Université de Picardie Jules Verne
Faculté des Sciences

L2 Maths S3 Théorie des Graphes

Corrigé de l'examen du mardi 6 novembre 2011.

Les seuls documents autorisés sont les résumés de cours distribués en cours. Les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

Question de Cours : On veut montrer qu'un arbre à n sommets possède $n-1$ arêtes.
1) Montrer qu'un arbre à n sommets (où $n \geq 2$) possède un sommet de degré 1.
2) Montrer par récurrence sur le nombre d'arêtes qu'un arbre à n sommets possède $n-1$ sommets.

Exercice 1

1. Existe-t-il un graphe simple dont la suite de degrés est $(3,3,3,3,3,3,3)$?

   Non, car la somme des degrés d'un graphe est un nombre pair (égal à deux fois le nombre d'arêtes).

2. Construire un graphe simple de suite de degrés $(4,4,4,4,4,4,4)$, en se ramenant à des graphes avec moins de sommets, comme dans la méthode vu en TD.

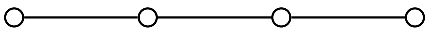
   On veut construire un graphe de suite de sommets $(4,4,4,4,4,4,4)$; soit G_0 un tel graphe.

   On peut obtenir G_0 en ajoutant un sommet de degré 4 à un graphe G_1 de suite de sommets $(4,4,3,3,3,3)$.

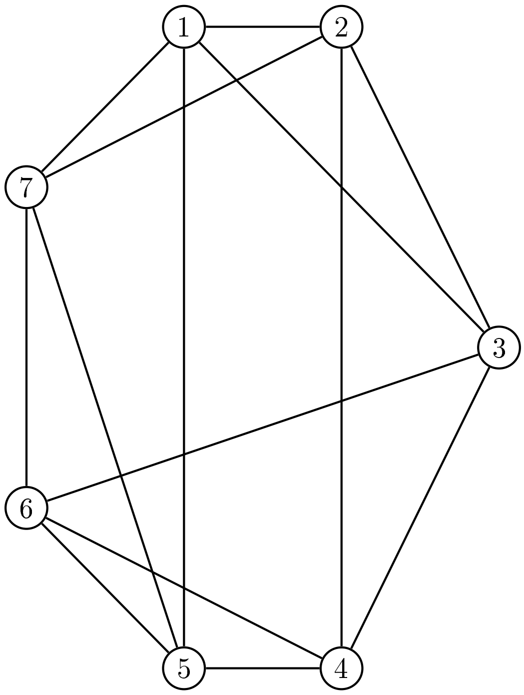
   On peut obtenir G_1 en ajoutant un sommet de degré 4 à un graphe G_2 de suite de sommets $(3,3,2,2,2)$.

   On peut obtenir G_2 en ajoutant un sommet de degré 3 à un graphe G_3 de suite de sommets $(2,2,1,1)$.

   On peut prendre pour G_3 le graphe ci-dessous :

   Si on part du graphe G_3 ci-dessus, on obtient pour G_0 le graphe ci-dessous :

3. On rappelle que le complémentaire $\overline{G}$ d'un graphe simple $G=(V,E)$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est V et tel que, pour x et y dans V, $\{x,y\}$ est une arête dans $\overline{G}$ si et seulement si $\{x,y\}$ n'est pas une arête de G

On considère deux graphes simples G et H. Montrer que G est isomorphe à H si et seulement si $\overline{G}$ est isomorphe à $\overline{H}$.

