Théorie des graphes

Chapitre 1 : Définitions et concepts de base

Joseph Gergaud & Géraldine Morin

Prof. Nahuel Soprano Loto
nahuel.soprano-loto@laas.fr

INP Toulouse ENSEEIHT

Class N°	Day	Time	Room
1	15/11 (mardi)	10h15 – 12h	A302
2	22/11 (mardi)	8h – 9h45	A302
3	30/11 (mercredi)	14h – 15h45	A302
4	13/12 (mardi)	8h – 9h45	A301
5	13/12 (mardi)	10h15 – 12h	A301
6	03/01 (mardi)	8h – 9h45	A302
7	10/01 (mardi)	8h – 9h45	A302

Same day

Introduction

- Cette UE est divisée en deux parties :

  Théorie des Graphes,

  UE Théorie des Automates et des Langages.
- La partie *Graphes* est composée de 6 CTDs, 5 TP-Projet (en Julia).
- Évaluation sur 1 Examen (70% de la note) et un BE (30% de la note)
- Il est rappelé qu'un taux supérieur ou égal 30% d'absence dans une UE n'autorise pas à passer le rattrapage.

Plan

Définition 1.1.1 – Graphe

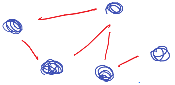
Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex/vertices*)

vertices

edges

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

et d'un ensemble fini d'arêtes (en anglais edges)



$$E = \{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}\}.$$

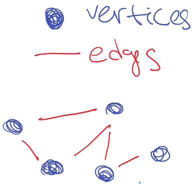
Chaque arête est définie un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ [a] appelés **extrémités** de e.

[a] Pour les arêtes la notation n'est pas la notation ensembliste, l'arête $\{v_i, v_i\}$ est une boucle et n'est pas l'ensemble $\{v_i\}$.

Définition 1.1.1 – Graphe

Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex*/*vertices*)

$$V = \{\overbrace{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}}^{n \text{ vertices}}\}$$



et d'un ensemble fini d'arêtes (en anglais edges)

$$E = \{\overbrace{e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}}^{m \text{ edges}}\}.$$

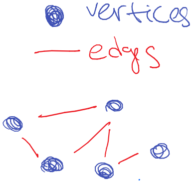
Chaque arête est définie un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ [a] appelés **extrémités** de e.

a. Pour les arêtes la notation n'est pas la notation ensembliste, l'arête $\{v_i, v_i\}$ est une boucle et n'est pas l'ensemble $\{v_i\}$.

Définition 1.1.1 – Graphe

Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex/vertices*)

$$V = \{\overbrace{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}}^{n \text{ vertices}}\}$$



et d'un ensemble fini d'arêtes (en anglais edges)

$$E = \{\overbrace{e_0, e_1, \dots, e_{m-1}}^{m \text{ edges}}\}.$$

Chaque arête est définie un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ [a] appelés **extrémités** de e.

self-loop

a. Pour les arêtes la notation n'est pas la notation ensembliste, l'arête $\{v_i, v_i\}$ est une boucle et n'est pas l'ensemble $\{v_i\}$.

Définition 1.1.1 – Graphe

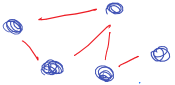
Un **graphe** fini $G = (V, E)$ est défini par un ensemble fini, non vide, appelés **sommets** (en anglais *vertex/vertices*)

vertices

edgs

$$V = \{\overbrace{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}}^{n \text{ vertices}}\}$$

et d'un ensemble fini d'arêtes (en anglais edges)



$$E = \{\overbrace{e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}}^{m \text{ edges}}\}.$$

Chaque arête est définie un couple de sommets $\{v_i, v_j\}$ [a] appelés **extrémités** de e.

self-loop

---

a. Pour les arêtes la notation n'est pas la notation ensembliste, l'arête $\{v_i, v_i\}$ est une boucle et n'est pas l'ensemble $\{v_i\}$.

this kind notation is called multiset.

Définition 1.1.2 – Vocabulaire

- Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.)
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
- Deux arêtes sont **adjacentes** si et seulement si elles ont un sommet commun.

