notations $\sigma^{11} = \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2}$, $\sigma^{12} = \sigma_1 \rho$, $\sigma^{21} = 0$, $\sigma^{22} = \sigma_2$:

$$dS_t^1 = b^1 S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 (\sqrt{1 - \rho^2} dW_t^1 + \rho dW_t^2) \quad (2.13)$$

$$dS_t^2 = b^2 S_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^2, \quad (2.14)$$

où $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ et $\rho \in [-1, 1]$. Calculer la corrélation entre les rendements logarithmiques de S^1 et S^2 à deux dates d'observation t_{k-1} et t_k d'écart $\Delta t = t_k - t_{k-1}$, c'est à dire la corrélation entre $Y_{t_k}^1 = \ln(S_{t_k}^1 / S_{t_{k-1}}^1)$ et $Y_{t_k}^2 = \ln(S_{t_k}^2 / S_{t_{k-1}}^2)$. Interpréter le coefficient ρ .

Corrigé. On a

$$\begin{aligned} Y_{t_k}^1 &= \left(b^1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \Delta t + \sigma_1 \sqrt{1 - \rho^2} \Delta W_{t_k}^1 + \sigma_1 \rho \Delta W_{t_k}^2 \\ Y_{t_k}^2 &= \left(b^2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) \Delta t + \sigma_2 \Delta W_{t_k}^2, \end{aligned}$$

où $\Delta W_{t_k}^i = W_{t_k}^i - W_{t_{k-1}}^i$, $i = 1, 2$, suivent deux lois normales centrées et indépendantes de variance Δt . $(Y_{t_k}^1, Y_{t_k}^2)$ est donc un vecteur gaussien avec $Y_{t_k}^i \sim \mathcal{N}((b^i - \sigma_i^2/2)\Delta t, \sigma_i^2 \Delta t)$, $i = 1, 2$. On calcule immédiatement

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{t_k}^1, Y_{t_k}^2) &= \sigma_1 \sigma_2 \rho \text{Cov}(\Delta W_{t_k}^1, \Delta W_{t_k}^2) + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \text{Cov}(\Delta W_{t_k}^1, \Delta W_{t_k}^2) \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \rho \Delta t, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la corrélation :

$$\text{Corr}(Y_{t_k}^1, Y_{t_k}^2) = \rho.$$

Dans le modèle (2.13)-(2.14), ρ s'interprète donc comme la corrélation entre les rendements logarithmiques des deux actifs S^1 et S^2 .

2.5.3 Existence d'une prime de risque et d'une probabilité risque-neutre dans un modèle BS multidimensionnel

1) On se place dans le cadre du modèle (2.4). Ecrire la dynamique de la valeur d'un portefeuille autofinçant de montant $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^d)$ dans les actifs $S = (S^1, \dots, S^d)$.

Corrigé. Notons $\varphi^i = \theta^i / S^i$ le nombre d'unités investi dans S^i . La valeur V de ce portefeuille a pour dynamique :

$$\begin{aligned} dV_t &= \left(V_t - \sum_{i=1}^d \varphi_t^i S_t^i\right) r dt + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i dS_t^i \\ &= r V_t dt + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i (-r S_t^i dt + dS_t^i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= rV_t dt + \sum_{i=1}^d \theta_t^i ((b^i - r)dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} dW_t^j) \\
&= (rV_t + \theta_t \cdot (b - r\mathbf{1}))dt + \sum_{j=1}^n \theta_t \cdot \sigma^j dW_t^j, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

où on note $\mathbf{1}$ le vecteur dans \mathbb{R}^d de composantes 1 et σ^j le j ème vecteur colonne de la matrice $\sigma = (\sigma^{ij})$.

2) On note $\text{Ker}(\sigma^*)$ le noyau de la matrice transposée σ^* de σ . L'objet de cette question est de montrer que sous la condition d'AOA, $\text{Ker}(\sigma^*) \subset B^\perp$ où B est le vecteur $(b - r\mathbf{1})$ et \perp est la relation d'orthogonalité. Soit donc θ un vecteur quelconque dans $\text{Ker}(\sigma^*)$. En considérant la valeur de portefeuille de montant $\tilde{\theta} = \theta 1_{\theta \cdot B \geq 0}$ (resp. $-\theta 1_{\theta \cdot B \leq 0}$), montrer par l'AOA que $\theta \cdot B = 0$.

Corrigé. θ étant dans $\text{Ker}(\sigma^*)$, on a $\theta \cdot \sigma^j = 0$ et donc aussi $\tilde{\theta} \cdot \sigma^j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$. D'après (2.15), la valeur de portefeuille associée au montant $\tilde{\theta}$ et de valeur initiale nulle $V_0 = 0$ satisfait :

$$dV_t = (rV_t + \tilde{\theta} \cdot B)dt.$$

C'est un portefeuille sans risque de valeur actualisée gouvernée par $d\tilde{V}_t = e^{-rt} \tilde{\theta} \cdot B dt$. Sa valeur est donc explicitement égale à :

$$V_t = \int_0^t e^{-r(u-t)} \tilde{\theta} \cdot B du = \int_0^t e^{-r(u-t)} \theta \cdot B 1_{\theta \cdot B \geq 0} du \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Par AOA, on doit avoir $\theta \cdot B 1_{\theta \cdot B \geq 0} = 0$, i.e. $\theta \cdot B \leq 0$. En prenant $\tilde{\theta} = -\theta 1_{\theta \cdot B \leq 0}$, on obtient de même que $\theta \cdot B \geq 0$ et donc finalement $\theta \in B^\perp$. En fait, le raisonnement précédent montre qu'un portefeuille sans risque doit avoir un rendement instantané égal au taux sans risque r .

3) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$b - r\mathbf{1} = \sigma \lambda.$$

λ est appelé prime de risque du marché. Interpréter.

Corrigé. Puisque $\text{Ker}(\sigma^*) \subset B^\perp$, on a par orthogonalité :

$$B = (B^\perp)^\perp \subset (\text{Ker}(\sigma^*))^\perp \subset \text{Im}(\sigma),$$

ce qui est la relation voulue. La prime de risque mesure l'écart pondéré par la volatilité entre le rendement des actifs risqués et le taux sans risque. Notons que lorsque σ est inversible, l'existence de la prime de risque est triviale et ne requiert pas l'AOA : $\lambda = \sigma^{-1}(b - r\mathbf{1})$. Dans le cas général, son existence est une conséquence de l'AOA et se traduit par des contraintes sur les coefficients. Par exemple, s'il y a $n = 1$ aléa dans

un marché de BS avec d actifs de rendement b^i et de volatilité σ^i . Alors la condition d'AOA implique l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout i , $b^i - r = \sigma^i \lambda$, autrement dit :

$$\frac{b^1 - r}{\sigma^1} = \dots = \frac{b^d - r}{\sigma^d} = \lambda.$$

Tous les actifs doivent donc avoir le même ratio de performance, ce qui traduit aussi le fait que plus un titre est risqué, plus son rendement doit être élevé. Réciproquement, si dans un tel modèle, on observe deux actifs de ratio $(b^i - r)/\sigma^i$ différents, cela signifie qu'il est possible de faire un arbitrage.

4) On définit la probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} de densité sur (Ω, \mathcal{F}_T) :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\lambda \cdot W_T - \frac{|\lambda|^2}{2} T \right).$$

Vérifier que \mathbb{Q} est une probabilité risque-neutre et expliciter $S = (S^1, \dots, S^d)$ sous \mathbb{Q} .

Corrigé. D'après le théorème de Girsanov multidimensionnel, le processus

$$\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$$

est un mouvement Brownien n -dimensionnel sous \mathbb{Q} , ce qui signifie encore, en notant $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, que les n processus

$$\widehat{W}_t^j = W_t^j + \lambda^j t$$

sont des mouvements Browniens indépendants sous \mathbb{Q} . Par définition de λ , on a pour tout i :

$$b^i - r = \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} \lambda^j,$$

et donc la dynamique des S^i sous \mathbb{Q} est :

$$\begin{aligned} dS_t^i &= S_t^i \left(r dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} (dW_t^j + \lambda^j dt) \right) \\ &= S_t^i \left(r dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} d\widehat{W}_t^j \right). \end{aligned}$$

La dynamique des prix actualisés $\tilde{S}_t^i = e^{-rt} S_t^i$ est donc

$$d\tilde{S}_t^i = \tilde{S}_t^i \sum_{j=1}^n \sigma^{ij} d\widehat{W}_t^j,$$

ce qui montre que \tilde{S}^i est une \mathbb{Q} -martingale et donc \mathbb{Q} est une probabilité risque-neutre.

5) Comme exemple, considérons le modèle en dimension 2 décrit par (2.13)-(2.14).

a) On suppose $\rho \in]-1, 1[$. Montrer l'existence d'une probabilité risque-neutre qu'on explicitera et décrire la dynamique de S^1 et S^2 sous cette probabilité.

Corrigé. La matrice de volatilité dans ce modèle est :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} & \sigma_1 \rho \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

Si $\rho \in]-1, 1[$, i.e. $\rho^2 < 1$ alors la matrice σ est inversible et on a l'existence et l'unicité de la prime de risque donnée par :

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \rho & \sigma_1 \sqrt{1-\rho^2} \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b^1 - r \\ b^2 - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{b^1 - r}{\sigma_1} - \rho \frac{b^2 - r}{\sigma_2} \right) \\ \frac{b^2 - r}{\sigma_2} \end{pmatrix}$$

La probabilité risque-neutre est caractérisée par sa densité

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\lambda^1 W_T^1 - \lambda^2 W_T^2 - \frac{|\lambda^1|^2 + |\lambda^2|^2}{2} T \right),$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{W}_t^1 &= W_t^1 + \lambda^1 t \\ \widehat{W}_t^2 &= W_t^2 + \lambda^2 t \end{aligned}$$

sont deux mouvements Browniens indépendants. La dynamique de S^1, S^2 sous \mathbb{Q} est

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= rS_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 (\sqrt{1-\rho^2} d\widehat{W}_t^1 + \rho d\widehat{W}_t^2) \\ dS_t^2 &= rS_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 d\widehat{W}_t^2, \end{aligned}$$

b) On suppose $\rho^2 = 1$. A quelle condition sur les coefficients b^1, b^2, σ_1 et σ_2 a-t-on l'existence d'une prime de risque et d'une probabilité risque-neutre? Dans ce cas, y a-t-il unicité de la probabilité risque-neutre? Ecrire la dynamique des prix sous une probabilité risque-neutre.

Corrigé. La dynamique des prix s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= b^1 S_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 \rho dW_t^2 \\ dS_t^2 &= b^2 S_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 dW_t^2, \end{aligned}$$

On aura existence d'une prime de risque et donc d'une probabilité risque-neutre s'il existe $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ au système :

$$\begin{aligned} b^1 - r &= \sigma_1 \rho \lambda^2 \\ b^2 - r &= \sigma_2 \lambda^2. \end{aligned}$$

Ceci sera vérifié sous la condition nécessaire et suffisante :

$$\frac{b^1 - r}{\sigma_1 \rho} = \frac{b^2 - r}{\sigma_2}.$$

Dans ce cas, toute probabilité \mathbb{Q} de densité

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(-\lambda^1 W_T^1 - \frac{b^2 - r}{\sigma_2} W_T^2 - \frac{|\lambda^1|^2 + \left| \frac{b^2 - r}{\sigma_2} \right|^2}{2} T \right),$$

avec λ^1 quelconque dans \mathbb{R} , est une probabilité risque-neutre. En effet sous une telle probabilité,

$$\widehat{W}_t^2 = W_t^2 + \frac{b^2 - r}{\sigma_2} t$$

est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q} et la dynamique de S^1 et S^2 sous \mathbb{Q} est :

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= rS_t^1 dt + \sigma_1 S_t^1 \rho d\widehat{W}_t^2 \\ dS_t^2 &= rS_t^2 dt + \sigma_2 S_t^2 d\widehat{W}_t^2. \end{aligned}$$

La non unicité d'une probabilité risque-neutre s'explique par le fait qu'il n'y a qu'un seul mouvement Brownien W^2 gouvernant la dynamique des deux prix S^1 et S^2 et qu'il suffit juste de changer ce mouvement Brownien par Girsanov pour rendre les prix actualisés martingales, l'effet d'un changement de Brownien sur W^1 n'affectant pas la dynamique des prix. Il faut noter que dans ce cas, la prise en compte de ce mouvement Brownien W^1 dans le théorème de Girsanov est arbitraire si l'objectif est de valoriser une option écrite sur les sous-jacents S^1 et S^2 puisqu'il n'intervient pas dans la modélisation initiale de ces prix. Par contre, si on cherche à valoriser un actif contingent dont le flux dépend de W^1 , on a réellement le problème de la non unicité d'une probabilité risque-neutre : on dit que le marché est incomplet et se pose la question du choix d'une probabilité risque-neutre. Ce choix dépasse des considérations uniques d'arbitrage et nécessitent des critères plus ou moins subjectifs.

2.5.4 Parité call-put par évaluation risque-neutre

Retrouver la formule de parité call-put à partir de la règle d'évaluation risque-neutre.

Indication : utiliser l'égalité $(x - K)_+ = (x - K) + (K - x)_+$.

Corrigé. Soit S_t le prix de l'actif risqué et K le strike. D'après l'égalité de l'indication, on a

$$e^{-rT}(S_T - K)_+ = e^{-rT}S_T - e^{-rT}K + e^{-rT}(K - S_T)_+.$$

En prenant l'espérance sous une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} dans cette relation, on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT}(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT}S_T | \mathcal{F}_t] - e^{-rT}K + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT}(K - S_T)_+ | \mathcal{F}_t],$$

soit d'après la propriété de martingale du prix actualisé sous \mathbb{Q} et la règle d'évaluation risque-neutre :

$$C_t = S_t - e^{-r(T-t)}K + P_t.$$

2.5.5 Evaluation risque-neutre du prix à terme

Soit un contrat à terme conclu en t sur un titre S de maturité T et $F^S(t, T)$ le prix à terme (forward), i.e. le prix fixé à la date t que le détenteur du contrat paiera à l'émetteur du contrat en échange du titre S reçu à la date T . Rappelons que le détenteur du contrat a l'obligation d'acheter le titre au prix $F^S(t, T)$ convenu à l'avance.

1) Quel est le flux terminal en T de ce contrat à terme et le prix d'arbitrage Π_t de ce contrat ?

Corrigé. Le détenteur du contrat recevra en T le titre de valeur S_T qu'il paiera $F^S(t, T)$. Le flux de ce contrat est donc $H_T = S_T - F^S(t, T)$. D'après la règle d'évaluation risque-neutre, le prix de ce contrat est donc

$$\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)}(S_T - F^S(t, T)) | \mathcal{F}_t].$$

2) Le prix forward $F^S(t, T)$ fixé en t , est déterminé par arbitrage de manière à ce que l'on soit indifférent entre recevoir le titre S au prix spot ou au prix forward. Autrement dit, il est tel que $\Pi_t = 0$. Calculer $F^S(t, T)$. Que remarque t'on ?

Corrigé. D'après la formule du prix du contrat à terme, on a $\Pi_t = 0$ ssi :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T - F^S(t, T) | \mathcal{F}_t] = 0 \iff F^S(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_T | \mathcal{F}_t].$$

On note que le processus $t \rightarrow F^S(t, T)$ est une \mathbb{Q} -martingale. En utilisant la propriété de \mathbb{Q} -martingale de $e^{-rt}S_t$, on retrouve la formule reliant prix spot et prix forward :

$$\begin{aligned} F^S(t, T) &= e^{rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT}S_T | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{r(T-t)}S_t. \end{aligned}$$

3) Décrire la dynamique du processus $(F^S(t, T))_t$ dans un modèle de Black-Scholes sous la probabilité risque-neutre.

Corrigé. On rappelle que la dynamique de S sous \mathbb{Q} est :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t,$$

et donc par la formule d'Itô :

$$dF^S(t, T) = -re^{r(T-t)}S_t dt + e^{r(T-t)}dS_t = \sigma F^S(t, T)d\widehat{W}_t.$$

Chapitre 3

Formule et propriétés de Black-Scholes

Nous étudions en détail le modèle de Black-Scholes et détaillons comment les principes d'évaluation et couverture vus au chapitre précédent s'appliquent explicitement à ce cadre en conduisant à la célèbre formule de Black-Scholes. Nous rappelons que ce modèle est donnée par une dynamique du sous-jacent comme mouvement Brownien géométrique :

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

de solution explicite :

$$S_t = S_0 \exp \left(\sigma W_t + \left(b - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right).$$

3.1 La formule d'évaluation et couverture

3.1.1 L'EDP d'évaluation

Nous décrivons dans ce paragraphe la dérivation originale du prix d'arbitrage selon Black et Scholes, voir aussi remarque 2.4.1. On se donne un actif contingent $h(S_T)$ et on cherche un prix de la forme $\Pi_t = v(t, S_t)$ qui soit la valeur d'un portefeuille autofinçant et répliquant $h(S_T)$ à la maturité T . En supposant que la fonction v soit régulière, on peut appliquer la formule d'Itô et obtenir :

$$dv(t, S_t) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t) + bS_t \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) dW_t.$$

D'autre part, si $v(t, S_t)$ est la valeur d'un portefeuille autofinçant de couverture φ en actif S , alors elle admet une différentielle de la forme

$$dv(t, S_t) = rv(t, S_t)dt + \varphi_t(-rS_t dt + dS_t)$$

$$= (rv(t, S_t) + \varphi_t S_t(b - r)) dt + \varphi_t S_t \sigma dW_t.$$

En identifiant les parties en dt et en partie Brownienne dW , on a nécessairement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) &= \varphi_t \\ \frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t) + bS_t \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, S_t) &= rv(t, S_t) + \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) S_t(b - r). \end{aligned}$$

Après simplification, on voit que la fonction v doit satisfaire l'EDP :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) - rv(t, x) = 0, \quad t \in [0, T[, x > 0. \quad (3.1)$$

Cette EDP est appelée EDP de Black-Scholes à laquelle il faut bien entendu rajouter la condition terminale correspondant à la réplication de l'actif contingent, $v(T, S_T) = h(S_T)$:

$$v(T, x) = h(x), \quad x > 0. \quad (3.2)$$

On résume le raisonnement précédent sous la forme :

Théorème 3.1.1 *Supposons qu'il existe une solution régulière $v(t, x)$ solution du problème de Cauchy (3.1)-(3.2). Alors le flux $h(S_T)$ est répliquable par un portefeuille de valeur $v(t, S_t)$ et de couverture $\varphi_t = \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t)$ à la date t .*

Remarque 3.1.1 Le problème de la valorisation et couverture dans ce cadre se ramène donc à la résolution d'une EDP. C'est originellement l'approche adoptée par Black et Scholes qui avec un changement de variables appropriées transforment l'EDP (3.1) en une EDP de la chaleur bien connue en physique. On en connaît une solution explicite qu'on détaillera au paragraphe suivant selon l'approche probabiliste risque-neutre. Le cours de Méthodes numériques d'EDP en finance introduit aux schémas numériques pour résoudre ces EDPs pour des modèles et options plus complexes.

Interprétation financière

Une conséquence essentielle de l'EDP d'évaluation est que le prix de l'option ne dépend pas du rendement b de l'actif risqué, i.e. de la tendance du marché à la hausse ou à la baisse, puisque ce paramètre n'apparaît pas dans l'EDP (3.1). En fait, la stratégie de couverture dynamique permet à l'émetteur de l'option de se couvrir contre les mouvements défavorables du marché. Il a annulé le risque dû à la tendance du marché. Cette stratégie de couverture est donnée par la dérivée du prix de l'option, appelée aussi *delta* de l'option. Sur le plan statistique ou de la calibration de modèle, cela fait un paramètre en moins à estimer. Notons que le risque dû aux fluctuations du marché est toujours présent et influe significativement sur le prix de l'option par l'intermédiaire du paramètre de volatilité. C'est la gestion de ce paramètre qui va décrire le savoir-faire du trader.

3.1.2 Valorisation risque-neutre

Nous pouvons utiliser une approche probabiliste pour déterminer la solution du prix d'arbitrage de Black-Scholes. En effet, d'après la règle d'évaluation risque-neutre, le prix d'un actif contingent $h(S_T)$ est égal à la date t :

$$\Pi_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où \mathbb{Q} est la probabilité risque-neutre sous laquelle la dynamique du sous-jacent est :

$$dS_s = rS_s ds + \sigma S_s d\widehat{W}_s. \quad (3.3)$$

Notons que pour tous $s > t$, on a

$$\begin{aligned} S_s &= S_0 \exp \left(\sigma \widehat{W}_s + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) s \right) \\ &= S_0 \exp \left(\sigma \widehat{W}_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \cdot \exp \left(\sigma (\widehat{W}_s - \widehat{W}_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (s - t) \right) \\ &= S_t \exp \left(\sigma (\widehat{W}_s - \widehat{W}_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (s - t) \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Puisque l'incrément du mouvement Brownien $\widehat{W}_s - \widehat{W}_t$ est indépendant de S_t et \mathcal{F}_t , on voit que le conditionnement de toute fonction $h(S_s)$ par rapport à \mathcal{F}_t donne le même résultat que le conditionnement par rapport à la seule valeur courante S_t . C'est une propriété générale des processus de diffusion qu'on appelle propriété de Markov. Le prix de l'option $h(S_T)$ est donc :

$$\Pi_t = v(t, S_t),$$

où la fonction de prix v est égale à

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h(S_T^{t,x}) \right], \quad (3.5)$$

avec $S^{t,x}$ désignant la solution de (3.3) partant de x à la date t et donc explicitée par (3.4) avec $S_t = x$. Le lien avec l'approche d'évaluation EDP est donné par le résultat suivant :

Théorème 3.1.2 *Soit la fonction v donnée par la représentation risque-neutre (3.5). Si v est régulière alors v est solution de l'EDP de Black-Scholes (3.1) avec la condition terminale (3.2).*

Preuve. Soit $\tilde{V}_t = e^{-rt} v(t, S_t)$. Puisque $\tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-rT} h(S_T) | \mathcal{F}_t]$, c'est une \mathbb{Q} -martingale. De plus, par la formule d'Itô (sous \mathbb{Q}), on a :

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= e^{-rt} dv(t, S_t) - r e^{-rt} v(t, S_t) dt \\ &= e^{-rt} \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, S_t) - r v(t, S_t) \right) dt \\ &\quad + e^{-rt} \sigma S_t \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t) d\widehat{W}_t \end{aligned}$$

Par la propriété de \mathbb{Q} -martingale de \tilde{V} , le terme en dt ci-dessus doit s'annuler ce qui montre que v satisfait l'EDP (2.2). Finalement, puisque $S_T^{T,x} = x$, on a immédiatement la condition terminale $v(T, x) = h(x)$. \square

Remarque 3.1.2 Ce lien entre les approches d'évaluation risque-neutre et EDP est plus généralement la conséquence du théorème de représentation de Feynman-Kac, découlant lui-même de la formule d'Itô : Soit X est une diffusion dans \mathbb{R}^d vérifiant

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

et notons $X^{t,x}$ la solution de cette EDS partant de x en t . Considérons la fonction

$$v(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\int_t^s r(u, X_u^{t,x})du} f(s, X_s^{t,x})ds + e^{-\int_t^T r(s, X_s^{t,x})ds} h(X_T^{t,x}) \right].$$

Si v est régulière, alors v est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + b.D_x v + \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \sigma' D_{xx}^2 v) - rv + f &= 0 \\ v(T, x) &= h. \end{aligned}$$

La régularité de v est assurée par des conditions appropriées sur les coefficients b , σ , r , f et h , et est satisfaite dans le cadre du modèle de Black-Scholes pour des fonctions flux h à croissance linéaire, e.g. le call et le put.

Grâce au caractère gaussien dans le mouvement Brownien géométrique, on peut expliciter les représentations risque-neutre (3.5) du prix d'arbitrage des options européennes.