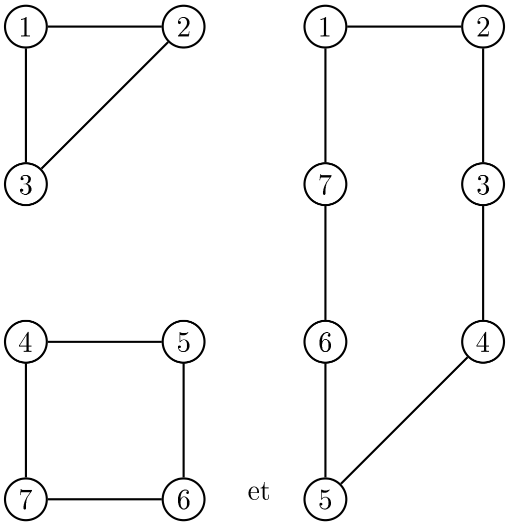
On pose $G = (V, E)$ et $H = (W, F)$. Soit $f : V \to W$ un isomorphisme de graphes. Alors, c'est une bijection de $V \to W$ telle que $\{x, y\}$ est une arête de G ssi $\{f(x), f(y)\}$ est une arête de H.

Alors, c'est une bijection de $V \to W$ telle que $\{x, y\}$ est une arête de $\overline{G}$ ssi $\{f(x), f(y)\}$ est une arête de $\overline{H}$ et c'est un isomorphisme entre les graphes $\overline{G}$ et $\overline{H}$.

Cela suffit pour prouver l'équivelence car $G = \overline{\overline{G}}$ et $H = \overline{\overline{H}}$.

4. Montrer qu'il existe exactement deux graphes simples qui ont pour suite de degrés $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

   Les deux graphes ci-dessous ont la suite de degrés $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.



H K

   Ce sont les deux seuls graphes simples possibles car si $G = (V, E)$ est un graphe qui a cette suite de degré, comme tous ses sommets sont de degrés 2, c'est une réunion de cycles élémentaires et avec 7 sommets, il n'y a que deux cas possibles.

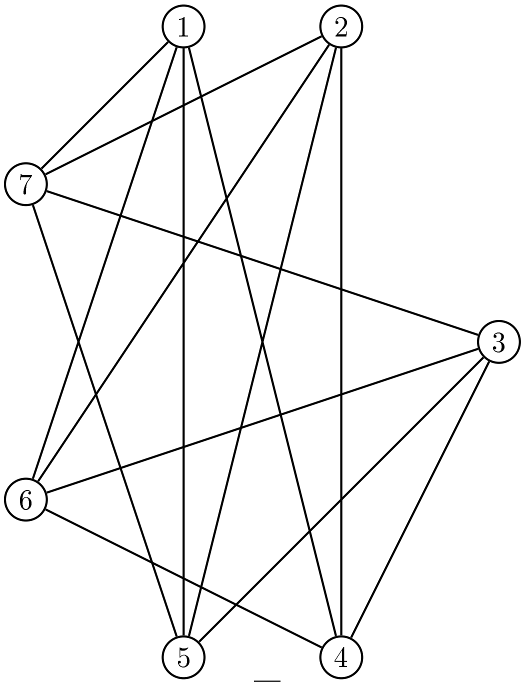
5. En déduire qu'il existe exactement deux graphes simples qui ont pour suite de degrés $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$.

   Donner une représentation de chacun de ces graphes et retrouver celui qui est isomorphe à celui que vous avez donné dans la question 2).

   Si un graphe a pour suite de degrés $(d_1, ..., d_n)$, son complémentaire a pour suite de degrés $(n - 1 - d_1, ..., n - 1 - d_n)$.

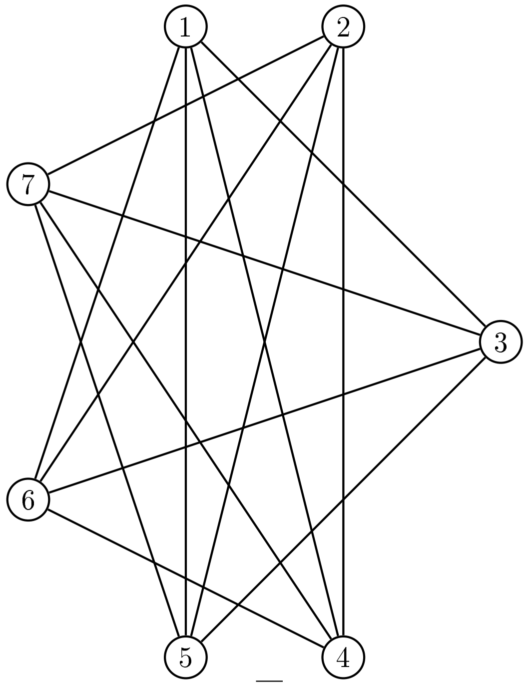
   De plus l'application qui a un graphe associe son complémentaire est une involution de l'ensemble des graphes à 7 sommets (bijection de réciproque, elle-même) et deux graphes sont isomorphes ssi leurs complémentaires le sont.

