TD3
Opti

INP ENSEEIHT

TD 4 – Algorithmie

Problème : Résolution par pénalisation.

Soit f une fonction continûment différentiable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) \geq \|x\|_2$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation

$$\mathcal{P} \ : \ \min_{\|x\|_2^2=1} f(x), \quad \text{et } \mathcal{P}_n \ : \ \min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) + n\left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2,$$

où n est un entier naturel.

(1) Justifier que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}$ admettent au moins une solution. Dans toute la suite, nous supposerons que ces deux problèmes admettent une solution unique et nous noterons $x^\star$ et $x_n^\star$ les solutions respectives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_n$.

(2) On pose $\Phi_n(x) = f(x) + n\left(\|x\|_2^2 - 1\right)^2$.

(2.1) Montrer que, si $\|x\|_2 \geq 2$, $\Phi_n(x) \geq 2 + 9n$.

(2.2) Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour tout x tel que $\|x\|_2 = 1$, on a $\Phi_n(x) \leq M$.

(2.3) En déduire que la suite $(x_n^\star)$ est bornée et que $(x_n^\star)$ admet une sous-suite convergente (y_n), dont la limite sera notée $y^\star$ dans la suite.

(3) Soit $\gamma(x) = (\|x\|_2^2 - 1)^2$. Calculer $\nabla\gamma(x)$ et montrer que $\nabla f(y_n) + 4n(\|y_n\|_2^2 - 1)y_n = 0$. En déduire que y^* est tel que soit $\|y^*\|_2 = 0$, soit $\|y^*\|_2 = 1$.

(4) Montrer que, si on suppose que $\|y^\star\|_2 = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(y_n) = +\infty$. Déduire des résultats de la question (2) que l'on aboutit à une contradiction et donc que $\|y^\star\|_2 = 1$.

(5) Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} 4n(\|y_n\|_2^2 - 1)$ existe et qu'il existe β tel que $\nabla f(y^\star) + \beta y^\star = 0$.

(6) Former le lagrangien associé au problème $\mathcal{P}$. Montrer alors que $y^\star$ vérifie la condition au premier ordre de Kuhn-Tucker-Lagrange et donner le multiplicateur de Lagrange associé. Expliquer pourquoi chercher à résoudre $\mathcal{P}$ en considérant $\mathcal{P}_n$ est appelé technique de pénalisation.

TD3.1
Opti:

Algorithmie

Problème:

P : $\min_{\|x\|_2^2 = 1} f(x)$. $\quad P_n$: $\min_{x \in \mathbb{R}^d} \underbrace{f(x) + n(\|x\|_2^2 - 1)^2}_{\Phi_n(x)}$

1/ * f coercive sur 1 fermé non vide ($\|x\|^2 - 1 = 0$).
* $\forall n$, Φ_n coercive sur $\mathbb{R}^n$ (fermé non vide).

$\Rightarrow$ P et P_n $\forall n$ admettent au solution.

2.1/ Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > 2$.

$\Phi_n(x) = f(x) + n(\|x\|^2 - 1)^2$

$\geq \|x\| + n(\|x\|^2 - 1)^2$ car $f(x) \geq \|x\|$

$\geq 2 + n9$.

2.2/ $\forall x$ tq $\|x\| = 1$, $\Phi_n(x)$.

f $\mathcal{C}^0$ sur le compact $\|x\|^2 - 1 = 0$ donc $\exists m \geq$ tq $f(x) \leq m$ sur $\|x\|^2 - 1$

$\Rightarrow$ $\forall x$ tq $\|x\| = 1$, $\Phi_n(x) = f(x) \leq m$ $(\forall m)$ $\overset{?}{\Rightarrow} \Phi_n(x_n^*) \leq m$.

2.3/ Soit N tq $2 + 9n > m$.

$\forall n \geq N$, $\|x_n^*\| \leq 2$ car sinon d'après 2.1.

$\Phi_n(x_n^*) \geq 2 + 9_n > m$ ce qui est impossible d'après 2.2
$(\Phi_n(x_n^*) \leq m)$

$\Rightarrow$ x_n^* bornée donc elle admet une sous-suite convergente.
(y_n) de limite y^*

3) Soit $\gamma(x) = (\|x\|^2 - 1)^2$

* $\nabla \gamma(x) = 4(\|x\|^2 - 1)x$.
* y_n sol de P_n donc d'après la CN1.

$\nabla \Phi_n(y_n) = \nabla f(y_n) + 4n(\|y_n\|^2 - 1)y_n = 0$

* $\forall n$, $\nabla f(y_n) = -4n\underbrace{(\|y_n\|^2 - 1)}_{\to 0\ ?}y_n$.

$(\|\nabla f(y_n)\|)$ converge car (y_n) converge et ∇f $\mathcal{C}^0$.

donc $\varepsilon_n \,|\,\|y_n\|^2 - 1\,|\, \|y_n\|$ converge donc $\|y^*\| = 0$ ou $\|y^*\| = 1$.

4) Sq $\|y^*\| = 0$

$n(\|y_n\|^2 - 1)^2 \longrightarrow +\infty$.

donc $\Phi_n(y_n) \longrightarrow +\infty$ car $f(y_n) \to f(y^*)$.

ce qui est impossible car $\forall n$ $\Phi_n(y_n) \leq m$. $\Rightarrow \|y^*\| = 1$.

5) On a $\|y^*\| = 1$ donc $\exists i$ tq $y_i^* \neq 0$.

$\forall n$, $\nabla f(y_n) = -\varepsilon_n (\|y_n\|^2 - 1) y_n$.

$\Rightarrow e_i^T \nabla f(y_n) = -\varepsilon_n (\|y_n\|^2 - 1) e_i^T y_n \quad \forall n$.

et puisque $e_i^T y^* \neq 0$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $e_i^T y_n \neq 0$.

$$\varepsilon_n (\|y_n\|^2 - 1) = \underbrace{-\frac{e_i^T \nabla f(y_n)}{e_i^T y_n}}_{\to\, -\frac{e_i^T \nabla f(y^*)}{e_i^T y^*} \overset{\text{def}}{=} \beta} \quad \forall n \geq N.$$

$\Rightarrow \lim \nabla f(y_n) + \varepsilon_n (\|y_n\|^2 - 1) y_n = \nabla f(y^*) + \beta y^* = 0$.

6) CN1 sur (P):

$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda (\|x\|^2 - 1)$.

$\Rightarrow \nabla_x L(x, \lambda) = \nabla f(x) + 2\lambda x = 0$.

$\|x\|^2 = 1$.

$\Rightarrow y^*$ vérif CN1 avec $\beta = 2\lambda$.