Définition 1.1.2 – Vocabulaire

- Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n. The order is the number of vertices.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.)
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
- Deux arêtes sont **adjacentes** si et seulement si elles ont un sommet commun.

Définition 1.1.2 – Vocabulaire

- Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n. The order is the number of vertices.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.) An edge is incident to its extremes.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
- Deux arêtes sont **adjacentes** si et seulement si elles ont un sommet commun.

Définition 1.1.2 – Vocabulaire

- Si $n = \#V$ on dit que $G = (V, E)$ est un graphe d'**ordre** n. The order is the number of vertices.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que l'arête e est **incidente** au sommet v_i (et au sommet v_j aussi d'ailleurs.) An edge is incident to its extremes.
- Si $e = \{v_i, v_j\}$, on dit que v_i et v_j sont **adjacents**.
- Deux arêtes sont **adjacentes** si et seulement si elles ont un sommet commun.

At least one.

They could share two.

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

NO

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

NO

3) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

NO

3) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

YES, les boucles sont OK.

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

NO

3) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

YES, les boucles sont OK.

4) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}\}$.

Exemple 1.1.1. Exemples $G = (V, E)$ est-il bien défini pour

1) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \emptyset$.

▷ **Solution**

YES

2) $V = \{1, 2\}$ et $E = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

NO

3) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

▷ **Solution**

YES, les boucles sont OK.

4) $V = \{1, 2, 3\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}\}$.

▷ **Solution**

YES, C'est un multigraphe.

Définition 1.1.3

- $e = \{v_i, v_i\}$ est une **boucle** ;
- un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre deux noeuds est appelé **multigraphe** ;
- un graphe est dit **simple** si

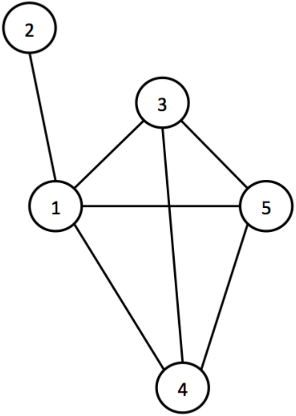
    il n'a pas de boucle,

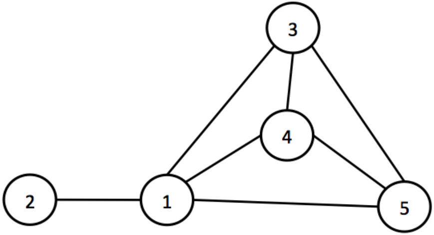
    il a au plus une arête entre deux sommets.

Dans le suite, nous considérons presque toujours des graphes simples (sinon, on le signale !).

Il existe une infinité de manières de représenter graphiquement un graphe, c'est à dire de dessiner un graphe dans le plan.
Exemple 1.2.1. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.
Dessinez ce graphe de plusieurs façons différentes.

Solution

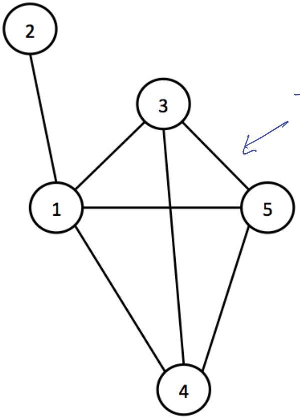




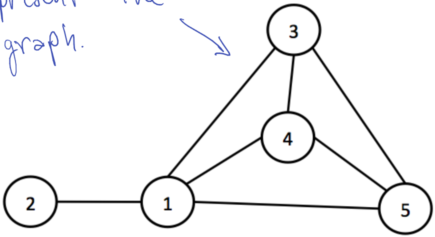
Il existe une infinité de manières de représenter graphiquement un graphe, c'est à dire de dessiner un graphe dans le plan.

Exemple 1.2.1. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$.
Dessinez ce graphe de plusieurs façons différentes.

Solution



They look different but they represent the same graph.

