TD 5 – Algorithmie

Problème : Résolution par pénalisation.

Soit f une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \geq \|x\|_2$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} \ : \ \min_{\|x\|_2^2=1} f(x), \quad \text{et } \mathcal{P}_n \ : \ \min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) + n\left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2,$$

où n est un entier naturel.

(1) Justifier que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}$ admettent au moins une solution. Dans toute la suite, nous supposerons que ces deux problèmes admettent une solution unique et nous noterons $x^\star$ et $x_n^\star$ les solutions respectives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_n$.

(2) On pose $\Phi_n(x) = f(x) + n\left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2$.

(2.1) Montrer que, si $\|x\|_2 \geq 2$, $\Phi_n(x) \geq 2 + 9n$.

(2.2) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$, on a $\Phi_n(x) \leq M$.

(2.3) En déduire que la suite $(x_n^\star)$ est bornée et que $(x_n^\star)$ admet une sous-suite convergente (y_n), dont la limite sera notée $y^\star$ dans la suite.

(3) Soit $\gamma(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$. Calculer $\nabla\gamma(x)$ et montrer que $\nabla f(y_n) + 4n(\|y_n\|_2^2 - 1)y_n = 0$. En déduire que y^* est tel que soit $\|y^*\|_2 = 0$, soit $\|y^*\|_2 = 1$.

(4) Montrer que, si on suppose que $\|y^\star\|_2 = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(y_n) = +\infty$. Déduire des résultats de la question (2) que l'on aboutit à une contradiction et donc que $\|y^\star\|_2 = 1$.

(5) Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} 4n(\|y_n\|_2^2 - 1)$ existe et qu'il existe β tel que $\nabla f(y^\star) + \beta y^\star = 0$.

(6) Former le lagrangien associé au problème $\mathcal{P}$. Montrer alors que $y^\star$ vérifie la condition au premier ordre de Kuhn-Tucker-Lagrange et donner le multiplicateur de Lagrange associé. Expliquer pourquoi chercher à résoudre $\mathcal{P}$ en considérant $\mathcal{P}_n$ est appelé technique de pénalisation.