UNIVERSITÉ PARIS OUEST NANTERRE LA DÉFENSE
U.F.R. SEGMI Année universitaire 2013 – 2014
Master d'économie Cours de M. Desgraupes

Méthodes Numériques

Document 5 : Corrigés d'optimisation convexe et quadratique

---

1 Les conditions de Kuhn-Tucker

Rappels de cours

Si on considère un programme d'optimisation convexe noté :

$$\begin{cases} \operatorname{Max} f(x) \\ g(x) \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ et g est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$:

$$g : x \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$$

On suppose que les fonctions f et g sont continûment différentiables. Le lagrangien associé à ce programme est la fonction :

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda.(g(x) - b) = f(x) - \lambda_1.(g_1(x) - b_1) - \cdots - \lambda_m.(g_m(x) - b_m).$$

Les coefficients λ s'appellent les coefficients de Kuhn-Tucker. Il y en a autant que de contraintes. Le coefficient λ_j est associé à la contrainte $g_j(x) \leq b_j$.

Les conditions de Kuhn-Tucker sont des conditions nécessaires qui sont réalisées à l'optimum du problème. Elles s'écrivent vectoriellement de la manière suivante :

$$\nabla_x L \leq 0 \qquad x \geq 0 \qquad x.\nabla_x L = 0 \tag{1}$$

$$\nabla_\lambda L \geq 0 \qquad \lambda \geq 0 \qquad \lambda.\nabla_\lambda L = 0 \tag{2}$$

On peut les expliciter, pour chaque variable x_i $(i = 1, \ldots, n)$ et pour chaque coefficient λ_j $(j = 1, \ldots, m)$, de la manière suivante :

$$x_i \geq 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0 \qquad x_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0 \qquad \lambda_j \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0$$

On peut remarquer, en dérivant directement L par rapport à λ_j, que la condition $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} \geq 0$ est simplement la contrainte $g_j(x) \leq b_j$.

Les conditions $x.\nabla_x L = 0$ et $\lambda.\nabla_\lambda L = 0$ sont appelées *relations d'exclusion*.

En toute généralité, les conditions de Kuhn-Tucker sont des conditions *nécessaires*, autrement dit, si on est en un point optimum, elles sont toujours réalisées. Mais elles ne sont pas forcément *suffisantes* : autrement dit, ce n'est pas parce qu'elles sont réalisées en un point (x, λ) que ce point est obligatoirement un optimum. Néanmoins, il existe des situations où on peut affirmer qu'elles sont effectivement suffisantes : c'est le cas en particulier lorsque la fonction f est *concave* et les fonctions g_j sont *convexes*. C'est pourquoi on s'intéresse à l'optimisation convexe.

En résumé, dans le cas où f est concave et les g sont convexes, les conditions de Kuhn-Tucker sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Dans cette situation, un point est optimal *si et seulement si* les conditions sont toutes réalisées. Si jamais une seule des conditions n'était pas réalisée, le point ne pourrait pas être une solution optimale du problème.

Noter que dans le cas d'une minimisation, la condition suffisante ci-dessus est inversée : la fonction f est *convexe* et les fonctions g_j sont *concaves*. Dans le cas de la programmation linéaire, ces conditions sont réalisée car une fonction linéaire est à la fois convexe et concave.

Écriture avec des variables d'écart

Si on introduit des variables d'écart x' dans les contraintes, l'écriture des conditions de Kuhn-Tucker est modifiée. Les contraintes s'écrivent :

$$g(x) + x' = b$$

et le lagrangien est défini de la manière suivante :

$$L(x, x', \lambda) = f(x) - \lambda.\big(g(x) + x' - b\big).$$

C'est une fonction des x, des x' et des λ.

Dans ce cas, les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent comme ceci :

$$x \geq 0 \qquad \nabla_x L \leq 0 \qquad x.\nabla_x L = 0 \tag{3}$$
$$x' \geq 0 \qquad \nabla_{x'} L \leq 0 \qquad x'.\nabla_{x'} L = 0 \tag{4}$$
$$\lambda \geq 0 \qquad \nabla_\lambda L = 0 \tag{5}$$

On peut les expliciter, pour chaque variable x_i $(i = 1, \dots, n)$, pour chaque variable x'_j et pour chaque coefficient λ_j $(j = 1, \dots, m)$, de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} x_i \geq 0 & \dfrac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0 & x_i \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ x'_j \geq 0 & \dfrac{\partial L}{\partial x'_j} \leq 0 & x'_j \dfrac{\partial L}{\partial x'_j} = 0 \\ \lambda_j \geq 0 & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 & \end{array}$$

Exercices corrigés

Corrigé ex. 1 - Conditions de Kuhn-Tucker

Programme 1

$$\begin{cases} \text{Max}\,(x_1^3 - 3x_2) \\ x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les deux premières contraintes doivent être réécrites sous la forme :

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-2x_1 - x_2 \leq -2$$

Le lagrangien s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) = x_1^3 - 3x_2 &- \lambda_1(-x_1 + x_2 - 2) - \lambda_2(-2x_1 - x_2 + 2) \\ &- \lambda_3(x_1 + 2x_2 - 10) - \lambda_4(7x_1 + 2x_2 - 28) \end{aligned}$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont donc les suivantes. Il y a tout d'abord les conditions de signe sur les variables :

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0,\ \lambda_4 \geq 0$$

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à ces variables et poser les conditions de signe correspondantes. Dans le cas des dérivées par rapport aux coefficients λ, on retrouve les contraintes :

$$\begin{gathered}3x_1^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - 7\lambda_4 \leq 0 \\ -3 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 \leq 0 \\ x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 28 \leq 0\end{gathered}$$

Il y a enfin les relations d'exclusion :

$$\begin{gathered}x_1(3x_1^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 - 7\lambda_4) = 0 \\ x_2(-3 - \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4) = 0 \\ \lambda_1(x_1 - x_2 + 2) = 0 \\ \lambda_2(2x_1 + x_2 - 2) = 0 \\ \lambda_3(x_1 + 2x_2 - 10) = 0 \\ \lambda_4(7x_1 + 2x_2 - 28) = 0\end{gathered}$$

Ce sont ces dernières conditions qui servent à mener la discussion car elles présentent une alternative. L'un des deux termes du produit doit être nul. On discute donc en testant les deux possibilités.

On cherche à maximiser la fonction objectif $f = x_1^3 - 3x_2$. Intuitivement, on voit qu'il faut choisir x_1 le plus grand possible et x_2 le plus petit possible. On va donc chercher $x_2 = 0$ (les variables doivent être positives).

On est conduit, en remplaçant dans les conditions à $x_1 = 4$, puis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 = 48/7$. C'est l'optimum du problème et on peut vérifier qu'il remplit toutes les conditions de Kuhn-Tucker.

Programme 2

$$\begin{cases}\text{Max}\,(4x_1 - 3x_2) \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{cases}$$

La deuxième contrainte doit être réécrite sous la forme :

$$-2x_1 - 5x_2 \leq -8$$

Le lagrangien s'écrit de la manière suivante :

$$L(x, \lambda) = 4x_1 - 3x_2 - \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 7) - \lambda_2(-2x_1 - 5x_2 + 8)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont donc les suivantes. Il y a tout d'abord les conditions de signe sur les variables :

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0$$

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à ces variables et poser les conditions de signe correspondantes. Dans le cas des dérivées par rapport aux coefficients λ, on retrouve les contraintes :

$$\begin{gathered} 4 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 0 \\ -3 - 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 8 \end{gathered}$$

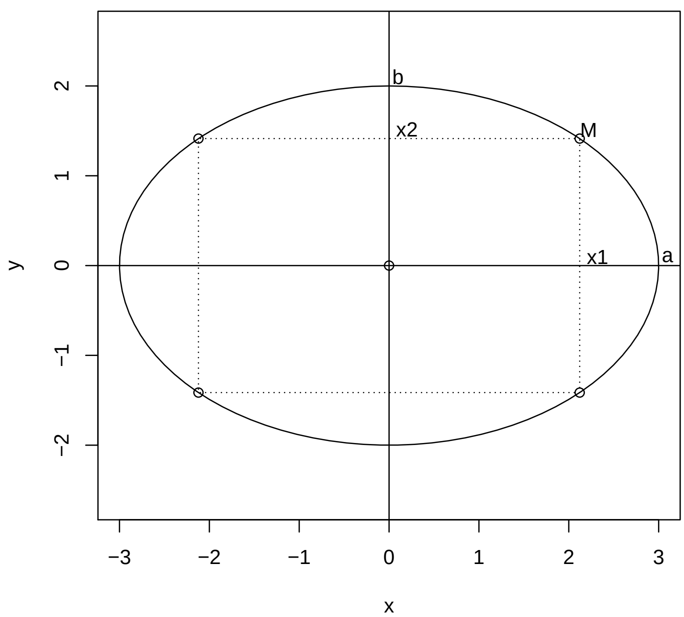
Il y a enfin les relations d'exclusion :

$$\begin{gathered} x_1(4 - \lambda_1 + 2\lambda_2) = 0 \\ x_2(-3 - 2\lambda_1 + 5\lambda_2) = 0 \\ \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 7) = 0 \\ \lambda_2(2x_1 + 5x_2 - 8) = 0 \end{gathered}$$

La discussion des relations d'exclusion conduit à la solution suivante :

$$x_1 = 7,\ x_2 = 0,\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 0.$$

Corrigé ex. 2 - Méthode de Lagrange



1) Pour déterminer le rectangle, il suffit de trouver les coordonnées de son coin supérieur droit M. Si (x_1, x_2) sont les coordonnées de M, la surface du

rectangle est $S = 2x_1 \times 2x_2 = 4x_1x_2$. Le problème s'écrit donc :

$$\begin{cases} \text{Max}\,(4x_1x_2) \\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On peut le traiter directement par la méthode de Lagrange. Le lagrangien est :

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1x_2 - \lambda \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 \right).$$

On annule les dérivées partielles de L par rapport aux variables x_1, x_2 et λ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_2 - \dfrac{2\lambda x_1}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_1 - \dfrac{2\lambda x_2}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -\Big(\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} - 1\Big) = 0 \end{cases}$$

En éliminant λ entre les deux premières équations, on obtient la relation $a^2x_2^2 = b^2x_1^2$. En la reportant dans l'équation de la contrainte, on trouve finalement $x_1^2 = \dfrac{a^2}{2}$ et donc $x_2^2 = \dfrac{b^2}{2}$. Comme on cherche une solution positive, la réponse est :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \dfrac{b}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

La surface maximale du rectangle est donc $2ab$.

2) C'est une généralisation de la question précédente. Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Max}\,(8x_1x_2x_3) \\ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La résolution est identique et conduit à la solution suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ x_3 = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Corrigé ex. 3 - Économie à deux biens

Il faut maximiser la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = 2\ln x_1 + \ln(3 - x_2).$$

Les conditions imposées s'écrivent sous la forme de contraintes inégalité : $x_1 \geq 1$ et $x_2 \leq 3$. Il faut d'autre part tenir compte des prix p_1 et p_2 et écrire que l'agent économique ne peut pas dépenser plus que ce qu'il gagne, autrement dit, il faut que $p_1x_1 \geq p_2x_2$.

Finalement le programme d'optimisation s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Max}\,\big(2\ln x_1 + \ln(3 - x_2)\big) \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ p_1x_1 - p_2x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit de la manière suivante :

$$L(x, \lambda) = 2\ln x_1 + \ln(3 - x_2) - \lambda_1(-x_1 + 1) - \lambda_2(x_2 - 8) - \lambda_3(p_1x_1 - p_2x_2)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker sont les suivantes. Il y a tout d'abord les conditions de signe sur les variables :

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0$$

Il faut ensuite calculer les dérivées partielles par rapport à ces variables et poser les conditions de signe correspondantes. Dans le cas des dérivées par rapport aux coefficients λ, on retrouve les contraintes :

$$\frac{2}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_3p_1 \leq 0$$

$$\frac{-1}{3 - x_2} - \lambda_2 + \lambda_3p_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 3 \\ p_1x_1 - p_2x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Il y a enfin les relations d'exclusion :

$$x_1\Big(\frac{2}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_3p_1\Big) = 0$$

$$x_2\Big(\frac{-1}{3 - x_2} - \lambda_2 + \lambda_3p_2\Big) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1 - 1) &= 0 \\ \lambda_2(x_2 - 3) &= 0 \\ \lambda_3(p_1x_1 - p_2x_2) &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que, puisqu'on a la condition $x_1 \geq 1$, on peut exclure le cas où $x_1 = 0$. La première relation d'exclusion impose donc :

$$\frac{2}{x_1} + \lambda_1 - \lambda_3 p_1$$

Par conséquent x_2 ne peut pas non plus être nul d'après la troisième contrainte. La deuxième relation d'exclusion impose donc :

$$\frac{-1}{3 - x_2} - \lambda_2 + \lambda_3 p_2$$

D'autre part, il n'est pas possible que $x_2 = 3$ car sinon la fonction objectif ne serait pas définie (à cause du logarithme). La quatrième relation d'exclusion impose donc que $\lambda_2 = 0$.

Montrons maintenant que λ_3 ne peut pas être nul. S'il l'était, on aurait

$$\lambda_2 = \frac{-1}{3 - x_2}$$

ce qui n'est pas possible car le membre de droite est négatif et que λ_2 doit être positif.

Puisque $\lambda_3 \neq 0$, la dernière relation d'exclusion conduit à la relation $p_1 x_1 = p_2 x_2$ qui indique que l'agent économique travail juste pour satisfaire son besoin de bien de consommation. Il dépense tout ce qu'il gagne.

La discussion se fait maintenant sur la troisième relation d'exclusion qui n'a pas encore été utilisée. Il faut distinguer deux cas : ou bien $x_1 = 1$, ou bien $\lambda_2 = 0$.

Dans le cas où $x_1 = 1$, les équations conduisent facilement à $x_2 = p_1/p_2$.

Dans le cas où $\lambda_2 = 0$, on obtient la solution $x_1 = 2p_1/p_2$ et $x_2 = 2$.

Il faut ensuite vérifier que les conditions de signe de Kuhn-Tucker sont toutes vérifiées, ce qui impose des conditions sur p_1 et p_2.