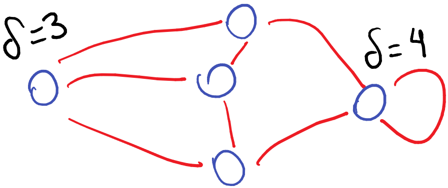


Définition 1.2.1 – Degré

Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

Définition 1.2.1 – Degré

Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

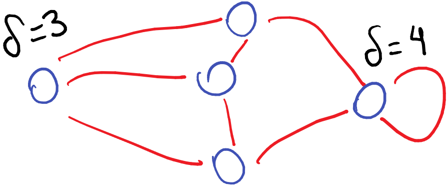


Définition 1.2.1 – Degré

Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

Définition 1.2.2 – Graphe simple complet

Un graphe simple est dit **complet** si tout sommet est adjacent à tout autre.



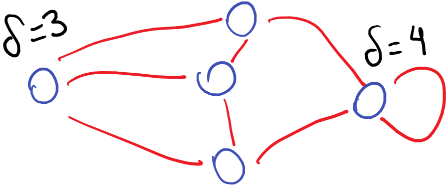
Définition 1.2.1 – Degré

Le **degré** d'un sommet v_i est le nombre d'arêtes incidentes en v_i. On le note $\delta(v_i)$. Une boucle participe pour 2.

Définition 1.2.2 – Graphe simple complet

Un graphe simple est dit **complet** si tout sommet est adjacent à tout autre.

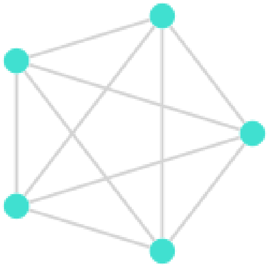
Exercice 1.2.2. Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple complet d'ordre n ?



Remarque 1.2.1. Le graphe simple complet d'ordre n est noté K_n.

Exercice 1.2.3. Dessiner K_5.

> **Solution**



***Lemme 1.2.1** (lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Lemme 1.2.1 *(lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Solution

Chaque arête est comptée 2 fois.

Lemme 1.2.1 *(lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Excersice: it works also when the graph is not simple.

Solution

Chaque arête est comptée 2 fois.

***Lemme 1.2.1** (lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Excersice: it works also when the graph is not simple.

> **Solution**

Chaque arête est comptée 2 fois.

Corollaire 1.2.3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

Lemme 1.2.1 *(lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Excersice: it works also when the graph is not simple.

> **Solution**

Chaque arête est comptée 2 fois.

Corollaire 1.2.3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

> **Solution**

$$2m = \sum_k \delta(v_k) = \sum_{\substack{v_k \texttt{ sommet} \\ \texttt{de degré pair}}} \delta(v_k) + \sum_{\substack{v_k \texttt{ sommet} \\ \texttt{de degré impair}}} \delta(v_k).$$

***Lemme 1.2.1** (lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Excersice: it works also when the graph is not simple.

> **Solution**

Chaque arête est comptée 2 fois.

Corollaire 1.2.3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

> **Solution**

$$2m = \underbrace{\sum_k \delta(v_k)}_{\text{even}} = \sum_{\substack{v_k \texttt{ sommet} \\ \texttt{de degré pair}}} \delta(v_k) + \sum_{\substack{v_k \texttt{ sommet} \\ \texttt{de degré impair}}} \delta(v_k).$$

***Lemme 1.2.1** (lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Excersice: it works also when the graph is not simple.

> **Solution**

Chaque arête est comptée 2 fois.

Corollaire 1.2.3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

> **Solution**

$$\underbrace{2m = \sum_k \delta(v_k)}_{\text{even}} = \underbrace{\sum_{\substack{v_k \text{ sommet} \\ \text{de degré pair}}} \delta(v_k)}_{\text{even}} + \sum_{\substack{v_k \text{ sommet} \\ \text{de degré impair}}} \delta(v_k).$$

***Lemme 1.2.1** (lemme des poignées de main). La somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.*

Excersice : it works also when the graph is not simple.

> **Solution**

Chaque arête est comptée 2 fois.

