

Méthodes itératives

2020–2021

On cherche une suite $x^{(p)}$ de \mathbb{R}^n convergeant vers la solution de $A \cdot x^* = b$

$$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad x^{(p+1)} = H(x^{(p)})$$

- ▶ La matrice A n'est jamais modifiée
- ▶ Problème du suivi de la convergence et du choix du test d'arrêt
- ▶ La solution obtenue n'est pas exacte
- ▶ La matrice doit vérifier des conditions de convergence
- ▶ La vitesse de convergence dépend de la valeur des coefficients de la matrice

Familles de méthodes

Algorithmes itératifs de relaxation

Algorithmes associés à une décomposition de A sous la forme $M - N$:
Gauss-Seidel, Jacobi, SOR

Méthodes de gradient

Plus grande pente, directions conjuguées, gradient conjugué

Première partie I

Méthodes itératives de relaxation

Soit la décomposition de $A = D - E - F$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme itératif de relaxation associé à une décomposition de A sous une forme $M - N$

Soit $A = M - N$ avec M inversible

$$\begin{aligned}A \cdot x^* = b &\iff (M - N) \cdot x^* = b \\&\iff M \cdot x^* = N \cdot x^* + b \\&\iff x^* = M^{-1} \cdot N \cdot x^* + M^{-1} \cdot b\end{aligned}$$

Algorithme itératif de relaxation associé :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(p+1)} = M^{-1} \cdot N \cdot x^{(p)} + M^{-1} \cdot b \\ \quad = M^{-1} \cdot (M - A) \cdot x^{(p)} + M^{-1} \cdot b \\ \quad = x^{(p)} + M^{-1} \cdot r^{(p)} \end{cases}$$

avec $r^{(p)} = b - A \cdot x^{(p)}$ le vecteur résidu

Coût d'une itération (en dehors du calcul du résidu) : résolution d'un système de matrice M

Deux variantes

Algorithme de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$

L'itération p consiste à résoudre l'équation :

$$(D - E) \cdot x^{(p+1)} - F \cdot x^{(p)} = b$$

C.N. d'application : $(D - E)$ inversible $\iff i = 1, \dots, n \ a_{ii} \neq 0$

Algorithme de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$

L'itération p consiste à résoudre l'équation :

$$D \cdot x^{(p+1)} - (E + F) \cdot x^{(p)} = b$$

C.N. d'application : D inversible $i = 1, \dots, n \ a_{ii} \neq 0$

Condition d'arrêt

Mise en œuvre du test d'arrêt (à la fin de chaque itération) Choix d'une norme vectorielle $\|\cdot\|$, d'une précision ε puis d'un test d'arrêt :

- ▶ $\|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| < \varepsilon$: simple mais numériquement dangereux (risque d'arrêt prématuré loin de la solution).
- ▶ $\|A \cdot x^{(p+1)} - b\| / \|b\| < \varepsilon$: numériquement plus sûr.

La mise en œuvre de ce test d'arrêt n'entraîne pas de calculs supplémentaires

Pour Gauss-Seidel : $x^{(p+1)} = (D - E)^{-1} \cdot [b - A \cdot x^{(p)}] + x^{(p)}$

Pour Jacobi : $x^{(p+1)} = D^{-1} \cdot [b - A \cdot x^{(p)}] + x^{(p)}$

Convergence d'un algorithme issu d'une décomposition de $A = M - N$

Soit $x^{(p)} = x^* + \varepsilon^{(p)}$

$$\left. \begin{aligned} x^{(p+1)} &= M^{-1} \cdot N \cdot x^{(p)} + M^{-1} \cdot b \\ x^* &= M^{-1} \cdot N \cdot x^* + M^{-1} \cdot b \end{aligned} \right\} \implies \varepsilon^{(p+1)} = M^{-1} \cdot N \cdot \varepsilon^{(p)}$$
$$\implies \varepsilon^{(p)} = (M^{-1} \cdot N)^p \cdot \varepsilon^{(0)}$$

$$\text{Convergence} \iff \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} x^{(p)} = x^*$$

$$\iff \forall \varepsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon^{(p)} = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} (M^{-1} \cdot N)^p \cdot \varepsilon^{(0)} = 0$$

$$\iff \lim_{p \rightarrow +\infty} (M^{-1} \cdot N)^p = 0$$

$$\iff \rho(M^{-1} \cdot N) < 1 \quad (\text{propriété admise})$$

CNS de convergence (admise)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (M^{-1} \cdot N)^p = 0 \iff \rho(M^{-1} \cdot N) < 1$$

ρ désignant le **rayon spectral** d'une matrice : soient $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$ les valeurs propres d'une matrice A :

$$\rho(A) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$$

Autre version de la CNS de convergence :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ valeur propre de } M^{-1} \cdot N : |\lambda| < 1$$

Première possibilité pour vérifier la convergence : utiliser la CNS

Gauss-Seidel : $\rho((D - E)^{-1} \cdot F) < 1$

Jacobi : $\rho(D^{-1} \cdot (E + F)) < 1$

Exercice 1

Soit le système $A \cdot x = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

On considère une décomposition de A sous la forme $M - N$.

