

N° d'ordre :

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de L'enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique

المراكز الجامعية بلحاج بوشعيب عين تموشنت

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib-Ain Témouchent



Institut de Technologie
Département de Génie Civil
Laboratoire des Structures Intelligentes



THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT 3^{eme} Cycle LMD**

Domaine : Science et Technologie

Filière : Génie Civil

Spécialité : Structure

Par : ELLALI Mokhtar

Intitulé de la thèse

Analyse du flambement thermique des matériaux FGM piézoélectriques

Soutenue publiquement, le 20 /06 / 2019 , devant le jury composé de :

AISSA MAMOUN Sidi Mohamed	Pr	Président	Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib/ Ain Témouchent.
AMARA Khaled	Pr	Directeur de thèse	Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib/ Ain Témouchent.
BOUAZZA Mokhtar	Pr	Co- Directeur de thèse	Université Tahri Mohammed bechar
Fahsi Bouazza	Pr	Examinateur	Université DJILALI Liabès/ Sidi-Bel-Abbès
Meradjah Mustapha	MCA	Examinateur	Université DJILALI Liabès/ Sidi-Bel-Abbès
TAHAR BERRABAH Amina	MCA	Examinateuse	Centre Universitaire BELHADJ Bouchaib/ Ain Témouchent.

REMERCIEMENTS

Voilà venue une section très importante... la section des remerciements !!!

Peut-être est-ce la plus difficile dans un manuscrit ! En effet, chaque personne qui y est citée mérite la plus belle phrase ce qui nécessite des réels talents littéraires... Ainsi, comme tout un chacun, je vais essayer de faire au mieux et que tous les gens qui me liront sachent que ces quelques lignes ont été écrites avec tout mon cœur.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à Mr le professeur **AMARA Khaled** de m'avoir confié un sujet de recherche prestigieux et passionnant. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour son aide, sa compétence et son rigueur scientifique. Leurs encouragements constants et son amical soutien m'ont grandement aidé à l'achèvement de ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Mr le professeur **BOUAZZA Mokhtar** qui a apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Mr le Professeur **AISSA MAMOUN Sidi Mohamed**, responsable du Doctorat « Sols & Structures » de m'avoir donné l'opportunité de poursuivre des études en doctorat et de m'avoir fait honneur de présider ce jury.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **Fahsi Bouazza, Meradjah Mustapha**, ainsi qu'au Madame **TAHAR BERRABAH Amina**, de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je remercie ma famille, mes amies de m'avoir soutenu et supporter durant ces années et en particulier mes parents, mon frères et mes sœurs et tous les autres qui se reconnaîtront et qui ont su me soutenir pendant les moments difficiles que j'ai pu avoir et me faire profiter de leur bonne humeur.

الملخص

في هذا العمل نركز على تحليل الإناء للصفائح والروافد المترفة وظيفيا مدمجة مع مجسات كهرو ضغطية على السطح، حيث تتعرض هذه الأخيرة إلى حمولات حرارية وقوى الشد الخاصة بالمجسات الكهروضغطية، خصائص المواد المترفة وظيفيا موزعة بشكل مستمر على كامل السمك حيث يتم الحصول على معادلات التوازن والاستقرار للصفحة أو الرافدة المترفة وظيفيا كهرو ضغطية عن طريق نظرية تشوه القص.

الجديد في هذا العمل هو الحصول على الإناء الأعظمي للصفائح أو الرافدة المترفة وظيفيا كهرو ضغطية. حيث يتم دراسة مختلف العوامل المؤثرة على الإناء الحراري الأعظمي مثل نوع الحمولة، الخصائص الهندسية، المؤشر الأسني ، وشدة التوتر المطبق على المجسات كهرو ضغطية .

الكلمات الدالة: المواد المترفة وظيفيا كهرو ضغطية، الصفائح، الروافد، الإناء الحراري، نظرية تشوه القص.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'analyse du flambement des plaques et des poutres fonctionnellement graduées intégrées aux actionneurs piézo-électriques liés en surface et soumises à l'action combinée des charges thermiques et des charges de traction constantes dues à l'actionneur appliqué. Les propriétés du matériau fonctionnellement gradué supposées varier à travers l'épaisseur de façon continue. Les équations d'équilibre et de stabilité des poutres et des plaques FGM piézoélectriques sont obtenues par la théorie de déformation de cisaillement. La nouveauté du présent travail est d'obtenir la solution de température critique de flambement des plaques et des poutres FGM intégrées avec des couches piézoélectriques.

Un effort particulier est porté sur les divers paramètres qui influent sur la charge critique du flambement thermique des plaques FGM piézo-électriques, tels que : type de chargement, paramètres géométriques, l'index de la loi de puissance ainsi que les effets de la tension appliquée de l'actionneur.

Mots clé : Matériaux FGM piézoélectriques ; plaques ; poutres ; flambement thermique ; théorie de déformation de cisaillement.

Abstract

This work focuses on the analysis of the buckling of functionally graduated plates and beams integrated into surface-bonded piezoelectric actuators and is subjected to the combined action of thermal loads and constant tensile loads due to the applied actuator. The properties of the functionally graduated material assumed to vary through the thickness continuously. The equations of equilibrium and stability of piezoelectric FGM beams and plates are obtained based on the theory of shear deformation. The novelty of this work is to obtain the critical buckling temperature solution for FGM plates and beams integrated with piezoelectric layers.

Particular attention is paid to the various parameters that influence the critical thermal buckling load of piezoelectric FGM plates, such as: loading type, geometric parameters, power law index and the effects of the applied actuator voltage.

Keywords : Piezoelectric FGM materials ; plates ; beams ; thermal buckling ; shear deformation theory.

