

MODÈLES À
VOLATILITÉ LOCALE ET
PARAMÉTRISATION STOCHASTIC
VOLATILITY INSPIRED

Réalisé par : M. BOUDCHICHI OUSSAMA
Encadré par : M. BENABADJI MOHAMED OUALID

Encadré par : M. BENABADJI MOHAMED OUALID

Dédicaces

Par reconnaissance et gratitude, je dédie ce travail
à :

Ma famille pour son amour immense ;
Que ceci soit un témoignage de mes grands
respects et remerciements.

OUSSAMA

Remerciements

Ce travail n'aurait pas été exaltant et réussi sans l'aide et le soutien de Monsieur **BENABADJI Mohamed Oualid**, Asset Manager à La Marocaine Vie. Je souhaite lui exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude pour sa disponibilité, son encadrement et les compétences qu'il a su me transmettre durant ce stage d'application.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au corps professoral de l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin au bon achèvement de ce stage.

Résumé

Le caractère simpliste et paramétrique du modèle de Black-Scholes a fait de lui, un modèle ne permettant pas de reproduire les prix des produits dérivés observés sur le marché. Plusieurs hypothèses de ce modèle sont loin d'être réalistes. En particulier, l'hypothèse d'une volatilité constante. La relaxation de cette dernière hypothèse constitue le sujet de ce rapport. En effet, Nous étudierons les modèles à volatilité locale et leur calibration. Nous présenterons notamment l'équation non-paramétrique de Dupire qui peut être définie soit en utilisant le prix des Calls, soit en utilisant la volatilité implicite. Nous comparerons les résultats obtenus des deux formulations. Nous présenterons par la suite le modèle paramétrique Stochastic Volatility Inspired de la variance implicite totale. Nous étudierons ses propriétés et les problèmes rencontrés dans sa calibration aux données du marché. La calibration de ce modèle est faite par la résolution numérique d'un problème d'optimisation non-linéaire avec contrainte en utilisant l'algorithme Sequential Least-Squares Quadratic Programming. Nous présenterons vers la fin des applications numériques afin d'illustrer la théorie étudiée.

Mots clés : Produits dérivés, Black-Scholes-Merton, Volatilité locale, Équation de Dupire, Problème inverse mal posé, Paramétrisation Stochastic Volatility Inspired, Callendar/Butterfly Spread, Programmation quadratique séquentielle.

Table des matières

Dédicaces	1
Remerciements	2
Résumé	3
Introduction	9
Présentation de l'Organisme d'accueil	10
1 Produits dérivés et Finance mathématique	13
1.1 Aperçu sur les produits dérivés	13
1.2 Un peu d'histoire de la Finance mathématique	16
2 Finance mathématique en temps discret	19
2.1 Modèles des marchés financiers en temps discret	19
2.2 Stratégies	20
2.2.1 Définitions	20
2.2.2 Auto-financement	21
2.2.3 Stratégies admissibles et arbitrage	22
2.3 Marchés Financiers viables	23
2.4 Marchés complets et évaluation des produits dérivés	25
2.5 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein	29
2.5.1 Structure du modèle	29
2.5.2 Évaluation risque-neutre	30
2.5.3 Application	31
2.5.4 Approximation Binomiale	33
3 Finance mathématique en temps continu	35
3.1 Modèles du marché financier en temps continu	36
3.2 Stratégies	36
3.2.1 Définitions	36
3.3 Arbitrage et probabilité risque-neutre	37
3.4 Evaluation risque-neutre	38
3.5 Le modèle de Black-Scholes généralisé	41
3.5.1 Le modèle	41
3.5.2 Evaluation et couverture par arbitrage	44
3.5.3 Volatilité	50
4 Modèles à volatilité locale et paramétrisation SVI	51
4.1 Equation de Dupire	55
4.1.1 Diffusions et projections markoviennes	55
4.1.2 Equation de Dupire	58
4.1.3 Calendar spread et Butterfly spread	61

4.2	Calibration de la volatilité locale	62
4.2.1	Différences finies	62
4.2.2	Problèmes inverses mal posés	63
4.2.3	Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale	65
4.3	La paramétrisation Stochastic Volatility Inspired SVI	67
4.3.1	Formule des moments de Roger Lee	68
4.3.2	Conditions d'absence de Calendar spread et de Butterfly spread	70
4.3.3	Formulation du modèle Raw SVI	70
4.3.4	Calibration du modèle Raw SVI	74
Conclusion		86
A Appendice A		87
A.1	Démonstration 1	87
A.2	Démonstration 2	87
A.3	Démonstration 3	87
A.4	Démonstration 4	88
B Appendice B		89
C Appendice C		91
C.1	Résultats numériques des paramètres SVI : calibration slice par slice	91
C.2	Résultats numériques des paramètres SVI : calibration multi-slices	92

Table des figures

1	Logo de la marocaine vie	10
2	Organigramme de La Marocaine Vie	11
3	Répartition du département investissement	11
4	Répartition du département investissement	12
1.1	Payoff de Call et Put en fonction de l'évolution du prix S_T du sous-jacent à la maturité, pour un strike $K = 60$. source : Auteur	15
1.2	Vérification des prix observés sur le marché de la relation de parité Call-Put. source : Auteur	16
1.3	R. Brown (1773-1858)	17
1.4	L. Bachelier (1870-1946)	17
1.5	P. Lévy (1886-1971)	17
1.6	N. Wiener (1894-1964)	17
1.7	Kiyoshi Itô (1915-2008)	18
2.1	Une arbre binomiale à deux étapes pour $n = 3$ Source : Auteur	31
2.2	Application C++ de Pricing d'un Call ou d'un Put européen dans le cadre du modèle CRR source : Auteur	32
2.3	Illustration de l'approximation binomiale dans le cas d'un Call européen Source : Auteur	34
3.1	Simulation de deux trajectoires du mouvement Brownien géométrique. Source : Auteur	42
3.2	Le prix d'un Call Européen en fonction de K et T , pour $r = 0.05$, $S_{t_0} = 100$ et $\sigma = 0.2$. Source : Auteur.	47
3.3	Le Delta d'un Call Européen en fonction de K et T , pour $r = 0.05$, $S_{t_0} = 100$ et $\sigma = 0.2$. Source : Auteur.	48
3.4	Evolution du portefeuille de couverture en Delta-neutre d'un Call Européen, avec un rebalancement journalier. Source : Auteur	49
4.1	Surface de volatilité implicite comme étant perçue par le modèle de Black-Scholes. Source : Auteur	52
4.2	Graphique de la volatilité implicite contre le Strike, illustrant le phénomène du <i>Skew</i> et du <i>Smile</i> . Source : Auteur	53
4.3	Surface de volatilité implicite associée à des Calls européen souscrits sur l'action AAPL. Source : Auteur	54
4.4	Surface de volatilité locale (au carré) calibrée à des prix de Calls écrits sur <i>AAPL</i> . Source : Auteur	63
4.5	Surface de volatilité locale calibrée à des volatilités implicites de Calls écrits sur l'action <i>AAPL</i> . Source : Auteur	67
4.6	Effet d'un changement des paramètres sur le graphique de la volatilité implicite totale dansle modèle SVI . Source : Auteur	71
4.7	Effet d'un changement des paramètres sur le graphique de la volatilité implicite totale dansle modèle SVI . Source : Auteur	72
4.8	Exemple d'Axel Vogt de l'arbitrage de type Butterfly Spread dans la paramétrisation SVI. Source : Auteur	73

4.9	Résultats de la calibration du modèle SVI aux données du marché (Calibration des portions de la surfaces pour différentes maturités indépendemmet). Source : Auteur .	82
4.10	Test graphique de l'absence de Butterfly Spread pour différentes maturités. Source : Auteur .	82
4.11	Test graphique de la présence du Calendar Spread pour différentes maturités. Source : Auteur .	83
4.12	Test graphique de l'absence du Calendar Spread pour différentes maturités (Calibration Multi-Slices). Source : Auteur .	84
4.13	Résultats de la calibration du modèle SVI aux données du marché (Calibration Multi-Slices). Source : Auteur .	84
4.14	Test graphique de l'absence de Butterfly Spread pour différentes maturités (Calibration Multi-Slices). Source : Auteur .	85

Liste des tableaux

1	La répartition du capital de la Marocaine Vie	10
4.1	Prix de Calls écrits sur l'action AAPL pour différents Strikes, de maturité $T = 0.002$.	81
C.1	Résultats numériques des paramètres SVI en utilisant une calibration slice par slice .	91
C.2	Résultats numériques des paramètres SVI en utilisant une calibration slice par slice .	92

Introduction

De l'antiquité jusqu'à présent, la nécessité de se protéger contre les fluctuations des prix des actifs financiers a forcé les spécialistes à créer des méthodes pour minimiser le risque et ses conséquences.

Les produits dérivés ont été apparus pour répondre à ce besoin de couverture contre le risque. Outre que cela, ils sont utilisés pour des raisons de spéculation et même d'arbitrage. Cette ubiquité faisait d'eux un objet d'attraction de plusieurs types d'investisseurs.

Toutefois, ces produits dérivés sont devenus, de plus en plus, complexes et la détermination de leurs prix ainsi que la couverture du risque sous-jacent nécessitait des outils mathématiques très sophistiqués.

Plusieurs modèles mathématiques ont été développés pour répondre à ces problématiques. Cependant, le caractère complexe et dynamique des produits dérivés a empêché l'existence d'un modèle universel, qui peut être utilisé dans le pricing et la couverture de ces produits.

À cet égard, plusieurs extensions des modèles existants ont été faites afin de remédier aux insuffisances de ces derniers.

Nous essayerons d'abord par le biais de ce travail, de faire un aperçu sur les produits dérivés afin de comprendre leur existence ainsi que leur utilisation. De plus, une brève histoire des mathématiques financières sera présentée. Ensuite, nous présenterons les idées principales de la finance mathématique en temps discret et en temps continu. Nous introduisons notamment le modèle de Black-Scholes ainsi que ses propriétés. Finalement, le sujet phare du présent rapport sera présenté. Il s'agit d'une extension du modèle de Black-Scholes, à savoir : les modèles à volatilité locale. Ainsi, nous allons présenter les différentes caractéristiques de ces modèles, les problèmes qui en résultent, ainsi que leur calibration. Une grande attention vers la fin sera attribuée au modèle Stochastic Volatility Inspired, notamment à sa calibration. Nous présentons finalement des applications numériques illustrant la théorie étudiée. Les différents résultats et graphiques de ce rapport sont produits par l'auteur. Les codes utilisés sont trouvés dans le lien ci-dessous.[†]

[†]. <https://github.com/OussamaBOUDCHICHI/Local-Volatility-Models-and-SVI-Parametrization>

Présentation de l'Organisme d'accueil

Dans le cadre de notre stage d'application, nous avons effectué notre stage d'une durée de deux mois au sein de
La Marocaine Vie.



FIGURE 1 – Logo de la marocaine vie

La Marocaine-Vie, seule compagnie spécialisée dans les branches d'assurance de personnes, est présente sur le marché marocain depuis 1978. Acquisée en 2001 par le Groupe Société Générale (via Sogécap, compagnie d'assurance vie du Groupe, et Société Générale Maroc), elle a depuis lors réorienté son activité vers le développement de la bancassurance avec les réseaux et filiales de la Société Générale au Maroc.

Parmi les valeurs essentielles fixées par la Marocaine Vie nous trouvons :

- Le professionnalisme : Cette caractéristique est renforcée par le développement du savoir faire et de l'échange de l'expérience.
- L'esprit d'équipe : Le partage du savoir et du savoir faire est l'une des caractéristiques du travail en groupe qui permet d'aboutir à un travail efficace et par suite une amélioration remarquable des prestations.
- L'innovation : La marocaine vie essaye d'inventer de nouveaux produits et de nouveaux services qui répondent aux besoins de sa clientèle et attirent des nouveaux adhérents.

La répartition du capital de la Marocaine Vie est présentée dans le tableau suivant :

Actionnaire	%
Sogécap	74%
Société Générale Maroc	26%

TABLE 1 – La répartition du capital de la Marocaine Vie

Avec :

Sogécap : Compagnie d'assurance vie et de capitalisation du Groupe Société Générale, est en France l'un des leaders de la bancassurance. En fin 2009 , Sogécap gère plus de 8 millions de contrats pour un encours supérieur à 70 milliards d'euros.

La société Générale : Banque universelle créée en 1913 , Société Générale Maroc est l'une des principales filiales du Groupe Société Générale France. Groupe Société Générale Maroc est le premier groupe financier international du pays.

Les différentes divisions composant la Marocaine Vie sont présentées dans l'organigramme suivant :

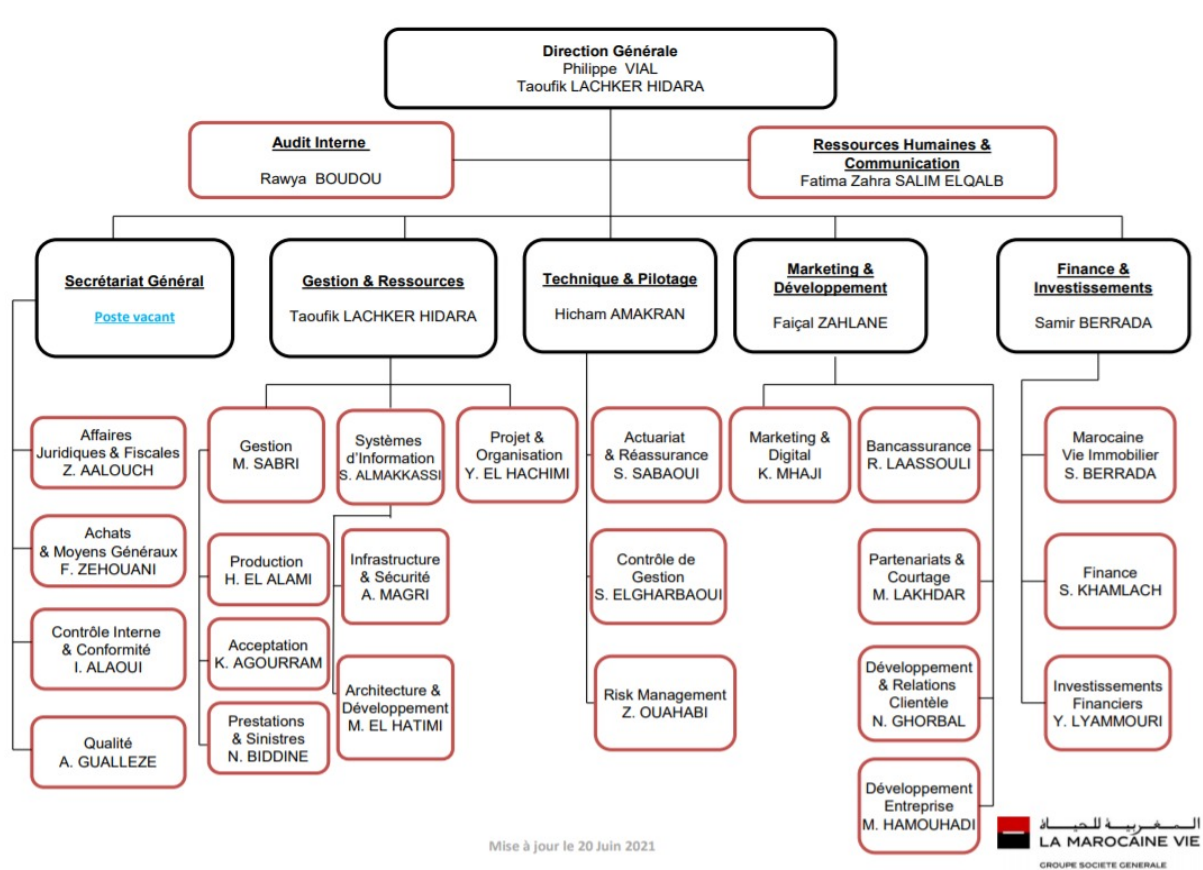


FIGURE 2 – Organigramme de La Marocaine Vie

Le présent projet s'est déroulé au sein du département Investissement de La Marocaine Vie. Ce département se divise en 3 entités , comme expliqué ci-dessous :



FIGURE 3 – Répartition du département investissement

Le rôle du département Investissements Financiers peut se résumer par la schématisation ci-dessous :

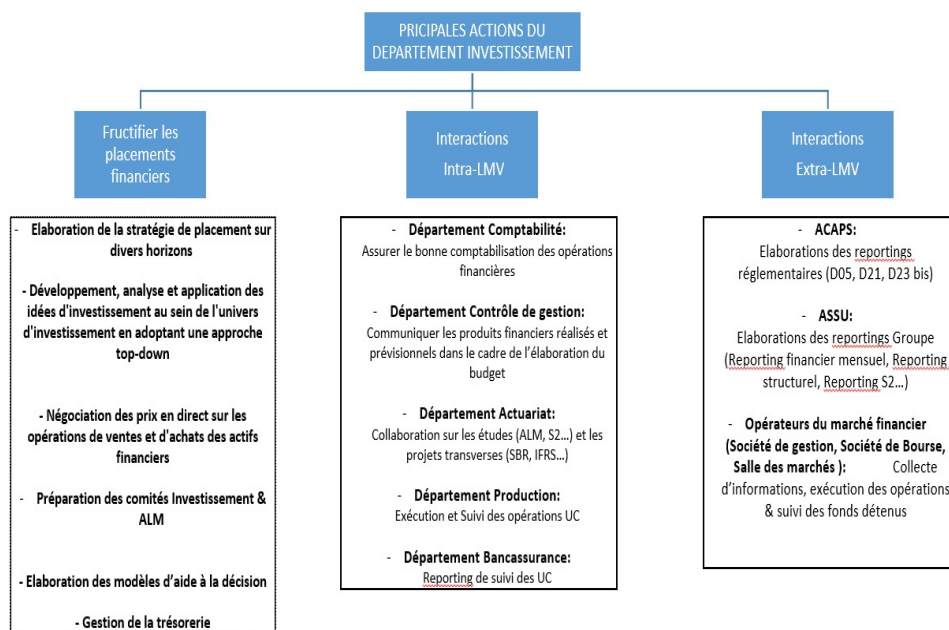


FIGURE 4 – Répartition du département investissement

Produits dérivés et Finance mathématique

1.1 Aperçu sur les produits dérivés

Un produit dérivé est un produit financier, défini à partir d'un autre produit financier plus simple appelé sous-jacent comme par exemple une action, un indice, une devise, une matière première ou un taux d'intérêt pour les sous-jacents les plus naturels. Le produit dérivé le plus simple est le *contrat à terme* où un acheteur et un vendeur s'entendent pour échanger à une date fixée un sous-jacent à un prix déterminé à l'avance. Le *contrat optionnel*, ou *option*, est une autre catégorie de produit dérivé, expliqué ultérieurement.

Les premières formes des produits dérivés remontent aux origines de l'Antiquité et ils portaient essentiellement sur les produits agricoles. Les contrats à termes, par exemple, étaient présents à l'ère du pharaon Akhénoton 14 siècles avant Jésus-Christ.

Ce sont les accords de Bretton Woods de 1944 qui instaurent un système de parité entre l'or et le dollar américain, et une stabilité des taux de change entre les principales monnaies mondiales. Mais ce système est abandonné en 1971, rendant instables les taux de change. Les déséquilibres macro-économiques qui en résultent conduisent à des tensions sur les taux d'intérêt, devenant à leur tour volatiles. À la fin des années 60, les fluctuations des taux de change et des taux d'intérêt sont comparables, voire supérieures à celles des cours des matières premières. Par ailleurs le 1er choc pétrolier de 1973 contribue lui aussi à des variations importantes des cours des matières premières.

Le premier marché d'options moderne est apparu en 1973 et c'était le CBOE (Chicago Board of Options Exchange).. De l'autre côté de l'Atlantique, le premier marché d'options a été créé à Londres en 1978 (London Traded Option Exchange aujourd'hui devenu LIFFE qui fait maintenant partie du groupe Euronext). En France, le MONEP (Marché d'Options NEgotiables de Paris) a ouvert ces portes en 1987.

En général, les produits décrits sont décrits par un échéancier donnant les dates de paiement des flux financiers qui caractérisent le contrat. La fin du contrat est appelée la maturité ou échéance. Les produits dérivés sont essentiellement de deux types :

1. LES CONTRATS À TERMES : À la signature, l'acheteur et le vendeur conviennent de l'échange à une date ou un échéancier donné d'un sous-jacent à un prix fixé. Les exemples de tels contrats sont :
 - Les contrats *forwards* : Ce sont des contrats de gré à gré (Over The Counter ou OTC), i.e non-standardisés. Le prix d'échange fixé à signature est réglé à maturité, en échange du sous-jacent ;
 - Les contrats *futures* : Le principe est analogue aux contrats forwards, mais la différence principale tient au fait que ce sont des contrats standardisés échangés sur des marchés organisés ;

- Les *swaps* : Ces contrats de gré à gré permettent d'échanger un sous-jacent à un prix fixe, tout le long d'un échéancier donné.
2. LES OPTIONS : Contre le paiement d'une *prime*, l'acheteur d'option a le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (ou de vendre selon le sens de l'option) un sous-jacent à un prix convenu dans le contrat optionnel. La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :
- la nature de l'option : On parle de *Call* pour une option standard d'achat et de *Put* pour une option de vente.
 - l'actif sous-jacent, sur lequel porte l'option : Action, obligation, devise ..
 - La quantité, c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.
 - l'échéance ou date d'expiration, qui limite la durée de vie de l'option.
 - Le style d'exercice : si l'option peut être exercée à n'importe quel instant avant l'échéance, on parle d'option *américaine*, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'option *européenne*.
 - le prix d'exercice, ou le *Strike* qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

À titre d'exemple, considérons un *Call* européen souscrit sur une action de prix S_t à un instant t , de maturité T et de strike égal à K . Si on note par C_T le payoff, à la maturité T , de cette option. Alors, par définition, il sera donné par :

$$C_T := \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

De même, le payoff à la maturité, que l'on note P_T , d'un *Put* européen ayant les mêmes caractéristiques que le *Call* précédent sera donné par :

$$P_T := \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$$

La figure 1.1 montre l'évolution du payoff de Call et de Put européens en fonction de l'évolution du prix du sous-jacent à la maturité.

Au moment de la vente de l'option, que nous prendrons comme origine des temps, le cours S_T est inconnu et deux questions se posent :

- comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse C_T disponible à la date T ? c'est le problème de l'évaluation, ou du *pricing*.
- Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant $t = 0$ parviendra-t-il à produire la richesse C_T à la date T ? c'est le problème de la couverture, ou du *hedging*.

La réponse aux deux questions qui précèdent ne peut se faire qu'à partir d'un minimum d'hypothèses de modélisation. L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est que, dans un marché suffisamment fluide, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre des risques.

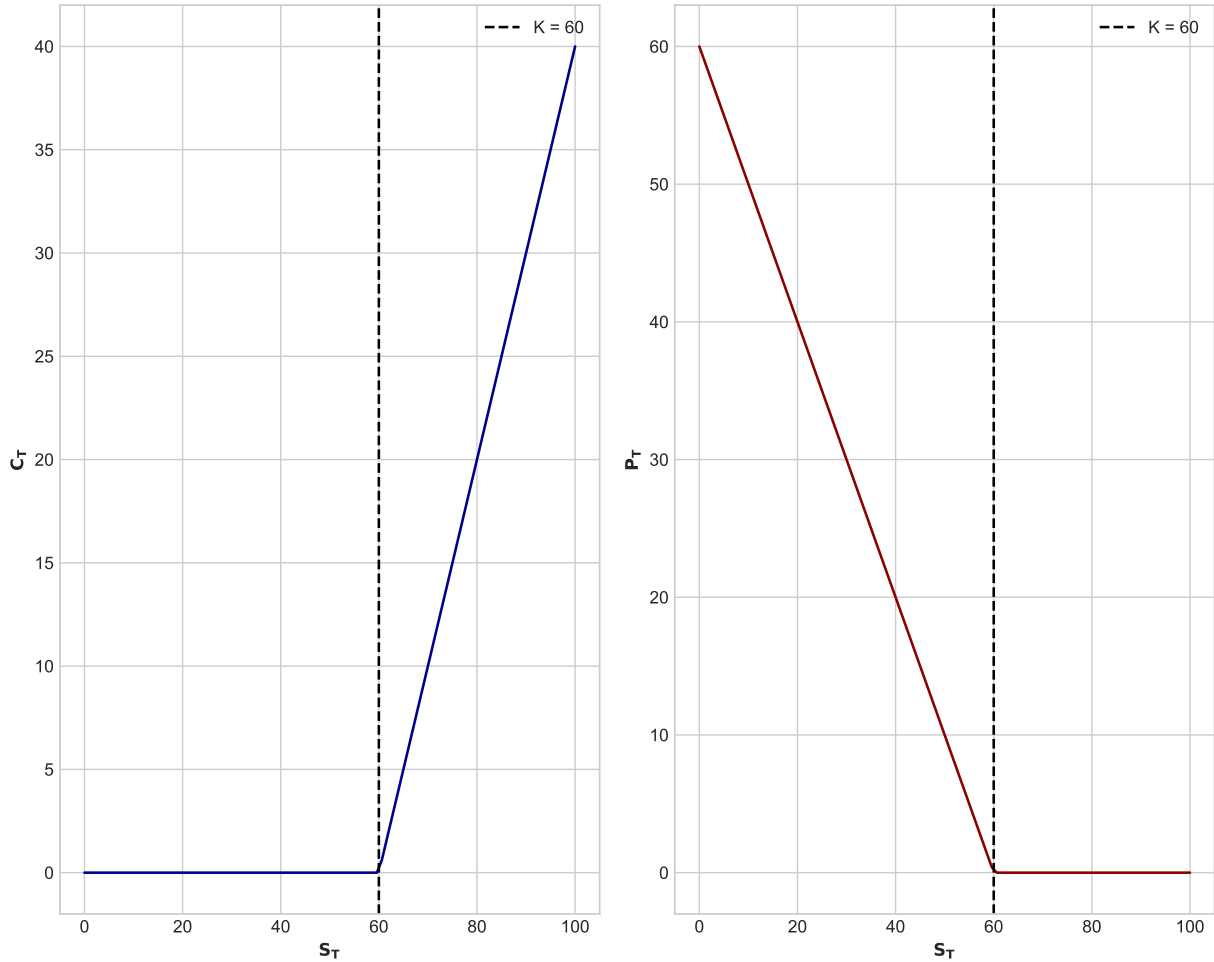


FIGURE 1.1 – Payoff de Call et Put en fonction de l'évolution du prix S_T du sous-jacent à la maturité, pour un strike $K = 60$. source : **Auteur**

Nous supposons qu'il est possible d'emprunter ou de placer de l'argent à un taux constant r , dit *taux sans-risque*. Alors, sous cette hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage (AOA), on peut démontrer facilement une relation qui lie, à tout instant t antérieur à la maturité, le payoff d'un Call et d'un Put, dite : *relation de parité Call-Put* :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

La figure 1.2 illustrent cette dernière relation, pour les prix de Calls et de Puts souscrit sur l'action *AAPL*, à la date 09/10/2021, de maturité commune 15/10/2021. On remarque clairement la linéarité de $C(K) - P(K)$ par rapport au strike K .

De tels contrats Call et Put sont très usuels entre intervenants du marché : on les appelle options *vanilles*, en référence au parfum de glaces qu'on trouve de partout. A l'inverse, les options les moins standards sont appelées options *exotiques*. Leur flux à maturité revêt des formes différentes d'où elles tirent leur noms. On peut citer par exemple : les options *barrières*, *digitales*, *asiatiques*, *lookback*, *quanto* ...

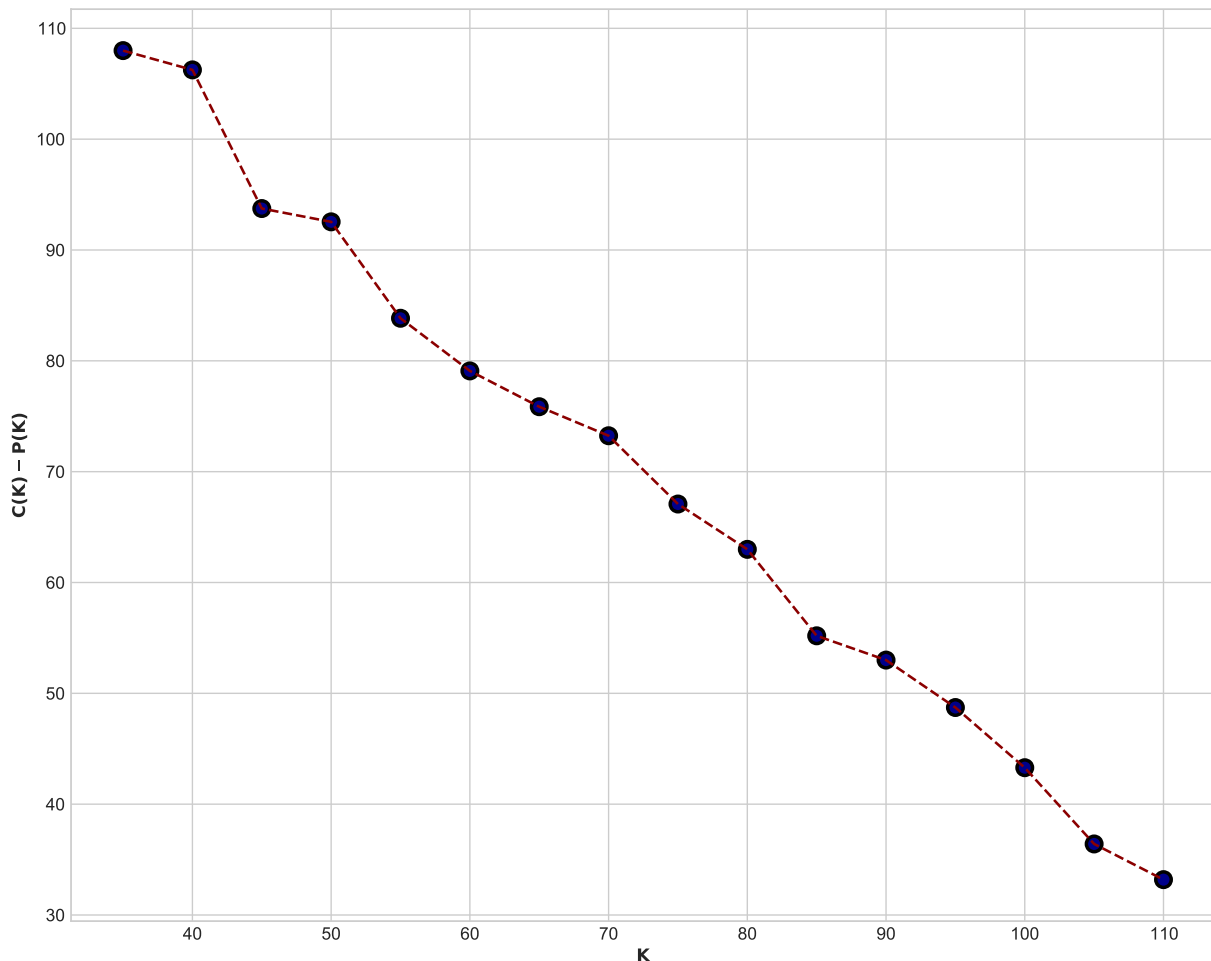


FIGURE 1.2 – Vérification des prix observés sur le marché de la relation de parité Call-Put. source : **Auteur**

1.2 Un peu d'histoire de la Finance mathématique

C'est le botaniste anglais Robert Brown (1773-1858) qui le premier décrit en 1827 le mouvement erratique de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au XIXe siècle, après lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est très irrégulier et ne semble pas admettre de tangente; on ne pourrait donc pas parler de sa vitesse, ni a fortiori lui appliquer les lois de la mécanique. Ce mouvement, appelé MOUVEMENT BROWNIEN joue un rôle central dans la théorie des processus aléatoires, parce que dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions que l'on en déduit fournissent des modèles limites simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits.

En 1900, Louis Bachelier (1870-1946) introduit le mouvement brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la Bourse, mais sa démarche est ensuite oubliée jusque vers les années 1960 . . . Sa thèse, "Théorie de la spéculation" est le point de départ de la finance moderne.

Mais c'est la physique du début du siècle qui est à l'origine du grand intérêt porté à ce processus. En 1905 , Albert Einstein (1879-1955) construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse : il trouve que la loi de la position à l'instant t de la particule, sachant que l'état initial est x admet une densité qui vérifie l'équation de la chaleur et de ce fait est gaussienne. Sa théorie sera rapidement confortée par des mesures expérimentales de constantes de diffusion satisfaisantes. La même année qu'Einstein, une version discrète du mouvement brownien est proposée par le physicien polonais Smoluchowski à l'aide de promenades aléatoires.



FIGURE 1.3 – R. Brown (1773-1858)



FIGURE 1.4 – L. Bachelier (1870-1946)

En 1923, Norbert Wiener (1894-1964) construit rigoureusement "la fonction aléatoire" du mouvement brownien ; il établit en particulier que les trajectoires sont continues. Dès 1930, en suivant une idée de Paul Langevin, Ornstein et Uhlenbeck étudient la fonction aléatoire gaussienne qui porte leur nom et qui apparaît comme la situation d'équilibre naturelle à associer au mouvement brownien.



FIGURE 1.5 – P. Lévy (1886-1971)

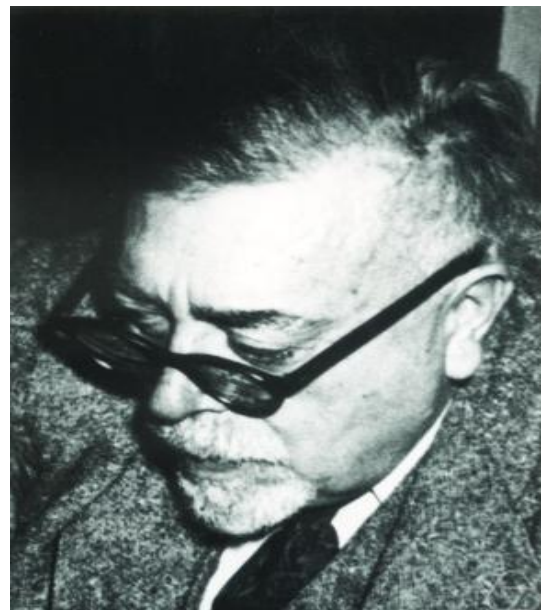


FIGURE 1.6 – N. Wiener (1894-1964)

C'est le début d'une recherche mathématique théorique très active. Paul Lévy (1886-1971) découvre ensuite, avec d'autres mathématiciens, de nombreuses propriétés du mouvement brownien et introduit une première forme des équations différentielles stochastiques, dont l'étude sera ensuite systématisée par K. Itô (1915-2008) ; ses travaux sont rassemblés dans un traité paru en 1948 devenu très célèbre.

