

# Théorie des graphes

## Chapitre 2 : Connexité

23 novembre 2020



### Définition 2.1.1 – Chaîne

Une **chaîne** de longueur  $q \in \mathbb{N}$ ,  $(e_1, \dots, e_q)$ , est une séquence de  $q$  arêtes successivement adjacentes. Il existe donc une suite de sommets  $(v_1, \dots, v_{q+1})$  telle que  $v_i$  soit extrémité de  $e_{i-1}$  et  $e_i$ .

### Définition 2.1.2 – Vocabulaire

- On dit que la chaîne joint les sommets  $v_1$  et  $v_{q+1}$ .
- Une chaîne est dite **élémentaire** si les sommets  $(v_1, \dots, v_{q+1})$  sont distincts 2 à 2.
- Une chaîne est **fermée** si  $v_1 = v_{q+1}$ .
- Une chaîne est **simple** si les arêtes  $(e_1, \dots, e_q)$  sont distinctes 2 à 2,
- $q$  est la **longueur** de la chaîne.

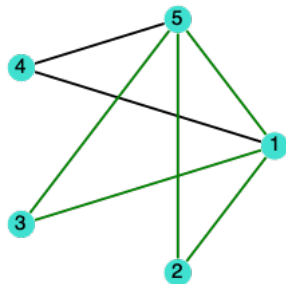
### Définition 2.1.3 – Cycle

- Un **cycle** est une chaîne simple fermée.
- Un cycle est **élémentaire** si les sommets parcourus sont distincts 2 à 2 sauf le premier et le dernier.
- La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus petite chaîne entre eux.
- Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximal entre deux sommets du graphe. Elle vaut  $+\infty$  si il existe des sommets non connectés (la définition de la connexité arrive après).

**Exemple 2.1.1.**

Trouver sur ce graphe :

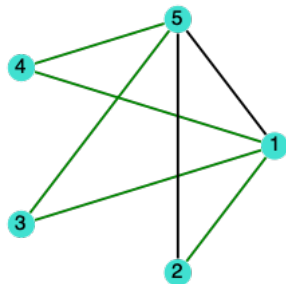
- une chaîne fermée non élémentaire ;  
(1, 5, 2, 1, 3, 5, 1)
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.



**Exemple 2.1.1.**

Trouver sur ce graphe :

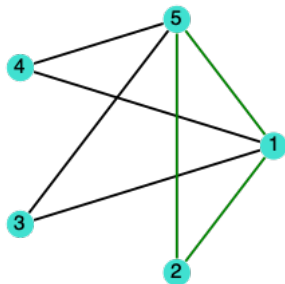
- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;  $(2, 1, 3, 5, 4, 1)$
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.



**Exemple 2.1.1.**

Trouver sur ce graphe :

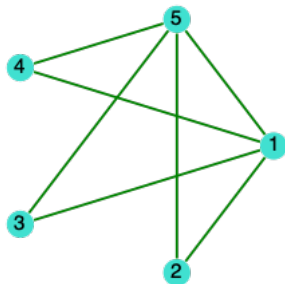
- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;  $(1, 2, 5, 1)$
- un cycle non élémentaire.



**Exemple 2.1.1.**

Trouver sur ce graphe :

- une chaîne fermée non élémentaire ;
- une chaîne simple, ni fermée, ni élémentaire ;
- un cycle élémentaire ;
- un cycle non élémentaire.  
(1, 2, 5, 1, 3, 5, 4, 1)

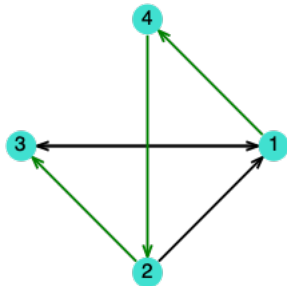


On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.

**Exemple 2.1.2.**

Trouver sur ce graphe :

- une chemin (non fermé) élémentaire ;  
(1, 4, 2, 3)
- une chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.



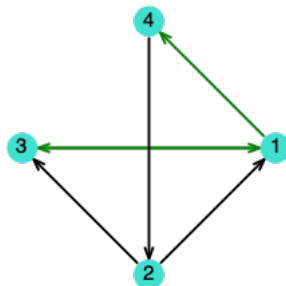


On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.

## Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- un chemin (non fermé) élémentaire ;
- un chemin (non fermé) non élémentaire ; (1, 3, 1, 4)
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.

