CTD5 : Planarité et coloration de graphes

9 Planarité

9.1 Planarité, dessin, plongement

Définitions

- On dit qu'un graphe est **planaire** si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. On rappelle que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes.
- Une représentation planaire particulière d'un graphe est appelée une **carte**. Une carte divise le plan en plusieurs régions appelées **faces**.

Remarques

- Il s'agit en fait d'étudier les aspects topologiques d'un graphe. Plus généralement on peut se poser la question de savoir si un graphe peut être représenté sur une surface S
- Exemple d'application : carte électronique
- Les notions utilisés ici sont à la frontière de la topologie, de la topologie algébrique et de la géométrie ! Ce chapitre s'inspire très fortement de l'ouvrage *Eléments de théorie des graphes, Bretto, Faisant, Hennecard.*

Définitions

- Soient x et y deux points de T, on appelle **arc géométrique** de x à y toute application continue $\gamma : [0,1] \to T$ injective telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une courbe simple entre x et y est l'image d'un arc géométrique de x à y : $\gamma([0,1])$. On note $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des courbes simples sur T.
- On appelle **dessin** F d'un graphe $G = (V, E)$ sur T une application $\sigma : V \bigsqcup E \to T \bigsqcup \mathcal{C}_T$ injective telle que :
  1. $\sigma|_V : V \to T$ soit injective ;
  2. $\sigma|_E : E \to \mathcal{C}_T$ soit injective ;
  3. si $\sigma(v_i) = x, \sigma(v_j) = y$ et $e = \{v_i, v_j\}$, alors $\sigma(e)$ est une courbe simple de x à y.

Remarque Par abus de langage, l'ensemble $F = \sigma(V) \cup (\bigcup_{e\in E} \sigma(e))$ est encore appelé dessin de G sur T.

Définition Un dessin d'un graphe G dans $T \subset \mathbf{R}^k$ est un **plongement** si et seulement si les courbes simples ne se coupent qu'aux sommets.

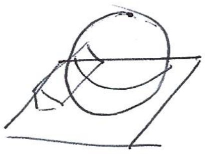
Propriété Tout graphe (d'ordre fini) admet un plongement dans $\mathbf{R}^3$

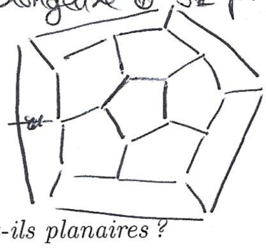
Exemple
— Une chaîne élémentaire admet un plongement dans $\mathbf{R}$
— Un cycle élémentaire avec $n > 1$ admet un plongement dans $\mathbf{R}^2$ mais pas dans $\mathbf{R}$

Définition On dit qu'un graphe est **planaire** s'il admet un plongement dans $\mathbf{R}^2$.

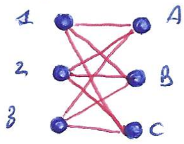
9.2 Exemples et exercices introductifs

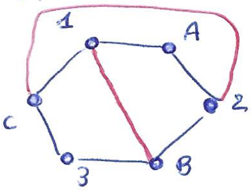
▷ **Exercice 22** *Le dodécaèdre est-il un graphe planaire ?* oui car s'insert dans une sphère.
→ graphe planaire. → plongeable ds $\mathbb{R}^2$.
→ graphe plongeable ds S_2 privée d'un point.

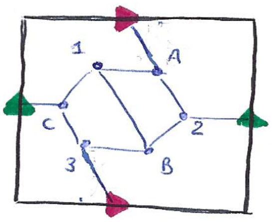




▷ **Exercice 23** *Tous les graphes sont-ils planaires ?*
Non K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires, mais on peut les plonger sur un tore.
Ne pas avoir ni K_5, ni $K_{3,3}$ en tant que sous graphe







▷ **Exercice 24** *$K_{3,3}$ est-il planaire ?*

9.3 Faces, Contours

Soit $G = (V, E)$ un graphe plongé dans $\mathbf{R}^2$ et F son dessin. F est un fermé, donc $\mathbf{R}^2 \setminus F$ est ouvert. On a alors :