   Comme il n'y a que deux graphes simples de suite de degré $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ et que, ici, $n - 1 - 2 = 7 - 3 = 4$, il n'y a, à isomorphisme près, que 2 graphes simples de suite de degré $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$, ce sont les complémentaires des graphes H et K ci-dessus.



$\overline{H}$

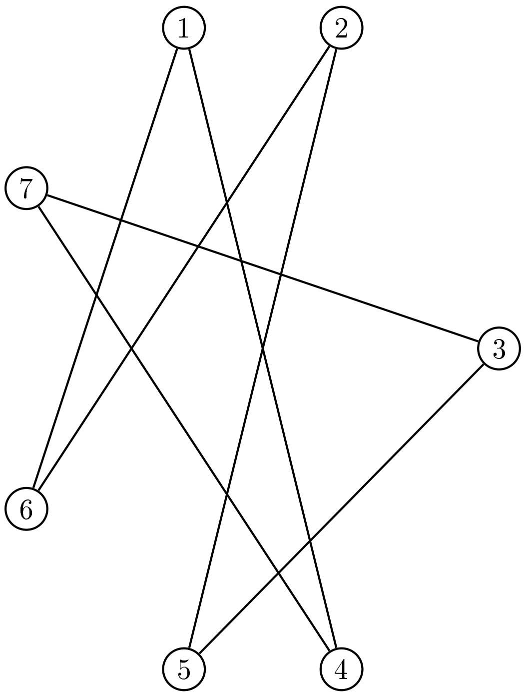
et



$\overline{K}$

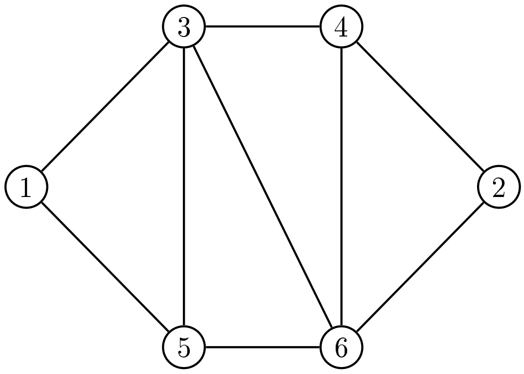
Pour savoir lequel est isomorphe au graphe de la question 2), il suffit de comparer leur graphes complémentaires.

Le compémentaire de G_0 est le graphe ci-dessous :



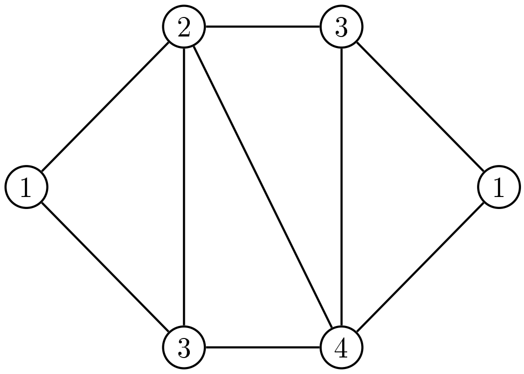
On reconnaît le graphe K, donc, G_0 est isomorphe à $\overline{K}$.