TABLE DES MATIERES

الملخص

Résumé

Abstract

Table des Matières	I
Liste des Figures	IV
Liste des Tableaux	VI
Liste des Notations	VII
Introduction Générale	01
CHPITRE I : Revue de littérature.....	05
I.1 Introduction	06
I.2 Concept des matériaux a gradient de propriétés.....	07
I.3 comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.....	11
I.4 Revue des méthodes d’élaboration des matériaux FGMs	13
I.4.1 Les procèdes à l'état solide	14
I.4.1.1 Compaction Sèche des Poudres	14
I.4.1.2 Diffusion collage.....	14
I.4.2. Les procèdes à l'état liquide.....	14
I.4.2.1 Frittage et Infiltration.....	14
I.4.2.2 Coulée par centrifugation (centrifugal casting)	14
I.4.3. Processus de dépôt	15
I.4.3.1 Dépôt physique en phase vapeur.....	15
I.4.3.2 Dépôts laser.....	15
I.5 Domaines d’application des FGM.....	15
I.6 Avantages et inconvénients de la FGM.....	16
I.6.1 Avantages de la FGM	16
I.6.2 Inconvénient de la FGM	16
I.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	17
I.7.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	18

I.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	19
I.7.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	20
I.8 Définition des matériaux piézoélectrique	21
1.8.1 Effet piézoélectrique	22
1.8.2 Piézoélectricité au niveau microscopique.....	22
1.8.3 Lois de comportement de matériau piézoélectrique	23
I.9 Investigations sur analyse thermoélastique des matériaux FGM	23
I.10 Investigations sur analyse thermoélastique des matériaux FGM piézoélectrique.....	25
CHPITRE II : analyse du flambement thermique des poutres FGM piézoélectriques.....	28
II.1 Introduction	29
II.2 Formulation théorique	31
II.2.1 Poutre fonctionnellement graduée piézoélectrique (P-FGM)	31
II.2.2 Cinématique et équations constitutives	33
II.2.3 Équations gouvernantes.....	35
II.2.4 Solution de flambement thermique	36
II.2.4.1 Flambement des poutres piézoélectriques fonctionnelles graduées sous élévation uniforme de la température.	37
II.2.4.2 Flambement des poutres piézoélectriques fonctionnelles graduées sous élévation linéaire de la température	37
II.2.4.3 Flambement des poutres piézoélectriques fonctionnelles graduées sous changement de température non linéaire à travers l'épaisseur	37
II.3 Résultats et discussion	38
II.3.1 Études comparatives.....	39
II.3.2 Études paramétriques	42
II.4 Conclusions	45
CHPITRE III : analyse du flambement thermique des plaques FGM poreux piézoélectriques.....	47
III.1 Introduction.....	48
III.2 Formulation mathématique	49
III.2.1 Propriétés des plaques FGM piézoélectriques avec répartition de porosité.....	49
III.2.2 Champ de déplacement et déformations	51
III.2.3 Contraintes, moment et force de cisaillement transversale résultants	52
III.2.4 Équations de stabilité	55

III.2.5. Température uniforme.....	58
III.3 Résultats numériques et discussion	58
III.3.1 Études paramétriques	59
III.4 Conclusions.....	62
CHPITRE IV : analyse du flambement des plaques magnéto-piézoélectriques.....	63
IV.1 Introduction	64
IV.2 Formulations mathématiques.....	66
IV.2.1 Equations de mouvement.....	68
IV.2.2 Solution de Navier d'une plaque magnéto-piézoélectrique simplement appuyée	75
IV.3 Résultats et discussion	77
IV.3.1 Matériaux utilisés.....	77
IV.3.2 Etudes paramétrique	78
IV.4 Conclusion	85
Conclusion Générale & Perspectives.....	86
Références bibliographiques.....	89

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Microstructure de FGM céramique-métal.....	08
Figure I.2 : Schéma présente Les deux phases de FGM	09
Figure I.3 : Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	10
Figure I.4 Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM	11
Figure I.5 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels.....	12
Figure I.6 : La distribution composante des matériaux.....	13
Figure I.7 : Méthodes de fabrication de FGM	13
Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM	15
Figure I.9 : Géométrie d'une plaque FGM	18
Figure I.10 : variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	19
Figure I.11 : variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	20
Figure I.12 : variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM	21
Figure I.13 : Schématisation de l'effet de la Piézoélectricité	22
Figure I-14 : Effet piézoélectrique à l'échelle microscopique.....	22
Figure II. 1 : Système des coordonnées et la géométrie de la poutre FGM piézoélectrique ..	32
Figure II.2 : Comparaison de la différence de température critique de flambement d'une poutre FGM piézoélectrique avec différentes valeurs de rapports (h / L)	41
Figure II.3 : Comparaison de la différence de température critique de flambement d'une poutre piézoélectrique fonctionnellement graduée, avec différentes valeurs d'indice de loi de puissance et d'épaisseur de P-FGM.....	42
Figure II.4 : Variation de la température critique du flambement d'un matériau piézoélectrique à gradation fonctionnelle en fonction de rapport (L/h)	44
Figure II.5 : Variation de la température critique du flambement d'un matériau piézoélectrique à gradation fonctionnelle en fonction de rapport (L/h)	45
Figure III.1 : (a) Géométrie et coordonnées de la plaque de matériau fonctionnellement gradué intégré aux actionneurs piézoélectriques à liant de surface. (b) Coupe transversale de la plaque de FGM avec des porosités parfaite et imparfaite	49

