TD 2 – Calcul différentiel

▷ **Exercice 1.**

1.1. Soit f de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} y\cos x - z\sin x \\ xyz \end{bmatrix}.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}^3$, et donner l'expression de f'. f est-elle de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}^3$?

1.2. Sur $\mathbf{R}^n$, montrer que l'application $\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ (avec $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ est deux fois dérivable, et exprimer son développement limité à l'ordre 2 en tout point.

1.3. Sur $\mathbf{R}^n$, soit $f(x) = \cos(\|x\|^2)$ (avec $\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$).
Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}^n$, et calculer $\nabla f(x)$ ainsi que le hessien en tout $x \in \mathbf{R}^n$.

▷ **Exercice 2.** Soient $A \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$, $b \in \mathbf{R}^n$, et $c \in \mathbf{R}$; on pose :

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c.$$

2.1. Montrer que f est dérivable et calculer ∇f. Même calcul en supposant $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$.

2.2. Montrer que ∇f est dérivable et calculer $\nabla^2 f$. Même calcul en supposant $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$.

▷ **Exercice 3.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, $b \in \mathbf{R}^n$, et soit l'application $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ deux fois dérivable. On considère alors l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = \frac{1}{2}(Ax(t)|x(t)) - (b|x(t)) \end{cases},$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.

3.1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

3.2. Exprimer $f'(t)$ et $f''(t)$. Vous pourrez traiter dans un premier temps le cas où $n = 1$ (et où A et b sont donc des scalaires), puis voir comment généraliser.

$\triangleright$ **Exercice 4.** Soit $f = \|x\|$ où la norme est euclidienne.

4.1. Montrer que f est dérivable sur l'ouvert $\mathbf{R}^n \backslash \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ et que :

$$\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

4.2. Montrer que f n'est pas dérivable en $0_{\mathbf{R}^n}$.

4.3. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}^n \backslash \{0_{\mathbf{R}^n}\}$ et donner $\nabla^2 f$.

$\triangleright$ **Exercice 5.** Soit $F : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ dont chaque application composante F_i, $i = 1, m$, est deux fois dérivable. On définit

$$f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$$

où la norme est la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^p$.

5.1. Montrer que f est dérivable et calculer ∇f.

5.2. Montrer que ∇f est dérivable et calculer $\nabla^2 f$.

5.3. Application au cas particulier où $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$.

Sujets en ligne sous `moodle-n7.inp-toulouse.fr`

TD2
Calcul Diff.
1

Exercice 1 :

1.1. $f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y\cos x - z\sin x \\ xyz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{bmatrix}$

$f(x+h,y,z) = \begin{pmatrix} y\cos(x+h) - z\sin(x+h) \\ (x+h)yz \end{pmatrix}$

$=$

$\cos(x+h) = \cos x \cos(h) - \sin(x)\sin(h)$

$\simeq \cos x\left(1 - \frac{h^2}{2}\right) - \sin(x)(h) = \cos(x) - h\sin x$

$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$

$= \sin(x) + h\cos(x)$

$= \begin{pmatrix} y\cos x - z\sin(x) \\ xyz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -yh\sin(x) - zh\cos(x) \\ hyz \end{pmatrix} +$

On vérifie que les dérivées partielles sont continues

$f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ $\quad f'(x) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$h \mapsto f'(x).h$

$= Jf(x) \times h$

$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\sin x - z\cos x \\ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -(y\sin x + z\cos x) & \cos x & -\sin x \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$

$f'(x) = Jf(x)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ On doit vérif que $f' : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ continue ?

$\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow$ ttes les dérivées part. existent et sont cont.

1.2) On essaye de se ramener à l'exercice 2.

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{2}\|x\|^2 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}\langle Ax|x\rangle + (b|x) + c.$$

on a $c = 0$ $b = 0_{\mathbb{R}^n}$ $A = I_n$.

Donc $\nabla\varphi(x) = x$ et $\nabla^2_{\varphi(x)} = I$

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x).h + \frac{1}{2}\varphi''(x)(h,h) + \|h\|^2_E\,\varepsilon(h)$$
$$= \frac{1}{2}\|x\|^2 + x^T h + \frac{1}{2}h^T h + \underbrace{\|h\|^2_E\,\varepsilon(h)}_{\hookrightarrow \|h\|^2_E \times 0}$$
$$= \frac{1}{2}\|x\|^2 + x^T h + \frac{1}{2}\|h\|^2.$$

Formule de Taylor-Young:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x) | h \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x) h}_{\frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x) h | h \rangle} + \|h\|^2_E\,\varepsilon(h)$$

La matrice Hessienne est toujours symétrique. (ie $\nabla^2 f(x)$).

