# Compléments

On donne ici un certain nombre de démonstrations de résultats présentés dans le cours d'Analyse de Fourier.

## 1 Théorème de Riemann-Lebesgue

On montre que si $x \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{x}(f) \to 0$ quand $|f| \to +\infty$.

On utilise pour cela le résultat suivant.

**Théorème (admis)** :
Soit $h \in \mathbb{R}$. Pour une fonction $x$ donnée, on définit sa translatée $\tau_h x$ par $\tau_h x(t) = x(t-h)$. Alors on montre que pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, $\lim_{h\to 0} \|\tau_h x - x\|_p = 0$.

Pour $h \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{\tau_{-h}x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t+h)e^{-2j\pi ft}dt = e^{2j\pi hf}\widehat{x}(f)$. On pose alors $h = \frac{1}{2f}$. On a ainsi $e^{2j\pi hf} = -1$. D'où :

$$2\widehat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} (x(t) - x(t+h))e^{-2j\pi ft}dt$$

et donc $2|\widehat{x}(f)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |(x(t) - x(t+h))|dt = \|\tau_{-h}x - x\|_1$. D'après le théorème précédent, on a ainsi

$$\lim_{|f|\to+\infty} |\widehat{x}(f)| \leqslant \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} \|\tau_{-h}x - x\|_1 = 0.$$

## 2 Suite régularisante

La notion de suite régularisante sera utile pour démontrer l'injectivité de la transformée de Fourier ainsi que la formule d'inversion.

### 2.1 Définition

On appelle *suite régularisante* ou *approximation de l'unité* ou *approximation de l'identité* sur $\mathbb{R}$ toute suite (ou plus généralement toute famille) de fonctions $(x_k)_k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall k$, $x_k$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ;
- $\forall k$, $x_k$ est $C^\infty$ (selon les définitions ce critère n'est pas toujours pris en compte);
- $\forall k$, $\int_{\mathbb{R}} x_k(t)dt = 1$ ;
- $\forall k$, le support de $x_k$ est contenu dans un boule de rayon $r_k$ avec $r_k \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Ce dernier critère peut être remplacé par le critère plus général suivant :

- $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{|t|>\varepsilon} x_k(t)dt \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Il s'agit donc d'une famille de fonctions positives d'intégrales égales à 1 qui se "concentrent" en 0.

### 2.2 Exemple

soit $\phi$ la fonction gaussienne définie par $\phi(t) = e^{-\pi t^2}$. On pose alors :

$$\forall \lambda > 0,\ \phi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\phi\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\pi t^2}{\lambda^2}}$$

Puisque $\forall \sigma > 0$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$ (densité d'une loi gaussienne de variance $\sigma^2$), on a $\int_{\mathbb{R}} \phi_\lambda(t)dt = 1 \ \forall \lambda$. D'autre part les critères 1 et 2 sont évidemment vérifiés.
De plus, par le changement de variable $u = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} t$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \phi_\lambda(t)dt = \int_{-\sqrt{\pi}\varepsilon/\lambda}^{+\sqrt{\pi}\varepsilon/\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-u^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} du,$$

ce qui montre que $\forall \varepsilon$, $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \phi_\lambda(t)dt \to 1$ quand $\lambda \to 0$, et donc que $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{|t|>\varepsilon} \phi_\lambda(t)dt \to 0$ quand $\lambda \to 0$.
Ainsi, la famille $(\phi_\lambda)_\lambda$ est une approximation de l'identité quand $\lambda \to 0$. On peut dire aussi que la famille $(\phi_{1/\lambda})_\lambda$ est une approximation de l'identité quand $\lambda \to +\infty$.

### 2.2.1 Propriété

Théorème (admis) : si $x \in L^p(\mathbb{R})$ et si $(\phi_k)_k$ est une suite régularisante, alors $(x*\phi_k)_k$ converge vers $x$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

Interprétation : $L^1(\mathbb{R})$ muni du produit de convolution est une algèbre, mais sans élément neutre car il n'existe pas de fonction $e \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in L^1(\mathbb{R})$, $x * e = x$. Une suite régularisante remplace donc d'une certaine façon, par passage à la limite, cet élément neutre (ou élément unité). D'où le terme d'approximation de l'unité.

