TD2
opti

TD – Opti-Num
CN et CNS
cas avec contraintes

▷ **Exercice 1.** Soient g un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$ et c et δ deux constantes strictement positives. On considère le problème d'optimisation suivant

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(s) = g^T s + c\\ ||s||^2 \leq \delta.\end{array}\right.$$

1.1. Représenter l'ensemble des contraintes et donner graphiquement la solution.

1.2. Résoudre le problème (P).

▷ **Exercice 2.** Soit $g \neq 0$ et H une matrice symétrique. On considère le problème

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min q(s) = \frac{1}{2}s^T Hs + g^T s + c\\ s = -\alpha g, \quad \alpha \geq 0\\ ||s||^2 \leq \delta.\end{array}\right.$$

2.1. Écrire $f(\alpha) = q(s)$ et le problème d'optimisation que doit vérifier α^* pour que $s^* = -\alpha^* g$ soit solution du problème (P).

2.2. Résoudre (P). On considérera les deux cas $g^T Hg \leq 0$ et $g^T Hg > 0$.

▷ **Exercice 3.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème

Théorème 1. *s^* est solution du problème*

$$(P^{rc})\left\{\begin{array}{l}\min q(s) = f + g^T s + \frac{1}{2}s^T Hs\\ ||s||^2 \leq \delta,\end{array}\right.$$

si et seulement si $||s^*||^2 \leq \delta$ et il existe $\mu^* \geq 0$ tel que

1. *$(H + 2\mu^* I)s^* = -g$;*
2. *$\mu^*(||s^*||^2 - \delta) = 0$;*
3. *$H + 2\mu^* I$ est semi-définie positive.*

3.1. Démontrer le lemme

Lemme 2. *Soit q la forme quadratique $q(s) = g^T s + \frac{1}{2}s^T Hs$, H symétrique, alors les assertions suivantes sont vraies :*

1. *q atteint un minimum si et seulement si H est semi-définie positive et $g \in \mathrm{Im}H$ et dans ce cas tout point solution de $Hs = -g$ est un minimum global de q.*
2. *q a un unique minimum si et seulement si H est définie positive.*

3.2. Démontrer le théorème.

▷ **Exercice 4.** On considère le problème d'optimisation

$$(P^{(k)})\left\{\begin{array}{l}\min f(s) = \frac{1}{2}||r(\beta^{(k)}) + J(\beta^{(k)})s||^2\\ ||s||^2 \leq \delta^{(k)}\\ s \in \mathbf{R}^p,\end{array}\right.$$

où $J(\beta^{(k)})$ est une matrice (n,p) de rang p.

Démontrez que la solution de $(P^{(k)})$ s'écrit

$$s^{(k+1)} = -(J(\beta^{(k)})^T J(\beta^{(k)}) + \mu^{(k+1)} I)^{-1} J(\beta^{(k)})^T r(\beta^{(k)})$$

avec

$$\mu^{(k+1)} = \left\{\begin{array}{ll}0 & \text{si } ||s^{GN}||^2 = ||(J(\beta^{(k)})^T J(\beta^{(k)}))^{-1} J(\beta^{(k)})^T r(\beta^{(k)})||^2 \leq \delta^{(k)}\\ \mu^{(k+1)} > 0 & \text{unique tel que } ||s(\mu^{(k+1)})||^2 = \delta^{(k)}.\end{array}\right.$$

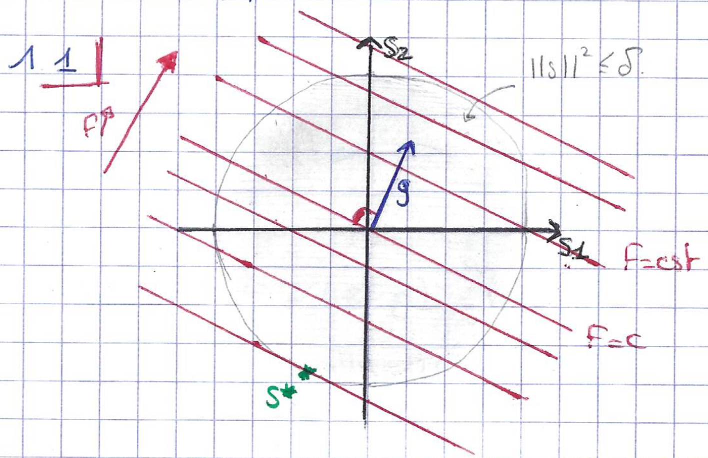
TD 2.1
Opti

CN et CNS, cas avec contraintes

Exercice 1 :

$(P) : \begin{cases} \min f(s) = g^T s + c \\ \|s\|^2 \leq \delta \end{cases}$ $g \in \mathbb{R}^n, g \neq 0, c > 0, \delta > 0$

1.1)



$$s^* = \frac{g}{\|g\|} \times \sqrt{\delta}$$

1.2) * f $\mathcal{C}^0$ sur l'ensemble de contraintes $\{s \in \mathbb{R}^n, \|s\|^2 \leq \delta\}$ compact et non vide donc (P) admet une solution.