On trouve trois possibilités :

$$\begin{cases} p_1 < p_2 & \Rightarrow x_1 = 2p_1/p_2, x_2 = 2 \\ 2p_2 \leq p_1 \leq 3p_2 & \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = p_1/p_2 \\ p_1 > 3p_2 & \Rightarrow \text{pas de solution} \end{cases}$$

Corrigé ex. 4 - Contrainte dépendant d'un paramètre

$$\begin{cases} \text{Max}\big((x_1-1)^2\,(6-x_2)\big) \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - mx_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit de la manière suivante :

$$L(x,\lambda) = (x_1-1)^2\,(6-x_2) - \lambda_1(-x_1+2) - \lambda_2(x_2-5) - \lambda_3(x_1-mx_2)$$

On écrit les conditions de signe de Kuhn-Tucker. Les variables $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ doivent être positives et, d'autre part :

$$\begin{gathered} 2(x_1-1)(6-x_2) + \lambda_1 - \lambda_3 \leq 0 \\ -(x_1-1)^2 - \lambda_2 + m\lambda_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 - mx_2 \leq 0 \end{gathered}$$

Il y a aussi les relations d'exclusion :

$$\begin{gathered} x_1\big(2(x_1-1)(6-x_2) + \lambda_1 - \lambda_3\big) = 0 \\ x_2\big(-(x_1-1)^2 - \lambda_2 + m\lambda_3\big) = 0 \\ \lambda_1(x_1-2) \\ \lambda_2(x_2-5) \\ \lambda_3(x_1-mx_2) \end{gathered}$$

Puisque $x_1 \neq 0$ (il doit être supérieur à 2), on a la relation

$$2(x_1-1)(6-x_2) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

Si $\lambda_3 = 0$, on en déduit $\lambda_1 = 2(x_1-1)(6-x_2)$, ce qui n'est pas possible pour des questions de signe (le second membre est négatif). Il en résulte que $\lambda_3 \neq 0$ et par conséquent

$$x_1 - mx_2 = 0$$

On observe aussi que x_2 ne peut pas être nul, sinon on obtiendrait $\lambda_2 = 0$ et $x_1 = 0$, ce qui est exclut.

On a donc $x_1 \neq 0$ et $x_1 \neq 0$, ce qui implique dans les deux premières relations d'exclusion :

$$\begin{cases} 2(x_1-1)(6-x_2) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -(x_1-1)^2 - \lambda_2 + m\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ces deux relations vont être utilisées dans ce qui suit. On discute maintenant à partir de la troisième relation d'exclusion.

Cas $\lambda_1 = 0$

On montre facilement que le cas $x_2 = 5$ conduit à une impossibilité. On en déduit donc (quatrième relation d'exclusion) que $\lambda_2 = 0$.

En reportant $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$ dans les deux relations ci-dessus et en éliminant λ_3 entre elles, on obtient

$$x_1 = \frac{12m+1}{3} \qquad x_2 = \frac{12m+1}{3m}$$

La condition $x_1 \geq 2$ se traduit alors par $m \geq \dfrac{5}{12}$.

Cas $\lambda_1 \neq 0$

Cela implique, d'après la trosième relation d'exclusion, $x_1 = 2$ et donc $x_2 = \dfrac{2}{m}$. La relation $x_2 \geq 5$ impose donc la condition $m \geq 2/5$.

En reportant dans les équations ci-dessus, on obtient facilement $\lambda_2 = 0$, puis on en déduit $\lambda_3 = \dfrac{1}{m}$ et finalement $\lambda_1 = \dfrac{5-12m}{m}$.

Résumé

Si $m \geq 5/12$, la solution est $\left(\dfrac{12m+1}{3}, \dfrac{12m+1}{3m}\right)$.

Si $5/12 \geq m \geq 2/5$, la solution est $\left(2, \dfrac{2}{m}\right)$.

Si $m < 2/5$, il n'y a pas de solution.

Remarque : si $m = 2/5$, les trois contraintes sont simultanément saturées, mais le domaine est réduit au seul point (2,5) !

Corrigé ex. 5 - Minimisation quadratique

$$\begin{cases} \text{Min}\big(3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 22x_1 - 14x_2\big) \\ -x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ -3x_1 + 7x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème est une minimisation. On se ramène à un programme de maximisation en changeant le signe de la fonction objectif :

$$\text{Max}\big(22x_1 + 14x_2 - 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2\big)$$

1) Le lagrangien est défini comme ceci :

$$\begin{aligned} L(x,\lambda) = {} & 22x_1 + 14x_2 - 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - \lambda_1(-x_1 + 3x_2 - 1) \\ & - \lambda_2(-3x_1 + 7x_2) - \lambda_3(x_1 - x_2 - 4) \end{aligned}$$

Les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \\
22 - 6x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \leq 0 \\
14 + 2x_1 - 6x_2 - 3\lambda_1 - 7\lambda_2 + \lambda_3 \leq 0 \\
-x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
-3x_1 + 7x_2 \leq 0 \\
x_1 - x_2 \leq 4
\end{aligned}
$$

Il y a aussi les relations d'exclusion :

$$
\begin{aligned}
x_1\big(22 - 6x_1 + 2x_2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3\big) = 0 \\
x_2\big(14 + 2x_1 - 6x_2 - 3\lambda_1 - 7\lambda_2 + \lambda_3\big) = 0 \\
\lambda_1(-x_1 + 3x_2 - 1) = 0 \\
\lambda_2(-3x_1 + 7x_2) = 0 \\
\lambda_3(x_1 - x_2 - 4) = 0
\end{aligned}
$$

2) Le point $x_1 = 7/2$ et $x_2 = 3/2$ est réalisable car ce point vérifie les trois contraintes, ce qui signifie qu'il appartient au domaine réalisable. On constate qu'il sature les deux premières inégalités, ce qui signifie qu'il est le point d'intersection des droites représentant ces deux contraintes.

Mais ce point n'est pas optimal. En effet, si on le reporte dans les contraintes, on obtient $\lambda_3 = 0$ et, par conséquent, les deux premières relations d'exclusion conduisent à :

$$
\begin{cases}
4 + \lambda_1 + 3\lambda_2 & = 0 \\
12 - 3\lambda_1 - 7\lambda_2 & = 0
\end{cases}
$$

d'où on tire $\lambda_1 = 32$ et $\lambda_2 = -12$. Cette dernière valeur est impossible car λ_2 doit être positif.

3) La discussion sur les relations d'exclusion ci-dessus conduit à la solution

$$
\begin{cases}
x_1^* & = 13/2 \\
x_2^* & = 5/2
\end{cases}
$$

La valeur à l'optimum de la fonction maximisée est $f^* = 291$ mais il ne faut pas oublier qu'on a changé son signe au début du problème. La vraie valeur à l'optimum est donc -291.

4) Les contraintes 1 et 3 sont saturées donc les variables d'écart correspondantes x'_1 et x'_3 sont nulles. La deuxième contrainte vaut -2, donc la variable d'écart de cette contrainte est $x'_2 = 2$.

Les coefficients de Kuhn-Tucker à l'optimum sont

$$
\begin{cases}
\lambda_1^* & = 36 \\
\lambda_2^* & = 0 \\
\lambda_3^* & = 92
\end{cases}
$$

Corrigé ex. 6 - Allocation de ressources

1) Dans le cas où la ressource doit être complètement épuisée, le problème peut être formulé sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Max}\,\big(f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3)\big) \\ x_1+x_2+x_3=d \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{cases}$$

C'est un problème d'optimisation sous contrainte *égalité*. On utilise donc la méthode de Lagrange pour le résoudre. Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x,\lambda) &= f_1(x_1)+f_2(x_2)+f_3(x_3)-\lambda(x_1+x_2+x_3-d) \\ &= 8x_1-x_1^2+8x_2-2\,x_2^2+8x_3-3\,x_3^2-\lambda(x_1+x_2+x_3-d) \end{aligned}$$

La condition de Lagrange est $\nabla L=0$. On dérive donc successivement par rapport à x_1,x_2,x_3 et λ et on annule les dérivées. Cela conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=8-2x_1-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=8-4x_2-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3}=8-6x_3-\lambda=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x_1+x_2+x_3-d)=0 \end{cases}$$

On le résout en calculant x_1,x_2,x_3 en fonction de λ dans les trois premières équations et en reportant dans la quatrième. On obtient $\lambda=8-\dfrac{12}{11}d$ et donc finalement

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{6d}{11} \\ x_2=\dfrac{3d}{11} \\ x_3=\dfrac{2d}{11} \end{cases}$$

En conlusion, quelle que soit la quantité d à répartir, la façon optimale de le faire est d'affecter six onzièmes sur la première activité, trois onzièmes sur la deuxième et deux onzièmes sur la troisième.

2) Dans le cas où la ressource n'est pas complètement épuisée, la contrainte du problème doit être remplacée par une inégalité :

$$x_1+x_2+x_3 \leq d$$

On doit donc utiliser les conditions de Kuhn-Tucker et non plus celle de Lagrange.

On introduit une variable d'écart x_4 comme ceci :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=d.$$

Cette variable représente justement l'excédent de ressource qui n'est pas alloué aux trois activités. Cet excédent est revendu au prix unitaire p. On doit donc ajouter cette recette supplémentaire à la fonction objectif. Le problème est maintenant :

$$\begin{cases} \text{Max}\,\big(f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + px_4\big) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = d \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Le lagrangien devient :

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + px_4 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - d) \\ &= 8x_1 - x_1^2 + 8x_2 - 2\,x_2^2 + 8x_3 - 3\,x_3^2 + px_4 - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - d) \end{aligned}$$

On écrit tout d'abord les conditions de signes portant sur les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 8 - 2x_1 - \lambda \leq 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 8 - 4x_2 - \lambda \leq 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 8 - 6x_3 - \lambda \leq 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_4} = p - \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Il y a ensuite les relations d'exclusion :

$$\begin{cases} x_1(8 - 2x_1 - \lambda) \leq 0 \\ x_2(8 - 4x_2 - \lambda) \leq 0 \\ x_3(8 - 6x_3 - \lambda) \leq 0 \\ x_4(p - \lambda) \leq 0 \end{cases}$$

On discute à partir de la dernière équation. Si x_4 est nul, on se trouve dans le cas de la question précédente et le problème a déjà été résolu. On va donc supposer que $x_4 \neq 0$. Cela implique que $(p - \lambda) \leq 0$, donc $\lambda = p$.

On en déduit, au moyen des trois premières relations d'exclusion :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(8 - p) \\ x_2 = \dfrac{1}{4}(8 - p) \\ x_3 = \dfrac{1}{6}(8 - p) \\ x_4 = d - \dfrac{11}{12}(8 - p) \end{cases}$$

Discussion

Les conditions de signe sur x_1, x_2, x_3, x_4 imposent que $p \leq 8$ et $p \geq 8 - \dfrac{12}{11}d$.

Si jamais $p < 8 - \frac{12}{11}d$, alors on a $x_4 = 0$ et on est dans la situation de la question précédente. Cela signifie que le prix de revente des excédents n'est pas suffisamment intéressant et qu'il n'y a aucun intérêt à ne pas tout répartir.

Si jamais $p > 8$, au contraire, on aura $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et donc $x_4 = d$. Cela signifie que le prix de revente de l'excédent est tellement élevé qu'on préfère ne rien allouer et tout revendre à ce prix !

3) Pour comparer les deux stratégies, il faut connaître la valeur à l'optimum de la fonction objectif dans les deux cas étudiés.

Dans le premier cas, on calcule $f^* = 8d - \frac{6}{11}d^2$. Dans le deuxième cas, on calcule $f^* = \frac{11}{24}(8-p)^2 + dp$. Cette dernière quantité est une fonction de degré 2 en p. Elle admet un minimum qu'on trouve en annulant sa dérivée par rapport à p :

$$-\frac{11}{12}(8-p) + d = 0$$

Cela donne un minimum en $p = 8 - \frac{12}{11}d$ et on calcule que la valeur de la fonction en ce point est $8d - \frac{6}{11}d^2$ qui est justement la valeur f^* trouvée dans le premier cas.

On en conclut que la deuxième stratégie est meilleure que la première.

Ce problème sera traité à nouveau dans le cours de programmation dynamique en utilisant le principe de Bellman.

2 Les coniques

Rappels de cours

Une conique $\mathcal{C}$ est une courbe algébrique de degré 2. C'est l'ensemble des zéros d'un polynôme de degré 2 à 2 variables, c'est-à-dire l'ensemble des points (x_1, x_2) qui vérifient une équation de la forme

$$P(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 = 0 \tag{6}$$

Considérons le changement de variables suivant qui introduit des coordonnées (X_1, X_2, X_3) dites homogènes :

$$x_1 = \frac{X_1}{X_3} \qquad x_2 = \frac{X_2}{X_3} \tag{7}$$

Après substitution et multiplication par X_3^2, l'équation précédente devient :

$$Q(X_1, X_2, X_3) = a_1\, X_1^2 + a_2\, X_1X_2 + a_3\, X_2^2 + a_4\, X_1X_3 + a_5\, X_2X_3 + a_6\, X_3^2 = 0 \tag{8}$$

L'expression $Q(X_1, X_2, X_3)$ est une forme quadratique. On peut la représenter par une matrice A de taille 3×3 telle que

$$Q = {}^tXAX \tag{9}$$

où X est le vecteur de coordonnées X_1, X_2, X_3.

La matrice est définie comme ceci :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_4 \\ \frac{1}{2}a_2 & a_3 & \frac{1}{2}a_5 \\ \frac{1}{2}a_4 & \frac{1}{2}a_5 & a_6 \end{pmatrix} \tag{10}$$

C'est une matrice symétrique. On pose $\Delta = \det(A)$. Si $\Delta \neq 0$, la conique est dite propre (ou non-dégénérée), autrement elle est dégénérée.

Lorsqu'une forme quadratique est dégénérée, elle se scinde en un produit de deux polynômes de degré 1. Géométriquement, cela signifie que la conique est un couple de droites. Si elle est non-dégénérée, la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Classification

Afin de déterminer quelle sorte de conique est définie par A, il faut consédérer la sous-matrice 2×2 supérieure gauche, i-e la matrice B obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de A :

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{1}{2}a_2 \\ \frac{1}{2}a_2 & a_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Le déterminant de B est noté δ. Il vaut

$$\delta = a_1 a_3 - \frac{1}{4}a_2^2 \tag{12}$$

Dans le cas non-dégénéré, la matrice A est de rang 3 et on a la classification suivante en fonction du déterminant $\delta = \det(B)$:

- si $\delta > 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse ;
- si $\delta = 0$, $\mathcal{C}$ est une parabole ;
- si $\delta < 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Si la conique est dégénérée, A est de rang inférieur à 3 et on a la classification suivante :

- si $\delta > 0$, $\mathcal{C}$ est vide ;
- si $\delta = 0$, $\mathcal{C}$ est une paire de droites parallèles (éventuellement confondues) ;
- si $\delta < 0$, $\mathcal{C}$ est une paire de droite sécantes.

Le cas de la droite double (droites parallèles confondues) se produit lorsque A est de rang 1.