Proposition 3.1.1 *La fonction de prix d'une option de flux $h(S_T)$ dans le modèle de BS (2.2) est égale à*

$$v(t, x) = \int e^{-r(T-t)} h \left(x \exp \left\{ \sigma \sqrt{T-t} y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} \right) n(y) dy \quad (3.6)$$

où $n(y) = e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}$ est la densité de la loi normale centrée réduite. La fonction v s'écrit encore

$$v(t, x) = \int_0^{+\infty} h(z) \pi(t, x, z, T) dz \quad (3.7)$$

où

$$\pi(t, x, z, T) = e^{-r(T-t)} \ell_{r, \sigma^2}(T-t, x, z),$$

avec $z > 0 \rightarrow \ell_{r,\sigma^2}(t, x, z)$, la densité de la loi log-normale $S_t^{0,x}$ de paramètres r et σ^2 sous \mathbb{Q} :

$$\begin{aligned}\ell_{r,\sigma^2}(t, x, z) &= \frac{1}{z\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{1}{2}d_2^2(t, xe^{rt}, z)\right) \\ d_2(t, x, z) &= \frac{\ln(x/z) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\end{aligned}$$

Proof. D'après l'expression (3.4) de S sous \mathbb{Q} et en écrivant que $\widehat{W}_T - \widehat{W}_t \sim \sqrt{T-t}U$ où U est une loi normale centrée réduite, on a :

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h \left(x \exp \left\{ \sigma \sqrt{T-t} U + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} \right) \right],$$

d'où l'on déduit immédiatement (3.6). D'autre part, toujours d'après (3.4), on voit que sous \mathbb{Q} ,

$$\ln S_T^{t,x} \sim \mathcal{N} \left(\ln x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t), \sigma^2 (T-t) \right)$$

d'où l'on obtient par le changement de variable $z = e^y$ (voir aussi détails dans l'exercice 2.5.1) que la densité de $S_T^{t,x}$ est la fonction $z > 0 \rightarrow \ell_{r,\sigma^2}(T-t, x, z)$. On en déduit immédiatement (3.7) avec (3.5). \square

Interprétation financière

En termes financiers, $\pi(t, x, z, T)$ s'interprète comme la densité des prix d'états : c'est le prix qu'on doit payer pour toucher 1 euro si on se trouve dans l'état $S_T = z$. Par linéarité des prix, on obtient ensuite que le prix d'un actif contingent $h(S_T)$ est la somme des $h(z) \times$ le prix d'être en z . Cette notion de prix d'état a été introduite dans la littérature économique par Arrow et Debreu (on dit aussi prix d'Arrow-Debreu) qui ont reçu le prix Nobel.

Remarque 3.1.3 La formule intégrale (3.6) met la dépendance par rapport à la condition initiale sur le noyau gaussien, alors que la formule (3.7) met cette dépendance sur le noyau log-normal.

Les formules intégrales d'évaluation permettent de calculer la couverture, c'est à dire le delta d'une option, selon deux approches.

Proposition 3.1.2 1) Si la fonction h de payoff de l'option $h(S_T)$ est continue et p.p. dérivable, alors le delta du prix de l'option est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h'(S_T^{t,x}) S_T^{t,1} \right] \\ &= \int e^{-r(T-t)} h' \left(x \exp \left\{ \sigma \sqrt{T-t} y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} \right) \\ &\quad \exp \left\{ \sigma \sqrt{T-t} y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right\} n(y) dy\end{aligned}\tag{3.8}$$

2) Dans le cas général, le delta du prix de l'option est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h(S_T^{t,x}) \frac{-d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, S_T^{t,x})}{x\sigma\sqrt{T-t}} \right] \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r(T-t)} h(z) \ell_{r,\sigma^2}(T-t, x, z) \frac{-d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, z)}{x\sigma\sqrt{T-t}} dz \end{aligned} \quad (3.9)$$

Preuve. La formule (3.8) découle de la représentation (3.6) et de la dérivation sous le signe intégrale qui est possible car le noyau gaussien n est très régulier. La formule (3.9) découle de la représentation (3.7) dans laquelle la dépendance en la condition initiale est exprimée dans le noyau log-normal ℓ_{r,σ^2} et en remarquant que

$$\frac{\partial \ell_{r,\sigma^2}}{\partial x}(t, x, z) = \ell_{r,\sigma^2}(t, x, z) \frac{-d_2(t, xe^{rt}, z)}{x\sigma\sqrt{t}}.$$

□

Interprétation financière

Dans la première approche, lorsque le payoff $h(S_T)$ de l'option est régulier, le calcul du delta de l'option à la date t revient à évaluer le prix d'un actif contingent de flux terminal $h'(S_T) \frac{\partial S_T}{\partial x}$ où $\frac{\partial S_T}{\partial x}$ est la dérivée du prix par rapport à l'état initial $S_t = x$, appelé processus tangent de S , et égal dans le modèle de Black-Scholes à S_T/S_t . Dans la seconde approche, appelée parfois approche par densité, le calcul du delta en t revient à évaluer le prix d'un produit dérivé de flux terminal $h(S_T) \frac{-d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, S_T)}{x\sigma\sqrt{T-t}}$.

Remarque 3.1.4 1. Les deux formules (3.8)-(3.9) sont bien évidemment équivalentes et s'obtiennent l'une à partir de l'autre par intégrations par parties. Elles sont utiles lorsqu'on calcule le prix par des méthodes de Monte-Carlo. En effet, l'erreur étant proportionnelle à la variance de la variable dont on cherche à calculer l'espérance par simulation, on aura intérêt à choisir (si c'est possible) la méthode qui conduit à une variable de variance la plus petite.

2. La formule (3.9) s'applique pour les payoffs réguliers comme le call $h(x) = (x - K)_+$ ou le put $h(x) = (K - x)_+$. La formule générale (3.9) est utilisée pour des payoffs irréguliers, typiquement les options digitales $h(S_T) = 1_{S_T > K}$. Notons que cette fonction payoff discontinue $h(x) = 1_{x > K}$ est dérivable partout de dérivée nulle sauf en $x = K$ où la dérivée n'est pas définie. On ne peut pas appliquer la formule (3.8) qui donnerait un delta de couverture nulle, ce qui n'est pas vraie. L'approche par densité conduisant à la formule (3.9) est un cas spécial d'une méthode beaucoup plus générale basée sur le calcul de Malliavin.

3.2 Formules fermées de Black and Scholes

La formule de Black-Scholes concerne plus spécifiquement les call et put pour lesquels on a une formule explicite. C'est d'ailleurs ce qui a contribué à son renommée parmi les praticiens et les académiques, et a valu à ses auteurs le prix Nobel.

3.2.1 La formule

Théorème 3.2.3 *Le prix d'un call de maturité T , de strike K , de sous-jacent $S_t = x$ à la date t est donné par :*

$$C(t, x, K, T) = xN(d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, K))$$

où N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$\begin{aligned} d_1(t, x, y) &= d_2(t, x, y) + \sigma\sqrt{t} \\ d_2(t, x, y) &= \frac{\ln(x/y) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Le delta du call est égal à :

$$\frac{\partial C}{\partial x}(t, x, K, T) = N(d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K))$$

et représente le nombre de parts à investir dans l'actif risqué à la date t quand $S_t = x$.

Preuve. Pour alléger les notations, on calcule pour $t = 0$ et on note $S_T^x = S_T^{0,x}$ la solution du Brownien géométrique partant de x en $t = 0$. Le point important est d'introduire l'ensemble d'exercice du call :

$$\mathcal{E} = \{S_T^x > K\}.$$

En notant $U = \widehat{W}_T/\sqrt{T}$ qui suit une loi normale centrée réduite sous \mathbb{Q} , on voit que

$$\mathcal{E} = \{U < d_2\} \quad \text{avec} \quad d_2 = d_2(T, xe^{rT}, K)$$

On linéarise alors le payoff du call en écrivant le prix comme somme de deux payoffs :

$$C(0, x, K, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(S_T^x - K)_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_T^x 1_{\mathcal{E}}] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}K 1_{\mathcal{E}}].$$

Le premier terme se calcule avec la formule (3.6) utilisant la densité $n(y)$ de la loi gaussienne U :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^x 1_{\mathcal{E}}] &= \int_{-\infty}^{d_2} xe^{-rT} \exp\left(-\sigma\sqrt{T}y + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) n(y) dy \\ &= x \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{T})^2\right) dy \\ &= xN(d_2 + \sigma\sqrt{T}) = xN(d_1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec $d_1 = d_1(T, xe^{rT}, K) = d_2 + \sigma\sqrt{T}$. Le deuxième terme se calcule aisément :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} K 1_{\mathcal{E}}] = Ke^{-rT} \mathbb{Q}[\mathcal{E}] = Ke^{-rT} \mathbb{Q}[U < d_2] = Ke^{-rT} N(d_2).$$

Le calcul du delta peut soit être effectué directement sur la formule explicite précédente $C(t, x, K, T)$ en dérivant par rapport à x . Une autre méthode plus rapide est d'utiliser la formule de dérivation (3.8) sous le signe espérance en notant que la fonction $h(x) = (x - K)_+$ est dérivable p.p. avec $h'(x) = 1_{x > K}$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x}(0, x, K, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} 1_{S_T^x > K} \frac{S_T^x}{x} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} 1_{\mathcal{E}} \frac{S_T^x}{x} \right] \\ &= N(d_1), \end{aligned}$$

d'après le calcul déjà fait (3.10). \square

On a de même une formule explicite pour le put et son delta, qu'on peut dériver par exemple avec la formule de parité call-put, voir exercice (3.6.4).

3.2.2 Propriétés du prix des calls

- Nous avons déjà vu dans l'exercice (1.4.2) par un raisonnement d'arbitrage statique que le prix du call satisfait les bornes :

$$(x - Ke^{-r(T-t)})_+ \leq C(t, x, K, T) \leq x.$$

On retrouve ce résultat par la règle d'évaluation risque-neutre. En effet, on a $C(t, x, K, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T^{t,x} - K)_+] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} S_T^{t,x}] = S_t^{t,x} = x$. De plus, $C(t, x, K, T) \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T^{t,x} - K)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} S_T^{t,x}] - Ke^{-r(T-t)} = x - Ke^{-r(T-t)}$. On obtient alors la borne inférieure puisque le prix du call est positif.

- Puisque $d_1(t, x, y)$ est croissante par rapport à x , ceci montre d'après la formule du delta que celui est croissante en x . Le prix du call est donc une fonction convexe du sous-jacent. D'autres propriétés du prix du call en fonction des autres paramètres de volatilité, strike et maturité seront examinés ci-dessous.
- Le prix du call est une fonction homogène du sous-jacent et du strike au sens où :

$$C(t, \lambda x, \lambda K, T) = \lambda C(t, x, K, T), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

On exprime ainsi souvent le strike en pourcentage du cours de l'action.

- Lorsque l'option est à la monnaie forward, i.e. $K = xe^{r(T-t)}$, le prix du call est

$$\begin{aligned} C(t, x, K, T) &= x \left[N\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) - N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}\right) \right] \\ &\simeq 0,4x\sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

3.2.3 Implémentation de la formule

Pour mettre en oeuvre pratiquement la formule de Black and Scholes, on a besoin des éléments suivants :

★ une approximation de la fonction de répartition $N(d)$. Il y a plusieurs méthodes de calcul efficaces de N , par exemple celles basées sur la simulation de la loi gaussienne. Signalons aussi une approximation par :

$$N(d) \simeq 1 - \frac{1}{2\pi} e^{-d^2/2} (af(d) + bf(d)^2 + cf(d)^3),$$

avec

$$\begin{aligned} f(d) &= \frac{1}{1 + 0,33267d} & a &= 0,4361836 \\ b &= -0,1201676 & c &= 0,937298. \end{aligned}$$

★ Le prix d'exercice et la date d'expiration sont spécifiés sans ambiguïté dans le contrat.

★ Le temps jusqu'à maturité (ou maturité restante $T - t$) est plus difficile à préciser : faut-il compter tous les jours ou seulement les jours où les marchés sont ouverts ? Ce temps jusqu'à maturité apparaît dans la formule de Black and Scholes dans deux termes. Dans le facteur d'actualisation $e^{r(T-t)}$, le nombre de jours du calendrier est approprié car les intérêts courent tous les jours. Dans le terme $\sigma\sqrt{T-t}$, la réponse est plus ambiguë car ici le temps jusqu'à maturité est lié à la volatilité. Or des études empiriques ont montré que les week-ends et jours fériés sont nettement moins risqués. Souvent les traders ajustent cette maturité restante à un nombre de jours compris entre le nombre de jours du calendrier et celui du nombre de jours ouvrés. Par exemple ils conviennent que 1 jour non ouvrable = 1/3 jour d'une journée ouverte.

★ Le cours de l'action courante est un cours de négociation. Quel est le bon cours, celui du matin, du soir, le plus fort, le plus faible ... Les cours publiés dans les journaux sont souvent des cours reconstitués mid-market, i.e. moyenne entre le prix de l'offre et le prix de ventre (bid-ask).

★ Le taux d'intérêt supposé constant dans le modèle de BS est le taux sans risque annuel. Un ordre de grandeur de ce taux est entre 2 et 12%. Il faut noter qu'en général, les taux ne sont pas constants sur les marchés et il y a des extensions du modèle de BS avec des taux déterministes ou aléatoires. On étudiera plus tard les modèles de taux d'intérêts.

★ Le paramètre de volatilité σ est non directement observable sur le marché. C'est un paramètre clé et il fait l'objet d'une discussion séparée dans la section 3.4. Signalons juste à présent que son ordre de grandeur dépend beaucoup de la nature du titre sous-jacent : dans les marchés d'actions, il varie entre 30 et 70%, dans les marchés de change entre 10 et 30% et dans les marchés de taux d'intérêt entre 8 et 30%.

3.3 Sensibilité et grecques

Nous analysons l'impact des différents paramètres sur le prix du call dans le modèle de Black-Scholes. Rappelons que ce prix noté $C(t, x, K, T, r, \sigma)$ dépend :

- de la date courante t et de la valeur x de l'action : ce sont les variables d'état
- de la maturité et du strike K : ce sont les paramètres de l'option
- du taux sans risque r et de la volatilité σ : ce sont les paramètres du modèle.

La sensibilité du prix du call à ces paramètres est un facteur très important dans la gestion de la couverture de l'option. Ces sensibilités sont usuellement appelées *grecques* en relation avec l'alphabet correspondant. Puisque dans la formule de Black-Scholes, le temps t et la maturité T interviennent seulement à travers la maturité restante $T - t$, pour alléger les notations, on ne calculera ces sensibilités que pour $t = 0$ (il suffit de remplacer T par $T - t$ à la date t) et on ne rappellera pas les variables dans les expressions de C , d_1 et d_2 .

$$\begin{aligned}
 \text{Delta} = \Delta &:= \frac{\partial C}{\partial x} = N(d_1) > 0 \\
 \text{Gamma} = \Gamma &:= \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}n(d_1) > 0 \\
 \text{Theta} = \Theta &:= \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}n(d_1) + rKe^{-rT}N(d_2) > 0 \\
 \text{Vega} = \mathcal{V} &:= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = x\sqrt{T}n(d_1) > 0 \\
 \text{rho} = \rho &:= \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2) > 0 \\
 &\quad \frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rT}N(d_2) < 0.
 \end{aligned}$$

(on rappelle que $n = N'$ est la densité de la normale centrée réduite). Ces calculs aisés sont laissés en exercice. L'interprétation financière de ces quantités et leur signe est claire. Le delta qui mesure la variation du prix de call par rapport aux variations du sous-jacent est positif et est le nombre de parts que l'investisseur doit donc acheter pour se couvrir. Le Gamma représente la sensibilité de ce portefeuille de couverture par rapport aux variations du prix. C'est un paramètre important car il indique si on doit changer souvent de portefeuille : les traders préfèrent en général avoir des bornes de contraintes sur leur gamma. Le Theta mesure la variation du prix du call en fonction de sa maturité et son signe positif indique que plus l'échéance est élevée, plus le prix du call est grand. Le Vega qui mesure la variation du prix du call à la volatilité est positif et indique donc que plus le sous-jacent est risqué, plus le prix du call est élevé. On a une interprétation similaire pour le rho. Finalement, le dernier calcul montre que le prix du call est décroissant avec le strike ce qui est logique puisque le payoff du call est lui même décroissant avec le prix d'exercice.

L'EDP de Black-Scholes (3.1) s'écrit aussi avec les notations des grecques (notons que Θ est la dérivée par rapport à $T - t$ et donc $\frac{\partial C}{\partial t} = -\Theta$) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \Gamma + rx\Delta - rC - \Theta = 0.$$

En notant que $\sigma^2 x^2 \Gamma = \sigma \mathcal{V}/(T - t)$, on peut aussi l'exprimer comme :

$$\frac{1}{2} \frac{\sigma}{T - t} \mathcal{V} + rx\Delta - rC - \Theta = 0.$$

Cette égalité est utile et permet de relier entre elles les différentes sensibilités étant donnés les paramètres du modèle et de l'option.

3.4 Volatilité

La *volatilité* est le paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. On appelle usuellement volatilité locale ou instantanée d'un actif de prix X_t le coefficient éventuellement aléatoire σ_t^X défini par :

$$dX_t = X_t (b_t dt + \sigma_t^X dW_t).$$

Dans le cadre de la formule de Black-Scholes, la volatilité locale est constante et cette volatilité σ est le seul paramètre qui n'est pas directement observable. Dans la pratique, deux approches sont utilisées pour l'identifier :

- la méthode “historique” : ce sont des méthodes empiriques utilisant les données historiques sur les cours de l'action
- la méthode implicite : ce sont des méthodes basées sur l'observation des prix des options.

3.4.1 La volatilité historique

La méthode historique est une méthode statistique qui utilise la propriété d'indépendance des rendements logarithmiques. Précisément, en notant $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ l'intervalle de temps entre deux observations t_{k-1} et t_k du prix, on a :

$$Y_k := \ln \left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right) = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_{t_k},$$

où $\mu = b - \sigma^2/2$ et les incréments $\Delta W_{t_k} = W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}^*$, sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) de loi normale centrée de variance Δt . Autrement dit, les rendements logarithmiques Y_k , $k \in \mathbb{N}^*$, sont i.i.d. de loi normale de moyenne $\mu \Delta t$ et

de variance $\sigma^2 \Delta t$. Si on a observé n rendements Y_1, \dots, Y_n , on a donc des estimateurs standard non biaisés de μ et σ^2 avec :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{k=1}^n Y_k, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-1)\Delta t} \sum_{k=1}^n (Y_k - \hat{\mu}\Delta t)^2.$$

Le $\hat{\sigma}$ estimé ainsi est appelé *volatilité historique*. L'unité de temps usuelle est l'année et en considérant des observations journalières, on a $\Delta t = 1/300$ (en supposant une moyenne de 300 jours de trading). On retient en général des valeurs de n comprises entre 50 et 180 jours.

Remarque 3.4.5 Les méthodes d'estimation doivent en principe être précédées de tests statistiques d'adéquation de modèles, notamment pour tester si l'hypothèse de normalité pour les rendements logarithmiques peut être retenue. Les tests effectués sur les données de marché permettent en fait rarement de valider cette hypothèse. Il y a de nombreux travaux pour trouver des modèles plus adéquats, par exemple les modèles ARCH en temps discret ou les modèles à volatilité stochastique. Ces points sont abordés dans le cours d'économétrie de la finance.

3.4.2 La volatilité implicite

La méthode implicite ne fait pas du tout référence à une notion statistique. Elle repose sur le fait que dans un marché liquide, la loi de l'offre et de la demande permet de fixer des prix d'équilibre qui correspondent à un consensus de marché. Le marché se sert alors moins des modèles pour fixer des prix (sauf sur des options plus complexes), que pour évaluer et couvrir le risque associé à une option.

Dans cette optique, le paramètre de référence est la *volatilité implicite* : elle est obtenue en inversant la formule de Black-Scholes qui donne le prix C^{BS} du call par rapport au prix C^{obs} du call observé sur le marché, à un niveau de cours actuel donné, pour une maturité et un strike donné. Cette volatilité implicite σ^{imp} est donc donné par la relation :

$$C^{BS}(t, x, K, T, \sigma^{imp}) = C^{obs}(t, x, K, T).$$

C'est donc un problème dit inverse et qui définit bien de manière unique σ^{imp} puisque le prix C^{BS} de Black-Scholes est une fonction strictement croissante de la volatilité.

Il n'y a pas de formule explicite pour σ^{imp} et on a recours à des méthodes numériques pour la calculer (méthodes par dichotomie, méthode de Newton-Raphson, etc ...). Notons que σ^{imp} dépend du strike et de la maturité liés au prix du call observé. Souvent, on calcule cette volatilité implicite pour différents strikes et/ou différentes maturités de call et on représente alors son graphe en fonction du strike et/ou de la maturité. Si le modèle de Black-Scholes "gouvernait" effectivement la réalité des marchés, on devrait

en théorie trouver une volatilité implicite constante en fonction de ces paramètres. En fait, ce qu'on observe plus ou moins est une volatilité implicite décroissante en dehors de la monnaie et croissante dans la monnaie : ce phénomène est communément appelé le *smile* de volatilité, en référence à la figure souriante de la volatilité implicite. Ce smile n'est pas statique et sa forme évolue aussi en fonction de la maturité. La volatilité implicite peut s'écarter significativement de la volatilité historique car elle est censée refléter la volatilité future anticipée par le marché. Elle incorpore également comme on vient de le voir toutes les incertitudes sur la qualité du modèle utilisé.

Ce paramètre de volatilité implicite est un outil clé dans la gestion des risques car il permet à partir de la connaissance d'un prix d'option de mettre en place des stratégies de couverture et les mesures de sensibilité associées grâce au calcul des grecques.

3.5 Autres types d'options

On considère dans ce paragraphe d'autres types d'options que les options européennes. Le problème de valorisation de ces options est plus difficile que pour les payoffs européens. On se contente ici de décrire ces produits dérivés sans faire d'étude mathématique rigoureuse mais plutôt en donnant les idées intuitives. On se placera le plus souvent dans le cadre du modèle de Black et Scholes.

3.5.1 Options américaines

Contrairement aux options européennes qui ne donne le droit à son détenteur de n'exercer qu'à maturité T et de recevoir ainsi un flux terminal $h(S_T)$, une option américaine permet à son détenteur de l'exercer à toute date t avant la maturité T et de recevoir alors le flux $h(S_t)$. Bien entendu, le prix d'une option américaine est supérieure au prix d'une option européenne puisqu'il donne plus de droits.

La représentation probabiliste du prix d'une option américaine utilise la notion de temps d'arrêt. Rappelons qu'un temps d'arrêt τ est une variable aléatoire positive qui ne regarde pas vers le futur, ce qui signifie que si t est la date actuelle, on sait si l'évènement $\{\tau \leq t\}$ a eu lieu ou non. Ceci se formalise par la propriété que $\{\tau \leq t\}$ est \mathcal{F}_t -mesurable. Le détenteur d'une option américaine peut choisir tout temps d'arrêt pour exercer son option. On montre que le prix d'une option américaine de payoff $(h(S_t))_{0 \leq t \leq T}$ à la date $t = 0$ est donné par :

$$\pi_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau} h(S_\tau)],$$

où $\mathcal{T}_{0,T}$ est l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[0, T]$. L'explication intuitive de ce résultat est le suivant : si on savait que le détenteur de l'option exercera au temps d'arrêt τ , alors la valeur de l'option serait égale à la valeur de l'option européenne

correspondante de maturité τ , donc $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau}h(S_\tau)]$. Mais, l'émetteur de l'option ne sait pas quand le détenteur va l'exercer et va charger le prix au maximum parmi tous les exercices possibles. De manière similaire, le détenteur veut exercer l'option à la date qui lui permet d'obtenir la plus haute valeur.

Quelle est la formulation EDP du prix d'une option américaine dans le modèle de Black-Scholes ? On en donne ici une justification heuristique. Notons par $v(t, S_t)$ le prix à la date t et considérons le prix actualisé $e^{-rt}v(t, S_t)$. Par la formule d'Itô, on a sous la probabilité risque-neutre

$$d(e^{-rt}v(t, S_t)) = e^{-rt} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + rS_t \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv \right) (t, S_t) dt + \dots d\hat{W}_t \quad (3.11)$$

Dans le cas d'une option européenne, le prix actualisé est égal à la richesse actualisée du portefeuille de réplication et est donc une martingale sous la probabilité risque-neutre : on obtient l'EDP de Black-Scholes. Ici, en plus, dans le cas d'une option américaine, l'émetteur de l'option peut recevoir de l'argent qu'il peut consommer si l'acheteur n'exerce pas l'option de manière optimale. Ceci se traduit par le fait que la tendance dans la richesse actualisée est négative :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv \leq 0. \quad (3.12)$$

D'autre part, puisque que le détenteur de l'option peut à toute date t , obtenir le flux $h(S_t)$ s'il exerce à cette date, on a

$$v(t, x) \geq h(x). \quad (3.13)$$

On appelle région de continuation, noté \mathcal{C} , l'ensemble des valeurs de date et prix (t, x) pour lesquels il n'est pas optimal d'exercer l'option lorsque (t, S_t) est dans cette région. De manière similaire, on appelle région d'exercice, l'ensemble complémentaire noté \mathcal{E} , i.e. l'ensemble des valeurs de date et prix (t, x) pour lesquels il est optimal d'exercer l'option. Intuitivement il sera optimal d'exercer l'option pour les valeurs de (t, S_t) pour lesquels le prix de l'option est égal au payoff en cas d'exercice immédiat, i.e. lorsque $v(t, S_t) = h(S_t)$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* : v(t, x) = h(x) \}, \\ \mathcal{C} &= \{ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* : v(t, x) > h(x) \}. \end{aligned}$$

De plus, il n'y a pas de consommation possible pour le détenteur de l'option jusqu'à l'exercice optimal de l'option, auquel cas le terme de tendance dans (3.11) doit être nul. Ceci signifie que l'EDP de Black-Scholes est valable dans la région de continuation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{C}. \quad (3.14)$$

Les relations (3.12)-(3.13)-(3.14) s'écrivent parfois sous forme d'inéquation variationnelle :

$$\min \left[-\frac{\partial v}{\partial t} - rx \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rv, v - h \right] = 0,$$

auquel il faut rajouter la condition terminale

$$v(T, x) = h(x).$$

C'est un problème dit à frontière libre où la frontière est la courbe séparant la région d'exercice de la région de continuation. Elle est dite libre car elle est inconnue et fait partie de la solution du problème. Il n'y a pas de formule explicite pour le prix d'une option américaine et on a recours à des méthodes numériques pour résoudre l'inéquation variationnelle satisfaite par le prix.