Figure III.2 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-I en fonction au rapport longueur-épaisseur de la plaque (a/h). Cas d'élévation de température uniforme	60
Figure III.3 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-II en fonction au rapport longueur-épaisseur de la plaque (a/h). Cas d'élévation de température uniforme	60
Figure III.4 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-I en fonction au rapport longueur-- largeur de la plaque (a/b). Cas d'élévation de température uniforme	61
Figure III.5 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-II I en fonction au rapport longueur- largeur de la plaque (a/b). Cas d'élévation de température uniforme	61
Figure V.1 : plaque magnéto-piézoélectrique sur une fondation élastique	66
Figure IV.2 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différents paramètres de charge latérale λ ($\delta = 0.001, V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$)	78
Figure IV.3 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de V_0 pour la plaque magnéto-électro-élastique carré sous différents rapports $\delta = \frac{h}{l}$ ($\lambda = 0, \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$)	79
Figure IV.4 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnétoélectroélastique rectangulaire sous différents valeurs de V_0 ($\delta = 0.001, \lambda = 0, \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$)	80
Figure IV.5 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de Ω_0 pour la plaque magnétoélectroélastique carré sous différents rapports $\delta = \frac{h}{l}$ ($\lambda = 0, V_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$)	81
Figure IV.6 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnétoélectroélastique rectangulaire sous différents valeurs de Ω_0 ($\delta = 0.001, \lambda = 0, V_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$)	82
Figure IV.7 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de δ pour la plaque magnéto-électro-élastique carré sous différents valeurs de k_w ($V_0 = \Omega_0 = 0, \lambda = 0, k_g = 0, m = n = 1$)	83
Figure IV.8 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différents valeurs de k_w ($\delta = 0.001, \lambda = 0, V_0 = \Omega_0 = 0, k_g = 0, m = n = 1$)	83

Figure IV.9 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de δ pour la plaque magnéto-électro-élastique carré sous différents valeurs de k_g ($\lambda = 0, V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = 0, m = n = 1$).....84

Figure IV.10 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différents valeurs de k_g ($\delta = 0.001, \lambda = 0, V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = 0, m = n = 1$).....85

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	09
Tableau II.1: Comparaison de la différence de température critique (en [K]) pour les poutres en FGM simplement appuyée dans le cas d'une distribution de température linéaire à travers l'épaisseur, ($L = 1\text{m}$).....	40
Tableau II.2 : Comparaison de la différence de température critique (en [K]) pour les poutres en FGM simplement appuyée dans le cas d'une distribution de température non linéaire à travers l'épaisseur,($L = 1\text{m}$).....	40
Tableau II. 3 : Comparaison de la différence critique de température de flambement pour une poutre piézoélectrique à gradation fonctionnelle simplement appuyée soumis à différentes charges thermiques ($L = 0,25\text{ m}$, $h = 0,01\text{ m}$)	43
Tableau III.1 : Propriétés matériaux constitués la partie FGM et piézoélectriques	58
Tableau III.2 : Comparaison des températures critiques de flambement des plaques isotropes simplement appuyée	59
Tableau IV.1 : Etude comparative des paramètres de charge de flambement, P_{cr} pour une plaque magnéto-électro-élastique carrée	79

LISTE DES NOTATIONS

E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de la céramique
ν	Coefficient de Poisson
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
$\nu(z)$	Coefficient de Poisson en fonction de « z »
$V(z)$	Fraction volumique
e	la fraction volumique des porosités
k	Paramètre du matériau
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
H	l'épaisseur totale
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen
u, v, w	Les déplacements dans les directions x, y, z.
$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$	Les rotations autour des axes x, y et z,
$\sigma_x \sigma_y \sigma_z$	Contraintes normales
τ_{xz}, τ_{yz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation dans la direction x, y et z
γ_{xz}, γ_{yz}	Déformations de distorsion
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
P_x, P_y, P_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transverse
R_x, R_y	Effort de cisaillement
Q_x, Q_y	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle
i et j	nombres naturels
δW	Le travail externe dû au milieu élastique moyen

$T(x, y, z)$	la variation de la température à travers l'épaisseur
K_w et K_g	Les coefficients de WINKLER et PASTERNAK
$\{\Omega\}$	Le vecteur des déplacements généralisés
{ }	Vecteur colonne
[]	Matrice
$\{\sigma\}$	vecteurs de contraintes
$\{\varepsilon\}$	vecteurs de déformations
$\{\varepsilon_{ij}^T\}$	le vecteur de contrainte dû à la charge thermique
$\{E\}$	vecteurs de champ électrique
e_{ij}	la rigidité piézoélectrique
d_{ij}	les constantes diélectriques
Q_{ij}^a	la rigidité élastique des couches d'actionneurs piézoélectriques
V_a	la tension appliquée aux actionneurs
E_z	La composante de champ électrique transversale
ΔT	la variation de température de flambement
U	L'énergie de déformation virtuelle totale
	l'énergie de déformation virtuelle totale pour la couche
U_a	piézoélectrique
	l'énergie de déformation virtuelle pour la couche de matériau
U_f	fonctionnellement graduée
T_i	La température initiale
T_f	La température finale
T_m	la température du métal
$K(z)$	La conduction thermique
$[A_{ij}]$	la matrice de rigidité à la traction
$[D_{ij}]$	la matrice de rigidité à la flexion
$[B_{ij}]$	la matrice de rigidité à la traction et à la flexion
$([E_{ij}], [F_{ij}], [H_{ij}])$	la matrice de rigidité d'ordre supérieur

N_x^m, N_y^m, N_{xy}^m	les forces mécaniques
N_x^a, N_y^a, N_{xy}^a	les forces électriques
, x	Dérivée par rapport à x
, y	Dérivée par rapport à y
, z	Dérivée par rapport à z
k_g	coefficient de cisaillement
k_w	coefficient de Winkler
UTR	Uniforme température à travers l'épaisseur
LTD	Linéaire température à travers l'épaisseur
NLTD	Non Linéaire température à travers l'épaisseur

INTRODUCTION

GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

La technologie des structures intelligentes utilisant un réseau de capteurs et d'actionneurs aura un impact important au niveau de la conception, du développement et de la fabrication de la prochaine génération de produits. L'idée d'appliquer les matériaux intelligents aux systèmes mécaniques a été étudiée par des chercheurs de différentes disciplines. Présentement, plusieurs matériaux ayant un comportement adaptable sont utilisables comme capteurs ou actionneurs. Ces matériaux comprennent les polymères et les céramiques piézoélectriques, les alliages à mémoire de forme, les fluides électro-rhéologiques et les fibres optiques. La modélisation et la simulation de ces matériaux joueront un rôle clé dans la conception des structures intelligentes.