C'est en 1973, que Fisher Black et Myron Scholes ont publié un papier scientifique, intitulé : "The pricing of options and corporate liabilities" et est considéré comme une modèle fondamental dans

le pricing des options. Durant la même année, Robert Merton a publié lui aussi une papier dans le même sujet indépendemment des premiers.

Toutefois, le modèle de Black-Scholes-Merton repose sur des hypothèses sur les marchés financiers ainsi que le processus des prix des actifs qui sont souvent peu réalistes. Plusieurs extentions ont été fait à ce modèle afin de l'adapter à la nature dynamique et complexe des marchés financiers.



FIGURE 1.7 – Kiyoshi Itô (1915-2008)

Finance mathématique en temps discret

Table des matières

2.1	Modèles des marchés financiers en temps discret	19
2.2	Stratégies	20
2.2.1	Définitions	20
2.2.2	Auto-financement	21
2.2.3	Stratégies admissibles et arbitrage	22
2.3	Marchés Financiers viables	23
2.4	Marchés complets et évaluation des produits dérivés	25
2.5	Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein	29
2.5.1	Structure du modèle	29
2.5.2	Évaluation risque-neutre	30
2.5.3	Application	31
2.5.4	Approximation Binomiale	33

Dans ce chapitre, Nous étudierons des modèles mathématiques des marchés financiers dits : modèles des marchés financiers à temps discret. Nous y reprendrons les approches probabilistes de Harrison et Pliska (1981) et Taqqu et Willinger (1987). Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est présenté en fin de chapitre pour illustrer la théorie étudiée.

2.1 Modèles des marchés financiers en temps discret

Un modèle de marché financier est construit sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un élément générique ω de Ω est appelé un *scénario*. La probabilité \mathbb{P} représente la probabilité réelle du monde Ω dans lequel nous nous plaçons et est appelé *probabilité historique*. La tribu \mathcal{F} n'est que la tribu grossière $P(\Omega)$ associée à Ω . Pour se rendre compte de tous les scénarios, la probabilité \mathbb{P} doit vérifier :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$$

Nous nous donnons un horizon de temps $T \in \mathbb{N}^*$. En général, T correspond à la date d'échéances des produits dérivés étudiés. Nous munissons alors l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}$, i.e. d'une suite croissante pour l'inclusion des sous-tribus de \mathcal{F} .

Pour un instant $n \in \llbracket 1, T \rrbracket$, \mathcal{F}_n représente l'information disponible à l'instant n . Le plus souvent, \mathcal{F}_0 sera la tribu triviale :

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$$

et la tribu terminale \mathcal{F}_T sera la tribu grossière. La trivialité de \mathcal{F}_0 rend compte du fait que le présent est déterministe dès qu'il est observable.

Le marché d'horizon T (marché à T périodes) est constitué de $d + 1$ actifs financiers, notés plus simplement $0, \dots, d$. Pour chaque instant $n \in \llbracket 1, T \rrbracket, i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, S_n^i désigne le prix (ou valeur ou cotation) de l'actif i à l'instant n . Les S_n^i , sont modélisés par des variables aléatoires positives définies sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}, \mathbb{P})$. De plus, pour chaque $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, le processus $(S_n^i)_{0 \leq n \leq T}$ est $(\mathcal{F}_n)_n$ -adapté. On note, pour chaque instant $n \in \llbracket 1, T \rrbracket$, $S_n := (S_n^i)_{0 \leq i \leq d}$ le vecteur des prix à l'instant n . On suppose d'ailleurs souvent que la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}$ n'est que la filtration canonique associé au processus $(S_n)_{0 \leq n \leq T}$:

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \mathcal{F}_n^S := \sigma \left(S_m^i, i \in \llbracket 0, d \rrbracket, m \in \llbracket 0, n \rrbracket \right)$$

En termes de modélisation, nous distinguons l'actif 0 des autres actifs. Il s'agit de l'actif sans risque qui est souvent appelé *numéraire*. Il est caractérisé par le fait que son rendement entre deux dates t et $t + 1$ est connu à l'instant t et est positif. Il s'agit en général d'un bon de trésor à taux fixe ou un livret de caisse d'épargne ... Mathématiquement, nous imposerons :

$$S_0^0 = 1 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad S_n^0 > 0$$

On suppose dorénavant, que le rendement de l'actif sans risque est constant sur chaque période et le note par r . De ce fait :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad S_n^0 = (1 + r)^n$$

Les d autres actifs sont appelés actifs risqués. Ils s'agissent des actifs de rendements non connus à l'avance. Ils peuvent être des actions ou encore des obligations risquées ...

Actualisation : Le coefficient d'actualisation de la date n à la date 0 est définie par :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \beta_n := \frac{1}{S_n^0}$$

On exprime la valeur des actifs en unités de numéraire en définissant le processus des prix actualisés par :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \tilde{S}_n = \beta_n S_n = \left(1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d \right) = \left(\tilde{S}_n^i \right)_{0 \leq i \leq d}$$

Dans un univers déterministe, pour un certain actif i et un instant n , \tilde{S}_n^i est la quantité de liquidités qu'il faut détenir à l'instant initial et qui, placée dans le numéraire entre les dates 0 et n , aura pour valeur capitalisée S_n^i à l'instant n .

Notation : Un tel modèle de marché financier est désigné par :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M} \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}, \mathbb{P}, S \right)$$

2.2 Stratégies

2.2.1 Définitions

Une stratégie de gestion (ou portefeuille dynamique ou en anglais *Trading strategy*) est un processus aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^{d+1} et $(\mathcal{F}_n)_n$ -prévisible :

$$\varphi = \left(\left(\varphi_n^0, \dots, \varphi_n^d \right) \right)_{0 \leq n \leq T}$$

C'est à dire qu'il vérifie :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad \varphi_n \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} \text{ - mesurable} \quad \text{et} \quad \varphi_0 \text{ est } \mathcal{F}_0 \text{ - mesurable}$$

Pour chaque $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ et chaque instant $n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket$, φ_n^i représente la quantité d'actif i détenue sur la période $[n, n+1[$.

La valeur d'un tel portefeuille (ou stratégie) est :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad V_n^\varphi := \langle \varphi_n, S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \sum_{i=0}^d \varphi_n^i S_n^i$$

Tel que $\langle (X_i)_{0 \leq i \leq d}, (Y_i)_{0 \leq i \leq d} \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$ désigne le produit scalaire des vecteurs aléatoires $(X_i)_{0 \leq i \leq d}$ et $(Y_i)_{0 \leq i \leq d}$ dans leur espace d'états :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}(\omega) := \sum_{i=0}^d X_i(\omega) Y_i(\omega)$$

Sa valeur actualisée est :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \tilde{V}_n^\varphi := \frac{V_n^\varphi}{S_n^0} = \sum_{i=0}^d \varphi_n^i \tilde{S}_n^i = \langle \varphi_n, \tilde{S}_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

Le processus des gains nets de l'instant initial jusqu'à un instant n donné est :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad G_n^\varphi := \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, S_j - S_{j-1} \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \Delta S_j \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

Sa valeur actualisée est :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad \tilde{G}_n^\varphi := \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

2.2.2 Auto-financement

Une stratégie φ est auto-financée, si :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad \langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \langle \varphi_n, S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

Cette propriété s'interprète de la manière suivante : Après avoir pris connaissance des cotations des actifs à l'instant n , l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition φ_n à la composition φ_{n+1} . Ce réajustement se fait à l'instant n , sans apports ou retrait de fonds.

Notation : L'ensemble des stratégies auto-financées est noté par : Φ

Proposition 2.2.2.1. Une stratégie φ est auto-financée par rapport à $(S_n)_{0 \leq n \leq T}$ si et seulement si elle est autofinancée par rapport à $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq T}$.

Démonstration. Voir Appendice. [A.1](#) □

Proposition 2.2.2.2. Une stratégie φ est auto-financée si et seulement si :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad \tilde{V}_n^\varphi = V_0^\varphi + \tilde{G}_n^\varphi$$

Démonstration. Voir Appendice. [A.2](#) □

Cette dernière proposition montre que pour une stratégie auto-financée, la valeur actualisée du portefeuille est totalement déterminée par la richesse initiale et le processus $\left((\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^d) \right)_{0 \leq n \leq T}$ des quantités d'actifs risqués détenues au cours du temps $((\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \Delta \tilde{S}_n^0 = 0)$.

Proposition 2.2.2.3. Si $\left((\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^d) \right)_{0 \leq n \leq T}$ est $(\mathcal{F}_n)_n$ -prévisible et V_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable, il existe un unique processus $\varphi = \left((\varphi_n^0, \dots, \varphi_n^d) \right)_{0 \leq n \leq T}$ $(\mathcal{F}_n)_n$ -prévisible tel que la stratégie φ soit auto-financée et la valeur initiale du portefeuille correspondant, soit égale à V_0 .

Démonstration. Voir proposition 4.1.3 de [\[3\]](#). □

2.2.3 Stratégies admissibles et arbitrage

Définition 2.2.3.1. Une stratégie φ est dite admissible si elle est auto-financée et si :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad V_n^\varphi \geq 0$$

En adoptant une stratégie admissible, l'investisseur doit être en mesure de rembourser ses emprunts en tout instant.

L'arbitrage en Finance, est un synonyme de la réalisation d'un profit sans prendre de risque. Mathématiquement, cette notion est formalisée de la façon suivante.

Définition 2.2.3.2. Soit $\tilde{\Phi}$ un sous-ensemble de Φ de stratégies auto-financées. Une stratégie auto-financée $\varphi \in \tilde{\Phi}$ est une stratégie d'arbitrage par rapport à $\tilde{\Phi}$ si :

$$\mathbb{P}(V_0^\varphi = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1 \text{ et } \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0$$

En d'autres termes : une stratégie d'arbitrage part d'une richesse initiale nulle p.s¹ et parvient à une richesse finale positive p.s et strictement positive avec une probabilité non nulle. Il est à noter que les stratégies d'arbitrage sont définies par rapport à une certaine classe de stratégies auto-financées.

L'AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) est l'un des axiomes de base de la finance de marché. Si des opportunités d'arbitrage existent, les arbitrageurs vont exploiter ses opportunités afin de réaliser des profits sans prendre de risque. Une chose qui va amener à des corrections de prix faisant disparaître ces opportunités.

En pratique, des opportunités d'arbitrage peuvent apparaître momentanément, mais elle sont rapidement éliminées. Ainsi, il est naturel d'émettre l'hypothèse : " **l'AOA est vérifiée à tout instant** ".

On présente par la suite, une loi dite *Law of one price* qui constitue la base de l'évaluation des produits dérivés.

Proposition 2.2.3.1. En AOA, si les valeurs de deux portefeuilles coïncident de façon certaine à la date finale, alors ces deux portefeuilles ont la même valeur à toute date intermédiaire.

Démonstration. Notons ces deux portefeuilles (resp.) : φ et $\tilde{\varphi}$. On raisonne par l'absurde.

Pour $t \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket$, on suppose que : $V_t^\varphi \neq V_t^{\tilde{\varphi}}$. Sans perte de généralité, on prend : $V_t^\varphi > V_t^{\tilde{\varphi}}$.

Dans ce cadre, on peut construire une opportunité d'arbitrage à l'instant t de la façon suivante : on vend le premier et on achète le deuxième. La différence $\Delta = V_t^\varphi - V_t^{\tilde{\varphi}} > 0$ étant placée au taux sans risque. Il s'agit d'une stratégie de valeur initiale nulle et de valeur finale $(\Delta e^{r(T-t)})$ supérieure strictement à zéro. Elle constitue alors une opportunité d'arbitrage, ce qui contredit l'hypothèse de l'AOA à tout instant. Ainsi :

$$V_t^\varphi \leq V_t^{\tilde{\varphi}}$$

De la même façon, si $V_t^\varphi < V_t^{\tilde{\varphi}}$, on obtient :

$$V_t^\varphi \geq V_t^{\tilde{\varphi}}$$

□

1. Presque sûrement

2.3 Marchés Financiers viables

Définition 2.3.1. On dit que le marché \mathcal{M} est *viable* (*Arbitrage-free*) s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage dans Φ .

La théorie de l'évaluation par arbitrage (Theory of Arbitrage Pricing), développée par Harrison et Kreps pour les modèles des marchés financiers à temps discrets, propose une simple caractérisation probabiliste des marchés financiers viables. Il s'agit de l'existence de ce qu'on appelle : *La probabilité risque-neutre* (*Risk-Neutral measure*).

Définition 2.3.2. On se place dans le cadre de \mathcal{M} . Une probabilité risque-neutre par rapport à $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq T}$ est une mesure de probabilité \mathbb{Q} sur Ω tel que :

- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \quad ((\forall \omega \in \Omega) : \mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0)$
- $(\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) (\forall j \in \llbracket 0, d \rrbracket) : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n^j \quad \mathbb{Q} - \text{p.s}$

Ainsi, la probabilité risque-neutre est une mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique, sous laquelle les processus des prix actualisés des actifs du marché sont des $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingales.

Remarque : Pour $n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, on définit le rendement simple de l'actif j entre n et $n+1$ par :

$$R_{n+1}^j := \frac{S_{n+1}^j - S_n^j}{S_n^j} = \frac{(1+r)\tilde{S}_{n+1}^j}{\tilde{S}_n^j} - 1$$

Si \mathbb{Q} est une probabilité risque-neutre par rapport à $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq T}$, alors :

$$\begin{aligned} & (\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n^j \quad \mathbb{Q} - \text{p.s} \\ \iff & (\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(R_{n+1}^j | \mathcal{F}_n) = r \quad \mathbb{Q} - \text{p.s} \\ \implies & (\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(R_{n+1}^j) = r \end{aligned}$$

De ce fait, les rendements simples espérés (sous \mathbb{Q}) des actifs risqués coïncident avec celui de l'actif sans-risque, d'où le terme "risque-neutre". En d'autres termes, l'introduction de cette probabilité permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque (aucune prime n'est attribuée à la prise du risque).

Proposition 2.3.1. Soient \mathbb{Q} une probabilité risque-neutre par rapport à $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq T}$ et $\varphi \in \Phi$ une stratégie auto-financée. Alors, sous \mathbb{Q} : $(\tilde{V}_n^\varphi)_{0 \leq n \leq T}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingale.

Démonstration. Voir proposition 4.2.1 de [3]. □

Proposition 2.3.2. S'il existe une probabilité risque-neutre, i.e la classe des probabilités risque-neutre est non vide, alors le marché est viable.

Démonstration. Soit \mathbb{Q} cette probabilité risque-neutre. Soit $\varphi \in \Phi$. Selon 2.3.1, on sait que, sous \mathbb{Q} : $(\tilde{V}_n^\varphi)_{0 \leq n \leq T}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingale. Ainsi :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T^\varphi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_0^\varphi)$$

Supposons par l'absurde que φ soit une stratégie d'arbitrage. Alors :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{V}_T^\varphi) = \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{V}_T^\varphi(\omega) \mathbb{Q}(\{\omega\}) = 0$$

Mais :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0, \quad \tilde{V}_T^\varphi \geq 0 \quad \mathbb{Q} - \text{p.s} \quad \text{et} : \quad \mathbb{Q}(\tilde{V}_T^\varphi > 0) > 0$$

Alors :

$$\tilde{V}_T^\varphi = 0 \quad \mathbb{Q} - \text{p.s}$$

Ce qui contredit le fait que φ est une stratégie d'arbitrage. □

Notation : On désigne par \mathbb{L}^0 l'ensemble des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{F}) . On note :

$$\mathbb{L}_{++}^0 := \left\{ X \in \mathbb{L}^0 : (\forall \omega \in \Omega) \ X(\omega) \geq 0 \text{ et } (\exists \omega \in \Omega) \ X(\omega) > 0 \right\}$$

On utilisant cette notation, la condition d'AOA peut s'écrire de la façon suivante. Pour toute stratégie auto-financée φ , on a :

$$V_0^\varphi = \tilde{V}_0^\varphi = 0 \implies \tilde{V}_T^\varphi \notin \mathbb{L}_{++}^0$$

Lemme 2.3.1. Dans un marché viable, pour tout processus $\varphi = ((\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^d))_{0 \leq n \leq T}$ $(\mathcal{F}_n)_n$ -prévisible, on a :

$$\tilde{G}_T^\varphi \notin \mathbb{L}_{++}^0$$

(Puisque la composante d'ordre 0 n'est pas importante pour le processus des gains nettes cumulées, on a confondu cette dernière notation avec celle qui porte sur une stratégie qui contient la composante d'indice 0)

Démonstration. Voir proposition 4.2.2 de [3]. □

Proposition 2.3.3. Si le marché est viable, alors il existe une probabilité risque-neutre.

Démonstration. On note :

$$K := \left\{ X \in \mathbb{L}^0 : X = \tilde{G}_T^\varphi ; \varphi \text{ prévisible} \right\}$$

Ainsi, selon 2.3.1 un marché est viable si et seulement si :

$$K \cap \mathbb{L}_{++}^0 = \emptyset$$

On pose :

$$D := \left\{ X \in \mathbb{L}_{++}^0 : \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1 \right\}$$

L'ensemble D est un convexe compact de \mathbb{L}^0 et comme $D \subset \mathbb{L}_{++}^0$ et le marché est viable, alors selon 2.3.1 :

$$D \cap K = \emptyset$$

Il en résulte du Théorème de séparation par hyperplan (Separating hyperplane theorem), qu'il existe un vecteur (variable aléatoire) λ de l'espace vectoriel \mathbb{L}^0 tel que :

- 1 $(\forall X \in D) : \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$
- 2 $(\forall \tilde{G}_T^\varphi \in K) : \sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_T^\varphi(\omega) = 0$, pour tout processus φ prévisible.

Soit $\omega \in \Omega$, on définit la variable aléatoire δ_ω par :

$$(\forall \omega' \in \Omega) : \delta_\omega(\omega') = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(\omega')$$

On a $(\forall \omega \in \Omega) : \delta_\omega \in D$, alors en utilisant 1, on obtient :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \lambda(\omega) > 0$$

On définit la mesure de probabilité \mathbb{Q} par :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \mathbb{Q}(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega)}$$

Il s'agit bien d'une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) et est équivalente à \mathbb{P} $((\forall \omega \in \Omega) : \lambda(\omega) > 0)$

La deuxième propriété se réécrit maintenant de la façon suivante. Pour tout processus φ prévisible, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{G}_T^\varphi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^T \langle \varphi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle_{\mathbb{R}^d}\right) = 0$$

Tel que $\Delta \tilde{S}_j$ ne contient (ici) que la variation des prix actualisés entre $j-1$ et j des actifs risqués. En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et tout processus prévisible $(\varphi_n^i)_{0 \leq n \leq T}$ à valeurs réelles, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\sum_{j=1}^T \varphi_j^i, \Delta \tilde{S}_j^i\right) = 0$$

D'où : pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, le processus $(\tilde{S}_n^i)_{0 \leq n \leq T}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingale sous \mathbb{Q} (Martingale transform lemma).

Par conséquent, \mathbb{Q} définit bel et bien une probabilité risque-neutre. □

Nous présentons maintenant le premier théorème central de notre chapitre.

Théorème 2.3.1. Le marché \mathcal{M} est viable si et seulement si il existe une probabilité risque-neutre.

2.4 Marchés complets et évaluation des produits dérivés

Nous traitons maintenant le problème central des mathématiques des produits dérivés, il s'agit du *pricing*.

Définition 2.4.1. On définit un *actif contingent européen* (*European contingent claim*) d'échéance T par une variable aléatoire X définie sur (Ω, \mathcal{F}) qui est positive et \mathcal{F}_T -mesurable, représentant le payoff stochastique de l'actif contingent.

Pour une option d'achat européenne ou *call* sur une unité d'un actif $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, de maturité T et de strike K . X est simplement :

$$X = (S_T^j - K)^+$$

Dans ce dernier exemple, et dans la pratique en général, X est une fonction de S_T^j seulement. Toutefois, la \mathcal{F}_T -mesurabilité de X permet de définir des biens contingents qui sont des fonctions de $(S_n^j)_{0 \leq n \leq T}$. C'est le cas des *options exotiques* et en particulier les options dites *asiatiques*.

Problématique : Nous présentons, maintenant une simple introduction au problème du pricing des produits dérivés en se plaçant dans le cadre d'un marché financier viable. Etant donné un actif contingent européen (par exemple) de maturité T et de payoff X . Comment peut-on déterminer son prix à l'instant initial (ou à tout instant inférieur à T) ?

On sait que le vendeur d'un *Call* s'expose au risque de forte variation du prix du titre sous-jacent. Pour minimiser ce risque, il doit utiliser la prime reçue à l'instant initial pour construire un portefeuille dynamique dit de **couverture**, en achetant ou en vendant le titre. Comme il s'agit d'une couverture du risque de marché (du à la variation des prix des actifs), la variation de son portefeuille doit être due seulement à la variation du prix du titre sous-jacent. De ce fait, nous imposerons que la stratégie φ de son portefeuille soit auto-financée. **L'erreur de couverture** se définit par : $V_T^\varphi - X$.

Le but du vendeur est d'avoir un erreur de couverture nul p.s (*Perfect hedging*). Ainsi, la valeur finale du portefeuille de couverture doit vérifier :

$$V_T^\varphi = X \quad \mathbb{P} - \text{p.s}$$

Comme il s'agit d'un marché viable dans lequel l'hypothèse de l'AOA est vérifiée. Alors, en vertu du *Law of one price* : V_0^φ est la valeur de l'option aujourd'hui. Cette idée, constitue la base de la théorie de l'évaluation par arbitrage (*Arbitrage pricing theory*).

Définition 2.4.2. On dit que l'actif contingent européen de maturité T défini par X est *simulable* (*attainable*), s'il existe une stratégie admissible φ dont la valeur à l'instant T est égale à X .

La question qui se pose concerne l'unicité de la stratégie de couverture. La proposition suivante donne une condition suffisante garantissant l'unicité.

Proposition 2.4.1. Si le marché \mathcal{M} est viable, alors tout actif contingent européen simulable est répliqué d'une manière unique dans \mathcal{M} .

Démonstration. Voir proposition 4.2.4 de [3]. □

En analysant l'approche de l'évaluation par arbitrage, on peut observer que le calcul du prix d'un actif contingent ne requiert aucune spécification sur le comportement des agents à l'exception de la non-satiation ce qui exclut l'arbitrage. De ce fait, la formule de l'évaluation des produits dérivés doit être indépendante de toute préférence qui n'admet pas l'arbitrage. En particulier, dans une économie risque-neutre, les investisseurs doivent évaluer le prix d'un produit dérivé de la même façon.

Proposition 2.4.2. On se place dans un marché viable. Soit X le payoff d'un actif contingent européen simulable. Alors, son prix à tout instant (en particulier à l'instant initial) $(\pi_n^X)_{0 \leq n \leq T}$ est donné par la **formule de l'évaluation risque-neutre (Risk-neutral valuation formula)** :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \pi_n^X = \beta_n^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\beta_T X \mid \mathcal{F}_n)$$

Tel que : \mathbb{Q} est une probabilité risque-neutre équivalente à \mathbb{P} .

Démonstration. Comme le marché est viable, alors selon le théorème 2.3.1 il existe une probabilité risque neutre \mathbb{Q} . Soit φ la stratégie admissible (en particulier auto-financée) qui réplique X .

On sait, que sous \mathbb{Q} (selon la proposition 2.3.1), $(\tilde{V}_n^\varphi)_{0 \leq n \leq T}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingale. Ainsi, pour tout $n \in \llbracket 0, T \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \pi_n^X &= V_n^\varphi \\ &= \beta_n^{-1} \tilde{V}_n^\varphi \\ &= \beta_n^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\tilde{V}_T^\varphi \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \beta_n^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\beta_T V_T^\varphi \mid \mathcal{F}_n) \\ &= \beta_n^{-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\beta_T X \mid \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

□

La dernière proposition nous a donné, une formule d'évaluation des actifs contingents simulables en utilisant une probabilité risque-neutre. Nous discuterons par la suite les circonstances dans lesquelles tout bien contingent européen est simulable. Si c'est le cas, le problème du pricing est résolu (au moins pour les biens contingents européens).

Définition 2.4.3. On dit que le marché est complet si tout bien contingent est simulable.

Remarque : Dans un marché viable, la condition d'admissibilité de la stratégie de réplcation est vérifiée. En effet, si on suppose que φ soit une stratégie auto-financée qui réplique X et \mathbb{Q} une probabilité risque-neutre dans ce marché. Alors :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \tilde{V}_n^\varphi = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\tilde{V}_T^\varphi \mid \mathcal{F}_n \right)$$

Mais $\tilde{V}_T^\varphi = \beta_T V_T^\varphi = \beta_T X$, ainsi $\tilde{V}_T^\varphi \geq 0$. D'où :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad V_n^\varphi \geq 0$$

Par conséquent, φ est admissible.

Nous présentons maintenant, le théorème central de ce chapitre : **Fundamental Theorem of Asset Pricing**. Le terme "fondamental" est utilisé, en général, pour désigner des théorèmes qui établissent une équivalence entre une condition de modélisation économique, tel que l'AOA et l'existence d'une condition de modélisation mathématique comme : l'existence d'une probabilité risque-neutre.

Théorème 2.4.1. Un marché \mathcal{M} est viable et complet, si et seulement si, il existe une unique probabilité risque neutre équivalente à \mathbb{P} .

Démonstration. (" \Rightarrow ") Or \mathcal{M} est complet, pour tout actif contingent X , il existe une stratégie φ qui le simule tel que :

$$\beta_T X = \tilde{V}_T^\varphi$$

Le marché étant viable, alors il existe une probabilité risque-neutre équivalente à \mathbb{P} . Il nous reste à prouver son unicité.

Soient \mathbb{Q}_1 et \mathbb{Q}_2 deux probabilités risque-neutres. On sait que pour $i \in \{1, 2\}$, $(\tilde{V}_n^\varphi)_{0 \leq n \leq T}$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$ -martingale sous \mathbb{Q}_i . Ainsi :

$$(\forall i \in \{1, 2\}) : \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_i} (\tilde{V}_T^\varphi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_i} (\tilde{V}_0^\varphi) = V_0^\varphi$$

Car : $\beta_0 = 1$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. De ce fait :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} (\beta_T X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2} (\beta_T X)$$

Or $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ et X étant arbitraire, alors :

$$\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$$

(" \Leftarrow ") On raisonne par l'absurde et on suppose que le marché viable n'est pas complet. Ainsi, il existe un bien contingent X non simulable. On pose :

$$\tilde{K} := \left\{ Y \in \mathbb{L}^0 : Y = Y_0 + \sum_{j=1}^T \langle \varphi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle_{\mathbb{R}^d} ; Y_0 \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable et } \varphi \text{ est prévisible} \right\}$$

Selon la proposition 4.13 et 2.2.2.2, $\beta_T X \notin \tilde{K}$ (considérer le contraire aboutit à une contradiction). De ce fait, \tilde{K} est un sous-espace stricte de \mathbb{L}^0 . Soit \mathbb{Q} l'unique probabilité risque-neutre équivalente à \mathbb{P} . On définit sur \mathbb{L}^0 le produit scalaire défini par :

$$(X, Y) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (XY)$$

Puisqu'on travaille dans un univers fini, alors tous les moments existent et le produit scalaire est bien défini.

Or \mathbb{L}^0 est de dimension finie, il est euclidien. De ce fait, il existe une variable aléatoire non nulle Z tel que :

$$\mathbb{L}^0 = \widetilde{K} \overset{\perp}{\bigoplus} \text{vect}\{Z\}$$

Plus formellement :

$$(\forall Y \in \widetilde{K}) : \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(YZ) = 0$$

Si on prend, pour tout $n \in \llbracket 1, T \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, d \rrbracket : \varphi_n^j = 0$ et $Y_0 = 1$, on a $Y = 1$ et par conséquent $Y \in \widetilde{K}$. De ce fait, on obtient :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z) = 0$$

On note $\|Z\|_{\infty} := \sup_{\omega \in \Omega} |Z(\omega)|$ et on définit :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \mathbb{Q}^*(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{Z(\omega)}{\|Z\|_{\infty}}\right) \mathbb{Q}(\{\omega\})$$

$\|Z\|_{\infty}$ est non nulle car Z l'est, ainsi \mathbb{Q}^* est bien définie. Il s'agit en fait d'une mesure de probabilité ($\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z) = 0$) équivalente à \mathbb{Q} et est différente de \mathbb{Q} . On peut démontrer, en plus, que pour tout processus φ prévisible :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left(\sum_{j=1}^T \langle \varphi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle_{\mathbb{R}^d} \right) = 0$$

De la même façon de la démonstration de la proposition 2.3.3, on démontre que les processus des prix actualisés des actifs sont des martingales sous \mathbb{Q}^* . De ce fait, \mathbb{Q}^* est une probabilité risque-neutre différente de \mathbb{Q} . Ce qui contredit l'unicité de \mathbb{Q} . \square

On a traité dans cette section l'évaluation des actifs contingents européens. Concernant l'étude des options américaines, le lecteur est renvoyé à [3].

2.5 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

Nous présentons dans cette section le modèle le plus célèbre des marchés financiers à temps discret : il s'agit du modèle CRR. Par sa construction, le modèle CRR donne des méthodes numériques et des algorithmes efficaces qu'on utilise dans le pricing des actifs contingents. D'ailleurs, il constitue une version discrétisé du fameux modèle de Black-Scholes.

2.5.1 Structure du modèle

On se place dans un marché financier contenant qu'un actif risqué et un actif sans-risque ($d = 1$) à T périodes. Le prix de l'actif sans risque étant donné (comme précédemment) par :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad S_n^0 = (1 + r)^n$$

Concernant l'actif risqué, on supposera que son rendement simple entre deux instant successives ne peut prendre que deux valeurs et que ses rendements sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribué. Plus formellement : On se donne de deux réels u, d vérifiant : $-1 < d < u$. On définit l'univers Ω par :

$$\Omega := \{d, u\}^T = \left\{ \omega = (\omega_n)_{1 \leq n \leq T} ; (\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \omega_n \in \{d, u\} \right\}$$

\mathcal{F} étant la tribu grossière associée à Ω . La mesure de probabilité \mathbb{P} étant défini sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) par :

$$(\forall \omega \in \Omega) : \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) := \prod_{n=1}^T \tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_n\})$$

Avec $\tilde{\mathbb{P}}$ étant une mesure de probabilité définie sur chacun des espaces définis sur un horizon égal à 1 notés :² $(\tilde{\Omega}_n, \tilde{\mathcal{F}}_n)$ pour $n \in \llbracket 1, T \rrbracket$, où :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad \tilde{\Omega}_n := \{d, u\} \quad ; \quad \tilde{\mathcal{F}}_n := \mathcal{P}(\tilde{\Omega}_n)$$

Elle sera défini par :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) \quad (\forall \omega_n \in \tilde{\Omega}_n) : \quad \tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_n\}) := p \mathbb{1}_{\{\omega_n=u\}} + (1-p) \mathbb{1}_{\{\omega_n=d\}}$$

Avec : $0 < p < 1$

On définit la suite des variables aléatoires $(R_n)_{1 \leq n \leq T}$ sur (Ω, \mathcal{F}) par :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) \quad (\forall \omega \in \Omega) : \quad R_n(\omega) := \omega_n$$

Et :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad \mathbb{P}(R_n = u) = p = 1 - \mathbb{P}(R_n = d)$$

On remarque que par construction de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(R_n)_{1 \leq n \leq T}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. Le prix de l'actif risqué est donné par :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T \rrbracket) : \quad S_n := S_0 \prod_{j=1}^n (1 + R_j)$$

où S_0 est une constante positive égale au prix initial de l'actif risqué

Finalement, la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq T}$ est définie par : $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_T := \mathcal{F}$ et :

$$(\forall n \in \llbracket 1, T-1 \rrbracket) : \quad \mathcal{F}_n := \sigma(R_k : k \in \llbracket 1, n \rrbracket) = \sigma(S_k : k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$$

De ce fait, on a construit le modèle du marché financier de CRR.

2. $\mathcal{P}(\cdot)$ désigne l'ensemble des parties d'un ensemble.

2.5.2 Évaluation risque-neutre

D'après les sections précédentes, on a remarqué que l'évaluation des actifs contingents repose sur la viabilité et la complétude du marché financier. On a établi que ceci est équivalent à l'existence d'une probabilité risque neutre équivalente à la probabilité historique. De ce fait, la première question qu'on doit se poser est : Est-ce que le modèle CRR est viable et complet ? Pour répondre à cette question, on doit construire une mesure de probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} définie comme étant une mesure produit construite par une mesure $\tilde{\mathbb{Q}}$ définie (comme \tilde{P}) sur chacun des $(\tilde{\Omega}_n, \tilde{\mathcal{F}}_n)$. De ce fait, la suite $(R_n)_{1 \leq n \leq T}$ reste i.i.d sous \mathbb{Q} .

Proposition 2.5.2.1. Une probabilité risque neutre \mathbb{Q} existe, si et seulement si :

$$d < r < u$$

De plus, si cette condition est vérifiée, \mathbb{Q} est unique et est définie en utilisant $\tilde{\mathbb{Q}}$ par :

$$\tilde{\mathbb{Q}}(\{u\}) = \frac{r-d}{u-d} = 1 - \tilde{\mathbb{Q}}(\{d\})$$

Démonstration. Voir Appendice A.3 □

Corollaire 2.5.2.1. Le modèle CRR est viable et complet, si et seulement si, $d < r < u$.

On suppose dorénavant que : $d < r < u$. On rappelle la formule d'évaluation risque-neutre : le prix à tout instant d'un bien contingent de payoff X et de maturité T est donné par :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \pi_n^X = (1+r)^{-(T-n)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_n)$$

On donne maintenant une formule explicite du prix d'un bien contingent européen.

Proposition 2.5.2.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application mesurable. On considère un bien contingent européen de maturité T , modélisé par son payoff $X = f(S_T)$. Donc, son prix est donné à tout instant par :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) : \quad \pi_n^X = (1+r)^{-(T-n)} F_{T-n}(S_n, \frac{r-d}{u-d})$$

où (F_n) est une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+ \times]0, 1[$, par :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T \rrbracket) \quad (\forall (x, q) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 1[) : \quad F_n(x, q) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j} f(x(1+u)^j (1+d)^{n-j})$$

Démonstration. Voir corollaire 4.5.3 de [3]. □

Une conséquence immédiate de cette proposition est le prix d'un Call sur le titre risqué de maturité T , de strike K et de payoff $X = (S_T - K)^+$. Il suffit de prendre, dans la proposition précédente, $f(x) = (x - K)^+ \mathbf{1}_{\{x \in \mathbb{R}_+\}}$. Par un argument similaire, on obtient le prix d'un Put sur le même actif risqué.