Points à l'infini

Hormis dans le cas d'une ellipse, toutes les coniques ont des points à l'infini. On peut les trouver en faisant tendre $X_3 \longrightarrow 0$ dans l'équation (8). À la limite, on obtient l'équation suivante :

$$a_1\, X_1^2 + a_2\, X_1 X_2 + a_3\, X_2^2 = 0$$

qui peut être réécrite en fonction des variables x_1 and x_2 comme ceci :

$$a_1\, x_1^2 + a_2\, x_1 x_2 + a_3\, x_2^2 = 0 \tag{13}$$

On pose $t = \dfrac{x_2}{x_1}$. La variable t peut être interprétée comme la pente des directions à l'infini. L'équation précédente devient, après division par x_1^2 :

$$a_1 + a_2\, t + a_3\, t^2 = 0 \tag{14}$$

C'est une équation du second degré qui possède des solutions réelles lorsque son discriminant est non-négatif :

$$D = a_2^2 - 4a_1 a_3 = -4\delta \geq 0 \tag{15}$$

Donc, si $\delta > 0$ (cas d'une ellipse), le discriminant est négatif et il n'y a pas de solutions : c'est normal puisqu'une ellipse n'a pas de points à l'infini. Si $\delta < 0$ (cas d'une hyperbole), on trouve deux solutions distinctes qui correspondent à la pente des asymptotes de l'hyperbole. Finalement, si $\delta = 0$ (cas d'une parabole), on trouve une solution unique qui est la direction asymptotique des branches de la parabole.

Centre

Certaines coniques ont un centre C. Au centre, le gradient du polynôme quadratique P est nul. Cela conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

En calculant les dérivées partielles, on obtient les équations au centre :

$$\begin{cases} a_1\, x_1 + \dfrac{1}{2} a_2\, x_2 + a_4 & = & 0 \\ \dfrac{1}{2} a_2\, x_1 + a_3\, x_2 + a_5 & = & 0 \end{cases} \tag{17}$$

C'est un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Sa matrice est B et son déterminant est δ. Si $\delta = \det(B) \neq 0$, il a une solution unique et la conique a donc un centre unique. C'est le cas de l'ellipse, de l'hyperbole et des paires de droites sécantes.

Axes

Les axes de symétrie d'une conique sont des droites passant par le centre. Leurs vecteurs directeurs sont les vecteurs propres de la matrice B.

Étant donné que B est symétrique, on a les propriétés suivantes :
- les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles (i-e non complexes) ;
- les vecteur propres sont eux aussi réels ;
- la matrice est diagonalisable dans une base orthonormée. Cela signifie qu'on peut toujours trouver deux vecteur propres orthogonaux dont la norme est égale à 1. Notons V_1 et V_2 ces deux vecteurs.

Il en résulte qu'une conique a, en général, deux axes et ceux-ci sont orthogonaux entre eux.

Les valeur propres sont les racines du polynôme caractéristique associé à la matrice B. Ce polynôme est défini par

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \lambda^2 - \mathrm{Tr}(B)\lambda + \det(B) \\ &= \lambda^2 - (a_1 + a_3)\lambda + \delta \\ &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Si λ est une valeur propre, le vecteur propre V correspondant est solution de l'équation suivante :

$$(B - \lambda I)V = 0 \tag{19}$$

Dans le cas particulier où $\lambda_1 = \lambda_2$, l'espace propre est de dimension 2 ce qui signifie que toute direction est direction propre. C'est le cas du cercle : dans un cercle, en effet, tout diamètre est axe de symétrie.

Équation réduite

Dans le cas d'une conique à centre (ellipse ou hyperbole), on peut changer de système de coordonnées en translatant l'origine au centre C et en prenant V_1 et V_2 comme vecteurs de base. Dans la base $\{C, V_1, V_2\}$, désignons les coordonnées par y_1 et y_2. L'équation de la conique dans cette base est remarquablement simple :

$$\boxed{\lambda_1\, y_1^2 + \lambda_2\, y_2^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0} \tag{20}$$

La relation entre les coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2) est donnée par la matrice de passage T dont les colonnes sont les deux vecteurs V_1 et V_2. On a l'identité suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Exercices corrigés

Corrigé ex. 7 - Représentations graphiques de coniques

Conique 1

$$\boxed{13x_1^2 - 32x_1x_2 + 37x_2^2 + 6x_1 - 42x_2 - 27 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -16 & 3 \\ -16 & 37 & -21 \\ 3 & -21 & -27 \end{pmatrix}$$

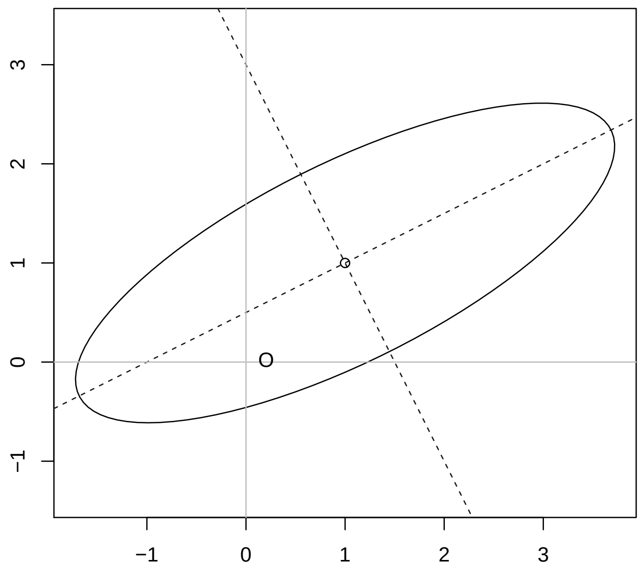
On calcule $\Delta = -10125 = -45 \times 225$ et $\delta = 225$. La conique est donc une ellipse.

Les coordonnées du centre sont $C = (1, 1)$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 45$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'équation réduite dans la base $\{C, V_1, V_2\}$ s'écrit

$$\frac{y_1^2}{9} + y_2^2 = 1$$



$13x_1^2 - 32x_1x_2 + 37x_2^2 + 6x_1 - 42x_2 - 27$

Conique 2

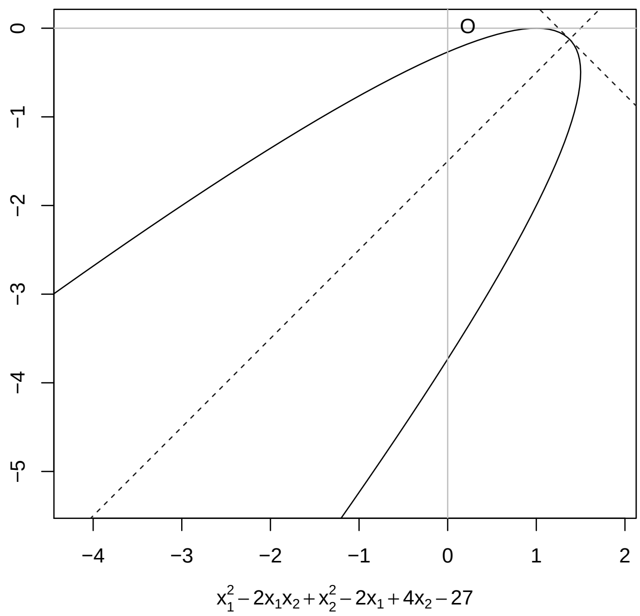
$$\boxed{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = -1$ et $\delta = 0$. La conique est donc une parabole et il n'y a pas de centre. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Conique 3

$$\boxed{4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 1 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 6 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = 0$ et $\delta = 0$. La conique est donc dégénérée en une paire de droites.

On remarque que la matrice A est de rang 1 : en effet, la première et la deuxième colonnes sont clairement multiples de la troisième. Il s'agit donc d'une droite doubles (droites parallèles et confondues).

Cela correspond au fait que le polynôme définissant l'équation de cette conique est un carré parfait :

$$4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 1 = (2\,x_1 + 3\,x_2 - 1)^2$$

La droite a pour équation

$$2\,x_1 + 3\,x_2 - 1 = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 13$ et $\lambda_2 = 0$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Conique 4

$$\boxed{3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 24x_1 - 8x_2 - 16 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 12 \\ -5 & 3 & -4 \\ 12 & -4 & -16 \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = 256$ et $\delta = -16$. La conique est donc une hyperbole.

Les coordonnées du centre sont $C = (1, 3)$.

Les asymptotes sont obtenues avec l'équation (13) des points à l'infini (voir page 15) :

$$3\,x_1^2 - 10\,x_1x_2 + 3\,x_2^2 = 0$$

On pose $t = \dfrac{x_2}{x_1}$. L'équation précédente devient :

$$3 - 10\,t + 3\,t^2 = 0$$

On trouve deux solutions qui sont les pentes des asymptotes : $t_1 = 1/3$ et $t_2 = 3$.

Les asymptotes sont donc les droites passant par le centre et ayant pour pentes t_1 et t_2 respectivement. On trouve :

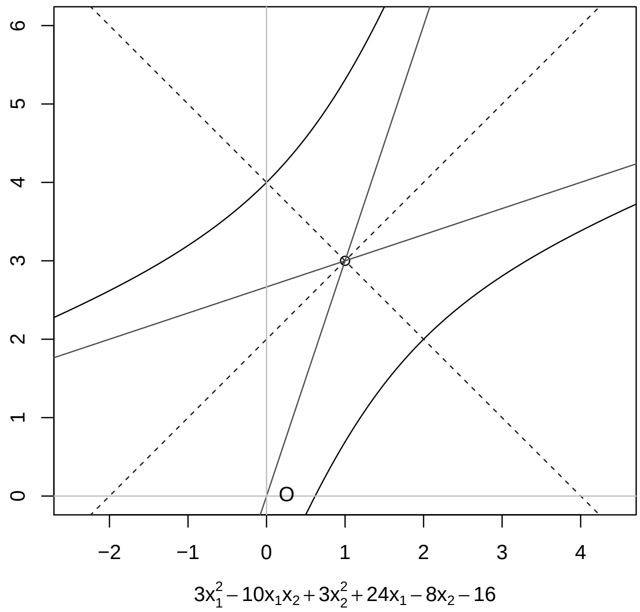
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 3\,x_2 + 8 & = & 0 \\ 3\,x_1 - x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = -2$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'équation réduite dans la base $\{C, V_1, V_2\}$ s'écrit

$$\frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{8} = 1$$



Conique 5

$$\boxed{3x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 36x_1 + 44x_2 + 105 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 4 & 4 & 22 \\ 18 & 22 & 105 \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = 0$ et $\delta = -4$. La conique est donc une paire de droites sécantes.

Les coordonnées du centre (point d'intersection des deux droites) sont $C = (-4, -3/2)$.

Les droites peuvent être obtenues avec l'équation (13) des points à l'infini (voir page 15) :

$$3\,x_1^2 + 8\,x_1x_2 + 4\,x_2^2 = 0$$

On pose $t = \dfrac{x_2}{x_1}$. L'équation précédente devient :

$$3 + 8\,t + 4\,t^2 = 0$$

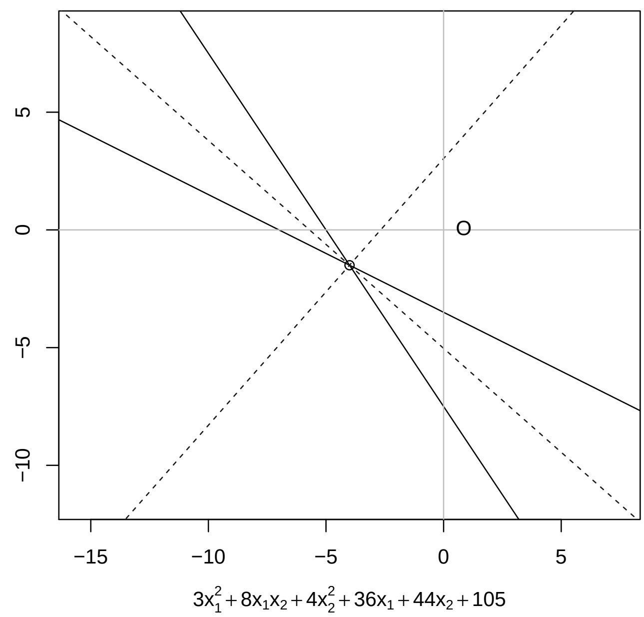
On trouve deux solutions qui sont les pentes des asymptotes : $t_1 = -3/2$ et $t_2 = -1/2$.

Les deux droites cherchées sont donc les droites passant par le centre et ayant pour pentes t_1 et t_2 respectivement. On trouve :

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + 7 &= 0 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 + 15 &= 0 \end{cases}$$

On vérifie que le polynôme quadratique définissant la conique se scinde en le produit des équations des deux droites :

$$3x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2 + 24x_1 - 8x_2 - 16 = (x_1 + 2\,x_2 + 7) \times (3\,x_1 + 2\,x_2 + 15)$$



Conique 6

$$\boxed{-\sqrt{3}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{3}x_2^2 + 6\sqrt{3}x_1 - 6x_2 - 4 - 9\sqrt{3} = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 3\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & -3 \\ 3\sqrt{3} & -3 & -4 - 9\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = 16$ et $\delta = -4$. La conique est donc une hyperbole.

Les coordonnées du centre sont $C = (3, 0)$.

Les asymptotes sont obtenues avec l'équation (13) des points à l'infini (voir page 15) :

$$-\sqrt{3}\,x_1^2 + 2\,x_1x_2 + \sqrt{3}\,x_2^2 = 0$$

On pose $t = \dfrac{x_2}{x_1}$. L'équation précédente devient :

$$-\sqrt{3} + 2\,t + \sqrt{3}\,t^2 = 0$$

On trouve deux solutions qui sont les pentes des asymptotes : $t_1 = -\sqrt{3}$ et $t_2 = \sqrt{3}/3$.

Les asymptotes sont donc les droites passant par le centre et ayant pour pentes t_1 et t_2 respectivement. On trouve :

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,x_1 + x_2 - 3\sqrt{3} & = & 0 \\ x_1 - \sqrt{3}\,x_2 - 3 & = & 0 \end{cases}$$

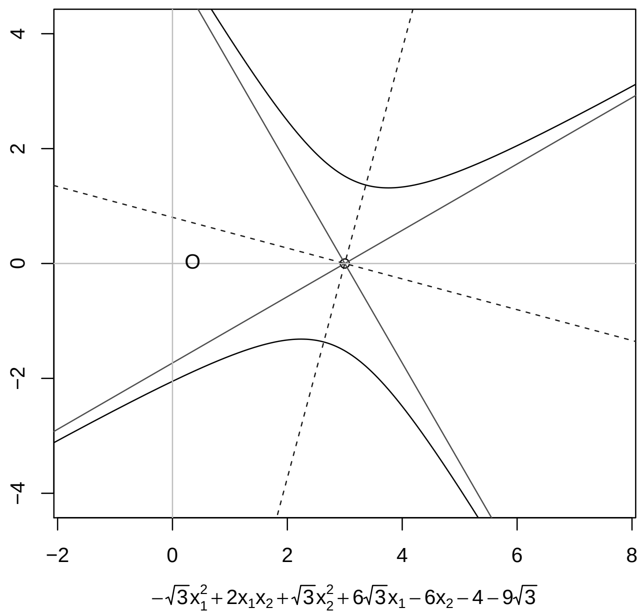
Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{||V_1||}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{||V_2||}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec $||V_1|| = ||V_2|| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

L'équation réduite dans la base $\{C, V_1, V_2\}$ s'écrit

$$y_1^2 - y_2^2 = 2$$



Conique 7

$$\boxed{5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 42x_1 - 38x_2 + 93 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -21 \\ 3 & 5 & -19 \\ -21 & -19 & 93 \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = -128$ et $\delta = 16$. La conique est donc une ellipse.