Remarque 3.5.6 Le prix d'un call américain est égal au prix d'un call européen, i.e. il n'est jamais optimal d'exercer un call avant sa maturité. En effet, si le call américain de sous-jacent S , de strike K était exercé en $t < T$ la maturité, son détenteur recevrait $S_t - K$. Or on sait que la valeur du call européen correspondant est supérieure ou égale à $S_t - Ke^{-r(T-t)}$, qui est strictement supérieure à $S_t - K$. L'exercice prématuré du call n'est donc pas optimal. On s'intéresse généralement alors au cas du put américain qui est différent du put européen.

3.5.2 Options exotiques

Les options call et put sont souvent appelées options vanilles. Les options de nature différentes sont appelées options exotiques. Ce sont des produits complexes qui ont pris une réelle importance depuis les années 90. Ces options sont traitées sur les marchés de gré à gré et visent à répondre à des besoins spécifiques d'assurance des institutions financières. Il n'y a virtuellement pas de limites, si ce n'est l'imagination des investisseurs, à la nature des options exotiques. Typiquement, ce sont des options qui ne dépendent pas seulement de la valeur terminale du sous-jacent, mais en plus du maximum, minimum ou de la moyenne des cours sur l'intervalle $[0, T]$. On dit que ce sont des options path-dependent. Nous nous intéressons plus particulièrement aux options barrières, lookback et asiatiques, et dans le contexte de Black et Scholes.

Options barrières

Ces options sont populaires car elles coûtent moins chères que leur contrepartie vanille, mais elles ont aussi plus de difficultés à valoriser. L'explication provient de ce que leur payoff à la maturité dépend du fait que le sous-jacent ait traversé ou non durant l'intervalle $[0, T]$ un ou plusieurs niveaux (barrière) fixé, et donc le nombre de configurations possibles d'exercice de l'option est moindre que pour une option standard équivalente. Les plus courantes sont :

- *Knock-out options* : l'option expire automatiquement lorsque le sous-jacent touche une ou plusieurs barrières fixées.

- *Knock-in options* : l'option est activée si les barrières sont touchées.

On considère pour simplifier le cas d'une seule barrière, notée L ou H selon qu'il s'agit d'une barrière basse ou haute, et qui est fixée au même titre que le prix d'exercice K , et on en donne quelques exemples :

Down-and-out option : le droit d'exercice de l'option est perdue si le prix du sous-jacent S descend en dessous de L . Le prix d'un Down-and-out call est donc à la date $t = 0$:

$$DOC(S_0, K, L) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\min_{[0,T]} S_t > L} \right]$$

Bien évidemment, on suppose que $L < S_0$ sinon le prix est trivialement nul. On peut encore exprimer ce prix comme

$$DOC(S_0, K, L) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{T_L > T} \right],$$

où T_L est le temps d'arrêt où le sous-jacent franchit pour la première fois la barrière basse L , soit

$$T_L = \inf\{t : S_t \leq L\} = \inf\{t : S_t = L\}.$$

Down-and-in option : le droit d'exercice de l'option est autorisé seulement si le prix du sous-jacent S descend en dessous de L . Le prix d'un Down-and-in call est donc à la date $t = 0$:

$$DIC(S_0, K, L) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\min_{[0,T]} S_t \leq L} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{T_L \leq T} \right].$$

On observe clairement que

$$DOC(S_0, K, L) + DIC(S_0, K, L) = Call(S_0, K).$$

Up-and-out and Up-and-in option : Cette option possède les mêmes caractéristiques que la DOC ou DIC mais cette fois-ci la barrière $H > S_0$ est montante. Le prix d'un Up-and-out call est donc :

$$UOC(S_0, K, H) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\max_{[0,T]} S_t < H} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_T - K)_+ 1_{T_H > T} \right],$$

où T_H est le temps d'arrêt où le sous-jacent franchit pour la première fois la barrière haute H , soit

$$T_H = \inf\{t : S_t \geq H\} = \inf\{t : S_t = H\}.$$

Le prix d'un Up-and-in call est :

$$UIC(S_0, K, H) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\max_{[0,T]} S_t \geq H} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{T_H \leq T} \right].$$

On a clairement

$$UOC(S_0, K, L) + UIC(S_0, K, L) = Call(S_0, K).$$

Le calcul du prix de ces options barrières fait intervenir la loi de S_T et de son maximum sur $[0, T]$. Il peut être explicitement calculé dans le modèle de Black-Scholes car on connaît la densité jointe du mouvement Brownien et de son maximum grâce au principe de réflexion. Il y a une autre façon utilisant moins de mathématiques et basée sur la formule de symétrie du call-put due à Peter Carr.

Options lookback

Ces options sont similaires au call ou put, sauf qu'ici le prix d'exercice est le maximum ou minimum du sous-jacent sur $[0, T]$. Par exemple, le payoff d'un lookback call est

$$\left(S_T - K \min_{[0, T]} S_t \right)_+,$$

et celui d'un lookback put est

$$\left(K \max_{[0, T]} S_t - S_T \right)_+.$$

Il y a des formules explicites pour le prix de ces options lookback dans le cas du modèle de Black et Scholes.

Options asiatiques

Le payoff de ces options dépend de la moyenne du sous-jacent sur l'intervalle $[0, T]$. De cette manière, il est ainsi moins sensible à la valeur finale S_T du sous-jacent. Par exemple, le payoff d'un call asiatique est

$$\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+.$$

Il y a une formule quasi-explicite pour le prix de ces options dans le modèle de Black-Scholes dû à Geman et Yor et utilisant de manière intensive les processus de Bessel. Une autre approche consiste à écrire l'EDP de valorisation en introduisant la variable d'état :

$$Y_t = \frac{1}{S_t} \left(\frac{1}{T} \int_0^t S_u du - K \right).$$

3.6 Exercices

3.6.1 Convexité du prix

Montrer dans le modèle de Black-Scholes que si le payoff de l'option $h(S_T)$ est une fonction convexe du sous-jacent, alors il en est de même de son prix d'arbitrage.

Corrigé. C'est une conséquence immédiate de la formule de représentation (3.6).

3.6.2 Coefficients déterministes dans BS

On considère un modèle de Black-Scholes avec des coefficients $r(t)$ et $\sigma(t)$ dépendant du temps. Ecrire dans ce cas l'EDP d'évaluation et la représentation risque-neutre d'une option. Comment est modifiée la formule de Black-Scholes ?

Corrigé. Un raisonnement similaire à celui décrit au paragraphe 3.1.1 montre que l'EDP de BS avec coefficients r et σ déterministes est :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + r(t)x \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) - r(t)v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T[, x \quad (3.15)$$

La condition terminale est la même, i.e. $v(T, x) = h(x)$ pour une option $h(S_T)$. Dans la règle d'évaluation risque-neutre, il suffit juste de remplacer l'actualisation par :

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right).$$

Le prix d'une option $h(S_T)$, solution de l'EDP (3.15) est donc :

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(u)du} h(S_T^{t,x}) \right],$$

où le prix sous \mathbb{Q} est donné par la formule d'Itô :

$$S_T^{t,x} = x \exp \left(\int_t^T r(u) - \frac{\sigma^2(u)}{2} du + \int_t^T \sigma(u) d\widehat{W}_u \right).$$

Ainsi sous \mathbb{Q} ,

$$\ln S_T^{t,x} \sim \mathcal{N} \left(\int_t^T r(u) - \frac{\sigma^2(u)}{2} du, \int_t^T \sigma(u)^2 du \right),$$

alors que dans le modèle standard de Black-Scholes, la moyenne et la variance de $\ln S_T^{t,x}$ sont $(r - \sigma^2/2)(T - t)$ et $\sigma^2(T - t)$. La formule de BS reste donc valable avec

$$r = R(t, T) := \frac{1}{T-t} \int_t^T r(u)du, \quad \sigma^2 = \Sigma^2(t, T) := \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(u)du.$$

3.6.3 Limite de BS quand σ tend vers 0 et $+\infty$

Montrer que les valeurs limites du prix du call pour une volatilité nulle et infinie sont les bornes inférieures et supérieures d'arbitrage :

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \downarrow 0} C(t, x, K, T, r, \sigma) &= (x - Ke^{-r(T-t)})_+ \\ \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} C(t, x, K, T, r, \sigma) &= x, \end{aligned}$$

et donner l'interprétation financière.

Corrigé. Pour alléger les notations, on omet la dépendance en t ($= 0$ pour simplifier), x , K , T , r et on ne garde que celle en la variable σ . On rappelle que

$$C(\sigma) = xN(d_1(\sigma)) - Ke^{-rT}N(d_2(\sigma))$$

où

$$d_1(\sigma) = d_2(\sigma) + \sigma\sqrt{T}, \quad d_2(\sigma) = \frac{\ln(x/K) + rT}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

En envoyant σ vers zéro, on a donc :

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} d_1(\sigma) = \lim_{\sigma \downarrow 0} d_2(\sigma) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ln(x/K) + rT > 0 \\ 0 & \text{si } \ln(x/K) + rT = 0 \\ -\infty & \text{si } \ln(x/K) + rT < 0. \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} C(\sigma) = \begin{cases} xN(+\infty) - Ke^{-rT}N(+\infty) = x - Ke^{-rT} & \text{si } \ln(x/K) + rT > 0 \\ xN(0) - Ke^{-rT}N(0) = 0 & \text{si } \ln(x/K) + rT = 0 \\ xN(-\infty) - Ke^{-rT}N(-\infty) = 0 & \text{si } \ln(x/K) + rT < 0. \end{cases}$$

Ceci montre que $\lim_{\sigma \downarrow 0} C(\sigma) = (x - Ke^{-rT})_+$. L'interprétation financière est la suivante. A la limite $\sigma = 0$, l'actif n'est plus risqué et donc on sait dès aujourd'hui si l'option sera exercé en comparant la valeur actuelle x de l'actif à la valeur du strike actualisé Ke^{-rT} . Autrement dit, le prix du call doit être égal à la valeur du payoff actualisé $(x - Ke^{-rT})_+$.

En envoyant de même σ vers l'infini, on a :

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} d_1(\sigma) = +\infty, \quad \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} d_2(\sigma) = -\infty,$$

d'où il résulte immédiatement

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} C(\sigma) = xN(+\infty) - Ke^{-rT}N(-\infty) = x.$$

L'interprétation financière est la suivante. A la limite $\sigma = +\infty$, l'action est très risqué et a de grandes chances d'être dans la monnaie $S_T > K$ à la maturité. Il a aussi de grandes chances d'être hors la monnaie mais la perte est limitée par le prix d'exercice. Le prix du call ne doit donc tenir compte que de cette grande probabilité dans la monnaie qui donne un payoff S_T très grand par rapport au strike. Le prix du call est donc le prix du sous jacent actuel pour recevoir S_T à la maturité.

3.6.4 Formule du Put

Montrer en utilisant par exemple la formule de parité call-put que le prix du put de prix d'exercice K et de maturité T est :

$$P(t, x) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, K)) - xN(-d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K))$$

et que son delta est :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = -N(-d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)).$$

Corrigé. Pour alléger les notations, on omet la dépendance dans les arguments de d_1 et d_2 . On rappelle que la parité call-put est :

$$P(t, x) = C(t, x) - x + Ke^{-r(T-t)}.$$

D'après la formule de Black-Scholes pour le call, on a donc :

$$P(t, x) = x(N(d_1) - 1) + Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)).$$

On obtient la formule énoncée du put avec la propriété de la fonction de répartition N de la loi normale centrée réduite :

$$N(d) + N(-d) = 1, \quad \forall d \in \mathbb{R}.$$

Finalement, en utilisant de nouveau la parité call-put, on obtient le delta :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) - 1 = N(d_1) - 1 = -N(-d_1).$$

3.6.5 Option à choix

Une option à choix sur un titre est un produit dérivé qui donne le droit au détenteur de choisir à une date τ s'il veut un call ou un put de maturité $T > \tau$, et de strike K . On notera C_t et P_t le prix du call et du put à la date t .

- 1) Quel est le payoff de l'option à choix ?
- 2) Vérifier que le prix d'arbitrage à la date $t = 0$ de cette option à choix est

$$\Pi_0 = C_0 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(K - S_T)1_{C_\tau < P_\tau}]. \quad (3.16)$$

- 3) Montrer que ce prix s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= C_0 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau}(Ke^{-r(T-\tau)} - S_\tau)_+] \\ &= P_0 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r\tau}(S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+]. \end{aligned}$$

Interpréter. *Indication* : utiliser la loi des espérances conditionnelles itérées en introduisant la tribu \mathcal{F}_τ par rapport à laquelle C_τ et P_τ sont mesurables et la parité call-put.

Corrigé. 1) Le détenteur de cette option choisera le call à la date τ si $C_\tau \geq P_\tau$ et le put sinon. Le payoff de cette option à la date T est donc :

$$H_T = (S_T - K)_+ 1_{C_\tau \geq P_\tau} + (K - S_T)_+ 1_{C_\tau < P_\tau}.$$

2) Le prix d'arbitrage est $\Pi_0 = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} H_T]$. En ajoutant et soustrayant $(S_T - K)_+ 1_{C_\tau < P_\tau}$ dans H_T et en notant que $(K - x)_+ - (x - K)_+ = K - x$, on a :

$$H_T = (S_T - K)_+ + (K - S_T) 1_{C_\tau < P_\tau},$$

et donc

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (S_T - K)_+] + \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (K - S_T) 1_{C_\tau < P_\tau}] \\ &= C_0 + \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (K - S_T) 1_{C_\tau < P_\tau}]. \end{aligned}$$

3) Pour calculer le second terme dans la droite de (3.16), on utilise la loi des espérances conditionnelles itérées en introduisant la tribu \mathcal{F}_τ par rapport à laquelle C_τ et P_τ sont mesurables :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (K - S_T) 1_{C_\tau < P_\tau}] &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}[\mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (K - S_T) 1_{C_\tau < P_\tau} | \mathcal{F}_\tau]] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}[1_{C_\tau < P_\tau} \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (K - S_T) | \mathcal{F}_\tau]] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}[1_{C_\tau < P_\tau} (e^{-rT} K - \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_\tau])] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}[1_{C_\tau < P_\tau} (e^{-rT} K - e^{-r\tau} S_\tau)] \\ &= \mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-r\tau} (K e^{-r(T-\tau)} - S_\tau) 1_{C_\tau < P_\tau}], \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de martingale du prix actualisé sous \mathbb{Q} . Maintenant d'après la relation de parité call-put :

$$P_\tau = C_\tau - S_\tau + K e^{-r(T-\tau)},$$

on voit que $\{C_\tau < P_\tau\} = \{S_\tau < K e^{-r(T-\tau)}\}$ et donc :

$$\mathbb{E}^\mathbb{Q}[e^{-rT} (K - S_T) 1_{C_\tau < P_\tau}] = \mathbb{E}^\mathbb{Q}\left[e^{-r\tau} \left(K e^{-r(T-\tau)} - S_\tau\right)_+\right].$$

On reconnaît dans ce dernier terme le prix d'un put de strike $K e^{-r(T-\tau)}$ et de maturité τ . Le prix de l'option choisie est donc la somme du prix d'un call de strike K , de maturité T et du prix d'un put de strike $K e^{-r(T-\tau)}$ et de maturité τ . L'autre relation

s'obtient aisément en écrivant que $(Ke^{-r(T-\tau)} - S_\tau)_+ = (Ke^{-r(T-\tau)} - S_\tau) + (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+$, d'où :

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= C_0 + \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r\tau} (Ke^{-r(T-\tau)} - S_\tau) \right] + \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r\tau} (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+ \right] \\ &= C_0 + e^{-rT} K - S_0 + \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r\tau} (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+ \right] \\ &= P_0 + \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r\tau} (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+ \right],\end{aligned}$$

en utilisant de nouveau la propriété de martingale du prix actualisé sous \mathbb{Q} et la parité call-put. On a une interprétation analogue : Le prix de l'option choisie est la somme du prix d'un put de strike K , de maturité T et du prix d'un call de strike $Ke^{-r(T-\tau)}$ et de maturité τ .

3.6.6 Options futures : formule de Black

Soit un contrat à terme sur un titre S de maturité T et $F^S(t, T)$ le prix forward de ce contrat conclu à la date t . Dans un modèle de Black-Scholes, calculer une formule de type Black-Scholes pour le prix d'arbitrage d'un call de support ce contrat forward, de strike K et d'échéance $\tau < T$.

Corrigé. Le payoff de ce call est :

$$H_\tau = (F^S(\tau, T) - K)_+,$$

et son prix d'arbitrage à la date t est

$$\Pi_t = \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r(\tau-t)} (F^S(\tau, T) - K)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

On rappelle que $F^S(t, T) = e^{r(T-t)} S_t$ (voir exercice (2.5.5)). Pour calculer le prix ci-dessus, on peut soit refaire les calculs analogues au cas du call sur S , soit plus rapidement substituer directement $F^S(\tau, T)$ dans le payoff et utiliser la formule standard de BS. On utilise cette dernière approche en réécrivant :

$$(F^S(\tau, T) - K)_+ = e^{r(T-\tau)} (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\Pi_t &= \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r(\tau-t)} e^{r(T-\tau)} (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{r(T-\tau)} \left\{ \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{-r(\tau-t)} (S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)})_+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\}.\end{aligned}$$

L'expression entre accolades est le prix d'un call sur S de strike $Ke^{-r(T-\tau)}$ et de maturité τ . En utilisant la formule standard de BS, on obtient :

$$\Pi_t = e^{r(T-\tau)} \left\{ S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-\tau)} e^{-r(\tau-t)} N(d_2) \right\},$$

avec $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau - t}$ et

$$d_2 = \frac{\ln(S_t e^{r(\tau-t)} / K e^{-r(T-\tau)}) - \frac{\sigma^2}{2}(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}.$$

On réexprime la formule avec la variable $F^S(t, T)$:

$$\Pi_t = e^{-r(\tau-t)} [F^S(t, T)N(d_1) - KN(d_2)]$$

et

$$d_2 = \frac{\ln(F^S(t, T)/K) - \frac{\sigma^2}{2}(\tau - t)}{\sigma\sqrt{\tau - t}}.$$

3.6.7 Option puissance

On considère une option de payoff $h(S_T) = S_T^n$ dans le modèle de Black-Scholes. Montrer que son prix est de la forme $v(t, x) = \varphi(t, T)x^n$. Trouver la fonction $\varphi(t, T)$ par les deux méthodes suivantes :

- (i) règle d'évaluation risque-neutre
- (ii) substituer $v(t, x) = \varphi(t, T)x^n$ dans l'EDP de Black-Scholes, obtenir une équation différentielle ordinaire (edo) pour φ et la résoudre.

Indication : Pour (i) utiliser la forme explicite de $S_T^{t,x}$, pour (ii) la solution de l'edo sera de la forme $\varphi(t, T) = e^{k(T-t)}$ avec k à déterminer.

Corrigé. (i) On a

$$S_T^{t,x} = x \exp \left[\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right]$$

d'où

$$(S_T^{t,x})^n = x^n \exp \left[n\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{n^2\sigma^2}{2}(T - t) \right] \exp \left[n \left(\frac{(n-1)\sigma^2}{2} + r \right) (T - t) \right]$$

On déduit

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} (S_T^{t,x})^n \right] = x^n \exp \left[(n-1) \left(\frac{n\sigma^2}{2} + r \right) (T - t) \right].$$

(ii) L'EDP de Black-Scholes avec sa condition terminale est

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + rx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv &= 0 \\ v(T, x) &= x^n. \end{aligned}$$

En substituant $v(t, x) = \varphi(t, T)x^n$, on trouve après avoir observé que x^n se simplifie :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + nr\varphi + \frac{n(n-1)}{2}\sigma^2 - r\varphi &= 0 \\ \phi(T, T) &= 1.\end{aligned}$$

La solution de cette edo est donnée par :

$$\varphi(t, T) = e^{k(T-t)} \quad \text{avec } k = (n-1)\left(\frac{n}{2}\sigma^2 + r\right).$$

On retrouve bien le même résultat qu'au (i).

3.6.8 Option digitale

1) Calculer le prix d'arbitrage dans le modèle de BS d'une option digitale de payoff $1_{S_T > K}$.

2) Calculer le delta de couverture de l'option digitale par la méthode de densité et retrouver le résultat par dérivation directe sur l'expression obtenue en 1).

Corrigé. 1) On sait que la région d'exercice $\{S_T^{t,x} > K\} = \{U < d_2\}$ où U suit une loi normale centrée réduite sous \mathbb{Q} et d_2 est celui de la formule de Black-Scholes. On en déduit immédiatement que le prix de l'option digitale est

$$v(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} 1_{S_T^{t,x} > K} \right] = e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.17)$$

$$d_2 = \frac{\ln(x/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.18)$$

2) D'après la formule de différentiation (3.9) par la méthode de densité, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} 1_{S_T^{t,x} > K} \frac{-d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, S_T^{t,x})}{x\sigma\sqrt{T-t}} \right] \\ -d_2(T-t, xe^{r(T-t)}, S_T^{t,x}) &= \frac{\ln(S_T^{t,x}/x) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.\end{aligned}$$

Puisque $\ln(S_T^{t,x}/x) = (r - \sigma^2/2)(T-t) - \sigma\sqrt{T-t}U$ et $\{S_T^{t,x} > K\} = \{U < d_2\}$ où d_2 est défini en (3.18), on en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) &= \int_{-\infty}^{d_2} e^{-r(T-t)} \frac{-1}{x\sigma\sqrt{T-t}} n(y) dy \\ &= e^{-r(T-t)} \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} n(d_2).\end{aligned}$$

On retrouve le même résultat en dérivant directement (3.17) en notant que

$$\frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}.$$

3.6.9 Options composées

On se place dans le cadre du modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t, \quad (3.19)$$

où \hat{W} est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . On note :

- $C_1(t, S_t)$ le prix en t d'un call européen sur S de prix d'exercice K_1 et de maturité T_1 ,

- $C_2(t, S_t)$ le prix en t d'un call sur C_1 de prix d'exercice K_2 et de maturité $T_2 < T_1$. C'est donc le prix d'une option sur option et son payoff à la maturité T_2 est $(C_1(T_2, S_{T_2}) - K_2)_+$.

1) Quelle sont les EDP satisfaites par $C_1(t, x)$ et $C_2(t, x)$ et leurs conditions terminales ?

2) Rappeler l'expression de la fonction $C_1(t, x)$?

3) En intégrant (3.19), montrer que l'on peut écrire pour tout $t > 0$:

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma \sqrt{t} U_t \right], \quad (3.20)$$

avec

$$U_t = -\frac{1}{\sqrt{t}} \hat{W}_t.$$

Quelle est la loi de U_t sous \mathbb{Q} ?

4) Montrer que l'option C_2 est exercée, i.e. $C_1(T_2, S_{T_2}) \geq K_2$, si et seulement si S_{T_2} est supérieure à une certaine valeur K^* dont on donnera une caractérisation implicite. On notera désormais

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{S_{T_1} \geq K_1\} \\ \mathcal{E}_2 &= \{S_{T_2} \geq K^*\}. \end{aligned}$$

5) a) Justifier que la valeur de l'option sur option à la date $t = 0$ s'écrit :

$$C_2(0, S_0) = e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(C_1(T_2, S_{T_2}) - K_2) 1_{\mathcal{E}_2}].$$

b) Justifier que

$$C_1(T_2, S_{T_2}) = e^{-r(T_1-T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S_{T_1} - K_1) 1_{\mathcal{E}_1} | \mathcal{F}_{T_2}].$$

c) En déduire que

$$C_2(0, S_0) = e^{-rT_1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S_{T_1} 1_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}] - K_1 e^{-rT_1} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) - K_2 e^{-rT_2} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_2).$$

Indication : on utilisera la loi des espérances conditionnelles itérées et on remarquera que $\mathcal{E}_2 \in \mathcal{F}_{T_2}$.