2.5.3 Application

On présentera dans cette section un algorithme de pricing d'un Call européen dans le cadre du modèle CRR. Cet algorithme dit *Algorithme de récurrence rétrograde* (*Backward induction algorithm*) repose sur la formule de récurrence suivante.

Proposition 2.5.3.1. On note pour tout $n \in \llbracket 0, T \rrbracket$, le prix d'arbitrage d'un Call européen par $\psi(n, S_n)$ et $q := \frac{r-d}{u-d}$. Avec ψ est une fonction définie par la relation de la proposition précédente. Alors :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad \psi(n, x) = \frac{q\psi(n+1, x(1+u)) + (1-q)\psi(n+1, x(1+d))}{1+r}$$

Démonstration. Voir Appendice [A.4](#)

□

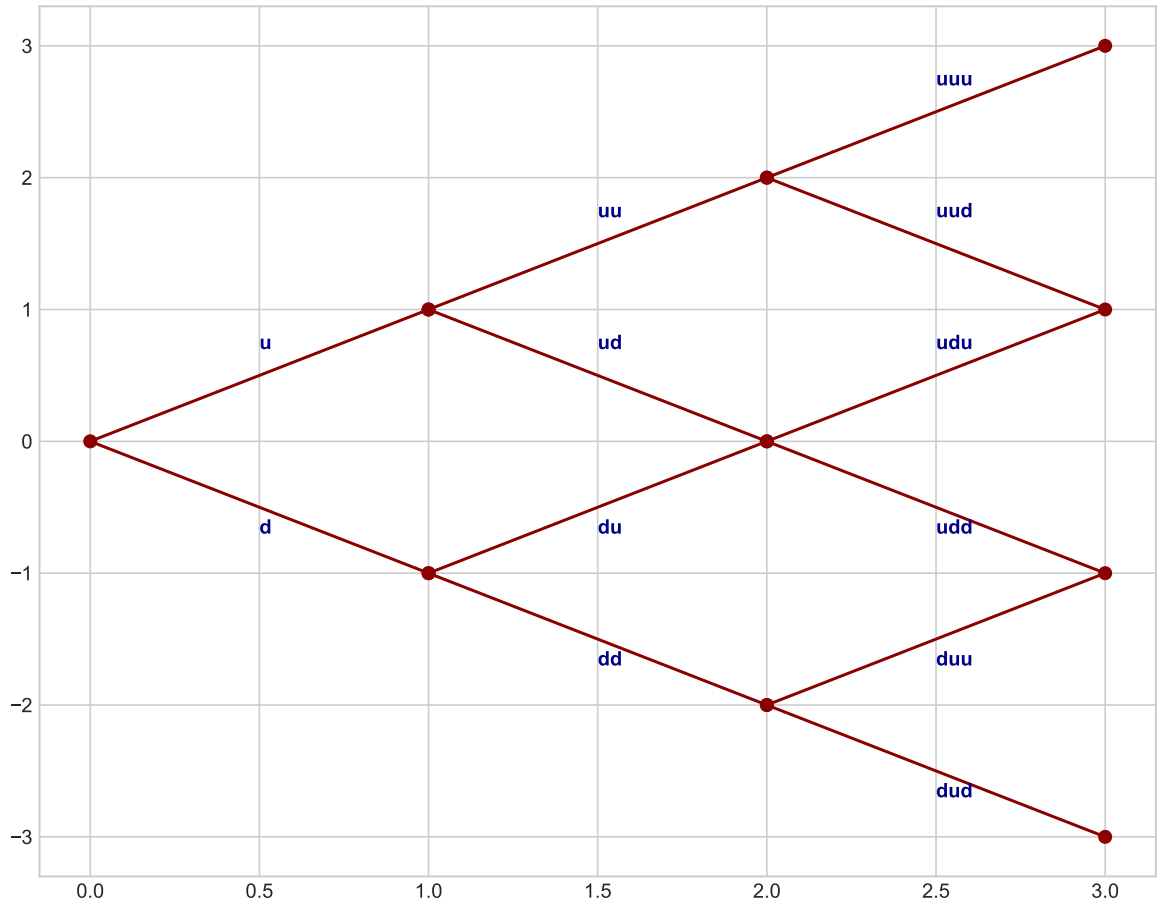


FIGURE 2.1 – Une arbre binomiale à deux étapes pour $n = 3$
Source : Auteur

On présente maintenant l'algorithme utilisé dans le pricing d'un Call européen.

Algorithme 1 : Algorithme de pricing d'un Call européen dans le cadre du modèle CRR

Input : K, S_0, u, d, r, T ;

Ensure : $-1 < d < r < u$ and $S_0 \geq 0$;

$q = (r - d) / (u - d)$;

Function : $S(n, i)$

Return $S_0(1 + u)^i(1 + d)^{n-i}$

Initialize : ArbitragePrice(T) // Empty vector of size T

for $i = 0$ **to** T **do**

 | Fill ArbitragePrice with $\max(S(T, i) - K, 0)$

end

for $i = 0$ **to** $T - 1$ **do**

for $j = 0$ **to** i **do**

 | ArbitragePrice[j] = $(q * \text{ArbitragePrice}[j+1] + (1-q) * \text{ArbitragePrice}[j]) / (1+r)$;

end

end

Result : ArbitragePrice[0]

Basé sur cet algorithme, nous avons construit une application de Pricing d'un Call ou d'un Put européen sous C++.

```

OussamaB — Crr — 80x24
Last login: Mon Aug  9 16:45:29 on ttys000
/Users/OussamaB/Desktop/projects/P00/CRR/bin/Crr ; exit;
-bash: bash_env: command not found
(base) MacBook-Pro:~ OussamaB$ /Users/OussamaB/Desktop/projects/P00/CRR/bin/Crr
; exit;
Enter Strike K :
0.2
Enter Maturity T :
1
Enter u :
0.5
Enter d :
-0.3
Enter r :
0.05
Enter S_0 :
1
Input data checked
There's no arbitrage, all clear !
0
Risk-Neutral probability : 0.4375
Call Payoff : 0.208333
Put Payoff : 0
logout
  
```

FIGURE 2.2 – Application C++ de Pricing d'un Call ou d'un Put européen dans le cadre du modèle CRR

source : Auteur

2.5.4 Approximation Binomiale

L'une des propriétés les plus importante du modèle CRR est le fait qu'il s'agit d'une approximation en temps discret (dans un certain sens) du modèle de Black-Scholes en temps continu.

On suppose que $[0, T]$ est un segment de \mathbb{R}_+ . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, On suppose que le n -ième modèle CRR d'horizon T contient k_n jours de trading. Pour passer au temps discret, on fait une discrétisation du segment $[0, T]$ en définissant la suite de subdivision suivante.

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall j \in \llbracket 0, k_n \rrbracket) : \quad t_n := j\Delta_n = j \frac{T}{k_n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n , u_n et d_n les paramètres du n -ième modèle CRR. Pour le choix suivant des paramètres :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + r_n := e^{r\Delta_n} \quad ; \quad 1 + u_n := e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} \quad ; \quad 1 + d_n := e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}$$

où : r est choisi de manière que $d_n < r_n < u_n$ et σ est une constante strictement positive qui désigne la volatilité de l'actif risqué.

On peut démontrer que sous les conditions de viabilité et de complétude de chaque modèle du marché CRR, Le prix d'un Call européen converge, lorsque n tend vers $+\infty$, (donc lorsque Δ_n tend vers 0, ou k_n tend vers $+\infty$) vers le prix donné par la formule de Black-Scholes en temps continu (Voir le chapitre suivant). Plus formellement :

$$\pi_n^C(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi^{BS}(0)$$

où : $\pi_n^C(0)$ est le prix (d'arbitrage) d'un Call européen sur un actif risqué de prix initial égal à S_0 , de Strike égal à K et de maturité égale à T , à l'instant initiale dans le n -ième modèle CRR. $\pi^{BS}(0)$ est donné par la formule suivante :

$$\pi^{BS}(0) = S_0 \Phi(d_1(S_0, T)) - K e^{-rT} \Phi(d_2(S_0, T))$$

Avec : Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$d_1(S_0, T) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad d_2(S_0, T) = d_1(S_0, T) - \sigma\sqrt{T}$$

Remarque : Il est à noter que pour établir ce résultat, nous nous sommes placés dans le cadre d'un marché financier ne contenant qu'un actif risqué et un actif sans-risque. De plus, nous avons supposé que les prix initiaux de l'actif risqué dans chaque modèle CRR coïncident et sont égaux à S_0 . Il est à ajouter, que cette convergence reste valide pour une large classe des actifs contingents.

On termine ce chapitre par une illustration numérique de ce résultat, dans le cas où : $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$ et $\sigma = 0.2$ (Voir la page suivante).

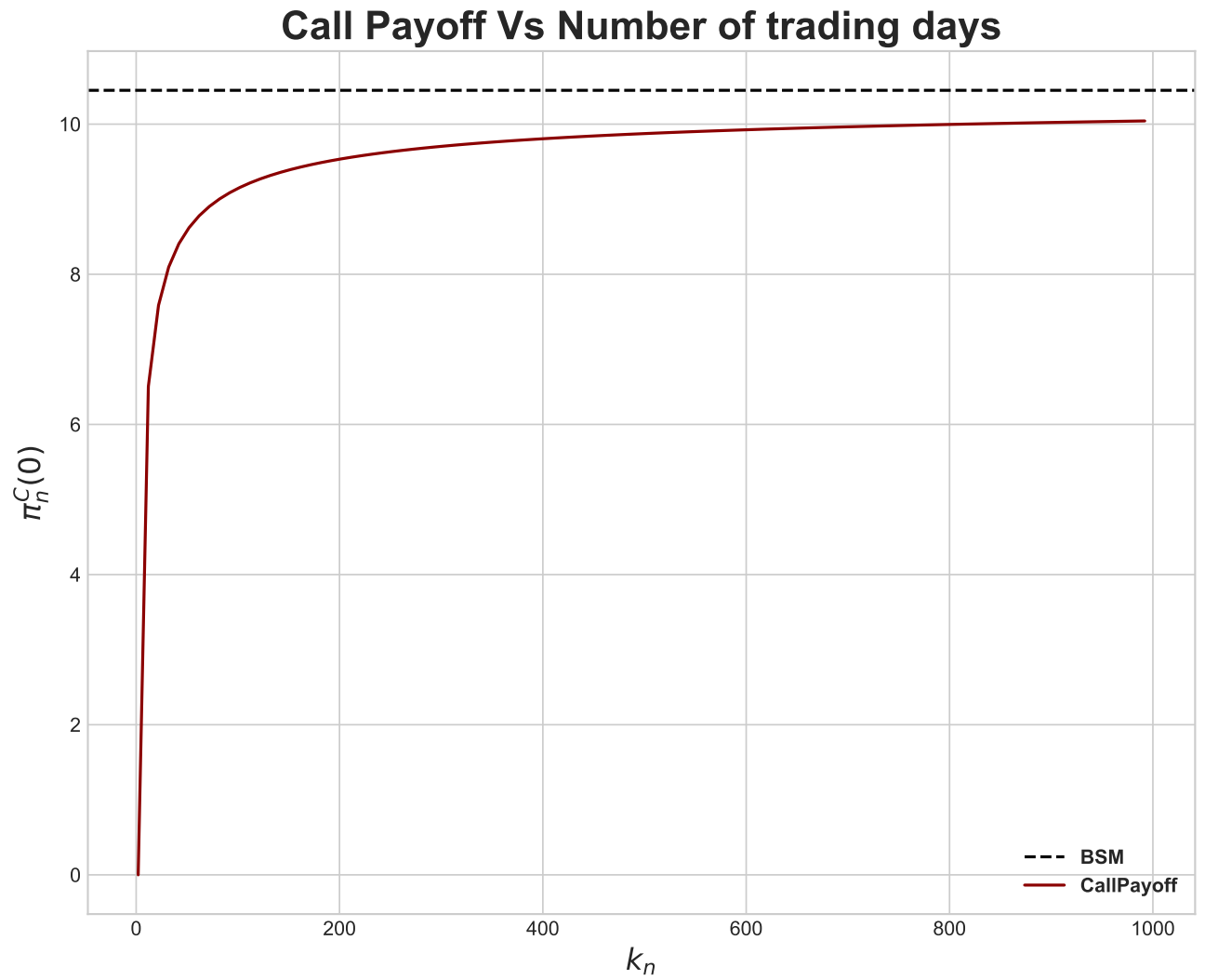


FIGURE 2.3 – Illustration de l'approximation binomiale dans le cas d'un Call européen
Source : Auteur

Finance mathématique en temps continu

Table des matières

3.1	Modèles du marché financier en temps continu	36
3.2	Stratégies	36
3.2.1	Définitions	36
3.3	Arbitrage et probabilité risque-neutre	37
3.4	Evaluation risque-neutre	38
3.5	Le modèle de Black-Scholes généralisé	41
3.5.1	Le modèle	41
3.5.2	Evaluation et couverture par arbitrage	44
3.5.3	Volatilité	50

Dans ce chapitre, nous étudierons les modèles des marchés financiers en temps continu. Nous commencerons par introduire une modélisation générale d'un marché financier en temps continu. Ensuite, une étude du célèbre modèle de Black-Scholes-Merton sera menée. Nous présenterons notamment l'évaluation et la couverture de quelques produits dérivés dans le cadre de ce dernier modèle.

Les modèles en temps continu sont des modèles où les agents sont autorisés à négocier continûment sur le marché où l'on doit modéliser l'évolution des prix des actifs comme des processus en temps continu. Comme les investissements sur les marchés sont exécutés sur des intervalles de temps très courts, ces modèles constituent une approximation plus raisonnable et réaliste des marchés réels que celle donnée par les modèles en temps discret. Même si les modèles en temps continu requièrent des outils mathématique plus sophistiqués que pour le temps discret, ils permettent d'établir des formules explicites grâce au calcul différentiel stochastique.

Nous émettons, dans tout ce qui suit, les hypothèses idéalisées sur les marchés financiers : on se place dans un marché sans-frictions dans lequel il n'y a pas de coûts de transaction pour l'achat et la vente des titres, il n'y a pas d'écart entre le prix d'achat et le prix de vente, il n'y a pas de restriction sur les ventes à découvert, les titres négociables sont très liquides et indéfiniment fractionnables et les participants du marché sont preneurs de prix.

Le lecteur est avisé à bien noter ces précautions d'usage afin de mieux cerner les limites d'application de la méthodologie que nous allons développer dans les sections suivantes.

3.1 Modèles du marché financier en temps continu

Fixons un horizon $T > 0$. L'incertitude du marché financier est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit sur cet espace, une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui vérifie les conditions habituelles. \mathcal{F}_0 sera une tribu triviale :

$$(\forall A \in \mathcal{F}_0) : \quad \mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(A) = 1$$

et $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. La continuité à droite de la filtration exprime le fait qu'il n'y a pas de surprises dans le flux d'informations.

On suppose que le marché contient $d+1$ titres négociables dont les processus des prix sont notés : S^j pour $j \in \llbracket 0, d \rrbracket$. On suppose de plus que pour tout $j \in \llbracket 0, d \rrbracket$, S^j est une semi-martingale continue, strictement positive et est défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$. On choisit S^0 comme le numéraire dans notre modèle et est supposé représenter le prix d'un actif sans-risque. On note $S = (S^j)_{0 \leq j \leq d}$ le processus vectoriel des prix.

3.2 Stratégies

3.2.1 Définitions

Une stratégie de gestion $\varphi = ((\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^d))_{0 \leq t \leq T}$ est un processus à valeurs dans \mathbb{R}^{d+1} , (\mathcal{F}_t) -prévisible¹ et localement bornée vérifiant :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \varphi_t^0 dt \right) < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left(\int_0^T \left[\sum_{j=1}^d (\varphi_t^j)^2 \right] dt \right) < \infty$$

La valeur du portefeuille dynamique φ à tout instant est donnée par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad V_t^\varphi := \sum_{j=0}^d \varphi_t^j S_t^j$$

Le processus des gains nettes est donné par l'intégrale stochastique :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad G_t^\varphi := \sum_{j=0}^d \int_0^t \varphi_s^j dS_s^j$$

Une stratégie φ est dite auto-financée si :

$$(\forall t \in [0, T]) : V_t^\varphi = V_0^\varphi + G_t^\varphi$$

ou bien :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dV_t^\varphi = \sum_{j=0}^d \varphi_t^j dS_t^j$$

Les processus actualisés sont définis de la même façon des modèles en temps discret.

1. Cela veut dire que φ est mesurable (comme étant une fonction de deux variables) par rapport à la tribu prévisible, i.e la tribu générée par tous les processus adaptés et continus à gauche. Ceci implique en particulier que le processus φ est (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurable.

Remarque : Les conditions d'intégrabilité vérifiées par les stratégies sont faites ici dans le cadre général pour exclure les opportunités d'arbitrage. En général, pour qu'un processus progressif soit intégrable par rapport à une semi-martingale continue, il suffit qu'il soit localement borné. Dans ce cas l'intégrale stochastique est une semi-martingale continue.

Pour illustrer le premier point, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle de marché financier ne contenant qu'un actif sans risque de prix à l'instant initial : $S_0 = 1$ et un actif risqué de prix à l'instant t égal à : B_t . Tel que $(B_t)_{t \geq 0}$ est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien. Soit $x > 0$ et τ_x le temps d'atteinte du point x par le mouvement brownien. i.e :

$$\tau_x = \inf \{t \geq 0 : B_t = x\}$$

Considérons maintenant, la stratégie en actif risqué : $\varphi = \mathbb{1}_{[0, \tau_x]}$. De ce fait, en partant d'une richesse initialement nulle ($V_0 = 0$), la valeur de ce portefeuille à l'instant t vaut :

$$V_t = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_x]} dB_t = B_{t \wedge \tau_x}$$

Donc (V_t) tend vers $B_{\tau_x} = x$ lorsque t tend vers $+\infty$, presque sûrement. Cette dernière quantité étant strictement positive. Il s'agit donc d'une opportunité d'arbitrage.

Proposition 3.2.1.1 (Numéraire invariance theorem). Une stratégie auto-financée reste auto-financée après un changement de numéraire.

Démonstration. (Geeman, El Karoui et Rochet (1995)) Voir proposition 6.1.1 de [3]. □

On note $\tilde{S} = (1, \tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_d)$ le processus des prix actualisés. De ce fait, la valeur actualisé d'un portefeuille dynamique φ et le processus des gains nettes actualisé sont :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \tilde{V}_t^\varphi := \varphi_t^0 + \sum_{j=1}^d \varphi_t^j \tilde{S}_t^j \quad ; \quad \tilde{G}_t^\varphi := \sum_{j=1}^d \int_0^t \varphi_s^j d\tilde{S}_s^j$$

En vertu du Numéraire invariance theorem, on peut déduire qu'une stratégie φ est auto-financée, si et seulement si :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \tilde{V}_t^\varphi = \tilde{V}_0^\varphi + \tilde{G}_t^\varphi$$

Il est à ajouter que, comme dans le cas des marchés financiers en temps discret et d'après le dernier résultat, une stratégie auto-financée est complètement déterminée par la valeur initiale du portefeuille associé et les composantes associées aux actifs risqués. Plus formellement, tout processus $((\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d))_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d et (\mathcal{F}_t) -prévisible tel que l'intégrale stochastique $\int_0^t \varphi_s^j d\tilde{S}_s^j$ soit bien définie pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $t \in [0, T]$ peut être étendu d'une manière unique, en une stratégie auto-financée φ de valeur initiale actualisée $\tilde{V}_0^\varphi = v$, en définissant :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \varphi_t^0 := v + \sum_{j=1}^d \int_0^t \varphi_s^j d\tilde{S}_s^j - \sum_{j=1}^d \varphi_t^j \tilde{S}_t^j$$

3.3 Arbitrage et probabilité risque-neutre

Comme dans les modèles en temps discret, notre objectif ici est le développement d'une théorie d'évaluation des actifs contingents. Une autre fois, le concept sous-jacent est le lien entre la condition de l'AOA et les probabilités risque-neutre.

Définition 3.3.1 (Opportunité d'arbitrage). Une stratégie auto-financée φ est dite une stratégie d'arbitrage ou une opportunité d'arbitrage, si V^φ vérifie les conditions suivantes :

$$\mathbb{P}(V_0^\varphi = 0) = 1, \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1 \text{ et } \mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0$$

Définition 3.3.2 (Probabilité risque-neutre). On dit qu'une mesure de probabilité \mathbb{Q} définie sur (Ω, \mathcal{F}) est une probabilité risque-neutre (Equivalent martingale measure) si :

- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$
- Le processus des prix actualisés \tilde{S} est une \mathbb{Q} -martingale locale.

Si \tilde{S} est une \mathbb{Q} -martingale, alors la mesure de probabilité \mathbb{Q} est dite : probabilité risque-neutre forte.

Si l'équivalence entre l'AOA ou la viabilité du marché financier en temps discret était relativement facile à établir. Son équivalent en cas continu reste un peu difficile. Nous ne pouvons l'établir qu'en imposant certaines conditions restrictives sur l'ensemble des stratégies auto-financée. A titre d'exemple, si on note par Φ l'ensemble des stratégies auto-financée φ vérifiant :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \tilde{V}_t^\varphi \geq 0$$

On peut démontrer que si l'ensemble des probabilité risque-neutre définies ci-haut est non vide, alors le marché est viable par rapport à Φ .

Cependant, il est mentionné dans Duffie et Huang (1985) [8] que cette dernière restriction n'est pas suffisante pour établir une version du **Fundamental theorem of asset pricing** en temps continu. Ces restrictions doivent, bien entendu, avoir un sens économique.

Plusieurs efforts ont été investies pour résoudre ce problème qui est à la fois intéressant et difficile. Pour donner au lecteur une idée sur les développements récents en ce sens, nous présentons brièvement les travaux de Delbaen et Schachermayer (1994) [7]. Pour ce faire, on présentera tout d'abord quelques définitions. En effet, une stratégie prévisible à valeurs dans \mathbb{R}^d est dite simple s'il existe : $N \geq 1$, $(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$, une suite croissante des temps d'arrêts $(\tau_k)_{0 \leq k \leq N}$ et un processus en temps discret $(\psi_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , vérifiant pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$: ψ_k est \mathcal{F}_{τ_k} -mesurable, tel que :

$$\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \psi_k \mathbf{1}_{] \tau_k, \tau_{k+1}]}$$

On dit qu'une stratégie simple φ est δ -admissible, pour une constante positive δ qui dépend de φ , si :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad V_t^\varphi \geq -\delta$$

Pour établir le théorème fondamental, on doit remplacer la condition de l'AOA par un autre concept légèrement plus large que cette condition. Il s'agit du concept du : **No Free Lunch with Vanishing Risk (NFLVR)**. On dit que le processus des prix vérifie la condition NFLVR si pour toute suite (φ_n) de stratégies simples tel que : pour tout $n \geq 0$ φ_n est δ_n -admissible. Avec, (δ_n) est une suite de réels positifs convergente vers 0, on a :

$$V_T^{\varphi_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Sous l'hypothèse que les prix sont bornés, Delbaen et Schachermayer ont établi une équivalence entre la condition NFLVR et l'existence d'une probabilité risque-neutre **forte**, démontrant ainsi une version du Fundamental theorem of asset pricing en temps continu. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé au [7] et [4].

3.4 Evaluation risque-neutre

On suppose qu'il existe une probabilité risque-neutre forte dans le marché notée \mathbb{Q} et on focalise notre attention sur les actifs contingents de payoff X vérifiant :

$$\frac{X}{S_T^0} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{Q})$$

On commence par définir une autre classe de stratégies auto-financées.

Définition 3.4.1. On dit qu'une stratégie auto-financée φ est \mathbb{Q} -admissible si le processus des gains nettes actualisée \tilde{G}^φ est une \mathbb{Q} -martingale.

Par définition, \tilde{S} est une \mathbb{Q} -martingale. De ce fait, les conditions présentées dans la définition des stratégies assurent bien le caractère martingale de l'intégrale stochastique \tilde{G}^φ . De ce fait, les stratégies \mathbb{Q} -admissibles sont faciles à construire.

Théorème 3.4.1. Le modèle du marché financier est viable par rapport à la classe des stratégies \mathbb{Q} -admissibles.

Démonstration. Voir théorème 6.1.3 de [3]. □

Sous l'hypothèse de l'AOA, les problèmes d'évaluation et de couverture des actifs contingents se réduisent à l'existence d'une stratégie auto-financée répliquant le payoff du bien contingent étudié.

Définition 3.4.2. Un bien contingent de payoff X est dit simulable s'il existe au moins une stratégie \mathbb{Q} -admissible notée φ , vérifiant :

$$V_T^\varphi = X$$

On dit que la stratégie φ réplique X .

Un modèle de marché financier est dit **complet** si tout bien contingent est simulable.

On peut démontrer que si un bien contingent de payoff X est simulable, alors il est répliqué d'une manière unique dans la classe des stratégies \mathbb{Q} -admissible par une stratégie φ . De ce fait, sous l'hypothèse de l'AOA et en vertu du Law of one price, le prix de cet actif contingent à tout instant t , noté π_t^X est obtenue par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \pi_t^X = V_t^\varphi$$

Théorème 3.4.2 (Risk-neutral Valuation Formula). Le prix d'arbitrage de tout bien contingent *simulable* de payoff X est obtenu par la *formule d'évaluation risque neutre* :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \pi_t^X = S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Démonstration. Le bien contingent étant simulable, donc il existe une (unique) stratégie \mathbb{Q} -admissible φ , tel que : $V_T^\varphi = X$ et :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \pi_t^X = V_t^\varphi$$

On sait par la définition de φ que $(\tilde{V}_t^\varphi)_{0 \leq t \leq T}$ est une \mathbb{Q} -martingale. Donc, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \pi_t^X &= V_t^\varphi \\ &= S_t^0 \tilde{V}_t^\varphi \\ &= S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (\tilde{V}_T^\varphi \mid \mathcal{F}_t) \\ &= S_t^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

□

Remarque Dans le résultat précédent, le choix de \mathbb{Q} était arbitraire. De cette façon, on peut obtenir une multitude de probabilités risque-neutre vérifiant la formule ci-haut. Cependant si on ajoute à la condition de \mathbb{Q} -admissibilité la condition suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad V_t^\varphi \geq 0$$

et on appelle stratégie admissible toute stratégie auto-financée vérifiant les deux conditions précédentes.

On peut démontrer que si φ_1 et φ_2 sont deux stratégies respectivement \mathbb{Q}_1 (\mathbb{Q}_2)-admissible, qui répliquent l'actif contingent en question, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left(\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2} \left(\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

De ce fait le prix d'arbitrage est unique et plus généralement, on peut démontrer que :

$$\pi_0^X = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}} S_0^0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right) = \inf_{\varphi \in \theta(X)} V_0^\varphi$$

Avec : \mathcal{P} est l'ensemble des probabilités risque-neutre fortes et $\theta(X)$ est l'ensemble des stratégies admissibles (au sens élargi) définies ci-haut.

Nous avons vu que des raisons d'évaluation des actifs contingents, nous avons besoin d'une probabilité risque-neutre forte. Toutefois, pour des raisons de gestion du risque, il est important de trouver le portefeuille de couverture. Le lemme suivant, établit que la couverture est équivalente à l'existence d'une représentation prix actualisé par une intégrale stochastique.

Lemme 3.4.1. Rappelons que $\frac{X}{S_T^0}$ est \mathbb{Q} -intégrable. Si la \mathbb{Q} -martingale définie par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad M_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

admet une représentation de la forme :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad M_t = M_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t \varphi_u^j d\tilde{S}_u^j$$

Avec : φ_j est (\mathcal{F}_t) -prévisible et localement borné, pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Alors, X est simulable.

Démonstration. Voir lemme 6.1.2 de [3]. □

De ce fait, on remarque que le problème de couverture est lié au théorème de représentation des martingales. Ce dernier impose que la filtration de l'espace probabilisé dans laquelle nous travaillons, doit être la filtration canonique du mouvement brownien augmentée. Une filtration avec laquelle nous allons travailler dans le cadre du modèle de Black-Scholes. Nous terminons cette section par un théorème analogue au théorème de complétude dans le cas discret.

Théorème 3.4.3. Si la probabilité risque-neutre forte précédemment notée \mathbb{Q} est unique dans le modèle du marché, alors ce dernier est complet dans le sens ou :

$$\frac{X}{S_T^0} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{Q})$$

3.5 Le modèle de Black-Scholes généralisé

En 1973, Black Fischer et Myron Scholes publiaient un papier scientifique intitulé *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*[5]. Une publication dans laquelle, ils ont traité le problème de l'évaluation et la couverture d'une option de type 'Européen' sur une action ne distribuant pas de dividendes. Le modèle du marché financier adopté par Black et Scholes constituent un cas particulier et simplifié du modèle déjà présenté. Toutefois, malgré son caractère simplificateur, il conduit à des formules explicites couremment utilisés par les praticiens. Dans cette section, nous présentons une version actualisée des travaux de Black and Scholes, ainsi que des applications des résultats et des outils fournis par ce modèle.

3.5.1 Le modèle

Le modèle constitue un cas particulier du modèle général d'un marché financier présenté dans la section 3.1. Sous les mêmes notations, pour $n \geq 1$ et un horizon $T > 0$, on définit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un mouvement brownien n -dimensionnel noté $W = (W^j)_{1 \leq j \leq n}$. La filtration de cet espace est la filtration canonique du mouvement Brownien **augmentée**, afin que elle vérifie les conditions habituelles. Soit :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \mathcal{F}_t = \sigma \left(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N} \right)$$

Avec : $(\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ est la filtration canonique du mouvement Brownien W . \mathcal{N} est la classe des ensembles \mathbb{P} -négligeables de \mathcal{F}_T^W .

La dynamique du prix de l'actif sans risque B est donnée par l'équation différentielle :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dB_t = r_t B_t dt \quad ; \quad B_0 = 1$$

Tel que : $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ est le processus des taux sans-risque instantanés et est supposé (\mathcal{F}_t) - prévisible.

De ce fait, B peut-être écrit de la façon suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad B_t = \exp \left(\int_0^t r_s ds \right)$$

Quant aux prix des actifs risqués, ils constituent dans ce modèle un cas particulier des semi-martingales continues. Leurs dynamiques sont représentés par les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$(\forall t \in [0, T]) \quad (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \quad dS_t^j = S_t^j \left(b_t^j dt + \sum_{k=1}^n \sigma_t^{jk} dW_t^k \right) \quad ; \quad S_0^j = p_j > 0$$

Avec : $(b^j)_{1 \leq j \leq d}$ est le processus des drifts des actifs risqués et est supposé (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurable. $(\sigma^{jk})_{1 \leq j \leq d, 1 \leq k \leq n}$ est une matrice de dimensions (n, d) supposée (\mathcal{F}_t) -progressivement mesurable² et contient les processus des volatilités instantanées des actifs risqués qui mesure l'impact de la k -ième source d'incertitude sur le j -ième actif risqué.

On suppose de plus, que les coefficients du modèle r , b et σ vérifient la condition d'intégrabilité :³

$$\int_0^T \left(|r_t| + \|b_t\| + \|\sigma_t\|^2 \right) dt < \infty$$

2. C-à-d : $(\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) \quad (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) : \quad (\sigma_t^{jk})_{0 \leq t \leq T}$ est progressivement mesurable.

3. $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne habituelle définie sur l'espace d'état des processus en question.

Le cas où $n = d = 1$ et dans laquelle les coefficients du modèle sont constants, correspond au modèle de Black-Scholes classique défini par Black et Scholes en 1973.

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes classique, le prix de l'actif risqué est un mouvement brownien géométrique uni-dimensionnel qui s'écrit sous la forme :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad S_t = S_0 \exp \left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

La figure 3.1 contient deux trajectoires du prix de l'actif risqué pour un scénario ω , dans le cas où $S_0 = 1$, qui correspondent respectivement aux coefficients : $b = 0.05, \sigma = 0.2$ et $b = 0.02, \sigma = 0.5$.

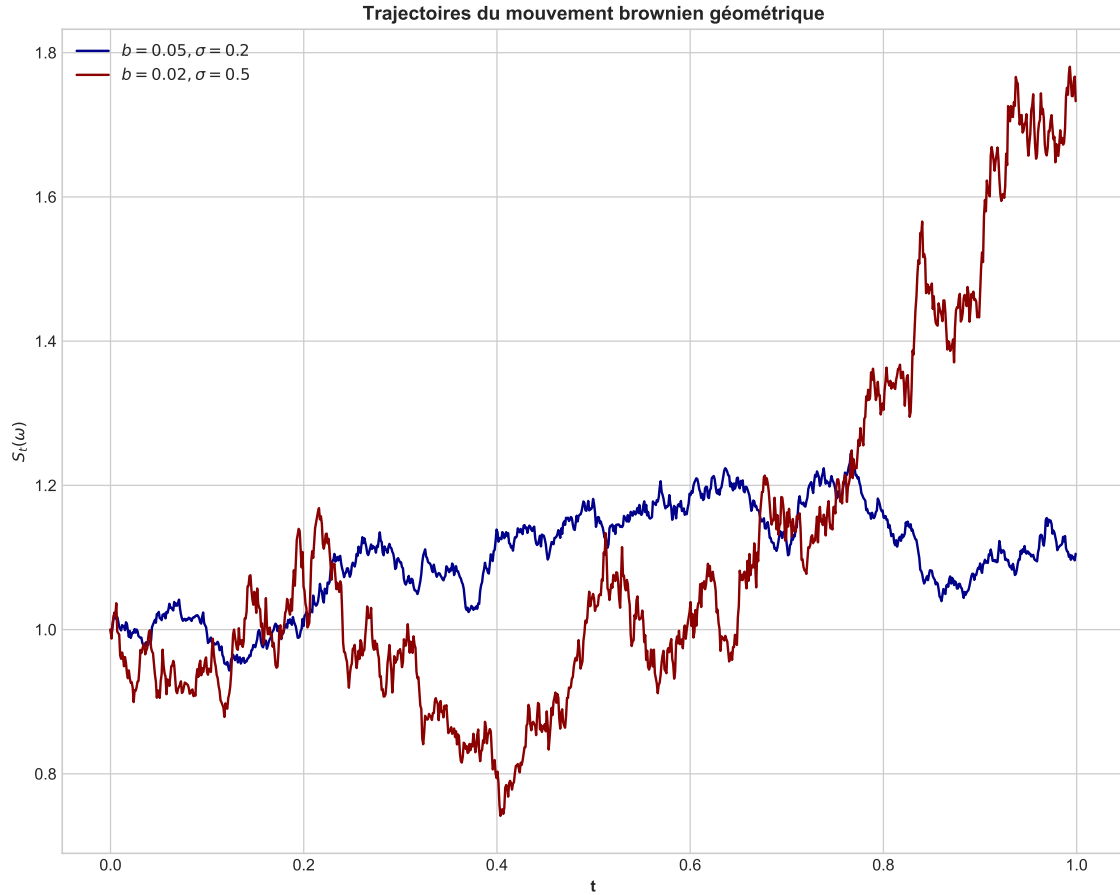


FIGURE 3.1 – Simulation de deux trajectoires du mouvement Brownien géométrique. Source : Auteur

La première question qui se pose concerne la viabilité du marché financier dans le cadre du modèle de Black-Scholes généralisé noté \mathcal{M}^{BS} . Nous avons vu que cette condition est équivalente à l'existence d'une probabilité risque-neutre sur le marché. On considère ici la viabilité par rapport aux stratégies dites *tame strategies*. Il s'agit de stratégies auto-financées vérifiant (voir 3.3) :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad V_t^\varphi \geq 0$$

Théorème 3.5.1. (Viabilité).