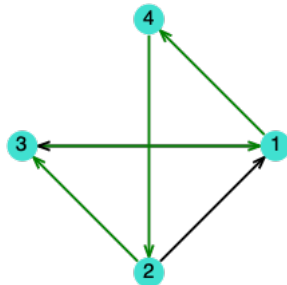


On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.

## Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- un chemin (non fermé) élémentaire ;
- un chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ; (1, 4, 2, 3, 1)
- un circuit non élémentaire.

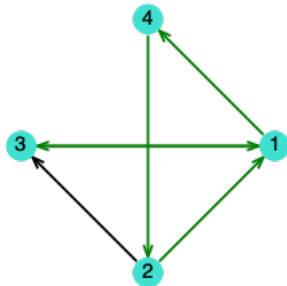


On ne parle plus de chaîne/cycle mais de chemins et de circuits qui prennent bien sûr en compte l'orientation des arcs.

## Exemple 2.1.2.

Trouver sur ce graphe :

- une chemin (non fermé) élémentaire ;
- une chemin (non fermé) non élémentaire ;
- un circuit élémentaire ;
- un circuit non élémentaire.  
(1, 3, 1, 4, 2, 1)



**Définition 2.2.1 – Graphe connexe, fortement connexe**

- Un graphe non orienté est **connexe**, si entre tout couple de sommet, il existe une chaîne les joignant.
- Un graphe orienté est **fortement connexe** si toute paire de sommets distincts  $(i, j)$  est reliée par au moins un chemin.

### Définition 2.2.2 – Relation binaire

On appelle relation binaire sur un ensemble  $E$ , la donnée d'un sous-ensemble  $\Gamma$  de  $E \times E$ . On notera  $x R y$ , et on dira que l'élément  $x$  de  $E$  est en relation avec l'élément  $y$  de  $E$ , lorsque le couple  $(x, y)$  appartiendra à  $\Gamma$ .

### Définition 2.2.3 – Relation d'équivalence

Soit  $R$  une relation binaire sur  $E$ .  $R$  est une relation d'équivalence sur  $E$  si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées.

- 1) Pour tout  $x \in E$ ,  $x R x$  (réflexivité) ;
- 2) pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $x R y \Rightarrow y R x$  (symétrie) ;
- 3) Pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ ,  $(x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z$  (transitivité).

**Définition 2.2.4 – Classe d'équivalence**

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$  et  $x$  un élément de  $E$ . On appelle classe d'équivalence de  $x$  l'ensemble noté  $[x]$  de tous les éléments de  $E$  qui sont en relation avec  $x$  :

$$[x] = \{y \in E, xRy\}.$$

**Proposition 2.2.5**

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ , deux classes d'équivalence sont disjointes ou égales.

► Démontrer la proposition



**Proposition 2.2.6**

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un ensemble  $E$ , l'ensemble des classes d'équivalence est une partition de  $E$ .

**Proposition 2.2.7**

Soit  $G$  un graphe non orienté (respectivement orienté), la relation  $R$  définie sur l'ensemble des sommets par  $v_i R v_j$  si et seulement si il existe une chaîne joignant  $v_i$  à  $v_j$  (respectivement un chemin allant de  $v_i$  à  $v_j$  et un chemin allant de  $v_j$  à  $v_i$ ) est une relation d'équivalence.

► Démontrer la proposition.



**Définition 2.2.8 – Composantes connexes, composantes fortement connexe**

Soit  $G$  un graphe non orienté (respectivement orienté). Les graphes partiels engendrés par les classes d'équivalences de la relation définie à la remarque ci-dessus s'appellent les composantes connexes (respectivement composantes fortement connexes) du graphe  $G$ .



**Exercice 2.2.1.**

- Dessiner un graphe à 3 composantes connexes.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\})$  est-il connexe ?

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté

### Définition 2.2.9 – Successeurs, prédécesseurs

On appelle successeurs et prédécesseurs d'une partie  $S \subseteq V$  les ensembles :

$$\begin{aligned} \text{Succ}(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v, v') \in E\} \\ \text{Pred}(S \subseteq V) &= \{v' \mid v \in S, (v', v) \in E\}. \end{aligned}$$

On définit aussi leur fermeture réflexive et transitive par :

$$\begin{aligned} \text{Succ}^*(S \subseteq V) &= S \cup \text{Succ}^*(\text{Succ}(S)) \\ \text{Pred}^*(S \subseteq V) &= S \cup \text{Pred}^*(\text{Pred}(S)). \end{aligned}$$