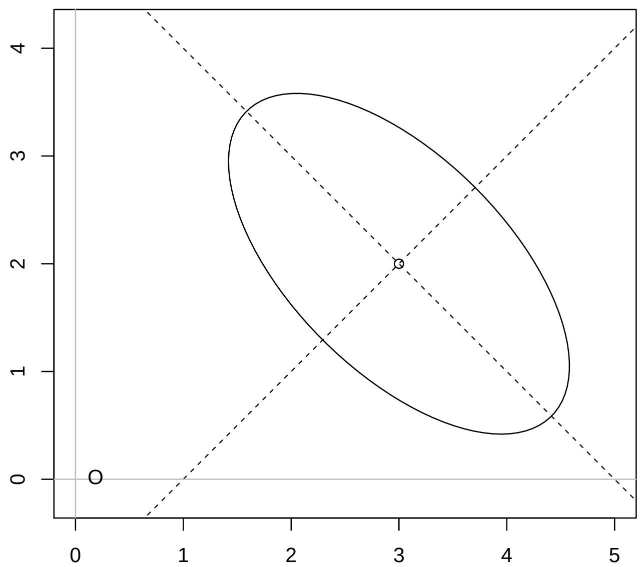
Les coordonnées du centre sont $C = (3, 2)$.

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = 2$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'équation réduite dans la base $\{C, V_1, V_2\}$ s'écrit

$$y_1^2 + \frac{1}{4} y_2^2 = 1$$



$5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 42x_1 - 38x_2 + 93$

Conique 8

$$\boxed{x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 26x_1 + 18x_2 + 18 = 0}$$

La matrice A représentant la conique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 3 & -7 & 9 \\ -13 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

On calcule $\Delta = 112$ et $\delta = -16$. La conique est donc une hyperbole.

Les coordonnées du centre sont $C = (4, 3)$.

Les pentes des asymptotes sont obtenues avec l'équation :

$$1 + 6\,t - 7\,t^2 = 0$$

On trouve deux solutions qui sont les pentes des asymptotes : $t_1 = -1/7$ et $t_2 = 1$.

Les asymptotes sont donc les droites passant par le centre et ayant pour pentes t_1 et t_2 respectivement. On trouve :

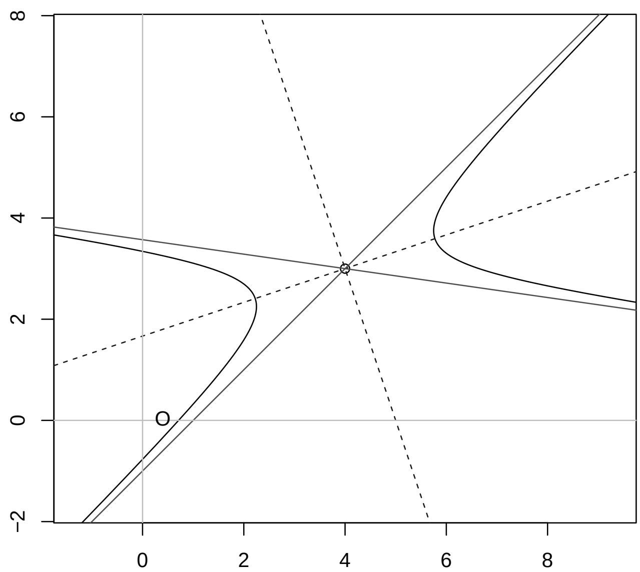
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 & = & 0 \\ x_1 + 7\,x_2 - 25 & = & 0 \end{cases}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -8$ et les vecteurs propres correspondants sont respectivement

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'équation réduite dans la base $\{C, V_1, V_2\}$ s'écrit

$$2y_1^2 - 8y_2^2 = 7$$



$x_1^2 + 6x_1x_2 - 7x_2^2 - 26x_1 + 18x_2 + 18$

Corrigé ex. 8 - Famille de coniques dépendant de α

1) $(4+\alpha)\, x_1^2+4(1-\alpha)\, x_1x_2+(4\alpha+1)\, x_2^2+2(2+3\alpha)\, x_1+2(1-6\alpha)\, x_2+9\alpha-4=0$

Dans le cas $\alpha=1$, on a l'équation

$$5x_1^2+5x_1^2+10x_1-10x_2+5=0$$

qui peut se réécrire comme ceci :

$$(x_1+1)^2+(x_2-1)^2=1.$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $C=(-1,1)$ et de rayon 1.

Dans le cas $\alpha=-1$, on a l'équation

$$3x_1^2+8x_1x_2-3x_1^2-2x_1+14x_2-13=0$$

La matrice associée est

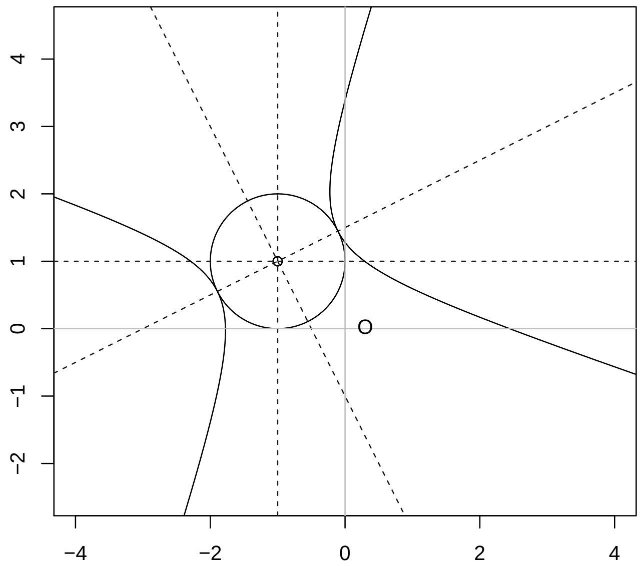
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \\ -1 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut $\Delta=125$ et le sous-déterminant des termes de degré 2 vaut $\delta=-25$. C'est une hyperbole de même centre $C=(-1,1)$. Les asymptotes sont les droites passant par le centre et de pentes respectives 3 et -1/3. Les axes sont les vecteurs propres de la sous-matrice

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_1=-5$ et $\lambda_2=5$. On trouve des vecteurs propres de coordonnées :

$$V_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad V_2=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$



alpha=−1 et alpha=1

2) Dans la base des vecteurs propres, l'équation réduite du cercle est

$$y_1^2 + y_2^2 = 1$$

et celle de l'hyperbole est

$$y_1^2 - y_2^2 = 1$$

3) On obtient une parabole lorsque le déterminant de la sous-matrice

$$B = \begin{pmatrix} 4+\alpha & 2(1-\alpha) \\ 2(1-\alpha) & 4\alpha+1 \end{pmatrix}$$

est nul et que la conique n'est pas dégénérée. Ce déterminant vaut

$$2(4+\alpha)(4\alpha+1) - 4(1-\alpha)^2 = 25\alpha$$

Il s'annule uniquement lorsque $\alpha = 0$. Mais dans ce cas, on peut vérifier que le déterminant Δ de la conique est lui aussi nul : elle est donc dégénérée et il ne s'agit pas d'une parabole mais d'un couple de droites parallèles.

Corrigé ex. 9 - Famille de coniques Γ_m

1) Γ_m est la conique d'équation

$$(m+1/5)x_1^2 + 16/5x_1x_2 + (m-11/5)x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$$

où $m \in \mathbb{R}$.

La matrice $\mathcal{M}_m$ associée à la conique est

$$\mathcal{M}_m = \begin{pmatrix} m+1/5 & 8/5 & 1 \\ 8/5 & m-11/5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Pour trouver la nature de Γ_m, on doit calculer le déterminant Δ_m de la matrice $\mathcal{M}_m$ et le déterminant δ_m de la sous-matrice $B_m = \begin{pmatrix} m+1/5 & 8/5 \\ 8/5 & m-11/5 \end{pmatrix}$

On trouve

$$\delta_m = (m+1/5)(m-11/5) - 64/25 = m^2 - 2m - 3 = (m+1)(m-3)$$

et

$$\Delta_m = m^2 - 7m - 8 = (m+1)(m-8)$$

Pour $m = -1$ et $m = 8$, la conique est dégénérée. Pour les autres valeurs de m, il faut discuter selon le signe de δ_m :

– si $-1 < m < 3$, le déterminant δ_m est négatif et la conique est une hyperbole ;
– si $m < -1$ ou $m > 3$, le déterminant δ_m est positif et la conique est une ellipse. Si $m = 8$, cette ellipse est réduite à un point et, si $m > 8$, elle est vide ;
– si $m = -1$, la conique est un couple de deux droites parallèles ;
– si $m = 3$, le déterminant δ_m est nul et la conique est une parabole.

3) Les équations au centre de Γ_m sont

$$\begin{cases} (m+1/5)x_1 + 8/5x_2 + 1 & = 0 \\ 8/5x_1 + (m-11/5)x_2 - 2 & = 0 \end{cases}$$

On trouve comme solution

$$x_1 = \frac{-1}{m-3} \quad x_2 = \frac{2}{m-3}.$$

Dans le cas où $m = 3$, cette solution est impossible et cela correspond au fait qu'il s'agit d'une parabole et qu'une parabole n'a pas de centre.

Les directions principales sont les vecteurs propres de la sous-matrice B_m. Les valeurs propres sont $(m+1)$ et $(m-3)$. On trouve alors les vecteurs propres

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les directions principales sont donc indépendantes de m, autrement dit toutes les coniques de la famille ont les mêmes axes de symétrie.

4) Lorsque $m \neq 3$, on trouve l'équation réduite de Γ_m au moyen de la formule :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \frac{\Delta_m}{\delta_m} = 0.$$

Cela donne ici :

$$(m+1)y_1^2 + (m-3)y_2^2 + \frac{m-8}{m-3} = 0.$$

On retrouve le fait que, si $m > 8$, la conique est vide car tous les coefficients de cette équation sont alors strictement positifs et l'équation est impossible (en nombres réels).

Lorsque $m = 3$, on trouve :

$$4y_1^2 + 108y_2 + 1 = 0.$$

Corrigé ex. 10 - Résolution graphique

On considère le programme quadratique suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } (x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2) \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pour faire une résolution *graphique* du programme, il faut tout d'abord représenter le domaine réalisable, c'est-à-dire l'ensemble des points qui vérifient les contraintes. On doit placer les deux droites

$$\begin{cases} D_1 : \quad x_1 + 2x_2 = 4 \\ D_2 : \quad 3x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

Les isoquantes de la fonction objectif sont les coniques d'équation :

$$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2 = C.$$

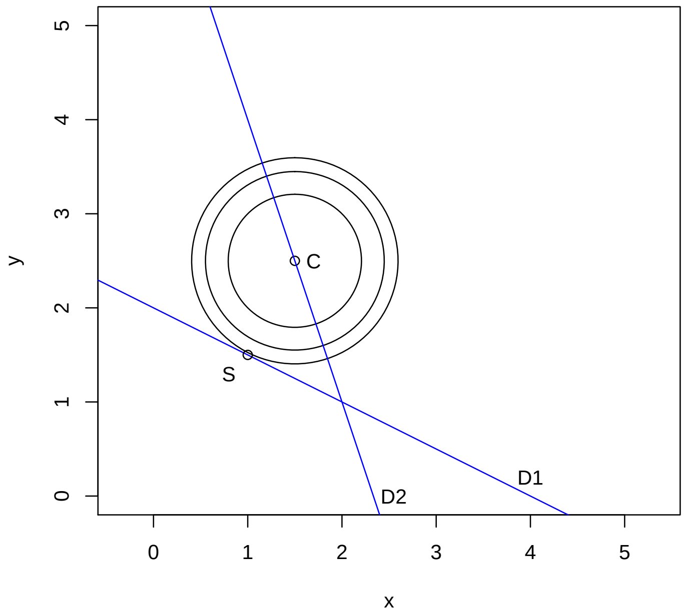
On calcule :

$$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 5x_2 = (x_1 - 3/2)^2 - 9/4 + (x_2 - 5/2)^2 - 25/4$$

Donc l'équation des isoquantes s'écrit aussi

$$(x_1 - 3/2)^2 + (x_2 - 5/2)^2 = C + 34/4$$

Ce sont des équations de cercles de centre $C = (3/2, 5/2)$.



On voit graphiquement que le point solution est le point de contact d'un des cercles de la famille avec la droite D_1. Géométriquement, ce point S est la projection orthogonale du centre C des cercles sur la droite D_1. On calcule ses coordonnées en écrivant l'équation de la droite passant par C et orthogonale à D_1 et en cherchant son intersection avec D_1 elle-même. Cette droite a pour vecteur directeur $(1, 2)$ et son équation s'écrit :

$$2(x_1 - 3/2) - (x_2 - 5/2) = 0$$

autrement dit

$$2x_1 - x_2 = 1/2$$

On trouve son intersection avec D_1 en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 1/2 \end{array} \right.$$

La solution est le point $S = (1, 3/2)$.

3 La méthode de Beale

Corrigé ex. 11 - Résolution par méthode de Beale

Programme 1

$$\begin{cases} \text{Min}(x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 14x_2) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 18 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit une variable d'écart x' et on change le signe de la fonction objectif pour en faire un problème de maximisation :

$$\begin{cases} \text{Max}(f = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 14x_2) \\ 3x_1 + 4x_2 + x' = 18 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Au départ, la situation est la suivante :

$$\left| \begin{array}{lll} \text{Hors-base} & x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ \text{Base} & x' = 18 & \end{array} \right.$$

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = -2x_1 + 10 = 10 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = -2x_2 + 14 = 14 \end{cases}$$

Puisque $14 > 10$, c'est la variable x_2 qui va augmenter, tandis que x_1 reste nulle.

Ces dérivées doivent rester positives car la fonction doit croître (la seconde ne pose pas de problème puisqu'elle ne dépend pas de x_1) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0 \iff x_1 \leq 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \iff x_2 \leq 7$$

Par ailleurs, la contrainte implique que $x' = 18 - 3x_1 - 4x_2 \geq 0$ autrement dit $x_2 \leq 9/2$.

Puisque $9/2 < 7$, la variable x_2 augmente seulement jusqu'à $9/2$.