1.3)
$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g_2} \mathbb{R} \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}.$$
$$x \to \|x\|^2 \to \cos\|x\|^2$$
$$f = g_1 \circ g_2$$

$g_2 = 2\varphi$

$$g_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \\ y \to \cos(y). \end{cases}$$

$$f'(x).h = g_1'(g_2(x))(g_2'(x).h).$$

avec $h \in \mathbb{R}^n$

or $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Donc $g_2'(x).h = 2\varphi'(x).h$.

$$g_1'(y).k = -\sin y \times k.$$

$$f'(x).h = -\sin(2\varphi(x)).(2x.h) \qquad \nabla f(x) = -2\sin(\|x\|^2)x$$
$$= -\sin(\|x\|^2).(2x.h).$$
$$= -2\sin(\|x\|^2).\langle x|h\rangle$$
$$= \langle -2\sin(\|x\|^2)x \,|\, h\rangle$$

TD2
Calcul Diff
2.

Exercice 2:

2.1

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c \end{cases}$$

On essaye de mettre la fonction sous la forme:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \text{En dim finie.}$$
$$= f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \text{En dim finie + val ds } \mathbb{R}$$
$$= f(x) + J_f(x) \times h + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \text{En dim finie.}$$

$$f(x+h) = \frac{1}{2}(A(x+h)|(x+h)) + (b|(x+h)) + c.$$

$$= \frac{1}{2}\Big((Ax|x) + (Ax|h) + (Ah|x) + (Ah|h)\Big) + (b|x) + (b|h) + c.$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c}_{f(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\Big((Ax|h) + (Ah|x)\Big)}_{} + (Ah|h) + (b|h)$$

$$= f(x) + \left(\frac{1}{2}Ax + b \,\Big|\, h\right) + \frac{1}{2}(Ah|x) + \frac{1}{2}(Ah|h).$$

Or $(Ah|x) = (AH)^T X = H^T(A^T X) = (H, A^T x)$

$$f(x,h) = f(x) + \left(\frac{1}{2}(Ax + A^T x) + b \,\Big|\, h\right) + \frac{1}{2}\|h\|\left(Ah \,\Big|\, \frac{h}{\|h\|}\right).$$

On pose: $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(Ax + A^T x) + b$

$$\varepsilon(h) = \left(\frac{1}{2}Ah \,\Big|\, \frac{h}{\|h\|}\right).$$

On a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\|AX\| \leq c\|X\|$

et $\underbrace{\left|\frac{1}{2}\left(Ah, \frac{h}{\|h\|}\right)\right|}_{\varepsilon(h)} \leq \frac{c}{2}\|h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ Donc $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Si $A = A^T$ $\nabla f(x) = Ax + b$

2.2. $\nabla f(x+h) = \frac{1}{2} A(x+h) + \frac{1}{2} A^T(x+h) + b$.

$= \frac{1}{2} Ax + \frac{1}{2} A^T x + b + \frac{1}{2} Ah + \frac{1}{2} A^T h$.

$\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad = \underbrace{\nabla f(x) + \frac{1}{2}(A+A^T)h}$. $+ \|h\| \times O_h$

$\nabla^2 f(x) = H_f(x) = J_{\nabla f}(x)$.

Si on a $g \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto Bx + b \end{cases}$

Alors $g'(x) \times h = J_g(x) \times h$. $\longrightarrow J_g(x) = B$.

$g(x+h) = B(x+h) + b = Bx + b + B \times h + h \times O$.

$= g(x) + B \times h + h \times O$.

Donc $J_g(x) = B$.

Dans notre cas $\nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^T)$

Si $A = A^T$ $\underline{\nabla^2 f(x) = A}$.

<u>Fin exercice 1</u>.

$\nabla f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto -2 \sin \|x\|^2 x \end{cases}$ $\qquad \nabla^2 f(x) = J_{\nabla f}(x)$.

$f'(x).h = g_1'(g_2(x)).(g_2'(x).h)$

$= \left[J_{g_1}(g_2(x)) \times J_{g_2}(x) \right] \times h$

$= J_f(x) \times h$.

Pour h <u>fixe</u> : $f'(.).h : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x).h = -2\sin(\|x\|^2) \times \langle x | h \rangle. \end{cases}$

et $(f'(x).h)'.k = f''(x)(h,k) = h^T \nabla^2 f(x) K$.

