Examen – Théorie des graphes[1]

Session 1, vendredi 13 janvier 2023

Documents autorisés : 1 page A4 recto-verso manuscrite

Durée : 1h30

▷ **Exercice 1.** (3 points) On considère le flot dans le réseau de la figure 1.

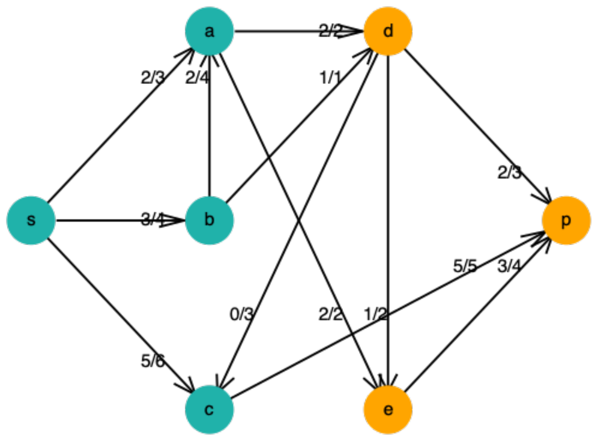

FIGURE 1 – *Flot dans le réseau ; l'étiquetage d'un arc a est* $f(a)/c(a)$ = *valeur du flot sur l'arc/valeur de la capacité sur l'arc.*

1.1. On considère la coupe $X = \{s, a, b, c\}$ et $\bar{X} = \{d, e, p\}$. Quelle est la capacité de cette coupe ?

► $c(X, \bar{X}) = 10$.

1.2. Quelle est la valeur de ce flot ?

► $\omega(f) = 10$.

1.3. Le flot est-il maximum (on justifiera la réponse) ?

► Oui car $c(X, \bar{X}) = \omega(f)$.

1. Un corrigé sera mis sous Moodle dans la journée

▷ **Exercice 2.** (3 points) On considère la matrice suivante qui représente la matrice d'adjacences d'un graphe non orienté G :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1. Représentez graphiquement ce graphe.

►

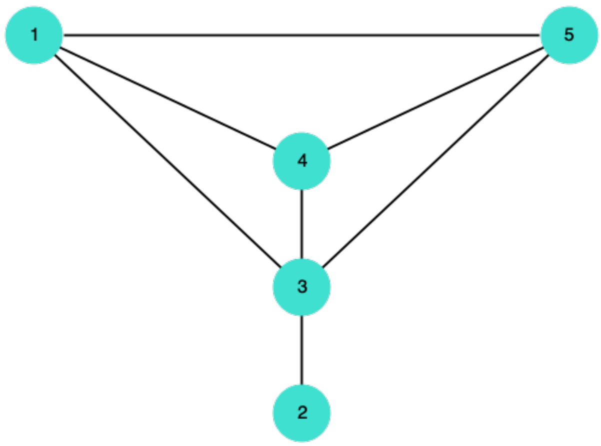

FIGURE 2 – *Représentation graphique du graphe de matrice d'adjacences M.*

2.2. À quoi correnspondent les nombres dans M^k ?

► Dans M^k, m_{ij}^k est le nombre de chemins de longueur k qui connectent le sommet i au sommet j.

▷ **Exercice 3.** (5 points) Soit G un graphe simple ayant n sommets et $n-1$ arêtes qui n'est pas un arbre. On suppose qu'un sommet isolé est un arbre trivial.

3.1. Démontrez que G n'est pas connexe.

► On procède par l'absurde. Supposons que G soit connexe. Puisque G n'est pas un arbre, il possède un cycle. Mais alors il a au moins n arêtes. D'où la contradiction.

3.2. Démontrez que G possède une composante connexe qui est un arbre.

► Soit $G_1, \dots, G_p$, les $p \geq 2$ composantes connexes de G et $n_1, \dots, n_p$ le nombre de sommets dans ces composantes connexes. On a $n = n_1 + \cdots + n_p$. Supposons maintenant qu'aucune composante connexe ne soit un arbre alors le nombre d'arêtes dans G_i est d'au moins de n_i et donc le nombre d'arêtes de G est d'au moins $n_1 + \cdots + n_p = n$. D'où la contradiction.

