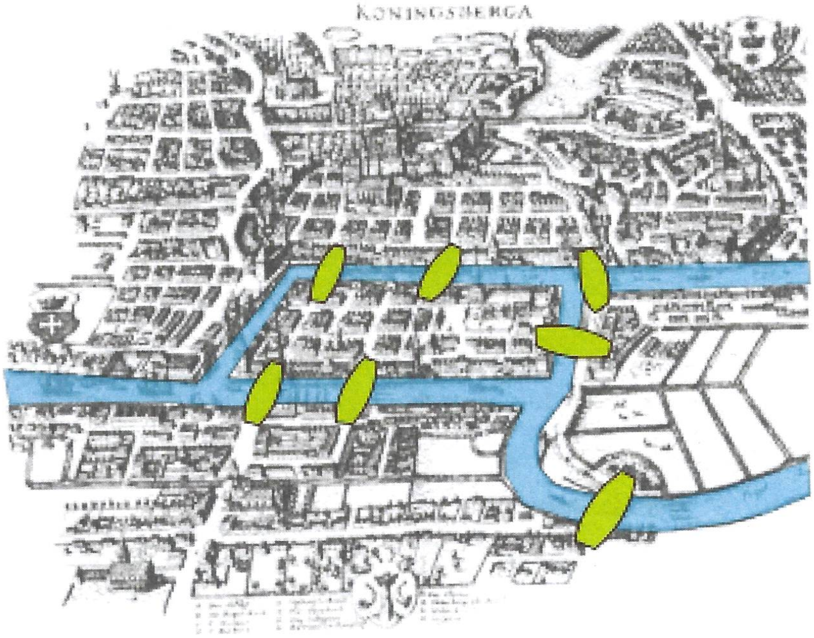
CTD3 : Graphes eulériens, graphes hamiltoniens

8.4 Graphes eulériens

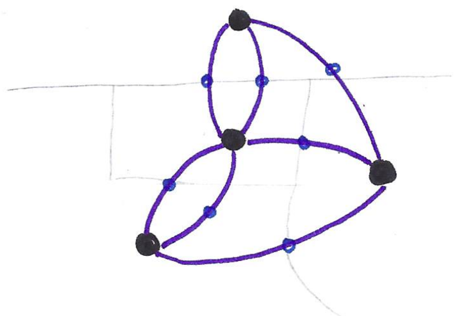
En 1766, Euler résout le problème dit des 7 ponts de la ville de Königsberg : à savoir "est-il possible de suivre un chemin qui emprunte chaque pont une fois et une seule et revienne au point de départ ?"



Plan de la ville de Königsberg à l'époque d'Euler, et ses 7 ponts au dessus de la rivière Pregolia (source : *Wikipedia*).

Modéliser le problème ci dessus sous forme de graphe.

o point artificiel pour revenir a une graphe simple.



Définition

— Une chaîne est **eulérienne** si elle est simple et passe par toutes les arêtes de E.
— Un cycle est **eulérien** si c'est une chaîne eulérienne fermée.
— Un graphe est **eulérien** (ou **semi-eulérien**) si il admet un cycle eulérien (ou une chaîne eulérienne).

Remarque intuitivement eulérien signifie "sans lever le crayon ni passer deux fois par le même trait".

Théorème Un graphe non orienté connexe admet une chaîne eulérienne (resp. cycle eulérien) ssi le nombre de sommets de degré impair vaut 2 (resp. 0).

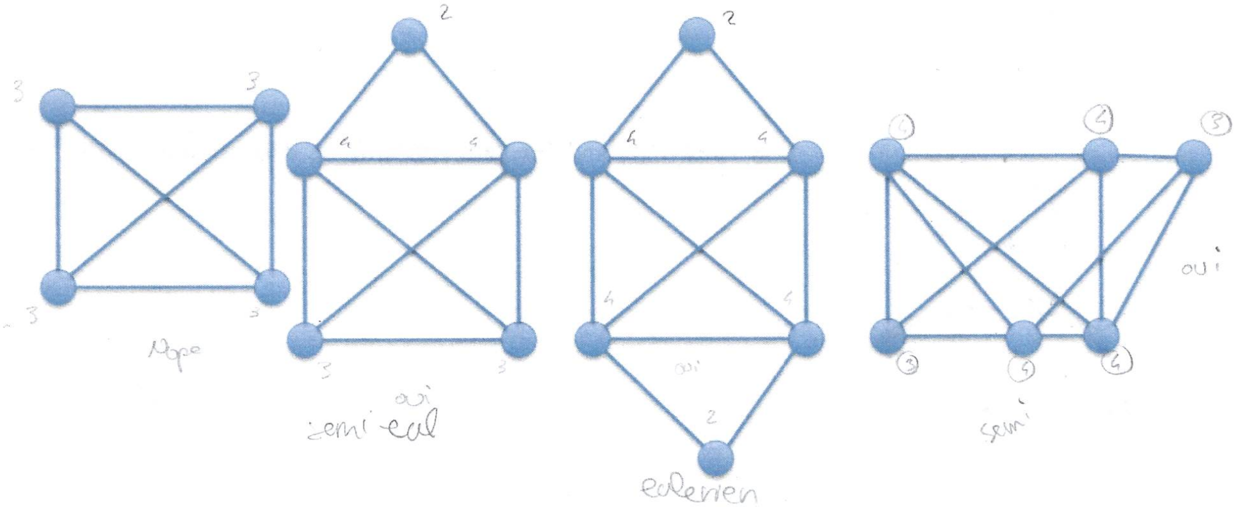
G connexe $\Rightarrow$ ($\#\{v \in V \mid \delta(v)$ impair $\} = 0 \Leftrightarrow G$ eulérien
$= 2 \Leftrightarrow G$ semi-eulérien