Corollaire 1.2.3

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

> **Solution**

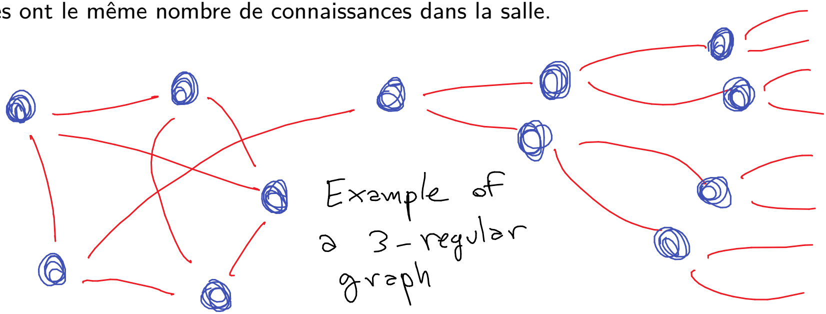
$$2m = \underbrace{\sum_k \delta(v_k)}_{\text{even}} = \underbrace{\sum_{\substack{v_k \texttt{ sommet} \\ \texttt{de degré pair}}} \delta(v_k)}_{\text{even}} + \underbrace{\sum_{\substack{v_k \texttt{ sommet} \\ \texttt{de degré impair}}} \delta(v_k)}_{\text{even}}.$$

Exercice 1.2.4. Montrer que s'il y a n personnes dans une salle avec $n > 1$, au moins 2 d'entre elles ont le même nombre de connaissances dans la salle.

Définition 1.2.4 – Graphe régulier

Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets sont de même degré. Si ce degré est k, on dit que G est k-**régulier**.

Exercice 1.2.4. Montrer que s'il y a n personnes dans une salle avec $n > 1$, au moins 2 d'entre elles ont le même nombre de connaissances dans la salle.



Example of a 3-regular graph

Définition 1.2.4 – Graphe régulier

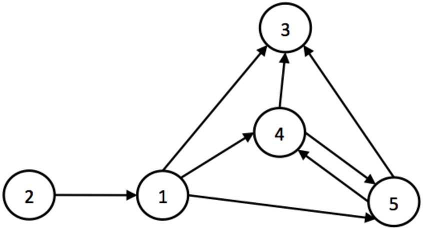
Un graphe est dit **régulier** si tous ses sommets sont de même degré. Si ce degré est k, on dit que G est k-**régulier**.

Directed graph in English (an oriented graph is something different).

Définition 1.3.1 – Graphe orienté

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **orienté** si chaque arête est une paire de sommets (donc ordonnée), $e \in E, e = (i, j)$. On appelle les éléments de E des arcs.

Exemple 1.3.1.



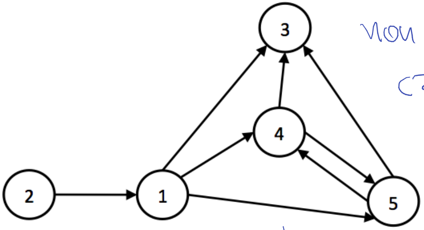
Directed graph in English (an oriented graph is something different).

Définition 1.3.1 – Graphe orienté

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **orienté** si chaque arête est une paire de sommets (donc ordonnée), $e \in E, e = (i, j)$. On appelle les éléments de E des arcs.

Unlike the non-oriented case, the order matters here.

Exemple 1.3.1.



Edges have directions

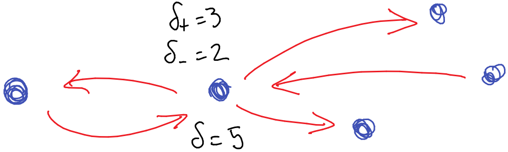
Définition 1.3.2 – Vocabulaire

- i est appelé l'**origine** de $e = (i, j)$;
- j est appelée l'**arrivée** de e.
- le **degré sortant** d'un sommet v $\delta^+(v)$ est le nombres d'arcs d'origine v ;
- le **degré entrant** d'un sommet v $\delta^-(v)$ est le nombre d'arcs qui arrivent en v ;
- le **degré total** $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

$e = (i, j)$

origin destination

Remarque 1.3.1. on a toujours $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2\#E$.