### Algorithme

$CFC_G \leftarrow \emptyset$

**tant que** Il existe un sommet non dans la réunion des sous-ensembles de  $CFC_G$  **faire**

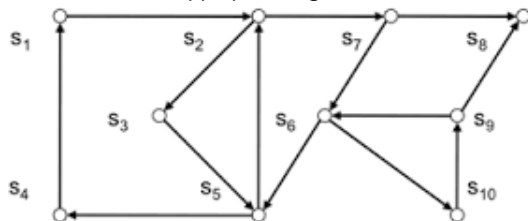
Choisir  $v \in V$  n'apparaissant pas la réunion des sous-ensembles de  $CFC_G$

$CFC_v \leftarrow \text{Succ}^*(\{v\}) \cap \text{Pred}^*(\{v\})$

$CFC_G \leftarrow CFC_G \cup \{CFC_v\}$

**fin tant que**

**Exercice 2.2.2.** Appliquer l'algorithme de Demoucron au graphe suivant :



**Exercice 2.2.3.** Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue).

- Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant  $i$  et  $j$  signifie que  $j$  espionne  $i$  et  $i$  espionne  $j$ .

- 
- Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?
  - Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.

**Exercice 2.2.4.** Etant donné un groupe de 10 personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui sont amis.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

- Représentez cette situation par un graphe d'ordre 10 dans lequel une arête entre les sommets  $i$  et  $j$  signifie qu'il y a une relation d'amitié entre  $i$  et  $j$ .

- 
- Ce graphe est-il complet ? connexe ?
  - Si l'adage "les amis de mes amis sont mes amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

**Proposition 2.2.10**

Soit  $G$  un graphe connexe alors il possède au moins  $n - 1$  arêtes.

► La proposition est triviale pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

Supposons la vraie pour  $n$  et montrons là pour  $n + 1$ . Soit donc  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n + 1$ ,  $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ , et considérons le graphe  $G' = (V', E')$  induit par  $V' = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Posons  $G'_1, \dots, G'_k$  les composantes connexes de  $G'$  d'ordre respectivement  $n_1, \dots, n_k$ . On a  $n_1 + \dots + n_k = n$  (on a enlevé  $v_0$ ). Par hypothèse de récurrence  $G'_i$  possède au moins  $n_i - 1$  arêtes. De plus  $G$  est connexe, donc  $v_0$  est connecté à toutes les composantes connexes  $G'_i$ . Par suite le graphe de départ  $G$  possède au moins  $(n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) + k = n$  arêtes. ■



**Proposition 2.2.11**

Un graphe sans cycle contient au plus  $(n - 1)$  arêtes.

► Démontrer la proposition par récurrence



**Définition 2.2.12**

- Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle ;
- une **forêt** est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

**Proposition 2.2.13**

Soit  $G$  un graphe connexe, les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $G = (V, E)$  est un arbre (ie  $G$  n'a pas de cycle) ;
- 2)  $G$  est sans cycle et a  $n - 1$  arêtes ;
- 3)  $G$  est sans cycle et a un cycle dès qu'on ajoute une arête ;
- 4)  $G$  est connexe et non connexe dès qu'on enlève une arête ;
- 5) tout couple de sommet est relié par une chaîne unique.

**Exercice 2.2.5.** Démontrer la proposition ci-dessus.





**Définition 2.2.14 – Arbre couvrant**

Un graphe partiel connexe qui est un arbre est appelé **graphe couvrant** ou **arbre couvrant** (*spanning tree* en anglais).

**Algorithme**

Trier les arêtes par ordre croissant de poids

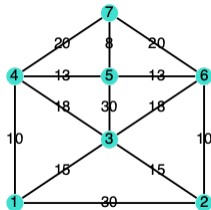
On choisit les arêtes dans cet ordre, et on garde la suivante tant qu'elle ne crée pas de cycle.

**Remarque 2.2.1.** C'est un algorithme glouton optimal <sup>a</sup>.

a. Un algorithme glouton est un algorithme dont le principe est de faire étape par étape un choix optimal.

**Exercice 2.2.6.**

Trouver un arbre couvrant minimum dans ce graphe pondéré.



**Définition 2.3.1 – espace des arcs**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . on représente chaque arc  $e_i$  par le vecteur de la base canonique dans  $\mathbb{R}^m$ . L'espace des arcs est alors  $\mathbb{R}^m$ .