La nouvelle situation est donc :

$$\left| \begin{array}{lll} \text{Hors-base} & x_1 = 0 & x' = 0 \\ \text{Base} & x_2 = 9/2 & \end{array} \right.$$

On recalcule x_2 et f en fonction des nouvelles variables hors-base :

$$\begin{cases} x_2 & = \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{4}x_1 - \dfrac{1}{4}x' \\ f & = -\dfrac{25}{16}x_1^2 - \dfrac{1}{16}x'^2 - \dfrac{3}{8}x_1x' + \dfrac{25}{4}x_1 - \dfrac{5}{4}x' + \dfrac{171}{4} \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = \dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{8}x_1 - \dfrac{3}{8}x' = \dfrac{25}{4} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x'} & = -\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{8}x_1 - \dfrac{1}{8}x' = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

C'est la variable x_1 qui va maintenant augmenter, tandis que x' reste nulle. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 2$$

$$x_2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 6$$

Donc x_1 augmente jusqu'à la valeur 2 mais x_2 ne s'annule pas. On n'a donc plus qu'une seule variable hors-base alors qu'il en faut deux. Pour remédier à cette situation, on pose

$$u = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{25}{4} - \frac{25}{8}x_1 - \frac{3}{8}x'$$

Cette variable s'annule si $x_1 = 2$.

La nouvelle situation est donc :

Hors-base	$u = 0$	$x' = 0$
Base	$x_1 = 2$	$x_2 = 9/2$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & = 2 - \dfrac{8}{25}u - \dfrac{3}{25}x' \\ x_2 & = 3 + \dfrac{6}{25}u - \dfrac{4}{25}x' \\ f & = -\dfrac{4}{25}u^2 - \dfrac{1}{25}x'^2 - 2x' + 49 \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} & = -\dfrac{8}{25}u = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x'} & = -2 - \dfrac{2}{25}x' = -2 \end{cases}$$

Elles sont négatives ou nulles donc la fonction f ne peut plus augmenter et on est à l'optimum :

$$\begin{cases} x_1^* & = 2 \\ x_2^* & = 3 \\ f^* & = 49 \end{cases}$$

La contrainte est saturée puisque x' est hors-base.

Programme 2

$$\begin{cases} \text{Max}\, 18x_1 + 2x_2 - (5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit des variables d'écart x_1' et x_2' :

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_1' & & = 3 \\ x_1 & +3x_2 & & +x_2' & = 6 \end{cases}$$

Au départ, la situation est la suivante :

$$\left| \begin{array}{lll} \text{Hors-base} & x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ \text{Base} & x_1' = 3 & x_2' = 6 \end{array} \right.$$

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = 18 - 10x_1 + 6x_2 (= 18) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = 2 + 6x_1 - 10x_2 (= 14) \end{cases}$$

Puisque $18 > 14$, c'est la variable x_1 qui va augmenter, tandis que x_2 reste nulle.

Ces dérivées doivent rester positives car la fonction doit croître (mais la seconde conduit à une condition toujours vérifiée puisque $x_1 \geq 0$) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 9/5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \geq -1/3$$

Par ailleurs, les contraintes impliquent que les deux variables d'écart doivent rester positives :

$$x_1' = 3 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 3$$

$$x_2' = 6 - x_1 - 3x_2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 6$$

En définitive, la variable x_1 augmente seulement jusqu'à 9/5. La nouvelle situation est donc :

$$\left| \begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_2 = 0 & & \\ \text{Base} & x_1 = 9/5 & x_1' = 6/5 & x_2' = 21/5 \end{array} \right.$$

On n'a donc plus qu'une seule variable hors-base alors qu'il en faut deux. Pour remédier à cette situation, on pose

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 18 - 10x_1 + 6x_2$$

Cette variable s'annule si $x_1 = 9/5$, autrement dit, elle est actuellement hors-base :

$$\left|\begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_2 = 0 & u_1 = 0 & \\ \text{Base} & x_1 = 9/5 & x_1' = 6/5 & x_2' = 21/5 \end{array}\right.$$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{9}{5} - \frac{1}{10}u_1 + \frac{3}{5}x_2 \\ x_1' & = \frac{6}{5} + \frac{1}{10}u_1 - \frac{8}{5}x_2 \\ x_2' & = \frac{21}{5} + \frac{1}{10}u_1 - \frac{18}{5}x_2 \\ f & = -\frac{1}{20}u_1^2 - \frac{16}{5}x_2^2 + \frac{64}{5}x_2 + \frac{81}{5} \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles (par rapport aux variables hors-base) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_1} & = -\frac{1}{10}u_1 (= 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & = \frac{64}{5} - \frac{32}{5}x_2 (= \frac{64}{5}) \end{cases}$$

C'est la variable x_2 qui va maintenant augmenter, tandis que u_1 reste nulle. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \iff x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \iff x_2 \geq -3$$

$$x_1' \geq 0 \iff x_2 \leq 3/4$$

$$x_2' \geq 0 \iff x_2 \leq 7/6$$

Donc x_2 augmente jusqu'à la valeur $3/4 = \mathrm{Min}(2, 3/4, 7/6)$ et x_1' s'annule. La nouvelle situation est donc :

$$\left|\begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_1' = 0 & u_1 = 0 & \\ \text{Base} & x_1 = 9/4 & x_2 = 3/4 & x_2' = 3/2 \end{array}\right.$$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{16}u_1 - \dfrac{3}{8}x'_1 \\ x_2 & = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{16}u_1 - \dfrac{5}{8}x'_1 \\ x'_2 & = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8}u_1 + \dfrac{9}{4}x'_1 \\ f & = 24 + \dfrac{1}{2}u_1 - 5x'_1 - \dfrac{5}{4}{x'_1}^2 - \dfrac{1}{16}u_1^2 + \dfrac{1}{4}u_1x'_1 \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles (par rapport aux variables hors-base) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}u_1 + \dfrac{1}{4}x'_1 (= \dfrac{1}{2}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x'_1} & = -5 + \dfrac{1}{4}u_1 - \dfrac{5}{2}x'_1 (= -5) \end{cases}$$

On fait donc augmenter u_1. Les conditions imposent :

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} \geq 0 & \Longleftrightarrow & u_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 & \Longleftrightarrow & u_1 \leq 36 \\ x_2 \geq 0 & \Longleftrightarrow & u_1 \geq -12 \\ x'_2 \geq 0 & \Longleftrightarrow & u_1 \leq 12 \end{array}$$

La variable u_1 ne peut donc dépasser 4 et aucune des variables actuellement dans la base ne s'annule : il n'y a plus qu'une seule variable hors-base (x'_1). On doit à nouveau introduire une variable supplémentaire :

$$u_2 = \frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}u_1 + \frac{1}{4}x'_1$$

Actuellement u_2 vaut 0 et est donc hors-base.

Le recalcul en fonction des variables hors-base conduit à :

$$\begin{cases} x_1 & = 2 + \dfrac{1}{2}u_2 - \dfrac{1}{2}x'_1 \\ x_2 & = 1 - \dfrac{1}{2}u_2 - \dfrac{1}{2}x'_1 \\ x'_2 & = 1 + u_2 + 2x'_1 \\ u_1 & = 4 - 8u_2 + 2x'_1 \\ f & = 25 - 4x'_1 - {x'_1}^2 - 4u_2^2 \end{cases}$$

Les dérivées partielles sont maintenant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_2} & = -8u_2 (= 0) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x'_1} & = -4 - 2x'_1 (= -4) \end{cases}$$

La fonction objectif ne peut donc plus augmenter et on est à l'optimum :

$$\begin{cases} x_1^* & = 2 \\ x_2^* & = 1 \\ f^* & = 25 \end{cases}$$

La première contrainte est saturée puisque x'_1 est hors-base, mais la deuxième ne l'est pas puisque ${x'_2}^* = 1$.

Corrigé ex. 12 - Progression de la méthode de Beale

$$\begin{cases} \text{Max}\,(70x_1 + 60x_2 - 9x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_2^2) \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

12-1) On introduit des variables d'écart x'_1 et x'_2 :

$$\begin{cases} -x_1 & +2x_2 & +x'_1 & & = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & & +x'_2 & = 16 \end{cases}$$

Au départ, la situation est la suivante :

$$\begin{array}{|lll} \text{Hors-base} & x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ \text{Base} & x'_1 = 2 & x'_2 = 16 \end{array}$$

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = 74 - 18x_1 - 4x_2 \ (= 74) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = 72 - 4x_1 - 12x_2 \ (= 72) \end{cases}$$

Puisque $74 > 72$, c'est la variable x_1 qui va augmenter, tandis que x_2 reste nulle.

Ces dérivées doivent rester positives car la fonction doit croître :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 37/9$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq 18$$

Par ailleurs, les contraintes impliquent que les deux variables d'écart doivent rester positives :

$$x'_1 = 2 + x_1 - 2x_2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \geq -2$$

$$x'_2 = 16 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 \leq 8$$

En définitive, la variable x_1 augmente seulement jusqu'à 37/9. La nouvelle situation est donc :

$$\left|\begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_2 = 0 & & \\ \text{Base} & x_1 = 37/9 & x'_1 = 55/9 & x'_2 = 70/9 \end{array}\right.$$

On n'a donc plus qu'une seule variable hors-base alors qu'il en faut deux. Pour remédier à cette situation, on pose

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 74 - 18x_1 - 4x_2$$

Cette variable s'annule si $x_1 = 37/9$, autrement dit, elle est actuellement hors-base :

$$\left|\begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_2 = 0 & u_1 = 0 & \\ \text{Base} & x_1 = 37/9 & x'_1 = 55/9 & x'_2 = 70/9 \end{array}\right.$$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{37}{9} - \dfrac{1}{18}u_1 - \dfrac{2}{9}x_2 \\ x'_1 &= \dfrac{55}{9} - \dfrac{1}{18}u_1 - \dfrac{20}{9}x_2 \\ x'_2 &= \dfrac{70}{9} + \dfrac{1}{9}u_1 - \dfrac{5}{9}x_2 \\ f &= -\dfrac{1}{36}u_1^2 - \dfrac{50}{9}x_2^2 + \dfrac{500}{9}x_2 + \dfrac{1369}{9} \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles (par rapport aux variables hors-base) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} &= -\dfrac{1}{18}u_1 \ (= 0) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} &= -\dfrac{100}{9}x_2 + \dfrac{500}{9} \ (= \dfrac{500}{9}) \end{cases}$$

C'est la variable x_2 qui va maintenant augmenter, tandis que u_1 reste nulle.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \iff x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0 \iff x_2 \leq \frac{37}{2}$$

$$x_1' \geq 0 \iff x_2 \leq \frac{11}{4}$$

$$x_2' \geq 0 \iff x_2 \leq 14$$

Donc x_2 augmente jusqu'à la valeur $\frac{11}{4} = \mathrm{Min}(5, \frac{37}{2}, \frac{11}{4}, 14)$ et x_1' s'annule. La nouvelle situation est donc :

$$\left| \begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_1' = 0 & u_1 = 0 & \\ \text{Base} & x_1 = \frac{7}{2} & x_2 = \frac{11}{4} & x_2' = \frac{25}{4} \end{array} \right.$$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{7}{2} - \frac{1}{20}u_1 + \frac{1}{10}x_1' \\ x_2 & = \frac{11}{4} - \frac{1}{40}u_1 - \frac{9}{20}x_1' \\ x_2' & = \frac{25}{4} + \frac{1}{8}u_1 + \frac{1}{4}x_1' \\ f & = -\frac{9}{8}{x_1'}^2 - \frac{1}{32}u_1^2 - \frac{1}{8}u_1 x_1' - \frac{45}{4}x_1' - \frac{5}{8}u_1 + \frac{2103}{8} \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles (par rapport aux variables hors-base) :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_1} & = -\frac{5}{8} - \frac{1}{16}u_1 - \frac{1}{8}x_1' \ (= -\frac{5}{8}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1'} & = -\frac{45}{4} - \frac{1}{8}u_1 - \frac{9}{4}x_1' \ (= -\frac{45}{4}) \end{cases}$$

On fait donc maintenant diminuer u_1 afin que $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ redevienne positive. Les conditions imposent :

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \geq 0 \iff u_1 \leq -10$$

$$x_1 \geq 0 \iff u_1 \leq 70$$

$$x_2 \geq 0 \iff u_1 \leq 110$$

$$x_2' \geq 0 \iff u_1 \geq -50$$

La variable u_1 ne peut donc dépasser -10 et aucune des variables actuellement dans la base ne s'annule : il n'y a plus qu'une seule variable hors-base (x'_1). On doit à nouveau introduire une variable supplémentaire :

$$u_2 = \frac{\partial f}{\partial u_1} = -\frac{5}{8} - \frac{1}{16}u_1 - \frac{1}{8}x'_1$$

Actuellement u_2 vaut 0 et est donc hors-base.

Le recalcul en fonction des variables hors-base u_2 et x'_1 conduit à :

$$\begin{cases} x_1 & = 4 + \frac{4}{5}u_2 + \frac{1}{5}x'_1 \\ x_2 & = 3 + \frac{2}{5}u_2 - \frac{2}{5}x'_1 \\ x'_2 & = 5 - 2u_2 + 2x'_1 \\ u_1 & = -10 - 16u_2 \\ f & = 266 - 10x'_1 - {x'_1}^2 - 8u_2^2 \end{cases}$$

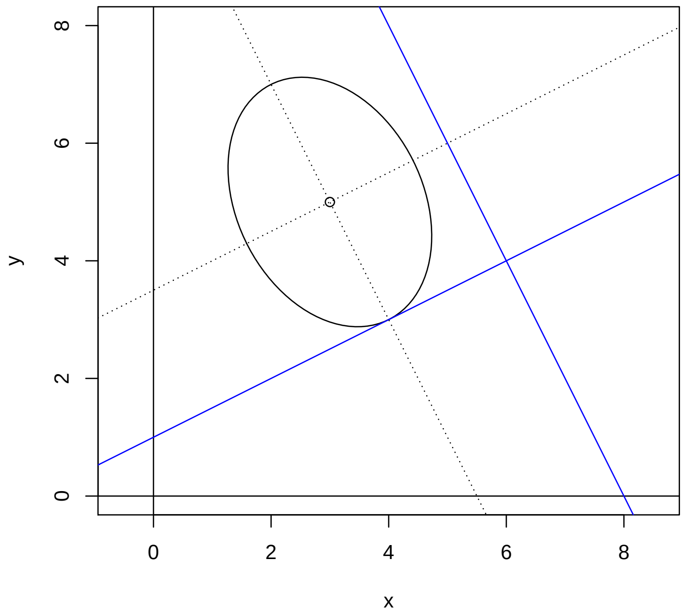
Les dérivées partielles sont maintenant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u_2} & = -16u_2 \ (= 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x'_1} & = -10 - 2x'_1 \ (= -10) \end{cases}$$

La fonction objectif ne peut donc plus augmenter et on est à l'optimum :

$$\begin{cases} x_1^* & = 4 \\ x_2^* & = 3 \\ f^* & = 266 \end{cases}$$

La première contrainte est saturée puisque x'_1 est hors-base, mais la deuxième ne l'est pas puisque ${x'_2}^* = 5$.