6) En utilisant (3.20), montrer que

$$\mathcal{E}_2 = \{U_{T_2} \leq \delta_2\},$$

où on explicitera δ_2 . En déduire $\mathbb{Q}(\mathcal{E}_2) = N(\delta_2)$ où N est la cumulative d'une gaussienne centrée réduite univariée.

7) a) Montrer que

$$\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{U_{T_1} \leq \delta_1, U_{T_2} \leq \delta_2\},$$

où on explicitera δ_1 .

b) Montrer que la loi de (U_{T_1}, U_{T_2}) sous \mathbb{Q} est une gaussienne bivariée centrée de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

avec ρ qu'on explicitera, et en déduire que

$$\mathbb{Q}(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = N_2(\delta_1, \delta_2),$$

où $(x_1, x_2) \mapsto N_2(x_1, x_2)$ est la cumulative de la gaussienne bivariée ci-dessus.

8) a) En utilisant la question 3), montrer que

$$\frac{S_{T_1}}{S_0 e^{rT_1}} = \exp \left[\sigma \hat{W}_{T_1} - \frac{1}{2} \sigma^2 T_1 \right].$$

b) On définit alors une mesure \mathbb{Q}^* de densité par rapport à \mathbb{Q} définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_{T_1}}{S_0 e^{rT_1}}.$$

Justifier que \mathbb{Q}^* est une probabilité et montrer que $W_t^* = \hat{W}_t - \sigma t$ est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q}^* .

c) En utilisant la formule de Bayes, montrer que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{T_1} 1_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}] = S_0 e^{rT_1} \mathbb{Q}^*(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2).$$

d) Calculer la loi du couple (U_{T_1}, U_{T_2}) sous \mathbb{Q}^* .

9) En déduire que

$$C_2(0, S_0) = S_0 N_2(\delta_1 + \sigma \sqrt{T_1}, \delta_2 + \sigma \sqrt{T_2}) - K_1 e^{-rT_1} N_2(\delta_1, \delta_2) - K_2 e^{-rT_2} N(\delta_2).$$

Corrigé.

1) Les EDP satisfaites sont

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + rx \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - rC_i(t, x) = 0, \quad 0 \leq t < T_i,$$

avec les conditions terminales

$$C_1(T_1, x) = (x - K_1)_+, \quad C_2(T_2, x) = (C_1(T_2, x) - K_2)_+.$$

2)

$$C_1(t, x) = xN(d_1) - K_1 e^{-r(T_1-t)} N(d_2),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{K_1 e^{-r(T_1-t)}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T_1 - t)}{\sigma \sqrt{T_1 - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T_1 - t}.$$

3) U_t suit une loi normale centrée réduite sous \mathbb{Q} .

4) Comme $C_1(T_2, x)$ est strictement croissante en x , on a $C_1(T_2, S_{T_2}) \geq K_2$ ssi $S_{T_2} \geq K^*$ avec K^* définie par

$$C_1(T_2, K^*) = K_2.$$

5) a) D'après la règle d'évaluation risque-neutre :

$$C_2(0, S_0) = e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(C_1(T_2, S_{T_2}) - K_2)_+] = e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(C_1(T_2, S_{T_2}) - K_2)1_{\mathcal{E}_2}].$$

b) On a aussi

$$C_1(T_2, S_{T_2}) = e^{-r(T_1-T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_{T_1} - K_1)_+ | \mathcal{F}_{T_2}] = e^{-r(T_1-T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_{T_1} - K_1)1_{\mathcal{E}_1} | \mathcal{F}_{T_2}].$$

c) En remplaçant l'expression b) dans a), on obtient

$$\begin{aligned} C_2(0, S_0) &= e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_2(T_2, S_{T_2})1_{\mathcal{E}_2}] - K_2 e^{-rT_2} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_2) \\ &= e^{-rT_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T_1-T_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_{T_1} - K_1)1_{\mathcal{E}_1} | \mathcal{F}_{T_2}] 1_{\mathcal{E}_2}\right] - K_2 e^{-rT_2} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_2) \\ &= e^{-rT_1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_{T_1} - K_1)1_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}] - K_2 e^{-rT_2} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_2) \\ &= e^{-rT_1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{T_1} 1_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}] - K_1 e^{-rT_1} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) - K_2 e^{-rT_2} \mathbb{Q}(\mathcal{E}_2). \end{aligned}$$

6) On a

$$\delta_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K^* e^{-rT_2}}\right) - \frac{\sigma^2}{2} T_2}{\sigma \sqrt{T_2}}.$$

Comme U_{T_2} suit une loi gaussienne centrée réduite sous \mathbb{Q} , on a $\mathbb{Q}(\mathcal{E}_2) = N(\delta_2)$.

7) a) On a

$$\delta_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_1 e^{-rT_1}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}.$$

b) Le processus W étant gaussien, on a que $(U_{T_1}, U_{T_2}) = (-\frac{1}{\sqrt{T_1}}\hat{W}_{T_1}, -\frac{1}{\sqrt{T_2}}\hat{W}_{T_2})$ suit une loi normale bivariée centrée. De plus, on a $Var_{\mathbb{Q}}(U_{T_i}) = 1$ et

$$\rho = Cov_{\mathbb{Q}}(U_{T_1}, U_{T_2}) = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} Cov_{\mathbb{Q}}(\hat{W}_{T_1}, \hat{W}_{T_2}) = \frac{\min(T_1, T_2)}{\sqrt{T_1 T_2}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

8) a) Immédiat.

b) \mathbb{Q}^* est une mesure de probabilité car $\frac{S_{T_1}}{S_0 e^{rT_1}} \geq 0$ et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{S_{T_1}}{S_0 e^{rT_1}}] = 1$. W_t^* est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q}^* par le théorème de Girsanov.

c) On a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_{T_1} 1_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_0 e^{rT_1} \frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}} 1_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}\right] = S_0 e^{rT_1} \mathbb{Q}^*(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2).$$

d) On a

$$(U_{T_1}, U_{T_2}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{T_1}}W_{T_1}^*, -\frac{1}{\sqrt{T_2}}W_{T_2}^*\right) - (\sigma\sqrt{T_1}, \sigma\sqrt{T_2}).$$

Donc la loi de (U_{T_1}, U_{T_2}) sous \mathbb{Q}^* est une loi normale bivariée, de moyenne $(-\sigma\sqrt{T_1}, -\sigma\sqrt{T_2})$ et de matrice de covariance celle de la question 7)b).

9) On a

$$\mathbb{Q}^*(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = \mathbb{Q}^*(U_{T_1} \leq \delta_1, U_{T_2} \leq \delta_2) = N_2(\delta_1 + \sigma\sqrt{T_1}, \delta_2 + \sigma\sqrt{T_2}),$$

d'après la question 8)d). En combinant les relations 6), 7)b) et la relation ci-dessus, on obtient le résultat voulu.

3.6.10 Calcul et graphes des grecques

1) Tracer le graphe du delta du call en fonction du sous-jacent.

2) Vérifier la formule des grecques Theta, Vega et rho. Tracer le graphe du Theta en fonction du sous-jacent.

Corrigé. 1) On rappelle que le delta du call est à la date $t = 0$:

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= N(d_1) \\ d_1 &= \frac{\ln(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

C'est une fonction croissante du sous-jacent x avec

$$\lim_{x \downarrow 0} \Delta(x) = N(-\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta(x) = N(+\infty) = 1.$$

De plus, on a

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}(x) = \Gamma(x) = \frac{\partial d_1}{\partial x} N'(d_1) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} n(d_1)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x^2}(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[-\frac{1}{x^2} n(d_1) + \frac{1}{x^2 \sigma\sqrt{T}} n'(d_1) \right] \\ &= -\frac{1}{x^2 \sigma\sqrt{T}} \left[1 + \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} d_1 \right] n(d_1). \end{aligned}$$

Il y a donc un changement de convexité de Δ en $1 + d_1/(\sigma\sqrt{T}) = 0$, i.e. en $x_0 = Ke^{-(r+3\sigma^2/2)T}$, et Δ est convexe (resp. concave) avant (resp. après) x_0 .

3.6.11 Volatilité de l'option

1) En notant $C(t, S_t)$ le prix du call à la date t , interpréter le terme

$$\sigma_t^C = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \sigma S_t.$$

2) On définit l'élasticité du prix du call par rapport au sous-jacent par :

$$e_t^C = \frac{\sigma_t^C}{\sigma}.$$

Montrer que $e_t^C > 1$. Interpréter.

Corrigé. 1) Par la formule d'Itô appliqué à $C(t, S_t)$, on a

$$dC(t, S_t) = C(t, S_t) (\mu_t dt + \sigma_t^C dW_t),$$

où

$$\sigma_t^C = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) \sigma S_t.$$

σ_t^C est donc la volatilité instantanée (on dit aussi locale) du call.

2) D'après la formule de Black-Scholes et du delta, on a :

$$e_t^C = \frac{S_t}{C(t, S_t)} \Delta(t, S_t) = \frac{S_t N(d_1)}{S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)} > 1.$$

Ceci signifie que le call est plus risquée (volatile) que l'action sous-jacente.

3.6.12 Volatilité implicite et robustesse de BS

Supposons que l'on utilise à tort la formule de Black-Scholes avec une volatilité constante σ^{BS} pour donner le prix C^{BS} d'un call $(S_T - K)_+$, alors que la vraie volatilité locale de l'actif est σ_t , éventuellement aléatoire mais inconnue. On note par V_t^{BS} la valeur du portefeuille de couverture mise en place avec le delta à l'aide de la volatilité σ^{BS} et par $\varepsilon_T = V_T^{BS} - (S_T - K)_+$ l'erreur de réplication à maturité. Montrer que

$$\varepsilon_T = \int_0^T e^{-r(T-t)} \frac{1}{2} ((\sigma^{BS})^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \Gamma(t, S_t) dt \quad (3.21)$$

$$= \int_0^T e^{-r(T-t)} \frac{1}{2} \frac{\sigma^{BS}}{T-t} \left(1 - \frac{\sigma_t^2}{(\sigma^{BS})^2} \right) \mathcal{V}(t, S_t) dt, \quad (3.22)$$

où Γ et \mathcal{V} sont le gamma et le vega du prix C^{BS} . Interpréter et commenter.

Corrigé. La vraie dynamique du sous-jacent sous \mathbb{Q} est :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma_t d\widehat{W}_t).$$

Appliquons la formule d'Itô à la fonction C^{BS} et au sous-jacent S_t :

$$\begin{aligned} dC^{BS}(t, S_t) &= \left(\frac{\partial C^{BS}}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x^2}(t, S_t) \right) dt \\ &\quad + \sigma_t S_t \frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t, S_t) d\widehat{W}_t \end{aligned}$$

Puisque C^{BS} est le prix de Black-Scholes pour la volatilité σ^{BS} , il vérifie l'EDP de Black-Scholes :

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} (\sigma^{BS})^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x^2}(t, x) - rC^{BS}(t, x) = 0.$$

En substituant dans la formule d'Itô ci-dessus et avec les notations des grecques $\Delta(t, x) = \frac{\partial C^{BS}}{\partial x}(t, x)$, $\Gamma(t, x) = \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x^2}(t, x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} dC^{BS}(t, S_t) &= rC^{BS}(t, S_t)dt + \frac{1}{2} ((\sigma^{BS})^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \Gamma(t, S_t)dt \\ &\quad + \sigma_t S_t \Delta(t, S_t) d\widehat{W}_t \end{aligned}$$

D'autre part, le portefeuille de couverture Δ a une dynamique V_t^{BS} vérifiant :

$$\begin{aligned} dV_t^{BS} &= (V_t^{BS} - \Delta(t, S_t)S_t)rdt + \Delta(t, S_t)dS_t \\ &= rV_t^{BS}dt + \sigma_t S_t \Delta(t, S_t) d\widehat{W}_t. \end{aligned}$$

En notant $\varepsilon_t = V_t^{BS} - C_t^{BS}$ l'erreur à la date t , qui vérifie $\varepsilon_T = V_T^{BS} - (S_T - K)_+$, on a donc :

$$d\varepsilon_t = r\varepsilon_t dt + \frac{1}{2} ((\sigma^{BS})^2 - \sigma_t^2) S_t^2 \Gamma(t, S_t) dt.$$

On obtient l'expression (3.21) par résolution immédiate de cette équation linéaire. Finalement, l'autre expression (3.22) est obtenue en exploitant la relation entre Gamma et Vega : $(\sigma^{BS})^2 x^2 \Gamma(t, x) = \sigma^{BS} \mathcal{V}(t, x) / (T - t)$.

Naturellement, si le modèle est bien spécifié, i.e. $\sigma_t = \sigma^{BS}$, l'erreur de réplication est nulle. Dans le cas où il est mal spécifié, l'expression ci-dessus de ε_T fait apparaître clairement le vega (ou gamma) comme une mesure de l'exposition à une mauvaise estimation de la volatilité. De nombreux produits dont la volatilité est aléatoire sont tout de même évalués avec une formule de Black-Scholes. L'expression de l'erreur de réplication permet de justifier les approximations commises : par exemple, si la volatilité choisie majore la vraie volatilité, i.e. $\sigma^{BS} \geq \sigma_t$, alors le résultat est favorable au trader, i.e. $\varepsilon_T \geq 0$, si le gamma est positif, c'est à dire si le prix est convexe. C'est le cas du call et cette propriété s'étend à des payoff convexes.

Chapitre 4

Valorisation d'options européennes sur multi sous-jacents

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes focalisés sur la couverture et la valorisation d'options européennes sur un seul sous-jacent. Dans ce chapitre, nous considérons le cas d'options européennes écrits sur des actifs multi sous-jacents. La plupart des arguments développés dans le cadre unidimensionnel restent valables mais il y a de nouvelles idées, en particulier liées au choix du numéraire. Les exemples d'options multi sous-jacents sont les options index, à panier, d'échange, multi-devises, ...

4.1 Changement de numéraire

Il y a des astuces de calcul pour la valorisation d'options lorsque lorsqu'il y a plusieurs actifs sous-jacents ou encore si les taux d'intérêts sont aléatoires. Cette astuce consiste à changer l'unité de mesure : c'est la méthode du changement de numéraire. Par exemple, lorsque la valeur d'un actif est mesurée en euros, c'est la monnaie euros qui est notre numéraire. Lorsque nous actualisons la valeur d'un actif par le cash, c'est ce cash qui est notre numéraire. Il y a un certain arbitraire dans le choix de cette référence monétaire et dans un modèle, un choix pertinent de numéraire peut simplifier les calculs de valorisation de produits dérivés.

De manière générale, on définit un numéraire comme un processus N adapté strictement positif. Les exemples courants dans les applications de modèles de marché où existe comme titres de base, le cash, les zéro-coupons, des actifs risqués, sont :

(1) Le cash S^0 , i.e. la valeur obtenue en investissant une unité monétaire, disons l'euro,

continuent au taux d'intérêt r_t :

$$S_t^0 = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right).$$

(2) Le zéro-coupon de maturité T . C'est l'instrument financier qui verse 1 euro en T , et son prix à la date t est noté $B(t, T)$. Notons que $B(T, T) = 1$. Lorsque les taux d'intérêts sont déterministes, on a $B(t, T) = e^{-\int_t^T r(s)ds} = S_t^0 / S_T^0$. Dans le cas de taux d'intérêts aléatoires, les zéros-coupons et le cash sont des instruments financiers distincts.

(3) Un actif des actifs risqués S^i

Jusqu'à présent, nous avons utilisé le cash comme numéraire et défini la probabilité martingale risque-neutre associée \mathbb{Q}^0 , i.e. telle que les prix actualisés S/S^0 par le cash soient martingales sous \mathbb{Q}^0 . En marché complet, nous avons alors obtenu la règle d'évaluation risque-neutre : pour tout actif contingent H_T , son prix d'arbitrage est donné à la date 0 par

$$\Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{H_T}{S_T^0} \right]$$

Le résultat suivant montre l'invariance de la notion de probabilité martingale et de la règle d'évaluation par changement de numéraire.

Théorème 4.1.1 *Soit N un numéraire choisi parmi les titres de base. Alors il existe une probabilité $\mathbb{Q}^N \sim \mathbb{P}$ telle que les prix X des actifs de base actualisés par ce numéraire soient des \mathbb{Q}^N -martingales. Cette probabilité est caractérisée par sa densité de Radon-Nikodym par rapport à \mathbb{Q}^0 :*

$$\frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}^0} = \frac{N_T}{N_0 S_T^0}. \quad (4.1)$$

De plus, on a la formule de changement de numéraire pour la règle d'évaluation risque-neutre : pour tout actif contingent H_T en marché complet, son prix d'arbitrage est :

$$\Pi_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{H_T}{S_T^0} \right] = N_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{H_T}{N_T} \right]. \quad (4.2)$$

Ce théorème repose sur la formule de Bayes conditionnelle que nous rappelons.

Lemme 4.1.1 *(Formule de Bayes) Soit $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ sur (Ω, \mathcal{F}_T) de densité de Radon-Nikodym $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$, et notons (Z_t) la \mathbb{P} -martingale :*

$$Z_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Alors pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$, pour toute variable X_t \mathcal{F}_t -mesurable \mathbb{Q} -intégrable, on a :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right],$$

et en particulier Z_t est la densité de Radon-Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{F}_t) .

Preuve. Par définition de l'espérance conditionnelle, il suffit de montrer que pour tout évènement $A \subset \mathcal{F}_s$, on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t 1_A] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] 1_A \right]. \quad (4.3)$$

Pour cela, on utilise la formule de Bayes standard entre \mathbb{Q} et \mathbb{P} de densité $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = Z_T$ sur (Ω, \mathcal{F}_T) :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}[Z_T Y], \quad \text{pour toute variable aléatoire } Y \text{ } \mathbb{Q} - \text{intégrable.} \quad (4.4)$$

En utilisant cette formule au terme de droite de (4.3), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] 1_A \right] &= \mathbb{E} \left[Z_T \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] 1_A \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[Z_T \mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] 1_A \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] 1_A \mathbb{E}[Z_T | \mathcal{F}_s] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\frac{Z_t}{Z_s} X_t \middle| \mathcal{F}_s \right] 1_A Z_s \right] \\ &= \mathbb{E}[Z_t X_t 1_A] = \mathbb{E}[Z_T X_t 1_A], \end{aligned}$$

où on a utilisé la loi des espérances conditionnelles et la propriété de martingale de Z . En utilisant de nouveau (4.4), on obtient (4.3). Finalement, notons que la formule de Bayes de ce lemme pour $s = 0$ donne

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t] = \mathbb{E}[Z_t X_t],$$

pour toute variable X_t \mathcal{F}_t -mesurable \mathbb{Q} -intégrable, et donc Z_t est la densité de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{F}_t) . On écrit aussi $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$. \square

Preuve du théorème 4.1.1. Notons que puisque N/S^0 est une \mathbb{Q}^0 -martingale strictement positive, l'expression (4.1) définit bien une probabilité $\mathbb{Q}^N \sim \mathbb{Q}^0 : \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}^0} \right] = 1$. De plus, on a

$$Z_t := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{d\mathbb{Q}^N}{d\mathbb{Q}^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{N_t}{N_0 S_t^0}.$$

Puisque les prix actualisés par les cash X/S^0 sont des \mathbb{Q}^0 -martingales, on obtient avec la formule de Bayes pour tous $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{X_t}{N_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{Z_t X_t}{Z_s N_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{S_s^0 X_t}{N_s S_t^0} \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \frac{S_s^0 X_s}{N_s S_s^0} = \frac{X_s}{N_s}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété de \mathbb{Q}^N -martingale des prix X/N actualisés par le numéraire. La formule (4.2) découle aussi de la formule de Bayes :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{H_T}{N_T^0} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[Z_T \frac{H_T}{N_T} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{1}{N_0} \frac{H_T}{S_T^0} \right].$$

□

Remarque 4.1.1 Lorsqu'on utilise un zéro-coupon de maturité T comme numéraire $N_t = B(t, T)$ (c'est astucieux dans le cas de modèles de taux d'intérêt, voir chapitre 6), la probabilité martingale correspondante est appelée probabilité T -forward neutre et notée \mathbb{Q}^T (dans le cas de taux déterministe, $\mathbb{Q}^T = \mathbb{Q}^0$ la probabilité martingale). Par définition de \mathbb{Q}^T , on voit que le prix forward en S de maturité T est égal à

$$\begin{aligned} F^S(t, T) &= \frac{S_t}{B(t, T)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{S_T}{B(T, T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [S_T | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Le processus $F^S(t, T)$, $t \leq T$, est une \mathbb{Q}^T -martingale de valeur finale S_T .

Exemple : Considérons un call européen de maturité T et de prix d'exercice K sur un sous-jacent S . En utilisant le numéraire zéro-coupon de maturité T , le prix d'arbitrage de ce call est égal d'après la formule (4.2) :

$$C_0 = B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [(S_T - K)_+],$$

en se rappelant que $B(T, T) = 1$. En introduisant l'ensemble d'exercice $A = \{S_T > K\}$, ce prix s'écrit encore

$$C_0 = B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [S_T 1_A] - K B(0, T) \mathbb{Q}^T(A).$$

En utilisant le numéraire S pour calculer la première espérance dans le terme de droite, on a par la formule (4.2) appliqué au flux $H_T = S_T 1_A$:

$$B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{S_T 1_A}{B(T, T)} \right] = S_0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{S_T 1_A}{S_T} \right] = S_0 \mathbb{Q}^S(A),$$

d'où

$$C_0 = S_0 \mathbb{Q}^S(A) - K B(0, T) \mathbb{Q}^T(A). \quad (4.5)$$

On voit ainsi qu'on est ramené à calculer la probabilités d'exercice sous les probabilités martingales appropriées. C'est donc un calcul similaire au call standard.

4.2 Options d'échange

Une option d'échange est une option donnant le droit à son détenteur d'échanger à la maturité T un actif risqué S^2 pour un autre noté S^1 , qui peut aussi être un indice. Le payoff de cette option est donc $(S_T^1 - S_T^2)_+$.