TD2.
Calcul Diff
3

$f'(x).h = -2\sin(\|x\|^2) \times \langle x|h \rangle$ $\quad (u(x) \times v(x))' = u'v + uv'$

$(f'(x).h)'.k = (-2\sin(\|x\|^2) \times \langle x|h \rangle)'.k + \langle x|h \rangle \times (-2\sin(\|x\|^2)')'.k$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x \to \langle x|h \rangle$

$\varphi(x+k) = \varphi(x+k|h\rangle$
$= \langle x|h \rangle + \langle k|h \rangle + 0 \times \|h\|$
$= \varphi(x) + \langle k|h \rangle$

$(f'(x).h)'.k = (u'(x).k) \times v(x) + u(x) \times (v'(x).k)$.
$u(x) = -2\sin\|x\|^2$
$u'(x).k = -4\cos\|x\|^2 \langle x,k \rangle$.
$v(x) = \langle x,k \rangle \Rightarrow v'(x).k = \langle k.h \rangle$.

Donc $(f'(x).h)'.k = -4\cos(\|x\|^2)\langle x|k \rangle . \langle x|h \rangle$
$-2\sin(\|x\|^2) \times \langle k|h \rangle$

$f''(x)(h,k) = k^T(-4\cos(\|x\|^2) x\, x^T h + k^T(-2\sin(\|x\|^2) \times I) h$.
$= k^T \underbrace{[-4\cos(\|x\|^2) x x^T - 2\sin(\|x\|^2) \times I]}_{\nabla^2 f(x)} h$.

Exercice 3 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \to f(t) = \frac{1}{2}(Ax(t)|x(t)) - (b|x(t))$

$\mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$t \to x(t) \to g(x(t))$.

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$y \to g(y) = \frac{1}{2}(Ay|y) - (b|y)$.

$f = g \circ x$.
$g(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\|x\|} I y|y\right)$ $\quad \nabla g(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\|x\|} x\right) = \frac{2x}{\|x\|}$

f est 2 fois dérivable par composée de f° 2 fois dv.

Rappel: Dérivée d'une forme bilinéaire

$$B'(x,y).(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$$

$$B(x+h, y+k) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k)$$
$$= B(x,y) + (B(x,K) + B(h,y)) + \underbrace{B(h,K)}_{\substack{\leq c\|h\|_E\|K\|_E \\ \leq c\,\|(h,k)\|_E^2}}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{R}^n \xrightarrow{Q} \mathbb{R} \\ t \longrightarrow x(t) \longrightarrow \frac{1}{2}\langle Ax(t) | x(t)\rangle - \langle b, x(t)\rangle \end{cases}$$

$f = Q \circ x$ On a $Q \in \mathcal{C}^\infty$ d'après exo pcdt

Par composée de fonctions 2 fois dblé f est deux fois dble

$$Q'(y).k = \langle Ay - b | k\rangle$$
$$\nabla Q(y) = Ay - b$$

Donc $f'(t).\cancel{k} = Q'(x(t)) \circ (x'(t).\cancel{k})$
$$= \langle Ax(t) - b \,|\, x'(t)\rangle$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (Ax(t) - b, x'(t)) \longmapsto \langle Ax(t) - b | x'(t)\rangle$$

$$f' = B \circ \psi$$
$$f''(t)\cancel{k} = B' \circ \psi(t) \circ (\psi'(t).\cancel{k})$$
$$= B'(\psi(t))(Ax'(t), x''(t))$$
$$= B(Ax(t) - b, x''(t)) + B(x'(t), Ax'(t))$$
$$f''(t) = \langle Ax(t) | x''(t)\rangle - \langle b | x''(t)\rangle + \langle Ax'(t) | x'(t)\rangle$$

TD2
Calcul Diff
4.

Exercice 4 :

1/ On a $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \dfrac{2 x_1}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$

Donc comme $\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} e_i$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où e bc de $\mathbb{R}^n$

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2 x_i}{2\|x\|} e_i$$

$$= \frac{1}{\|x\|} \times \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \frac{x}{\|x\|}$$

On peut aussi considérer $g = f \circ h$ $\quad x \xrightarrow{h} \|x\|^2 \xrightarrow{f} \sqrt{\|x\|^2}$

2/ $f(0 + th) = |t| \, \|h\| \underset{\text{devrait être égal si dv en 0}}{=} \underbrace{\cancel{f(0)}}_{\to 0} + t f'(0)(h) + \|th\| \varepsilon(th)$

Si $f'(0)$ existe en divisant par $t\|h\|$

$$\frac{|t|}{t} = f'(0) \frac{h}{\|h\|} + \frac{|t|}{t} \varepsilon(th)$$

Quand $t > 0$ par PLT $t \to 0^+$ On a $1 = f'(0) \dfrac{h}{\|h\|}$
Quand $t < 0$ par PLT $t \to 0^-$ —— $-1 = f'(0) \dfrac{h}{\|h\|}$ Absurde
Donc pas DV en 0.