Démo : $\Leftarrow$ G eulérien : $v_0 - v_1 - \dots v_i \dots - v_{m-1} - v_0 = v_m$
$m = \#E$
Soit un sommet $u \in V$ donné donc $\delta(u)$ est pair (et >0).

G semi-eulérien $v_0 - v_1 - \dots . v_i - v_{m-1} - v_m \neq v_0$.
pour tous les sommets $u \in \{v_1 \dots v_{m-1}\}$ on a $\delta(u)$ pair. et $\delta(v_0)$ $\delta(v_m)$ impair.

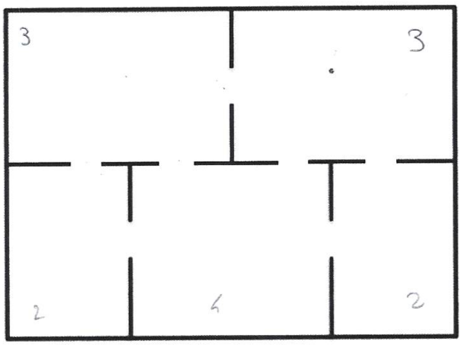
$\Rightarrow$ Par récurrence sur $\#E = m$.
Cas de base : $m = n-1$ (G connexe) + $\exists$ au moins 1 sommet de degré 1. dans un arbre
+ C'est un arbre $\Rightarrow \exists v \in V(G')$ tq $\delta(v) = 1$ u G'
→ Si $\exists$ exactement 2 sommets u, v de degré 1, on a une chaîne (semi-eulérienne)
→ Si $\exists$ au moins 3 sommets de degré 1 $\Rightarrow$ pas de chaîne semi eulérienne de u à v passant une seule fois par l'arrête menant à w
Hérédité : Supp $G = \langle V, E \rangle$ tq $m = \#E$ vérifiant la ppté. u v
Soit $G' = \langle V, E' \rangle$ avec E' ayant 1 arrête supp
- Si 0 sommets de degré impair dans G' donc dans G, $\delta(u)$ et $\delta(v)$ sont les seuls sommets impairs $\Rightarrow \exists$ chaîne eulérienne dans G de u à v.
$\Rightarrow \exists$ cycle eulérien de u à u (ajoutant l'arrête).

▷ **Exercice 16** *Est-il possible de tracer les figures suivantes sans lever la crayon et sans passer deux fois sur le même trait.*

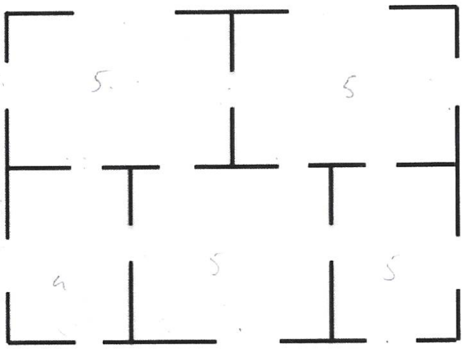


▷ **Exercice 17** *Est-il possible de se promener dans ces maisons en passant une et une seule fois par chacune des ouvertures ?*

+ Si 2 sommets de degré impair dans G'
→ Si $\delta(u), \delta(v)$ imp dans G' → Ds G $\delta(u)$ $\delta(v)$ pair
$\exists$ cycle eul ds G de u à u
$\exists$ chaîne eul ds G' de u à v
→ Si $\delta(u)$ pair $\delta(v)$ imp dans G' → Ds G $\delta(u)$ imp $\delta(v)$ pair
$\exists$ 2 sommets imp ds G

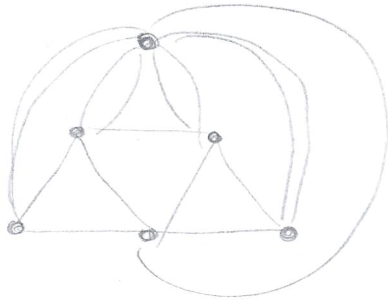


semi eul



9

Rien.
Trop de sommets de degré impair.