1. Si \mathcal{M}^{BS} est viable (par rapport aux stratégies *tame*), alors il existe un processus $(\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , progressivement mesurable et vérifiant :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad b_t - r_t \mathbf{1}_d = \sigma_t \gamma_t \quad (3.5.1)$$

Avec : $\mathbf{1}_d = 1_{\mathbb{R}^d}$.

γ est appelé le *prix du marché du risque* ou la *prime de risque*.

2. Conversement, s'il existe un tel process vérifiant (3.5.1) et qui vérifie de plus les conditions suivantes :⁴

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\gamma_t\|^2 dt &< \infty \quad \text{p.s} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\exp \left(- \int_0^T \gamma_t^T dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma_t\|^2 dt \right) \right] &= 1 \end{aligned}$$

Alors \mathcal{M}^{BS} est viable.

Démonstration. Voir théorème 6.2.1 de [3]. □

La probabilité risque-neutre est construite à l'aide du théorème de Girsanov. Elle s'agit d'une mesure de probabilité \mathbb{Q} définie sur \mathcal{F}_T et équivalente à \mathbb{P} , vérifiant :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(- \int_0^t \gamma_s^T dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds \right)$$

Sous cette probabilité, les processus des prix vérifient les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$(\forall t \in [0, T]) \quad (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \quad dS_t^j = S_t^j \left(r_t dt + \sum_{k=1}^n \sigma_t^{jk} d\widetilde{W}_t^k \right)$$

Tel que : \widetilde{W} est mouvement brownien n -dimensionnel **sous** \mathbb{Q} , vérifiant :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad d\widetilde{W}_t = dW_t - \gamma_t dt$$

Nous remarquons que le rendement simple instantané est remplacé dans cette dernière équation par le taux sans-risque instantané, d'où l'appellation : probabilité **risque-neutre**.

Une application de la formule d'Itô, nous montre que les processus des prix actualisés sont régis par les dynamiques suivantes :

$$(\forall t \in [0, T]) \quad (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \quad d\widetilde{S}_t^j = \widetilde{S}_t^j \sum_{k=1}^n \sigma_t^{jk} d\widetilde{W}_t^k$$

De ce fait, chacun d'eux est une exponentielle de Doléans-Dade qui s'écrit sous la forme :

$$(\forall t \in [0, T]) \quad (\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket) : \quad \widetilde{S}_t^j = \widetilde{S}_0^j \exp \left(\sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma_s^{jk} d\widetilde{W}_s^k \right)$$

Une condition garantissant la propriété martinagale de ces processus (et par conséquent le caractère de probabilité risque-neutre **forte** de \mathbb{Q}) est la *condition de Novikov* :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\sigma_t\|^2 dt \right) \right] < \infty$$

4. Si A est une matrice carrée, A^T désigne la transposée de A .

Nous nous tournons maintenant vers la question de la complétude du marché \mathcal{M}^{BS} . Nous savons d'après le théorème 3.4.3 que l'unicité de la probabilité risque-neutre implique la complétude du marché. Dans le modèle \mathcal{M}^{BS} tous les probabilités risque-neutres sont définies à l'aide des densités de Girsanov. En plus, ces densités sont caractérisées par des processus γ vérifiant l'équation (3.5.1). De ce fait, une caractérisation de la complétude de ce marché inclura des conditions sur les coefficients du modèle.

Théorème 3.5.2 (Complétude). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une unique probabilité risque-neutre \mathbb{Q} dans le marché.
2. Le marché \mathcal{M}^{BS} est complet (dans le sens restreint où tout actif contingent de payoff X vérifiant $\frac{X}{B_T} \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ est simulable)
3. $n = d$ et la matrice σ est inversible $(\lambda \otimes \mathbb{P})$ -presque-partout.

Démonstration. Voir théorème 6.2.2 de [3]. □

3.5.2 Evaluation et couverture par arbitrage

Supposons maintenant que $n = d$, les coefficients du modèle vérifient la condition d'intégrabilité, σ est inversible $(\lambda \otimes \mathbb{P})$ -presque-partout et le prix du marché du risque γ existe en satisfaisant l'équation (3.5.1). Donc, le marché \mathcal{M}^{BS} admet une unique probabilité risque-neutre \mathbb{Q} définie à l'aide de la transformation de Girsanov :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad L_t := \exp \left(- \int_0^t \gamma_s^T dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds \right)$$

Tel que : γ est défini par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \gamma_t := \sigma_t^{-1} (b_t - r_t \mathbf{1}_d)$$

De ce fait, \mathcal{M}^{BS} est viable et complet. On appelle un tel marché : *Standard*. Rappelons que le payoff X d'un bien contingent est une variable aléatoire \mathcal{F}_T mesurable vérifiant :

$$\frac{X}{B_T} \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$$

Remarque : Remarquer que nous pouvons toujours se ramener à une probabilité risque-neutre **forte** en imposant la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \|\sigma_t\|^2 dt \right) \right] < \infty$$

Théorème 3.5.3 (Risk-neutral Valuation Formula). Soient \mathcal{M}^{BS} un modèle d'un marché *standard*, X le payoff d'un actif contingent vérifiant la condition ci-haut. Donc, le processus du prix d'arbitrage de X est donné par la Formule d'Evaluation Risque-Neutre :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \pi_t^X := B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(X \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Démonstration. Or \mathcal{M}^{BS} est viable et complet, la formule découle du théorème 3.4.2. □

Pour les praticiens, il est important de trouver le portefeuille de couverture qui existe par la complétude du marché. Le théorème de représentation des martingale garantit son existence et inclut sa construction explicite.

Nous traitons maintenant le cas du modèle de Black-Scholes classique. Le prix du marché du risque est donné dans ce cas par :

$$\gamma := \frac{b - r}{\sigma}$$

La probabilité risque-neutre (forte) est définie par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left(-\gamma W_t - \frac{1}{2} \gamma^2 t \right)$$

Sous cette probabilité, la dynamique de l'actif risqué est donnée par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dS_t = S_t \left(r dt + \sigma d\widetilde{W}_t \right) \quad (3.5.2)$$

Tel que : \widetilde{W} est un mouvement brownien sous \mathbb{Q} , défini par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \widetilde{W}_t := W_t - \gamma t$$

On remarque que $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une **diffusion homogène**. En particulier, il s'agit d'un processus de Markov. Si on suppose que le payoff X d'un actif contingent est défini par : $X = h(S_T)$, tel que h est une application \mathcal{F}_T -mesurable. Nous savons que le prix d'arbitrage de X est donnée par la Formule d'évaluation risque neutre :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \pi_t^X = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Mais, S est markovien, donc :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \pi_t^X = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h(S_T) \mid S_t \right) = v(t, S_t)$$

Tel que : v est une fonction définie par :

$$(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}) : \quad v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t)} h(S_T^{t,x}) \right)$$

Avec : $(S_u^{t,x})_{t \leq u \leq T}$ est la solution unique de l'EDS (3.5.2) vérifiant la condition initiale : $S_t^{t,x} = x$.

Si $v \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R})$. On peut appliquer la formule d'Itô au processus du prix actualisé \widetilde{V} défini par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \widetilde{V}_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-rT} h(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right) = e^{-rt} v(t, S_t)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} d\widetilde{V}_t &= e^{-rt} dv(t, S_t) - r e^{-rt} v(t, S_t) dt \\ &= e^{-rt} \left(\frac{\partial v(t, S_t)}{\partial t} + r S_t \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v(t, S_t)}{\partial x^2} - r v(t, S_t) \right) dt + e^{-rt} \sigma S_t \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x} d\widetilde{W}_t \end{aligned}$$

Or \widetilde{V} est une \mathbb{Q} -martingale, alors la partie variation finie de ce processus d'Itô est nulle ($\lambda \otimes \mathbb{Q}$)-presque partout. Donc, v est une solution de l'EDP suivante, appelée *l'EDP d'évaluation* :

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + r x \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = r v(t, x) & : \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ v(T, x) = h(x) & : \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La régularité de v est assurée par des conditions sur les coefficients du modèle et sur la fonction h et est satisfaite dans le cadre du modèle de Black-Scholes pour des fonctions h de croissance sous-linéaire, e.g le Call et le Put.

Dans le cas d'évaluation d'un Call ou d'un Put européen, le calcul de l'espérance définissant le prix d'arbitrage est plus facile à la résolution de l'EDP d'évaluation. On présente le prix d'un Call Européen. Le prix d'un Put possédant les mêmes caractéristiques est obtenu en suivant la même logique, ou bien en utilisant la relation de parité Call-Put.

Formules fermées de Black-Scholes Le prix d'un Call Européen écrit sur le titre risqué de prix S , de maturité T et de strike K est donné par la formule fermée de Black-Scholes :

$$(\forall t \in [0, T]) : C_t = S_t \Phi(d_1(S_t, T-t)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(S_t, T-t))$$

Avec : Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et :

$$(\forall (t, s) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*) : d_1(s, t) := \frac{\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad ; \quad d_2(s, t) := d_1(s, t) - \sigma\sqrt{t}$$

Remarque : On peut démontrer que le temps d'arrêt noté τ défini par :

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : S_t = 0\}$$

verifie : $\mathbb{P}(\tau = \infty) = 1$. De ce fait, S ne quitte pas \mathbb{R}_+^* .

La formule fermée est obtenue en observant que :

$$v(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(x e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \right)^+ \right] = \int_{-\infty}^{d_2(x, T-t)} \left(x e^{\sigma\sqrt{T-t}y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

La figure 3.2 contient un graphique du prix d'un call dans le modèle de Black-Scholes à un instant t_0 , en fonction du Strike K et de la maturité T , pour les valeurs : $r = 0.05$, $S_{t_0} = 100$ et $\sigma = 0.2$.

Un tout petit mot sur l'utilisation de la méthode Monte-Carlo : Sachant le prix de l'actif risqué à un instant t_0 , $S_{t_0}^{t_0, x} = x$, on sait que le prix d'un actif contingent de payoff $h(S_T)$ est donné à l'instant t_0 par :

$$C_{t_0} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t_0)} h(S_T^{t_0, x}) \right)$$

D'ailleurs, on sait que le prix de l'actif risqué est donné par :

$$S_T^{t_0, x} = x \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t_0) + \sigma (W_T - W_{t_0}) \right)$$

De ce fait, si on fixe un niveau de confiance $1 - \alpha$ pour $\alpha \in]0, 1[$ et un $N \geq 1$ et on veut calculer le prix de l'actif contingent à un instant t_0 . Pour ce faire, on utilise la méthode de Monte-Carlo. Alors, il suffit de simuler un échantillon i.i.d $(\hat{S}_T^1, \dots, \hat{S}_T^N)$ de même loi que $S_T^{t_0, x}$ et le prix à l'insant t_0 sera donnée par la formule :

$$\hat{C}_{t_0} = e^{-r(T-t_0)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h(\hat{S}_T^j)$$

L'erreur de la méthode est définie pour tout N par :

$$(\forall N \geq 1) : \varepsilon_N := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-r(T-t_0)} h(S_T^{t_0, x}) \right) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-r(T-t_0)} h(\hat{S}_T^j)$$

Le TCL nous permet d'établir un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour ϵ_N pour N assez grand. Il est donné par :

$$\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}} \right] \quad ; \text{ tel que : } \hat{\sigma}_N := \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N \left(\hat{S}_T^j - \bar{\hat{S}}_N \right)^2$$

Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à l'excellent ouvrage [18].

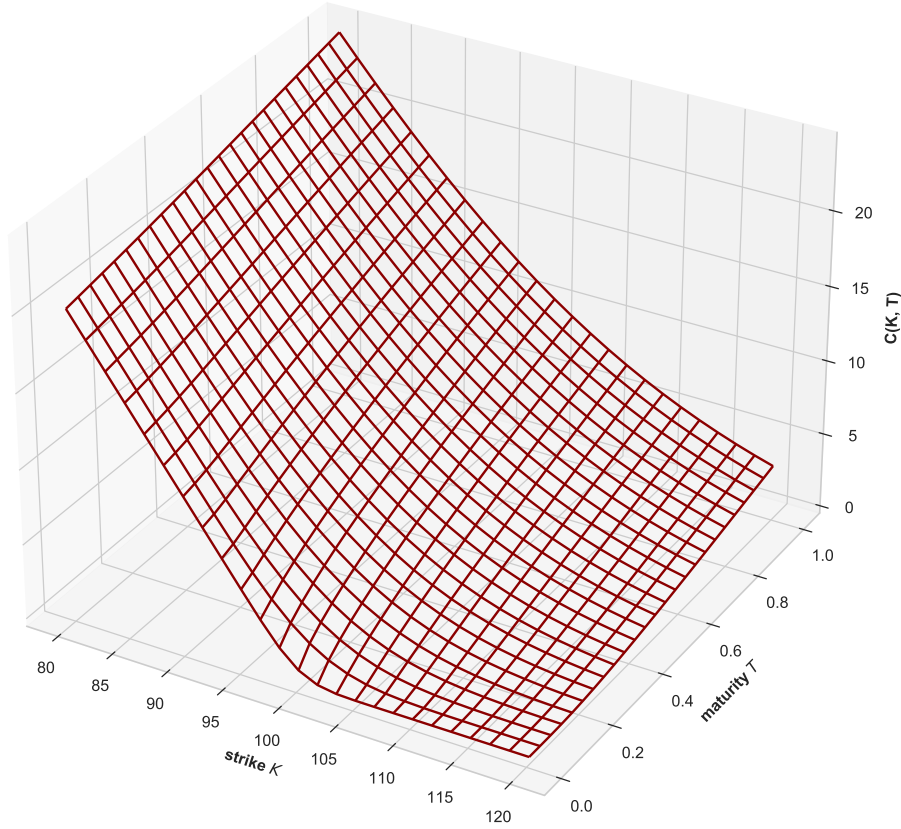


FIGURE 3.2 – Le prix d'un Call Européen en fonction de K et T , pour $r = 0.05$, $S_{t_0} = 100$ et $\sigma = 0.2$. Source : Auteur.

Concernant le problème de la couverture dans ce modèle, nous avons vu que le processus du prix actualisé est représenté par l'EDS suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad d\tilde{V}_t = e^{-rt} \sigma S_t \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x} d\tilde{W}_t$$

Donc, pour une stratégie auto-financée $(h_t^0, h_t)_{0 \leq t \leq T}$, on sait que :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad d\tilde{V}_t = h_t d\tilde{S}_t = \sigma h_t \tilde{S}_t d\tilde{W}_t = e^{-rt} \sigma h_t S_t d\tilde{W}_t$$

Par identification, on obtient donc la composante associée à l'actif risque de la stratégie de réplication :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad h_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x}$$

La composante associée à l'actif sans-risque est donnée par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad h_t^0 = \tilde{V}_t - \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x} \tilde{S}_t = e^{-rt} \left(v(t, S_t) - \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x} S_t \right)$$

Sensibilité et grecques : Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, nous avons vu que le prix d'un Call (en conservant les notations usuelles) est une fonction de plusieurs paramètres que l'on note : $C(t, x, K, T, r, \sigma)$, tel que $x := S_t^{t,x}$. La sensibilité du prix du call à ces paramètres est un facteur très important dans la gestion de la couverture de l'option. Ces sensibilités sont usuellement appelées *grecques* en relation avec l'alphabet correspondant. On donnera ces sensibilités à la date $t = 0$, pour se ramener à la date t , il suffit de remplacer T par $T - t$. Pour alléger les notations, on n'écrira pas les variables associées aux fonctions C , d_1 et d_2 . Donc, ces sensibilités sont :

$$\begin{aligned}\Delta &:= \frac{\partial C}{\partial x} = \Phi(d_1) > 0 \\ \Gamma &:= \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T}}\Phi'(d_1) > 0 \\ \Theta &:= \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{x\sigma}{2\sqrt{T}}\Phi'(d_1) + rKe^{-rT}\Phi(d_2) > 0 \\ \mathcal{V} &:= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = x\sqrt{T}\Phi'(d_1) > 0 \\ \rho &:= \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rT}\Phi(d_2) > 0 \\ &\quad \frac{\partial C}{\partial K} = -e^{-rT}\Phi(d_2) < 0\end{aligned}$$

Remarquons que le Δ est le nombre d'actifs sous-jacents qu'on doit acheter pour couvrir le Call. De ce fait, il joue un rôle important dans la construction d'un portefeuille de couverture sans risque par les traders. On parle alors, de *couverture en Delta* ou *Delta hedging*.

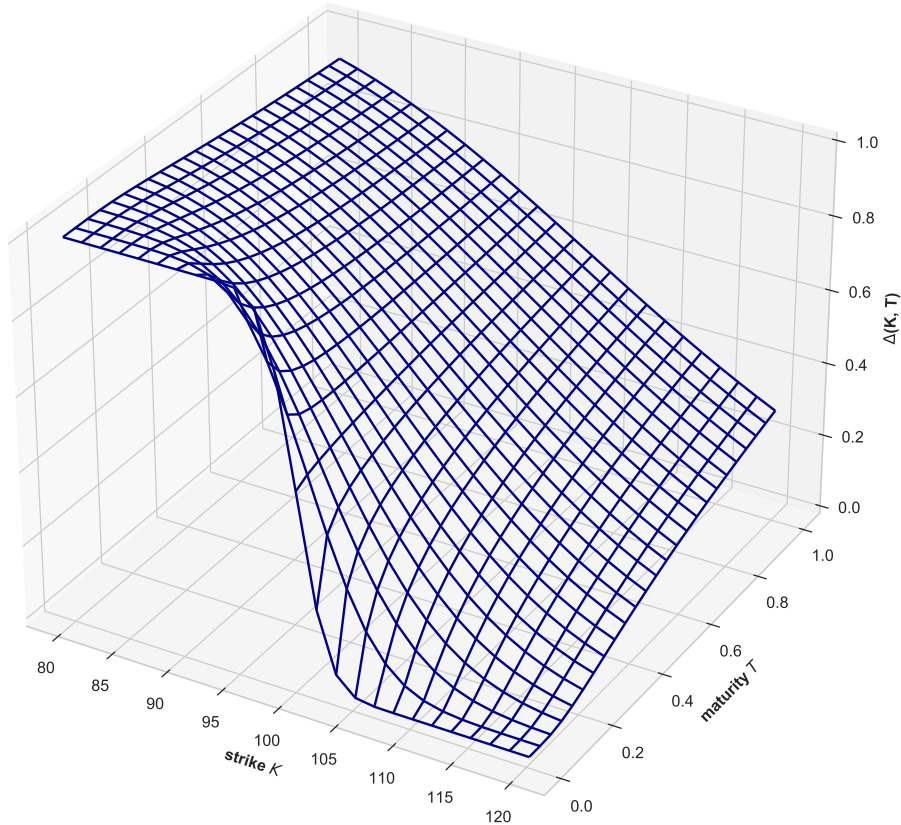


FIGURE 3.3 – Le Delta d'un Call Européen en fonction de K et T , pour $r = 0.05$, $S_{t_0} = 100$ et $\sigma = 0.2$. Source : Auteur.

La figure 3.4 montre un exemple d'évolution d'un portefeuille de couverture, couvert en Delta-neutre ainsi que le Hedge-Ratio⁵ associé, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, répliquant un Call Européen dans la monnaie (ITM) souscrit sur l'action *AAPL*, de strike égal à 100 et de maturité : 23/09/2021. Nous avons vendu le Call à la date initiale : 03/05/2021 et avons considéré un rebalancement journalier du portefeuille de couverture.

Les autres paramètres sont : $r = 0.02$, $\sigma = 0.21$. L'erreur de couverture étant : -0.003.

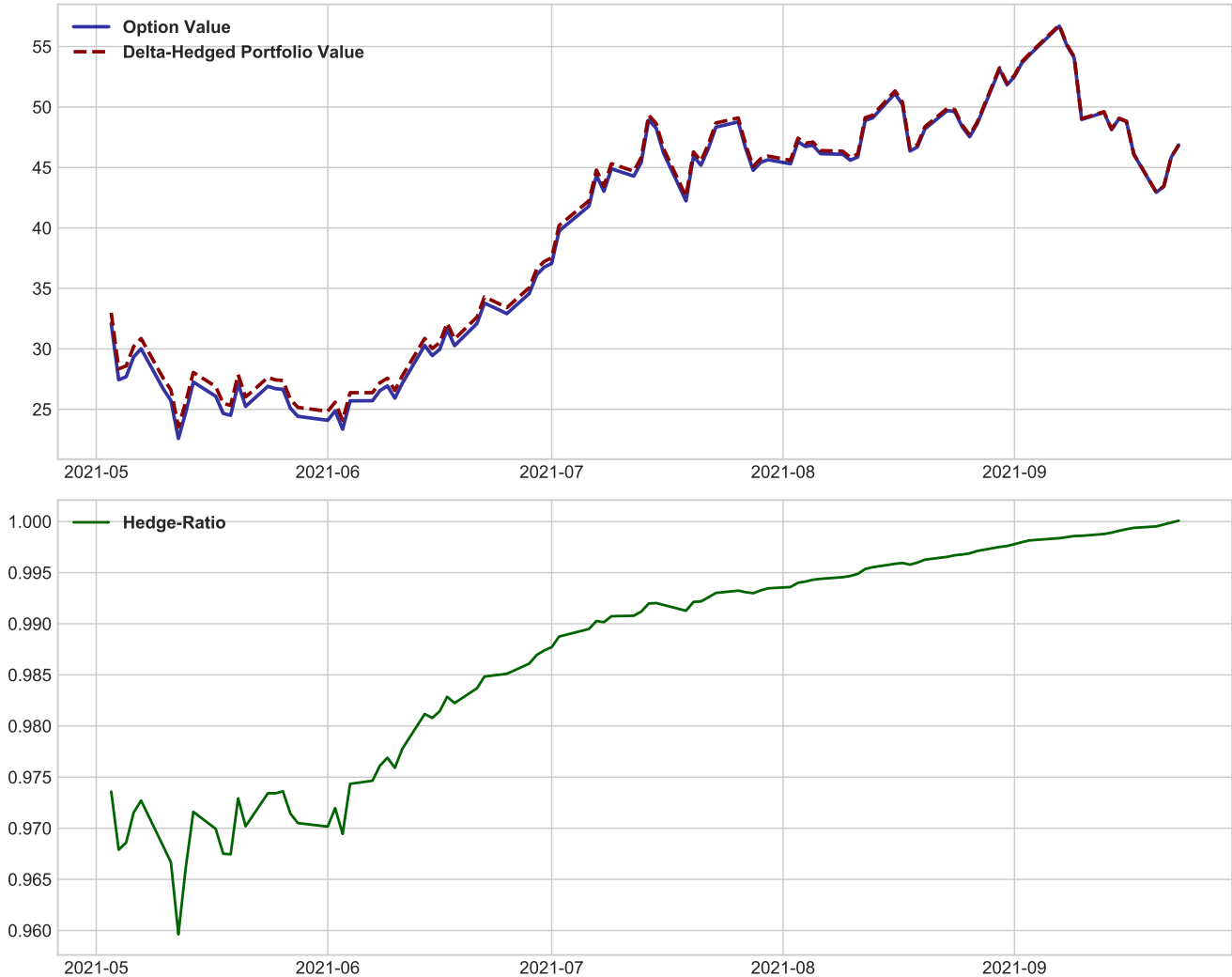


FIGURE 3.4 – Evolution du portefeuille de couverture en Delta-neutre d'un Call Européen, avec un rebalancement journalier. Source : **Auteur**.

5. $HR_t = \frac{C_t}{V_t}$

3.5.3 Volatilité

La *volatilité* est le coefficient qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. Dans le cadre de la formule de Black-Scholes, la volatilité est constante et cette volatilité est le seul paramètre qui n'est pas directement observable. Dans la pratique, deux approches sont utilisées pour l'identifier :

- **La méthode historique** : c'est une des méthodes empiriques utilisant les données historiques sur les cours de l'action ;
- **La méthode implicite** : c'est une méthode basée sur l'observation des prix des options.

La première méthode repose sur l'hypothèse de la stationnarité des log-rendements et leurs identique distribution. En se donnant d'un échantillon de taille n , de données régulièrement espacées par un pas constant δ , l'estimateur de la volatilité historique est donnée par :

$$\hat{\sigma}_n := \sqrt{\frac{1}{(n-1)\delta} \sum_{j=1}^n \left(\log \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} \right) - \delta \hat{\mu}_n \right)^2}$$

Avec :

$$\hat{\mu}_n := \frac{1}{n\delta} \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_{j-1}}} \right)$$

Le pas peut prendre pour des données journalières, une valeur de $\frac{1}{300}$ ou $\frac{1}{252}$. Tout dépend du nombre des jours de trading au cours de l'année en question. On retient en général des valeurs de n comprises entre 50 et 180 jours.

La méthode implicite ne fait pas du tout référence à une notion statistique. Elle repose sur le fait que dans un marché liquide, la loi de l'offre et de la demande permet de fixer des prix d'équilibre qui correspondent à un consensus de marché. Le marché se sert alors moins des modèles pour fixer des prix (sauf sur des options plus complexes), que pour évaluer et couvrir le risque associé à une option.

Dans cette optique, le paramètre de référence est la volatilité implicite : elle est obtenue en inversant la formule de Black-Scholes qui donne le prix C^{BS} du Call par rapport au prix C^{Market} du Call observé sur le marché, à un niveau de cours actuel donné S_{t_0} , pour une maturité T et un strike K donnée. Cette volatilité implicite σ^{BS} est donc donnée par la relation :

$$C^{BS}(S_{t_0}, t_0, T, K, r, \sigma^{BS}) = C^{Market}$$

En remarquant que le \mathcal{V} d'un Call est toujours strictement positif, on conclut que le prix d'un Call Européen, dans le modèle de Black-Scholes, est une fonction strictement croissante en volatilité. De plus, il s'agit d'une fonction continue en ce paramètre. De ce fait, C^{BS} est bijective en fonction de σ . Par conséquent, σ^{BS} existe et est unique.

Toutefois, on ne peut pas inverser analytiquement la fonction C^{BS} , donc il n'existe pas une formule explicite donnant σ^{BS} . C'est pour cela, qu'on a recours à des méthodes numériques pour la calculer (algorithme de la bisection, algorithme de Newton-Raphson ...).

Cependant, lorsqu'on calcule σ^{BS} à partir de prix de différentes options observées sur le marché, on constate que :

- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité historique du sous-jacent ;
- Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

Ces observations ont montré l'insuffisance du modèle simpliste et paramétrique de Black-Scholes. L'hypothèse d'une volatilité constante est irréaliste. C'est pour cela, de nouvelles extensions de ce modèles ont été fait afin de manier à ces insuffisances.

Modèles à volatilité locale et paramétrisation SVI

Table des matières

4.1	Equation de Dupire	55
4.1.1	Diffusions et projections markoviennes	55
4.1.2	Equation de Dupire	58
4.1.3	Calendar spread et Butterfly spread	61
4.2	Calibration de la volatilité locale	62
4.2.1	Différences finies	62
4.2.2	Problèmes inverses mal posés	63
4.2.3	Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale	65
4.3	La paramétrisation Stochastic Volatility Inspired SVI	67
4.3.1	Formule des moments de Roger Lee	68
4.3.2	Conditions d'absence de Calendar spread et de Butterfly spread	70
4.3.3	Formulation du modèle Raw SVI	70
4.3.4	Calibration du modèle Raw SVI	74

Nous avons mentionné dans la dernière section du chapitre précédent que l'hypothèse de volatilité constante est irréaliste et incompatible avec le marché réel. En fait, les praticiens ont observé que la volatilité dépend du strike et de la maturité de l'option. Plus précisément, pour presque tous les strikes, la volatilité est une fonction décroissante du strike. Il s'agit du phénomène : *Volatility Skew*. De plus, pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite. C'est le phénomène : *Volatility Smile*.

La figure 4.2 montre la volatilité implicite à la date : 26/09/2021, de Call européens souscrit sur l'action *AAPL* de maturité : 08/10/2021 et pour différents strikes. Dans, cette figure le phénomène du *Skew* est clairement visible de la décroissance de σ^{BS} en fonction de K , à maturité constante. De plus, le phénomène du *Smile* commence à se manifester dès qu'on dépasse un strike égal 150.

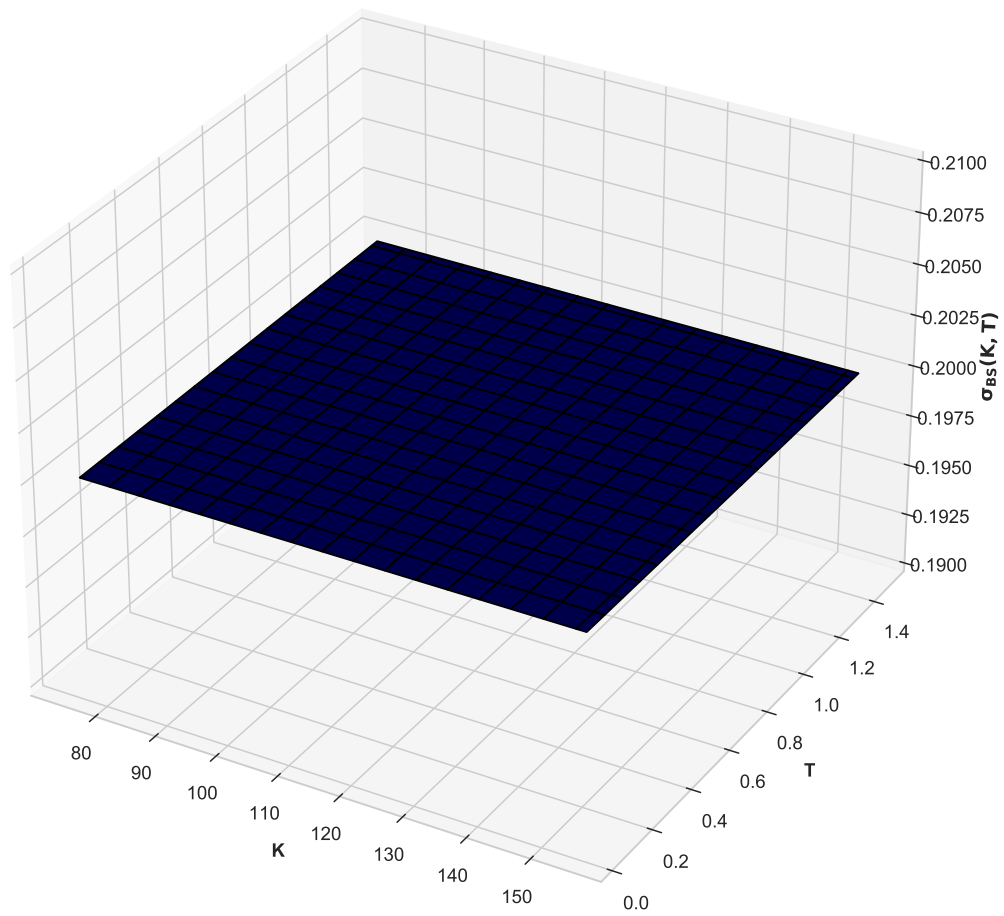


FIGURE 4.1 – Surface de volatilité implicite comme étant perçue par le modèle de Black-Scholes.
Source : **Auteur**.

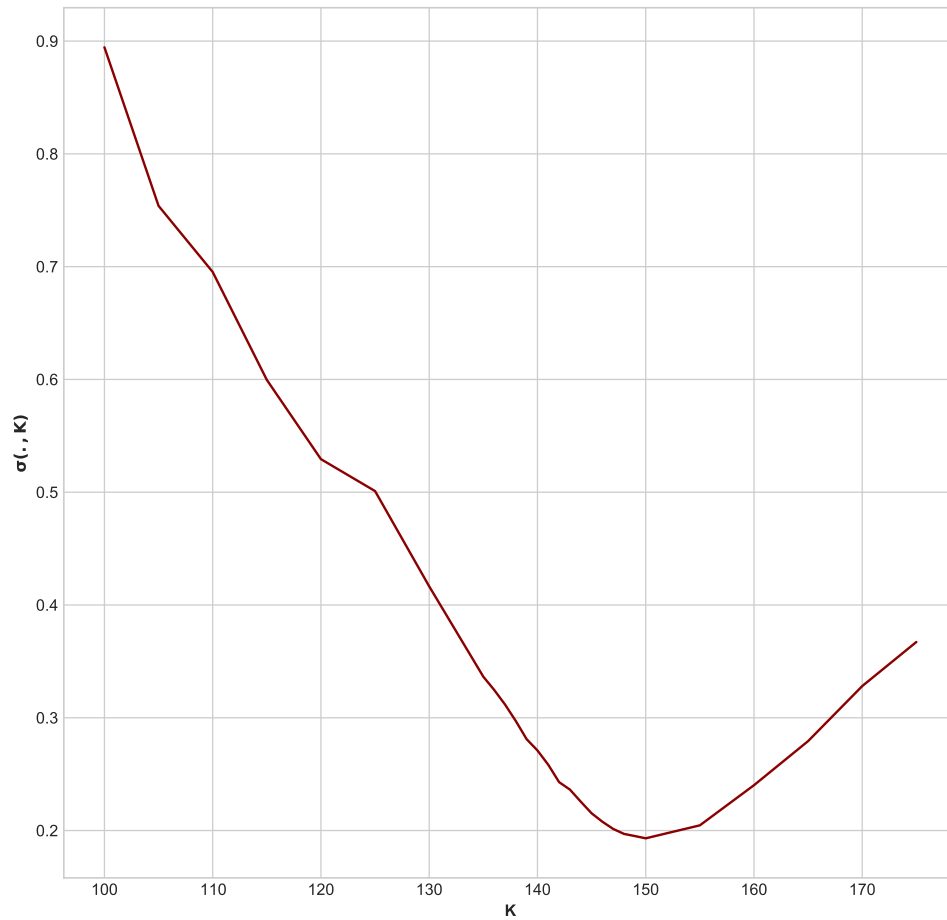


FIGURE 4.2 – Graphique de la volatilité implicite contre le Strike, illustrant le phénomène du *Skew* et du *Smile*. Source : **Auteur**.