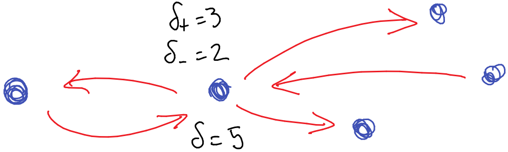
Définition 1.3.2 – Vocabulaire

$e=(i,j)$

origin destination

- i est appelé l'**origine** de $e=(i,j)$;
- j est appelée l'**arrivée** de e. outgoing
- le **degré sortant** d'un sommet v $\delta^+(v)$ est le nombres d'arcs d'origine v ;
- le **degré entrant** d'un sommet v $\delta^-(v)$ est le nombre d'arcs qui arrivent en v ; incoming
- le **degré total** $\delta(v)=\delta^+(v)+\delta^-(v)$.

Remarque 1.3.1. on a toujours $\sum_{v\in V}\delta(v)=2\#E$.



Définition 1.3.2 – Vocabulaire

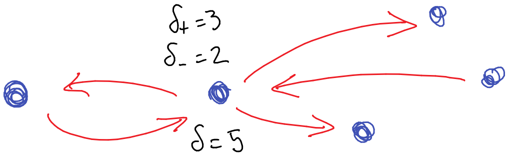
$e=(i,j)$

origin destination

- i est appelé l'**origine** de $e=(i,j)$;
- j est appelée l'**arrivée** de e. outgoing
- le **degré sortant** d'un sommet v $\delta^+(v)$ est le nombres d'arcs d'origine v ;
- le **degré entrant** d'un sommet v $\delta^-(v)$ est le nombre d'arcs qui arrivent en v ; incoming
- le **degré total** $\delta(v)=\delta^+(v)+\delta^-(v)$.

Remarque 1.3.1. on a toujours $\sum_{v\in V}\delta(v)=2\#E$.

Hint : Forget about the orientations and use the result for non-oriented.

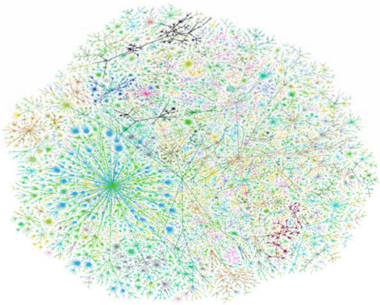


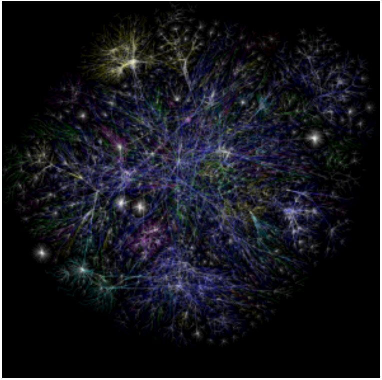
Exercice 1.3.2. Donner des exemples de problèmes que l'on peut modéliser par un graphe.

Solution

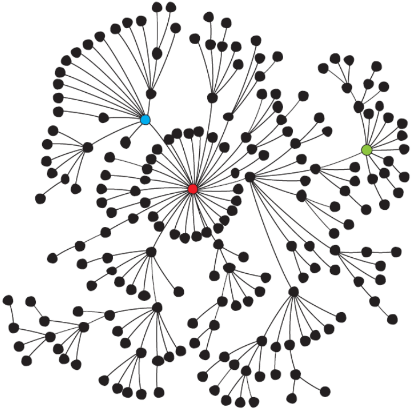
Exemples network

- Réseaux de diffusion d'un virus
- Exemples réseaux : À gauche réseaux de neurones, à droite réseau internet

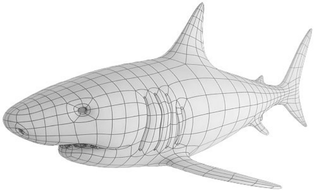


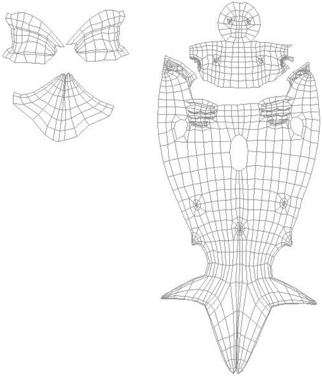


On peut aller de n'importe quel point du réseau à un autre par un chemin assez court. Cela correspond à cette idée populaire qui dit que l'on peut trouver un lien entre 2 personnes prises au hasard dans un pays en moins de 6 connexions. Certains nœuds ont un statut particulier : ce sont des "hub"