* Calculons la solution

{ (P) convexe donc "CN1 = CNS"

- f et $\varphi(s) = \|s\|^2 - \delta$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$
- HQC est vérifiée car $\delta > 0$
  $\nabla\varphi(s) = 2s \neq 0$ sur $\varphi = 0$

- CN1 : Si s^* est solution, alors $\exists \mu^* \in \mathbb{R}$ tq
$$\begin{cases} \nabla_s L(s^*, \mu^*) = g + 2\mu^* s^* = 0 \\ \mu^* \geq 0 \\ \mu^* (\|s^*\|^2 - \delta) = 0 \end{cases}$$

avec $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(s, \mu) \to L(s, \mu) = g^T s + c + \mu(\|s\|^2 - \delta)$

supposons que $\varphi(s^*) = \|s^*\|^2 - \delta < 0$
Alors $\mu^* = 0$ d'après la condition de complémentarité et d'après $\nabla_s L(s^*, \mu^*) = 0$
on a $g = 0$, ce qui n'est pas, donc $\|s^*\|^2 = \delta$

Ainsi : $\|g\| = 2\mu^* \|s^*\| = 2\mu^* \sqrt{\delta} \Rightarrow \mu^* = \frac{\|g\|}{2\sqrt{\delta}}$

$$\Rightarrow s^* = -\frac{g}{2\mu^*} = -\frac{g}{\|g\|}\sqrt{\delta}$$

$\Rightarrow (s^*, \mu^*) = \left(\frac{-g}{\|g\|}\sqrt{\delta}, \frac{\|g\|}{2\sqrt{\delta}}\right)$ est l'unique solution de la CN1 et donc s^* est le min (global) de (P)

Remarque : Si on considère le pb

$\begin{cases} \min f(s) = g^T s + c \\ \|s\|^2 = \delta \end{cases}$, alors la CN1 ne permet pas de distinguer le minimum du maximum. Il faut la CN2.

Si on pose $\mathcal{L} = g^T s + c + \lambda(\|s\|^2 - \delta)$ alors :

$\nabla_s \mathcal{L} = g + 2\lambda s$ et $\nabla^2_{ss}\mathcal{L} = 2\lambda I$. et la CN2 $\nabla^2_{ss}\mathcal{L} \geq 0$ sur $T_c(\mathcal{C}, s^*)$ implique $\lambda \geq 0$.

Exercice 3 :

3.1 | Démontrer le lemme $\quad q(s) = (g|s) + \frac{1}{2}(Hs|s)$

1.a) ($\Rightarrow$) Supposons que $q(s) = g^T s + \frac{1}{2} s^T H s$ atteint un minimum, noté s^*

CN1 : $\nabla q(s^*) = g + Hs^* = 0 \Rightarrow g \in \operatorname{Im} H$

CN2 : $\nabla^2 q(s^*) = (\nabla q)'(s^*) = H \geq 0$

1.b) Supposons $H \geq 0$ et $g \in \operatorname{Im} H$.

- $H \geq 0 \Rightarrow q$ convexe donc "CN1 = CNS" et toute solution de CN1 est un minimum global
- $\nabla q(s) = g + Hs = 0$ admet une solution car $g \in \operatorname{Im} h$.

$\Rightarrow$ q admet une solution qui est un minimum.

(a) + (b) $\Rightarrow$ q atteint un minimum $\Leftrightarrow H \geq 0$ et $g \in \operatorname{Im} H$

Remarque : $H \geq 0$ donc q convexe et donc tout point solution de $Hs + g = 0$ est un minimum global.

~~3.2 | Démontrer le théorème~~

2.a) q a un unique minimum $\Rightarrow \exists !$ sol à $Hs + g = 0 \Rightarrow H$ inversible donc $H > 0$ (on a $H \geq 0$ et $g \in \operatorname{Im} H$ car q a une sol).

2.b) Supposons que $H > 0$.

- q strictement convexe donc au plus une solution
- $\nabla q(s) = Hs + g = 0$ admet une sol car H inversible

$\Rightarrow$ q admet un unique min (q cv donc CN1 = CNS)

~~(a) + (b)~~

ⓐ + ⓑ $\Rightarrow$ q a un unique min $\Leftrightarrow H > 0$

3.2 | Démontrer le théorème

Théorème : s^* sol (P^{rc}) $\begin{cases} \min q(s) = f + g^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \ H \text{ symétrique} \\ \|s\|^2 < \delta \end{cases}$

ssi $\|s^*\|^2 < \delta$ et $\exists \mu^* \geq 0$ tq

1. $(H + 2\mu^* I) s^* = -g$
2. $\mu^* (\|s^*\|^2 - \delta) = 0$
3. $H + 2\mu^* I \geq 0$

Remarque : On ne suppose pas $H \geq 0$!