Les matériaux piézoélectriques possèdent certaines propriétés facilitant leur utilisation comme élément de contrôle des structures. Premièrement, ils se déforment lorsqu'on leur applique un champ électrique. Cette propriété, effet inverse de la piézoélectricité, permet de les utiliser comme actionneur. Deuxièmement, ils produisent une tension électrique lorsqu'on les déforme. Cette propriété, effet direct de la piézoélectricité, permet de les utiliser comme capteur. De façon générale, les matériaux piézoélectriques ont l'habileté de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique et vice-versa. On attribue essentiellement l'efficacité des structures intelligentes à leurs propriétés de légèreté, de force et de faible consommation électrique des actionneurs piézoélectriques.

Avec l'avènement des matériaux composites piézoélectriques, les industries se transforment et innovent avec la création de nouveaux produits, possédant des caractéristiques très intéressantes, tant au niveau de la rigidité qu'au niveau de la masse volumique, de la conductivité électrique etc.

Un composite piézoélectrique se compose d'au moins d'un matériau piézoélectrique comme phase active, avec un ou plusieurs phases non piézoélectriques. Un matériau composite est composé d'au moins deux matériaux non-miscibles. L'objectif est de pouvoir utiliser les propriétés de chaque matériau à leur maximum et d'obtenir un mélange qui est plus performant qu'un matériau traditionnel homogène. Les matériaux composites fabriqués avec des fibres de verre ou de carbone avec une matrice en époxy sont très communs dans l'industrie aéronautique et spatiale où le poids est un paramètre critique. Ils sont également utilisés dans l'industrie du sport et de la haute performance de plus en plus, dans les voiliers de compétition par exemple. En effet, les fibres de carbone par exemple, possèdent un quotient résistance en tension sur poids et un quotient module de rigidité sur poids plus élevé que l'acier et l'aluminium et ceci les rend très intéressants à utiliser.

INTRODUCTION GENERALE

Cependant, avec ces nouveaux matériaux, de nouveaux processus de fabrication ainsi que des théories plus poussées doivent être développés et mis en œuvre afin de mieux comprendre le comportement de ces structures fabriquées. En effet, une des problématiques des matériaux composites dans l'industrie se pose dans la conception des véhicules. Les matériaux composites utilisés sont plus légers que les aciers utilisés présentement et présentent donc un comportement dynamique différent de ces derniers.

Ce type de matériau est généralement constitué de deux ou plusieurs matériaux de natures différentes et disposé sous forme de stratifié dont l'association aboutit à un assemblage avec des performances supérieures à celles des composants pris séparément. Cependant, l'interface de ces couches pose un problème majeur qui est la discontinuité des propriétés et des contraintes à ce niveau. Cette discontinuité provoque de fortes concentrations de contraintes, un décollement entre les couches dus à un passage brusque dans la composante matérielle. Une technique a été élaborée par un groupe de chercheurs japonais pour surmonter ces effets nuisibles ; il consiste à utiliser un matériau à gradient évalué, sa signification originale est FGM : **Functionnaly Graded Material**.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des composites spéciaux dont les propriétés varient de façon continue grâce à leur épaisseur. Les FGM sont habituellement faits de mélange de céramique et de métal et peuvent donc résister à des environnements de haute température tout en maintenant leur ténacité. Historiquement, la technologie de la FGM était celle des matériaux de fabrication originale proposée au Japon en 1984 par Sendai et ce groupe de recherche. Ils sont utilisés dans des applications très différentes, telles que les cuves de réacteur, les appareils de l'énergie de fusion, les secteurs biomédicaux, les avions, les véhicules spatiaux, les industries de la défense et d'autres ouvrages d'art. En effet, le comportement mécanique des éléments de structure avec les FGM est d'une importance considérable dans les domaines à la fois de recherche et d'industrie. L'avantage d'utiliser les FGM est pour la raison de leur aptitude de résister à des environnements à haut gradient de température, tout en conservant leur intégrité structurale.

Une analyse précise et détaillée des déplacements et des contraintes dans une plaque FGM soumise à des charges thermiques et mécaniques a attiré l'attention de nombreux chercheurs à ce jour. Par exemple, la théorie classique des plaques, basée sur les hypothèses de Kirchhoff [Javaheri and Eslami 2002 a, b], [Mohammadi et al 2009], [Bouazza et al 2011a]. Afin de prendre en compte cet effet, un certain nombre de théories de déformation en cisaillement de premier ordre ont été développées. Cependant, ces théories supposent une distribution uniforme des déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur. A cet

INTRODUCTION GENERALE

effet, des facteurs de correction de cisaillement sont introduites pour contourner ce problème. La précision des solutions de la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre sera fortement liée à la meilleure estimation des facteurs de correction de cisaillement [Zhao et al 2009], [Bouazza et al 2010,2011b], [Chen 2011], [Fazelzadeh et al 2011]. Les théories d'ordre supérieur proposent un gauchissement de la section par l'introduction d'une forme cubique du déplacement [Nguyen 2014], [Akavci 2014]. Elles sont plus réalistes puisqu'elles vérifient la nullité des contraintes de cisaillement sur les limites supérieures et inférieures de la structure contrairement à celles du premier ordre dans les poutres de Timoshenko et de Midlin-Reissner dans les plaques. Elles donnent donc lieu à des déformations et des contraintes de cisaillement non homogènes dans l'épaisseur. Plus récemment, [Touratier 1991] a montré que cette forme cubique du déplacement peut être généralisée par un « sinus».