La figure 4.3 montre la surface de la volatilité implicite des mêmes Call précédents pour différentes maturités et différents strikes. La courbe est obtenue en appliquant une interpolation par splines cubiques.

D'après ces observations, on conclut que le modèle de Black-Scholes à volatilité constante ne peut pas reproduire l'ensemble des prix d'options observés sur le marché pour un sous-jacent donné. Il est à ajouter que pour les Call et les Put Européens pour lesquelles le prix d'arbitrage est une fonction strictement croissante en volatilité, le problème ne se pose pas de la même intensité que pour les options exotiques et notamment celles qui sont *Path-Dependent*. Pour ces dernières, l'utilisation d'une volatilité constante dans le pricing, engendre des résultats catastrophiques. Le lecteur est renvoyé au Chapitre 1 de l'ouvrage de Shaw [19] pour s'en convaincre.

Pour prendre en compte le smile du marché tout en restant dans le cadre markovien et complet une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent.

Dans un tel modèle, le prix de l'actif risqué est une diffusion de la forme (en conservant les mêmes notations du chapitre précédent) :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dS_t = S_t (b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t)$$

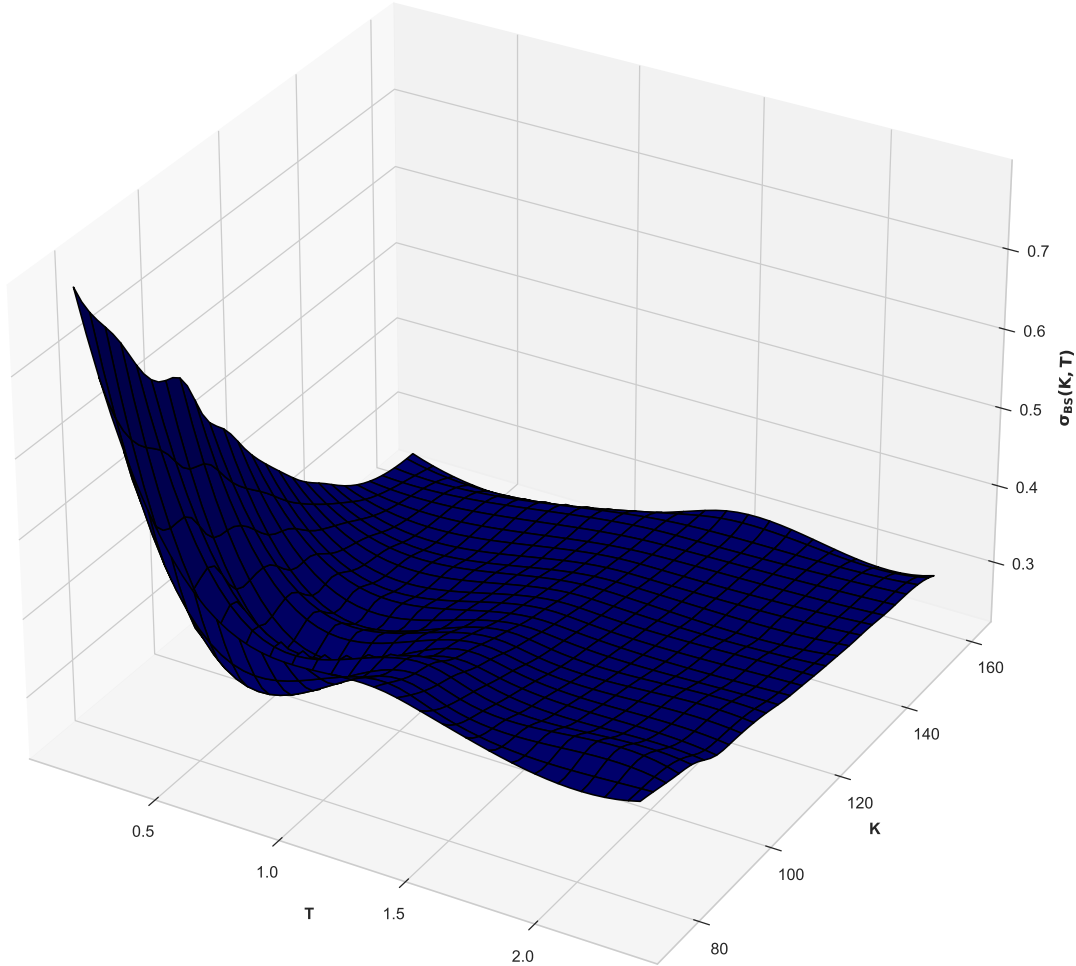


FIGURE 4.3 – Surface de volatilité implicite associée à des Calls européen souscrits sur l'action AAPL. Source : **Auteur**.

Le problème qui se pose, concerne l'existence d'une telle fonction qui, à un instant donnée, reproduit les prix observés des Calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Plus formellement, Est-ce qu'il existe un processus markovien qui a les mêmes distributions marginales que le processus S ? Un tel processus est dit : *a Mimicking process*.

Dans son article *Pricing with a Smile* (1994) [9], Bruno Dupire a noté qu'il existe, sous la probabilité risque-neutre (forte), un unique processus $(\sigma(t, S_t))_{0 \leq t \leq T}$ qui constitue le coefficient de diffusion d'un processus consistant avec les distributions marginales du processus du prix.

Cette fonction σ est appelé la fonction de la **volatilité locale**. Dupire a établi une équation qui permet de calculer les valeurs de $\sigma(t, S_t)$ à un instant t , comme étant une fonction du Strike et de la maturité. Cependant, cette dernière équation a conduit à des instabilités numériques qui peuvent parfois résulter en des variance négatives. Au fil du temps, plusieurs approches ont été établies afin de manier à ces instabilités.

On présentera dans un premier temps, le formalisme mathématique de ces modèles. Ensuite, nous allons établir l'équation de Dupire et présenter une multitudes de méthodes permettant de calibrer la surface de la volatilité locale. Nous allons notamment, présenter des applications de ces méthodes afin de comparer leurs résultats.

4.1 Equation de Dupire

4.1.1 Diffusions et projections markoviennes

Théorème 4.1.1 (Théorème de Gyöngy). Soient $T > 0$, $n, d \in \mathbb{N}^*$ des entiers et $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, (\hat{\mathcal{F}})_{0 \leq t \leq T}, \hat{\mathbb{P}})$ un espace probabilisé filtré, tel que la filtration vérifie les conditions habituelles. On définit sur cet espace, un mouvement Brownien n -dimensionnel \widehat{W} et une diffusion d'itô $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d définit par l'EDS suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad d\xi_t = \beta_t dt + \delta_t d\widehat{W}_t \quad ; \quad \xi_0 = 0 \quad (4.1.1)$$

Tel que : β et δ sont des processus adaptés et bornés à valeurs dans \mathbb{R}^d et $\mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ (respectivement).

On suppose de plus que, δ vérifie la condition d'ellipticité : ¹

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall t \in [0, T]) : \quad \delta_t^T \delta_t \geq \varepsilon I_d \quad \hat{\mathbb{P}} - p.s$$

Alors, il existe deux processus adaptés et bornés : $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ et $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, définis pour $(\lambda \otimes \hat{\mathbb{P}})$ -presque tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, par :

$$\begin{aligned} {}^t\sigma(t, x)\sigma(t, x) &:= \mathbb{E} \left({}^t\delta_t \delta_t \mid \xi_t = x \right) \\ b(t, x) &:= \mathbb{E} (\beta_t \mid \xi_t = x) \end{aligned}$$

Tel que l'EDS définit par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\widehat{W}_t \quad ; \quad X_0 = 0$$

admet une solution faible possédant les mêmes distributions marginales de ξ .

Démonstration. Voir Gyöngy [1986] [13]. □

Le diffusion markovienne $(X_t)_{t \in [0, T]}$ défini dans le théorème précédent est appelée, *la projection markovienne* de ξ . Le problème que pose le résultat de ce théorème concerne l'unicité de la solution X . Ce problème a été surmonté par Gyöngy en utilisant une approximation de la fonction σ , établissant ainsi, l'unicité de X .

Maintenant, on se place dans le cadre du modèle du marché financier présenté dans 3.5.1, en supposant que le processus des prix des actifs risqués \widehat{S} est une diffusion d'itô de la forme (4.1.1). En suppose de plus que le marché est viable et complet, i.e $n = d$ et δ est $(\lambda \otimes \mathbb{P})$ -presque partout inversible. La probabilité risque-neutre est définit à l'aide du prix du marché du risque et de la transformation de Girsanov. On sait que sous cette probabilité, le processus S vérifie la même EDS initiale, à l'exception du coefficient du drift qui est remplacé par le processus du taux sans-risque. On suppose de plus que δ vérifie la condition d'ellipticité du théorème 4.1.1. De ce fait, il existe un unique processus définit comme dans le théorème 4.1.1 possédant les même distribution marginales de \widehat{S} .

1. Notation : Si A, B sont deux matrice carrés. $A \geq B \iff A - B$ est une matrice symétrique positive.

Ce processus, que l'on note, S est défini à l'aide de l'EDS suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dS_t = S_t (b(t, X_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t) \quad ; \quad S_0 = x \in (\mathbb{R}_+^*)^d \quad (4.1.2)$$

Il s'agit d'une *diffusion markovienne à volatilité locale*.

De la même façon, S vérifie une EDS, sous une probabilité risque-neutre unique, dans laquelle le coefficient de drift est le processus du taux sans-risque. La dynamique de l'actif sans risque est régie par la même EDS de la section 3.5.1.

Remarque : Il est à noter que dans le modèle de Black-Scholes généralisé, le coefficient de drift et de diffusion sont reliés à ceux de l'équation (4.1.1), par les formules :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad \beta_t = D_t^{\hat{S}} b_t \quad ; \quad \delta_t = D_t^{\hat{S}} \sigma_t$$

Avec : $D^{\hat{S}}$ est une matrice de taille (d, d) , diagonale et est définie par :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad D_t^{\hat{S}} := \text{diag} \left[\left(\hat{S}_t^j \right)_{1 \leq j \leq d} \right]$$

Considérons maintenant la projection markovienne associée au processus $(\xi_t)_{t \in [0, T]}$, définie dans 4.1.1 par l'EDS suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad ; \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d \quad (4.1.3)$$

Son générateur infinitésimal est donné par :

$$L := \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Tel que $a := (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$ est la matrice définie par : $a = \sigma^t \sigma$.

On peut démontrer que si a est une matrice définie-positive, alors la probabilité de transition associée au processus de Markov $(X_t^{0,x})_{0 \leq t \leq T}$ est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue. La densité de probabilité à l'instant t , d'une diffusion démarrante de x à t_0 , est notée par : $p(t_0, x; t, \cdot)$.

On présentera maintenant une EDP vérifiée par la densité de probabilité d'une diffusion markovienne, comme étant une fonction de ces variables "du passé". Il s'agit de *l'équation rétrograde de Kolmogorov (Kolmogorov's Backward Equation)*.

Théorème 4.1.2. On suppose que X est une diffusion markovienne donnée par l'EDS (4.1.3), de générateur infinitésimal, noté : L défini par la formule ci-haut. Considérons le problème à condition au bord suivant, vérifié par une fonction $u \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 & : \forall (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^d \\ u(T, x) = g(x) & : \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (4.1.4)$$

On suppose que :

- b et σ sont uniformément lipschitziens en x sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. Si la constante de Lipschitz dépend du temps, on lui ajoute la condition de la croissance sous-linéaire de non-explosion.

- a vérifie la condition d'ellipticité.
- g est continue et est à croissance sous-polynomiale, i.e :

$$\left(\exists (\alpha, K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \right) \left(\forall x \in \mathbb{R}^d \right) : \quad |g(x)| \leq K (1 + \|x\|^\alpha)$$

- u est à croissance sous-polynomiale indépendamment du temps :

$$\left(\exists (\beta, M) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \right) \left(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \right) : \quad |u(t, x)| \leq M (1 + \|x\|^\beta)$$

Alors, le problème (4.1.4) admet une unique solution définie par :

$$\left(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \right) : \quad u(t, x) := \mathbb{E} \left(g \left(X_T^{t,x} \right) \right)$$

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Feynman-Kac. (Voir le théorème 7.6 du chapitre 5 de [15], ou bien le théorème 10.4 du chapitre 10 de [2]). \square

Remarque : Si, σ est bornée, l'hypothèse de la croissance sous-polynomiale de u peut-être affaiblie en une croissance sous-exponentielle. De plus, sous cette hypothèse, il existe une *solution fondamentale* à l'EDP du problème (4.1.4).

Maintenant, pour toute fonction g vérifiant les conditions du théorème précédent, on sait que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$: $\mathbb{E} \left(g \left(X_T^{t,x} \right) \right)$ vérifie l'EDP (4.1.4). Elle est en plus de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, ce qui nous permet d'intervertir les dérivées partielles et l'intégrale. Donc :

$$\left(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \right) : \quad \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \frac{\partial p}{\partial t}(t, x; T, y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) L_t p(t, x; T, y) dy \quad (4.1.5)$$

Or g étant arbitraire, l'équation rétrograde de Kolmogorov est établie. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\left(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \right) : \quad \frac{\partial p}{\partial t}(t, x; T, y) = L_t p(t, x; T, y) \quad ; \quad p(0, x, T, y) = \mu_0(x)$$

Tel que : μ_0 est la densité de la loi initiale du processus X .

Remarque Comme déjà mentionné, si σ est bornée, il existe une solution fondamentale de l'EDP du problème (4.1.4). De ce fait, la variable T , dans l'équation précédente, peut être remplacée par tout $\tau \in [0, T]$ et l'équation sera définie pour $t \in [0, \tau]$.

On note maintenant L^* , l'adjoint formel de L appartenant au dual de l'espace de Hilbert $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^d)$ muni de son produit scalaire usuel, i.e l'opérateur défini, pour toutes fonctions φ, ψ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact, par :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) L^* \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) L \varphi(x) dx$$

En utilisant des intégrations par parties, on peut démontrer que L^* est donné par :

$$L^* = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^d b_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

La stabilité du domaine de L par le semi-groupe associé, ainsi que leur commutativité résultent du théorème de Hille-Yosida. Pour une démonstration de ce théorème, le lecteur est renvoyé au théorème 2.6 de [10]. Si $(P_t)_{0 \leq t \leq T}$ est le semi-groupe généré par L , alors pour toute fonction ϕ continue sur \mathbb{R}^d tendant vers 0 à l'infini, il sera défini à tout instant par :

$$\left(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \right) : \quad P_t \phi(x) := \mathbb{E} \left(\phi \left(X_t^{0,x} \right) \right)$$

On pourra démontrer que :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad P_t \circ L = L \circ P_t$$

Supposons que $t < \tau \leq T$. En utilisant les remarques précédentes et sous des conditions portant sur la bornétude des dérivées partielles de a et b , on peut remplacer la dérivée temporelle dans (4.1.5) par rapport à l'instant passé, en une dérivée temporelle par rapport à l'instant futur. Alors, pour tout $(\tau, x) \in]t, T] \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \frac{\partial p}{\partial \tau}(t, x; \tau, y) dy &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) L_\tau p(t, x; \tau, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (L_\tau g)(y) p(t, x; \tau, y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y) L_\tau^* p(t, x; \tau, y) dy \end{aligned}$$

Or g est arbitraire, on a, pour $(t, x) \in [0, \tau[\times \mathbb{R}^d$ fixés :

$$(\forall (\tau, y) \in]t, T] \times \mathbb{R}^d) : \quad \frac{\partial p}{\partial \tau}(t, x; \tau, y) = L_\tau^* p(t, x; \tau, y) \quad ; \quad p(t, x, \tau, y) = \mu_t(y) \quad (4.1.6)$$

Tel que : μ_t est la densité de la loi initiale du processus X .

Il est à noter que L^* dans (4.1.6) agit sur la variable du futur y . Cette équation est appelée *l'Equation progressive de Kolmogorov*, ou *l'Equation de Fokker-Plank* et joue un rôle crucial dans l'établissement de l'équation de Dupire.

4.1.2 Equation de Dupire

On se place maintenant dans le cadre du modèle de Black-Scholes classique ($n = d = 1$). Mais, cette fois-ci, le prix de l'actif risqué vérifie, sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , (en conservant les mêmes notations) l'EDS suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad d\hat{S}_t = \hat{S}_t (r dt + \sigma_t dW_t) \quad ; \quad \hat{S}_0 = x > 0 \quad (4.1.7)$$

Tel que : σ est un processus aléatoire, adapté et vérifie :

$$(\exists \varepsilon > 0) (\forall t \in [0, T]) : \quad \sigma_t^2 \geq \varepsilon \quad \mathbb{Q} - p.s$$

De ce fait, par le théorème de Gyöngy 4.1.1, il existe une unique fonction bornée que l'on supposera continue : $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$, définie pour $(\lambda \otimes \mathbb{Q})$ -presque tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\sigma^2(t, x) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\sigma_t^2 \mid \hat{S}_t = x \right)$$

Tel que, l'EDS suivante :

$$(\forall t \in [0, T]) : \quad dS_t = S_t (r dt + \sigma(t, S_t) dW_t) \quad ; \quad S_0 = x > 0$$

Admet une unique solution faible, possédant les mêmes distributions marginales de \hat{S} .

Il est à noter que :

$$(\exists \varepsilon, M \in \mathbb{R}_+^*) \left(\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \right) : \quad \sqrt{\varepsilon} \leq \sigma(t, x) \leq M$$

On suppose, de plus que pour tout $t \in [0, T] : x \mapsto x\sigma(t, x)$ est uniformément lipschitzienne sur \mathbb{R}_+^* . On se donne d'une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$ à croissance sous-polynomiale. Pour appliquer

le théorème 4.1.4, il faut que le générateur infinitésimal de la diffusion (4.1.7) soit elliptique, ce qui n'est pas le cas. En effet L^{BS} s'écrit :

$$L^{BS} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x}$$

Cependant, on peut se ramener au cas elliptique en introduisant le changement de variable suivant. Si τ est le temps d'arrêt défini par :

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : S_t = 0\}$$

On peut démontrer que τ est presque-sûrement infini, de ce fait S ne quitte pas \mathbb{R}_+^* . On considère alors le processus X défini par :

$$(\forall t \in [0, \tau]) : X_t := \log(S_t)$$

On peut démontrer que X est une diffusion markovienne de générateur :

$$L^{\log-BS} := \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{\partial}{\partial x}$$

Il s'agit donc d'un opérateur elliptique, et le théorème 4.1.4 s'applique. De ce fait la solution de l'EDP du problème 4.1.4, existe et est unique. Si on suppose que la loi de S admet une densité de probabilité que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ (en ses variables forward), notée p , alors elle vérifie l'équation de Fokker-Plank (4.1.6), définit pour tout $t \in [0, T]$ et $(t_0, x) \in [0, t] \times \mathbb{R}_+^*$ fixés, par :

$$\begin{cases} (\forall (t, y) \in]t_0, T] \times \mathbb{R}_+^*) : \frac{\partial p}{\partial t}(t_0, x; t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\sigma^2 y^2 p)}{\partial y^2}(t_0, x; t, y) - r \frac{\partial (yp)}{\partial y}(t_0, x; t, y) \\ (\forall (t, y) \in]t_0, T] \times \mathbb{R}_+^*) : p(t_0, x, t, y) = \mu_{t_0}(y) = \delta_x(y) \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Rappelons que σ est une fonction bornée. De ce fait, la condition de Novikov est vérifiée. Alors, le prix d'un Call européen à l'instant t_0 , de strike K et de maturité T , est donné par :

$$C(T, K) := e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left((S_T^{t_0, x} - K)^+ \right) = e^{-r(T-t_0)} \int_0^{+\infty} (y - K)^+ p(t_0, x; T, y) dy$$

Maintenant, on sait que le prix de ce Call vérifie, à tout instant t , l'EDP d'évaluation. Cette équation nous donne une formule exprimant σ en fonction de t et de S_t . Toutefois, cette dernière équation implique des dérivées de la fonction du prix en fonction de la variable d'état, qui est, à un instant t donné, fixe. La solution à ce problème a été donnée par Bruno Dupire qui a proposé une méthode pour calculer $\sigma(t, S_t)$ à partir d'une observation des prix d'options (pour tous strikes et maturités) à une date t donnée. Il a démontré que dans un modèle à volatilité locale, la fonction des prix des Calls C (supposée de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ en (T, K)) vérifie, à un instant t_0 donné, l'équation forward à condition initiale et condition au bord :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}\sigma^2(K, T)K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K} & : \forall (K, T) \in]0, K_{\max}] \times]t_0, T_{\max}] \\ C(t_0, K) = (S_{t_0}^{t_0, x} - K)^+ = (x - K)^+ & : \forall K \in [0, K_{\max}] \\ C(T, 0) = S_{t_0}^{t_0, x} = x & : \forall T \in [t_0, T_{\max}] \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Remarque : Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de supposer que $(T, K) \mapsto C(T, K)$ est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$. Une application de la formule de *Tanaka-Meyer* à la semi-martingale S permet de conclure que C est de classe \mathcal{C}^1 comme étant une fonction de T (Voir chapitre 4, proposition 4.2.1.1 de [17]). De même, puisqu'on a supposé que la loi de S admet une densité à tout instant, la fonction de répartition de $S_T^{t_0, x}$ est continue. Par conséquent, C est de classe \mathcal{C}^2 en fonction de K .

Or C est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, on peut intervertir les dérivées partielles et l'intégrale.

Soit $(T, K) \in]0, K_{\max}] \times]t_0, T_{\max}]$. On a :

$$\begin{aligned} C(T, K) &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(S_T^{t_0, x} - K \right)^+ \right) \\ &= e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(S_T^{t_0, x} - K \right) \mathbf{1}_{\{S_T^{t_0, x} \geq K\}} \right) \\ &= e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} (y - K) p(t_0, x; T, y) dy \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial C}{\partial T}(T, K) = e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial p}{\partial T}(t_0, x; T, y) dy - rC(T, K)$$

En utilisant l'équation de Fokker-Plank (4.1.8), on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial T}(T, K) + rC(T, K) = e^{-r(T-t_0)} \left[\frac{1}{2} I_{T,K}^1 - r I_{T,K}^2 \right]$$

Avec :

$$\begin{aligned} I_{T,K}^1 &:= \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial^2 (\sigma^2 y^2 p)}{\partial y^2}(t_0, x; T, y) dy \\ I_{T,K}^2 &:= \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial (yp)}{\partial y}(t_0, x; T, y) dy \end{aligned}$$

On peut démontrer que, sous les hypothèses que nous avons sur σ , $S_T^{t_0, x}$ admet des moments à tout ordre. En particulier, un moment d'ordre 1 et 2. De ce fait, on a :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y(y - K) p(t_0, x; T, y) = 0$$

Maintenant, on suppose que :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (y - K) y^2 \frac{\partial p}{\partial y}(t_0, x; T, y) = 0$$

Remarquer que :

$$\frac{\partial (\sigma^2 y^2 p)}{\partial y}(t_0, x; T, y) \leq M^2 \frac{\partial (y^2 p)}{\partial y}(t_0, x; T, y)$$

et que :

$$\frac{\partial (y^2 p)}{\partial y}(t_0, x; T, y) = y^2 \frac{\partial p}{\partial y}(t_0, x; T, y) + 2yp(t_0, x; T, y)$$

En utilisant ces résultats et en faisant des intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial^2 (\sigma^2 y^2 p)}{\partial y^2}(t_0, x; T, y) dy &= \left[(y - K) \frac{\partial (\sigma^2 y^2 p)}{\partial y}(t_0, x; T, y) \right]_K^{+\infty} - \int_K^{+\infty} \frac{\partial (\sigma^2 y^2 p)}{\partial y}(t_0, x; T, y) dy \\ &= - \left[\sigma^2(T, y) y^2 p(t_0, x; T, y) \right]_K^{+\infty} \\ &= K^2 \sigma^2(T, K) p(t_0, x; T, K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_K^{+\infty} (y - K) \frac{\partial (yp)}{\partial y}(t_0, x; T, y) dy &= [y(y - K) p(t_0, x; T, y)]_K^{+\infty} - \int_K^{+\infty} yp(t_0, x; T, y) dy \\ &= -\mathbb{E} \left(S_T^{t_0, x} \mathbf{1}_{\{S_T^{t_0, x} \geq K\}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial C}{\partial T}(T, K) + rC(T, K) = e^{-r(T-t_0)} \left(\frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) p(t_0, x; T, K) + r \mathbb{E} \left(S_T^{t_0, x} \mathbb{1}_{\{S_T^{t_0, x} \geq K\}} \right) \right) \quad (4.1.10)$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned} C(T, K) &= e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} (y - K) p(t_0, x; T, y) dy \\ &= e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} y p(t_0, x; T, y) dy - e^{-r(T-t_0)} K \int_K^{+\infty} p(t_0, x; T, y) dy \\ &= e^{-r(T-t_0)} \int_K^{+\infty} y p(t_0, x; T, y) dy - e^{-r(T-t_0)} K \mathbb{Q} \left(S_T^{t_0, x} \geq K \right) \end{aligned}$$

Puisque $S_T^{t_0, x}$ est de loi admettant une densité, la fonction $K \mapsto \mathbb{Q} \left(S_T^{t_0, x} \geq K \right)$ est dérivable. On obtient donc :

$$\frac{\partial C}{\partial K}(T, K) = e^{-r(T-t_0)} \left(-K p(t_0, x; T, K) - \mathbb{Q} \left(S_T^{t_0, x} \geq K \right) + K p(t_0, x; T, K) \right)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial C}{\partial K}(T, K) = -e^{-r(T-t_0)} \mathbb{Q} \left(S_T^{t_0, x} \geq K \right) \quad (4.1.11)$$

En dérivant, une deuxième fois par rapport à K , on obtient l'identité de *Breeden-Litzenberger* :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) = e^{-r(T-t_0)} p(t_0, x; T, K) \quad (4.1.12)$$

En remarquant que :

$$\mathbb{E} \left(S_T^{t_0, x} \mathbb{1}_{\{S_T^{t_0, x} \geq K\}} \right) = e^{r(T-t_0)} C(T, K) + K \mathbb{Q} \left(S_T^{t_0, x} \geq K \right)$$

Et en injectant (4.1.11) et (4.1.12) dans (4.1.10), on obtient l'Equation de Dupire :

$$\frac{1}{2} K^2 \sigma^2(T, K) \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) = \frac{\partial C}{\partial T}(T, K) + rK \frac{\partial C}{\partial K}(T, K) \quad (4.1.13)$$

4.1.3 Calendar spread et Butterfly spread

Pour que l'équation de Dupire (4.1.13) soit bien posée, on remarque qu'il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\frac{\partial C}{\partial T}(T, K) + rK \frac{\partial C}{\partial K}(T, K) \geq 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) > 0$$

La deuxième est dite condition d'absence du *Butterfly spread*, et est vérifiée par la positivité de la densité de la loi de $S_T^{t_0, x}$. Le premier terme de la première condition doit être positif. On sait que \tilde{S} est \mathbb{Q} -une martingale. De ce fait, C doit être croissante par rapport à la maturité. Cette dernière condition assure l'absence de ce qu'on appelle : *Calendar spread*. On dit que la surface de la volatilité locale vérifie l'absence d'arbitrage si ces deux conditions sont vérifiées.

Dans la pratique, on ne dispose qu'un nombre fini de données pour le prix de Calls. De ce fait, les dérivées qui apparaissent dans l'équation de Dupire sont approximées par des fractions de différences finies. De ce fait (comme nous allons le voir plus loin), il est très difficile d'obtenir une surface de volatilité locale qui exclut l'arbitrage. Ceci se traduit, par exemple, par des variances négatives ...

4.2 Calibration de la volatilité locale

4.2.1 Différences finies

L'équation de Dupire définit un opérateur de pricing $K : \sigma \mapsto C$, qui à une fonction de volatilité connue, nous donne les prix pour tout strike et toute maturité (problème direct). Inversement, si on connaît les prix des options Call pour tout strike et toute maturité, on peut construire la fonction de volatilité locale. Toutefois, on ne dispose dans la pratique que d'un nombre fini de prix. De ce fait, les dérivées partielles de la fonction du prix sont approximées à l'aide des quotients de différences finies. Plus précisément, on commence tout d'abord par interpoler la fonction des prix sur une grille bi-dimensionnel de strikes et de maturités, que l'on note : $(K_i, T_j)_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq p}$, avec $N, p \in \mathbb{N}^*$. On définit le pas (constant) spatial k et temporel h (respectivement) par :

$$k = \frac{K_{\max}}{N+1} \quad ; \quad h = \frac{T_{\max} - t_0}{p+1}$$

Ainsi, les points de la grilles sont définis par :

$$(\forall (i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket \times \llbracket 0, p \rrbracket) : \quad K_i = ik \quad ; \quad T_j = t_0 + jh$$

On se donne donc d'un ensemble de données $(C_{i,j})_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq p}$ vérifiant :

$$(\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket) : \quad C_{i,0} = (x - K_i)^+ \quad ; \quad (\forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket) : \quad C_{0,j} = x$$

Avec : $x = S_{t_0}^{t_0, x}$.

On remplace les dérivées premières et la dérivée seconde dans (4.1.13) par des quotient de différences finies. De ce fait, la surface de volatilité locale, ainsi calibrée est donnée par :

$$(\forall (i, j) \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket) : \quad \sigma^2(K_i, T_j) = 2 \frac{D_{j,T} + rK_i D_{i,K}}{K_i^2 D_{i,K}^2}$$

Tel que :

$$\begin{aligned} (\forall (i, j) \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket) : \quad D_{i,K} &:= \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{k} \quad ; \quad D_{j,T} := \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j}}{h} \\ (\forall (i, j) \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \times \llbracket 0, p-1 \rrbracket) : \quad D_{i,K}^2 &:= \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{k^2} \end{aligned}$$

Cette méthode conduit à des instabilités numériques puisqu'elle s'appuie, d'une part, sur l'interpolation des prix qui ne garantit pas l'absence d'arbitrage de type Callendar spread ou de Butterfly spread. D'autre part, des approximations des dérivées par des fractions de différences finies. Ce dernier problème de dérivées se manifeste notamment de l'approximation de la dérivée seconde qui se trouve dans le dénominateur. Puisque, de petites erreurs dans les données des prix peuvent se transformer en des larges erreurs sur la solutions. La figure 4.4, montre la surface de volatilité locale (au carré), calibrée par la méthode décrite ci-haut. Les données utilisées sont des prix de Call souscrit sur l'action *AAPL*, à la date 29/09/2021, pour différents strikes et différentes maturités. Ces prix ont été interpolés par splines cubiques, pour construire finalement la surface. L'instabilité de la surface ainsi que sa violation de l'absence d'arbitrage est clairement visible sur la figure, qui se manifeste par des variances négatives. Pour comprendre la cause de ces pathologies, il est nécessaire d'introduire le concept de *problème inverse mal posé*.

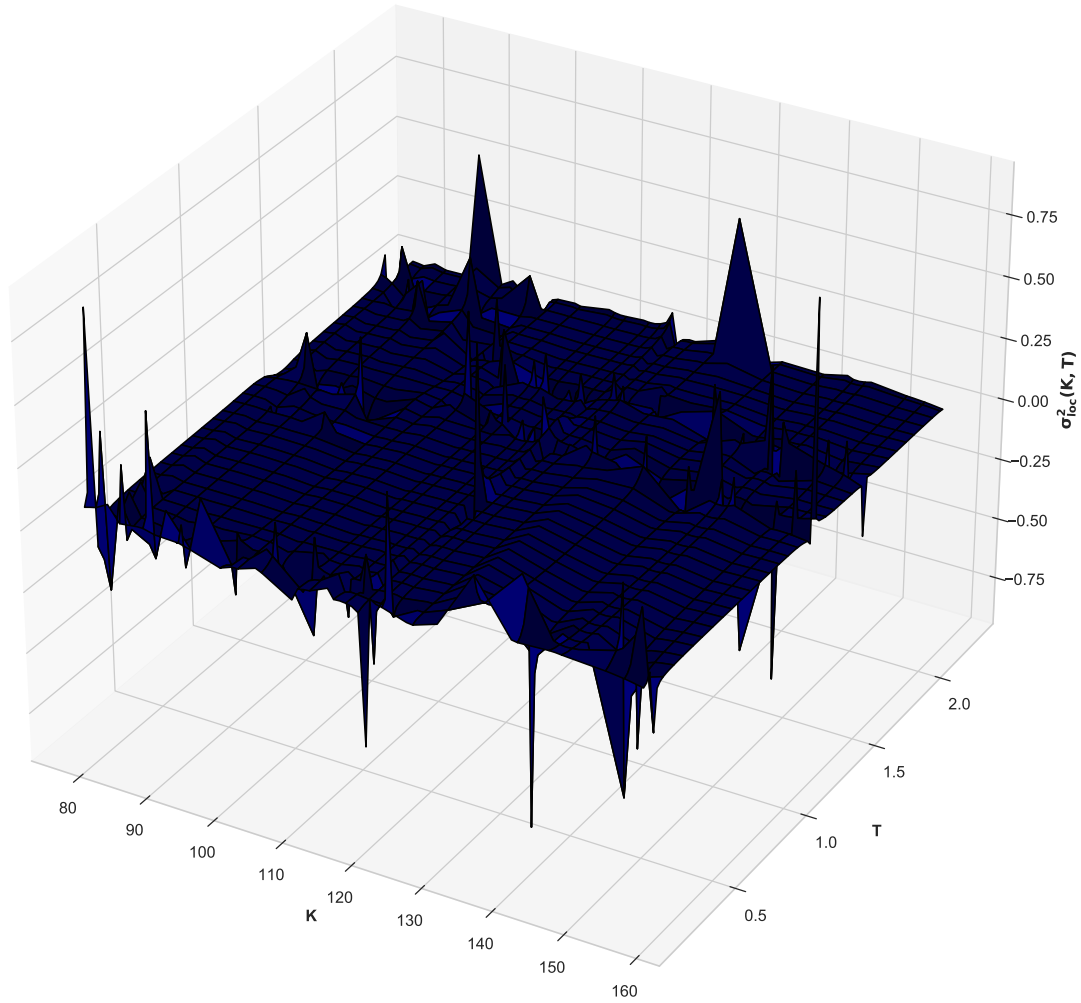


FIGURE 4.4 – Surface de volatilité locale (au carré) calibrée à des prix de Calls écrits sur *AAPL*. Source : **Auteur**.