On supposera (pour simplifier) que toutes les valeurs propres de la matrice $M^{-1} \cdot N$ sont réelles et que tous les vecteurs propres associés appartiennent à \mathbb{R}^n .

Montrer la propriété suivante (réciproque de la propriété admise en cours) :

La méthode itérative de relaxation associée à la décomposition de A converge vers x quelque soit le vecteur initial $\implies \rho(M^{-1} \cdot N) < 1$

CS de convergence

Deuxième possibilité pour vérifier la convergence : utiliser des CS spécifiques (dédites de la CNS)

A à diagonale dominante : $i = 1, \dots, n$ (stricte) $|a_{ii}| \begin{matrix} \geq \\ > \end{matrix} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$

Théorème 1 : Si A est à diagonale dominante stricte, alors les algorithmes de Gauss-Seidel et de Jacobi convergent quelque soit le vecteur de départ.

Théorème 2 : Si A est à diagonale dominante et si :

$$\exists k \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{kk}| > \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|$$

alors l'algorithme de Gauss-Seidel converge quelque soit le vecteur de départ.

Théorème 3 : Si A est symétrique définie positive, alors l'algorithme de Gauss-Seidel converge quelque soit le vecteur de départ.

Méthode SOR (successive over-relaxation)

Technique d'accélération de Gauss-Seidel

$$x_i^{(p+1)} = \omega(\text{Gauss-Seidel}) + (1 - \omega)x_i^{(p)}$$

C'est un algorithme itératif de relaxation issu d'une décomposition de A sous la forme $M_\omega - N_\omega$ avec $M_\omega = \frac{D}{\omega} - E$ et $N_\omega = (\frac{1}{\omega} - 1) D + F$

Conditions sur ω pour assurer la convergence ? Quelques résultats pour des cas particuliers.

A symétrique définie positive et tridiagonale par blocs, un seul paramètre optimal ω :

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(D^{-1} \cdot (E + F))^2}}$$

Deuxième partie II

Méthodes de gradient

Rappel : si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{grad}(F)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$

Propriété 1

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

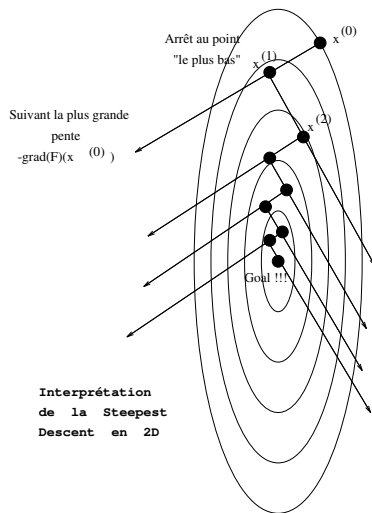
$$x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x^T \cdot A \cdot x - b^T x$$

Si A symétrique, $A \cdot x - b = \text{grad}(F)(x)$

Propriété 2

Si A symétrique définie positive (supposé vrai pour toute méthode de gradient) : $A \cdot x^* = b \iff \forall x' \neq x^* \quad F(x') > F(x^*)$

Interprétation de la "steepest descent" en 2D



Méthode de la Steepest Descent

A symétrique définie positive, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ quelconque

Au cours de l'itération p , $x^{(p+1)}$ se déduit de $x^{(p)}$ par :

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + \lambda_p r^{(p)}$$

- ▶ $r^{(p)}$: direction de descente (vecteur)
- ▶ λ_p : progression dans la direction de descente (scalaire)

Choix des paramètres de la descente :

- ▶ Direction : suivant la plus grande pente i.e. direction opposée au gradient en $x^{(p)}$: $r^{(p)} = -\text{grad}(F)(x^{(p)}) = b - A \cdot x^{(p)}$
- ▶ Progression : recherche du point “le plus bas” dans la direction $r^{(p)}$ obtenu en minimisant :
$$F(x^{(p)} + \lambda_p r^{(p)}) - F(x^{(p)}) = \frac{1}{2} \lambda_p^2 (r^{(p)})^T \cdot A \cdot r^{(p)} - \lambda_p (r^{(p)})^T \cdot r^{(p)}$$