La présente thèse sera donc présentée selon l'organisation qui suit :

Dans le **chapitre I** nous présentons une recherche bibliographique sur les matériaux fonctionnellement gradués et les matériaux piézoélectrique, leurs propriétés, l'histoire de leur développement, ainsi que leurs domaines d'application et on présente quelques travaux réalisés sur les structures en FGM piézoélectrique pour souligner l'ampleur qu'a pris ces matériaux durant ces dernières décennies.

Dans le **chapitre II**, nous étudierons le flambement thermique d'une poutre en matériaux fonctionnellement gradué (FGM) avec des couches piézoélectriques liées en surface, qui sont soumises à la fois à une charge thermique et à une tension constante. La contribution dans cette partie est d'obtenir des solutions de forme fermée pour les charges de flambement basées sur la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre.

Le **chapitre III** est consacré à l'analyse du flambement thermique de plaques rectangulaires poreuses fonctionnellement graduées qui sont intégrées à des actionneurs piézoélectriques liés en surface soumis à l'action combinée d'une charge thermique et d'une tension d'actionneur appliquée constante pour deux distributions de porosité différentes de la partie FGM.

L'objectif du **chapitre IV** est d'étudier le flambement des plaques magnéto-piézoélectrique reposant sur une fondation élastique par la théorie d'ordre élevé, en utilisant l'approche de Navier. Des évaluations qualitatives et quantitatives du champ de déplacement et de contraintes sont présentées et discutées. Enfin, le travail s'achèvera par une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

CHPITRE I

Revue de littérature

I.1 Introduction

Les matériaux composites légers dont les rapports de résistance/poids et épaisseur/poids sont très grands, ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique et dans d'autres applications technologiques avant d'être appliquées dans le domaine du génie civil. Cependant, les matériaux composites traditionnels sont inutilisables sous un environnement à hautes températures. Les métaux ont été généralement utilisés dans le domaine de la technologie pendant plusieurs années grâce à leur excellente résistance mécanique et dureté. Mais dans des conditions de hautes températures, la résistance mécanique du métal devient faible comme pour les matériaux composites traditionnels. Les matériaux en céramique ont d'excellentes caractéristiques en résistance thermique. Cependant, les applications de la céramique sont habituellement limitées du fait de leur faible dureté.

L'amélioration des performances des pièces structurelles peut conduire à chercher au sein d'un même matériau, des propriétés différentes, souvent antagonistes, mais localement optimisées. Le développement des matériaux composites a permis d'associer des propriétés spécifiques à différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation locale de ces propriétés par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un même matériau tenace pose le problème de l'interface, par exemple une couche d'un matériau céramique peut être collée à la surface d'une structure métallique pour former un revêtement barrière thermique dans les applications à haute température.

La transition brusque dans les propriétés des matériaux à travers l'interface entre les matériaux discrets peut entraîner une grande contrainte inter-laminaire ou une forte concentration de contraintes conduisant à la déformation plastique ou de fissuration. Une technique pour surmonter ces effets nuisibles et d'utiliser un matériau à gradient évalué (de l'anglicisme FONCTIONALY GRADED MATERIALS (FGM)).

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites connue sous le nom de matériau fonctionnellement gradués (FGM), ou matériaux à gradient de propriétés, a attiré une attention particulière.

Dans cette thèse, tout d'abord, il est important de prendre connaissance des travaux qui ont déjà été réalisés dans le domaine de modélisation des matériaux FGM, piézoélectrique, matériaux avancés FGM, piézoélectrique. Pour y arriver, une revue de littérature a été réalisée afin de donner une vue d'ensemble des travaux et des connaissances acquis dans ce domaine. Cette revue sera divisée en trois sections :

- Définition des matériaux innovants : matériaux fonctionnellement gradués, matériaux piézoélectrique, matériaux FGM piézoélectrique.
- Investigations sur l'analyse thermoélastique des matériaux FGM.
- Investigations sur l'analyse thermoélastique des matériaux FGM piézoélectrique.

I.2 Concept des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial du Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues à Sendai. L'idée est de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [Koizumi, 1993]. Les changements continues dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [Koizumi, 1997]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques, [Croce, 2004].

Les matériaux constituants les parois des engins spatiaux (navettes spatiales ou des avions hypersoniques) sont souvent soumis à des températures élevées. Les pièces les plus exposées sont le cône d'entrée, les bords d'attaque des ailes ainsi que certaines surfaces inférieures. Pour cette raison les matériaux constituant les parois de ces pièces doivent être capables de supporter sur une dizaine de millimètres un chargement thermique induit par des températures d'atmosphère environnant les 1800°C. Il n'y a aucun matériau monolithique capable de résister à une telle contrainte thermique [Koizumi, 1993].

La solution envisagée est la mise en œuvre de matériaux composites et notamment l'utilisation les matériaux à gradient de propriétés. On peut imaginer un matériau dont la face exposée à très haute température possèderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et possèderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal.

Cependant, si l'on considère un simple assemblage de ces deux matériaux, ils présentent immédiatement une rupture due aux contraintes thermiques exercées à l'interface entre les deux types de matériaux ayant des propriétés thermiques différentes. L'idéal serait de supprimer cette interface en créant une transition continue entre les deux faces.

Généralement, les matériaux fonctionnellement gradué FGM sont l'un des matériaux avancés résistant à température élevée, capables de résister aux températures extrêmes. FGM sont des nouveaux matériaux microscopiquement hétérogènes dans lesquels les propriétés mécaniques varient régulièrement et de façon continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé par la variation progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs. [Samsam Shariat 2005]

En réalité, la microstructure des FGM est discrètement et disposées de façon aléatoire comme illustré dans les figures (I.1) et (I.2). La microstructure des FGM se distingue par trois zones différentes : deux zones avec une faible concentration de phases représentent les parties particules- matrice, tandis que la zone intermédiaire est une transition dans laquelle il existe une interface de phases. [Nguyen 2008].

