Sup'Galilée
MACS1

Année 2020/2021

Analyse numérique - TD8
Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

TM : Travail à la Maison

Rappel (c.f. Cours)

Soient $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, et deux matrices $\mathbb{M} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $\mathbb{N} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$. Soient $\boldsymbol{u}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On considère l'algorithme

$$\mathbb{M}\,\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \mathbb{N}\,\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{b}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

On pose $\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}$. Si la suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle converge vers la solution $\boldsymbol{u}$ du système $\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$. De plus, la suite $(\boldsymbol{u}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{u}$ pour toute donnée initiale $\boldsymbol{u}^{(0)}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Exercice 1 (cas particulier des matrices hermitiennes)

Soit $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

1. Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

2. Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.
   1. Montrer que
   $$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}$$
   et que
   $$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle$$
   2. En déduire que
   $$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rangle.$$
3. Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.
4. Démontrer par l'absurde que si $\rho(\mathbb{B}) < 1$ alors $\mathbb{A}$ est définie positive.

Exercice 2 (méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel)

Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{A}$ la matrice définie par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice $\mathbb{A}$ est-elle inversible ?
2. Etudier la convergence de la méthode itérative de Jacobi pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
3. Etudier la convergence de la méthode itérative de Gauss-Seidel pour résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Exercice 3 (méthodes de relaxation) (TM)

On considère la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par la méthode de relaxation, avec $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ donnés. Soit $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ fixé. On définit la suite $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs $\mathbb{R}^n$, pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{x}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_n^{(k+1)})^t \\ \text{avec} \quad & x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)x_i^{(k)}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \end{aligned} \tag{2}$$

1. En écrivant $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, avec, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$\begin{aligned} d_{ii} &= a_{ii},\ d_{ij} = 0,\ \text{si } i \neq j, \\ e_{ij} &= -a_{ij},\ \text{si } i > j,\ e_{ij} = 0,\ \text{si } i \leqslant j, \\ f_{ij} &= -a_{ij},\ \text{si } i < j,\ f_{ij} = 0,\ \text{si } i \geqslant j, \end{aligned}$$

montrer que (2) s'écrit sous la forme $\mathbb{M}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \mathbb{N}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b}$, où l'on précisera les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ associées. Réécrire cette relation sous la forme $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$, où l'on précisera la matrice $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$ associés.
On note dans la suite $\mathcal{L}_\omega = \mathbb{B}$ la matrice d'itération de la méthode de relaxation.
2. Dans cette question on va montrer que $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geqslant |\omega - 1|$ pour $\omega \neq 0$. On note $p_{\mathcal{L}_\omega}$ le polynôme caractéristique de $\mathcal{L}_\omega$. Il s'écrit sous la forme

$$p_{\mathcal{L}_\omega}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

On note $\{\lambda_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$, c'est-à-dire les racines de $p_{\mathcal{L}_\omega}$.
   (a) En utilisant la relation $\prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n\alpha_0 = (-1)^n p_{\mathcal{L}_\omega}(0)$, montrer que

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det\left((1-\omega)\mathbb{I}_n + \omega\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\right).$$

   (b) En déduire que

$$\prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |1-\omega|^n,$$

   et conclure que $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geqslant |1-\omega|$.

   Déduire de la question précédente que si la méthode de relaxation converge, alors nécessairement $\omega \in]0,2[$.
3. En utilisant le résultat de l'exercice 5,montrer que si $\mathbb{A}$ est symétrique définie positive, et si $\omega \in]0,2[$, alors la méthode de relaxation converge. En déduire, en particulier, que la méthode de Gauss-Seidel converge.

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que ses éléments diagonaux soient tous non nuls et soit $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant la méthode itérative suivante : α étant un réel non nul et le vecteur $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ étant donné, on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\mathbb{I} - \alpha\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A})\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\mathbb{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{3}$$

où $\mathbb{I}$ est la matrice identité et $\mathbb{D}$ la matrice diagonale constituée de la diagonale de $\mathbb{A}$ ($D_{ii} = A_{ii},\ \forall i \in [\![1,n]\!]$).

1. Montrer que si la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$, alors $\bar{\boldsymbol{x}}$ est la solution du système linéaire $\mathbb{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$.
2. Exprimer les coefficients de la matrice $(\mathbb{I} - \alpha\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A})$ en fonction des coefficients de $\mathbb{A}$.
3. On suppose que $\mathbb{A}$ est à diagonale strictement dominante [1] et que $0 < \alpha \leqslant 1$.
   (a) On rappelle que pour $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup\limits_{\boldsymbol{x}\neq 0} \dfrac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$.
   Montrer que

$$\|\mathbb{I} - \alpha\mathbb{D}^{-1}\mathbb{A}\|_\infty < 1.$$

   (b) Soit $\|\cdot\|_s$ une norme matricielle subordonnée. Montrer que

$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|_s,$$

   et en déduire que $\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|_\infty$.
   (c) Donner la matrice d'itération de la méthode itérative (3). En déduire que cette méthode converge.
4. Quelle méthode itérative étudiée en cours retrouve-t-on lorsque $\alpha = 1$? Justifier.

1. Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si, $|A_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |A_{i,j}|, \forall i \in [\![1,n]\!]$.