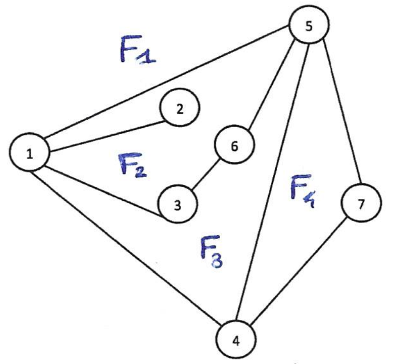
Définition On appelle face tout composante connexe (et ouverte) de $\mathbf{R}^2 \setminus F$. On note Φ l'ensemble de ces composantes connexes,

$$\mathbf{R}^2 \setminus F = \cup_{\varphi \in \Phi} \varphi.$$

Remarque Il existe R tel que $F \subset B_f(0, R)$. Par suite il n'existe qu'une seule face non bornée. On appelle cette face la face infinie.

Exemple Donner les faces de ce graphe.
Attention, ne pas oublier la face infinie.

$F_2 = 15631$
$F_3 = 136541$
$F_4 = 4574$



Soit φ une face finie, alors sa frontière $\partial\varphi$ est la réunion de cycles élémentaires disjoints et d'arêtes pendantes ou reliant 2 cycles.

Définition On appelle **contour** de la face φ bornée le cycle élémentaire c qui contient son intérieur $\partial\varphi \setminus c$.

Théorème L'ensemble des contours de toutes les faces finies d'un graphe planaire forme une base de cycles de ce graphe. générateur : par récurrence sur le nb de faces à l'intérieur d'1 cycle donné.

10 Caractéristique d'Euler-Poincaré

Théorème d'Euler Dans un graphe planaire d'ordre n, à m arêtes, possédant f faces à p composantes connexes, on a :

$$f = m - n + 1 + p.$$

▷ **Exercice 25** *Validez la caractéristique d'Euler-Poincaré sur le graphe de l'exercice précédent.*

Par récurrence sur p.
Cas de base $p = 1$:
hérédité : $p \to p+1$
Supp la pplé vraie pour tout graphe a p compo connexes. Soit $G = G_1 \cup G_2$ un gphe à $(p+1)$. ..

$f_1 - 1 = m_1 - n_1 + p$.
$f_2 - 1 = m_2 - n_2 + 1$.

L'ens. des contours des faces finies forme 1 base de cycles.
Or $V(G) : m - n + p = f - 1$.

face exté comptée 2 fois dans $f_1 + f_2$.
$(f+1) - 2 = m - n + 1 + p$
$f - 1 = m - n + 1 + p$

▷ **Démo 6**

▷ **Exercice 26** *Remarquez que $K_{3,3}$ n'est pas planaire en utilisant sa caractéristique d'Euler-Poincaré.*

$f - 1 = m - n + p$ pour $K_{3,3}$ $m = 9$ $n = 6$ $p = 1$
$f - 1 = 9 - 6 + 2 = 5$
$K_{3,3}$ est biparti
$\#Q_i = 2m$
$\#Q_i \geq 4f$
$2m \geq 4f$.
$\leq f \leq 9$.
$\Rightarrow f \leq 4 \Rightarrow$ contradiction
chaque face fait intervenir au moins 4 arêtes
chaque arête compte pour 2 faces

11 Caractérisation des graphes planaires

Définitions

- On appelle **substitution** d'un sommet v par un sommet u dans une arête $e = \{e_1, e_2\}$, notée $Subst_v^u(e)$, l'arête $\{e'_1, e'_2\}$ telle que $e'_i = u$ si $e_i = v$, $e'_i = e_i$ sinon
- On appelle **contraction** d'une arête $e = \{u, v\}$ d'un graphe $G = (V, E)$ la disparition de cette arête et l'identification des deux sommets u et v. On obtient alors un nouveau graphe $G' = (V \backslash \{v\}, Subst_v^u(E) \backslash \{u, u\})$.
- On appelle **contracté** d'un graphe G tout graphe obtenu par une suite finie (voire vide) de contractions à partir de G

On remarque que le graphe reste simple (car on considère l'ensemble des arêtes commen un ensemble qui ne contient pas de doublons).

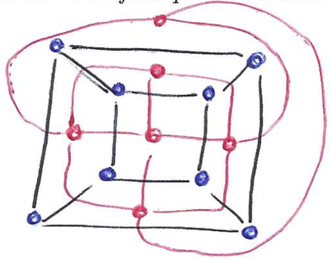
Théorème de Kuratowsky (1930) (caractérisation des graphes planaires) Un graphe G est planaire ssi il ne contient aucun sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ ou K_5 dans aucun contracté de G.