12-2)
Les isoquantes sont les coniques d'équation :

$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 70x_1 - 60x_2 = K$$

La matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -35 \\ 2 & 6 & -30 \\ -35 & -30 & -K \end{pmatrix}$$

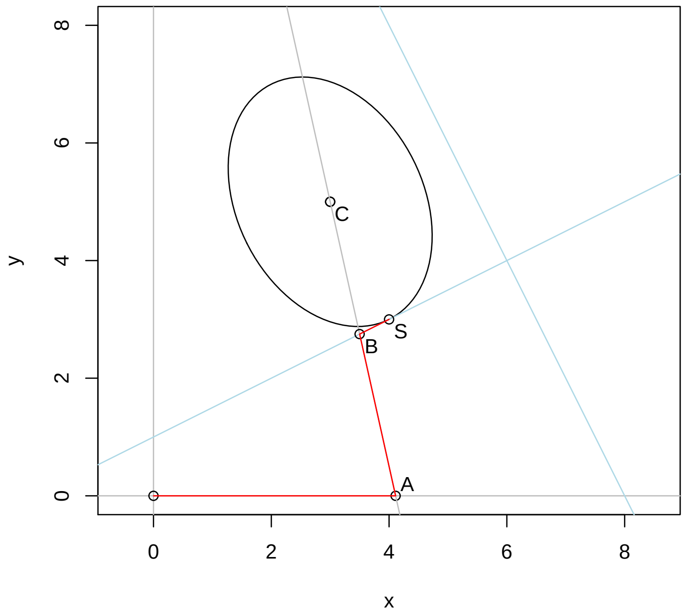
Le déterminant de la sous-matrice $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ vaut 50. Il s'agit donc d'ellipses. Le centre est le point de coordonnées $C = (3, 5)$. Les axes sont les vecteurs propres de B : on trouve les deux vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui correspondent respectivement aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$.

On remarque que les axes de la famille d'ellipses sont parallèles aux deux contraintes du problème. Le point solution est le point de contact d'une des ellipses de la famille avec la droite de la première contrainte. C'est un sommet de cette ellipse. Il a pour coordonnées $(4, 3)$. L'ellipse en question est l'isoquante correspondant à la valeur $K = 266$.

12-3) La progression de la méthode de Beale sur le graphique est la suivante : on a d'abord fait augmenter x_1 en laissant x_2 nul, ce qui signifie un déplacement depuis l'origine le long de l'axe des x_1. Ce déplacement est arrêté au point $A = (37/9, 0)$.



On a alors introduit la variable $u_1 = 74 - 18x_1 - 4x_2$. La prochaine étape a fait augmenter x_2 en laissant u_1 nulle. On a donc

$$74 - 18x_1 - 4x_2 = 0,$$

ce qui est l'équation d'une droite. On se déplace le long de cette droite jusqu'à son intersection avec la première contrainte. On atteint alors le point $B = (7/2, 11/4)$.

Le déplacement suivant consiste à faire diminuer u_1 en laissant x'_1 nulle, ce qui signifie qu'on se déplace le long de la première contrainte puisque x'_1 est la variable d'écart de cette contrainte. Cela conduit au point $S = (4, 3)$ qui ne peut pas être dépassé car autrement la fonction objectif diminuerait. S est donc la solution du problème.

Corrigé ex. 13 - Fabrication de composants électroniques

Une firme d'électronique fabrique deux types de composants, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, à l'aide de deux métaux rares $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. On désigne par x_1 et x_2 les quantités de produits $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ fabriquées.

La marge totale sur la vente des deux produits est :

$$f = p_1x_1 + p_2x_2 = (160 - 16x_1)x_1 + (30 - 3x_2)x_2$$

et on cherche à maximiser cette fonction.

Compte-tenu des contraintes de disponibilité des matériaux et de la matrice technologique, on a les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases}$$

On introduit des variables d'écart x'_1 et x'_2 :

$$\begin{cases} 4x_1 & +3x_2 & +x'_1 & & = 27 \\ x_1 & +2x_2 & & +x'_2 & = 12 \end{cases}$$

Au départ, la situation est la suivante :

Hors-base	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$
Base	$x'_1 = 27$	$x'_2 = 12$

On calcule les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & = 160 - 32x_1 (= 160) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = 30 - 6x_2 (= 30) \end{cases}$$

Puisque $160 > 30$, c'est la variable x_1 qui va augmenter, tandis que x_2 reste nulle.

Ces dérivées doivent rester positives car la fonction doit croître (la seconde ne dépend pas de x_1) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0 \iff x_1 \leq 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \iff x_2 \leq 5$$

Par ailleurs, les contraintes impliquent que les deux variables d'écart doivent rester positives :

$$x'_1 = 27 - 4x_1 - 3x_2 \geq 0 \iff x_1 \leq 27/4$$

$$x'_2 = 12 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \iff x_1 \leq 12$$

En définitive, la variable x_1 augmente seulement jusqu'à 5. La nouvelle situation est donc :

Hors-base	$x_2 = 0$		
Base	$x_1 = 5$	$x'_1 = 7$	$x'_2 = 7$

On n'a donc plus qu'une seule variable hors-base alors qu'il en faut deux. Pour remédier à cette situation, on pose

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 160 - 32x_1$$

Cette variable s'annule si $x_1 = 5$, autrement dit, elle est actuellement hors-base :

$$\left| \begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x_2 = 0 & u_1 = 0 & \\ \text{Base} & x_1 = 5 & x'_1 = 7 & x'_2 = 7 \end{array} \right.$$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & = 5 - \dfrac{1}{32} u_1 \\ x'_1 & = 7 + \dfrac{1}{8} u_1 - 3x_2 \\ x'_2 & = 7 + \dfrac{1}{32} u_1 - 2x_2 \\ f & = -\dfrac{1}{64} u_1^2 - 3x_2^2 + 30x_2 + 400 \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles (par rapport aux variables hors-base) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & = -\dfrac{1}{32} u_1 (= 0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & = 30 - 6x_2 (= 30) \end{cases}$$

C'est la variable x_2 qui va maintenant augmenter, tandis que u_1 reste nulle. On note que x_1 ne dépend pas de x_2. Les contraintes de signe imposent donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0 \iff x_2 \leq 5$$

$$x'_1 \geq 0 \iff x_2 \leq 7/3$$

$$x'_2 \geq 0 \iff x_2 \leq 7/2$$

Donc x_2 augmente jusqu'à la valeur $7/3 = \text{Min}(5, 7/3, 7/2)$ et x'_1 s'annule. La nouvelle situation est donc :

$$\left| \begin{array}{llll} \text{Hors-base} & x'_1 = 0 & u_1 = 0 & \\ \text{Base} & x_1 = 5 & x_2 = 7/3 & x'_2 = 7/3 \end{array} \right.$$

On recalcule f et les variables de base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & = 5 - \dfrac{1}{32} u_1 \\ x_2 & = \dfrac{7}{3} + \dfrac{1}{24} u_1 - \dfrac{1}{3} x'_1 \\ x'_2 & = \dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{96} u_1 + \dfrac{2}{3} x'_1 \\ f & = \dfrac{1361}{3} + \dfrac{2}{3} u_1 - \dfrac{16}{3} x'_1 - \dfrac{1}{3} {x'_1}^2 - \dfrac{1}{48} u_1^2 + \dfrac{1}{12} u_1 x'_1 \end{cases}$$

On calcule les nouvelles dérivées partielles (par rapport aux variables hors-base) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4}u_1 + \dfrac{1}{12}x'_1 (= \dfrac{2}{3}) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x'_1} & = -\dfrac{16}{3} + \dfrac{1}{12}u_1 - \dfrac{2}{3}x'_1 (= -\dfrac{16}{3}) \end{cases}$$

On fait donc augmenter u_1. On note que x_2 et x'_2 augmentent si u_1 augmente. Les autres conditions imposent :

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_1 \leq 16$$

$$x_1 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_1 \leq 160$$

La variable u_1 ne peut donc dépasser 16 et aucune des variables actuellement dans la base ne s'annule : il n'y a plus qu'une seule variable hors-base (x'_1). On doit à nouveau introduire une variable supplémentaire :

$$u_2 = \frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{12}x'_1$$

Actuellement u_2 vaut 0 et est donc hors-base.

Le recalcul en fonction des variables hors-base conduit à :

$$\begin{cases} x_1 & = \dfrac{9}{2} + \dfrac{3}{4}u_2 - \dfrac{1}{16}x'_1 \\[2ex] x_2 & = 3 - u_2 - \dfrac{1}{4}x'_1 \\[2ex] x'_2 & = \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4}u_2 + \dfrac{9}{16}x'_1 \\[2ex] u_1 & = 16 - 24u_2 + 2x'_1 \\[2ex] f & = 459 - 4x'_1 - \dfrac{1}{4}{x'_1}^2 - 12u_2^2 \end{cases}$$

Les dérivées partielles sont maintenant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u_2} & = -24u_2 (= 0) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x'_1} & = -4 - \dfrac{1}{2}x'_1 (= -4) \end{cases}$$

La fonction objectif ne peut donc plus augmenter et on est à l'optimum :

$$\begin{cases} x_1^* & = 9/2 \\ x_2^* & = 3 \\ f^* & = 459 \end{cases}$$

La première contrainte est saturée puisque x'_1 est hors-base, mais la deuxième ne l'est pas puisque ${x'_2}^* = \dfrac{3}{2}$.

Par comparaison, on peut traiter le cas d'un modèle à prix constant en prenant $p_1 = 144$ et $p_2 = 27$. On a alors affaire à un programme linéaire dont le maximum se trouve sur la même contrainte mais au point $x_1^* = 27/4$ et $x_2^* = 0$.

4 La méthode de Dantzig

Rappels de cours

On écrit le programme sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Max}(c.x + {}^t\!xBx) \\ Ax + x' = b \\ x \text{ et } x' \geq 0 \end{cases}$$

On définit le lagrangien comme ceci :

$$L(x, x', \lambda) = c.x + {}^t\!xBx - \lambda(Ax + x' - b) \tag{22}$$

On pose $\lambda = -\dfrac{\partial L}{\partial x'}$ et, par analogie, $\lambda' = -\dfrac{\partial L}{\partial x}$

Les conditions de Kuhn-Tucker conduisent aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} 2Bx & & +{}^t\lambda' & -{}^tA\,{}^t\lambda & = & -{}^tc \\ Ax & +x' & & & = & b \\ & & & & & \end{array} \right. \tag{23}$$

avec les relations d'exclusion :

$$\begin{aligned} \lambda'\,x &= 0 \\ \lambda\,x' &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

x et x' s'appellent des *variables primales*, λ et λ' des *variables duales*. À chaque variable x correspond une variable λ' et à chaque variable x' correspond une variable λ. On parle de paires (x, λ') et (x', λ). Les relations d'exclusion disent que, dans chaque paire, l'une des variables doit être nulle, autrement dit doit être hors base, tandis que l'autre est dans la base.

On calcule, d'autre part, que la valeur de la fonction à l'optimum peut s'écrire :

$$f^*(x) = \frac{1}{2}cx + \frac{1}{2}\,{}^t\!b\,{}^t\lambda \tag{25}$$

Le tableau initial s'écrit donc comme ceci :

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 2B & 0 & I & -{}^tA & -{}^tc \\ A & I & 0 & 0 & b \\ \hline -\frac{1}{2}c & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,{}^t\!b & 0 \\ \hline \end{array} \tag{26}$$

Lorsque l'origine fait partie du domaine de définition, on la prend comme point de départ. La situation de départ est donc :

$$\begin{array}{ll} x = 0 & \lambda = 0 \\ x' = b & \lambda' = -c \end{array}$$

L'origine fait partie du domaine de définition lorsque $b \geq 0$. Si ce n'est pas le cas, on ne peut pas appliquer l'algorithme de Dantzig et il faut avoir recours à l'algorithme de Wolfe.

Au départ, les variables x et λ sont hors base, les variables x' et λ' constituent la base.

L'algorithme de Dantzig est analogue à celui du simplexe. À partir du tableau initial, on passe d'un tableau à l'autre par la méthode du pivot.

On distingue cependant deux sortes de tableaux : les tableaux *standards* sont ceux pour lesquels toutes les relations d'exclusion sont satisfaites, les tableaux *non standards* sont ceux pour lesquels au moins une des relations n'est pas satisfaite.

Les critères pour déterminer la variable entrante et la variable sortante diffèrent selon que le tableau est standard ou non.

Critères pour un tableau standard

Critère d'entrée : on fait entrer une variable *primale*. C'est la variable dont la duale est la plus négative.

Critère de sortie : on fait sortir la variable qui correspond au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne de la variable entrante pour les variables primales et pour la variable duale la plus négative (celle qui a désigné la variable entrante).

Critères pour un tableau non-standard

Un tableau est non-standard lorsque deux variables faisant la paire ((x, λ') ou (x', λ)) sont non nulles, ce qui veut dire qu'elles se trouvent simultanément dans la base. Lorsqu'une paire est entièrement dans la base, une autre paire se trouve entièrement hors-base.

Critère d'entrée : on fait entrer une variable *duale*. Celle de la paire qui se trouve entièrement hors-base.

Critère de sortie : on fait sortir la variable qui correspond au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne de la variable entrante pour les variables primales et pour la variable duale de la paire qui est entièrement dans la base.

Le dernier tableau doit impérativement être standard. On est à l'optimum lorsque le critère d'entrée ne peut plus s'appliquer, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus de variable duale négative dans la base.

Exercices corrigés

Corrigé ex. 14 - Résolutions par l'algorithme de Dantzig

Programme 1

$$\begin{cases} \text{Max}(6x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 25/2 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le premier tableau est :

x_1	x_2	x'	λ'_1	λ'_2	λ		
-2	0	0	1	0	-3	-6	λ'_1
0	-2	0	0	1	-4	-8	λ'_2
3	4	1	0	0	0	25/2	x'
-3	-4	0	0	0	-25/4	0	

Ce tableau est standard car toutes les relations d'exclusion (24) sont vérifiées : pour chacune des paires $\{x_1, \lambda'_1\}$, $\{x_2, \lambda'_2\}$ et $\{x', \lambda\}$, une des variables est dans la base et l'autre est hors-base.

On fait entrer la variable primale dont la duale est la plus négative : c'est x_2. On fait sortir la variable correspondant au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne entrante pour les variables primales et pour la variable duale λ'_2 (celle qui a désigné la variable entrante) :

$$\text{Min}\Big(\frac{25/2}{4}, \frac{-8}{-2}\Big) = \frac{25}{8}$$

Donc x' est la variable sortante. La ligne de x' sert de ligne pivot et on exécute la transformation du pivot autour de la valeur 4 (à l'intersection de la ligne de x' et de la colonne de x_2).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x'	λ'_1	λ'_2	λ		
-2	0	0	1	0	-3	-6	λ'_1
3/2	0	1/2	0	1	-4	-7/4	λ'_2
3/4	1	1/4	0	0	0	25/8	x_2
0	0	1	0	0	-25/4	25/2	

Ce tableau est non-standard car la paire $\{x_2, \lambda'_2\}$ est entièrement dans la base tandis que la paire $\{x', \lambda\}$ est entièrement hors-base. Dans ce cas-là, on fait entrer une variable duale : celle de la paire qui est entièrement hors-base, à savoir λ.