En utilisant le numéraire S^2 , son prix d'arbitrage est d'après (4.2) :

$$C_0 = S_0^2 \mathbb{E}^{Q^{S^2}} \left[\frac{(S_T^1 - S_T^2)_+}{S_T^2} \right] = S_0^2 \mathbb{E}^{Q^{S^2}} \left[\left(\frac{S_T^1}{S_T^2} - 1 \right)_+ \right].$$

En introduisant l'ensemble d'exercice $A = \{S_T^1 > S_T^2\}$, ce prix s'écrit encore

$$C_0 = S_0^2 \mathbb{E}^{Q^{S^2}} \left[\frac{S_T^1}{S_T^2} 1_A \right] - S_0^2 Q^{S^2}(A).$$

En utilisant le numéraire S^1 pour calculer la première espérance dans le terme de droite, on a par la formule (4.2) :

$$S_0^2 \mathbb{E}^{Q^{S^2}} \left[\frac{S_T^1 1_A}{S_T^2} \right] = S_0^1 \mathbb{E}^{Q^{S^1}} \left[\frac{S_T^1 1_A}{S_T^1} \right] = S_0^1 Q^{S^1}(A),$$

d'où

$$C_0 = S_0^1 Q^{S^1}(A) - S_0^2 Q^{S^2}(A). \quad (4.6)$$

Pour expliciter les calculs de ces probabilités d'exercice, considérons par exemple un modèle où chacun des deux actifs suit un mouvement Brownien géométrique :

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1 (b_1 dt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 &= S_t^2 (b_2 dt + \sigma_2 dW_t^2), \end{aligned}$$

où W^1 et W^2 sont deux mouvements Browniens supposés indépendants pour simplifier. Pour calculer les probabilités d'exercice apparaissant dans (4.6), nous allons établir la dynamique de $I = S^1/S^2$ sous chacune des probabilités Q^{S^1} et Q^{S^2} . La probabilité Q^{S^1} est telle que $S^1/S^1 = 1$ est une Q^{S^1} -martingale, ce qui est trivial, et telle que S^2/S^1 soit une Q^{S^1} -martingale. Or par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} d \left(\frac{S_t^2}{S_t^1} \right) &= \frac{1}{S_t^1} dS_t^2 + S_t^2 d \left(\frac{1}{S_t^1} \right) + d \left\langle S_t^2, \frac{1}{S_t^1} \right\rangle \\ d \left(\frac{1}{S_t^1} \right) &= -\frac{1}{(S_t^1)^2} dS_t^1 + \frac{1}{(S_t^1)^3} d \left\langle S_t^1 \right\rangle = -\frac{1}{S_t^1} [(b_1 - \sigma_1^2) dt + \sigma_1 dW_t^1] \end{aligned}$$

d'où

$$d \left(\frac{S_t^2}{S_t^1} \right) = \frac{S_t^2}{S_t^1} [(b_2 - b_1 + \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2) dt - \sigma_1 dW_t^1 + \sigma_2 dW_t^2]$$

Par le théorème de Girsanov, la dynamique de $J = S^2/S^1$ sous \mathbb{Q}^{S^1} est donc :

$$d\left(\frac{S_t^2}{S_t^1}\right) = \frac{S_t^2}{S_t^1} \left(-\sigma_1 d\hat{W}_t^1 + \sigma_2 d\hat{W}_t^2\right),$$

où \hat{W}^1 et \hat{W}^2 sont des \mathbb{Q}^{S^1} -mouvements brownien indépendants. Par la formule d'Itô, on en déduit la dynamique de $I = 1/J$ sous \mathbb{Q}^{S^1} :

$$\begin{aligned} dI_t &= -\frac{1}{J_t^2} dJ_t + \frac{1}{J_t^3} d\langle J_t \rangle \\ &= I_t \left[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) dt - \sigma_1 d\hat{W}_t^1 + \sigma_2 d\hat{W}_t^2 \right], \end{aligned}$$

et donc

$$I_T = I_0 \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 T - \sigma_1 \hat{W}_T^1 + \sigma_2 \hat{W}_T^2\right),$$

où on a posé $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. En notant $U = (\sigma_1 \hat{W}_T^1 - \sigma_2 \hat{W}_T^2)/(\sigma\sqrt{T})$ qui suit une loi normale centrée réduite sous \mathbb{Q}^{S^1} , la probabilité d'exercice $\mathbb{Q}^{S^1}(A)$ s'explicite en :

$$\mathbb{Q}^{S^1}(A) = \mathbb{Q}^{S^1}(U < d_1) = N(d_1), \quad \text{avec} \quad d_1 = \frac{\ln(S_0^1/S_0^2) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Par symétrie, un calcul similaire nous donne

$$\mathbb{Q}^{S^2}(A) = N(d_2), \quad \text{avec} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = \frac{\ln(S_0^1/S_0^2) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

On obtient alors la formule de Margrabe pour l'option d'échange :

$$C_0 = S_0^1 N(d_1) - S_0^2 N(d_2).$$

Remarque 4.2.2 Sachant valoriser une option d'échange, on peut aussi calculer une option sur le maximum ou minimum de deux actifs en remarquant que :

$$\min(S^1, S^2) = S^2 - (S^2 - S^1)_+, \quad \max(S^1, S^2) = S^2 + (S^1 - S^2)_+.$$

4.3 Options quanto

On s'intéresse à la valorisation d'options de change, appelées aussi options quanto. Ces options ont pris une grande importance car les établissements financiers sont de plus en plus engagés sur les marchés internationaux. Pour simplifier, on se restreint à deux marchés, le marché domestique et le marché étranger. Par exemple, pour fixer les idées, le marché français où les cours des actifs sont exprimés en euros et le marché américain où les cours sont exprimés en dollars. On note X le taux de change entre les

deux marchés, c'est à dire que X représente le montant en monnaie domestique (euros) qu'il faut pour convertir une unité de monnaie étrangère (dollars). On fait l'hypothèse d'absence de coûts de transactions entre les deux monnaies. Chaque marché a sa règle d'évaluation par arbitrage : on note $\Pi_t^d(H_T^d)$ (resp. $\Pi_t^f(H_T^f)$) le prix d'arbitrage en monnaie domestique (resp. étrangère) d'un actif contingent domestique H_T^d (resp. étranger H_T^f). Par exemple, si r_d (resp. r_f) est le taux d'intérêt domestique (resp. étranger), supposés constants, et en notant \mathbb{Q}^d (resp. \mathbb{Q}^f) une probabilité martingale dite domestique (resp. étrangère), i.e. telle que les titres domestiques (resp. étrangers) actualisés par le cash du taux domestique r_d (resp. étranger r_f) soient des \mathbb{Q}^d -martingales (resp. \mathbb{Q}^f -martingales), on a :

$$\begin{aligned} \Pi_t^d(H_T^d) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}[e^{-r_d(T-t)} H_T^d | \mathcal{F}_t] \\ (\text{ resp. } \Pi_t^f &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[e^{-r_f(T-t)} H_T^f | \mathcal{F}_t]) \end{aligned}$$

D'autres règles d'évaluation, via les probabilités martingales, peuvent être choisis en utilisant un autre numéraire. De plus, pour éviter tout arbitrage entre les deux économies, on considère que tout titre étranger converti en monnaie domestique est un titre domestique. Ceci entraîne la relation de consistance entre les règles d'évaluation de chaque marché :

$$\Pi_t^d(X_T H_T^f) = X_t \Pi_t^f(H_T^f), \quad (4.7)$$

pour tout actif étranger H_T^f .

Applications :

Option d'achat sur action étrangère et strike en devises

Il s'agit de valoriser en monnaie domestique un flux étranger de payoff $(S_T^f - K^f)_+$. Son prix en monnaie domestique s'exprime d'après (4.7) à la date $t = 0$ par :

$$C_0^d = \Pi_0^d(X_T(S_T^f - K^f)_+) = X_0 \Pi_0^f((S_T^f - K^f)_+) = X_0 C_0^f(S_0^f, K^f, T)$$

où $C_0^f(S_0^f, K^f, T)$ est le prix du call sur le marché étranger. Si on a une formule fermée pour ce marché, il en est de même sur le marché domestique.

Option d'achat sur action étrangère et strike en monnaie domestique

Cette option a un payoff terminal qui s'écrit en monnaie domestique : $(X_T S_T^f - K^d)_+$ où S^f est le sous-jacent étranger et K^d le strike domestique. De plus, le flux $X_T S_T^f$ a comme prix domestique d'après (4.7)

$$\Pi_t^d(X_T S_T^f) = X_t \Pi_t^f(S_T^f) = X_t S_t^f.$$

On peut donc interpréter ce call comme un call domestique sur le sous-jacent $X S^f$ de strike K^d . Son prix d'arbitrage domestique est donc en $t = 0$

$$C_0 = \Pi_0^d((X_T S_T^f - K^d)_+) = C_0^d(X_0 S_0^f, K^d, T)$$

où $C_0^d(X_0 S_0^f, K^d, T)$ est le prix du call domestique de sous-jacent XS^f , de strike K^d et de maturité T .

Option d'achat sur devise

C'est un call de maturité T sur le taux de change X de prix d'exercice K , et donc de payoff $(X_T - K)_+$. C'est un cas particulier de l'option décrite ci-dessus lorsque l'action étrangère S^f est un zéro-coupon étranger, noté $B^f(., T)$ de même maturité T que l'option, puisque dans ce cas par définition $S_T^f = B^f(T, T) = 1$. Son prix d'arbitrage est donc :

$$C_0 = \Pi_0^d((X_T - K)_+) = C_0^d(X_0 B^f(0, T), K, T).$$

4.4 Exercices

4.4.1 Formule de Merton généralisée

On considère un modèle où le prix forward sur l'actif S de maturité T , $F(t, T) = S_t/B(t, T)$ a une volatilité déterministe $\sigma_F(t)$. La dynamique de F sous la probabilité T -forward neutre \mathbb{Q}^T est donc :

$$dF(t, T) = F(t, T)\sigma_F(t)dW_t^T, \quad (4.8)$$

où W^T est un \mathbb{Q}^T -mouvement Brownien. Le but de cet exercice est de valoriser un call de payoff $(S_T - K)_+$.

- 1) a) Quelle est la dynamique de $1/F(t, T)$ sous \mathbb{Q}^S .
- b) Expliciter alors $1/S_T$ sous \mathbb{Q}^S et \mathbb{Q}^T .
- 2) a) Calculer les probabilités d'exercice $\mathbb{Q}^S(A)$ et $\mathbb{Q}^T(A)$ où $A = \{S_T > K\}$.
- b) Montrer que le prix du call est donné par

$$C_0 = S_0 N(d_1) - KB(0, T)N(d_2)$$

où l'on explicitera d_1 et d_2 .

Corrigé. 1) a) D'après la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{F(t, T)}\right) &= -\frac{1}{F(t, T)^2}dF(t, T) + \frac{1}{F(t, T)^3}d\langle F(t, T) \rangle \\ &= -\frac{1}{F(t, T)}[-\sigma_F(t)^2 dt + \sigma_F(t)dW_t^T] \end{aligned}$$

Puisque $1/F$ est une martingale sous \mathbb{Q}^S , on en déduit par le théorème de Girsanov que sa dynamique sous \mathbb{Q}^S est

$$d\left(\frac{1}{F(t, T)}\right) = -\frac{1}{F(t, T)}\sigma_F(t)dW_t^S,$$

où W^S est un \mathbb{Q}^S -mouvement Brownien.

b) D'après la question précédente, et puisque $S_T = F(T, T)$, on a

$$\frac{1}{S_T} = \frac{B(0, T)}{S_0} \exp \left(- \int_0^T \sigma_F(t) dW_t^S - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_F(t)^2 dt \right) \quad (4.9)$$

De même, d'après (4.8), on a

$$S_T = \frac{S_0}{B(0, T)} \exp \left(\int_0^T \sigma_F(t) dW_t^T - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_F(t)^2 dt \right), \quad (4.10)$$

d'où

$$\frac{1}{S_T} = \frac{B(0, T)}{S_0} \exp \left(- \int_0^T \sigma_F(t) dW_t^T + \frac{1}{2} \int_0^T \sigma_F(t)^2 dt \right).$$

2) a) Calculons $\mathbb{Q}^S(A)$ où A est la probabilité d'exercice $A = \{S_T > K\} = \{1/S_T < 1/K\}$. D'après (4.9), on a

$$A = \left\{ - \int_0^T \sigma_F(t) dW_t^S < \ln \left(\frac{S_0}{KB(0, T)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_F(T)^2 \right\},$$

où on a posé $\Sigma_F(T)^2 = \int_0^T \sigma_F(t)^2 dt$. Puisque $-\int_0^T \sigma_F(t) dW_t^S$ suit une loi normale sous \mathbb{Q}^S , centrée de variance $\Sigma_F(T)^2$, on en déduit que

$$\mathbb{Q}^S(A) = N(d_1), \quad \text{avec} \quad d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{KB(0, T)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma_F(T)^2}{\Sigma_F(T)}.$$

Pour calculer $\mathbb{Q}^T(A)$, on utilise (4.10) et on écrit

$$A = \left\{ - \int_0^T \sigma_F(t) dW_t^T < \ln \left(\frac{S_0}{KB(0, T)} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_F(T)^2 \right\}.$$

On en déduit

$$\mathbb{Q}^T(A) = N(d_2), \quad \text{avec} \quad d_2 = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{KB(0, T)} \right) - \frac{1}{2} \Sigma_F(T)^2}{\Sigma_F(T)} = d_1 - \Sigma_F(T).$$

b) Finalement, on obtient le résultat voulu avec la formule du call (4.5) par la méthode du changement de numéraire :

$$C_0 = S_0 \mathbb{Q}^S(A) - KB(0, T) \mathbb{Q}^T(A).$$

4.4.2 Formule de Garman-Kolhagen

On suppose que les taux d'intérêts des marchés domestiques et étrangers r_d et r_f sont constants et on note $B_d(., T)$ et $B_f(., T)$ les zéros-coupons correspondants de maturité T . On suppose que le taux de change (conversion d'une unité de monnaie étrangère en monnaie domestique) suit une modélisation de type Merton-Black-Scholes :

$$dX_t = X_t(bdt + \sigma dW_t).$$

- 1) a) En utilisant le principe de non arbitrage entre les deux marchés, exprimer la dynamique de X et celle de $XB_f(., T)$ sous la probabilité martingale domestique \mathbb{Q}^d .
- b) En déduire que le call sur devise de payoff $(X_T - K)_+$ est un call domestique sur l'actif $XB_f(., T)$, et calculer alors son prix.
- 2) a) Soit $F_X(t, T)$ le prix forward en t d'une unité de monnaie étrangère délivrée en T en monnaie domestique, appelée aussi prix forward de change. Exprimer $F_X(t, T)$ en fonction de r_d , r_f et X .
- b) Montrer que le prix du call sur devise, de payoff $(X_T - K)_+$ est :

$$C_0 = e^{-r_d T} [F_X(0, T)N(d_1) - KN(d_2)],$$

où on explicitera d_1 et d_2 . Interpréter.

Corrigé. 1) a) Ce principe de non arbitrage entraîne qu'une unité étrangère capitalisée au taux r_f entre 0 et t , de valeur $S_t^f = e^{r_f t}$, et changée en monnaie domestique au prix $X_t S_t^f$, est un actif domestique. Cet actif actualisé par le cash du taux domestique r_d , doit donc être une martingale sous une probabilité martingale \mathbb{Q}^d appelée probabilité martingale domestique. La dynamique de $X S^f$ sous \mathbb{Q}^d est donc par Girsanov :

$$d(X_t S_t^f) = (X_t S_t^f)(r_d dt + \sigma d\hat{W}_t^d),$$

où \hat{W}^d est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q}^d . On en déduit immédiatement que la dynamique du taux de change sous la probabilité martingale domestique est :

$$dX_t = X_t \left[(r_d - r_f)dt + \sigma d\hat{W}_t^d \right]$$

Comme $B_f(t, T) = e^{-r_f(T-t)}$, on en déduit aussi que la dynamique de $XB_f(., T)$ est sous \mathbb{Q}^d :

$$d(X_t B_f(t, T)) = X_t B_f(t, T) (r_d dt + \sigma d\hat{W}_t^d).$$

- b) De plus comme $(X_T - K)_+ = (X_T B_f(T, T) - K)_+$, on voit que le call sur devise est un call domestique de sous-jacent $XB_f(., T)$. Son prix est donc d'après la formule de Black-Scholes

$$C_0 = X_0 B_f(0, T)N(d_1) - K e^{-r_d T} N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X_0 B_f(0,T) e^{r_d T}}{K}\right) + \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}.$$

2) a) L'unité de monnaie étrangère délivrée en T est le zéro-coupon étranger de maturité T , i.e. $B_f(t, T)$, et égal lorsque le taux d'intérêt étranger r_f est constant à

$$B_f(t, T) = e^{-r_f(T-t)}.$$

Le zéro-coupon domestique de maturité T est $B_d(t, T) = e^{-r_d(T-t)}$ puisque le taux domestique r_d est constant. On a donc :

$$F_X(t, T) = \frac{B_f(t, T) X_t}{B_d(t, T)} = e^{(r_d - r_f)(T-t)} X_t.$$

b) On remarque que $X_0 B_f(0, T) = B_d(0, T) F_X(0, T) = e^{-r_d T} F_X(0, T)$. Le prix du call s'écrit encore

$$C_0 = e^{-r_d T} [F_X(0, T) N(d_1) - K N(d_2)]$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_X(0, T)}{K}\right) + \sigma^2 T}{\sigma \sqrt{T}}, \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}.$$

C'est la formule de Black pour les options futures : le call sur devise s'interprète donc aussi comme un call de support le prix forward de change.

4.4.3 Call géométrique

On considère un modèle de Black-Scholes bidimensionnel avec deux actions S^1 et S^2 gouvernés sous la probabilité risque-neutre par :

$$dS_t^1 = S_t^1(rdt + \sigma_1 dW_t^1) \tag{4.11}$$

$$dS_t^2 = S_t^2(rdt + \sigma_2 dW_t^2), \tag{4.12}$$

où W^1 et W^2 sont deux mouvements Browniens supposés indépendants. Soit une option de payoff $h(S_T^1, S_T^2) = (S_T^1 S_T^2 - K)_+$, appelé call géométrique, qu'on cherche à valoriser. On notera S_T^{1,t,x_1} et S_T^{2,t,x_2} les solutions de (4.11)-(4.12) en T partant de x_1 et x_2 en t .

1) En posant $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, que peut-on dire du processus

$$W_t = \frac{\sigma_1 W_t^1 + \sigma_2 W_t^2}{\sigma}.$$

- 2) Exprimer $S_T^{1,t,x_1} S_T^{2,t,x_2}$ en fonction de W .
 3) En déduire le prix $v(t, x_1, x_2)$ du call géométrique :

$$v(t, x_1, x_2) = CallBS(t, x_1 x_2, K, T, 2r, \sigma),$$

où $CallBS$ est la formule de Black-Scholes du call en dimension 1, avec σ à déterminer.

Corrigé. 1) W est une martingale de variation quadratique $\langle W \rangle_t = (\sigma_1^2 \langle W^1 \rangle_t + \sigma_2^2 \langle W^2 \rangle_t) / \sigma^2 = t$, donc c'est un mouvement Brownien.

2) On a

$$S_T^{i,t,x_i} = x_i \exp \left[\left(r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (T - t) + \sigma_i (W_T^i - W_t^i) \right],$$

d'où

$$S_T^{1,t,x_1} S_T^{2,t,x_2} = x_1 x_2 \exp \left[\left(2r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right]$$

3) On remarque donc que

$$S_T^{1,t,x_1} S_T^{2,t,x_2} = S_T^{t,x_1 x_2}$$

où $S^{t,x}$ est la solution du modèle de Black-Scholes de taux d'intérêt $2r$ et de volatilité 2σ .

$$dS_s = S_s(2rds + \sigma dW_s), \quad S_t = x.$$

On en déduit que

$$v(t, x_1, x_2) = e^{r(T-t)} CallBS(t, x_1 x_2, K, T, 2r, \sigma),$$

où $CallBS$ est la formule de Black-Scholes du call.

4.4.4 EDP de Black-Scholes sur deux actifs

On considère un modèle de Black-Scholes bidimensionnel avec deux actions S^1 et S^2 gouvernés sous la probabilité risque-neutre par :

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1(rdt + \sigma_1 dW_t^1) \\ dS_t^2 &= S_t^2(rdt + \sigma_2 \rho dW_t^1 + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2), \end{aligned}$$

où W^1 et W^2 sont deux mouvements Browniens indépendants et $\rho \in [-1, 1]$. On considère une option de payoff $H_T = h(S_T^1, S_T^2)$.

1) Soit $V_t = v(t, S_t^1, S_t^2)$ le prix de l'option à la date t . En appliquant la formule d'Itô et en écrivant que V_t est la richesse d'une stratégie de portefeuille autofinancante et donc qu'actualisée, c'est une martingale, dériver l'EDP satisfaite par v .

2) On considère une option d'échange correspondant à une fonction payoff $h(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)_+$. On cherche une solution de l'EDP de la forme $v(t, x_1, x_2) = x_2 w(t, y)$ avec $y = x_1/x_2$. Dériver l'EDP satisfaite par w . Que remarque t'on ? Expliciter alors w .

3) En déduire le prix $v(t, x_1, x_2)$.

Corrigé. 1) D'après la formule d'Itô à $V_t = v(t, S_t^1, S_t^2)$, on a

$$dV_t = \left[\frac{\partial v}{\partial t} + rS_t^1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + rS_t^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2(S_t^1)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2(S_t^2)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_t^1 S_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dt \\ + \sigma_1 S_t^1 \frac{\partial v}{\partial x_1} dW_t^1 + \sigma_2 S_t^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} dW_t^2.$$

Puisque $e^{-rt}V_t$ est une martingale, le terme en dt ci-dessus doit être égal à rV_t , et donc $v(t, x_1, x_2)$ satisfait l'EDP. :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rx_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + rx_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 x_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} - rv = 0,$$

auquel est associé la condition terminale :

$$v(T, x_1, x_2) = h(x_1, x_2).$$

2) En remarquant que $(x_1 - x_2)_+ = x_2(y - 1)_+$ avec $y = x_1/x_2$, on voit après substitution de $v(t, x_1, x_2) = x_2 w(t, y)$ que w doit satisfaire :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ w(T, y) = (y - 1)_+$$

avec $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$. On reconnaît l'EDP de Black-Scholes pour un taux d'intérêt nul, une volatilité σ et un call de strike 1. On a donc

$$w(t, y) = yN(d_1(y)) - N(d_2(y)),$$

avec

$$d_1(y) = \frac{\ln(y) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2(y) = d_1(y) - \sigma\sqrt{T-t}.$$

3) En écrivant $v(t, x_1, x_2) = x_2 w(t, x_1/x_2)$ on obtient

$$v(t, x_1, x_2) = x_1 N(d_1) - x_2 N(d_2)$$

avec $d_1 = d_1(x_1/x_2)$, $d_2 = d_2(x_1/x_2)$. On retrouve bien la formule obtenue en cours avec la méthode du changement de numéraire.

4.4.5 Option basket

On considère un modèle de Black-Scholes multidimensionnel où les prix des actions S_i , $i = 1, \dots, n$, sont gouvernés sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} par :

$$dS_t^i = S_t^i(rdt + \sigma_i dW_t^i),$$

où $W = (W^1, \dots, W^n)$ est un n -mouvement Brownien. On considère une option basket de payoff

$$h(S_T) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i S_T^i - K \right)_+ = (A_T - K)_+,$$

où $\omega_i \geq 0$ est le poids de l'actif S^i : $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. $A_T = \sum_{i=1}^n \omega_i S_T^i$ est la moyenne pondérée arithmétique des actifs S^i à la maturité T .

Il n'y a pas de formule explicite pour le prix d'une option basket et cet exercice propose une approximation par l'option géométrique. On se place à la date $t = 0$ et on introduit les poids modifiés :

$$\hat{\omega}_i = \frac{\omega_i S_0^i}{\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j}.$$

1) a) Montrer que le payoff de l'option basket peut s'écrire comme :

$$h(S_T) = e^{rT} \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j \right) (\tilde{A}_T - \tilde{K})_+,$$

avec

$$\tilde{A}_T = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \tilde{S}_T^i, \quad \tilde{K} = \frac{e^{-rT} K}{\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j},$$

et $\tilde{S}_T^i = (S_T^i / (e^{rT} S_0^i))$.

b) En déduire que le prix de l'option basket en $t = 0$ s'exprime comme

$$C_0^B = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j \right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(\tilde{A}_T - \tilde{K})_+ \right].$$

2) On approxime alors le prix de l'option basket par

$$\hat{C}_0^B = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j \right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(\tilde{G}_T - \hat{K})_+ \right],$$

avec

$$\tilde{G}_T = \prod_{i=1}^n (\tilde{S}_T^i)^{\hat{\omega}_i}, \quad \hat{K} = \tilde{K} + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{G}_T - \tilde{A}_T].$$

a) Montrer que

$$\tilde{G}_T = \exp\left(\eta_T - \frac{1}{2}c_2T\right),$$

où on explicitera c_2 et η_T . Vérifier que la loi de η_T sous \mathbb{Q} est gaussienne centrée de variance v^2T à expliciter.

b) Expliciter $c := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{G}_T]$ et vérifier que $\hat{K} = \tilde{K} + c - 1$.

3) a) Montrer que si U est une loi gaussienne sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$, centrée, de variance σ^2 , alors

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(a \exp\left(U - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - b\right)_+\right] = aN(d) - bN(d - \sigma),$$

avec $d = \frac{\ln(a/b) + \sigma^2/2}{\sigma}$.

b) En déduire que

$$\hat{C}_0^B = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j\right) \left(cN(d_1) - (\tilde{K} + c - 1)N(d_2)\right),$$

où on explicitera d_1 et d_2 .

Corrigé. 1) En écrivant ω_i en fonction de $\hat{\omega}_i$, on voit que

$$A_T = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j\right) \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \frac{S_T^i}{S_0^i} = e^{rT} \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j\right) \tilde{A}_T.$$

On en déduit immédiatement l'expression voulue de $h(S_T)$.

b) Par la règle d'évaluation risque-neutre, le prix de l'option basket est donc

$$C_0^B = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}h(S_T)] = \left(\sum_{j=1}^n \omega_j S_0^j\right) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\tilde{A}_T - \tilde{K})_+].$$

2) a) Notons que

$$\tilde{S}_T^i = \exp\left(\sigma_i W_T^i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 T\right).$$

On en déduit

$$\tilde{G}_T = \prod_{i=1}^n \exp\left(\hat{\omega}_i \sigma_i W_T^i - \frac{1}{2}\hat{\omega}_i \sigma_i^2 T\right) = \exp\left(\eta_T - \frac{1}{2}c_2 T\right),$$

avec

$$\eta_T = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \sigma_i W_T^i, \quad c_2 = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \sigma_i^2.$$

Puisque le vecteur (W_T^1, \dots, W_T^n) est gaussien sous \mathbb{Q} , η_T est gaussienne centrée de variance

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}(\eta_T) = \sum_{i=1}^n (\hat{\omega}_i \sigma_i)^2 T := v^2 T.$$

b) On écrit

$$\tilde{G}_T = \exp \left[\eta_T - \frac{1}{2} v^2 T \right] \exp \left[\frac{1}{2} (v^2 - c_2) T \right],$$

d'où l'on obtient

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\tilde{G}_T] = \exp \left[\frac{1}{2} (v^2 - c_2) T \right] = c.$$

De plus, on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\tilde{A}_T] = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\tilde{S}_T^i] = \sum_{i=1}^n \hat{\omega}_i = 1.$$

On a donc $\hat{K} = \tilde{K} + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\tilde{G}_T - \tilde{A}_T] = \tilde{K} + c - 1$.