Le minimum de cette fonction de λ_p est atteint en $\lambda_p = \frac{(r^{(p)})^T \cdot r^{(p)}}{(r^{(p)})^T \cdot A \cdot r^{(p)}}$

Algorithme

D'où l'algorithme :

$$x^{(0)} = \dots$$

$$r^{(0)} = b - A \cdot x^{(0)}$$

$$p = 1$$

Tant que $\frac{\|r^{(p-1)}\|}{\|b\|} > \varepsilon$ faire

$$\lambda_{p-1} = \frac{(r^{(p-1)})^T \cdot r^{(p-1)}}{(r^{(p-1)})^T \cdot A \cdot r^{(p-1)}}$$

$$x^{(p)} = x^{(p-1)} + \lambda_{p-1} r^{(p-1)}$$

$$r^{(p)} = b - A \cdot x^{(p)}$$

$$p = p + 1$$

Coût d'une itération : 2 produits matrice-vecteur mais

$$r^{(p)} = b - A \cdot x^{(p)} = b - A \cdot x^{(p-1)} - \lambda_{p-1} A \cdot r^{(p-1)}$$

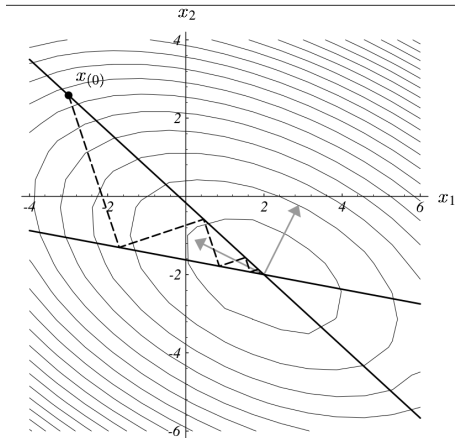
$$r^{(p)} = r^{(p-1)} - \lambda_{p-1} A \cdot r^{(p-1)}$$

Propriétés de la Steepest Descent

- ▶ Deux directions de descente successives $r^{(p+1)}$ et $r^{(p)}$ sont orthogonales.
- ▶ Soit u vecteur propre de A . Si $x^{(0)}$ vérifie :
 $\exists \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ t.q. $x^* - x^{(0)} = \beta u$, la SD atteint la solution exacte en une itération.
- ▶ Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont égales (une seule valeur propre), alors, $\forall x^{(0)}$, la SD atteint la solution exacte en une itération.

cas défavorable de la “steepest descent” en 2D

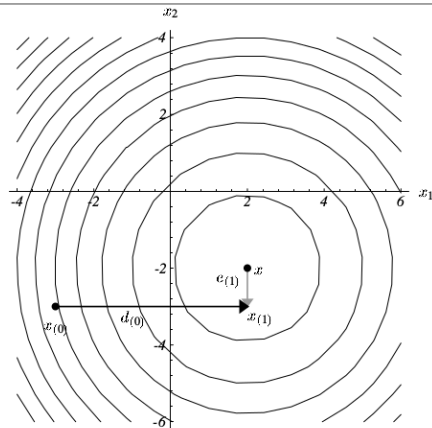
Jonathan Richard Shewchuk



Référence : *An Introduction to the Conjugate Gradient Method without the Agonizing Pain*, **Jonathan Richard Shewchuk**

Idée : ne considérer une direction qu'une fois

Jonathan Richard Shewchuk



Problème : pour savoir où s'arrêter dans une direction, il faut connaître la suivante

Solution : considérer des directions A-conjuguées

The Method of Conjugate Directions

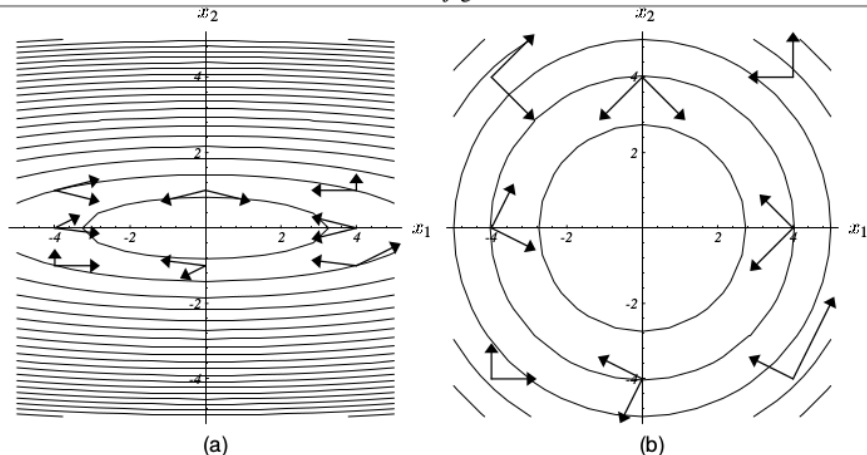


Figure 22: These pairs of vectors are A -orthogonal ... because these pairs of vectors are orthogonal.