On fait sortir la variable correspondant au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne entrante pour les variables primales et pour la variable duale de la paire qui est entièrement dans la base, à savoir λ'_2 :

$$\text{Min}\Big(\frac{25/8}{0}, \frac{-7/4}{-4}\Big) = \frac{7}{16}$$

Donc λ'_2 est la variable sortante. La ligne de λ'_2 sert de ligne pivot et on exécute la transformation du pivot autour de la valeur -4 (à l'intersection de la ligne de λ'_2 et de la colonne de λ).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x'	λ'_1	λ'_2	λ		
-25/8	0	-3/8	1	-3/4	0	-75/16	λ'_1
-3/8	0	-1/8	0	-1/4	1	7/16	λ
3/4	1	1/4	0	0	0	25/8	x_2
-75/32	0	7/32	0	-25/16	0	975/64	

Ce tableau est standard. Puisque $\lambda'_1 < 0$ on fait entrer x_1. On calcule les rapports positifs entre colonne de droite et colonne entrante :

$$\text{Min}\Big(\frac{25/8}{3/4}, \frac{-75/16}{-25/8}\Big) = \frac{-75/16}{-25/8} = \frac{3}{2}$$

Donc λ'_1 est la variable sortante.

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x'	λ'_1	λ'_2	λ		
1	0	3/25	-8/25	6/25	0	3/2	x_1
0	0	-2/25	-3/25	-4/25	1	1	λ
0	1	4/25	6/25	-9/50	0	2	x_2
0	0	1/2	-3/4	-1	0	75/4	

Ce dernier tableau est celui de l'optimum car il est standard et qu'on ne peut plus appliquer le critère d'entrée. On trouve donc la solution :

$$\begin{cases} x_1^* &= 3/2 \\ x_2^* &= 2 \\ f^* &= 75/4 \end{cases}$$

La contrainte est saturée puisque x' est hors-base.

Programme 2

$$\begin{cases} \text{Min}(x_1^2 + 2x_2^2 - 4/3x_1x_2 - 8x_1 - 4x_2) \\ 5x_1 - x_2 \leq 8 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit des variables d'écart x'_1 et x'_2 et on change le signe de la fonction objectif pour en faire un problème de maximisation :

$$\text{Max}(-x_1^2 - 2x_2^2 + 4/3x_1x_2 + 8x_1 + 4x_2)$$

Le premier tableau est :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2		
-2	4/3	0	0	1	0	-5	1	-8	λ'_1
4/3	-4	0	0	0	1	1	-1	-4	λ'_2
5	-1	1	0	0	0	0	0	8	x'_1
-1	1	0	1	0	0	0	0	2	x'_2
-4	-2	0	0	0	0	-4	-1	0	

Ce tableau est standard. On fait entrer la variable primale dont la duale est la plus négative : c'est x_1. On fait sortir la variable correspondant au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne entrante pour les variables primales et pour la variable duale λ'_1 (celle qui a désigné la variable entrante) :

$$\text{Min}\Big(\frac{8}{5}, \frac{-8}{-2}\Big) = \frac{8}{5}$$

Donc x'_1 est la variable sortante. La ligne de x'_1 sert de ligne pivot et on exécute la transformation du pivot autour de la valeur 5 (à l'intersection de la ligne de x'_1 et de la colonne de x_1).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2		
0	14/15	2/5	0	1	0	-5	1	-24/5	λ'_1
0	-56/15	-4/15	0	0	1	1	-1	-92/15	λ'_2
1	-1/5	1/5	0	0	0	0	0	8/5	x_1
0	4/5	1/5	1	0	0	0	0	18/5	x'_2
0	-14/5	4/5	0	0	0	-4	-1	32/5	

Ce tableau est non-standard car la paire $\{x_1, \lambda'_1\}$ est entièrement dans la base tandis que la paire $\{x'_1, \lambda_1\}$ est entièrement hors-base. Dans ce cas-là, on fait entrer une variable duale : celle de la paire qui est entièrement hors-base, à savoir λ_1.

On fait sortir la variable correspondant au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne entrante pour les variables primales et pour la variable duale de la paire qui est entièrement dans la base, à savoir λ_1. Ici il n'y a qu'un seul rapport :

$$\text{Min}\Big(\frac{-24/5}{-5}\Big) = \frac{24}{25}$$

Donc λ'_1 est la variable sortante. La ligne de λ'_1 sert de ligne pivot et on exécute la transformation du pivot autour de la valeur -5 (à l'intersection de la ligne de λ'_1 et de la colonne de λ_1).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2		
0	-14/75	-2/25	0	-/5	0	1	-1/5	24/25	λ_1
0	-266/75	-14/75	0	1/5	1	0	-4/5	-532/75	λ'_2
1	-1/5	1/5	0	0	0	0	0	8/5	x_1
0	4/5	1/5	1	0	0	0	0	18/5	x'_2
0	-266/75	12/25	0	-4/5	0	0	-1,8	256/25	

Ce tableau est standard. Puisque $\lambda'_2 < 0$ on fait entrer x_2. On calcule les rapports positifs entre colonne de droite et colonne entrante :

$$\text{Min}\Big(\frac{18/5}{4/5}, \frac{-532/75}{-266/75}\Big) = \frac{-532}{-266} = 2$$

Donc λ'_2 est la variable sortante.

Le prochain tableau est standard :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	b	
0	0	-4/57	0	-4/19	-1/19	1	-3/19	4/3	λ_1
0	1	1/19	0	-15/266	-75/266	0	30/133	2	x_2
1	0	4/19	0	-3/266	-15/266	0	6/133	2	x_1
0	0	3/19	1	6/133	30/133	0	-24/133	2	x'_2
0	0	2/3	0	-1	-1	0	-1	52/3	f

On constate que le critère d'entrée ne s'applique plus. On a donc atteint l'optimum et on trouve la solution :

$$\begin{cases} x_1^* &= 2 \\ x_2^* &= 2 \\ {x'_2}^* &= 2 \\ \lambda_1^* &= 4/3 \\ f^* &= 52/3 \end{cases}$$

La première contrainte est saturée puisque x'_1 est hors-base.

La valeur à l'optimum est -52/3 (ne pas oublier de rechanger le signe de la fonction objectif puisqu'on avait initialement un problème de minimisation).

Corrigé ex. 15 -

On considère le programme quadratique suivant :

$$\begin{cases} \text{Max}(2x_1 + 2x_2 - 4x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2) \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On introduit des variables d'écart x'_1, x'_2, x'_3.

Le premier tableau est :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	λ_3		
-8	4	0	0	0	1	0	1	7	-5	-2	λ_1'
4	-2	0	0	0	0	1	-1	-5	-2	-2	λ_2'
-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	x_1'
-7	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	x_2'
5	2	0	0	1	0	0	0	0	0	30	x_3'
-1	-1	0	0	0	0	0	-1/2	0	-15	0	

On doit faire entrer la variable primale correspondant à la variable duale la plus négative. Or les coefficients λ_1' et λ_2' sont égaux donc les deux pourraient convenir : l'énoncé demande de choisir λ_1', c'est-à-dire de faire entrer x_1.

On calcule les rapports positifs entre colonne de droite et colonne entrante :

$$\mathrm{Min}\Big(\frac{-2}{-8}, \frac{30}{5}\Big) = \frac{1}{4}$$

Donc λ_1' est la variable sortante. Elle est la duale de la variable entrante donc le prochain tableau sera standard.

La ligne de λ_1' sert de ligne pivot et on exécute la transformation du pivot autour de la valeur -8 (à l'intersection de la ligne de λ_1' et de la colonne de x_1).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	λ_3		
1	-1/2	0	0	0	-1/8	0	-1/8	-7/8	5/8	1/4	x_1
0	0	0	0	0	1/2	1	-1/2	-3/2	-6	-3	λ_2'
0	1	1	0	0	-1/8	0	-1/8	-7/8	5/8	5/4	x_1'
0	3/2	0	1	0	-7/8	0	-7/8	-49/8	35/8	7/4	x_2'
0	9/2	0	0	1	5/8	0	5/8	35/8	-25/8	115/4	x_3'
0	-3/2	0	0	0	-1/8	0	-5/8	-7/8	125/8	1/4	

La seule variable négative est λ_2' donc on doit faire entrer x_2. On calcule les rapports positifs entre colonne de droite et colonne entrante :

$$\mathrm{Min}\Big(\frac{5}{4}, \frac{7/4}{3/2}, \frac{115/4}{9/2}\Big) = \frac{7}{6}$$

Donc x_2' est la variable sortante et le prochain tableau ne sera pas standard. L'énoncé ne demande pas de calculer les tableaux suivants.

En poursuivant les calculs, on arrive au tableau ci-dessous qui est donné par l'énoncé :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	λ_3		
1	0	5/2	-1/2	0	0	0	0	0	0	5/2	x_1
0	0	9/7	-3/7	0	5/7	1	-2/7	0	-39/7	-15/7	λ_2'
0	0	6/7	-2/7	0	1/7	0	1/7	1	-5/7	4/7	λ_2
0	1	7/2	-1/2	0	0	0	0	0	0	7/2	x_2
0	0	-39/2	7/2	1	0	0	0	0	0	21/2	x_3'
0	0	6	-1	0	0	0	-1/2	0	-15	6	

À partir de ce tableau, on va terminer l'algorithme. On constate qu'il n'est pas standard car la paire $\{x_2, \lambda_2'\}$ est entièrement dans la base tandis que la paire $\{x_1', \lambda_1\}$ est entièrement hors-base. Dans ce cas-là, on fait entrer une variable duale : celle de la paire qui est entièrement hors-base, à savoir λ_1.

On fait sortir la variable correspondant au plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne entrante pour les variables primales et pour la variable duale de la paire qui est entièrement dans la base, à savoir λ_2' :

$$\text{Min}\Big(\frac{5/2}{0}, \frac{-15/7}{-2/7}, \frac{7/2}{0}, \frac{21/2}{0}\Big) = \frac{15}{2}$$

Trois de ces rapports sont en fait infinis, donc λ_2' est la variable sortante et le prochain tableau sera standard.

La ligne de λ_2' sert de ligne pivot et on exécute une transformation du pivot autour de la valeur -2/7 (à l'intersection de la ligne de λ_2' et de la colonne de λ_1).

On obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	λ_3		
1	0	5/2	-1/2	0	0	0	0	0	0	5/2	x_1
0	0	-9/2	3/2	0	-5/2	-7/2	1	0	39/2	15/2	λ_1
0	0	3/2	-1/2	0	1/2	1/2	0	1	-7/2	-1/2	λ_2
0	1	7/2	-1/2	0	0	0	0	0	0	7/2	x_2
0	0	-39/2	7/2	1	0	0	0	0	0	21/2	x_3'
0	0	15/4	-1/4	0	-5/4	-7/4	0	0	-21/4	39/4	

Ce n'est pas encore l'optimum car $\lambda_2 < 0$. On fait donc entrer x_2' et on cherche le plus petit rapport positif entre la colonne de droite et la colonne entrante :

$$\text{Min}\Big(\frac{-1/2}{-1/2}, \frac{21/2}{7/2}\Big) = 1$$

La variable sortante est donc λ_2 qui est la duale de x_2' : le prochain tableau sera standard.

Après le pivot, on obtient le tableau suivant :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	x_3	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	λ_3		
1	0	1	0	0	-1/2	-1/2	0	-1	7/2	3	x_1
0	0	0	0	0	-1	-2	1	3	9	6	λ_1
0	0	-3	1	0	-1	-1	0	-2	7	1	x_2'
0	1	2	0	0	-1/2	-1/2	0	-1	7/2	4	x_2
0	0	-9	0	1	7/2	7/2	0	7	-49/2	7	x_3'
0	0	6	0	0	-3	-4	0	-1/2	-7/2	10	

On est maintenant à l'optimum et on trouve donc la solution :

$$\begin{cases} x_1^* & = 3 \\ x_2^* & = 4 \\ {x'_2}^* & = 1 \\ {x'_3}^* & = 7 \\ \lambda_1^* & = 6 \\ f^* & = 10 \end{cases}$$

La première contrainte est saturée puisque x'_1 est hors-base.

Corrigé ex. 16 - Famille d'isoquantes

La famille d'isoquantes est définie par l'équation :

$$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 60x_1 - 20x_2 = C$$

où $C \in \mathbb{R}$.

La matrice associée à ces coniques est

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -30 \\ -2 & 6 & -10 \\ -30 & -10 & -C \end{pmatrix}$$

Le déterminant de A est $\Delta = -50C - 7500$. Il s'annule pour $C = 150$ donc pour tout C différent de 150, la conique est non dégénérée.

La nature de la conique est déterminée par le déterminant de la sous-matrice des termes quadratiques

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

On a $\delta = \det(B) = 50 > 0$. Ces coniques sont donc des ellipses.

Les équations au centre sont

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 - 60 & = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 & = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour solution $x_1 = 4$ et $x_2 = 3$. Les ellipses sont donc concentriques de centre $C = (4, 3)$.

Les axes de symétrie sont les vecteurs propres de la matrice B. On trouve comme valeurs propres

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 10$$

Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

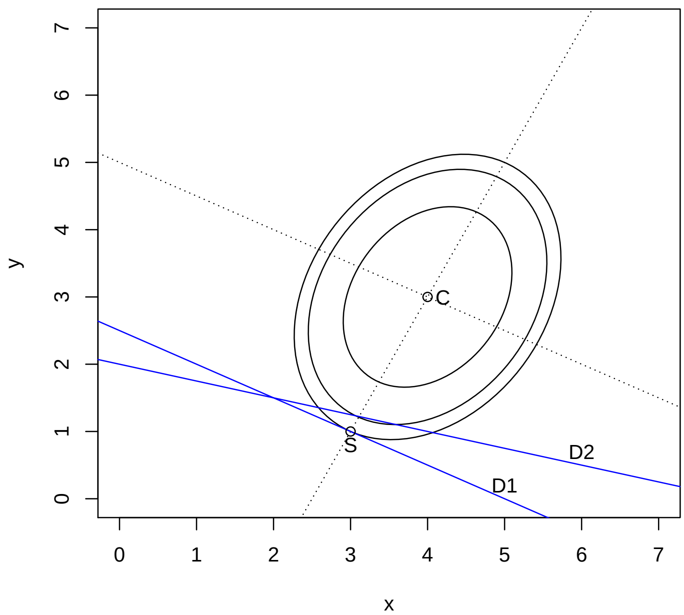
1) On veut représenter graphiquement le programme quadratique suivant :

$$\begin{cases} \text{Min}\,(9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 60x_1 - 20x_2) \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 \text{ et } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On place sur un graphique les droites correspondant aux contraintes :

$$\begin{cases} D_1 : \quad x_1 + 2x_2 = 5 \\ D_2 : \quad x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$$

Les isoquantes de la fonction objectif sont les ellipses étudiées à la question précédente. La solution est au point de contact de la droite D_1 avec la famille d'ellipses.