3.3. Démontrer que G possède une composante connexe qui n'est pas un arbre.

► On procède comme dans la question précédente, mais on suppose que toutes les composantes connexes sont des arbres. Alors le nombre d'arêtes dans G est de $(n_1 - 1) + \cdots (n_p - 1) < n - 1$. D'où la contradiction.

3.4. Démontrer que si G possède exactement deux composantes connexes, alors celle qui n'est pas un arbre possède exactement un cycle.

► Ici $p = 2$. Si la première composante connexe est un arbre elle possède $n_1 - 1$ arêtes. Par suite la deuxième composante connexe, qui n'est pas un arbre, possède $(n - 1) - (n_1 - 1) = n_2$ arêtes. On en déduit que cette deuxième composante connexe est un arbre auquel on a ajouté exactement 1 arête. L'ajout de cette arête à l'arbre crée un cycle et 1 seul.

▷ **Exercice 4.** (4 points) Une grille (carrée) de **sudoku** est composée de 9 sous-grilles carrées de 9 cases chacune. Le jeu consiste, à partir d'une grille partiellement remplie avec des chiffres de 1 à 9, à la compléter de sorte que chaque rangée (ligne et colonne) et chaque sous-grille contiennent exactement une fois chacun des 9 chiffres. On s'intéresse ici à la construction d'une telle grille.

4.1. Modéliser ce problème à l'aide d'un graphe.

► On modélise cette question par un graphe G à $n = 81$ sommets (les cases) ; les arêtes relient deux sommets s'ils sont sur une même rangée ou dans une même sous-grille. Il s'agit d'un problème de coloration où les chiffres jouent le rôle des couleurs.

4.2. Quel est de degré de chaque sommet du graphe.

► Chaque sommet est relié à $8 + 8 + 4 = 20$ sommets, donc $\delta(v) = 20$ pour tous les sommets.

4.3. Une telle grille existe. À quelle quantité correspond le nombre 9 de chiffres dans la théorie des graphes.

► Les sous-grilles où les rangées sont des cliques à 9 sommets. Par suite le nombre chromatique est supérieur ou égale à 9. Comme une telle grille existe, ce nombre chromatique est inférieur ou égal à 9. Par suite c'est exactement 9.

▷ **Exercice 5.** (5 points) Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence sur le nombre d'arêtes le

Théorème 1 (Première partie du théorème de Mantel)**.** *Si G est un graphe à n sommets sans triangle (c'est-à-dire sans clique d'ordre 3), alors il a au plus $n^2/4$ arêtes.*

5.1. Soit G est un graphe à n sommets sans triangle et $m \geq 1$ arêtes. Soit $\{u, v\}$ une arête dans ce graphe G. Montrez que $\delta(u) + \delta(v) \leq n$.

► Puisque u et v n'ont pas de voisin commun car il n'y a pas de triangle dans G, on a trivialement $\delta(u) + \delta(v) \leq n$.

5.2. Démonter par récurrence **sur le nombre d'arêtes** le théorème.

► Le théorème est trivialement vrai pour $n = 1$ et $n = 2$.

On peut donc supposer que le nombre de sommets est supérieur ou égale à 3. Soit maintenant un graphe à $n \geq 3$ sommets.

— Le théorème est vrai pour le nombre d'arêtes égale à 0 ou 1.

— Soit maintenant un graphe à $n \geq 3$ sommets et $m \geq 1$ arêtes et soit $\{u, v\}$ une arête dans le graphe G. . Si on supprime les sommets u et v, nous obtenons un graphe sans triangle à $n - 2$ sommets, qui par hypothèse de récurrence a au plus $(n - 2)^2/4$ arêtes. Ainsi, le nombre d'arêtes du graphe de départ est inférieur ou égal à $(n - 2)^2/4 + n - 1 = (n^2/4)$. On ajoute au nombre d'arêtes du graphe à $n - 2$ sommets le nombre d'arêtes adjacentes aux sommets u et v qui est $\delta(u) + \delta(v) - 1$ (dans $\delta(u) + \delta(v)$ l'arête $\{u, v\}$ est comptée 2 fois).