A-orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit u_i $i = 0, \dots, n - 1$ une base quelconque de \mathbb{R}^n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

On considère le produit scalaire suivant (A -produit scalaire) :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|y)_A = (x|A \cdot y)$$

On veut construire une nouvelle base d_i $i = 0, \dots, n - 1$ qui soit A -orthogonale i.e. $\forall i \neq j, (d_i|d_j)_A = 0$

$$d_0 = u_0$$

$$d_1 = u_1 + \beta_{10}d_0$$

$$d_2 = u_2 + \beta_{20}d_0 + \beta_{21}d_1$$

$$d_{p+1} = u_{p+1} + \sum_{j=0}^p \beta_{p+1j}d_j$$

...

$$d_{n-1} = u_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \beta_{nj}d_j$$

A-orthogonalisation de Gram-Schmidt – suite (T)

$$d_{p+1} = u_{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{p+1j} d_j$$

Calcul de d_{p+1} en supposant $d_i, i = 0, \dots, p$ déjà calculés et $\forall j \neq i, (d_j | d_i)_A = 0$:

$$\begin{aligned} i = 0, \dots, p \quad (d_{p+1} | d_i)_A &= (u_{p+1} | d_i)_A + \sum_{j=0}^p \beta_{p+1j} (d_j | d_i)_A \\ 0 &= (u_{p+1} | d_i)_A + \beta_{p+1i} (d_i | d_i)_A \end{aligned}$$

D'où

$$\beta_{p+1i} = -\frac{(u_{p+1} | d_i)_A}{(d_i | d_i)_A} = -\frac{(u_{p+1} | A \cdot d_i)}{(d_i | A \cdot d_i)}$$

Exercice 2 (avec nouvelles notations)

Soit à résoudre $A \cdot x = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

On note u_i , $i = 0, \dots, n-1$ les différentes colonnes de A .

Le procédé de A -orthogonalisation de Gram-Schmidt est appliqué à u_i , $i = 0, \dots, n-1$ pour construire une base d_i , $i = 0, \dots, n-1$ A -orthogonale de \mathbb{R}^n .

1. Exprimer la solution du système $A \cdot x^* = b$ dans la base d_i , $i = 0, \dots, n-1$.

2. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^n, x^* = y + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b - A \cdot y | d_i)}{(d_i | A \cdot d_i)} d_i$

3. On considère l'algorithme itératif suivant :

$$\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n, x^{(p+1)} = x^{(p)} + \alpha_p d_p \text{ avec } \alpha_p = \frac{(d_p | b - A \cdot x^{(p)})}{(d_p | A \cdot d_p)}$$

3.1 Donner la relation entre $x^{(p)}$ et $x^{(0)}$

3.2 Montrer que pour $p = 1, 2, 3, \dots$ $(d_p | A \cdot x^{(p)}) = (d_p | A \cdot x^{(0)})$

4. Montrer que l'algorithme de la question ci-dessus atteint exactement la solution du système $A \cdot x^* = b$ en n itérations.

Quelques propriétés

Propriété 0 (question 3 de l'exercice) (T)

$$p = 1, 2, 3, \dots, (d_p | A \cdot x^{(p)}) = (d_p | A \cdot x^{(0)}) \implies (d_p | r^{(p)}) = (d_p | r^{(0)})$$

Propriété 1 (C)

$$j = 0, \dots, p-1, (r^{(p)} | d_j) = 0$$

Propriété 2 (C)

$$j = 0, \dots, p-1, (r^{(p)} | u_j) = 0$$

Propriété 3 (C)

$$(r^{(p)} | d_p) = (r^{(p)} | u_p)$$

Mise en forme d'une itération de l'algorithme :

$$x^{(0)} = ?, \quad r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

$\{u_i\}_{i=0,\dots,n-1}$ colonnes de A

$$d_0 = u_0$$

Pour $p = 0, n - 1$

$$\alpha_p = \frac{(d_p | r^{(p)})}{(d_p | A \cdot d_p)}$$

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + \alpha_p d_p$$

$$r^{(p+1)} = r^{(p)} - \alpha_p A \cdot d_p$$

$$\text{pour } j = 0, \dots, p, \quad \beta_{p+1j} = -\frac{(u_{p+1} | A \cdot d_j)}{(d_j | A \cdot d_j)}$$

$$d_{p+1} = u_{p+1} + \sum_{j=0}^p \beta_{p+1j} d_j$$

Fin Pour

Coût : mémoire, calcul ?