Noter que, dans cette question, on ne demande aucun calcul. On ne demande donc pas de trouver les coordonnées du point de contact S. Cependant il n'est pas difficile à calculer : l'axe principal de l'ellipse a pour vecteur directeur V_1 et ce vecteur est orthogonal à la droite D_1. Le point S est donc la projection du centre C sur la droite D_1. Il a pour coordonnées $(3, 1)$.

2) Résolution du programme par la méthode de Dantzig.

On commence par transformer le problème de minimisation en une maximisation :

$$\text{Max}\,(60x_1 + 20x_2 - 9x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_2^2)$$

Le tableau de départ est :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	s'_1	s'_2	s_1	s_2	b	
-18	4	0	0	1	0	-1	-1	-60	s'_1
4	-12	0	0	0	1	-2	-4	-20	s'_2
1	2	1	0	0	0	0	0	5	x'_1
1	4	0	1	0	0	0	0	8	x'_2
-30	-10	0	0	0	0	-5/2	-4	0	f

On calcule les tableaux suivants comme ceci :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	s'_1	s'_2	s_1	s_2	b	
1	-2/9	-0	-0	-1/18	-0	1/18	1/18	10/3	x_1
0	-100/9	0	0	2/9	1	-20/9	-38/9	-100/3	s'_2
0	20/9	1	0	1/18	0	-1/18	-1/18	5/3	x'_1
0	38/9	0	1	1/18	0	-1/18	-1/18	14/3	x'_2
0	-50/3	0	0	-5/3	0	-5/6	-7/3	100	f

x_1	x_2	x'_1	x'_2	s'_1	s'_2	s_1	s_2	b	
1	0	1/10	0	-1/20	0	1/20	1/20	7/2	x_1
0	0	5	0	1/2	1	-5/2	-9/2	-25	s'_2
0	1	9/20	0	1/40	0	-1/40	-1/40	3/4	x_2
0	0	-19/10	1	-1/20	0	1/20	1/20	3/2	x'_2
0	0	15/2	0	-5/4	0	-5/4	-11/4	225/2	f

x_1	x_2	x'_1	x'_2	s'_1	s'_2	s_1	s_2	b	
1	0	1/5	0	-1/25	1/50	0	-1/25	3	x_1
-0	-0	-2	-0	-1/5	-2/5	1	9/5	10	s_1
0	1	2/5	0	1/50	-1/100	0	1/50	1	x_2
0	0	-9/5	1	-1/25	1/50	0	-1/25	1	x'_2
0	0	5	0	-3/2	-1/2	0	-1/2	125	f

$$\begin{cases} x_1^* & = 3 \\ x_2^* & = 1 \\ f^* & = 125 \end{cases}$$

On retrouve bien la solution $(3, 1)$ trouvée graphiquement. La valeur à l'optimum fournie par le tableau est 125 mais il ne faut pas oublier de rechanger son signe. Pour le problème de minimisation initial, la valeur à l'optimum est donc de -125.

5 La méthode de Wolfe

Rappels de cours

La méthode de Wolfe s'applique lorsque l'origine n'appartient pas au domaine réalisable, c'est-à-dire lorsque le point de coordonnées nulles ne vérifie pas les contraintes. Dans ce cas, on ne peut pas appliquer la méthode de Dantzig car celle-ci prend l'origine comme point de départ.

Il faut donc trouver un point de départ qui appartienne au domaine réalisable. La méthode de Wolfe est très similaire à la méthode des valeurs ajoutées qui traite le même problème de point de départ dans le cas de la méthode du simplexe.

On introduit donc, dans les équations de la méthode de Dantzig, des valeurs ajoutées w et w' comme ceci :

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 2Bx & & +{}^t\lambda' & -{}^tA\,{}^t\lambda & \pm w & & = & -{}^tc \\ Ax & +x' & & & & \pm w' & = & b \end{array}\right. \tag{27}$$

Le signe à placer devant les variables w et les variables w' est choisi en fonction du terme qui figure dans le membre de droite. Si ce terme est positif on écrit $+w$, sinon on écrit $-w$, pour faire en sorte que numériquement la valeur de la variable w (ou w') soit toujours positive.

Il y a autant de w_i qu'il y a de variables dans le problème initial et autant de w'_j qu'il y a de contraintes.

L'objectif, comme dans la méthode des valeurs ajoutées, est d'annuler toutes les variables w et w'. On remplace la fonction objectif du problème par l'objectif

$$\text{Min}\left(\sum w_i + \sum w'_j\right)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\text{Max}\left(-\sum w_i - \sum w'_j\right)$$

On est donc ramenés à un problème d'optimisation linéaire qui se traite par la méthode du simplexe ordinaire. La situation de départ consiste à annuler les x, x', λ et λ' et à prendre :

$$\begin{cases} \pm w = -{}^tc \\ \pm w' = b \end{cases}$$

L'exécution de l'algorithme du simplexe va faire sortir les variables w et w' de la base jusqu'au moment où elles seront toutes nulles. Simultanément certaines des variables x, x', λ et λ' seront entrées dans la base avec des valeurs positives.

On supprime alors les colonnes qui correspondent à ces variables ajoutées et la dernière ligne qui correspond à la fonction objectif, puis on traite le tableau obtenu comme un tableau de la méthode de Dantzig. S'il est standard, on est à l'optimum (car les variables duales présentes dans la base seront positives). Sinon, il faut appliquer l'algorithme de Dantzig.

Corrigé ex. 17 - Résolutions par la méthode de Wolfe

Programme 1

On veut résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{Max}\,(10x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La première contrainte $x_1 + x_2 \geq 3$ empêche le point $(0,0)$ de faire partie du domaine réalisable. On va donc appliquer la méthode de Wolfe. On remplace cette contrainte par : $-x_1 - x_2 \leq -3$.

Au départ, les variables x, x', λ et λ' sont hors-base et w et w' sont dans la base. Il faut donc recalculer la fonction objectif pour faire en sorte qu'elle soit exprimée en fonction uniquement des variables hors-base. On le fait en extrayant w et w' des équations et en reportant dans la fonction objectif. On trouve :

$$\begin{aligned} f &= -w_1 - w_2 - w_1' - w_2' \\ &= 5x_1 + 6x_2 - x_1' + x_2' - \lambda_1' - \lambda_2' - 2\lambda_1 + 5\lambda_2 - 35. \end{aligned} \tag{28}$$

Le tableau de départ est donc :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w_1'	w_2'		
-2	0	0	0	1	0	1	-2	-1	0	0	0	-10	w_1
0	-2	0	0	0	1	1	-3	0	-1	0	0	-10	w_2
-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-3	w_1'
2	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	12	w_2'
-5	-6	1	-1	1	1	2	-5	0	0	0	0	-35	

Ensuite les tableaux s'enchaînent comme dans une méthode du pivot classique. On ne détaille pas ici les critères d'entrée et de sortie. Tout d'abord x_2 entre et w_1' sort :

x_1	x_2	x_1'	x_2'	λ_1'	λ_2'	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w_1'	w_2'		
-2	0	0	0	1	0	1	-2	-1	0	0	0	-10	w_1
2	0	-2	0	0	1	1	-3	0	-1	2	0	-4	w_2
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	x_2
-1	0	3	1	0	0	0	0	0	0	-3	1	3	w_2'
1	0	-5	-1	1	1	2	-5	0	0	6	0	-17	

Maintenant λ_2 entre et w_2 sort :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
-10/3	0	4/3	0	1	-2/3	1/3	0	-1	2/3	-4/3	0	-22/3	w_1
-2/3	-0	2/3	-0	-0	-1/3	-1/3	1	-0	1/3	-2/3	-0	4/3	λ_2
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	x_2
-1	0	3	1	0	0	0	0	0	0	-3	1	3	w'_2
-7/3	0	-5/3	-1	1	-2/3	1/3	0	0	5/3	8/3	0	-31/3	

Ensuite x_1 entre et w_1 sort :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
1	-0	-2/5	-0	-3/10	1/5	-1/10	-0	3/10	-1/5	2/5	-0	11/5	x_1
0	0	2/5	0	-1/5	-1/5	-2/5	1	1/5	1/5	-2/5	0	14/5	λ_2
0	1	-3/5	0	3/10	-1/5	1/10	0	-3/10	1/5	3/5	0	4/5	x_2
0	0	13/5	1	-3/10	1/5	-1/10	0	3/10	-1/5	-13/5	1	26/5	w'_2
0	0	-13/5	-1	3/10	-1/5	1/10	0	7/10	6/5	18/5	0	-26/5	

Finalement x'_1 entre et w'_2 sort :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
1	0	0	2/13	-9/26	3/13	-3/26	0	9/26	-3/13	0	2/13	3	x_1
0	0	0	-2/13	-2/13	-3/13	-5/13	1	2/13	3/13	0	-2/13	2	λ_2
0	1	0	3/13	3/13	-2/13	1/13	0	-3/13	2/13	0	3/13	2	x_2
0	0	1	5/13	-3/26	1/13	-1/26	0	3/26	-1/13	-1	5/13	2	x'_1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	

C'est le dernier tableau et on voit que tous les w et w' se sont annulés puisqu'ils sont tous hors-base. On peut maintenant supprimer les colonnes des variables w et w' ainsi que la dernière ligne du tableau et on obtient le tableau standard suivant :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2		
1	0	0	2/13	-9/26	3/13	-3/26	0	3	x_1
0	0	0	-2/13	-2/13	-3/13	-5/13	1	2	λ_2
0	1	0	3/13	3/13	-2/13	1/13	0	2	x_2
0	0	1	5/13	-3/26	1/13	-1/26	0	2	x'_1

Il faudrait maintenant traiter ce tableau par la méthode de Dantzig mais ici on voit qu'on est à l'optimum : en effet le critère d'entrée de Dantzig pour un tableau standard ne peut pas s'appliquer. Il n'y a qu'une seule variable duale dans la base et elle est positive. La solution est donc

$$\begin{cases} x_1^* & = 3 \\ x_2^* & = 2 \\ x_1^{'*} & = 2 \end{cases}$$

La deuxième contrainte est saturée puisque x'_2 est hors-base.

Programme 2

$$\begin{cases} \text{Min}\,(x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 6x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On change le programme en une maximisation :

$$\text{Max}\,(8x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2)$$

On change aussi les signes dans la première contrainte pour qu'elle soit dans le bon sens :

$$-x_1 - 2x_2 \leq -2$$

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Au départ, les variables x, x', λ et λ' sont hors-base et w et w' sont dans la base. On doit recalculer la fonction objectif pour faire en sorte qu'elle soit exprimée en fonction uniquement des variables hors-base. On le fait en extrayant w et w' des équations et en reportant dans la fonction objectif. On trouve :

$$\begin{aligned} f &= -w_1 - w_2 - w'_1 - w'_2 \\ &= 5x_1 + 9x_2 - x'_1 + x'_2 - \lambda'_1 - \lambda'_2 - 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 26. \end{aligned} \tag{29}$$

Le premier tableau est :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
-2	0	0	0	1	0	1	-2	-1	0	0	0	-8	w_1
0	-2	0	0	0	1	2	-5	0	-1	0	0	-6	w_2
-1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-2	w'_1
2	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	10	w'_2
-5	-9	1	-1	1	1	3	-7	0	0	0	0	-26	

On fait entrer x_2 et sortir w'_1, ce qui donne le tableau suivant :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
-2	0	0	0	1	0	1	-2	-1	0	0	0	-8	w_1
1	0	-1	0	0	1	2	-5	0	-1	1	0	-4	w_2
1/2	1	-1/2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	1/2	-0	1	x_2
-1/2	0	5/2	1	0	0	0	0	0	0	-5/2	1	5	w'_2
-1/2	0	-7/2	-1	1	1	3	-7	0	0	9/2	0	-17	

Maintenant on fait entrer λ_2 et sortir w_2 :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
-12/5	0	2/5	0	1	-2/5	1/5	0	-1	2/5	-2/5	0	-32/5	w_1
-1/5	-0	1/5	-0	-0	-1/5	-2/5	1	-0	1/5	-1/5	-0	4/5	λ_2
1/2	1	-1/2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	1/2	-0	1	x_2
-1/2	0	5/2	1	0	0	0	0	0	0	-5/2	1	5	w'_2
-19/10	0	-21/10	-1	1	-2/5	1/5	0	0	7/5	31/10	0	-57/5	

Puis on fait entrer x'_1 et sortir w'_2 :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
-58/25	0	0	-4/25	1	-2/5	1/5	0	-1	2/5	0	-4/25	-36/5	w_1
-4/25	0	0	-2/25	0	-1/5	-2/5	1	0	1/5	0	-2/25	2/5	λ_2
2/5	1	0	1/5	0	0	0	0	0	0	0	1/5	2	x_2
-1/5	0	1	2/5	0	0	0	0	0	0	-1	2/5	2	x'_1
-58/25	0	0	-4/25	1	-2/5	1/5	0	0	7/5	1	21/25	-36/5	

Enfin on fait entrer x_1 et sortir w_1 :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2	w_1	w_2	w'_1	w'_2		
1	-0	-0	2/29	-25/58	5/29	-5/58	-0	25/58	-5/29	-0	2/29	90/29	x_1
0	0	0	-2/29	-2/29	-5/29	-12/29	1	2/29	5/29	0	-2/29	26/29	λ_2
0	1	0	5/29	5/29	-2/29	1/29	0	-5/29	2/29	0	5/29	22/29	x_2
0	0	1	12/29	-5/58	1/29	-1/58	0	5/58	-1/29	-1	12/29	76/29	x'_1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	

Toutes les variables ajoutées w et w' se sont annulées. On peut supprimer les colonnes correspondantes dans le tableau ainsi que la dernière ligne :

x_1	x_2	x'_1	x'_2	λ'_1	λ'_2	λ_1	λ_2		
1	-0	-0	2/29	-25/58	5/29	-5/58	-0	90/29	x_1
0	0	0	-2/29	-2/29	-5/29	-12/29	1	26/29	λ_2
0	1	0	5/29	5/29	-2/29	1/29	0	22/29	x_2
0	0	1	12/29	-5/58	1/29	-1/58	0	76/29	x'_1

C'est un tableau de Dantzig standard. La seule variable duale qui se trouve dans la base est λ_2 et, puisqu'elle n'est pas négative, on ne peut appliquer le critère d'entrée et on est donc à l'optimum. La solution est :

$$\begin{cases} x_1^* &= 90/29 \\ x_2^* &= 22/29 \end{cases}$$

On peut vérifier que ce point se trouve sur la contrainte.