3) a) Calcul standard déjà vu pour la formule de Black-Scholes.

b) On écrit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(\tilde{G}_T - \hat{K})_+] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[c \exp \left(\eta_T - \frac{1}{2} v^2 T \right) - \hat{K} \right]_+.$$

On applique donc le calcul du a) avec $U = \eta_T$, $\sigma^2 = v^2 T$, $a = c$ et $b = \hat{K} = \tilde{K} + c - 1$.

On obtient finalement la formule voulue avec

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{c}{\tilde{K} + c - 1} \right) + \frac{1}{2} v^2 T}{v \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - v \sqrt{T}.$$

Chapitre 5

Modèles de taux d'intérêt

L'incertitude sur les mouvements futurs des taux d'intérêts est un point important en théorie de la décision financière. En effet, l'aversion des agents au risque est lié en particulier aux taux d'intérêts et les problèmes associés à la gestion de trésorerie sont très sensibles aux perturbations de la courbe des taux. L'étude et la compréhension de la structure par terme des taux d'intérêts représente donc un enjeu majeur en finance, tant pour gérer le risque de taux affectant le bilan des banques, que pour évaluer et couvrir les nombreux produits financiers de plus en plus complexes auxquels recourent les marchés pour faire face au risque de taux et plus généralement de change.

Dans ce chapitre, nous présentons les principes de bases de la modélisation des taux d'intérêts basé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage. Nous illustrons ensuite la théorie sur les applications à la valorisation de produits dérivés sur taux, comme par exemple les options sur obligations.

5.1 Principes de la modélisation

5.1.1 Généralités sur les taux d'intérêts

On introduit quelques définitions et notations relatives aux différentes notions associées aux taux d'intérêts.

Un zéro-coupon d'échéance T est un titre versant 1 euro à la date T , et ne donnant aucun flux avant. On note $B(t, T)$ son prix à la date $t \leq T$, qui doit être strictement positif sous AOA. On a $B(T, T) = 1$. Ce sont en pratique des obligations émises par l'état pour financer sa dette.

Le taux d'intérêt continu moyen (appelé aussi rendement à l'échéance) sur la période $[t, T]$, noté $R(t, T)$, est défini par :

$$B(t, T) = \exp(-(T - t)R(t, T)), \quad \text{i.e.} \quad R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln B(t, T).$$

Le taux linéaire, surtout utilisé pour des périodes courtes $[t, t + \delta]$ (δ moins d'un an), noté $L(t, \delta)$ est défini par :

$$B(t, t + \delta) = \frac{1}{1 + \delta L(t, \delta)}.$$

Le taux spot (court) instantané est la limite du taux moyen quand le temps restant à maturité $\theta = T - t$ tend vers zéro :

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = - \left. \frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t}.$$

En pratique, c'est le taux à court terme, par exemple le taux au jour le jour.

La *courbe des taux* (on dit aussi structure par terme des taux) en t est la fonction qui donne les différents taux moyens de la date t en fonction de leur maturité restante $\theta = T - t \geq 0$, soit $\theta \rightarrow R(t, t + \theta)$. On désire étudier le comportement de la courbe $R(t, t + \theta)$ en fonction de la courbe de taux observée aujourd'hui $R(0, \theta)$. On dit que la courbe est plate en t si cette fonction $\theta \rightarrow R(t, t + \theta)$ est constante.

Les opérations et emprunts à terme sont très courantes sur les marchés de taux. Nous introduisons quelques autres définitions qui joueront un rôle central dans la modélisation.

Le taux spot forward en t pour la maturité T est défini par

$$f(t, T) = - \frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T},$$

de sorte que $r_t = f(t, t)$ et par intégration :

$$B(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, s) ds \right). \quad (5.1)$$

Autrement dit, $f(t, s)$ représente le taux instantané à la date s tel que le marché le "voit" à la date t .

5.1.2 Absence d'arbitrage et modélisation de taux

Considérons dans un premier temps le cadre simplifié où tous les taux d'intérêts $R(t, T)$, $t \leq T$, sont connus dès aujourd'hui en $t = 0$. Autrement dit, les évolutions du prix des zéros-coupons : $t \rightarrow B(t, T)$ et des taux d'intérêts : $t \rightarrow R(t, T)$, r_t , $f(t, T)$ sont déterministes pour toute maturité T . Alors, par absence d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir :

$$B(t, T) = B(t, s)B(s, T), \quad \forall t \leq s \leq T,$$

sinon il serait facile d'exhiber un arbitrage (exercice aisé laissé au lecteur!). En passant au log puis en dérivant par rapport à T , on obtient par définition du taux forward :

$f(t, T) = f(s, T)$, pour tous $t \leq s \leq T$. En particulier, on voit que $f(t, s) = r_s$ pour tous $t \leq s$: dans un monde déterministe, le taux instantané à la date s tel que le marché le “voit” à la date t , est le taux instantané de la date s . D’après (5.1), on a donc :

$$B(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right), \quad \text{i.e.} \quad B(t, T) = B(0, T) \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right).$$

Notons aussi que dans ce contexte certain, le taux moyen est donné par :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r_s ds.$$

Dans un environnement aléatoire, à la date t , les taux d’intérêts et les prix des zéros-coupons futurs $R(s, T)$ et $B(s, T)$, $t < s < T$, ne sont pas connus. On conçoit néanmoins, comme pour les modèles déterministes, que l’AOA implique des relations entre les prix des différents taux et zéros-coupons : c’est le but d’une modélisation aléatoire des taux. On se donne un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration d’un mouvement Brownien standard. Comme dans les modèles d’actions, on introduit le processus de cash défini par :

$$S_t^0 = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right).$$

C’est la somme qu’on reçoit en investissant continûment 1 euro au taux spot instantané. Les obligations zéros-coupons de maturité T , sont considérés comme des actifs risqués, de processus de prix $B(t, T)$, $0 \leq t \leq T$. En accord avec le principe d’AOA, on suppose l’existence d’une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} sous laquelle les prix actualisés des zéros-coupons $B(t, T)/S_t^0$, $0 \leq t \leq T$, sont des martingales sous \mathbb{Q} , et ceci pour toutes les maturités T . Cette propriété de martingale combinée avec l’égalité $B(T, T) = 1$ entraîne $B(t, T)/S_t^0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B(T, T)/S_T^0 | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1/S_T^0 | \mathcal{F}_t]$, soit

$$B(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.2)$$

Il y a essentiellement deux approches pour modéliser ensuite la courbe des taux. La première (historiquement) consiste à utiliser le taux spot instantané comme variable explicative et donc à proposer une dynamique du taux court r_t . La seconde consiste à modéliser directement les prix des zéros-coupons $B(t, T)$ (ou de manière équivalente, d’après (5.1), les taux forward $f(t, T)$) en respectant la condition d’AOA.

5.2 Modèles classiques de taux spot

Dans cette modélisation, on suppose connu le taux spot et on cherche à décrire la courbe des taux. On considère une dynamique du taux spot décrite sous la probabilité

historique \mathbb{P} par

$$dr_t = \alpha(t, r_t)dt + \gamma(t, r_t)dW_t,$$

où W est un mouvement Brownien réel sous \mathbb{P} et α, γ sont deux fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour calculer le prix des zéros-coupons, on a besoin de connaître la dynamique du taux spot sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} . Notons $(\lambda_t)_t$ la prime de risque issu du théorème de Girsanov et qui fait donc du processus

$$\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

un mouvement Brownien sous \mathbb{Q} . On suppose que la prime de risque est une fonction du temps et du taux spot : $\lambda_t = \lambda(t, r_t)$. La dynamique du taux spot sous \mathbb{Q} est donc

$$dr_t = (\alpha(t, r_t) - \lambda(t, r_t)\gamma(t, r_t))dt + \gamma(t, r_t)d\hat{W}_t. \quad (5.3)$$

Dans les modèles classiques qu'on détaillera plus tard, la forme de la prime de risque λ est en général choisie pour que la dynamique de r sous \mathbb{P} et \mathbb{Q} ait la même forme.

5.2.1 L'EDP des taux

Dans cette modélisation du taux spot et d'une prime de risque fonction du taux spot, le prix d'un zéro-coupon donné par (5.2) est une fonction du taux spot : $B(t, T) = \mathcal{B}(t, r_t, T)$ où \mathcal{B} est une fonction réelle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. En supposant que la fonction \mathcal{B} soit régulière C^2 , on a par la formule d'Itô (T est fixé) :

$$\begin{aligned} dB(t, T) &= \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial r^2} \right) (t, r_t, T) dt + \gamma \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} (t, r_t, T) dW_t \\ &= B(t, T) (\mu(t, r_t, T) + \sigma(t, r_t, T) dW_t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

où

$$\begin{aligned} \mu(t, r, T) &= \frac{1}{\mathcal{B}(t, r, T)} \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial r^2} \right) (t, r, T) \\ \sigma(t, r, T) &= \frac{1}{\mathcal{B}(t, r, T)} \gamma(t, r) \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} (t, r, T). \end{aligned}$$

La dynamique (5.4) est écrite sous la probabilité objective \mathbb{P} . Par Girsanov, la dynamique du prix zéro-coupon sous \mathbb{Q} est

$$dB(t, T) = B(t, T) \left[(\mu(t, r_t, T) - \sigma(t, r_t, T)\lambda(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t, T)d\hat{W}_t \right],$$

Puisque le prix actualisé $B(t, T)/S_t^0$ est une \mathbb{Q} -martingale, le terme de tendance de $B(t, T)$ doit être égal à r_t sous \mathbb{Q} , i.e. $(\mu(t, r_t, T) - \sigma(t, r_t, T)\lambda(t, r_t)) = r_t$. D'après les expressions de μ et σ , ceci implique que la fonction de prix \mathcal{B} doit vérifier l'EDP :

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + (\alpha - \lambda\gamma) \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial r^2} - r\mathcal{B} = 0. \quad (5.5)$$

Cette EDP est associée à la condition terminale $B(T, T) = 1$, i.e. :

$$\mathcal{B}(T, r, T) = 1. \quad (5.6)$$

Remarque 5.2.1 1. L'EDP des taux (5.5) est à comparer avec l'EDP obtenue dans le modèle de Black-Scholes. Une différence importante est la présence du terme de prime de risque λ . Ce paramètre n'est pas déterminé par le modèle mais doit être spécifié a priori : c'est un problème statistique et λ est estimé par calibration du prix des zéros-coupons à ceux du marché.

2. Comme pour le modèle de Black-Scholes, on a deux méthodes de calcul du prix d'un zéro-coupon dans un modèle de taux spot (5.3). Soit on utilise la représentation probabiliste sous la probabilité risque-neutre :

$$B(t, T) = \mathcal{B}(t, r_t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

soit on cherche à résoudre l'EDP des taux (5.5)-(5.6).

5.2.2 Modèle de Vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le taux spot suit sous \mathbb{P} un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \gamma dW_t,$$

où a , b et σ sont des constantes positives. La moyenne instantanée est proportionnelle à l'écart entre une valeur b et le taux r_t . Une force de rappel mesurée par la valeur a tend à rapprocher r_t de la valeur b . On suppose que la prime de risque λ est constante de sorte que le taux spot suit aussi sous \mathbb{Q} un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr_t = a(\hat{b} - r_t)dt + \gamma d\hat{W}_t, \quad (5.7)$$

où $\hat{b} = b - \gamma\lambda/a$. Cette équation différentielle stochastique se résout de manière explicite.

Proposition 5.2.1 *La solution de (5.7) est donnée par*

$$r_t = \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at} + \gamma \int_0^t e^{-a(t-u)} d\hat{W}_u. \quad (5.8)$$

Preuve. La solution de l'équation linéaire s'obtient comme dans le cas des équations différentielles ordinaires par la méthode de variation des constantes en considérant le processus $\rho_t = e^{at}r_t$. Par la formule d'Itô, on a

$$d\rho_t = ae^{at}r_t dt + e^{at}dr_t = e^{at}(a\hat{b}dt + \gamma d\hat{W}_t).$$

En intégrant, on obtient

$$\rho_t = e^{at} r_t = r_0 + \hat{b}(e^{at} - 1) + \int_0^t e^{au} \gamma d\hat{W}_u,$$

ce qui donne (5.8). \square

On voit donc que sous \mathbb{Q} , r_t est un processus gaussien de moyenne $\hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at}$ et de variance $\gamma^2(1 - e^{-2at})/2a$. En particulier, r_t peut prendre des valeurs négatives ce qui n'est pas très satisfaisant en pratique. Notons aussi que, lorsque t tend vers l'infini, r_t converge en loi vers une loi gaussienne de moyenne \hat{b} et de variance $\gamma^2/2a$. Pour calculer le prix d'un zéro-coupon par la représentation (5.2), on a besoin de déterminer la loi de $\int_t^T r_s ds$ sachant \mathcal{F}_t , i.e. r_t . Il y a plusieurs manières de procéder. Le plus simple est d'intégrer l'EDS (5.7), d'où l'on obtient :

$$a \int_t^T r_s ds = -(r_T - r_t) + a\hat{b}(T - t) + \gamma \int_t^T d\hat{W}_s. \quad (5.9)$$

En utilisant l'expression intégrale (5.8) du taux spot r_T :

$$r_T = \hat{b} + (r_t - \hat{b})e^{-a(T-t)} + \gamma \int_t^T e^{-a(T-s)} d\hat{W}_s,$$

et en reportant dans (5.9), on obtient

$$\int_t^T r_s ds = \hat{b}(T - t) + (r_t - \hat{b}) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \gamma \int_t^T \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} d\hat{W}_s.$$

On en déduit que $\int_t^T r_s ds$ est une variable gaussienne, de moyenne et variance conditionnelle sous \mathbb{Q} :

$$\hat{m}(t, T) = \hat{b}(T - t) + (\hat{b} - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\gamma \int_t^T \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} d\hat{W}_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] = \gamma^2 \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right)^2 ds \\ &= -\frac{\gamma^2}{2a^3} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 + \frac{\gamma^2}{a^2} \left(T - t - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

On peut alors aisément expliciter le prix des zéros-coupons et la courbe des taux moyens.

Théorème 5.2.1 *Dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon de maturité T est donné par :*

$$B(t, T) = \exp \left[-R_\infty(T - t) + (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\gamma^2}{4a^3} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 \right],$$

où $R_\infty = \hat{b} - \frac{\gamma^2}{2a^2}$. La courbe des taux à la date t est donnée par

$$R(t, T) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} + \frac{\gamma^2}{4a^3(T-t)} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)^2.$$

Preuve. Comme $\int_t^T r_s ds$ est une variable gaussienne de moyenne et variance conditionnelle sous \mathbb{Q} , $\hat{m}(t, T)$ et $\hat{\Gamma}^2(t, T)$, on a d'après l'expression de sa transformée de Laplace :

$$B(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(-\hat{m}(t, T) + \frac{1}{2} \hat{\Gamma}^2(t, T) \right),$$

ce qui donne la formule explicite $B(t, T)$ en reportant (5.10)-(5.11). On obtient ensuite immédiatement la formule de la courbe des taux $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T)$. \square

Remarque 5.2.2 Le modèle de Vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux $T \rightarrow R(t, T)$ à n'importe quelle date t . On voit que $R_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T)$ pour tout t : R_∞ s'interprète comme le taux à long terme. Il ne dépend pas du taux spot, ce qui est vu comme un défaut par les financiers. Si on étudie la courbe $T \rightarrow R(t, T)$, on voit que :

- lorsque $r_t < R_\infty - \gamma^2/4a^2$, la courbe est strictement croissante
- lorsque $R_\infty - \gamma^2/4a^2 \leq r_t \leq R_\infty + \gamma^2/2a^2$, elle est croissante puis décroissante
- lorsque $R_\infty + \gamma^2/2a^2 < r_t$, elle est strictement décroissante.

Le graphe de la courbe des taux ressemble effectivement à de nombreuses courbes observées sur le marché. Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les courbes dites "inversées", où le taux court r_t est plus haut que le taux long R_∞ , et où apparaît un creux, ne peuvent être atteintes par un modèle de Vasicek.

5.2.3 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Pour pallier au caractère négatif possible des taux d'intérêt dans le modèle gaussien de Vasicek, Cox, Ingersoll et Ross ont introduit le modèle dit en "racine carrée" sur le taux spot et notée CIR. L'évolution du taux spot est gouverné sous la probabilité objective par :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \gamma\sqrt{r_t}dW_t.$$

En supposant que la prime de risque est de la forme $\lambda_t = \bar{\lambda}\sqrt{r_t}$, le taux spot suit sous la probabilité risque-neutre une dynamique de la même forme :

$$dr_t = \hat{a}(\hat{b} - r_t)dt + \gamma\sqrt{r_t}d\hat{W}_t,$$

avec $\hat{a} = a + \gamma\bar{\lambda}$, $\hat{b} = ab/(a + \gamma\lambda)$. On peut montrer l'existence et l'unicité d'une solution à cette EDS malgré le caractère non Lipschitzien de la racine carrée, mais

on n'a pas de formule explicite. Cette solution est positive et de plus, si $2\hat{a}\hat{b} \geq \gamma^2$, la solution n'atteint pas 0 car alors le terme de tendance est suffisamment important pour empêcher le processus d'atteindre 0.

On peut calculer explicitement le prix d'un zéro-coupon et donc la courbe des taux dans le modèle CIR.

Théorème 5.2.2 *Dans le modèle CIR, le prix d'un zéro-coupon de maturité T est égal à*

$$B(t, T) = \Phi(T - t) \exp(-A(T - t)r_t),$$

où les fonctions Φ et A sont données par

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{2(e^{\rho\theta} - 1)}{(\hat{a} + \rho)(e^{\rho\theta} - 1) + 2\rho}, \quad \rho = \sqrt{\hat{a}^2 + 2\gamma^2} \\ \Phi(\theta) &= \phi(\theta)^{\frac{2\hat{a}\hat{b}}{\gamma^2}}, \quad \phi(\theta) = \frac{2\rho e^{(\hat{a} + \rho)\theta/2}}{(\hat{a} + \rho)(e^{\rho\theta} - 1) + 2\rho}. \end{aligned}$$

La courbe des taux à la date t est donnée par

$$R(t, T) = \frac{A(T - t)}{T - t} r_t - \frac{2\hat{a}\hat{b} \ln \phi(T - t)}{\gamma^2 (T - t)}.$$

Preuve. L'EDP des taux satisfaite par le prix du zéro-coupon $B(t, T) = \mathcal{B}(t, r_t, T)$ est dans le modèle CIR est

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \hat{a}(\hat{b} - r) \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} + \frac{1}{2} \gamma^2 r \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial r^2} - r \mathcal{B} = 0,$$

avec la condition terminale $\mathcal{B}(T, r, T) = 1$. On cherche \mathcal{B} de la forme $\mathcal{B}(t, T, r) = \Phi(T - t)e^{-A(T - t)r}$. En substituant dans l'EDP, on obtient

$$-\Phi'(\theta) + \Phi(\theta)A'(\theta)r - \hat{a}(\hat{b} - r)\Phi(\theta)A(\theta) + \frac{1}{2}\gamma^2 r \Phi(\theta)A^2(\theta) - r\Phi(\theta) = 0.$$

L'identification des coefficients de r dans la relation ci-dessus conduit aux équations différentielles ordinaires satisfaites par Φ et A :

$$\begin{aligned} A'(\theta) + \hat{a}A(\theta) + \frac{1}{2}\gamma^2 r A^2(\theta) - 1 &= 0 \\ -\Phi'(\theta) - \hat{a}\hat{b}A(\theta) &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $A(0) = 0$ et $\Phi(0) = 1$. La résolution de ces edo donne les expressions explicites de A , Φ et donc $\mathcal{B}(t, r, T)$. On obtient finalement la courbe des taux en écrivant $R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln \mathcal{B}(t, T)$. \square

Remarque 5.2.3 Comme pour le modèle de Vasicek, on a une forme analytique dans le modèle CIR de la courbe des taux $T \rightarrow R(t, T)$ à toute date t . La structure des formes a priori possible est mieux décrite par ce modèle mais il est plus difficile à calibrer et donc à implémenter en pratique.

5.2.4 Extensions

Les deux exemples présentés ci-dessus rentrent dans une classe plus générale de modèles de taux dits affines, pour lesquels les prix des zéros-coupons sont des exponentielles d'une fonction affine du taux spot. En fait, Duffie et Kan ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le taux spot suit une dynamique de la forme

$$dr_t = \alpha(t, r_t)dt + \gamma(t, r_t)dW_t,$$

avec des fonctions α et γ de la forme

$$\alpha(t, r) = \alpha_1(t)r + \alpha_2(t), \quad \gamma(t, r)^2 = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)r.$$

C'est par exemple le cas du modèle de Vasicek généralisé :

$$dr_t = a(t)(b(t) - r_t)dt + \gamma(t)dW_t,$$

ou du modèle CIR généralisé :

$$dr_t = a(t)(b(t) - r_t)dt + \gamma(t)\sqrt{r_t}dW_t.$$

D'autres modèles ont aussi été proposés, en particulier des modèles bidimensionnels pour mieux prendre en compte des disparités entre taux court et taux long. Citons par exemple le modèle de Schaffer et Schwartz où les variables explicatives sont le taux long ℓ_t et l'écart entre le taux court et le taux long $e_t = r_t - \ell_t$:

$$\begin{aligned} de_t &= a_1(b_1 - e_t)dt + \gamma_1 dW_t^1 \\ d\ell_t &= a_2(b_2 - \ell_t)dt + \gamma_2 \sqrt{\ell_t} dW_t^2. \end{aligned}$$

Ces modèles plus complexes n'ont en général pas de formules explicites et nécessitent la mise en oeuvre de méthodes numériques.

5.3 Modèles de déformation de la courbe des taux

Les modèles étudiés au paragraphe précédent expliquent toute la courbe des taux à partir d'une seule variable, le taux court. C'est un point de vue restrictif et des extensions ont été proposées en introduisant d'autres variables explicatives comme le taux long. Les travaux de Heath, Jarrow et Morton poussent à la limite cette extension en modélisant toute la courbe des taux comme leur variable explicative (en dimension infinie), tout en respectant la condition d'AOA. Ceci permet de décrire algébriquement ces contraintes à partir de la seule connaissance de la volatilité, fonction de la maturité, des zéro-coupons. Nous étudions en détail le modèle de Heath-Jarrow-Morton.

5.3.1 Le modèle de Heath-Jarrow-Morton

On considère un marché sans arbitrage qui traite en temps continu les zéro-coupons de toute maturité, et le processus de cash S_t^0 associé au taux court r_t . On suppose donc l'existence d'une probabilité risque-neutre \mathbb{Q} sous laquelle le prix actualisé $B(t, T)/S_t^0$ du zéro-coupon de maturité T est une martingale. On suppose donc que la dynamique du prix du zéro-coupon est représentée par :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \sigma(t, T) d\hat{W}_t, \quad B(T, T) = 1, \quad (5.12)$$

où \hat{W} est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q} .

* $\sigma(t, T)$ est la famille des volatilités locales, éventuellement aléatoire et adapté, des zéro-coupons, paramétrée par les maturités T . Comme à la maturité, le prix du zéro-coupon est connu avec certitude $B(T, T) = 1$, on suppose que $\sigma(T, T) = 0$. On supposera aussi que la fonction de volatilité σ est continue et dérivable par rapport à la maturité T et on note sa dérivée qui est aussi éventuellement un processus adapté :

$$\Sigma(t, T) = \frac{\partial \sigma(t, T)}{\partial T}. \quad (5.13)$$

Nous allons voir, et c'est une propriété remarquable du modèle HJM que la fonction de volatilité détermine toute la courbe de taux (à travers sa loi sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q}).

Théorème 5.3.3 (i) *Le prix à la date future t d'un zéro-coupon de maturité T est donné par :*

$$B(t, T) = B_f(0, t, T) \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, t) d\hat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T)|^2 - |\sigma(s, t)|^2 ds \right],$$

où $B_f(0, t, T) = B(0, T)/B(0, t)$ est le prix forward en 0 d'échéance t pour un zéro-coupon de maturité T , et donc lu aujourd'hui.