Cas particulier du Gradient Conjugué

Soit $u_i = r^{(i)}$, $i = 0, \dots, n-1$

► 1ère conséquence :

$$\alpha_p = \frac{(d_p | r^{(p)})}{(d_p | A \cdot d_p)} = \frac{(r^{(p)} | r^{(p)})}{(d_p | A \cdot d_p)} \quad (C)$$

► 2ème conséquence : $j = 0, \dots, p$

$$\beta_{p+1j} = -\frac{(u_{p+1} | A \cdot d_j)}{(d_j | A \cdot d_j)} = -\frac{(r^{(p+1)} | A \cdot d_j)}{(d_j | A \cdot d_j)}$$

D'autre part $r^{(j+1)} = r^{(j)} - \alpha_j A \cdot d_j \quad (T)$

$$(r^{(p+1)} | r^{(j+1)}) = (r^{(p+1)} | r^{(j)}) - \alpha_j (r^{(p+1)} | A \cdot d_j)$$

et donc

$$\alpha_j (r^{(p+1)} | A \cdot d_j) = (r^{(p+1)} | r^{(j)}) - (r^{(p+1)} | r^{(j+1)})$$

Cas particulier du gradient conjugué – suite

$$\alpha_j(r^{(p+1)}|A \cdot d_j) = (r^{(p+1)}|r^{(j)}) - (r^{(p+1)}|r^{(j+1)})$$

$j = p$

$$\begin{aligned}\alpha_p(r^{(p+1)}|A \cdot d_p) &= (r^{(p+1)}|r^{(p)}) - (r^{(p+1)}|r^{(p+1)}) \\ &= 0 - (r^{(p+1)}|r^{(p+1)}) \quad (\text{prop. 2})\end{aligned}$$

$$(r^{(p+1)}|A \cdot d_p) = -\frac{1}{\alpha_p}(r^{(p+1)}|r^{(p+1)})$$

$$(r^{(p+1)}|A \cdot d_p) = -\frac{(d_p|A \cdot d_p)}{(r^p|r^{(p)})}(r^{(p+1)}|r^{(p+1)})$$

$$-\frac{(r^{(p+1)}|A \cdot d_p)}{(d_p|A \cdot d_p)} = \frac{(r^{(p+1)}|r^{(p+1)})}{(r^p|r^{(p)})}$$

$$\implies \beta_{p+1p} = \frac{(r^{(p+1)}|r^{(p+1)})}{(r^p|r^{(p)})}$$

$j = 0, \dots, p-1$

$$\begin{aligned}\alpha_j(r^{(p+1)}|A \cdot d_j) &= (r^{(p+1)}|r^{(j)}) - (r^{(p+1)}|r^{(j+1)}) \\ &= 0 - 0 \quad (\text{prop. 2})\end{aligned}$$

$$\implies \beta_{p+1j} = \frac{(r^{(p+1)}|A \cdot d_j)}{(d_j|A \cdot d_j)} = 0$$

d'où l'expression de d_{p+1} :

$$d_{p+1} = r^{(p+1)} + \beta_{p+1p}d_p \quad \text{avec} \quad \beta_{p+1p} = \frac{(r^{(p+1)}|r^{(p+1)})}{(r^{(p)}|r^{(p)})}$$

Algorithme final du Gradient Conjugué

$$x^{(0)} = ?, d^{(0)} = b - Ax^{(0)}, r^{(0)} = d^{(0)}, p = 0$$

Boucler

$$\alpha_p = \frac{(r^{(p)} | r^{(p)})}{(d_p | A \cdot d_p)}$$

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} + \alpha_p d_p$$

$$r^{(p+1)} = r^{(p)} - \alpha_p A \cdot d_p$$

$$\beta_p = \beta_{p+1p} = \frac{(r^{(p+1)} | r^{(p+1)})}{(r^{(p)} | r^{(p)})}$$

$$d_{p+1} = r^{(p+1)} + \beta_p d_p$$

$$p = p + 1$$

Jusqu'à Convergence

Coût : mémoire, calcul ?

Convergence ?