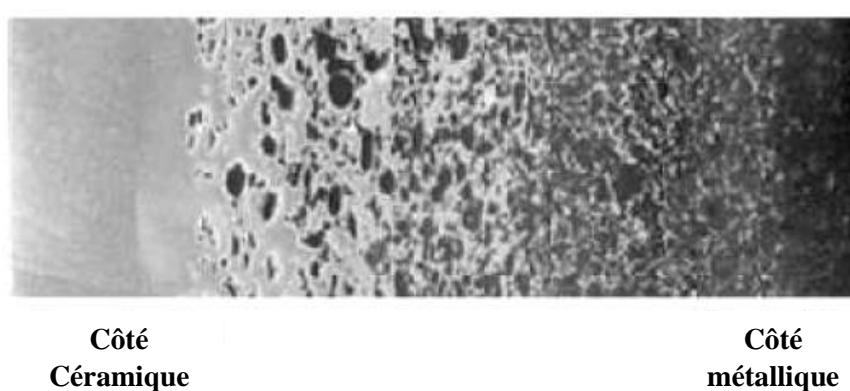


Figure I.1 : Microstructure de FGM céramique-métal [Nguyen 2008]

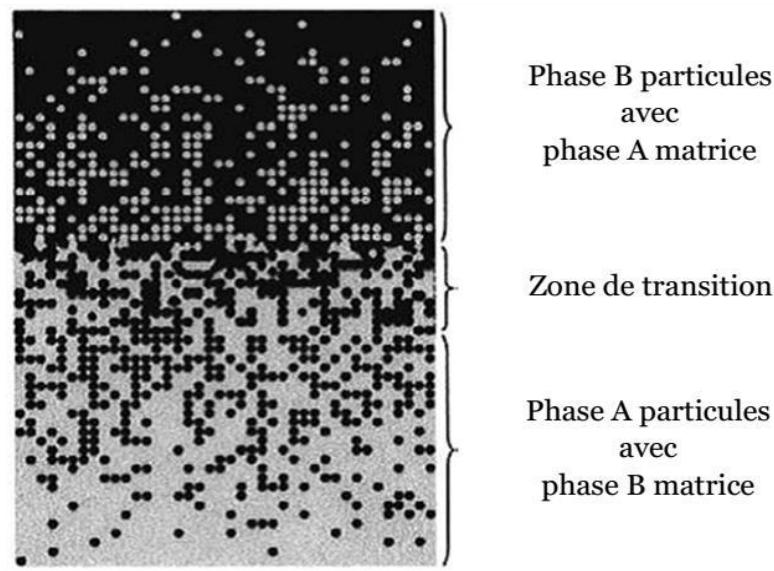


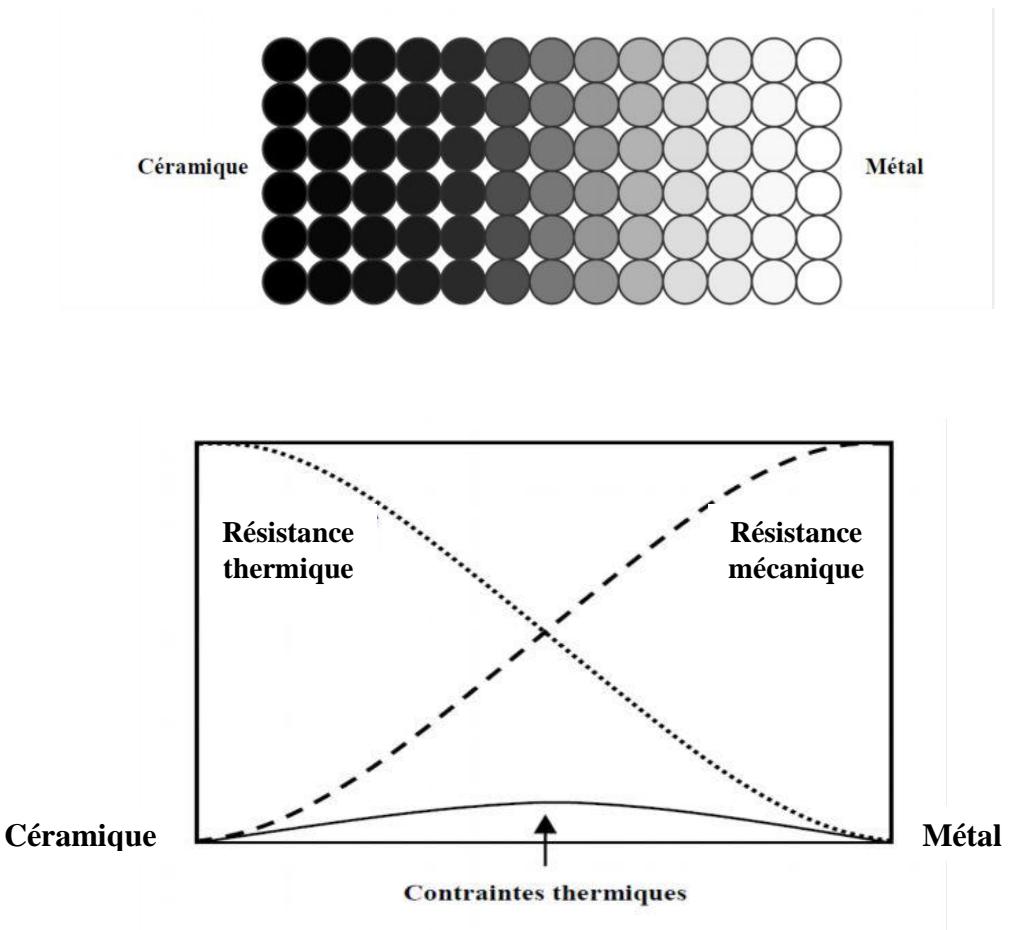
Figure I.2 : Schéma présente Les deux phases de FGM [Shen 2011]

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal [Nguyen 2008].