4.2.2 Problèmes inverses mal posés

Soient, $(\mathcal{H}_1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$, $(\mathcal{H}_2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_2})$ deux espaces de Hilbert et $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un opérateur linéaire borné (ce qui est équivalent à sa continuité). On considère le problème :

$$Ku = f \quad (4.2.1)$$

Avec : $u \in \mathcal{H}_1$ et $f \in \mathcal{H}_2$

Un problème *direct* consiste à trouver les effets à partir des causes, i.e trouver f à partir de u . Le problème *inverse* consiste à trouver u , étant donné f . Le problème qui consiste à trouver la fonction de volatilité locale à partir de la fonction des prix est un problème inverse. Ce type de problèmes apparaît dans une multitude de domaines (Physique, Finance, ..).

En 1923, Hadamard a mentionné dans [14], qu'un modèle mathématique qui décrit un phénomène physique (problème de Cauchy, problème à condition au bord ...), doit être *bien posé* dans le sens suivant :

Définition 4.2.1 (Problème bien posé). Un problème inverse (4.2.1), est dit bien posé s'il vérifie les conditions suivantes :

- **Existence** : $(\forall f \in \mathcal{H}_2) (\exists u \in \mathcal{H}_1) : Ku = f$
- **Unicité** : $(\forall f \in \mathcal{H}_2) (\exists! u \in \mathcal{H}_1) : Ku = f$
- **Stabilité** : Pour tout $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{H}_1^{\mathbb{N}^*}$, vérifiant $Ku_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$

La dernière condition de stabilité traduit le fait que la solution doit dépendre continûment des données.

Tout problème qui viole, au moins, une de ces conditions est considéré comme un *problème inverse mal posé*. D'un point de vue mathématique, les différents problèmes de calibration rencontrés en finance sont souvent des exemples de problèmes inverses mal posés.

Prenons l'exemple classique de la dérivation. Soit f un élément de l'espace de Banach métrisable, $\mathcal{C}^1([0, 1])$ qui vérifie : $f(0) = 0$. Soit K l'opérateur d'intégration défini par :

$$(\forall u \in \mathcal{C}^1([0, 1])) (\forall y \in [0, 1]) : (Ku)(y) = \int_0^y u(x) dx$$

Le problème de dérivation s'écrit sous la forme (4.2.1) et consiste, donc, à trouver $u = f'$.

Soit $\delta > 0$. Supposons qu'on ne dispose que d'un ensemble de données bruitées f^δ , définies par : $f^\delta = f + g^\delta$, tel que $g^\delta \in \mathbb{L}^\infty([0, 1])$ et vérifie :

$$\|g^\delta\|_{\mathbb{L}^\infty([0, 1])} \leq \delta$$

Il est clair que la solution existe si g^δ est un élément de $\mathcal{C}^1([0, 1])$. Cependant, même si nous émettons cette hypothèse (irréaliste), les erreurs de la solution sont incontrôlables et peuvent être arbitrairement très larges. Soit $k > 0$, supposons que : g^δ est définie par :

$$(\forall y \in [0, 1]) : g^\delta(y) := \delta \sin\left(\frac{ky}{\delta}\right)$$

De ce fait la solution de $Ku^\delta = f^\delta$, est la fonction définie par :

$$(\forall y \in [0, 1]) : u^\delta(y) = f'(y) + k \cos\left(\frac{ky}{\delta}\right)$$

Remarquer que :

$$\|g^\delta\|_{\mathbb{L}^\infty([0, 1])} \leq \delta$$

Toutefois :

$$\|u - u^\delta\|_{\mathbb{L}^\infty([0, 1])} = \|(g^\delta)'\|_{\mathbb{L}^\infty([0, 1])} = k$$

Cette dernière quantité ne dépend pas de δ , donc même pour des erreurs très petites dans les données, les erreurs dans la solutions peuvent être arbitrairement très larges. De ce fait, la solution ne dépend pas continûment des données. Ainsi, le problème de la dérivation est un problème inverse mal posé.

Le problème de la calibration de la volatilité locale est un problème inverse (du problème de pricing) mal posé, puisqu'on ne dispose que d'un nombre fini de données. De ce fait, la solution (la volatilité locale) ne dépend pas continûment des données (prix de Calls). Une méthode permettant de trouver des solutions satisfaisantes, pour lesquelles on peut, au moins, contrôler le niveau d'erreur est la *Régularisation de Tikhonov*. La formulation rigoureuse de ce problème ainsi que l'étude de l'opérateur associé nécessite l'introduction d'un *espace de Sobolev Fractionnaire* adéquat ainsi que ses propriétés. Pour des études détaillées de ce problème, le lecteur est renvoyé à [6] et [1].

4.2.3 Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale

Parmi les solutions acceptables du problème d'instabilité de la surface de volatilité locale calibrée à l'aide de l'équation de Dupire, est celle qui consiste à exprimer la fonction de la volatilité locale pour un strike k et une maturité T , non en fonction des prix, mais en fonction de la volatilité implicite dans le modèle de Black-Scholes au strike K et à la maturité T .

On se place à une date t_0 et observons que pour un Call Européen de strike K , de maturité T et de prix $C(T, K)$ on a :

$$C(T, K) = C^{BS}(T, K, \sigma_{BS}(T, K)) = S_{t_0} \Phi(d_1(T, K)) - K e^{-t(T-t_0)} \Phi(d_2(T, K))$$

Avec : $C^{BS}(T, K, \sigma_{BS}(T, K))$ est le prix de ce Call dans le modèle de Black-Scholes classique et $\sigma_{BS}(K, T)$ est la volatilité implicite. Les expressions d_1 et d_2 sont donnés dans 3.5.2.

On définit le *log-moneyness* et la *variance totale*, notés respectivement x , w , par :

$$x(T, K) := \log\left(\frac{K}{F(t_0, T)}\right) = \log\left(\frac{K}{S_{t_0}}\right) - r(T - t_0); \quad ; \quad w(T, K) := \sigma_{BS}^2(T, K) (T - t_0)$$

Tel que : $F(t_0, T) = S_{t_0} e^{r(T-t_0)}$ est le prix forward du sous-jacent, calculé à la date t_0 pour une maturité égale à T .

On effectue le changement de variable suivant :

$$\tilde{C}(x, w) = C(T(x, w), K(x, w))$$

Alors, \tilde{C} s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{C}(x, w) = S_{t_0} \Phi(\tilde{d}_1(x, w)) - S_{t_0} e^x \Phi(\tilde{d}_2(x, w))$$

Tel que :

$$\tilde{d}_1(x, w) = -\frac{x}{\sqrt{w}} + \frac{1}{2}\sqrt{w} \quad ; \quad \tilde{d}_2(x, w) = \tilde{d}_1(x, w) - \sqrt{w}$$

En utilisant la règle de la chaîne, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T}(T, K) &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial T}(x(T, K), w(T, K)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial T}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(x, w) + \frac{\partial w}{\partial T}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(x, w) \\ &= -r \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(x, w) + \frac{\partial w}{\partial T}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(x, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial K}(T, K) &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial K}(x(T, K), w(T, K)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial K}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(x, w) + \frac{\partial w}{\partial K}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(x, w) \\ &= \frac{1}{K} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(x, w) + \frac{\partial w}{\partial T}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(x, w) \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, on n'écrira les variables des fonctions qui apparaissent dans l'expression suivant :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = 2K^2 \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{Kx}{w} \frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial w}{\partial K} + K \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \right) - \frac{1}{4} K^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w} \right) \right]$$

Si on remplace les dérivées partielles de C dans l'équation de Dupire (4.1.13), on obtient l'expression de la fonction de la volatilité locale en fonction des dérivées partielles de la variance totale. On note la fonction de la volatilité locale par σ_{loc} . Ainsi :

$$\sigma_{\text{loc}}^2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial T} + rK \frac{\partial w}{\partial K}}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{Kx}{w} \frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial w}{\partial K} + K \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \right) - \frac{1}{4} K^2 \left(\frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w} \right)} \quad (4.2.2)$$

Finalement, on obtient la formule de σ_{loc}^2 en termes de volatilité implicite :

$$\sigma_{\text{loc}}^2 = \frac{\sigma_{\text{BS}}^2 + 2\sigma_{\text{BS}}T \left(\frac{\partial \sigma_{\text{BS}}}{\partial T} + rK \frac{\partial \sigma_{\text{BS}}}{\partial K} \right)}{\left(1 - \frac{Kx}{\sigma_{\text{BS}}} \frac{\partial \sigma_{\text{BS}}}{\partial K} \right)^2 + K\sigma_{\text{BS}}T \left(\frac{\partial \sigma_{\text{BS}}}{\partial K} - \frac{1}{4} K\sigma_{\text{BS}}T \left(\frac{\partial \sigma_{\text{BS}}}{\partial K} \right)^2 + K \frac{\partial^2 \sigma_{\text{BS}}}{\partial K^2} \right)} \quad (4.2.3)$$

Le démonstration de ces formules est donnée dans l'Appendice B.

Maintenant, si on se dispose d'un nombre fini de volatilités implicites de Call européens pour quelques strikes et quelques maturités, on applique une interpolation de la fonction σ_{BS} sur une grille bi-dimensionnel, comme celle introduite dans 4.2.1, afin d'obtenir plus d'observations de σ_{BS} . On approxime les dérivées partielles de σ_{BS} de la même manière présentées dans 4.2.1, afin de calculer finalement la surface de la volatilité implicite, en utilisant la formule (4.2.3).

La figure 4.5 montre la surface de volatilité locale calibrée, à la date 29/09/2021 en utilisant les volatilités implicites de Calls européens souscrits sur l'action *AAPL*, pour différents strikes et différents maturités. Il s'agit de données des mêmes Calls qu'on a utilisé dans la construction de la surface de la figure 4.4. On a constaté que la calibration de la volatilité locale en utilisant cette formule a donné, elle aussi, des variances négatives. Toutefois, ces instabilités sont beaucoup moins nombreuses par rapport à la dernière méthode. Les observations négatives ne sont pas affichées dans le graphique.

Outre que les avantages numériques de cette méthode, elle permet de tirer une interprétation intéressante de la volatilité implicite en termes de volatilité locale. En effet, si σ_{BS} ne dépend pas de K (absence de smile), l'équation (4.2.2) se réduit à

$$\sigma_{\text{loc}}^2(T) = \frac{\partial w}{\partial T}(T)$$

De ce fait, la volatilité implicite est la moyenne (temporelle) quadratique de la volatilité locale sur la durée de vie de l'option :

$$\sigma_{\text{BS}}(T) = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \sigma_{\text{loc}}^2(t) dt}$$

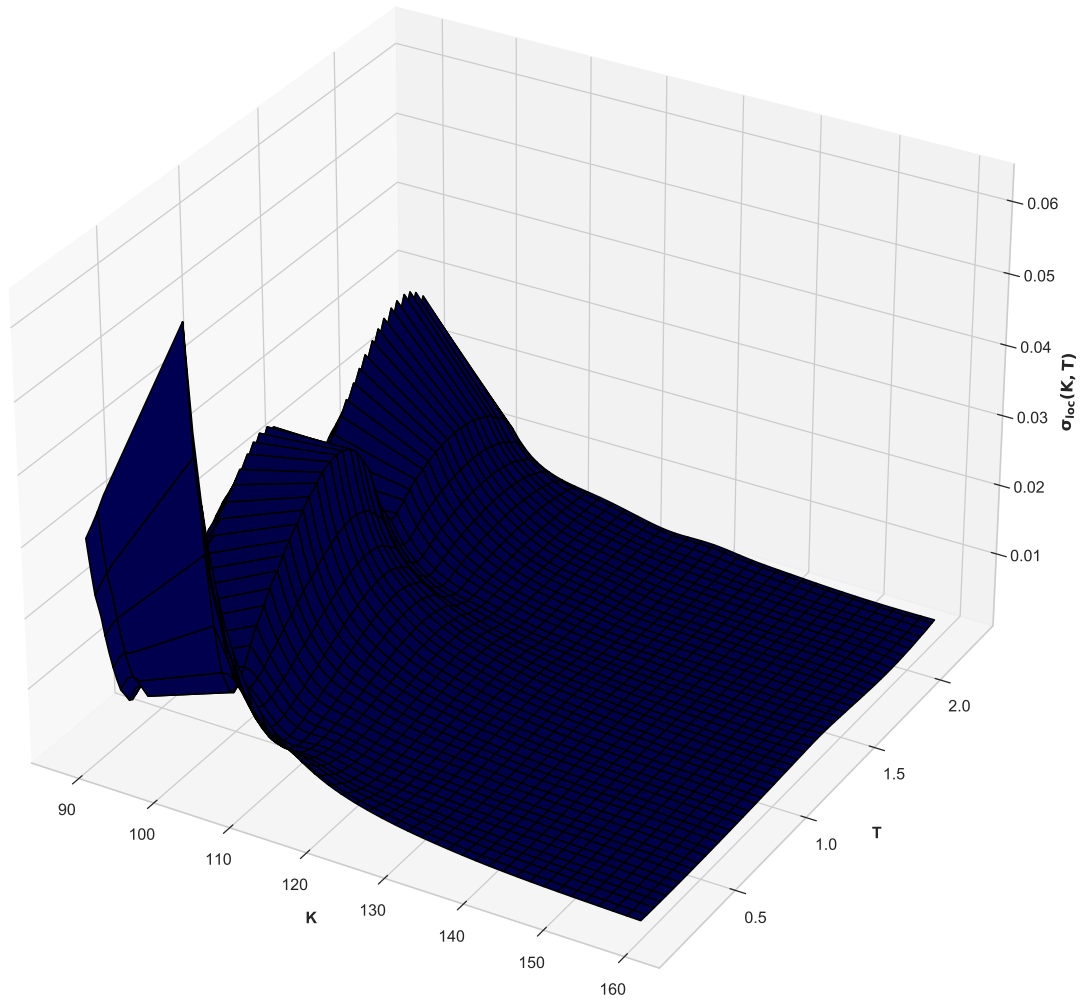


FIGURE 4.5 – Surface de volatilité locale calibrée à des volatilités implicites de Calls écrits sur l'action *AAPL* . Source : **Auteur**.

4.3 La paramétrisation Stochastic Volatility Inspired SVI

Le modèle paramétrique *Stochastic Volatility Inspired* (SVI) a été utilisé pour la première fois à Merrill Lynch en 1999, par Jim Gatheral. Or, les Traders et les praticiens requiert une interprétation intuitive des paramètres du modèle, Gatheral et Jacquier ont prouvé dans [11] que le modèle SVI est la limite de la variance totale dans le modèle de Heston, pour des maturités très larges.

Le grand succès de ce modèle est due aux caractéristiques suivantes :

- Pour une maturité T fixée, la variance implicite de Black-Scholes est linéaire en *log-moneyness*, au voisinage de $\pm\infty$. Cette propriété est consistante avec la formule des moments de Roger Lee [16].
- Les prix des options calculés par ce modèle sont très proches des prix des options cotés dans le marché. En plus, pour un bon choix des paramètres du modèle, on peut obtenir une surface de volatilité locale qui vérifie l'absence d'arbitrage statique.

Avant de présenter le modèle ainsi que ces propriétés, il est nécessaire d'introduire la formule des moments de Roger Lee, *Roger's Lee moment formula*.

4.3.1 Formule des moments de Roger Lee

Roger Lee a démontré dans [16] que la variance totale, comme étant une fonction du log-moneyness, est dominée au voisinage de $\pm\infty$, par une fonction linéaire en log-moneyness. Outre que cela, il a démontré que la pente maximale de la variance totale est exactement égale à 2. Cette propriété est très importante et tout modèle d'interpolation doit vérifier cette propriété pour les strikes très larges.

On se place dans le cadre de la section 4.2.3, on conserve les mêmes notations, On fixe une maturité T^* et on rappelle les expressions du log-moneyness et de la variance (implicite) totale :

$$x(T^*, K) := \log \left(\frac{K}{F(t_0, T^*)} \right) = \log \left(\frac{K}{S_{t_0}} \right) - r(T^* - t_0); \quad ; \quad w(T^*, K) := \sigma_{\text{BS}}^2(T^*, K) (T^* - t_0)$$

Pour alléger les notations, on notera $x(K)$, $w(K)$ et $\sigma_{\text{BS}}^2(K)$ au lieu de $x(T^*, K)$, $w(T^*, K)$ et $\sigma_{\text{BS}}^2(T^*, K)$.

Rappelons que le prix d'un Call de strike K et de maturité T^* , est donné par :

$$C(K) := e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left((S_{T^*} - K)^+ \right)$$

et vérifie :

$$C(K) = C^{BS}(T^*, K, \sigma_{\text{BS}}(K))$$

Théorème 4.3.1. Soit $p > 0$. On suppose que :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(S_{T^*}^{p+1} \right) < \infty$$

Alors, :

$$(\forall K > 0) : \quad C(K) \leq e^{-r(T-t_0)} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(S_{T^*}^{p+1} \right)}{p+1} \left(\frac{p}{p+1} \right)^p \frac{1}{K^p}$$

Démonstration. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+$, la fonction défini par :

$$(\forall s > 0) : \quad g(s) := p^p \left(K^p \left(\frac{p+1}{p} \right)^p (p+1)(s-K) - s^{p+1} \right)$$

On remarque que g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et atteint son maximum en :

$$s^* = K \left(\frac{p+1}{p} \right)$$

De plus, $g(s^*) = 0$. De ce fait :

$$(\forall s > 0) : \quad (s-K) \leq \frac{s^{p+1}}{p+1} \left(\frac{p}{p+1} \right)^p \frac{1}{K^p}$$

Remarquons de plus que le terme gauche de la dernière inégalité est positif, de ce fait :

$$(\forall s > 0) : \quad (s-K)^+ \leq \frac{s^{p+1}}{p+1} \left(\frac{p}{p+1} \right)^p \frac{1}{K^p}$$

CQFD. □

Le théorème suivant donne une domination de la volatilité implicite pour de larges strikes.

Théorème 4.3.2 (The Large-Strike Tail). Supposons que l'hypothèse du théorème précédent est vérifiée (pour $p = 1$). Alors :

$$(\exists x_0 > 0) (\forall x > x_0) : \quad \sigma_{BS}^2(x) \leq 2 \frac{|x|}{T^*}$$

Démonstration. On sait que $\sigma \mapsto C^{BS}(T^*, K, \sigma)$ est strictement croissante et continue. De ce fait, il suffit d'établir :

$$(\exists x_0 > 0) (\forall x > x_0) : \quad C^{BS}(T^*, K, \sigma_{BS}(x)) \leq C^{BS}\left(T^*, K, \sqrt{2 \frac{|x|}{T^*}}\right) \quad (4.3.1)$$

En effet, en utilisant l'inégalité du théorème 4.3.1, on a par convergence dominée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(K(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} C^{BS}(T^*, K(x), \sigma_{BS}(x)) = 0$$

De même, on a :

$$d_1\left(T^*, \sqrt{2 \frac{|x|}{T^*}}\right) = 0; \quad ; \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

En utilisant la règle de l'hôpital, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C^{BS}\left(T^*, K, \sqrt{2 \frac{|x|}{T^*}}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S_{t_0}^{t_0, s_0}\left(\Phi(0) - e^x \Phi\left(-\sqrt{2|x|}\right)\right) = \frac{s_0}{2}$$

La définition de cette dernière limite donne :

$$(\exists \alpha > 0) (\forall x > \alpha) : \quad C^{BS}\left(T^*, K, \sqrt{2 \frac{|x|}{T^*}}\right) - \frac{s_0}{2} \geq -\frac{s_0}{4}$$

Ainsi :

$$(\exists \alpha > 0) (\forall x > \alpha) : \quad C^{BS}\left(T^*, K, \sqrt{2 \frac{|x|}{T^*}}\right) \geq \frac{s_0}{4}$$

Et la définition de la première limite donne :

$$(\exists \beta > 0) (\forall x > \beta) : \quad C(K(x)) \leq \frac{s_0}{4}$$

En prenant $x_0 := \max(\alpha, \beta)$, on obtient (4.3.1). CQFD. □

Remarquons que d'après le théorème précédent, pour de larges strikes (donc de larges x), la variance implicite totale est dominée par une fonction linéaire en x et la valeur maximale de la pente est égale à deux :

$$(\exists x_0 > 0) (\forall x > x_0) : \quad w(x) \leq 2 |x|$$

Roger Lee a établi une relation entre la pente du smile asymptotique et le nombre maximal de moments finis de S_{T^*} . On présente ici que le résultat de la queue droite (*Right wing*). Concernant la queue gauche, le lecteur est renvoyé à [16].

Théorème 4.3.3 (The moment formula for the right wing). On définit :

$$\tilde{p} := \sup \left\{ p > 0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(S_{T^*}^{p+1} \right) < \infty \right\} \quad ; \quad \beta_R := \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{w(x)}{|x|}$$

Alors :

$$\beta_R \in [0, 2] \quad ; \quad \tilde{p} = \frac{1}{2\beta_R} + \frac{\beta_R}{8} - \frac{1}{2}$$

Par inversion :

$$\beta_R = 2 - 4 \left(\sqrt{\tilde{p}^2 + \tilde{p}} - \tilde{p} \right)$$

Démonstration. Voir le théorème 3.2 de [16]. □

4.3.2 Conditions d'absence de Calendar spread et de Butterfly spread

On présente ici, des conditions nécessaires et suffisantes et *model-independant* pour que la nappe de volatilité vérifie l'absence d'arbitrage statique (voir 4.1.3). On conserve les mêmes notations précédentes.

Théorème 4.3.4. (Non-Arbitrageable surface) Supposons que w est dérivable comme étant une fonction de T et de classe \mathcal{C}^2 en fonction de K .

- Une surface de volatilité totale w vérifie l'absence d'arbitrage de type Calendar Spread, si et seulement, si :

$$\left(\forall (T, K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \right) : \quad \frac{\partial w}{\partial T}(T, K) \geq 0$$

En d'autres termes, l'arbitrage de type Calendar Spread est absent, si et seulement si, les courbes de variance implicite totale en fonction du strike pour différentes maturités ne se croisent pas.

- Supposons que, pour une maturité T , la loi de S_T admet une densité de probabilité, alors : une surface de volatilité totale vérifie l'absence d'arbitrage de type Butterfly spread, si et seulement si, la densité de probabilité est positive.
- Pour une maturité T fixée, soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, la fonction défini par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad g(x) := \left(1 - \frac{xw'(x)}{2w(x)} \right)^2 - \frac{w'(x)^2}{4} \left(\frac{1}{w(x)} + \frac{1}{4} \right) + \frac{w''(x)}{2}$$

La surface de volatilité totale vérifie l'absence d'arbitrage de type Butterfly spread, si et seulement si :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad g(x) \geq 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{d}_1(x, w(x)) = -\infty$$

Tel que : \tilde{d}_1 est la fonction définie dans 4.2.3.

Démonstration. Voir lemme 2.1 et lemme 2.2 dans [12] □

4.3.3 Formulation du modèle Raw SVI

Le modèle *Raw SVI* est le premier modèle introduit par Gatheral en 2004. Il s'agit d'une paramétrisation de la **variance implicite totale** : $w(x, T) := \sigma_{BS}^2(x, T)T$, pour une maturité T fixée. On notera $w(x)$ au lieu $w(x, T)$ pour alléger les notations.

Etant donné un ensemble de paramètres $\chi_R := \{a, b, \rho, m, \sigma\}$, la variance totale est donnée par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad w(x, \chi_R) := a + b \left[\rho(x - m) + \sqrt{(x - m)^2 + \sigma^2} \right] \quad (4.3.2)$$

Tel que : $b > 0$, $\sigma > 0$, $|\rho| < 1$ et $a, m \in \mathbb{R}$.

Puisque w doit être positive et $\min_{x \in \mathbb{R}} w(x) = a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2}$, on doit imposer la condition supplémentaire :

$$a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} > 0$$

Noter que w est une fonction convexe (en fonction de x).

L'interprétation des paramètres est :

- a contrôle le niveau globale du smile. Une augmentation de a engendre une translation verticale du smile.
- b contrôle la pentes des ailes.
- ρ contrôle l'asymétrie, "rotation" du smile. Une augmentation de ρ engendre une augmentation (diminution) de la pente de l'aile droite (gauche).
- En changeant m , on translate le Smile.
- σ contrôle la convexité à la monnaie, *At The Money Curvature* ($x = 0$).

Les asymptotes de la variance implicite totale, au voisinage de $\pm\infty$, sont :

$$w_L(x, \chi_R) = a + b(\rho - 1)(x - m) \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$w_R(x, \chi_R) = a + b(\rho + 1)(x - m) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Donc cette paramétrisation de la variance implicite totale est consistante avec la formule des moments de Roger Lee. Puisque la linéarité asymptotique de la variance totale en x est vérifiée.

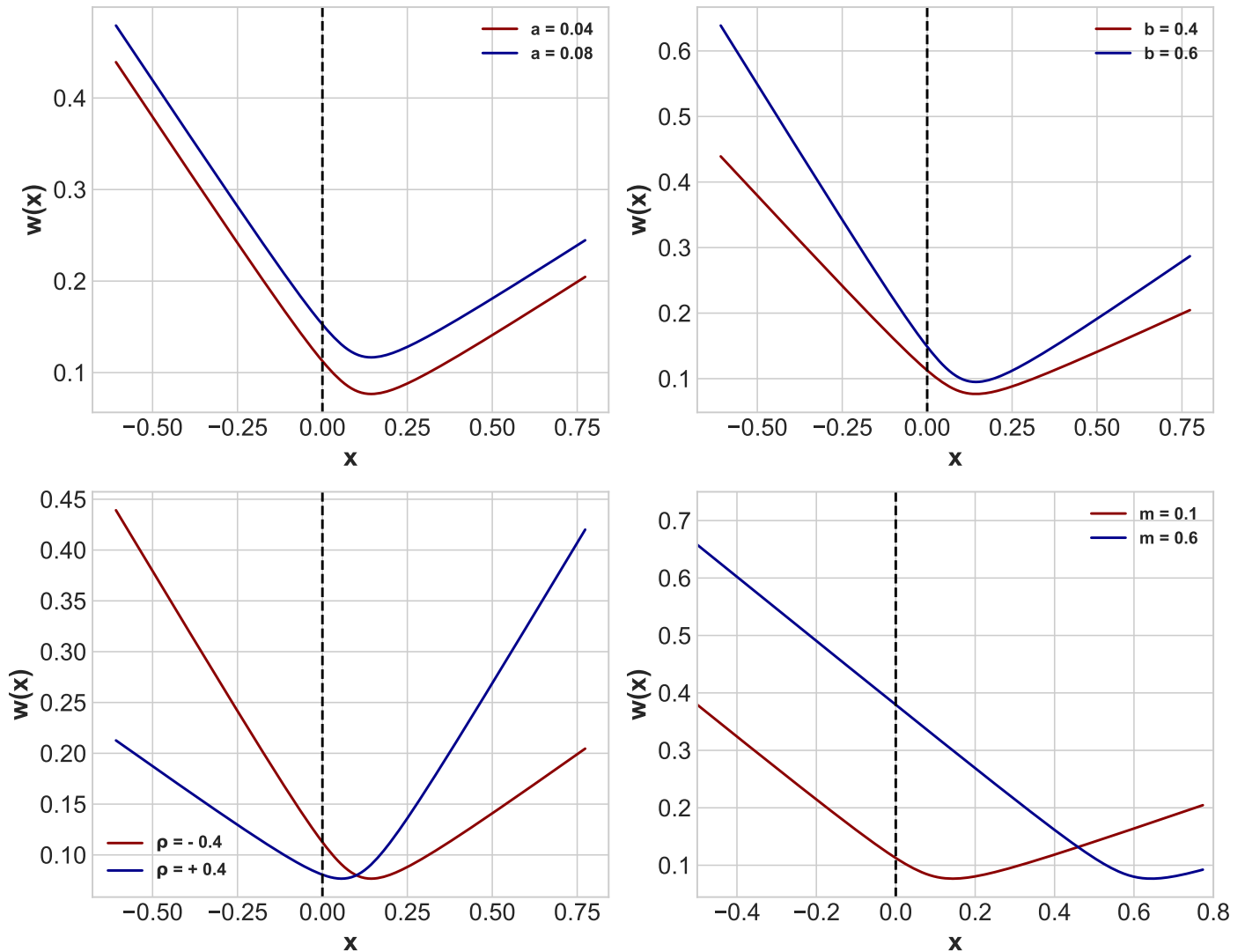


FIGURE 4.6 – Effet d'un changement des paramètres sur le graphique de la volatilité implicite totale dans le modèle SVI . Source : **Auteur**.

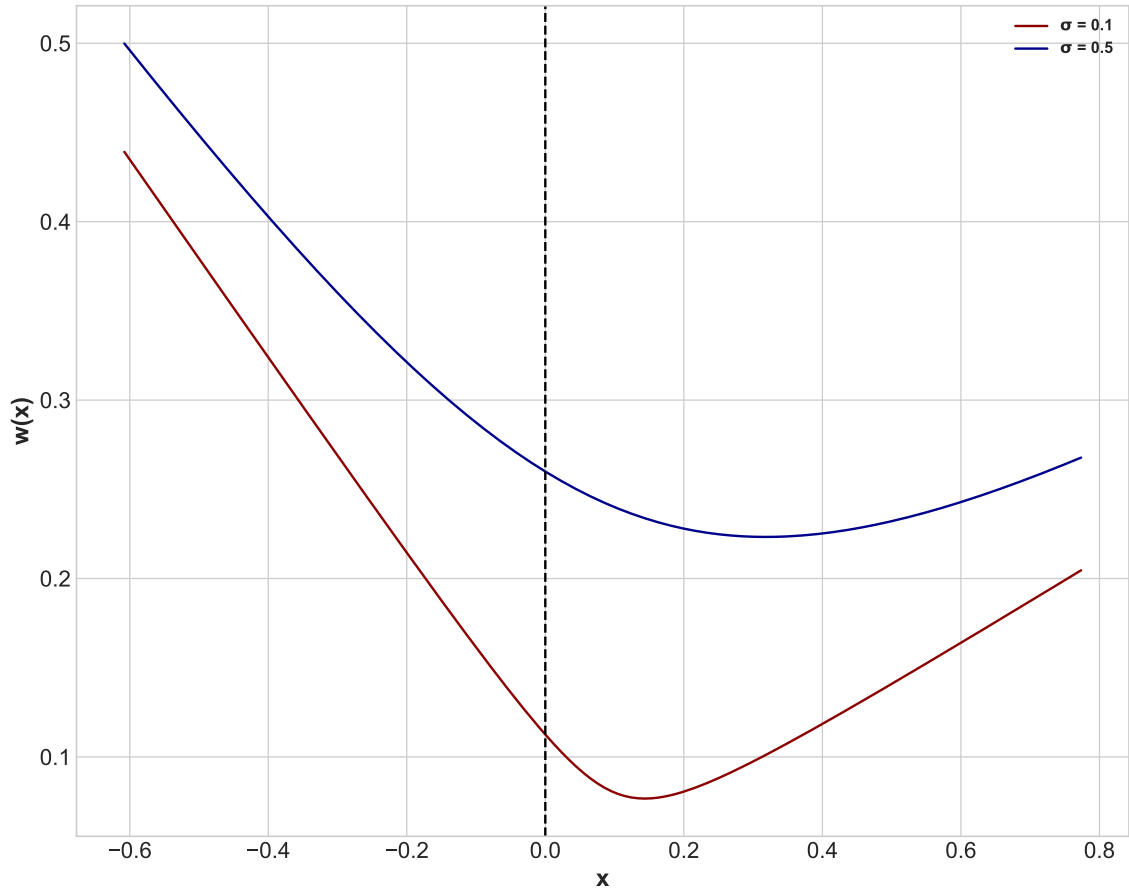


FIGURE 4.7 – Effet d'un changement des paramètres sur le graphique de la volatilité implicite totale dans le modèle SVI. Source : **Auteur**.

Les figures 4.6 et 4.7 montrent l'effet d'un changement de paramètres du modèle SVI sur le graphique de w , pour une maturité fixée à $T = 1$.

Le problème de la formulation *Raw SVI* réside dans la difficulté de trouver des conditions d'exclusion d'arbitrage qui sont exprimés explicitement. C'est pour cela, de nouvelles paramétrisations ont été proposées, tel que : *Natural SVI*, *SVI Jump-Wings*. Les paramètres de ces deux dernières paramétrisations sont liées à la première (*Raw SVI*). De ce fait, on peut toujours passer d'une formulation à l'autre. Pour une présentation de ces paramétrisations ainsi que leurs propriétés, le lecteur est renvoyé à [12].

On présente maintenant une condition suffisante, qui garantit l'absence d'arbitrage de type *Calendar Spread*. Remarquer que la paramétrisation de w donnée par 4.3.2 est faite pour une maturité fixée. De ce fait, il s'agit seulement d'une portion de la surface de la variance implicite totale.

Théorème 4.3.5. La surface de la variance implicite totale vérifie la condition d'absence du Calendar Spread, si la fonction polynomiale donnée par (4.3.3) n'a aucune racine réelle.

Démonstration. Par le théorème 4.3.4, il y'a absence de Calendar Spread, si pour des maturités T_1 et T_2 tel que $T_1 \neq T_2$, les courbes des fonctions : $x \mapsto w(x, T_1)$ et $x \mapsto w(x, T_2)$ ne se croisent pas. Sans perte de généralité, on suppose que $0 < T_1 < T_2$ et que $x \mapsto w(x, T_1)$ et $x \mapsto w(x, T_2)$ sont paramétrisées selon le modèle 4.3.2.