(ii) *La courbe des taux à la date future t est donnée par*

$$R(t, T) = R_f(0, t, T) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{|\sigma(s, T)|^2 - |\sigma(s, t)|^2}{T - t} ds - \int_0^t \frac{\sigma(s, T) - \sigma(s, t)}{T - t} d\hat{W}_s,$$

où $R_f(0, t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B_f(0, t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \frac{B(0, T)}{B(0, t)}$ est le taux forward moyen en 0, pour l'échéance t et la maturité T . Ce taux est lu sur la courbe des taux aujourd'hui.

(iii) *Le taux spot forward en t est donné par*

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma(s, T) \Sigma(s, T) ds - \int_0^t \Sigma(s, T) d\hat{W}_s, \quad (5.14)$$

et en particulier le taux spot est donné par

$$r_t = f(0, t) + \int_0^t \sigma(s, t) \Sigma(s, t) ds - \int_0^t \Sigma(s, t) d\hat{W}_s, \quad (5.15)$$

Preuve. (i) D'après la dynamique (5.12) du zéro-coupon, on a

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) d\hat{W}_s + \int_0^t r_s - \frac{1}{2} |\sigma(s, T)|^2 ds \right].$$

On élimine r_s dans cette relations en utilisant la condition $B(t, t) = 1$ qui s'exprime par :

$$1 = B(0, t) \exp \left[\int_0^t \sigma(s, t) d\hat{W}_s + \int_0^t r_s - \frac{1}{2} |\sigma(s, t)|^2 ds \right].$$

En faisant le quotient des deux égalités précédentes, on a la relation voulue.

(ii) La relation donnant la courbe des taux découle immédiatement de la définition du taux moyen $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t, T)$ et de l'expression en (i) du zéro-coupon.

(iii) La relation sur le taux forward s'obtient en prenant la dérivée logarithmique par rapport à T du prix du zéro-coupon exprimé en (i) :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial \ln B_f(0, t, T)}{\partial T} \\ &\quad - \frac{\partial \left(\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, t) d\hat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T)|^2 - |\sigma(s, t)|^2 ds \right)}{\partial T} \\ &= f(0, T) - \int_0^t \frac{\partial \sigma(s, T)}{\partial T} d\hat{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial |\sigma(s, T)|^2}{\partial T} ds. \end{aligned}$$

Finalement, la relation (iv) s'obtient directement avec (iii) en écrivant $r_t = f(t, t)$. \square

Remarque 5.3.4 D'après l'expression intégrale (iii) du taux spot forward, la différentielle de sa dynamique sous \mathbb{Q} est :

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \gamma(t, T)d\hat{W}_t, \quad (5.16)$$

avec $\alpha(t, T) = \sigma(t, T)\Sigma(t, T)$ et $\gamma(t, T) = -\Sigma(t, T)$. Originellement, Heath, Jarrow et Morton ont proposé une dynamique des taux forward sous la forme (5.16) et montré sous l'AOA, il y a une contrainte entre la tendance α et la volatilité γ . En effet, notons d'abord par intégration de (5.13) et puisque $\sigma(t, t) = 0$, que la volatilité du zéro-coupon s'exprime en fonction de celle du taux forward par :

$$\sigma(t, T) = \int_t^T \Sigma(t, s)ds = - \int_t^T \gamma(t, s)ds.$$

On voit alors la contrainte d'AOA dite de Heath-Jarrow-Morton :

$$\alpha(t, T) = \gamma(t, T) \int_t^T \gamma(t, s)ds. \quad (5.17)$$

Autrement dit, la fonction de volatilité $\gamma(t, T)$ du taux forward ou de manière équivalente la fonction de volatilité $\sigma(t, T)$ du zéro-coupon caractérise complètement la courbe des taux sous la probabilité risque-neutre : le prix des produits dérivés de taux ne dépendra donc que du choix de cette fonction de volatilité.

L'utilisation en pratique du modèle de HJM est la suivante :

- on spécifie une fonction de volatilité $\sigma(t, T)$ pour le zéro-coupon ou de manière équivalente pour le taux forward.
- on estime la structure des taux forward aujourd'hui de la relation :

$$f(0, T) = -\frac{\partial \ln B(0, T)}{\partial T}$$

et de l'observation de la courbe des taux aujourd'hui, i.e. $B(0, T)$ pour toutes les maturités T .

- on en déduit la dynamique (sous la probabilité risque-neutre) des prix des zéro-coupons $B(t, T)$, des taux spot forward $f(t, T)$ et instantané $r_t = f(t, t)$. Cela permet de valoriser les produits dérivés de taux. On détaillera et appliquera cette méthode plus tard.

5.3.2 Fonction de volatilité déterministe : HJM gaussien

Lorsque la volatilité du zéro-coupon est déterministe, ce qui signifie aussi que la volatilité du taux forward est déterministe, les expressions (5.14)-(5.15) indiquent clairement que le taux spot et le taux forward sont des processus gaussiens. On dit que le modèle HJM est gaussien.

Exemple : modèle de Ho et Lee

On considère le cas où la volatilité du taux spot forward est constante $\gamma(t, T) = -\sigma$ avec σ constante. Notons que la volatilité des zéro-coupons est dans ce cas $\sigma(t, T) = \sigma(T - t)$. La condition d'AOA de HJM implique que la tendance du taux forward sous \mathbb{Q} est d'après (5.17) : $\alpha(t, T) = \sigma^2(T - t)$. La dynamique du taux forward est donc :

$$df(t, T) = \sigma^2(T - t)dt - \sigma d\hat{W}_t,$$

ou encore sous forme intégrale

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2} \right) - \sigma \hat{W}_t.$$

Le taux spot $r_t = f(t, t)$ est donné par

$$r_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \sigma \hat{W}_t.$$

Sa dynamique sous forme différentielle est

$$dr_t = \left(\frac{\partial f(0, t)}{\partial T} + \sigma^2 t \right) dt - \sigma d\hat{W}_t.$$

On peut aussi expliciter le prix du zéro-coupon en utilisant soit directement l'expression du théorème 5.3.3, soit en calculant $B(t, T) = \exp(-\int_t^T f(t, s)ds)$:

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left(\sigma(T-t)\hat{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)Tt\right).$$

Cette formule a un inconvénient : \hat{W}_t n'est pas directement observable. On y remédie en utilisant l'expression ci-dessus du taux spot pour obtenir après substitution :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left(-(T-t)(r_t - f(0, t)) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2t\right).$$

Cette dernière formule ne dépend que de valeurs observables ou estimées : le taux spot r_t et la courbe des taux aujourd'hui via $B(0, T)$, $B(0, t)$ et $f(0, t)$.

5.4 Valorisation de produits dérivés sur taux d'intérêt

5.4.1 Les instruments de couverture

Nous décrivons quelques opérations sur les marchés de taux parmi les plus courantes pour se couvrir contre le risque de taux.

Contrat à terme sur taux d'intérêt

Un contrat à terme sur taux d'intérêt (Forward Rate Agreement FRA) est l'engagement d'échanger un taux d'intérêt, à une date donnée et standardisée T , dite échéance du contrat, à un prix F_t (taux forward du contrat) établi lors de la conclusion du contrat à la date $t < T$. Les flux échangés n'ont lieu qu'à l'échéance et sont la différence entre le taux constaté et le taux forward du contrat.

Swap

Un swap (du mot anglais échange) de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré aux termes duquel deux parties s'engagent à échanger pendant un nombre d'années et pour un nominal fixé dans le contrat, des flux d'intérêt annuels (ou pluriannuels) calculés pour une partie sur la base d'un taux variable constaté à des dates préfixés et pour l'autre partie sur la base d'un taux fixe, appelé taux de swap.

Cap et floor

Les contrats à terme décrits ci-dessus sont symétriques en terme de risque pour les deux parties : acheteur et vendeur. Il existe des instruments optionnels sur les contrats à terme, qui permettent, moyennant le paiement d'une prime, de garantir à son détenteur le droit d'emprunter ou de prêter à la date d'échéance, à un taux garanti, souvent proche du taux forward. On parle de caplet ou de floorlet. Plus généralement, considérons l'exemple d'un investisseur ayant une dette pluri-annuelle, indexée sur un taux variable, par exemple l'EURIBOR trois mois. Il désire swaper cette dette contre le paiement de

coupons fixes, mais seulement si les taux variables ont monté. Il achète donc un cap, qui lui permet à chaque date de paiement de coupon de comparer le taux variable avec le taux garanti. Si le taux variable est supérieur au taux garanti, il exerce son droit, sinon il y renonce. Le floor est analogue au cap mais sur le principe de la vente.

5.4.2 Méthode d'évaluation forward

Identification des échéanciers

La première étape dans la valorisation de produits de taux est une description précise de l'échéancier, i.e. l'identification des dates de paiement et des flux connus ou aléatoires attendus dans le futur.

Exemples :

- *Obligation à taux fixe* (OAT) : Considérons une obligation de taux de coupon C annuel, de nominal N euros, et de maturité T_n années. Les flux sont de la forme : (C, T_i) pour $i = 1, \dots, n-1$, et $(N + C, T)$ à l'échéance T_n .
- *Swaps* : Dans la description de l'échéancier d'un swap, on distingue la branche variable, qui correspond à des paiements régulièrement espacés (par exemple tous les trois mois) d'une fraction égale au nombre de jours de la période/360 du taux variable de référence (par exemple le taux Euribor 3 mois) constaté à la date de paiement précédente. Formellement, le paiement en $T_{i+1} = T_i + \delta$ est le taux $\delta L(T_i, \delta)$ où $L(T_i, \delta)$ est le taux variable de la date T_i sur la période δ et défini par :

$$B(T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{1 + \delta L(T_i, \delta)}, \quad i.e. \quad \delta L(T_i, \delta) = \frac{1}{B(T_i, T_{i+1})} - 1.$$

La branche fixe consiste au paiement aux mêmes dates du taux fixe, appelé taux de swap, noté R^{sw} , qui est fixé dans le contrat.

L'échéancier est donc de la forme $(\delta L(T_i, \delta) - R^{sw}, T_{i+1})$ pour $i = 0, \dots, n-1$, et des dates $T_i = T_0 + i\delta$.

- *Option sur obligation* : L'option a une maturité τ , un prix d'exercice K . Le sous-jacent est une obligation de maturité $T > \tau$, avec des coupons C_i payés aux dates $T_i : \bar{T} < T_1 < \dots < T_n = T$. Le prix à la date t de l'obligation support de l'option est donc :

$$O_t = \sum_{i=1}^N C_i B(t, T_i).$$

Marché à terme et probabilité forward-neutre

La deuxième étape consiste à valoriser les divers flux associés à l'échéancier du produit de taux. Pour valoriser un flux X_i de la date T_i , on utilise comme pour les modèles d'actions, la règle d'évaluation risque-neutre. Le prix de ce flux aujourd'hui en $t = 0$ est :

$$\Pi_0(X_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{X_i}{S_{T_i}^0} \right]. \quad (5.18)$$

Cependant, il sera pertinent de choisir comme numéraire le prix zéro-coupon de maturité T_i à la place du cash S^0 , et donc d'utiliser la probabilité T_i -forward neutre. On rappelle que la probabilité T_i -forward neutre, notée \mathbb{Q}^{T_i} , est la probabilité martingale associée au numéraire zéro-coupon de maturité T_i , i.e. la probabilité qui rend martingale les prix actualisés par le zéro-coupon $B(t, T_i)$ des titres sur les marchés. On a donc pour toute variable aléatoire X_i \mathcal{F}_{T_i} -mesurable :

$$F^{X_i}(0, T_i) = \frac{\Pi_0(X_i)}{B(0, T_i)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} \left[\frac{X_i}{B(T_i, T_i)} \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} [X_i]. \quad (5.19)$$

Autrement dit, on évalue le contrat forward sur le flux X_i de maturité T_i , i.e. l'équivalent certain vu d'aujourd'hui du flux X_i . Ainsi, alors que sur les marchés d'actions, les actifs de couverture sont les actions spot sur le marché au comptant, dans le contexte de marché de taux, les actifs de couverture seront naturellement les contrats forward sur les marchés à terme.

Notons aussi que la comparaison des relations (5.18)-(5.19) donne la formule de changement de numéraire entre probabilité risque-neutre et probabilité T_i -forward neutre, pour toute variable aléatoire X_i \mathcal{F}_{T_i} -mesurable,

$$\Pi_0(X_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{X_i}{S_{T_i}^0} \right] = B(0, T_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} [X_i]. \quad (5.20)$$

Plus généralement, si on introduit la probabilité T -forward neutre avec $T \geq T_i$, on a la formule de passage de changement de numéraire :

$$\Pi_0(X_i) = B(0, T_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} [X_i] = B(0, T) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{X_i}{B(T_i, T)} \right]. \quad (5.21)$$

Pour caractériser la probabilité T_i -forward neutre \mathbb{Q}^{T_i} , on écrit que les prix forward $B_f(t, T_i, T) = B(t, T)/B(t, T_i)$ sont des \mathbb{Q}^{T_i} -martingales pour tous T . On se place dans le cadre du modèle HJM. D'après l'expression des prix des zéro-coupons au théorème 5.3.3, on a :

$$\begin{aligned} & B_f(t, T_i, T) \\ &= B_f(0, T_i, T) \cdot \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, T_i) d\hat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T)|^2 - |\sigma(s, T_i)|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

En définissant

$$\hat{W}_t^{T_i} = \hat{W}_t - \int_0^t \sigma(s, T_i) ds,$$

on a

$$\begin{aligned} & B_f(t, T_i, T) \\ &= B_f(0, T_i, T) \cdot \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, T_i) d\hat{W}_s^{T_i} - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T) - \sigma(s, T_i)|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Ceci prouve que \hat{W}^{T_i} est un mouvement Brownien sous \mathbb{Q}^{T_i} et que la dynamique du prix forward, martingale sous \mathbb{Q}^{T_i} est :

$$dB_f(t, T_i, T) = B_f(t, T_i, T) (\sigma(t, T) - \sigma(t, T_i)) d\hat{W}_t^{T_i}.$$

5.4.3 Exemples

- **Contrat forward sur un taux.** Le prix d'un contrat forward de maturité T pour se garantir en $T + \delta$ 1 euro, i.e. un zéro-coupon de maturité $T + \delta$, est à la date $t \leq T$:

$$B_f(t, T, T + \delta) = \frac{B(t, T + \delta)}{B(t, T)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[B(T, T + \delta) | \mathcal{F}_t].$$

Le taux de rendement linéaire de ce contrat forward est le taux forward linéaire, noté $L_f(t, T, \delta)$, et défini par :

$$B_f(t, T, T + \delta) = \frac{1}{1 + \delta L_f(t, T, \delta)}.$$

Notons que $L_f(t, T, \delta)$ est l'équivalent certain du taux linéaire $L(T, \delta)$ entre T et $T + \delta$ au sens où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}}[L(T, \delta) | \mathcal{F}_t] &= \frac{1}{\delta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} \left[\frac{1}{B(T, T + \delta)} - 1 \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \left[\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} - 1 \right] = \frac{1}{\delta} \left[\frac{1}{B_f(t, T, T + \delta)} - 1 \right] \\ &= L_f(t, T, \delta). \end{aligned}$$

- **Calcul du taux swap.** Considérons le swap caractérisé par son échancier aux dates $T_i = T_0 + i\delta$, $i = 1, \dots, n$:

$$\delta L(T_{i-1}, \delta) - R^{sw} = \frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 - R^{sw}.$$

Le taux swap est calculé par arbitrage de manière à ce que la valeur de ce contrat soit nulle à la date de signature $t = 0$:

$$\sum_{i=1}^n \Pi_0(\delta L(T_{i-1}, \delta) - R^{sw}) = 0.$$

Pour calculer le prix du flux à la date T_i , on choisit la probabilité T_i -forward neutre :

$$\begin{aligned} \Pi_0(\delta L(T_{i-1}, \delta) - R^{sw}) &= B(0, T_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} \left[\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 - R^{sw} \right] \\ &= B(0, T_i) \left[\frac{B(0, T_{i-1})}{B(0, T_i)} - 1 - R^{sw} \right], \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de la propriété de martingale du prix forward $B(t, T_{i-1})/B(t, T_i)$ sous \mathbb{Q}^{T_i} . Le taux swap est donc déterminé par la relation :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n B(0, T_i) \left[\frac{B(0, T_{i-1})}{B(0, T_i)} - 1 - R^{sw} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n [B(0, T_{i-1}) - B(0, T_i)] - R^{sw} \sum_{i=1}^n B(0, T_i), \end{aligned}$$

d'où

$$R^{sw} = \frac{B(0, T_0) - B(0, T_n)}{\sum_{i=1}^n B(0, T_i)}.$$

Notons que l'évaluation du taux swap ne requiert pas la spécification d'un modèle de taux.

- **Call sur zéro-coupon.** Considérons un call de prix d'exercice K , de maturité τ sur un zéro-coupon d'échéance $T > \tau$. Le payoff en τ de ce call est donc :

$$X = (B(\tau, T) - K)_+.$$

On se place dans le cadre du modèle HJM gaussien. On va calculer son prix selon deux méthodes :

(1) En utilisant la probabilité τ -forward neutre, le prix du call est

$$\Pi_0 = B(0, \tau) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\tau} [(B(\tau, T) - K)_+] = B(0, \tau) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\tau} [(B_f(\tau, \tau, T) - K)_+].$$

Puisque sous \mathbb{Q}^τ , on

$$\ln B_f(\tau, \tau, T) \sim \mathcal{N}(B_f(0, \tau, T) - \frac{1}{2} \Sigma^2(\tau, T), \Sigma^2(\tau, T)),$$

avec $\Sigma^2(\tau, T) = \int_0^\tau |\sigma(s, T) - \sigma(s, \tau)|^2 ds$, le calcul de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\tau} [(B_f(\tau, \tau, T) - K)_+]$ est celui d'un call de maturité τ , de strike K dans le modèle de Black-Scholes avec taux d'intérêt nul, et volatilité $\Sigma^2(\tau, T)/\tau$. On a donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\tau} [(B_f(\tau, \tau, T) - K)_+] = B_f(0, \tau, T) N(d_1) - K N(d_2),$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \left(\frac{B_f(0, \tau, T)}{K} \right) + \frac{1}{2} \Sigma^2(\tau, T)}{\Sigma(\tau, T)} \\ d_2 &= d_1 - \Sigma(\tau, T). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\Pi_0 = B(0, T) N(d_1) - K B(0, \tau) N(d_2).$$

(2) On réécrit le flux X sous la forme de flux aux dates T et τ par :

$$X = B(\tau, T)1_{\mathcal{E}} - K1_{\mathcal{E}},$$

où \mathcal{E} est la région d'exercice $\{B(\tau, T) \geq K\}$. Pour calculer le prix du flux $B(\tau, T)1_{\mathcal{E}}$ versant 1 euro en T en cas d'exercice, on utilise la probabilité T -forward neutre. On a donc par la formule (5.21)

$$\Pi_0(B(\tau, T)1_{\mathcal{E}}) = B(0, T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[1_{\mathcal{E}}] = B(0, T)\mathbb{Q}^T(\mathcal{E}).$$

Pour calculer le prix du flux versant K en τ en cas d'exercice, on utilise la probabilité τ -forward neutre :

$$\Pi_0(K1_{\mathcal{E}}) = B(0, \tau)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^\tau}[K1_{\mathcal{E}}] = KB(0, \tau)\mathbb{Q}^\tau(\mathcal{E}).$$

Le prix du call est donc

$$\Pi_0(X) = B(0, T)\mathbb{Q}^T(\mathcal{E}) - KB(0, \tau)\mathbb{Q}^\tau(\mathcal{E}).$$

Pour obtenir une formule explicite, il reste à décrire les probabilités de l'ensemble d'exercice sous les probabilités forward neutres \mathbb{Q}^T et \mathbb{Q}^τ . D'après l'expression du prix forward de maturité T , on a

$$\begin{aligned} & \frac{B(t, \tau)}{B(t, T)} \\ &= \frac{B(0, \tau)}{B(0, T)} \cdot \exp \left[\int_0^t \sigma(s, \tau) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, \tau) - \sigma(s, T)|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

On exprime alors la probabilité d'exercice sous \mathbb{Q}^T :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^T(\mathcal{E}) &= \mathbb{Q}^T \left(\frac{1}{B(\tau, T)} \leq \frac{1}{K} \right) \\ &= \mathbb{Q}^T \left[\int_0^\tau \sigma(s, \tau) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T \leq \ln \left(\frac{B(0, T)}{KB(0, \tau)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma^2(\tau, T) \right], \end{aligned}$$

où

$$\Sigma^2(\tau, T) = \int_0^\tau |\sigma(s, \tau) - \sigma(s, T)|^2 ds$$

Puisque $\int_0^\tau \sigma(s, \tau) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T$ suit sous \mathbb{Q}^T une loi normale centrée de variance $\Sigma^2(\tau, T)$, on en déduit que

$$\mathbb{Q}^T(\mathcal{E}) = N(d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{B(0,T)}{KB(0,\tau)} \right) + \frac{1}{2}\Sigma^2(\tau, T)}{\Sigma(\tau, T)}.$$

De manière similaire, en utilisant l'expression du prix forward de maturité τ :

$$\begin{aligned} & \frac{B(t, T)}{B(t, \tau)} \\ = & \frac{B(0, T)}{B(0, \tau)} \cdot \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, \tau) d\hat{W}_s^\tau - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T) - \sigma(s, \tau)|^2 ds \right], \end{aligned}$$

on obtient pour la probabilité d'exercice sous \mathbb{Q}^τ :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^\tau(\mathcal{E}) &= \mathbb{Q}^\tau(B(\tau, T) \geq K) \\ &= \mathbb{Q}^\tau \left[- \int_0^\tau \sigma(s, \tau) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T \leq \ln \left(\frac{B(0, T)}{KB(0, \tau)} \right) - \frac{1}{2}\Sigma^2(\tau, T) \right] \\ &= N(d_2), \end{aligned}$$

avec

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{B(0, T)}{KB(0, \tau)} \right) - \frac{1}{2}\Sigma^2(\tau, T)}{\Sigma(\tau, T)} = d_1 - \Sigma(\tau, T).$$

Le prix du call zéro-coupon est donc égal à

$$\Pi_0(X) = B(0, T)N(d_1) - KB(0, \tau)N(d_2).$$

5.5 Exercices

5.5.1 Taux forward

On considère le contrat à terme permettant à l'échéance T d'obtenir un zéro-coupon de maturité $T + \theta$, et on note $B_f(t, T, T + \theta)$ le prix en $t \leq T$ de ce contrat, appelé zéro-coupon forward.

- 1) Quel est le prix d'arbitrage de ce zéro-coupon forward ?
- 2) On définit le taux forward moyen en t , pour l'échéance T et la maturité $T + \theta$, noté $R_f(t, T, T + \theta)$ par :

$$B_f(t, T, T + \theta) = \exp(-\theta R_f(t, T, T + \theta)), \quad \text{i.e.} \quad R_f(t, T, T + \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln B_f(t, T, T + \theta).$$

Montrer que le taux forward instantané $f(t, T)$ est égal à

$$f(t, T) = \lim_{\theta \rightarrow 0} R_f(t, T, T + \theta) = - \left. \frac{\partial \ln B_f(t, T, T + \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}.$$

3) On considère la probabilité T -forward neutre \mathbb{Q}^T . Montrer que le taux spot forward $f(t, T)$, $t \leq T$, est une \mathbb{Q}^T -martingale :

$$f(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[r_T | \mathcal{F}_t], \quad t \leq T.$$

Interpréter. *Indication.* On utilisera l'approximation $\ln \beta \sim \beta - 1$ lorsque $\beta \rightarrow 1$.

Corrigé. 1) On a

$$B_f(t, T, T + \theta) = \frac{B(t, T + \theta)}{B(t, T)}. \quad (5.22)$$

2) Par définition de $R_f(t, T, T + \theta)$ et d'après la relation (5.22), on a

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} R_f(t, T, T + \theta) &= - \left. \frac{\partial \ln B_f(t, T, T + \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \\ &= - \left. \frac{\partial \ln B(t, T + \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = f(t, T). \end{aligned}$$

3) Puisque $B_f(t, T, T + \theta)$ tend vers 1 quand θ tend vers zéro, on a

$$f(t, T) = - \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{B_f(t, T, T + \theta) - 1}{\theta}.$$

Par définition de \mathbb{Q}^T , le processus $B_f(t, T, T + \theta) = B(t, T + \theta)/B(t, T)$, $t \leq T + \theta$ est une \mathbb{Q}^T -martingale, i.e.

$$B_f(t, T, T + \theta) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[B_f(T, T, T + \theta) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[B(T, T + \theta) | \mathcal{F}_t].$$

En notant encore que $B(T, T + \theta)$ tend vers 1 quand θ tend vers zéro, on en déduit avec la définition de r_T :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{B(T, T + \theta) - 1}{\theta} \middle| \mathcal{F}_t \right] = -\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\ln B(T, T + \theta)}{\theta} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[r_T | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Le taux spot forward est donc égal au prix forward d'un contrat écrit sur le taux spot instantané.