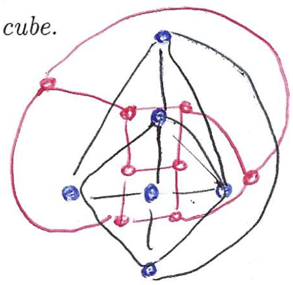
Graphe dual

Définition Soit G un graphe planaire. On appelle **graphe dual** de G le graphe G^* défini par

1. les sommets de G^* sont les faces de G : $V^* = \Phi$;
2. pour chaque arête de G on définit une arête e^* de G^* de la façon suivante : le dessin γ_e de e est adjacent à une ou deux faces φ, ψ ; on pose alors $e^* = \{\varphi, \psi\}$ (c'est une boucle si $\varphi = \psi$).

▷ **Exercice 27** *Vérifiez que le bi-dual d'un cube est un cube.*





De façon générale, le bi-dual d'un graphe est le graphe lui-même.

12 Coloration

12.1 A définir, à connaitre

Définition Un **stable** d'un graphe est un ensemble de sommets qui ne contient que des sommets 2 à 2 non adjacents.

Le cardinal du plus grand stable est le **nombre de stabilité** de G noté $\alpha(G)$.

Définition Une **coloration** d'un graphe consiste à affecter tous les sommets tels que 2 sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Une coloration à k couleurs est donc une partition de V en k stables.

Le **nombre chromatique** noté $\gamma(G)$ est le plus petit entier k pour lequel il existe une k-coloration.

12.2 Exemples

Exemple Donner les stables de ce graphe.

{2,3,4} ← 1 couleur

{2,0} + 2 couleur pour les 2 sommets restants.

{2,3}

{2,4}

{3,4}

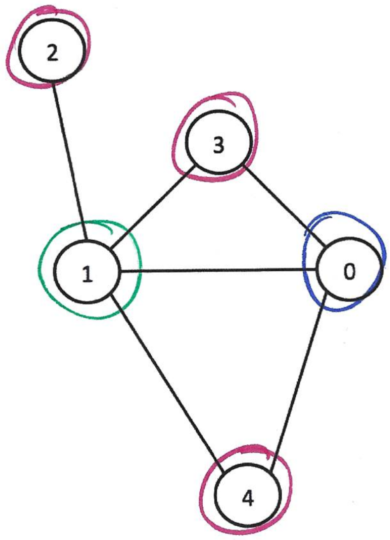
{0}

{1}

{2}

{3}

{4}



▷ **Exercice 28** *Trouver le nombre de stabilité du graphe de l'exercice précédent.*

▷ **Exercice 29** *Quel est le nombre chromatique du graphe de l'exercice précédent. La $\gamma(G)$-coloration trouvée est-elle unique ?*

12.3 Propriétés

12.4 Encadrement du nombre chromatique

— $\gamma(G) \leq r + 1$ où $r = \max_{v \in V} \delta(v)$;
— $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$;
— $\gamma(G) \geq \#sommets$ dans la plus grande clique.

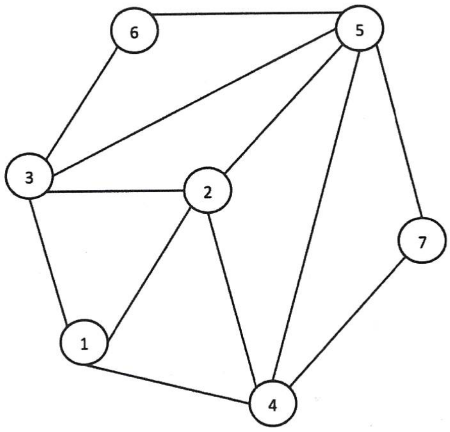
▷ **Démo 7**

▷ **Exercice 30** *Minorez et majorez le nombre chromatique de ce graphe.*

$\gamma(G) \leq 6.$

$\gamma(G) \leq 5$

$\gamma(G) \geq 3$



12.5 Exercices

▷ **Exercice 31** *Sept élèves A, ... G se sont rendus dans une salle de cours dans la journée, à différents horaires. Le tableau suivant indique qui a rencontré qui :*

l'élève	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
a rencontré	*D,E*	*D,E,F,G*	*E,G*	*A,B,E*	*A,B,C,D,F,G*	*B,E,G*	*B,C,E,F*

De combien de places assises doit disposer au minimum la salle pour que chacun ait eu une place assise lorqu'il était dans la salle ?