De façon constructive, pour trouver une chaîne (ou un cycle eulérien) on donne d'abord une chaîne simple entre les sommets de départ et d'arrivée, on retire ensuite les arêtes déjà parcourues, puis on continue à parcourir puis retirer itérativement des cycles issus de sommets déjà visités.

Graphes orientés On a là une condition similaire pour les circuits eulériens : $\forall v \in V, \delta^+(v) = \delta^-(v)$. Pour les chemins eulériens, un sommet peut avoir un degré entrant, un de plus que le degré sortant, et un sommet peut avoir un degré sortant un de plus que le degré entrant.

8.5 Graphes hamiltoniens

8.5.1 Graphes non orientés

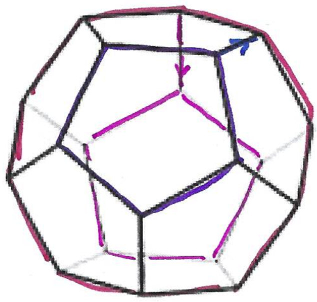
Définitions

- Une chaîne est **hamiltonienne** si elle passe par tous les sommets une fois et une seule.
- Un cycle est **hamiltonien** si c'est un cycle élémentaire comptant autant d'arêtes que de sommets dans G.
- Un graphe est **hamiltonien** (resp. **semi-hamiltonien**) s'il est possible de trouver un cycle hamiltonien (resp. une chaîne hamiltonienne).

Contrairement aux graphes eulériens, il n'y a pas de caractérisation simple des graphes hamiltoniens.

Exemples

▷ **Exercice 18** *Jeu de Hamilton (1859) : trouver une chaîne hamiltonienne dans un dodécaèdre.*



Quelques critères

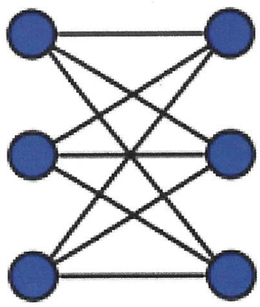
Propriétés

- Si $\exists v \in V$ tel que $\delta(v) = 1$ et $n > 1$ alors le graphe n'est pas hamiltonien.
- Si $\exists v \in V$ tel que $\delta(v) = 2$ alors les deux arêtes incidentes à v appartiennent à tout cycle hamiltonien.
- K_n est hamiltonien. ← évident

▷ **Démo 4** *en exo.* Supp K_n hamiltonien, mq K_{n+1} hamilt
oui ds le cycle de K_n on remplace 1 arête $v_i - v_j$ par $v_i - v_{n+1} - v_j$

Définition Un graphe est biparti si il existe une partition $\{V_1, V_2\}$ de V telle que, pout toute arête $e = \{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_2\} \cap V_1$ et $\{v_1, v_2\} \cap V_2$ sont des singletons.

Exemple $K_{3,3}$: on note $K_{i,j}$ un graphe biparti complet, c'est à dire, tel que $\#V_1 = i$, $\#V_2 = j$ et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2.



Propriété Si $G = (V, E)$ est biparti et si $|\#V_1 - \#V_2| > 1$ alors G n'est ni hamiltonien, ni semi-hamiltonien.

▷ **Démo 5** *en exo.*

Théorème de Ore Si G est un graphe simple d'ordre $n \geq 3$, si pour tout couple de sommets v_1 et v_2 tels que $\{v_1, v_2\} \notin E$ et $\delta(v_1) + \delta(v_2) \geq n$ alors G est hamiltonien.

Par l'absurde : Soit G d'ordre $n \geq 3$ vérifiant (O) et non-hamiltonien.

On considère l'ensemble $E = \{G' \mid G$ est 1 graphe partiel de G', G' vérif (O), G' non hamilt$\}$.

$\exists$ 1 elt maximal G'_m dans E (nb arête maximal).

$\Rightarrow$ Si 1 arête est ajoutée à G_m il devient hamiltonien (cycle).

$\Rightarrow$ G_m est semi-hamilt. $\Rightarrow \exists$ 1 chaîne $v_1 - v_2 \ldots v_{n-1} - v_n$.

$\{v_1 \ldots v_n\} \notin E$ donc par (O), $\delta(v_1) + \delta(v_2) \geq n$.

$\delta(v_1) = \{i \in \{1, \ldots n-1\} \mid \{v_i, v_{i+1}\} \in E\} = |A|$

$\delta(v_2) = \{i \in [1, n-1] \mid \{v_i, v_n\} \in E\} = |B|$.

Donc $|A| + |B| = \underbrace{|A \cup B|}_{\leq [1,n-1] \leq n-1} + |A \cap B| \geq n$.

