Examen – Théorie des graphes[1]

Session 1, vendredi 13 janvier 2023

Documents autorisés : 1 page A4 recto-verso manuscrite

Durée : 1h30

▷ **Exercice 1.** (3 points) On considère le flot dans le réseau de la figure 1.

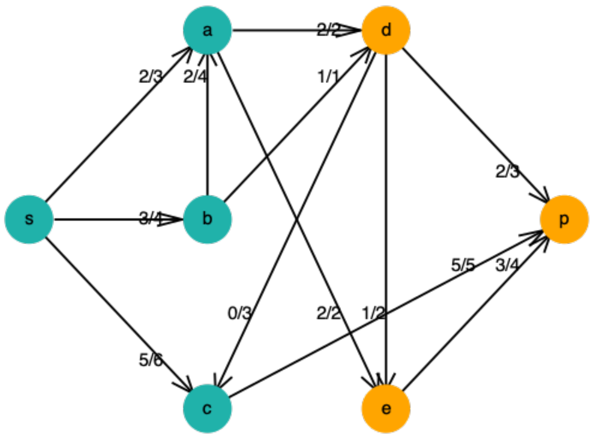

FIGURE 1 – *Flot dans le réseau ; l'étiquetage d'un arc a est $f(a)/c(a)$ = valeur du flot sur l'arc/valeur de la capacité sur l'arc.*

1.1. On considère la coupe $X = \{s, a, b, c\}$ et $\bar{X} = \{d, e, p\}$. Quelle est la capacité de cette coupe ?

1.2. Quelle est la valeur de ce flot ?

1.3. Le flot est-il maximum (on justifiera la réponse) ?

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère la matrice suivante qui représente la matrice d'adjacences

1. Un corrigé sera mis sous Moodle dans la journée

d'un graphe non orienté G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1. Représentez graphiquement ce graphe.

2.2. À quoi correnspondent les nombres dans M^k ?

▷ **Exercice 3.** (5 points) Soit G un graphe simple ayant n sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. On suppose qu'un sommet isolé est un arbre trivial.

3.1. Démontrez que G n'est pas connexe.

3.2. Démontrez que G possède une composante connexe qui est un arbre.

3.3. Démontrer que G possède une composante connexe qui n'est pas un arbre.

3.4. Démontrer que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

▷ **Exercice 4.** (4 points) Une grille (carrée) de **sudoku** est composée de 9 sous-grilles carrées de 9 cases chacune. Le jeu consiste, à partir d'une grille partiellement remplie avec des chiffres de 1 à 9, à la compléter de sorte que chaque rangée (ligne et colonne) et chaque sous-grille contiennent exactement une fois chacun des 9 chiffres. On s'intéresse ici à la construction d'une telle grille.

4.1. Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe.

4.2. Quel est de degré de chaque sommet du graphe.

4.3. Une telle grille existe. À quelle quantité correspond le nombre 9 de chiffres dans la théorie des graphes.

▷ **Exercice 5.** (5 points) Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence sur le nombre d'arêtes le

Théorème 1 (Première partie du théorème de Mantel)**.** *Si G est un graphe à n sommets sans triangle (c'est-à-dire sans clique d'ordre 3), alors il a au plus $n^2/4$ arêtes.*

5.1. Soit G est un graphe à n sommets sans triangle et $m \geq 1$ arêtes. Soit $\{u, v\}$ une arête dans ce graphe G. Montrez que $\delta(u) + \delta(v) \leq n$.

5.2. Démonter par récurrence **sur le nombre d'arêtes** le théorème.