▷ **Exercice 32** *Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient aucun cycle de longueur impaire.*

Algorithme de Welsh-Powell C'est un algorithme de coloration glouton.

On range les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré. On colorie le premier sommet non encore colorié avec une nouvelle couleur, et en suivant l'ordre de la liste, tous les sommets que l'on peut colorier avec cette même couleur. On recommence, jusqu'à que chaque sommet ait été colorié.

▷ **Exercice 33** *Montrez en utilisant un cube, que l'algorithme de Welsh-Powell ne mène pas à une solution optimale.*

▷ **Exercice 34** *Dans un tournoi de basket, chaque équipe recontre toutes les autres, et chaque rencontre dure une heure. Déterminer la durée minimale du tournoi avec 3, 4, 5 ou 6 équipes.*

12.6 Coloration d'un graphe planaire

Théorème des 4 couleurs On peut colorier les sommets d'un graphe planaire en utilisant au plus quatre couleurs, de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes.

Ce théorème a été démontré en 1976... en utilisant un ordinateur. La conjecture datait de 1852 ! !

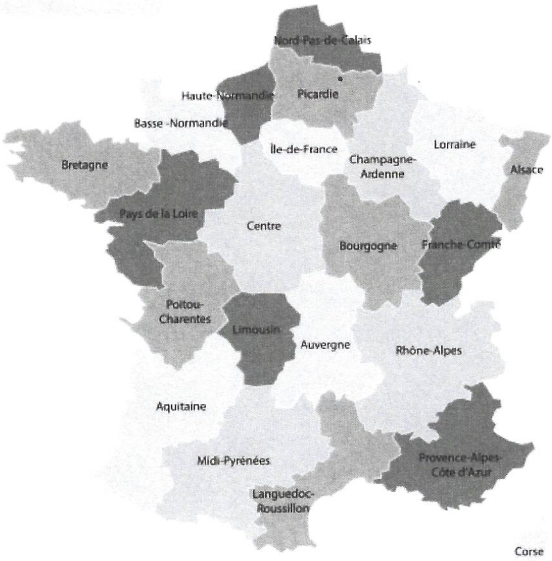
On peut par contre démontrer le théorème des 5 couleurs de façon plus simple.

▷ **Exercice 35** ***Théorème des 5 couleurs*** *Tout graphe planaire peut être colorié avec 5 couleurs.*

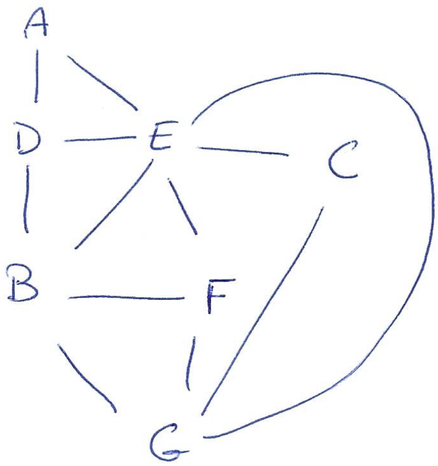
Pour démontrer ce théorème, on démontre les deux lemmes suivants :

lemme 1 : *$3f \leq 2m$ à partir d'un certain rang pour m (lequel ?)*
lemme 2 : *Dans tout graphe planaire, il existe au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.*

▷ **Exercice 36** *Voici les deux dernières versions des cartes des régions de France. A-t-on gagné une ou plusieurs couleurs en passant de 22 à 13 régions ?*



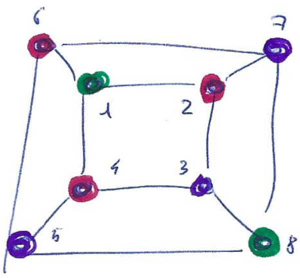
Exercice 31 :



taille de la ⊕ gde clique détermine le nb de places assises.

BEFG forment une clique

Exercice 33 :



w-P : 12485367 pas optimal