Sinon considérer $f(0 + t e_i) = |t| \leftarrow$ pas dv en 0

3/ $\nabla f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longrightarrow \nabla f(x) = \dfrac{x}{\|x\|} \end{cases}$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g_2} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow (\langle x, h\rangle, \|x\|) \longrightarrow \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}$$

$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(a, b) \to \dfrac{a}{b}$

<u>h fixé</u> $f'(\cdot) h \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x).h \end{cases}$

$$f'(x).h = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}$$

$$f''(x)(h,k) = (f'(x).h)'.k$$
$$= (g_1 \circ g_2(x))'.k \qquad g_2'(x).k = \left(\langle h,k\rangle, \frac{\langle x,k\rangle}{\|x\|}\right)$$
$$= g_1'(g_2(x)) \circ (g_2'(x).k)$$

$$= \frac{\langle x,k\rangle'\|x\| - \langle x,k\rangle \frac{\langle x,k\rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|x\|}(h^T I k) - \frac{1}{\|x\|^2} h^T x x^T k = h^T \nabla^2 f(x) k.$$

$$\boxed{\nabla^2 f(x) = \frac{1}{\|x\|} I - \frac{1}{\|x\|^2} x x^T}$$

Exercice 5 :

$$(P) : \begin{cases} \min \frac{1}{2}\|F(x)\|^2 = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{F} F(x) \xrightarrow{g} \frac{1}{2}\|F(x)\|^2 \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \\ y \to \frac{1}{2}\|y\|^2 \end{cases}$$
$$f = g \circ F$$

1/ f est dérivable en tant que composée de fonction dérivable. $f'(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1} 2F_i(x)\nabla F_i(x) = J_F(x)^T F(x)$

$$g'(y).k = \langle y, k\rangle$$
$$f'(x).h = g'(F(x))\,F'(x).h$$
$$= \langle F(x), \underbrace{F'(x).h}_{J_{F(x)} \times h} \rangle$$
$$= \langle J_F(x)^T F(x), h\rangle = \langle \nabla f(x), h\rangle.$$

$$\nabla f(x) = J_F(x)^T F(x)$$

TD2
Calcul Diff
5

2/ $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \to F_i(x)\,\nabla F_i(x)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \xrightarrow{g_2} \mathbb{R}^n$$

$$x \to (F_i(x), \nabla F_i(x)) \longmapsto F_i(x)\nabla F_i(x)$$

$g_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bilinéaire continue.

$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha \times x$

$$g_2'(\alpha, y)(\beta, k) = g_2(\alpha, k) + g_2(\beta, y) = \alpha k + \beta y.$$

$$g_1'(x)(h) = (F_i'(x).h, \nabla^2 F_i(x) h)$$
$$= \langle \nabla F_i(x) | h \rangle, \nabla^2 F_i(x).h \rangle$$

$$f' = g_2 \circ g_1 = g_2'(g_1(x))(g_1'(x).h)$$

$$= F_i(x) \times \nabla^2 F_i(x).h + F_i'(x).h\,\nabla F_i(x)$$
$$= F_i(x) \times \nabla^2 F_i(x).h + \langle \nabla F_i(x) | h \rangle \times \nabla F_i(x)$$
$$= F_i(x) \times \nabla^2 F_i(x) \times h + \nabla F_i(x) \times \nabla F_i(x)^T \times h$$
$$= (F_i(x) \times \nabla^2 F_i(x) * \nabla F_i(x) \times \nabla F_i(x)^T) \times h.$$

Donc $\nabla^2 f(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_i(x) \times \nabla^2 F_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \nabla F_i(x) \times \nabla F_i(x)^T}$

On peut le retrouver avec la dérivée d'un produit $(u\times v)' = u'v + uv'$ ⚠ On veut une matrice $n\times n$.

3/ $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$ $\quad F(x) = Ax - b$

$$f'(x) = J_F(x)^T (Ax - b)$$
$$= A^T(Ax - b)$$
$$= A^T A x - A^T b$$

$$\nabla^2 f(x) = A^T A$$