On pose $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(s, \mu) \longmapsto \mathcal{L}(s, \mu) = q(s) + \mu (\|s\|^2 - \delta)$

cas 1 : $\|s^*\|^2 < \delta$, ie la solution est intérieure

$\Rightarrow \mu^* = 0$ et on applique le lemme.

cas 2 : $\|s^*\|^2 = \delta$ HQC vérifiée car $\delta \neq 0$.

a) $(\Rightarrow)$

CN1 $\exists \mu^* \geq 0$ tq $\begin{cases} \nabla_s \mathcal{L}(s^*, \mu^*) = (H + 2\mu^* I) s^* + g = 0 \\ \mu^* (\|s^*\|^2 - \delta) = 0 \end{cases}$

CN2 : $(\nabla^2_{ss} \mathcal{L}(s^*, \mu^*) d \mid d) \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$

tq $(d \mid s^*) = d^T s^* = 0$.

avec $\nabla^2_{ss} \mathcal{L}((s^*, \mu^*)) = H + 2\mu^* I$

Remarque : On veut $(\nabla^2_{ss} \mathcal{L}(s^*, \mu^*) d \mid d) \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$

. Soit $d \neq 0$ tq $d^T s^* = 0$ On note $t = -2 \dfrac{d^T s^*}{d^T d}$

$\|s^* + td\| = \left\| \left(I - 2 \dfrac{dd^T}{d^T d} \right) s^* \right\| = \|s^*\|$ cf.

en notant $A = 2 \dfrac{dd^T}{d^T d}$ on a $A^T = A$, $A^2 = 2A$ donc

$$\begin{aligned} \|(I - A)s\|^2 &= s^T (I - A)^T (I - A) s \\ &= s^T (I - A - A^T - A^T A) s \\ &= s^T (I - 2A - A^2) s \\ &= s^T s \end{aligned}$$

(on omet $*$).

$\Rightarrow q(s + td) + \mu \|s + td\|^2 \geq q(s) + \mu \|s + td\|^2$, car s min de q sur $\|b\|^2 \leq \delta$
$= q(s) + \mu \|s\|^2$ et $\|s + td\| = \|s\| \leq \delta$.

On developpe tout ça et on obtient :

$$\frac{1}{2} t^2 \left((H + 2\mu I) d \mid d \right) \geq 0$$ (ne pas oublier que $(H + 2\mu I) s + g = 0$)

$\mu \|s + td\|^2$ $\qquad q(s) = f + g^T s + \frac{1}{2} s^T H s$

$$\begin{aligned}
q(s+td) &= f + g^T(s+td) + \frac{1}{2}(s+td)^T H (s+td) \\
&= f + g^T s + g^T td + \frac{1}{2}\left(s^T H s + \frac{2}{2} s^T H td + td^T H s + td^T H td\right) \\
&= f + g^T s + \frac{1}{2} s^T H s + \underbrace{g^T td + \frac{1}{2}\left(s^T H td + td^T H s + td^T H td\right)}_{\geq 0} \\
&= q(s) + \mu (s+td)^T (s+td) + \\
&= q(s) + \mu s^T s + \mu\left(s^T td + td^T s + \|td\|^2\right) \\
&= q(s) + \mu \|s\|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Au final $((H + 2\mu I) d \mid d) \geq 0$ $\forall d \in \mathbb{R}^n$ tq $d^T s = 0$ et $d^T s \neq 0$

donc $H + 2\mu I \geq 0$.

b) $\Leftarrow$ On pose $\hat{q}(s) = q(s) + \mu^* \|s\|^2$

$$\begin{cases} 1.\ (H + 2\mu^* I) s^* = -g \Rightarrow g \in \operatorname{Im}(H + 2\mu^* I) \\ 3.\ H + 2\mu^* I \geq 0 \end{cases}$$

D'après le lemme appliqué à $\hat{q}$ s^* est un minimum de $\hat{q}$ sur $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}^n,\ \hat{q}(s) - \hat{q}(s^*) \geq 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \forall s \in \mathbb{R}^n,\ q(s) - q(s^*) &\geq \mu^* \left(\|s^*\|^2 - \|s\|^2\right) \\
&= \mu^* \left(\delta - \|s\|^2\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

sur $\|s\|^2 \leq \delta$ car $\mu^* \geq 0$ donc s^* est solution de (P^{rc})

car 1 + cas 2 (a+b) $\Rightarrow$ le thm est démontré.