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique. - Bonne résistance à l'oxydation. - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface. -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique. - Conductivité thermique élevée. - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau « FGM » est illustré dans la figure I.3. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des « FGM ». Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch, 1986].



La figure I.4 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

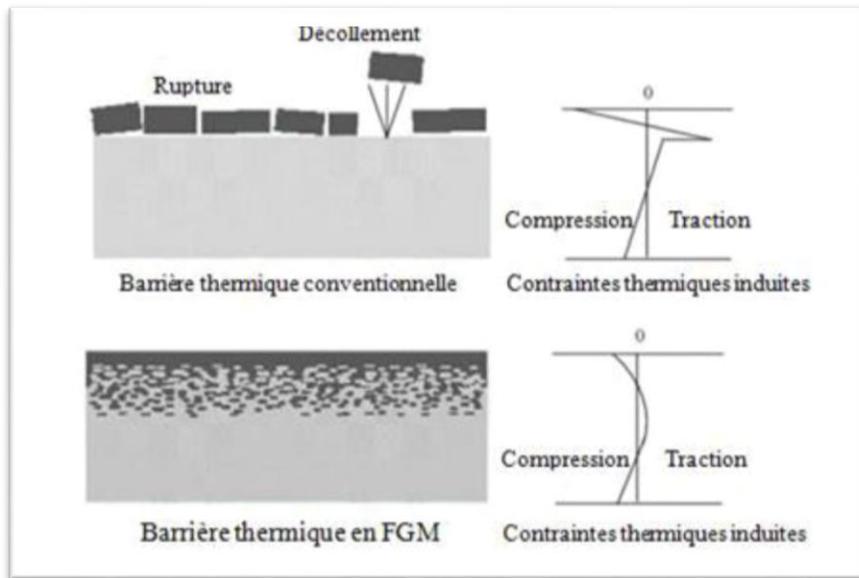


Figure I.4 Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Krishnan et al 2017]

I.3 comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure du matériau distingue les FGM des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la figure I.5. [Koizumi 1996].

Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch 1986].

Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes de cinq ans ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatial hypersonique) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale du FGM et de ces perspectives.

Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> 1 Résistance mécanique 2 Conductivité thermique 		
Structure	Eléments constituants: céramique métal microporosité fibre 		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.5 : Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]

[Yoshihisa 2004] à établir un modèle simple illustrant les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels est montré sur la figure I.6 : (a) un matériau plan composé, (b) un matériau relié et (c) un matériau à gradient de propriété. Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. FGM ont de excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels.

Puisque les FGM ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se composent du métal et en céramique a la caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistivité aux hautes températures dans le côté en céramique.

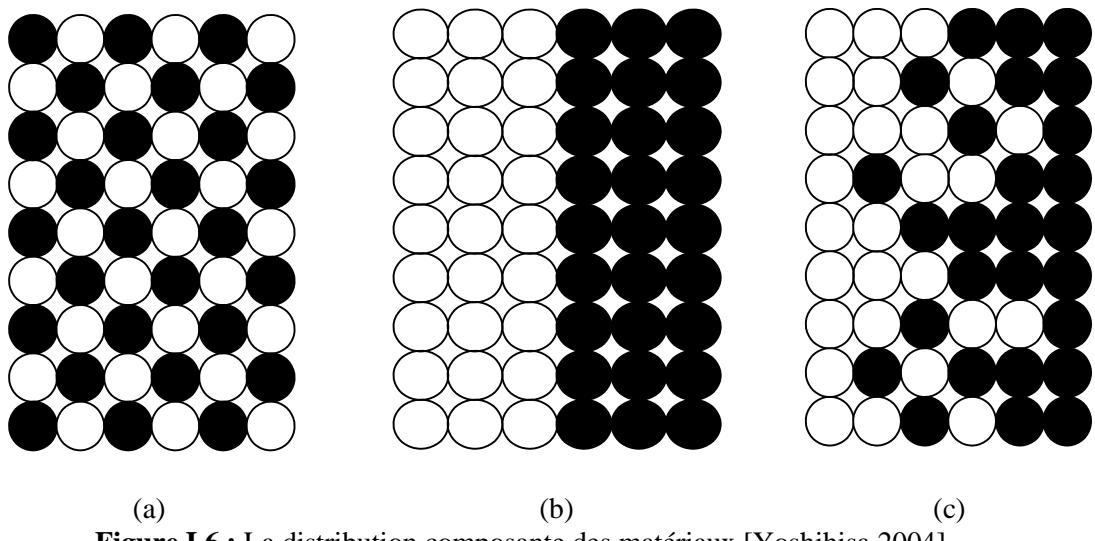


Figure I.6 : La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].

I.4 Revue des méthodes d'élaboration des matériaux FGMs

Les matériaux fonctionnellement gradué sont habituellement sous forme de revêtement de surface, il existe un large éventail de procédés de dépôts de surface en fonction de l'exigence de service du processus [Mahamood 2012], la figure I.7 suivant présente quelques procédés de fabrication de FGM.