Soit maintenant  $c$  un cycle du graphe non orienté induit par le graphe orienté  $G = (V, E)$  et fixons un sens de parcours de ce cycle. Nous pouvons alors comparer les orientations des arêtes de ce cycle à celles des arcs du graphe orienté de départ. On a alors la

**Définition 2.3.2 – vecteur associé à un cycle**

Soit  $c$  un cycle dans un graphe induit d'un graphe orienté. On associe à ce cycle le vecteur de l'espace des arcs  $\mu_c = (c_1, \dots, c_m)$

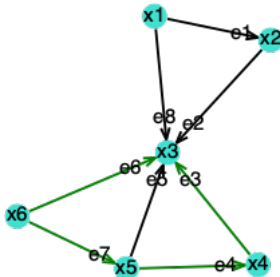
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c \text{ est orienté comme dans } G \\ -1 & \text{si } e_i \in c \text{ est orienté dans le sens opposé à celui de } G \\ 0 & \text{si } e_i \notin c. \end{cases}$$

**Remarque 2.3.1.** On considérera  $\mu_c$  comme une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  :  $\mu_c(e_i) = c_i$ .

### Définition 2.3.3 – Espace des cycles

On appelle espace des cycles d'un graphe orienté le sous-espace vectoriel de l'espace des arcs engendré par les cycles. On notera  $\mathcal{C}$  cet espace.

**Exemple 2.3.1.** Dans le graphe orienté suivant le cycle  $c = (x_6, x_3, x_4, x_5, x_6)$  a pour vecteur associé  $\mu_c = (0, 0, -1, -1, 0, 1, -1, 0)$





### Définition 2.3.4 – Cocycle

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté et  $(V_1, V_2)$  une partition des sommets, l'ensemble des arcs entre  $V_1$  et  $V_2$  est appelé un cocycle. On associe à un cocycle  $c^0$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  par  $\mu_{c^0} = (c_1^0, \dots, c_m^0) = (\mu_{c^0}(e_1), \dots, \mu_{c^0}(e_m))$  défini par

$$c_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c^0 \text{ est orienté de } V_1 \text{ vers } V_2 \\ -1 & \text{si } e_i \in c^0 \text{ est orienté de } V_2 \text{ vers } V_1 \\ 0 & \text{si } e_i \notin c^0. \end{cases}$$

### Définition 2.3.5 – Espace des cocycles

On appelle espace des cocycles d'un graphe orienté le sous-espace vectoriel de l'espace des arcs engendré par les cocycles. On notera  $\mathcal{C}^0$  cet espace.

**Définition 2.3.6 – Cycle fondamental**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté connexe et  $A$  un arbre couvrant du graphe non orienté induit. Cet arbre contient  $n - 1$  arêtes. Notons  $C = \{e_i \in E, e_i \notin A\}$ . Si  $C = \emptyset$  alors  $G$  est un arbre, sinon, pour chaque arête  $e$  dans  $C$  ajouté à l'arbre  $A$  on crée exactement un cycle élémentaire noté  $c_e$ . Ce cycle est un cycle fondamental.

**Remarque 2.3.2.** On associe à un arbre couvrant  $m - (n - 1)$  cycles fondamentaux.

**Remarque 2.3.3.** On définit de même les cocycles fondamentaux. Si à un arbre couvrant on retire une arête, on crée une partition de l'ensemble des sommets et donc on associe un cocycle dit fondamental. Associé à un arbre on peut associer  $(n - 1)$  cocycles fondamentaux.

## Théorème 2.3.7

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté connexe sans boucle et  $A$  un arbre couvrant du graphe non orienté induit. On a alors :

- 1) L'ensemble des cycles fondamentaux associés à l'arbre  $A$  est une base de l'espace des cycles. On appelle nombre cyclomatique la dimension de cet espace :  $\nu(G) = \dim \mathcal{C} = m - (n - 1)$ .
- 2) L'ensemble des cocycles fondamentaux associés à l'arbre  $A$  est une base de l'espace des cocycles,  $\dim \mathcal{C}^0 = n - 1$ .
- 3) Les espaces de cycles et de cocycles sont supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

- ■ Montrons que les cycles fondamentaux associé à un arbre sont linéairement indépendants.