Donc $|A \cap B| \geq 1$

$\exists i$ tq $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, $\{v_i, v_n\} \in E$

$v_1 \ldots v_i \times v_{i+1} - \ldots - v_n$

sans $v_i - v_{i+1}$ on a un cycle hamiltonien.

$\Rightarrow \exists$ cycle hamiltonien dans $G_m \Rightarrow$ Contradiction.

Corollaire Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$, si tout v est de degré $\geq n/2$ alors G est hamiltonien.

▷ **Exercice 19** *Soit une grille rectangulaire de taille $2p \times 2q$ composée de $4pq$ carrés identiques. Un pion ne peut se déplacer que d'une case sur une case adjacente (verticalement ou horizontalement, mais pas en diagonale). Ce pion peut-il parcourir toutes les cases une fois et une seule du coin en haut à gauche au coin en bas à droite ?*

Considérer damier colorer comme échiquier

Non car coins opposés de m̂ couleur.

m̂ nbre de case blanches/noires donc peut pas commencer et finir par m̂ case de couleur.

8.5.2 Graphes orientés : multiplication latine

Dans un graphe G orienté, on peut chercher des chemins et circuits hamiltonien. On dispose de la méthode (coûteuse) de la multiplication latine.

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G. Les puissances successives de M, M^1, M^2, M^3 ... M^i indiquent par leur coefficient (k, l) le nombre de chaîne de longueur i entre les sommets k et l.

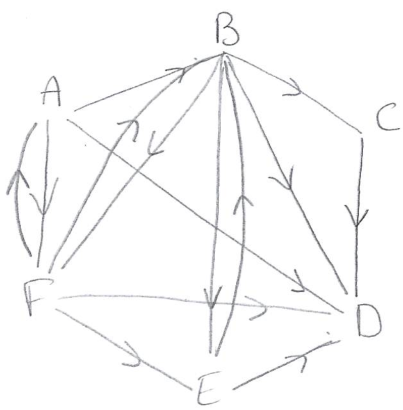
Si on veut de plus obtenir la suite de ces sommets, on peut utiliser la multiplication latine. Elle consiste à indiquer dans une matrice L les arêtes dans les nœuds de la matrice d'adjacence et à les combiner en chemins lors de la multiplication.

Exemple Dessiner le graphe correspondant à la matrice d'adjacence M suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On écrit L

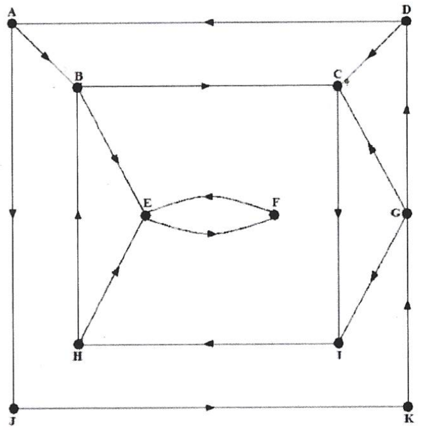
$$\begin{pmatrix} 0 & AB & 0 & AD & 0 & AF \\ 0 & 0 & BC & BD & BE & BF \\ 0 & 0 & 0 & CD & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EB & 0 & ED & 0 & 0 \\ FA & FB & 0 & FD & FE & 0 \end{pmatrix}$$



Utilisation des composantes fortement connexes pour simplifier le problème La méthode de la mutiplication latine requiert de calculer la $n$ème puissance d'une matrice L de taille $n \times n$. On peut simplifier le problème en partitionnant d'abord le graphe en composantes fortement connexes, et en étudiant les chemins hamiltoniens entre ces composantes fortement connexes.

Sur chaque composante, on calcule les chemins/circuits (par multiplication latine), et on calcule aussi les chemins/circuits sur le graphe réduit, graphe dont chaque noeud est une composante fortement connexe, et chaque arête est labellée par (i, j) sa valeur dans le graphe initial.

Exemple



On peut noter que trouver un chemin hamiltonien dans un graphe est un problème NP-complet.

Un problème NP est un problème dont toute solution peut être vérifiée en temps poynomial et trouvée par un algorithme textbfnon-déterministe en temps polynomial. Un problème NP est un problème pour lequel il n'existe pas de solution polynomiale connue.

Un problème NP-complet est un problème NP auquel tout autre problème NP peut se réduire en temps polynomial. C'est un problème représentatif de la classe NP.

Les algorithmes utilisés sont de compléxité (en temps) exponentielle. Dans le cas de la multiplication latine, la multiplication de matrice classique est en $O(n^3)$ mais le nombre de coefficients dans la matrice n'est limité que par le nombre de sommets visités. Or le nombre de chemins de longueur n entre 2 sommets, un coefficient de M^n, est exponentiel (borné par $(n-1)!$).