L'ensemble des paramètres associé à chaque fonction $x \mapsto w(x, T_i)$, pour tout $i \in \{1, 2\}$, est noté par :

$$\chi_{R_i} := \{a_i, b_i, \rho_i, m_i, \sigma_i\}$$

L'intersection des graphes des deux fonctions est différente de l'ensemble vide, si :

$$(\exists x_0 \in \mathbb{R}) : \quad w(x_0, T_1) = w(x_0, T_2)$$

Donc, si :

$$a_1 + b_1 \left[\rho_1(x_0 - m_1) + \sqrt{(x_0 - m_1)^2 + \sigma_1^2} \right] = a_2 + b_2 \left[\rho_2(x_0 - m_2) + \sqrt{(x_0 - m_2)^2 + \sigma_2^2} \right]$$

En laissant le terme $\sqrt{(x_0 - m_1)^2 + \sigma_1^2}$ d'un côté et en mettant les deux côtés au carré, on obtient :

$$2b_2(\alpha + \beta x_0)\sqrt{(x_0 - m_2)^2 + \sigma_2^2} = b_1^2 \left[(x_0 - m_1)^2 + \sigma_1^2 \right] - b_2^2 \left[(x_0 - m_2)^2 + \sigma_2^2 \right] - (\alpha + \beta x_0)^2$$

tel que $\alpha := a_2 - a_1 + b_1\rho_1m_1 - b_2\rho_2m_2$ et $\beta := b_2\rho_2 - b_1\rho_1$.

En mettant les côtés de la dernière équation au carré, on obtient :

$$\delta_4x_0^4 + \delta_3x_0^3 + \delta_2x_0^2 + \delta_1x_0 + \delta_0 = 0 \quad (4.3.3)$$

tel que $(\delta_i)_{0 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^5$ sont obtenus par identification. \square

Malheureusement, une condition sur les paramètres garantissant l'absence d'arbitrage de type *Butterfly Spread* est difficile à obtenir, à cause de l'expression non-linéaire de la fonction g définie dans 4.3.4. Un exemple fameux d'un ensemble de paramètres donnant naissance à un Butterfly Spread est donnée par Axel Vogt, démontrant ainsi qu'il est impossible que le modèle SVI garantisse l'absence d'arbitrage. Comme le montre la figure 4.8 la fonction g défini dans 4.3.4 viole l'hypothèse de la positivité pour tout $x \in \mathbb{R}$, donnant lieu ainsi à un arbitrage de type Butterfly Spread.

$$(a, b, \rho, m, \sigma) = (-0.0410, 0.1331, 0.3060, 0.3586, 0.4153) \quad ; \quad T = 1$$

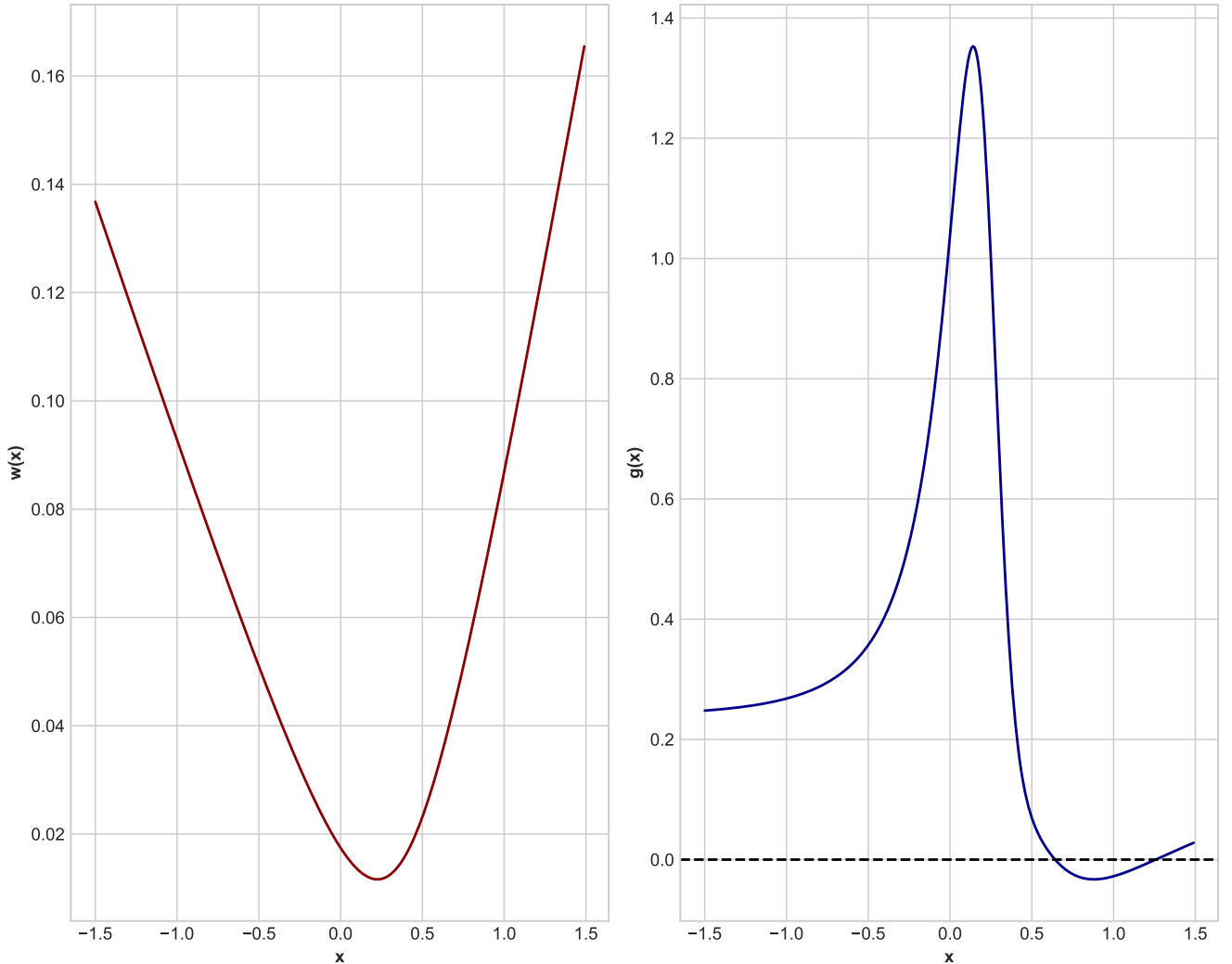


FIGURE 4.8 – Exemple d'Axel Vogt de l'arbitrage de type Butterfly Spread dans la paramétrisation SVI. Source : **Auteur**.

4.3.4 Calibration du modèle Raw SVI

La calibration du modèle *Raw SVI* au données du marché se fait à travers la minimisation d'une fonction de perte, qui est égale la distance de la variance implicite totale tel que donnée par le modèle SVI à la variance implicite totale du marché. La majorité des algorithmes d'optimisation numérique requièrent des bornes sur les variables recherchés, ainsi qu'une valeur initiale des paramètres. De plus, les solutions doivent vérifier l'absence d'arbitrage de type Calendar Spread et de type Butterfly Spread. La calibration doit être faite, pour toute maturité disponible.

Bornes des paramètres

Rappelons que nous avons déjà imposé des restrictions sur quelques paramètres du modèle (4.3.2) résultant de sa construction :

$$b > 0 \quad ; \quad |\rho| < 1 \quad ; \quad \sigma > 0$$

Le paramètre a : Rappelons que, pour $|\rho| < 1$:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} w(x) = a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2}$$

Par la positivité de σ , b et $\sqrt{1 - \rho^2}$, on a :

$$a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2} > 0 \iff a > 0$$

De ce fait, on prend une valeur arbitrairement petite et strictement positive pour la borne inférieure de a , $\underline{a} = 10^{-4}$.

Rappelons que a représente le niveau globale de la variance totale implicite. De ce fait, il ne peut pas dépasser la valeur la plus large des variances implicites sur le marchés. Pour $N \geq 1$, on note $(w_j)_{1 \leq j \leq N}$ les variances implicites observées sur le marché (pour une maturité donnée). Alors, les bornes sur le paramètre a sont données par :

$$0 < \underline{a} = 10^{-4} \leq a \leq \max_{1 \leq j \leq N} w_j = \bar{a}$$

Le paramètre b : Rappelons que l'asymptote droite de la courbe SVI de $x \mapsto w(x, \cdot)$ est donnée par :

$$w_R(x, \chi_R) := a + b(\rho + 1)(x - m)$$

Donc, la pente de l'aile droite est $b(\rho + 1)$. Selon Roger Lee 4.3.2, cette pente ne doit pas dépasser 2. De ce fait, on impose :

$$b \leq \min_{\rho \in [-1, 1]} \frac{2}{(1 + \rho)}$$

Soit, donc :

$$b \leq 1$$

Concernant, la borne inférieure, on choisit une valeur arbitrairement petite et strictement positive, soit $\underline{b} = 10^{-2}$.

Ainsi, les bornes sur le paramètre b sont données par :

$$0 < \underline{b} = 10^{-2} \leq b \leq \bar{b} = 1$$

Le paramètre ρ : Le paramètre ρ représente le coefficient de corrélation linéaire entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. De ce fait :

$$-1 < \underline{\rho} = -0.9999 \leq \rho \leq \bar{\rho} = 0.9999 < 1$$

Le paramètre m : Ce paramètre m agit sur la translation horizontale du smile. De ce fait, des bornes raisonnables seront de type :

$$\alpha \min_{1 \leq j \leq N} x_j \leq m \leq \alpha \max_{1 \leq j \leq N} x_j$$

tel que $(x_j)_{1 \leq j \leq N}$ sont les log-moneyness observées sur les marchés (pour une maturité donnée) et α est un réel à bien choisir. On le fixe à 2, pour obtenir les bornes suivantes :

$$\underline{m} = 2 \min_{1 \leq j \leq N} x_j \leq m \leq \bar{m} = 2 \max_{1 \leq j \leq N} x_j$$

Le paramètre σ : σ représente la convexité à la monnaie de w . On choisit les bornes suivantes :

$$0 < \underline{\sigma} = 10^{-2} \leq \sigma \leq \bar{\sigma} = 1$$

Valeurs initiales

Concernant le paramètre a , un choix raisonnable est celui qui permet à w d'être proche au minimum des variances implicites totales observées sur les marchés. On prend, donc, comme valeur initiale de a :

$$a_0 = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq N} w_j$$

Dans le marché de l'Equity, on sait qu'en général ρ prend des valeurs négatives. On prend alors,

$$\rho_0 = -0.5$$

Concernant, les autres paramètres, on les choisit comme valeurs initiales :

$$b_0 = 0.1 \quad ; \quad m_0 = 0.1 \quad ; \quad \sigma_0 = 0.1$$

Il est à noter que ce choix des valeurs initiales respecte bien les bornes imposées sur les paramètres. Toutefois, il s'agit d'un choix arbitraire qui peut être remplacé par tout autre choix respectant les restrictions des paramètres.

Contraintes d'absence d'arbitrage de type Butterfly Spread

Selon le théorème 4.3.4, w vérifie l'absence du Butterfly Spread si $g > 0$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{d}_1(x, w(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{x}{w(x)}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{w(x)}{x}} \right) = -\infty$$

Cette dernière condition est vérifiée pour une fonction w vérifiant :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{w(x)}{x} < 2$$

Ce qui est le cas, grâce aux bornes imposées sur b et le fait que :

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{w(x)}{x} = b(\rho + 1)$$

De ce fait, pour garantir l'absence du Butterfly spread, il suffit d'imposer :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \quad g(x) \geq \varepsilon$$

tel que $\varepsilon > 0$ est une constante que l'on fixera dans 0.05.

Problème d'optimisation

Pour une maturité donnée et pour $N \geq 1$, on se dispose d'un ensemble d'observations de variances implicite totales $(w_j)_{1 \leq j \leq N}$ et de log-moneyness $= (x_j)_{1 \leq j \leq N}$, observés sur le marché. On désire trouver l'ensemble de paramètres (du modèle SVI) optimal pour que les variances implicites totales données par le modèle SVI soient les plus proches possibles de celles observées dans le marchés. On cherche, donc, à trouver les paramètres qui minimise la distance entre la variance implicite totale théorique et celle observée dans le marché. Les paramètres doivent se situer dans les bornes que nous avons déjà présenté. De plus, pour garantir l'absence du Butterfly spread, les paramètres doivent respecter la contrainte de positivité stricte de la fonction g . Il s'agit donc d'un problème d'optimisation. La fonction objective est donnée, pour $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$, par :

$$J(\chi_R) := \left\| (w(x_j, \chi_R))_{1 \leq j \leq N} - (w_j)_{1 \leq j \leq N} \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^N \left(a + b \left[\rho(x_j - m) + \sqrt{(x_j - m)^2 + \sigma^2} \right] - w_j \right)^2$$

On définit l'ensemble des bornes par :

$$B := [\underline{a}, \bar{a}] \times [\underline{b}, \bar{b}] \times [\underline{\rho}, \bar{\rho}] \times [\underline{m}, \bar{m}] \times [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$$

et l'ensemble des contraintes sera :

$$C := \{ \chi_R = (a, b, \rho, m, \sigma) \in B : (\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket) \quad \varepsilon - g(x_j, \chi_R) \leq 0 \}$$

Il s'agit donc de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad : \quad \inf_{(a, b, \rho, m, \sigma) \in C} J(a, b, \rho, m, \sigma)$$

Il s'agit, donc, d'un problème d'optimisation à contraintes non-affines (puisque g est non-linéaires comme étant une fonction des paramètres).

On suppose que pour tout $u \in C$, les contraintes d'inégalités sont QUALIFIÉES en u , i.e : $(\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket) \quad g_j$ est différentiable en u et :

$$(\exists \omega \in \mathbb{R}^5) \quad (\forall j \in A(u)) : \quad \begin{cases} \text{soit :} & \langle \nabla g_j(u), \omega \rangle < 0 \\ \text{soit :} & \langle \nabla g_j(u), \omega \rangle = 0, \text{ et } g_j \text{ est affine} \end{cases}$$

tel que : $A(u) := \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket : g_i(u) = 0\}$ est l'ensembles des contraintes actives.

Sous cette hypothèse, g_j étant continue sur C pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, B étant un compact de \mathbb{R}^5 , de ce fait C est un compact de \mathbb{R}^5 . La continuité de J sur C garantit l'existence d'un minimiseur global soit sur l'intérieur $\overset{\circ}{C}$, soit sur la frontière ∂C . Le problème de l'unicité du minimiseur provient du caractère non-nécessairement convexe de l'ensemble C . De ce fait, même si J étant une fonction convexe sur \mathbb{R}^5 , on ne peut pas parler de la convexité dans C .

Le caractère non-linéaire du problème (\mathcal{P}) nous empêche de trouver une solution analytique. Nous ferons appel donc à des méthodes numériques afin d'approcher la solution du problème. Plus précisément, on utilisera un des algorithmes les plus connus de la programmation quadratique séquentielle, à savoir : l'algorithme *Sequential Least-Squares Quadratic Programming* (SLSQP).

Programmation Quadratique séquentielle Soit $N \geq 1$ un entier. On se donne d'une fonction coût $J : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ que l'on supposera de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^N et n'a aucune structure particulière. Soit $p, q \geq 0$, on définit l'ensemble de contraintes que l'on note K par :

$$K := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : (\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket), \varphi_i(x) = 0 ; \quad \psi_j(x) \leq 0 \right\}$$

tel que : $\varphi_i, \psi_j : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^N et n'ont aucune structure particulière.

On espère résoudre le problème d'optimisation non-linéaire suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad : \quad \min_{x \in K} J(x)$$

On suppose que J admet un minimum local u sur K . L'ensemble des contraintes d'inégalités actives en u est notée :

$$A(u) := \{j \in \llbracket 1, q \rrbracket : \psi_j(u) = 0\}$$

De plus, les contraintes sont supposées QUALIFIÉES au point u , i.e :

- Soit toutes les contraintes sont affines ;
- Soit il existe un vecteur w de \mathbb{R}^N tel que :
 - $(\nabla \varphi_1(u), \dots, \nabla \varphi_p(u))$ est libre et $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) : \langle \nabla \varphi_i(u), w \rangle = 0$
 - $\forall j \in A(u) : \quad \begin{cases} \text{soit } \langle \nabla \psi_j(u), w \rangle < 0 \\ \text{soit } \langle \nabla \psi_j(u), w \rangle = 0, \text{ et } \psi_j \text{ affine} \end{cases}$

Donc, sous les conditions de l'existence d'un minimum local de J en u , de la différentiabilité de J sur C (en particulier en u) et de la qualification des contraintes en u , le minimiseur u est obtenu par les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre de **Karush, Kuhn et Tucker (KKT)** :

$$\begin{aligned} \exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \in \mathbb{R}^p, \mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)^T \in \mathbb{R}^q \\ \nabla J(u) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla \varphi_i(u) + \sum_{j=1}^q \mu_j \nabla \psi_j(u) = 0 \\ \varphi_i(u) = 0, \quad (\forall 1 \leq i \leq p) \\ \mu_j \geq 0, \quad \psi_j(u) \leq 0, \text{ et } \mu_j \psi_j(u) = 0, \quad (\forall 1 \leq j \leq q) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

La PROGRAMMATION QUADRATIQUE SÉQUENTIELLE (PQS) est l'une des méthodes de résolution numériques des problèmes d'optimisation non linéaires avec contraintes, tel que le problème (\mathcal{P}) . Il s'agit des méthodes les plus connues et les plus efficaces de l'optimisation numérique. Son introduction est due à Wilson dans sa thèse en 1963.

Dans un cadre général, une approximation de la solution est souvent obtenue à l'aide d'un algorithme itératif caractérisé par une valeur d'initialisation $u^{(0)} \in \mathbb{R}^N$ et d'une application vectorielle $\mathbb{A} : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$, qui génère une suite de vecteurs $(u^{(n)})_{n \geq 1}$ par la construction suivante :

$$(\forall n \geq 1) : \quad u^{(n+1)} = \mathbb{A}(u^{(n)})$$

et on espère avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^{(n)} = u$$

L'efficacité de ce type d'algorithmes est mesuré par leurs vitesses de convergence et par leurs complexités calculatoires. Il existe en général plusieurs types de la vitesse de convergence.

On dit que la vitesse de convergence de $(u^{(n)})_{n \geq 1}$ vers u est :

- LINÉAIRE, si :

$$(\exists (\beta, n_0) \in [0, 1[\times \mathbb{N}^*) \quad (\forall n \geq n_0) : \quad \|u^{(n+1)} - u\| \leq \beta \|u^{(n)} - u\|$$

- SUR-LINÉAIRE, si :

$$\left(\exists (\beta_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}, \text{ t.q. : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0 \right) \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N}^*) \quad (\forall n \geq n_0) : \quad \|u^{(n+1)} - u\| \leq \beta_n \|u^{(n)} - u\|$$

- D'ORDRE p , si :

$$(\exists (\beta, n_0) \in [0, 1[\times \mathbb{N}^*) \quad (\forall n \geq n_0) : \quad \|u^{(n+1)} - u\| \leq \beta \|u^{(n)} - u\|^p$$

- R -LINÉAIRE, si :

$$(\exists \beta \in [0, 1]) : \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\|u^{(n)} - u\|} \leq \sqrt[n]{\beta}$$

Les algorithmes itératifs les plus utilisés sont dits : ALGORITHMES DE DESCENTE, est sont définis par la construction suivante : pour une valeur initiale $u^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, la valeur de la suite des approximations est définie par :

$$(\forall n \geq 1) : \quad u^{(n+1)} := u^{(n)} + \rho^{(n)} d^{(n)}$$

tel que : $\rho^{(n)} > 0$ est appelée le *pas de la descente* et $d^{(n)}$ est la *direction de la descente*. Dans la pratiques, on choisit le pas et la direction afin que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$J(u^{(n+1)}) \leq J(u^{(n)})$$

Supposons que J et les fonctions définissant les contraintes sont de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^N . Le lagrangien associé au problème (\mathcal{P}) est noté, pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^T \in \mathbb{R}^p$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)^T \in \mathbb{R}_+^q$, par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) := J(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j \psi_j(x)$$

Il est à noter que c'est la direction de la descente qui distingue entre les algorithmes de descente. À titre d'exemple, les algorithmes de Gradient choisissent la valeur :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \quad d^{(n)} := -\nabla J(u^{(n)})$$

Afin de trouver les directions de descente, la méthode de la programmation quadratique séquentielle commence tout d'abord par approximer le lagrangien du problème par une fonction quadratique et les fonctions définissant les contraintes par des fonctions affines. Ceci est fait à chaque itération. On note $H(J)(u)$ la matrice Hessienne de J au point u :

$$H(J)(u) := \left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}(u) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

Or J est de classe \mathcal{C}^2 , La formule de Taylor-Young d'ordre 2 au point u , nous donne l'existence d'une fonction $\eta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant : $\eta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^N$:

$$J(u + h) = J(u) + \langle \nabla J(u), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H(J)(u)h, h \rangle + \|h\|^2 \eta(h)$$

Pour h de norme suffisamment petite, le terme de reste devient négligeable puisque η tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

À une itération n , supposons qu'on a calculé $(u^{(n)}, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)})$. On note, pour $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\tilde{L}^{(n)}(x) := \mathcal{L}(x, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)})$$

L'idée de la PQS est l'approximation de $\tilde{L}^{(n)}$, à chaque itération n , au voisinage de $u^{(n)}$ par la fonction quadratique :

$$\tilde{L}^{(n)}(u) \approx \tilde{L}^{(n)}(u^{(n)}) + \langle \nabla \tilde{L}^{(n)}(u^{(n)}), u - u^{(n)} \rangle + \frac{1}{2} \langle H(\tilde{L}^{(n)})(u^{(n)})(u - u^{(n)}), u - u^{(n)} \rangle$$

et les fonctions définissant les contraintes par des fonctions affines, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$\varphi_i(x) \approx \varphi_i(u^{(n)}) + \nabla \varphi_i(u^{(n)})(u - u^{(n)})$$

$$\psi_j(x) \approx \psi_j(u^{(n)}) + \nabla \psi_j(u^{(n)})(u - u^{(n)})$$

On note, pour $d \in \mathbb{R}^N$ et $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$B^{(n)} := H(\tilde{L}^{(n)})(u^{(n)}) = H(\mathcal{L})(u^{(n)}, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)})$$

$$\tilde{J}^{(n)}(d) := \langle \nabla J(u^{(n)}), d \rangle + \frac{1}{2} \langle B^{(n)} d, d \rangle$$

$$\tilde{\varphi}_i^{(n)}(d) := \varphi_i(u^{(n)}) + \langle \nabla \varphi_i(u^{(n)}), d \rangle$$

$$\tilde{\psi}_j^{(n)}(d) := \psi_j(u^{(n)}) + \langle \nabla \psi_j(u^{(n)}), d \rangle$$

$$\tilde{K}^{(n)} := \left\{ d \in \mathbb{R}^N : (\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket), \tilde{\varphi}_i^{(n)}(d) = 0 \ ; \ \tilde{\psi}_j^{(n)}(d) \leq 0 \right\}$$

Ensuite, pour trouver la direction de descente, on résout le problème d'optimisation convexe avec contraintes mixtes affines :

$$(\mathcal{P}_n) \quad : \quad \min_{d \in \tilde{K}^{(n)}} \tilde{J}^{(n)}(d)$$

De ce fait, à chaque itération n , le choix de la direction de descente $d^{(n)}$ se fait à travers la résolution d'un sous-problème d'optimisation d'une fonction quadratique avec contraintes affines noté (\mathcal{P}_n) . Il est à noter que (\mathcal{P}_n) est un problème de minimisation d'une approximation quadratique au voisinage de $u^{(n)}$ du Lagrangien du problème initial, dont la résolution se fait à travers la résolution du système donné par les conditions d'optimalité de **KKT**.

On remarque, donc, que la méthode **PQS** consiste à remplacer le problème initial par une séquence de sous-problèmes quadratiques faciles à résoudre, d'où sa nomination.

Maintenant, pour chaque itération n $\tilde{K}^{(n)}$ est un convexe fermé. Pour garantir l'unicité du minimum de $\tilde{J}^{(n)}$ il faut que $B^{(n)}$ soit définie positive. Puisque dans ce cas, $\tilde{J}^{(n)}$ sera une fonction α -convexe sur $\tilde{K}^{(n)}$, tel que $\alpha := \min(\text{sp}_{\mathbb{R}}(B^{(n)}))$ avec $\text{sp}_{\mathbb{R}}(B^{(n)})$ est le spectre réelle de la matrice $B^{(n)}$.

Un algorithme permettant de garantir cette propriété est celui de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) qui s'utilise souvent par les algorithmes *Quasi-Newtonniens*. Il consiste à approximer la Hessienne de $H(\tilde{L}^{(n)})$, à chaque itération n , par la formule d'actualisation suivante proposée par Powell :

$$B^{(n+1)} := B^{(n)} - \frac{1}{\langle \Delta_u^{(n)}, \Delta_y^{(n)} \rangle} \Delta_u^{(n)} (\Delta_u^{(n)})^T - \frac{1}{\langle B^{(n)} \Delta_u^{(n)}, \Delta_u^{(n)} \rangle} B^{(n)} \Delta_u^{(n)} (\Delta_u^{(n)})^T B^{(n)} \quad (4.3.5)$$

tel que :

$$\Delta_u^{(n)} := u^{(n+1)} - u^{(n)} \quad ; \quad \Delta_y^{(n)} := \theta^{(n)} \eta^{(n)} + (1 - \theta^{(n)}) B^{(n)} \Delta_u^{(n)}$$

$$\eta^{(n)} := \nabla \mathcal{L}(u^{(n+1)}, \lambda^{(n+1)}, \mu^{(n+1)}) - \nabla \mathcal{L}(u^{(n)}, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)})$$

et $\theta^{(n)} \in]0, 1]$ qui garantit :

$$\langle \Delta_u^{(n)}, \Delta_y^{(n)} \rangle \geq 0.2 \langle B^{(n)} \Delta_u^{(n)}, \Delta_u^{(n)} \rangle$$

Pour résoudre les problèmes (\mathcal{P}_n) , on distingue deux cas :

CAS 1 : Sans contraintes d'inégalités. Dans ce cas, les conditions d'optimalité de **KKT** sont :

$$\begin{aligned} \nabla J(u^{(n)}) + B^{(n)}d + \sum_{i=1}^p \lambda_i^{(n+1)} \nabla \varphi_i(u^{(n)}) &= 0 \\ \tilde{\varphi}_i^{(n)}(u) &= 0, \quad (\forall 1 \leq i \leq p) \end{aligned}$$

La solution de ce système est obtenue par la méthode de **NEWTON** par :

$$\begin{pmatrix} B^{(n)} & (\Gamma^{(n)})^T \\ (\Gamma^{(n)})^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ \lambda^{(n+1)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla J(u^{(n)}) \\ \varphi(u^{(n)}) \end{pmatrix}$$

tel que :

$$\Gamma^{(n)} := \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(u^{(n)}) \\ \vdots \\ \nabla \varphi_p(u^{(n)}) \end{pmatrix} \quad ; \quad \varphi(u^{(n)}) := \begin{pmatrix} \varphi_1(u^{(n)}) \\ \vdots \\ \varphi_p(u^{(n)}) \end{pmatrix}$$

Ce système est bien-définie, à condition que $B^{(n)}$ soit définie-positive. Ce qui est garanti par la formule d'actualisation de **BFGS**. (4.3.5)

CAS 2 : avec contraintes d'inégalités (mixtes) Dans ce cas, la solution est obtenue par la méthode des contraintes actives, *Active-set methode*. Notons :

$$\mathcal{W}^{(n)}(d) := \llbracket 1, p \rrbracket \cup \left\{ j \in \llbracket 1, q \rrbracket : \tilde{\psi}_j^{(n)}(d) = 0 \right\}$$

Cette méthode, consiste à résoudre le problème (\mathcal{P}_n) sous les contraintes actives (d'égalité) appartenant à $\mathcal{W}^{(n)}(d)$. Une fois la solution $d^{(n)}$ est obtenue, le pas $\rho^{(n)}$ est calculé de manière à vérifier :

$$J(u^{(n)} + \rho^{(n)}d^{(n)}) < J(u^{(n)})$$

Soit :

$$\rho^{(n)} := \min \left(1, \min_{j \notin \mathcal{W}^{(n)}, (a_j^{(n)})^T d^{(n)} < 0} \frac{b_j^{(n)} - (a_j^{(n)})^T u^{(n)}}{a_j^{(n)}{}^T d^{(n)}} \right)$$

tel que :

$$\mathcal{W}^{(n)} := \mathcal{W}^{(n)}(d^{(n)}); \quad ; \quad a_j^{(n)} := \begin{cases} \nabla \varphi_j(u^{(n)}) & \text{si : } j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ \nabla \psi_j(u^{(n)}) & \text{si : } j \in \mathcal{W}^{(n)} / \llbracket 1, p \rrbracket \end{cases}$$

et :

$$b_j^{(n)} := \begin{cases} \varphi_j(u^{(n)}) & \text{si : } j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ \psi_j(u^{(n)}) & \text{si : } j \in \mathcal{W}^{(n)} / \llbracket 1, p \rrbracket \end{cases}$$

Remarquer bien que : $\rho^{(n)} \in [0, 1]$

Maintenant, nous possédons les ingrédients théoriques nécessaires pour résoudre notre problème de calibration. On présentera par la suite les résultats numériques.

Applications numériques

Les données de la variance implicite totale utilisées dans la calibration sont issues des prix de Calls souscrits sur l'action AAPL pour différentes maturités. Le tableau 4.1 montre un aperçu des données utilisées.

$C(K)$	K	σ_{BS}
18.70	121.0	1.5029
19.25	122.0	1.3818
21.10	123.0	1.4053
16.10	124.0	1.2031
18.50	125.0	1.1484
14.00	126.0	1.1758
14.80	127.0	1.1182
15.90	128.0	1.0059
15.05	129.0	1.0039
13.70	130.0	0.8955

TABLE 4.1 – Prix de Calls écrits sur l'action AAPL pour différents Strikes, de maturité $T = 0.002$

Le taux sans risque est obtenu en exploitant la relation de parité Call-Put, pour une maturité donnée. En effet, on effectue la régression linéaire :

$$C(K) - P(K) = \alpha + \beta K + \varepsilon$$

tel que, ε est le terme d'erreur.

L'estimation de la pente est relié à l'estimation de r , par :

$$\hat{r} := -\frac{-\ln(-\hat{\beta})}{T}$$

Nous avons exploité les données associées à la première maturité et avons trouvé une valeur de r égale à :

$$\hat{r} = 0.0208$$

La calibration de chaque portion de la surface de variance implicite totale est faite pour chaque maturité. La figure 4.9 montre les résultats trouvés pour quelques maturités. Les approximations des paramètres se trouvent dans l'Appendice C.1. Il est à noter que l'absence de Butterfly spread est déjà imposé sur la portion de la surface calibrée à travers les contraintes. La figure 4.10 montre que l'absence de ce type d'arbitrage est bien vérifiée par la positivité de la fonction g .

Toutefois, la surface de variance implicite totale calibrée ne vérifie pas l'absence de Calendar Spread, comme le montre la figure 4.11. En effet, les courbes de $x \mapsto w(x, \chi_R)$ pour différentes maturités ont des points d'intersections.

La présence du Calendar Spread est attribuée en premier lieu à la méthode de calibration utilisée. En effet, nous n'avons pas pris en compte la condition d'absence de ce type d'arbitrage dans le programme d'optimisation. De plus, les algorithmes itératifs sont sensibles aux valeurs d'initialisation.

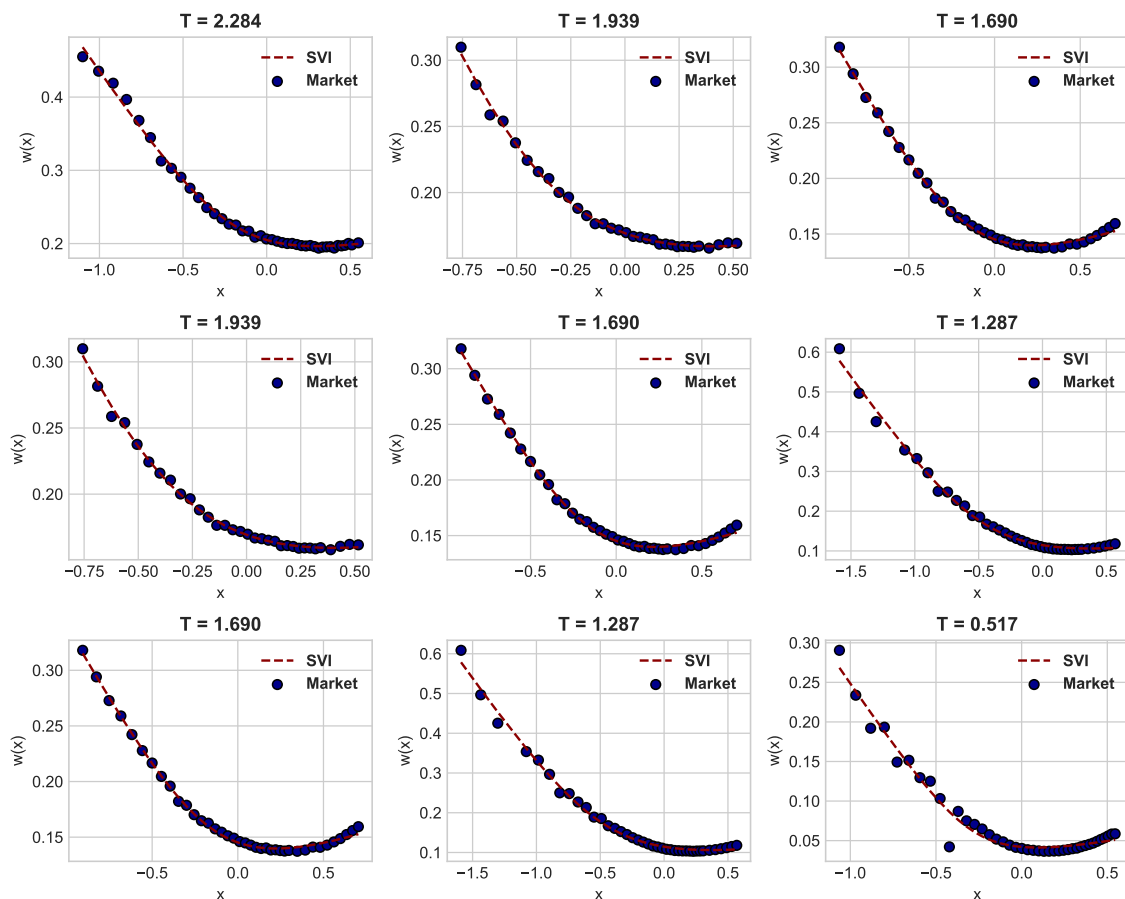


FIGURE 4.9 – Résultats de la calibration du modèle SVI aux données du marché (Calibration des portions de la surfaces pour différentes maturités indépendemmet). Source : **Auteur**.