Exercice 2 On considère le graphe G ci-dessous :



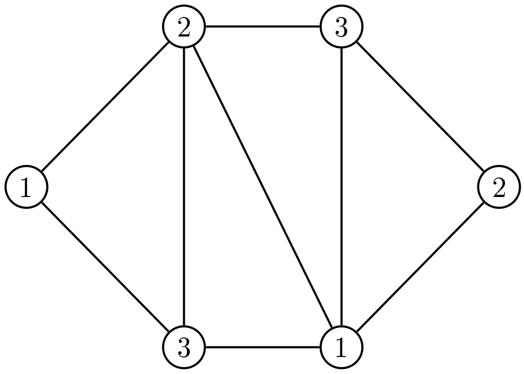
1. Utiliser l'algorithme glouton pour colorier les sommets de G à partir de l'ordre des sommets proposé sur la figure précédente. On notera 1,2,... les couleurs utilisées dans cet algorithme.

   On obtient le coloriage suivant :

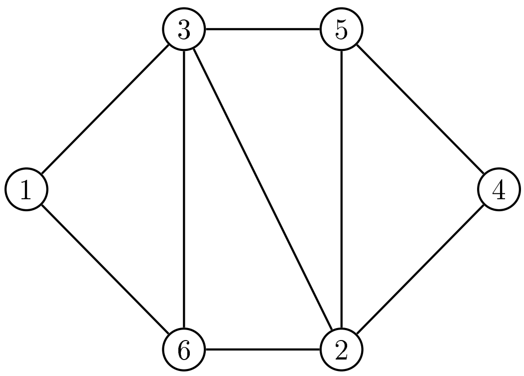
   Vérifier que l'on obtient pas un coloriage optimal (avec $\chi(G)$ couleurs) des sommets de G ?

   Ce n'est pas un coloriage optimal, car on peut colorier les sommets de G avec 3 couleurs :

2. Donner une nouvelle numérotation des sommets de G qui permette de trouver un coloriage optimal en utilisant l'algorithme glouton.

   La numérotation suivante redonne le coloriage ci-dessus :

   C'est un coloriage optimal car G a pour sous-graphe le graphe complet K_3 ce qui implique que $\chi(G) \geq 3$.

3. Déterminer le polynôme chromatique du graphe G.

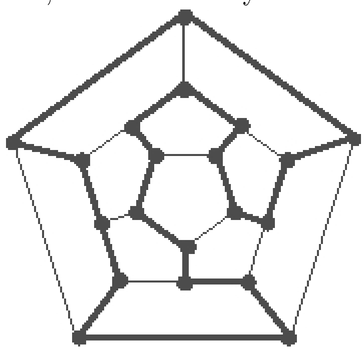
Réponse sans la démonstration : $(X-2)^4(X-1)X$

Exercice 3 1. Montrer qu'un graphe hamiltonien ne contient pas de sommet de degré 1.

Un sommet de degré 1 ne peut pas appartenir à un cycle car il n'a qu'un seul voisin. Comme un graphe hamiltonien a un cycle qui contient tous ses sommets, ses sommets sont de degré strictement supérieur à 1.

2. Le graphe du dodécaèdre ci-dessous est-il hamiltonien ?

oui, il contient le cycle hamiltonien ci-dessous :



3. On dit qu'un sommet v d'un graphe connexe H est d'articulation si $H \setminus v$, le graphe obtenu en supprimant v dans H n'est pas connexe.

Donner un exemple de graphe simple H qui contient un sommet d'articulation.

Un arbre à plus de 3 sommets.

4. Montrer qu'un graphe hamiltonien n'a pas de sommet d'articulation.

Soit H un graphe connexe qui contient un sommet d'articulation v. Alors, $H \setminus v$ a au moins deux composantes connexes distinctes que l'on note H_1 et H_2. Soit v_1 un sommet de H_1 et v_2 un sommet de H_2, il n'existe pas de chaîne de $H \setminus v$ qui relie v_1 et v_2. Mais, comme H est connexe, il existe une chaîne de H qui relie v_1 et v_2. Cette chaîne n'est pas dans $H \setminus v$, donc elle doit passer par v.