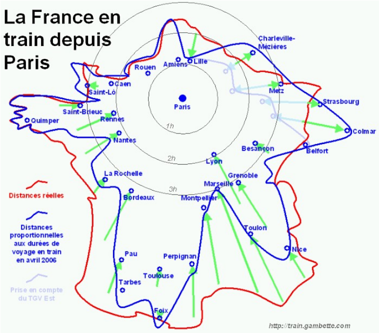


Maillage en 3D : les maillages 3D sont des graphes dont les sommets sont positionnés en 3D (plongement géométrique). Le graphe représente les relations de voisinage entre les sommets (image de droite), appelée la topologie. (image du maillage *Shark* de CGStudio).



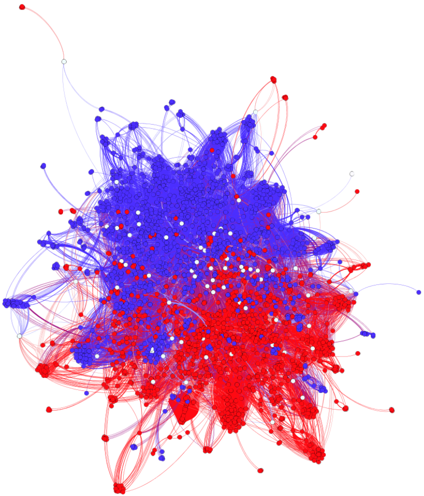


- Calculs de plus courts chemins (cartes de distance par rapport aux temps de transport, (image crée par Philippe Gambette http://philippe.gambette.free.fr/Train/)



- coloration : identification de données indépendantes, par exemple pour effectuer des calculs en parallèle.

identification de *clusters*, c'est à dire, des groupes fortements connectés. Une exemple avec une coloration des *Hashtag* de *Twitter* utilisés majoritairement par des démocrates ou des républicains (images de Thimoty Renner).

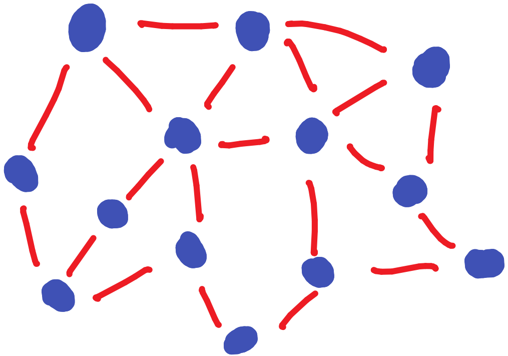


Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

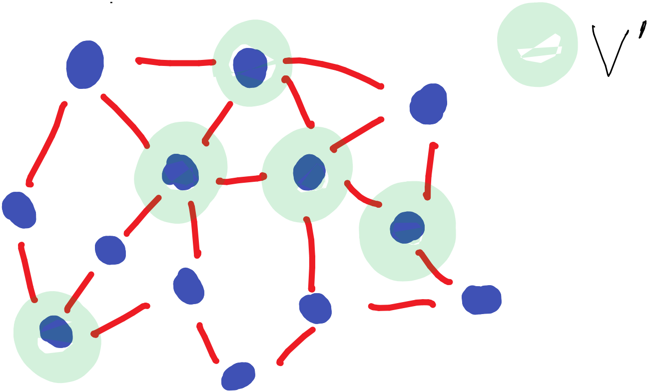
Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.



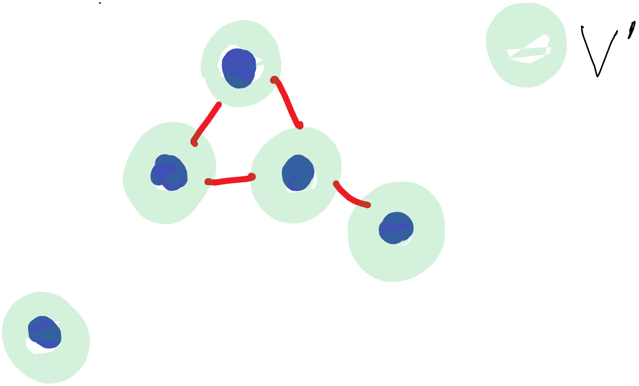
Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.



Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.



Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.2 – Graphe partiel

Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.

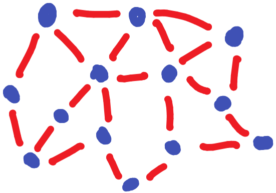
Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.2 – Graphe partiel

Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.



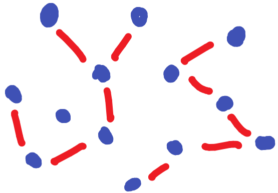
Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.2 – Graphe partiel

Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.



Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.2 – Graphe partiel

Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.

Exemple 1.4.2. Si G est le graphe des routes de France, donner un exemple de graphe partiel.

Définition 1.4.1 – Sous-graphe

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V', E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

Exemple 1.4.1. Si G est le graphe des routes de France, celui représentant les routes d'Occitanie est un sous-graphe.

Définition 1.4.2 – Graphe partiel

Un **graphe partiel** de $G = (V, E)$ engendré par $E' \subset E$ est le graphe $G' = (V, E')$.

Exemple 1.4.2. Si G est le graphe des routes de France, donner un exemple de graphe partiel.

> **Solution**

Celui représentant les autoroutes de France est un graphe partiel.

Définition 1.4.3 – Clique

Une **clique** est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.

Définition 1.4.3 – Clique

Une **clique** est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.

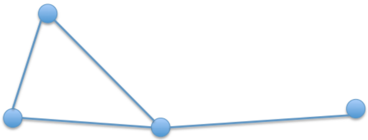
Alternative def. A subset of vertices such that every pair of vertices in this subset are adjacent.

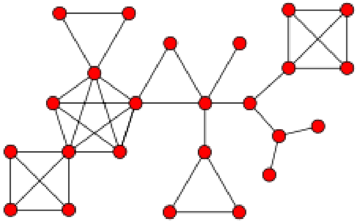
Définition 1.4.3 – Clique

Une **clique** est l'ensemble des sommets d'un sous-graphe complet.

Alternative def. A subset of vertices such that every pair of vertices in this subset are adjacent.

Exemple 1.4.3. Ces graphes contiennent-ils des cliques ?



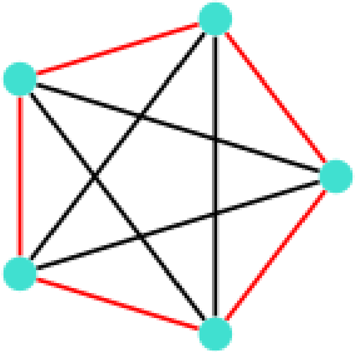


(image de droite : source Wikipedia)

Exercice 1.4.4. Montrez que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).
Montrez que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

> **Solution**

Contre-exemple pour K_5 : on prend les arêtes 'ne se connaissent'/rouge sur la couronne.



- Il existe de nombreuses façons de stocker un graphe
- La complexité des algorithmes dépend de la représentation machine d'un graphe

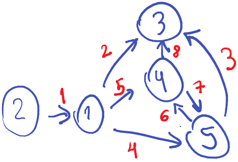
Définition 1.5.1 – Matrice d'incidence

La matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté $G = (V, E)$ d'ordre n ayant m arcs est une matrice $A = (a_{iu})$, $i = 1 \dots n$, $u = 1 \dots m$ à coefficients entiers 0, $+1$, -1, telle que chaque colonne correspond à un arc de E et chaque ligne correspond à un sommet de V. Si $e_k = (v_i, v_j)$ alors la colonne k a tous ses termes nuls sauf $a_{ik} = +1$ et $a_{jk} = -1$.

Exemple 1.5.1. Coder le graphe orienté donné à l' exemple 1.3.1.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$



Exercice 1.5.2. Trouver comment exprimer le degré entrant et sortant en un sommet.