On fixe, quitte à réordonner les arcs,  $R = \{e_n, \dots, e_m\}$  l'ensemble des arêtes du graphe qui ne sont pas présentes dans l'arbre  $A$ . Soient  $(c_i)_{i=n, \dots, m}$  les cycles fondamentaux associés à  $A$ . Soit  $\mu = \sum_{i=n}^m \lambda_i \mu_{c_i} = 0$ . Alors, pour tout  $j \in \{n, \dots, m\}$ ,  $\mu(e_j) = \pm \lambda_j = 0$ , car  $e_j$  n'apparaît que dans le cycle fondamental  $c_j$ . On en déduit que les vecteurs  $\mu_{c_i}$  sont linéairement indépendants. Par suite  $\dim \mathcal{C} > m - (n - 1)$

- De la même manière on montre que les  $(n-1)$  vecteurs  $\mu_{c_j^0}$  associés aux cocycles fondamentaux sont aussi linéairement indépendants et donc que  $\dim \mathcal{C}^0 \geq (n-1)$ .
- Montrons maintenant que les sous espaces  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^0$  sont orthogonaux. Soient  $c$  un cycle et  $c^0$  un cocycle défini par la partition  $(V_1, V_2)$  et considérons les 2 vecteurs associés

$$\begin{aligned}\mu_c &= (\mu_c(e_1), \dots, \mu_c(e_m)), \\ \mu_{c^0} &= (\mu_{c^0}(e_1), \dots, \mu_{c^0}(e_m)),\end{aligned}$$

alors  $\langle \mu_c, \mu_{c^0} \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_c(e_i) \mu_{c^0}(e_i)$ . Si  $\mu_c(e_i) \mu_{c^0}(e_i) \neq 0$ , alors l'arête  $e_i$  est dans  $c$  et dans  $c^0$  et ce nombre vaut 1 ou -1 suivant que l'arête va de  $V_1$  vers  $V_2$  ou de  $V_2$  vers  $V_1$ . On peut en effet considérer une orientation du cycle  $c$  tel que pour toutes les arêtes  $e$  communes avec le cocycle  $c^0$  on ait  $\mu_c(e) = 1$ . Mais le nombre d'arcs dans  $c \cap c^0$  est pair car chaque fois que l'on va de  $V_1$  vers  $V_2$  il faut un arc qui passe de  $V_2$  à  $V_1$  car  $c$  est un cycle. Par suite  $\langle \mu_c, \mu_{c^0} \rangle$  est simplement le nombre d'arcs dans  $c$  passant de  $V_1$  à  $V_2$  moins le nombre d'arcs passant de  $V_2$  à  $V_1$ , ce qui est égal à 0.

- Montrons enfin 1) et 2).  
Les deux sous espaces  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^0$  sont donc supplémentaires, par suite  $m \geq \dim \mathcal{C} + \dim \mathcal{C}^0 \geq m - (n-1) + (n-1) = m$ . On en déduit alors que  $\dim \mathcal{C} = m - (n-1)$  et que  $\dim \mathcal{C}^0 = n-1$  et donc les assertions 1) et 2).

**Corollaire 2.3.8**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe orienté sans boucle ayant  $k$  composantes connexes, alors

$$\nu(G) = \dim \mathcal{C} = m - n + k \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{C}^0 = n - k.$$

On peut développer une théorie analogue pour les graphes non orientés : il suffit de supprimer les signes. Mais comme les coefficients  $-1$  et  $1$  ne se compensent plus, on remplace le corps  $\mathbb{R}$  par le corps à 2 éléments :  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On définit alors

- Sur l'ensemble  $\{0, 1\}$  l'addition modulo 2

+	0	1
0	0	1
1	1	0

- L'espace vectoriel des arêtes  $\prod_{i=1}^m \{0, 1\}$  muni des opérations  
somme modulo 2  
multiplication par un scalaire dans le corps  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- le vecteur associé à un cycle  $c$  par

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c \\ 0 & \text{si } e_i \notin c. \end{cases}$$

- le vecteur associé à un cocycle  $c^0$  par

$$c_i^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } e_i \in c^0 \\ 0 & \text{si } e_i \notin c^0. \end{cases}$$

**Théorème 2.3.9**

Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe sans boucle et  $A$  un arbre couvrant. On a alors :

- 1) L'ensemble des cycles fondamentaux associés à l'arbre  $A$  est une base du  $\mathbb{F}_2$  espace vectoriel des cycles. On appelle nombre cyclomatique la dimension de cet espace :  $\nu(G) = \dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C} = m - (n - 1)$ .
- 2) L'ensemble des cocycles fondamentaux associés à l'arbre  $A$  est une base du  $\mathbb{F}_2$  espace vectoriel des cocycles,  $\dim_{\mathbb{F}_2} \mathcal{C}^0 = n - 1$ .
- 3) Les espaces de cycles et de cocycles sont supplémentaires et orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

---

**Exercice 2.3.2.** Application de l'algorithme de Kruskal (suite).  
Trouver une base de cycles dans le graphe de l'exercice 2.2.6.