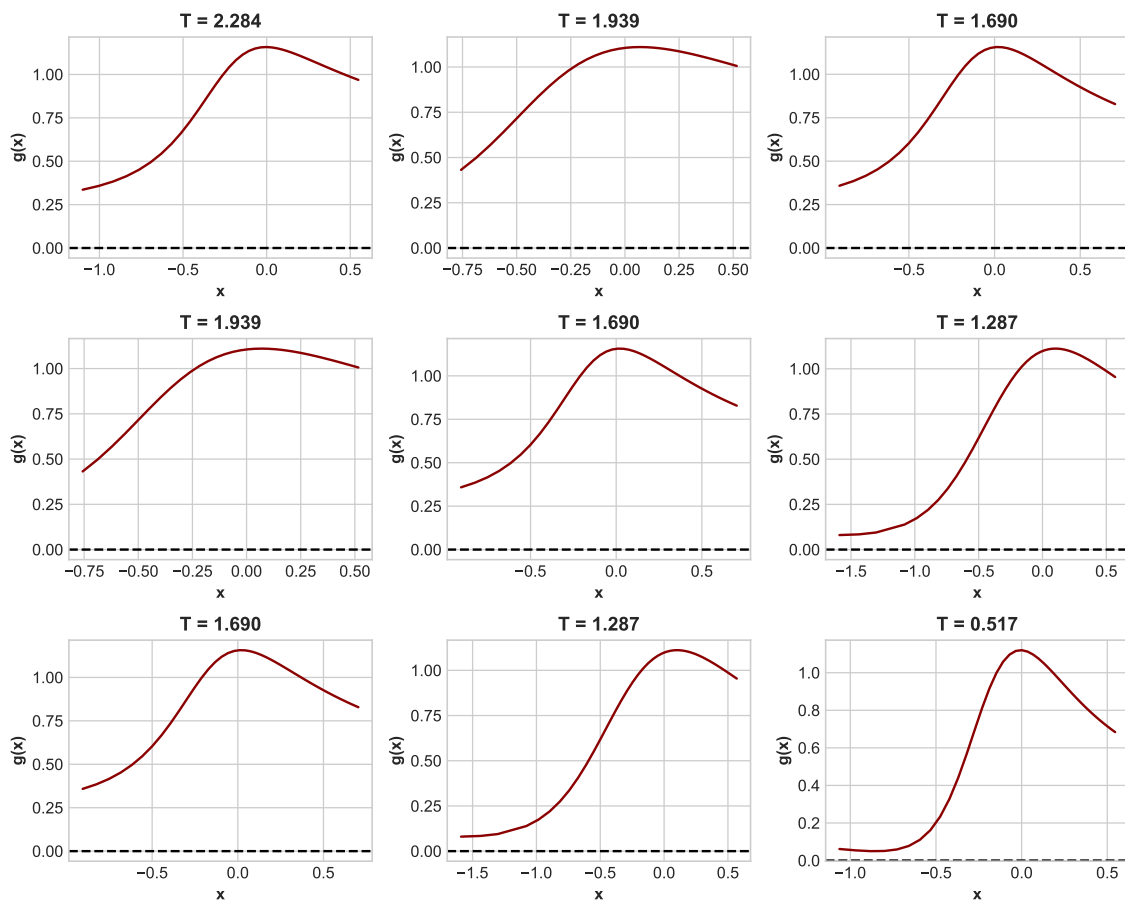


FIGURE 4.10 – Test graphique de l’absence de Butterfly Spread pour différentes maturités. Source : **Auteur.**

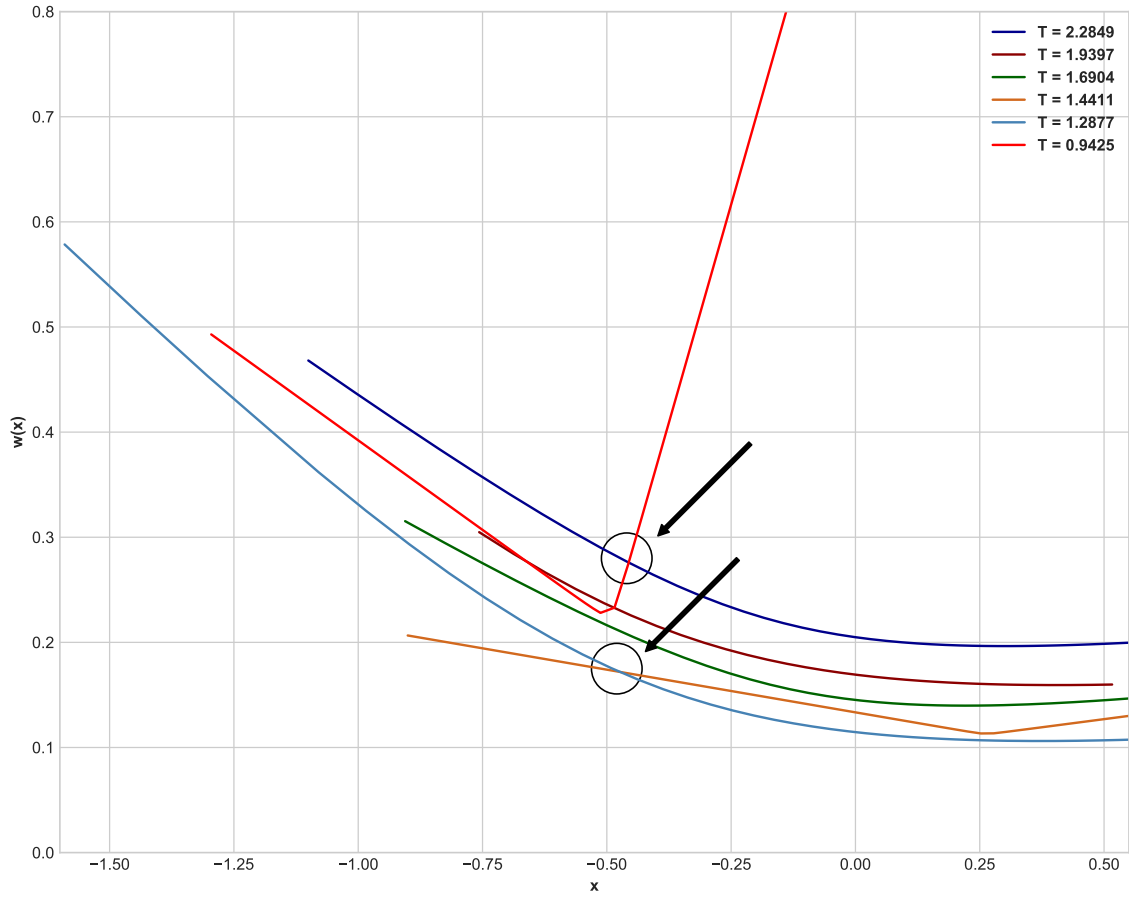


FIGURE 4.11 – Test graphique de la présence du Calendar Spread pour différentes maturités. Source : **Auteur.**

Calibration Multi-Slices Pour résoudre ce problème, il suffit, d’un point de vue théorique, d’ajouter à chaque calibration d’une portion de la surface de volatilité implicite totale, la contrainte de la croissance de la variance totale par rapport à la variable maturité. En effet, supposons que nous avons $p + 1$ maturités ordonnées :

$$T_0 < T_1 < \dots < T_p$$

il suffit d’ajouter les contraintes suivantes :

$$(\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket) (\forall x \in \Pi) : w(x, T_j) > w(x, T_{j-1})$$

tel que : $\Pi := (x_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une grille de log-moneyness à choisir.

Dans la pratique, on fixe une constante $\alpha > 0$ et imposer :

$$(\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket) (\forall x \in \Pi) : w(x, T_j) > w(x, T_{j-1}) + \alpha$$

Dans notre cas, nous avons fixé : $\alpha = 0.05$.

La figure 4.12 montre les résultats que nous avons obtenu en utilisant cette méthode. On remarque que les graphiques $x : \mapsto w(x, T_i)$ n’ont pas de points d’intersection en commun, à l’exception d’une portion de la surface qui possède 2 points d’intersection avec deux autres portions. De ce fait, on peut affirmer quant à l’absence approximative du Calendar Spread.

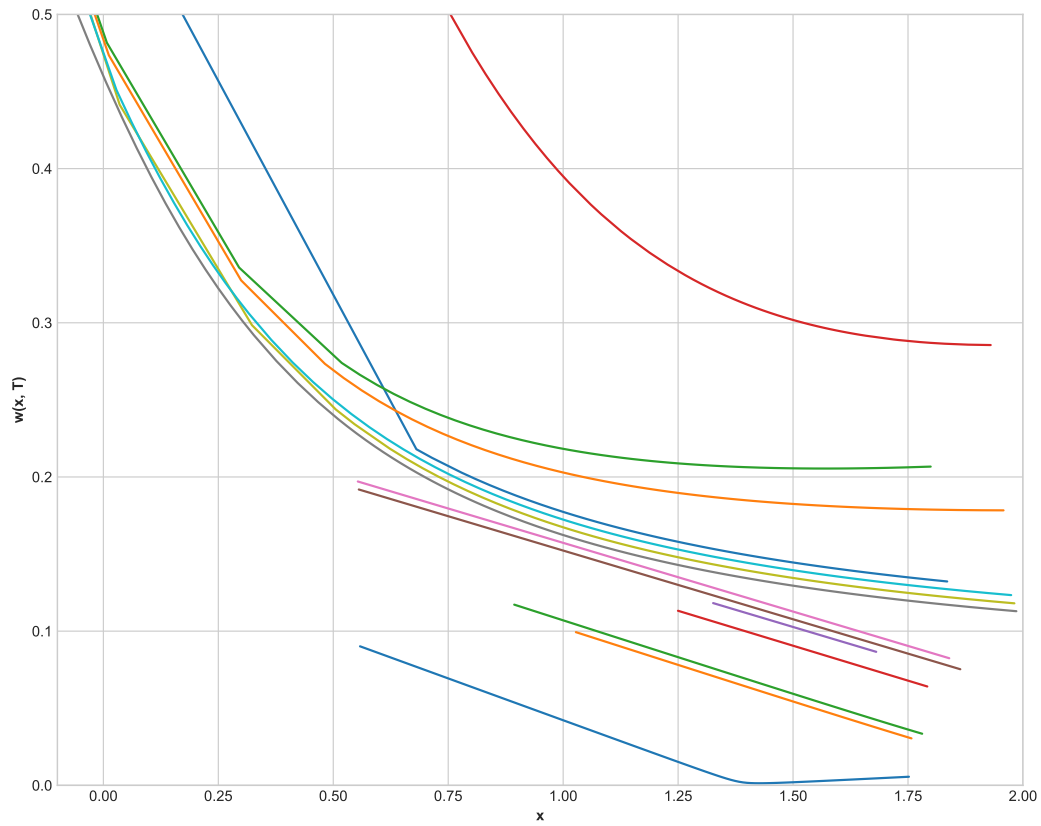


FIGURE 4.12 – Test graphique de l'absence du Calendar Spread pour différentes maturités (Calibration Multi-Slices). Source : **Auteur**.

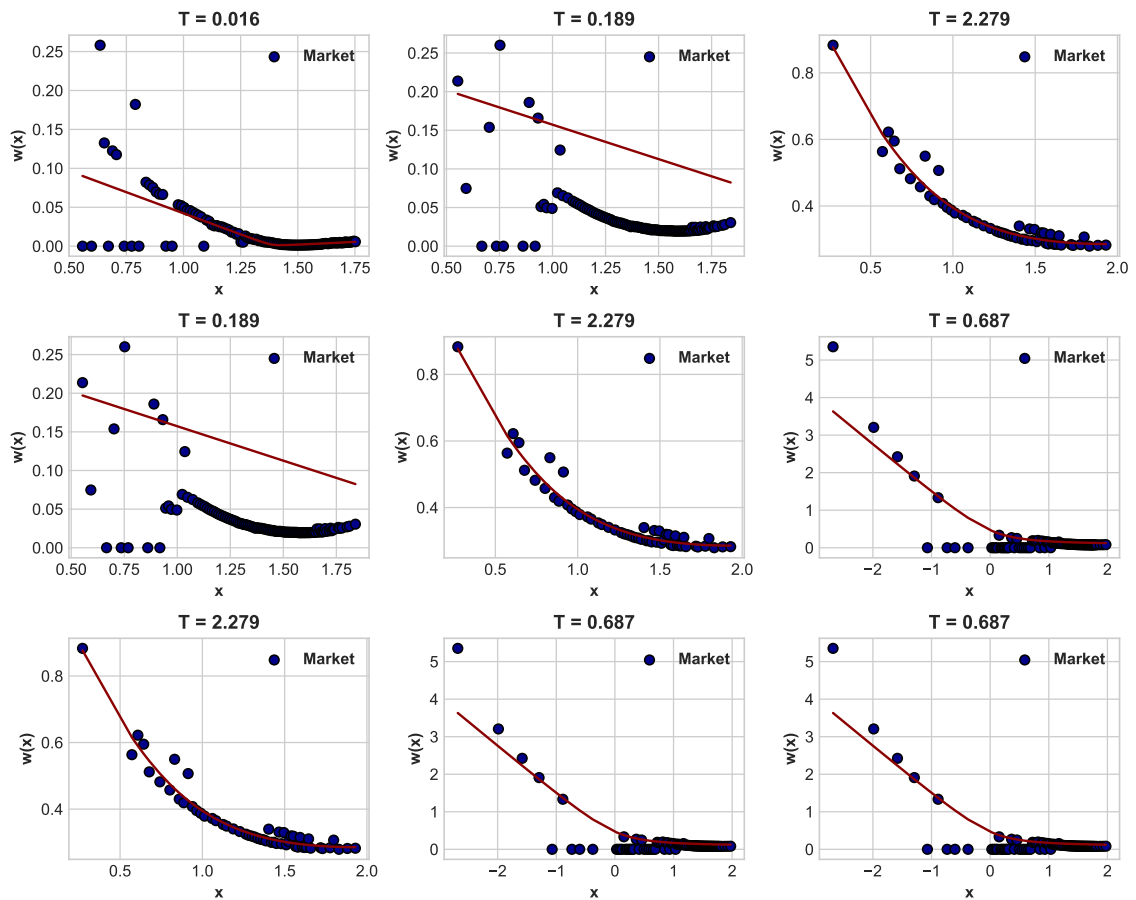


FIGURE 4.13 – Résultats de la calibration du modèle SVI aux données du marché (Calibration Multi-Slices). Source : **Auteur**.

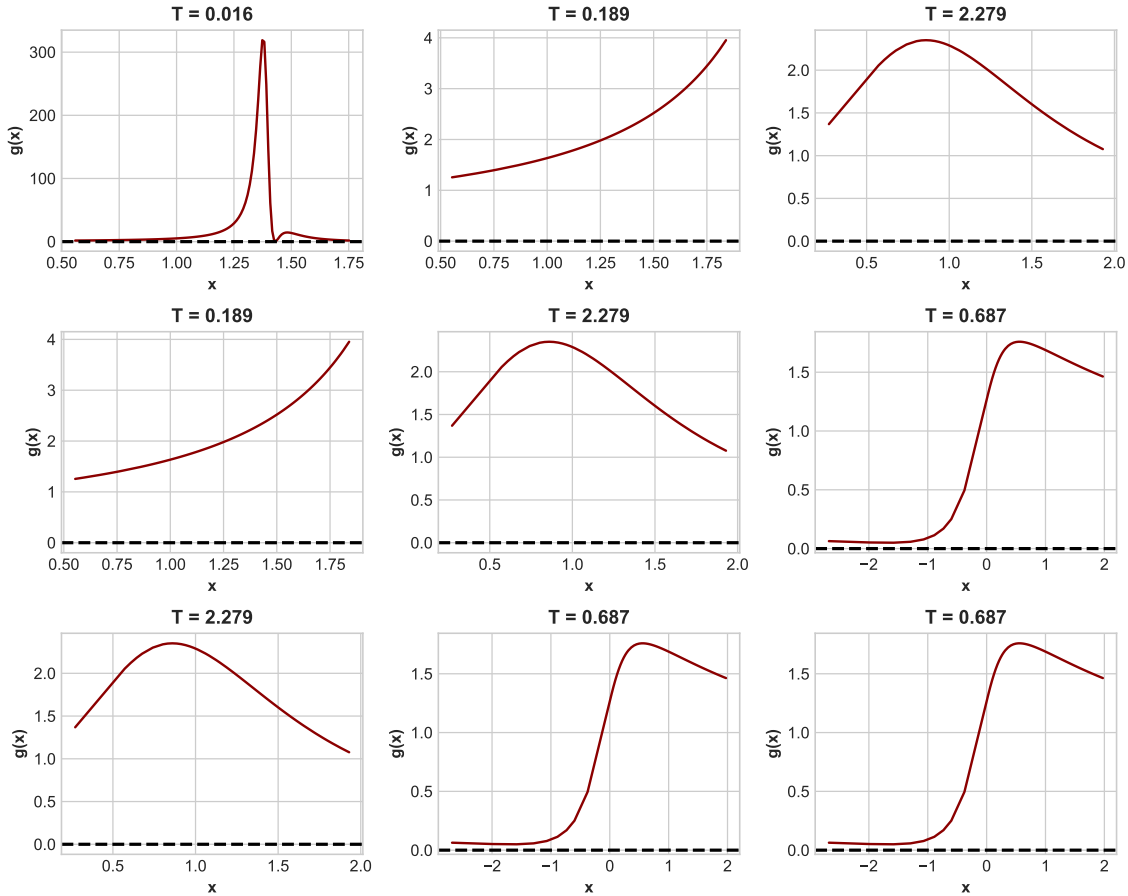


FIGURE 4.14 – Test graphique de l’absence de Butterfly Spread pour différentes maturités (Calibration Multi-Slices). Source : **Auteur**.

Les figures 4.13 et 4.14 montrent les résultats de la calibration pour quelques maturités ainsi que les graphiques de la fonction g pour ces mêmes maturités. On constate que la qualité d’ajustement du modèle aux données du marché a diminué par rapport à la méthode de calibration précédente. Par ailleurs, la condition d’absence du Butterfly Spread est vérifiée. Les résultats des approximations des paramètres se trouvent dans l’Appendice C.2

Il est à noter que la calibration des autres paramétrisations SVI de la variance implicite totale (JUMP-WINGS, SURFACE SVI) proposent de simples conditions sur les paramètres afin de garantir à la fois l’absence d’arbitrage du type Calendar Spread et Butterfly Spread. Sur ce, elles proposent une solution au problème rencontré. C’est pour cela que, la calibration d’un de ces modèles est préférable à celle du modèle RAW SVI.

Maintenant que nous possédons les valeurs numériques des paramètres, la surface de la volatilité locale peut être obtenue par la formule (4.2.2). En exprimant les dérivées partielles de $K : \mapsto w(K(x), T)$ en fonction de celles de $x : \mapsto w(x, T)$, on obtient :

$$\sigma_{\text{loc}}^2(x, T) = \frac{\frac{\partial w}{\partial T}(x, T) + r \frac{\partial w}{\partial x}(x, T)}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{x}{w(x, T)} \frac{\partial w}{\partial x}(x, T)\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, T) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, T)\right)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w(x, T)}\right)} \quad (4.3.6)$$

Il faut bien remarquer que les paramètres du modèle SVI, pour une maturité T , en dépendent. De ce fait, la dérivée partielle $\frac{\partial w}{\partial T}$ n’a pas d’expression explicite. Donc, on l’approxime par une fraction de différence finie pareille à celle présentée dans 4.2.1. On effectue finalement une interpolation de la volatilité locale qui préserve l’absence d’arbitrage statique.

Conclusion

Nous avons essayé à travers ce rapport de stage d'application de présenter les modèles à volatilité locale et leur caractéristique ainsi que la paramétrisation SVI.

Dans les deux premiers chapitres, nous avons passé sur les idées principales de la Finance mathématique en temps discret et en temps continu. Nous avons étudié le modèle de Black-Scholes-Merton généralisé afin d'en déduire les propriétés de sa version classique souvent utilisée.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté les modèles à volatilités locale. En effet, nous avons commencé par quelques résultats empiriques montrant les insuffisances du modèle de Black-Scholes classique dans lequel la volatilité implicite est supposée constante. Ensuite, nous avons démontré que chaque processus à volatilité stochastique admet une projection markovienne, pour laquelle la volatilité est une fonction déterministe du temps et du prix du sous-jacent. Nous avons par la suite, présenté l'équation de B. Dupire qui permet d'approximer cette fonction, ainsi que les instabilités numérique qui résulte du caractère mal posé de ce problème. Ce qui se traduit par l'existence d'opportunités d'arbitrage.

Par ailleurs, nous avons présenté la paramétrisation SVI de la variance implicite totale introduite par J. Gatheral. Nous avons notamment présenté les propriétés de cette paramétrisation ainsi que sa consistance avec les propriétés théoriques de la volatilité implicite. Cette paramétrisation est une des solutions les plus efficaces aux problème d'existence d'opportunités d'arbitrage. En effet, elle présente des conditions sur les paramètres afin de garantir l'absence d'arbitrage de type Calendar Spread et de Butterfly Spread. Nous avons illustré, à travers des applications numériques, la difficulté de la prise en compte de l'absence du Calendar Spread dans la calibration d'une des versions de cette paramétrisation, à savoir : le modèle RAW SVI.

Finalement, une des solutions possible qui permet de manier aux instabilités numériques de l'équation de Dupire est le recours aux réseaux de neurones profonds. Ces derniers sont souvent utilisés dans la résolution des problèmes inverses mal posés et proposent des résultats satisfaisantes.

Appendice A

A.1 Démonstration 1

Sachant que :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad S_n^0 > 0$$

On a :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad \frac{1}{S_n^0} \langle \varphi_{n+1}, S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \langle \varphi_{n+1}, \frac{1}{S_n^0} S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \frac{1}{S_n^0} \langle \varphi_n, S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \langle \varphi_n, \frac{1}{S_n^0} S_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

Ainsi :

$$(\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad \langle \varphi_{n+1}, \tilde{S}_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}} = \langle \varphi_n, \tilde{S}_n \rangle_{\mathbb{R}^{d+1}}$$

A.2 Démonstration 2

Supposons que φ soit autofinancée. Donc, en utilisant la proposition précédente et le fait que $\tilde{S}_0^0 = 1$, on a pour $n \in \llbracket 1, T \rrbracket$:

$$\begin{aligned} V_0^\varphi + \tilde{G}_n^\varphi &= \langle \varphi_1, S_0 \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \Delta \tilde{S}_j \rangle \\ &= \langle \varphi_1, \tilde{S}_0 \rangle + \langle \varphi_n, \tilde{S}_n \rangle - \langle \varphi_1, \tilde{S}_0 \rangle + \sum_{j=1}^n \langle \varphi_{j+1} - \varphi_j, \tilde{S}_j \rangle \\ &= \langle \varphi_n, \tilde{S}_n \rangle \\ &= \tilde{V}_n^\varphi \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que la dernière relation soit satisfaisante. Le résultat peut être obtenue par récurrence sur n .

A.3 Démonstration 3

Soit $n \in \llbracket 1, T \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{S_n}{S_{n-1}} - 1 \\ &= \frac{S_n^0 \tilde{S}_n}{S_{n-1}^0 \tilde{S}_{n-1}} - 1 \\ &= \frac{(1+r) \tilde{S}_n}{\tilde{S}_{n-1}} - 1 \end{aligned}$$

Il existe une probabilité risque neutre si et seulement si \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P} et $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq T}$ sont des (\mathcal{F}_n) -martingales sous \mathbb{Q} . Donc si et seulement si :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n \quad \text{et} \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \\ \iff (\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(R_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \end{aligned}$$

Or $(R_n)_{1 \leq n \leq T}$ sont indépendantes, alors pour tout $n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket$, R_{n+1} est indépendante de \mathcal{F}_n . De ce fait, la dernière proposition est équivalente à :

$$\begin{aligned} (\forall n \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket) : \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(R_{n+1}) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \\ \iff & u\tilde{\mathbb{Q}}(\{u\}) + d(1 - \tilde{\mathbb{Q}}(\{u\})) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \\ \iff & r \in [d, u] \quad \text{et} \quad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \\ \iff & r \in]d, u[\end{aligned}$$

La dernière équivalence est due au fait que \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P} qui associe à chaque évènement une probabilité non nulle.

Pour l'unicité, on voit bien que la deuxième équivalence contient une équation d'inconnue $\tilde{\mathbb{Q}}(\{u\})$ et qui, sous la dernière condition, admet une unique solution :

$$\tilde{\mathbb{Q}}(\{u\}) = \frac{r - d}{u - d}$$

L'existence et l'unicité de \mathbb{Q} découle de celles de $\tilde{\mathbb{Q}}$.

□

A.4 Démonstration 4

On a, pour $n \in \llbracket 0, T \rrbracket$:

$$\frac{\psi(n, x)}{(1+r)^{-(T-n)}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(x \prod_{j=n+1}^T (1+R_j) - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_n \right)$$

Par l'indépendance de $(R_j)_{n+1 \leq j \leq T}$ de \mathcal{F}_n , on obtient :

$$\frac{\psi(n, x)}{(1+r)^{-(T-n)}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(x \prod_{j=n+1}^T (1+R_j) - K \right)^+ \right)$$

En conditionnant sur $\sigma(R_k : k \in \llbracket n+2, T \rrbracket)$, on obtient :

$$\frac{\psi(n, x)}{(1+r)^{-(T-n)}} = p \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(x(1+u) \prod_{j=n+2}^T (1+R_j) - K \right)^+ \right) + (1-p) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(x(1+d) \prod_{j=n+2}^T (1+R_j) - K \right)^+ \right)$$

Or :

$$\frac{\psi(n+1, x(1+u))}{(1+r)^{-(T-n-1)}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(x(1+u) \prod_{j=n+2}^T (1+R_j) - K \right)^+ \right)$$

et :

$$\frac{\psi(n+1, x(1+d))}{(1+r)^{-(T-n-1)}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\left(x(1+d) \prod_{j=n+2}^T (1+R_j) - K \right)^+ \right)$$

La formule est établie.

□

Appendice B

Volatilité locale en termes de volatilité implicite

Rappelons que nous avons déjà établi les formules suivantes :

$$\frac{\partial C}{\partial T}(T, K) = -r \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(x, w) + \frac{\partial w}{\partial T}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(x, w)$$

$$\frac{\partial C}{\partial K}(T, K) = \frac{1}{K} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(x, w) + \frac{\partial w}{\partial K}(T, K) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w}(x, w)$$

Pour alléger l'écriture, on n'écrira pas les variables des fonctions.

On a :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\tilde{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} + \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\tilde{C}}{\partial w} \right)$$

Maintenant, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\tilde{C}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial x}{\partial K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w \partial x} \\ &= \frac{1}{K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w \partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{\tilde{C}}{\partial w} \right) &= \frac{\partial x}{\partial K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial w} + \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w^2} \\ &= \frac{1}{K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial w} + \frac{\partial w}{\partial K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w^2} \end{aligned}$$

Or \tilde{C} est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, alors le théorème de Schwartz affirme que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial w} = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w \partial x}$$

De ce fait, on obtient :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) + \frac{2}{K} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial w} \frac{\partial w}{\partial K} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} + \frac{\partial \tilde{C}^2}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 \quad (\text{B.0.1})$$

Rappelons que :

$$\tilde{C}(x, w) = S_{t_0} \Phi(\tilde{d}_1(x, w)) - S_{t_0} e^x \Phi(\tilde{d}_2(x, w))$$

Tel que :

$$\tilde{d}_1(x, w) = -\frac{x}{\sqrt{w}} + \frac{1}{2}\sqrt{w} ; \quad \tilde{d}_2(x, w) = \tilde{d}_1(x, w) - \sqrt{w}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial x}(x, w) &= -\frac{1}{\sqrt{w}} \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial x}(x, w) = -\frac{1}{\sqrt{w}} \\ \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial w}(x, w) &= \frac{1}{2} \frac{x}{w\sqrt{w}} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{w}} \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial w}(x, w) = \frac{1}{2} \frac{x}{w\sqrt{w}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{w}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} &= -S_{t_0} e^x \Phi'(\tilde{d}_2) \quad ; \quad \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} = \frac{1}{2} S_{t_0} e^x \Phi'(\tilde{d}_2) \frac{1}{\sqrt{w}} \\ \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial w} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} \left(-\frac{x}{w} + \frac{1}{2} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w^2} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} \left(\frac{x^2}{2w^2} - \frac{1}{2w} - \frac{1}{8} \right) \end{aligned}$$

En injectant ces formules obtenues en (B.0.1), on obtient :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = 2K^2 \frac{\partial \tilde{C}}{\partial w} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{Kx}{w} \frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial w}{\partial K} + K \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \right) - \frac{1}{4} K^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w} \right) \right]$$

Maintenant il suffit de remplacer ces dérivées obtenues dans l'équation de Dupire pour obtenir :

$$\sigma_{\text{loc}}^2 = \frac{\frac{\partial w}{\partial T} + rK \frac{\partial w}{\partial K}}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{Kx}{w} \frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial w}{\partial K} + K \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} \right) - \frac{1}{4} K^2 \left(\frac{\partial w}{\partial K} \right)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{w} \right)}$$

Pour obtenir la formule en terme de volatilité implicite, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial K} &= 2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial K} T \\ \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} &= 2\sigma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2} T + 2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial K} \right)^2 T \\ \frac{\partial w}{\partial T} &= \sigma^2 + 2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial T} T \end{aligned}$$

et remplacer ces formules dans l'équation précédente (celle en termes de variance implicite totale).

□

Appendice C

C.1 Résultats numériques des paramètres SVI : calibration slice par slice

$\chi_R \backslash T$	0.013699	0.032877	0.052055	0.071233	0.090411	0.109589	0.186301	0.282192
a	0.00001	0.000010	0.000010	0.002572	0.000010	0.000010	0.009602	0.000010
b	1.00000	0.028805	0.945562	0.029948	0.032740	0.198769	0.079805	0.630402
ρ	0.99999	0.345582	0.957909	0.607424	0.546348	-0.819454	-0.460826	-0.999990
m	3.50431	2.055399	1.787262	2.510878	2.652386	1.167484	1.467859	0.143433
σ	0.01000	0.010905	0.028430	0.018769	0.031224	0.079765	0.134537	0.471144

$\chi_R \backslash T$	0.435616	0.684932	0.934247	1.279452	1.432877	2.276712
a	0.024474	0.000010	0.013826	0.120693	0.053385	0.000010
b	0.010000	0.627863	0.033096	0.018142	0.026128	0.772480
ρ	-0.664846	-0.936723	0.284372	-0.602150	0.961130	-0.869912
m	3.963007	0.176611	-1.105933	3.915752	-1.913163	0.624146
σ	0.992063	0.371168	0.010000	0.155828	0.012378	0.748545

TABLE C.1 – Résultats numériques des paramètres SVI en utilisant une calibration slice par slice

C.2 Résultats numériques des paramètres SVI : calibration multi-slices

$\chi_R \backslash T$	0.013699	0.032877	0.052055	0.071233	0.090411	0.109589	0.186301	0.282192
a	0.00001	0.000010	0.000010	0.000010	0.000010	0.015973	0.027175	0.000010
b	1.00000	0.999414	0.999212	1.000000	1.000000	0.851058	0.782763	0.736302
ρ	0.99999	0.981254	0.960021	0.971924	0.973276	0.969707	0.967783	-0.721152
m	3.50431	2.055399	1.787262	2.499538	2.652386	2.579633	2.538455	0.138395
σ	0.01000	0.010000	0.027507	0.736977	0.815091	0.850316	0.867014	0.447545

$\chi_R \backslash T$	0.435616	0.684932	0.934247	1.279452	1.432877	2.276712
a	0.005010	0.008137	0.013137	0.018137	0.023137	0.135931
b	0.736302	0.740690	0.740690	0.740690	0.740690	0.636224
ρ	-0.721152	-0.722212	-0.722212	-0.722212	-0.722212	-0.590115
m	0.138395	0.135489	0.135489	0.135489	0.135489	0.949796
σ	0.447545	0.449597	0.449597	0.449597	0.449597	0.406395

TABLE C.2 – Résultats numériques des paramètres SVI en utilisant une calibration slice par slice

Bibliographie

- [1] Vinicius V. L. Albani, Adriano De Cezaro, and Jorge Passamani Zubelli. Convex regularization of local volatility estimation in a discrete setting, 2013.
- [2] Paolo Baldi. *Stochastic Calculus : An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer International Publishing.
- [3] N.H. Bingham and R. Kiesel. *Risk-Neutral Valuation : Pricing and Hedging of Financial Derivatives*.
- [4] Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 12 2019.
- [5] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- [6] Stéphane Crépey. Calibration of the local volatility in a generalized black–scholes model using tikhonov regularization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 34, 01 2003.
- [7] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing (1994). *Mathematische Annalen*, 300 :463–520, 09 1994.
- [8] Darrell Duffie and Chi-Fu Huang. Implementing arrow-debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities. *Econometrica*, 53(6) :1337–1356, 1985.
- [9] Bruno Dupire. Pricing with a smile. *Risk Magazine*, pages 18–20, 1994.
- [10] Thomas G. Ethier, Stewart N.; Kurtz. *Markov processes. Characterization and convergence*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [11] Jim Gatheral and Antoine Jacquier. Convergence of heston to svi, 2010.
- [12] Jim Gatheral and Antoine Jacquier. Arbitrage-free svi volatility surfaces. *Econometrics : Applied Econometric Modeling in Financial Economics - Econometrics of Financial Markets eJournal*, 2012.
- [13] I. Gyöngy. Mimicking the one-dimensional marginal distributions of processes having an ito differential. *Probability Theory and Related Fields*, 1986.
- [14] J. Hadamard. Lectures on the cauchy problem in linear partial differential equations. *Yale University Press, New Haven*, 1923.
- [15] Steven E. Karatzas, Ioannis; Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Graduate Texts in Mathematics, 113. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [16] Roger Lee. The moment formula for implied volatility at extreme strikes. *Derivatives eJournal*, 2004.
- [17] M. Chesney M. Jeanblanc, M. Yor. *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer International Publishing, year.
- [18] Gilles Pagès. *Numerical Probability : An Introduction with Applications to Finance*.
- [19] William T. Shaw. *Modelling Financial Derivatives with Mathematica*.