Toute chaîne qui relie v_1 et v_2 passe par v. Donc, un cycle qui passe par v_1 et par v_2 doit passer deux fois par v. H ne contient pas de chaîne élémentaire qui contient v_1 et v_2. Il ne peut donc pas être hamiltionien.

On obtient le résultat voulu par contraposée.

5. Montrer qu'un graphe qui ne contient pas de sommet d'articulation n'est pas forcément hamiltonien. (donner un contre-exemple).

Un arbre à deux sommets.

6. Un graphe simple $G = (V, E)$ est dit hypohamiltonien s'il n'admet pas de cycle hamiltonien et si pour tout sommet v de G, $G \setminus v$ est hamiltonien.

Soit G un graphe simple hypohamiltonien à n sommets.

(a) Montrer que G est connexe.

G a au moins 4 sommets car un graphe hamitonien a au moins 3 sommets.

Soient x et y deux sommets de G et soit z un sommet distinct de x et de y.

Comme $G \setminus z$ est hamiltonien, il est connexe et il existe une chaîne de $G \setminus z$ qui va de x à y. C'est toujours une chaîne de G. Donc deux sommets quelconques de G sont reliés par une chaîne et G est connexe.

(b) Montrer que pour tout $v \in V$, le degré $deg(v)$ de v est supérieur ou égal à 3.

Soit v un sommet de G, comme G est connexe et qu'il a au moins 4 sommets, v n'est pas isolé, il a au moins un voisin x.

Mais alors, v est un sommet de $G \setminus x$, qui est un graphe hamiltonien. Donc le degré de v dans $G \setminus x$ est supérieur ou égal à 2. Et comme x est un voisin de v, le degré de x dans G est supérieur ou égal à 3.

(c) Montrer qu'il existe $v \in V$, tel que le degré de v est inférieur ou égal à la partie entière de $\frac{n-1}{2}$.

Si on avait $deg(v) \geq \frac{n}{2}$ pour tout sommet v de G, alors, par le théorème de Dirac, G serait hamiltonien, ce qui contredit l'hypothèse faite sur G.

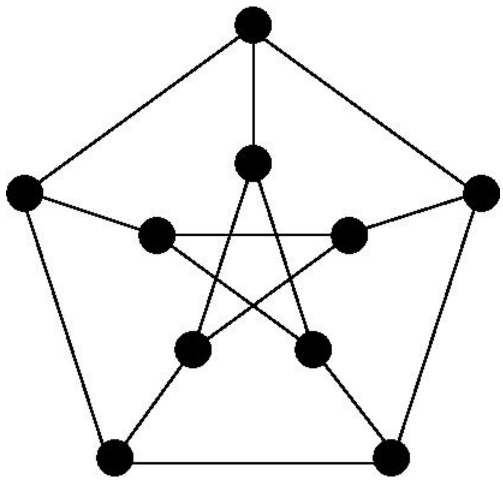
(d) Montrer que $n \geq 7$ puis que $n = 7$ est impossible.

Il existe un sommet v de G tel que $deg(v) \geq 3$ et tel que $deg(v) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Donc, on obtient $3 \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, puis $n \geq 7$.

$n = 7$ est impossible car alors, on aurait un graphe qui a pour suite de degré $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

(e) On appelle graphe de Petersen le graphe P dont l'ensemble des sommets est l'ensemble V des paires $\{x, y\}$ d'éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et tel que deux éléments de P sont voisins si et seulement si leur intersection est vide. Montrer que le dessin ci-dessous est une représentation de P :



(f) Montrer que pour tout sommet v du graphe de Petersen P, $P \setminus v$ est hamiltonien.

Remarque : le graphe de Petersen est le plus petit graphe hypohamiltonien, mais, dans cet exercice, on ne demande pas de vérifier qu'il n'est pas hamiltonien.

Vu que le graphe P est invariant par rotation d'angle $2\pi/5$, Il suffit de vérifier que $P \setminus v$ est hamiltonien pour un sommet v extérieur, et pour un sommet v intérieur.