5.5.2 Formule de Vasicek par EDP

On considère le modèle de Vasicek écrit sous la probabilité risque-neutre :

$$dr_t = a(\hat{b} - r_t)dt + \gamma d\hat{W}_t.$$

1) Ecrire l'EDP des taux satisfaite par un prix zéro-coupon $\mathcal{B}(t, r, T)$.

2) On cherche $\mathcal{B}(t, r, T)$ de la forme $\mathcal{B}(t, T, r) = \exp(-A(T-t)r + C(T-t))$ avec A et C des fonctions ne dépendant que de la maturité restante $\theta = T - t$.

a) Ecrire les équations différentielles ordinaires que doivent satisfaire A et C .

b) Résoudre ces équations et retrouver la formule de Vasicek pour le prix d'un zéro-coupon.

3) Calculer la volatilité du zéro-coupon.

Corrigé. 1) En écrivant que $e^{-\int_0^t r_s ds} \mathcal{B}(t, r_t, T)$ est une martingale sous \mathbb{Q} , on obtient par la formule d'Itô, l'EDP satisfaite par \mathcal{B} :

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + a(\hat{b} - r) \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial r^2} - r \mathcal{B} = 0,$$

combinée avec la condition terminale $\mathcal{B}(T, r, T) = 1$.

2) a) En substituant dans l'EDP ci-dessus la forme $\mathcal{B}(t, T, r) = \exp(-A(T-t)r + B(T-t))$, on obtient (puisque \mathcal{B} est strictement positif) :

$$\begin{aligned} A'(\theta)r - C'(\theta) - a(\hat{b} - r)A(\theta) + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2(\theta) - r &= 0, \\ -A(0)r + B(0) &= 0. \end{aligned}$$

L'identification des coefficients de r implique que A et B doivent être solution de :

$$\begin{aligned} A'(\theta) + aA(\theta) - 1 &= 0 \\ -C'(\theta) - a\hat{b}A(\theta) + \frac{1}{2}\gamma^2 A^2 &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $A(0) = 0$ et $C(0) = 0$.

b) La résolution de ces équations différentielles ordinaires linéaires est immédiate :

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} \\ C(\theta) &= -\left(\hat{b} - \frac{\gamma^2}{2a^2}\right)\theta + \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} \left(\hat{b} - \frac{\gamma^2}{4a^2}\right) + \frac{\gamma^2}{4a^3}(1 - e^{-2a\theta}). \end{aligned}$$

En posant $R_\infty = \hat{b} - \frac{\gamma^2}{2a^2}$, on retrouve la formule de Vasicek :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t, r, T) &= \exp[-A(T-t)r + C(T-t)] \\ &= \exp\left[-R_\infty(T-t) + (R_\infty - r) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\gamma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2\right]. \end{aligned}$$

3) Pour calculer la volatilité $\sigma(t, T)$ du zéro-coupon, on applique la formule d'Itô à $B(t, T) = \mathcal{B}(t, r_t, T)$ ce qui donne

$$\sigma(t, T) = \frac{1}{\mathcal{B}(t, r_t, T)} \gamma \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}(t, r_t, T) = \gamma \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

On remarque que la volatilité du zéro-coupon est déterministe.

5.5.3 Moyenne et variance dans le modèle CIR

Soit le modèle CIR pour le taux spot :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \gamma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (5.23)$$

1) En intégrant cette EDS et en admettant que l'intégrale stochastique qui intervient est d'espérance nulle, écrire l'EDO satisfaite par $\mathbb{E}[r_t]$. Expliciter la moyenne $\mathbb{E}[r_t]$.

2) En appliquant la formule d'Itô à r_t^2 et en procédant de manière similaire au 1), écrire l'EDO satisfaite par $\mathbb{E}[r_t^2]$. Expliciter alors la variance $\text{Var}(r_t)$.

Corrigé. 1) On a en intégrant (5.23)

$$r_t = r_0 + a \int_0^t (b - r_s)ds + \gamma \int_0^t \sqrt{r_s}dW_s.$$

En prenant l'espérance et en posant $\phi(t) = \mathbb{E}[r_t]$, on a par Fubini :

$$\phi(t) = r_0 + a \int_0^t (b - \phi(s))ds.$$

Cette équation intégrale se transforme en edo

$$\phi'(t) = a(b - \phi(t)), \quad \phi(0) = r_0,$$

dont la solution est

$$\mathbb{E}[r_t] = \phi(t) = b + (r_0 - b)e^{-at}.$$

2) Par la formule d'Itô à r_t^2 , on a

$$dr_t^2 = 2r_t dr_t + d \langle r_t \rangle = [(2ab + \gamma^2)r_t - 2ar_t^2] dt + 2\gamma r_t^{\frac{3}{2}} dW_t,$$

soit en intégrant

$$r_t^2 = r_0^2 + (2ab + \gamma^2) \int_0^t r_s ds - 2a \int_0^t r_s^2 ds + 2\gamma \int_0^t r_s^{\frac{3}{2}} dW_s.$$

En prenant l'espérance et en posant $\psi(t) = \mathbb{E}[r_t^2]$, on a par Fubini :

$$\psi(t) = r_0^2 + (2ab + \gamma^2) \int_0^t \phi(s) ds - 2a \int_0^t \psi(s) ds.$$

Cette équation intégrale se transforme en edo

$$\psi'(t) = (2ab + \gamma^2)\phi(t) - 2a\psi(t), \quad \psi(0) = r_0^2,$$

dont la résolution donne

$$\begin{aligned} e^{2at}\psi(t) &= \psi(0)^2 + (2ab + \gamma^2) \int_0^t e^{2as}\phi(s)ds \\ &= r_0^2 + (2ab + \gamma^2) \left[b \frac{e^{2at} - 1}{2a} + (r_0 - b) \frac{e^{at} - 1}{a} \right], \end{aligned}$$

soit

$$\mathbb{E}[r_t^2] = \psi(t) = r_0^2 e^{-2at} + \left(2b + \frac{\gamma^2}{a} \right) \left[\frac{b}{2} (1 - e^{-2at}) + (r_0 - b)(e^{-at} - e^{-2at}) \right].$$

On en déduit

$$\text{Var}(r_t) = \psi(t) - \phi(t)^2 = \frac{\gamma^2}{a} (1 - e^{-at}) \left[r_0 e^{-at} + \frac{b}{2} (1 - e^{-at}) \right].$$

5.5.4 Volatilité exponentielle dans HJM gaussien

On considère le modèle de HJM avec une volatilité des taux forward de la forme

$$\gamma(t, T) = -\sigma \exp(-a(T - t)),$$

avec des constantes $\sigma \neq 0$ et $a \geq 0$.

- 1) Expliciter la dynamique du taux forward sous la condition d'AOA de HJM.
- 2) En déduire que la dynamique du taux spot est :

$$r_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} d\hat{W}_s,$$

et écrire sa différentielle. Que remarque t-on ?

- 3) Expliciter l'expression du prix du zéro-coupon en fonction du taux spot et de la courbe des taux aujourd'hui et montrer qu'on a :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[S(t, T)(r_t - f(0, t)) - \frac{\sigma^2}{4a} S(t, T)^2 (1 - e^{-2a(T-t)}) \right],$$

où

$$S(t, T) = -\frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)} \right).$$

Corrigé. 1) La condition d'AOA de HJM implique que la tendance du taux forward est sous \mathbb{Q} :

$$\alpha(t, T) = \gamma(t, T) \int_t^T \gamma(t, s) ds = \frac{\sigma^2}{a} e^{-a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

Sa dynamique est sous \mathbb{Q} :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \gamma(s, T) d\hat{W}_s \\ &= f(0, T) + \frac{\sigma^2}{a^2} \left[e^{-a(T-t)} \left(1 - \frac{e^{-a(T-t)}}{2} \right) - e^{-aT} \left(1 - \frac{e^{-aT}}{2} \right) \right] \\ &\quad - \sigma \int_0^t e^{-a(T-s)} d\hat{W}_s. \end{aligned}$$

2) Le taux spot $r_t = f(t, t)$ est donné par

$$r_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} d\hat{W}_s.$$

Pour obtenir la différentielle de r_t , on pose $\tilde{r}_t = e^{at} r_t$ qui s'écrit

$$\tilde{r}_t = g(t) - \sigma \int_0^t e^{as} d\hat{W}_s$$

avec

$$g(t) = f(0, t)e^{at} + \frac{\sigma^2 e^{at}}{2a^2} (1 - e^{-at})^2.$$

On a donc $d\tilde{r}_t = g'(t)dt - \sigma e^{at} d\hat{W}_t$, d'où

$$dr_t = e^{-at} (d\tilde{r}_t - a\tilde{r}_t dt) = (e^{-at} g'(t) - ar_t) dt - \sigma d\hat{W}_t.$$

C'est le modèle de Vasicek.

3) La volatilité du zéro-coupon est

$$\sigma(t, T) = - \int_t^T \gamma(t, s) ds = \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)}).$$

Le prix zéro-coupon est donc

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, t) d\hat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T)|^2 - |\sigma(s, t)|^2 ds \right] \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[\frac{\sigma}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)} - e^{-a(T-s)} d\hat{W}_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_0^t (1 - e^{-a(T-s)})^2 - (1 - e^{-a(t-s)})^2 ds \right]. \end{aligned}$$

D'après l'expression de r_t , on a

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{a} \int_0^t e^{-a(t-s)} - e^{-a(T-s)} d\hat{W}_s &= \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \int_0^t e^{-a(t-s)} d\hat{W}_s \\ &= S(t, T) \left(r_t - f(0, t) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 \right). \end{aligned}$$

où

$$S(t, T) = -\frac{1}{a} \left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

D'autre part, un calcul intégral direct donne

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{2a^2} \int_0^t (1 - e^{-a(T-s)})^2 - (1 - e^{-a(t-s)})^2 ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2a^2} S(t, T) \left[2(1 - e^{-at}) + \frac{1}{2}(e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t)}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2at}) \right]. \end{aligned}$$

En substituant dans l'expression de $B(t, T)$, on obtient alors après quelques simplifications :

$$\begin{aligned} \ln B(t, T) &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + S(t, T)(r_t - f(0, t)) \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2a^2} S(t, T) \left[(1 - e^{-at})^2 - 2(1 - e^{-at}) - \frac{1}{2}(e^{-a(T-t)} - e^{-a(T+t)}) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2at}) \right] \\ &= \ln \left(\frac{B(0, T)}{B(0, t)} \right) + S(t, T)(r_t - f(0, t)) - \frac{\sigma^2}{4a} S(t, T)^2 (1 - e^{-2a(T-t)}), \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

5.5.5 Option sur obligations à coupons

On considère une obligation versant à partir d'une émission en τ des coupons C_i aux dates $\tau < T_1 < \dots < T_n$. Le prix de cette obligation en τ est donc

$$O_\tau = \sum_{i=1}^n C_i B(\tau, T_i).$$

On considère un call de maturité τ , de strike K sur cette obligation.

1) Montrer que le prix de ce call en $t = 0$ est donné par

$$\Pi_0 = \left[\sum_{i=1}^n C_i B(0, T_i) \mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{E}) \right] - KB(0, \tau) \mathbb{Q}^\tau(\mathcal{E}),$$

où $\mathcal{E} = \{O_\tau \geq K\}$ et $\mathbb{Q}^\tau, \mathbb{Q}^{T_i}, i = 1, \dots, n$ sont les probabilités forward-neutres associées aux dates $\tau, T_i, i = 1, \dots, n$.

2) On se place dans un modèle HJM gaussien Ho-Lee ou Vasicek. En remarquant que le prix zéro-coupon est une fonction déterministe strictement décroissante du taux spot, $B(t, T) = \mathcal{B}(t, T, r_t)$, montrer qu'il existe un taux court constant r_K tel que

$$\mathcal{E} = \{r_\tau \leq r_K\}.$$

Comment est caractérisé r_K ?

3) En déduire que $\mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{E}) = N(d_i)$ où on explicitera d_i . Calculer alors Π_0 .

Corrigé. 1) On écrit le payoff du call sous la forme

$$\begin{aligned} (O_\tau - K)_+ &= \left(\sum_{i=1}^n C_i B(\tau, T_i) - K \right) 1_{\mathcal{E}} \\ &= \sum_{i=1}^n C_i B(\tau, T_i) 1_{\mathcal{E}} - K 1_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

En introduisant la probabilité T_i -forward neutre, le prix du flux $C_i B(\tau, T_i) 1_{\mathcal{E}}$ versant C_i en T_i en cas d'exercice est :

$$\Pi_0(C_i B(\tau, T_i) 1_{\mathcal{E}}) = B(0, T_i) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}}(C_i 1_{\mathcal{E}}) = B(0, T_i) C_i \mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{E}).$$

En introduisant la probabilité τ -forward neutre, le prix du flux $K 1_{\mathcal{E}}$ versant K en τ en cas d'exercice est :

$$\Pi_0(K 1_{\mathcal{E}}) = B(0, \tau) K \mathbb{Q}^{\tau}(\mathcal{E}).$$

En additionnant la somme des prix des divers flux, on obtient la relation voulue.

2) On a

$$\mathcal{O}_\tau = \sum_{i=1}^n C_i B(\tau, T_i) = \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{B}(\tau, T_i, r_\tau) = \mathcal{O}(\tau, r_\tau),$$

où $\mathcal{O}(t, r) = \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{B}(t, T_i, r)$ est une fonction déterministe et strictement décroissante en r . On en déduit qu'il existe r_K tel que

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{O}_\tau \geq K\} = \{r_\tau \leq r_K\},$$

avec r_K déterminé par la relation :

$$\mathcal{O}(\tau, r_K) = K.$$

3) On peut alors écrire pour tout T_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{E}) &= \mathbb{Q}^{T_i}(r_\tau \leq r_K) = \mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{B}(\tau, T_i, r_\tau) \geq \mathcal{B}(\tau, T_i, r_K)) \\ &= \mathbb{Q}^{T_i}(B(\tau, T_i) \geq K_i) \quad \text{avec } K_i = \mathcal{B}(\tau, T_i, r_K). \end{aligned}$$

Par le même calcul que pour le call de maturité τ , de strike K_i sur le zéro-coupon de maturité T_i , on a alors

$$\mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{E}) = N(d_i)$$

avec

$$d_i = \frac{\ln \left(\frac{B(0, T_i)}{K_i B(0, \tau)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma^2(\tau, T_i)}{\Sigma(\tau, T_i)}.$$

On a aussi

$$\mathbb{Q}^\tau(\mathcal{E}) = N(d_0)$$

avec

$$d_0 = d_i - \Sigma(\tau, T_i).$$

Le prix du call est donc

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^n C_i B(0, T_i) N(d_i) - K B(0, \tau) N(d_0).$$

5.5.6 Formules de prix pour les caplets

On considère un caplet de strike K et de maturité $T + \delta$: c'est un contrat optionnel permettant d'emprunter en $T + \delta$ au taux Libor $L(T, \delta)$ de la période $[T, T + \delta]$ au niveau maximum de K . Son payoff est donc $\delta(L(T, \delta) - K)_+$.

1) Montrer que ce caplet est équivalent à $(1 + \delta K)$ put de maturité T sur un zéro-coupon de maturité $T + \delta$.

2) On se place dans un modèle HJM gaussien avec donc une structure de volatilité $\sigma(t, T)$ déterministe pour les zéro-coupon. Calculer le prix du caplet et montrer qu'il s'écrit en $t = 0$ sous la forme

$$\Pi_0 = B(0, T + \delta) [(1 + \delta L_f(0, T, \delta) N(d_1) - (1 + \delta K) N(d_2)],$$

où $L_f(t, T, \delta)$ est le taux forward linéaire entre T et $T + \delta$, et on explicitera d_1 et d_2 .

3) Montrer que la dynamique de $L_f(t, T, \delta)$ est donnée sous la probabilité $T + \delta$ -forward neutre $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ par :

$$dL_f(t, T, \delta) = L_f(t, T, \delta) \gamma(t, T, \delta) d\hat{W}^{T+\delta},$$

où on explicitera $\gamma(t, T, \delta)$. *Indication* : exprimer $B(t, T)/B(t, T + \delta)$ sous $\mathbb{Q}^{T+\delta}$.

4) On suppose $\gamma(t, T, \delta)$ déterministe. On dit que le modèle Libor est log-normal. Montrer que le prix du caplet est égal à

$$\Pi_0 = \delta B(0, T + \delta) [L_f(0, T, \delta) N(d'_1) - K N(d'_2)],$$

où on explicitera d'_1 et d'_2 .

Corrigé. 1) En utilisant la relation $1 + \delta L(T, \delta) = 1/B(T, T + \delta)$, on écrit le payoff sous la forme

$$X = \left(\frac{1}{B(T, T + \delta)} - 1 - \delta K \right)_+ = \frac{1 + \delta K}{B(T, T + \delta)} \left(\tilde{K} - B(T, T + \delta) \right)_+$$

en posant $\tilde{K} = 1/(1 + \delta K)$. X est donc le prix d'un contrat forward de maturité $T + \delta$, sur $(1 + \delta K)$ put de maturité T de support le zéro-coupon de maturité $T + \delta$. Par la règle de valorisation risque-neutre, on a :

$$\begin{aligned} \Pi_0(X) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[\frac{X}{S_{T+\delta}^0} \right] \\ &= (1 + \delta K) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[e^{-\int_0^{T+\delta} r_s ds} \frac{1}{B(T, T + \delta)} \left(\tilde{K} - B(T, T + \delta) \right)_+ \right] \\ &= (1 + \delta K) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[e^{-\int_T^{T+\delta} r_s ds} | \mathcal{F}_T \right] \frac{1}{B(T, T + \delta)} \left(\tilde{K} - B(T, T + \delta) \right)_+ \right] \\ &= (1 + \delta K) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^0} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} \left(\tilde{K} - B(T, T + \delta) \right)_+ \right]. \end{aligned}$$

C'est le prix de $(1 + \delta K)$ put de maturité T , de strike \tilde{K} , sur le zéro-coupon de maturité $T + \delta$.

2) On applique la même méthodologie que pour un call sur zéro-coupon. En introduisant les probabilités T et $T + \delta$ -forward neutre, on a :

$$\Pi_0(X) = (1 + \delta K) \left[B(0, T) \tilde{K} \mathbb{Q}^T(\mathcal{E}) - B(0, T + \delta) \mathbb{Q}^{T+\delta}(\mathcal{E}) \right],$$

où $\mathcal{E} = \{B(T, T + \delta) \leq \tilde{K}\}$. On écrit

$$\begin{aligned} &B_f(t, T, T + \delta) \\ &= B_f(0, T, T + \delta) \cdot \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T + \delta) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T + \delta) - \sigma(s, T)|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Puisque $B_f(T, T, T + \delta) = B(T, T + \delta)$, on a

$$\mathbb{Q}^T(\mathcal{E}) = \mathbb{Q}^T \left(\int_0^T \sigma(s, T + \delta) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T \leq \ln \left(\frac{\tilde{K}}{B_f(0, T, T + \delta)} \right) + \frac{1}{2} \Sigma^2(T, \delta) \right),$$

où $\Sigma^2(T, \delta) = \int_0^T |\sigma(s, T + \delta) - \sigma(s, T)|^2 ds$. Comme $-\int_0^T \sigma(s, T + \delta) - \sigma(s, T) d\hat{W}_s^T$ suit sous \mathbb{Q}^T une loi normale centrée de variance $\Sigma^2(T, \delta)$, on a

$$\mathbb{Q}^T(\mathcal{E}) = N(d_1), \quad \text{avec } d_1 = \frac{\ln \left(\frac{1 + \delta L_f(0, T, \delta)}{1 + \delta K} \right) + \frac{1}{2} \Sigma^2(T, \delta)}{\Sigma(T, \delta)}.$$

De manière similaire, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{B_f(t, T, T + \delta)} \\ &= \frac{1}{B_f(t, T, T + \delta)} \cdot \exp \left[\int_0^t \sigma(s, T) - \sigma(s, T + \delta) d\hat{W}_s^{T+\delta} - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma(s, T) - \sigma(s, T + \delta)|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{T+\delta}(\mathcal{E}) &= \mathbb{Q}^{T+\delta} \left(\frac{1}{B_f(T, T, T + \delta)} \geq \frac{1}{\tilde{K}} \right) \\ &= \mathbb{Q}^T \left(- \int_0^T \sigma(s, T) - \sigma(s, T + \delta) d\hat{W}_s^T \leq \ln \left(\frac{\tilde{K}}{B_f(0, T, T + \delta)} \right) - \frac{1}{2} \Sigma^2(T, \delta) \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{Q}^{T+\delta}(\mathcal{E}) = N(d_2), \quad \text{avec } d_2 = d_1 - \Sigma(T, \delta) = \frac{\ln \left(\frac{1 + \delta L_f(0, T, \delta)}{1 + \delta K} \right) - \frac{1}{2} \Sigma^2(T, \delta)}{\Sigma(T, \delta)}.$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \Pi_0(X) &= B(0, T)N(d_1) - (1 + \delta K)B(0, T + \delta)N(d_2) \\ &= B(0, T + \delta) [(1 + \delta L_f(0, T, \delta)N(d_1) - (1 + \delta K)N(d_2))]. \end{aligned}$$

3) Le prix forward $B(t, T)/B(t, T + \delta)$ est une martingale sous $\mathbb{Q}^{T+\delta}$ et sa volatilité est donnée par la différence de volatilité de $\sigma(t, T)$ et $\sigma(t, T + \delta)$. Autrement dit :

$$d \left(\frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} \right) = \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} (\sigma(t, T) - \sigma(t, T + \delta)) d\hat{W}_t^{T+\delta}.$$

On écrit par définition du taux forward linéaire entre T et $T + \delta$:

$$1 + \delta L_f(t, T, \delta) = \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} dL_f(t, T, \delta) &= \frac{1}{\delta} \frac{B(t, T)}{B(t, T + \delta)} (\sigma(t, T) - \sigma(t, T + \delta)) d\hat{W}_t^{T+\delta} \\ &= \frac{1}{\delta} (1 + \delta L_f(t, T, \delta)) (\sigma(t, T) - \sigma(t, T + \delta)) d\hat{W}_t^{T+\delta} \\ &= L_f(t, T, \delta) \gamma(t, T, \delta) d\hat{W}_t^{T+\delta}, \end{aligned}$$

avec

$$\gamma(t, T, \delta) = \frac{1 + \delta L_f(t, T, \delta)}{\delta L_f(t, T, \delta)} (\sigma(t, T) - \sigma(t, T + \delta)).$$

4) En utilisant la probabilité $T + \delta$ -forward neutre, le prix du caplet à la date $t = 0$ s'exprime comme :

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= B(0, T + \delta) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} [\delta(L(T, \delta) - K)_+] \\ &= \delta B(0, T + \delta) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} [(L_f(T, T, \delta) - K)_+]\end{aligned}$$

Puisque sous $\mathbb{Q}^{T+\delta}$, on

$$\ln L_f(T, T, \delta) \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\Gamma^2(T, \delta), \Gamma^2(T, \delta)\right),$$

avec $\Gamma^2(T, \delta) = \int_0^T |\gamma(s, T, \delta)|^2 ds$, le calcul de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} [(L_f(T, T, \delta) - K)_+]$ est celui d'un call de maturité T , de strike K dans le modèle de Black-Scholes avec taux d'intérêt nul, et volatilité $\Gamma^2(T, \delta)/T$. On a donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T+\delta}} [(L_f(T, T, \delta) - K)_+] = L_f(0, T, \delta)N(d'_1) - KN(d'_2),$$

avec

$$\begin{aligned}d'_1 &= \frac{\ln\left(\frac{L_f(0, T, \delta)}{K}\right) + \frac{1}{2}\Gamma^2(T, \delta)}{\Gamma(T, \delta)} \\ d'_2 &= d'_1 - \Gamma(T, \delta).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\Pi_0 = \delta B(0, T + \delta) [L_f(0, T, \delta)N(d'_1) - KN(d'_2)].$$

Bibliographie

- [1] Benth F.E. (2004) : Option theory with stochastic analysis, an introduction to mathematical finance, Springer Verlag.
- [2] Bingham N. et R. Kiesel (2004) : Risk-neutral valuation, 2nde édition, Springer Verlag.
- [3] Dana R.A. et M. Jeanblanc (2002) : Marchés financiers en temps continu, 2nde édition, Economica.
- [4] El Karoui N. (2003) : Couverture des risques financiers, Notes de cours, DEA Paris 6.
- [5] Lamberton D. et B. Lapeyre (1998) : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, 2nde édition, Ellipses.
- [6] Musiela M. et M. Rutkowski (2005) : Martingale methods and financial modelling, 2nd édition, Springer Verlag.