# 3 Injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

La TF est une application injective si pour 2 fonctions $x$ et $y$ de $L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{x} = \widehat{y}$ implique que $x = y$ presque partout. Compte tenu de la linéarité de la TF, cela revient à montrer que si $x \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\widehat{x} = 0$, alors $x = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}$.
Considérons pour cela la suite régularisante $(\phi_\lambda)_\lambda$ ci-dessus. On pose alors, pour un réel $a$ quelconque :

$$g_\lambda(u) = e^{2i\pi au} \phi_\lambda(u)$$

On a alors : $\widehat{g}_\lambda(f) = \widehat{\phi}_\lambda(f - a)$ (formules de translation). On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x(u)\widehat{g}_\lambda(u)du &= \int_{\mathbb{R}} x(u)\widehat{\phi}_\lambda(u-a)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(u)\widehat{\phi}_\lambda(a-u)du \quad \text{(car } \phi \text{ paire implique } \widehat{\phi} \text{ paire )} \\ &= x * \widehat{\phi}_\lambda(a) \end{aligned}$$

Or on sait que pour $\alpha > 0$, la TF de $e^{-\alpha t^2}$ est $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} f^2}$. Il en résulte que $\widehat{\phi}_\lambda(a) = \frac{1}{\lambda} \phi_{1/\lambda}(a)$. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} x(u)\widehat{g}_\lambda(u)du = \frac{1}{\lambda} x * \phi_{1/\lambda}(a)$$

Mais d'autre part, d'après la formule de transfert et puisque $\widehat{x} = 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x(u)\widehat{g}_\lambda(u)du = \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(u)g_\lambda(u)du = 0$$

Ainsi,

$$\forall \lambda, \ \forall a \in \mathbb{R}, x * \phi_{1/\lambda}(a) = 0$$

Mais on a vu que $(\phi_{1/\lambda})$ était une suite régularisante. Donc, d'après le théorème précédent, $(x * \phi_{1/\lambda})_\lambda$ converge vers $x$ dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda \to +\infty} \|x * \phi_{1/\lambda} - x\|_{L^1} = 0$.
Or, $x * \phi_{1/\lambda} = 0$ pour tout $\lambda$. On en déduit donc que $\|x\|_{L^1} = 0$, c'est-à-dire que $x = 0$ p.p.

L'injectivité de la TF peut aussi se déduire de la formule d'inversion démontrée ci-dessous.

## 4 Formule d'inversion

Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{x}$ soit également dans $L^1(\mathbb{R})$. On va montrer que

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} df \quad \text{p.p. } t$$

On pose par définition

$$\check{\widehat{x}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} df$$

On considère la fonction $\phi$ définie ci-dessus, et pour $\lambda > 0$ on s'intéresse à l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} \phi(\lambda f) df$$

Puisque $\left|\widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} \phi(\lambda f)\right| \leqslant |\widehat{x}(f)|$ qui est par hypothèse dans $L^1(\mathbb{R})$, on peut appliquer le théorème de la convergende dominée, et donc :

$$\check{\widehat{x}}(t) = \lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} \phi(\lambda f) df$$

De plus, par la formule de translation et la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} \phi(\lambda f) df &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\tau_{-t}(x)}(f) \phi(\lambda f) df \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tau_{-t}(x)(u) \widehat{\phi(\lambda f)}(u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tau_{-t}(x)(u) \frac{1}{\lambda} \phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tau_{-t}(x)(u) \phi_\lambda(u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(u+t) \phi_\lambda(u) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t-v) \phi_\lambda(-v) dv \\
&= \int_{\mathbb{R}} x(t-v) \phi_\lambda(v) dv \quad \text{(car } \phi_\lambda \text{ est paire)} \\
&= x * \phi_\lambda(t)
\end{aligned}$$

On a vu que $\phi_\lambda$ est une suite régularisante. Donc d'après le théorème, $\lim_{\lambda \to 0^+} x * \phi_\lambda = x$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Il existe une sous-suite $(x * \phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge presque partout, c'est-à-dire $\lim_{k \to +\infty} x * \phi_{\lambda_k}(t) = x(t)$ p.p. $t \in \mathbb{R}$ (selon un théorème plus général disant que si une suite de fonctions $g_k$ converge vers une fonction $g$ dans un espace $L^p$, alors il existe une sous-suite de $g_{k_n}$ qui converge presque partout vers $g$). On a donc bien au final

$$\check{\widehat{x}}(t) = \lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}(f) e^{+2j\pi ft} \phi(\lambda_k f) df = x(t) \text{ p.p.} t \in \mathbb{R}$$