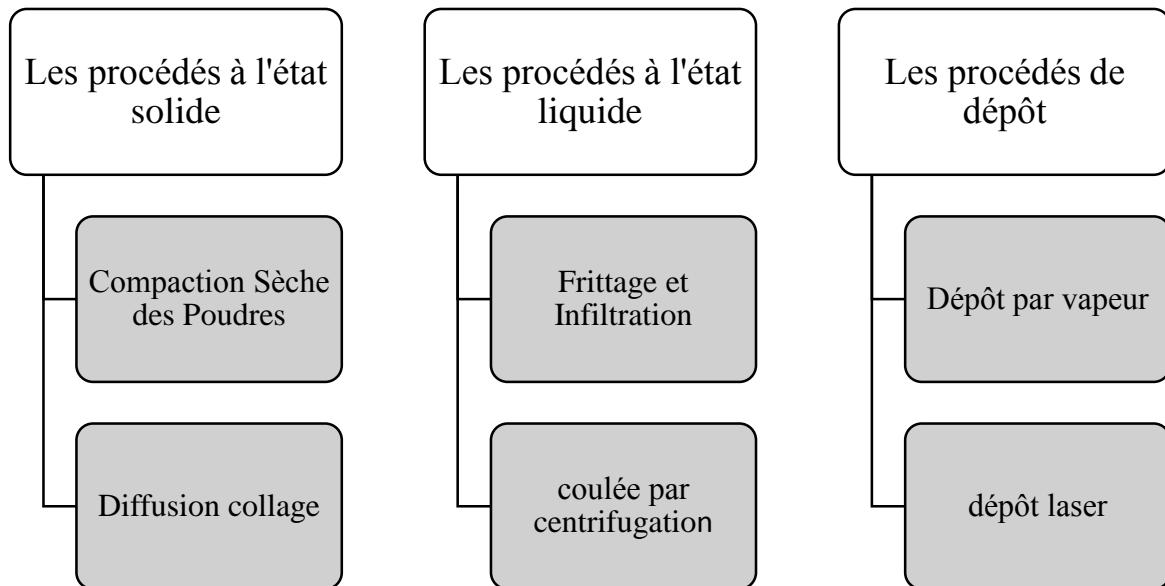


Figure I.7 : Méthodes de fabrication de FGM [Pai 2004]

I.4.1 Les procèdes à l'état solide :

I.4.1.1 Compaction Sèche des Poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop 1993]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.1.2 Diffusion collage

Ce processus implique la fabrication des structures graduées par l'injection des feuilles métalliques de différents épaisseur et quantités avec la variation de fraction volumique de la phase de céramique suivie par diffusion de collage à des températures plus élevées . [Pai 2004]

I.4.2. Les procèdes à l'état liquide :

I.4.2.1 Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Kieback 2005].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.2.2 Coulée par centrifugation (centrifugal casting)

La méthode suivie par la création de graduation dans la microstructure par l'application de la force centrifuge. Lorsque des particules contenant le coulis sont soumises à la force centrifuge, deux zones sont formées en fonction de la concentration des particules l'une est enrichie et autre appauvrie. En fonction de la densité des particules, les particules légères séparées vers l'axe de rotation, tandis que les particules plus denses s'éloignent de l'axe de rotation. [Pai 2004]

I.4.3. Processus de dépôt :

I.4.3.1 Dépôt physique en phase vapeur :

Des structures fonctionnellement gradué contenant des métaux et céramiques sont préparées par la combinaison de dépôt d'un ou de plusieurs éléments de métal vaporisé et l'introduction simultanée d'un gaz réactif conduisant à la formation d'une phase de céramique. [Pai 2004]

I.4.3.2 Dépôts laser :

Le laser forme un bassin de métal sur le substrat dans lequel on injecte de poudre métallique. la poudre injectée fusible sur les substrats comme le laser balaie la partie, laissant un cordon de matériel déposé. Le matériel est déposé seulement lorsque le laser frappe la surface. Depuis le laser peut être positionné avec précision, il est facile de déposer du matériel sélectivement réduisant le temps d'usinage autrement requise dans les opérations de traitement ultérieur. [Pai 2004]

I.5 Domaines d'application des FGM

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.8 Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique et dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

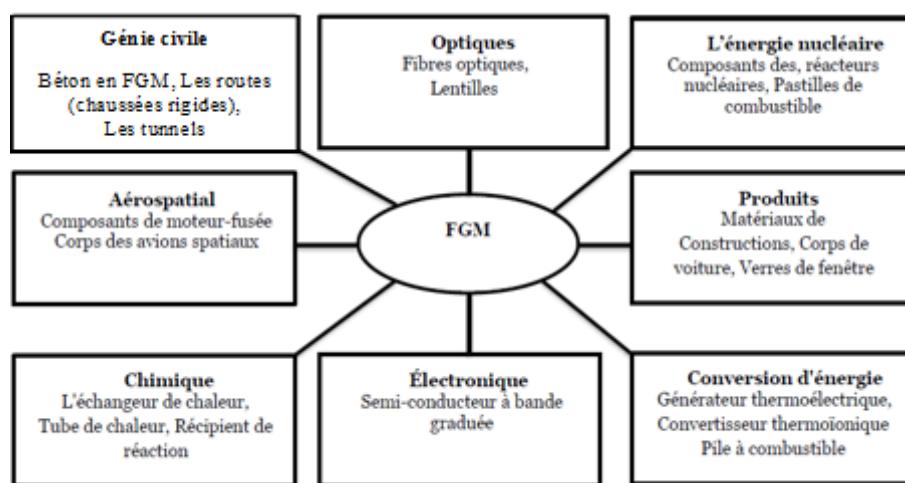


Figure I.8 : Les principaux domaines d'application des FGM. [Miyamoto 2013]

I.6 Avantages et inconvénients de la FGM

I.6.1 Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement. [Narottam.P et al, 2011], et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délamination.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc [Narottam 2011]

I.6.2 Inconvénient de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), le céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses. [Narottam 2011]

I.7 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur.

La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt [Shen 2009]

$$P = \sum_{i=1}^n P_i V_i \quad (\text{I.1})$$

Avec P_i et V_i sont respectivement la propriété mécanique et la fraction volumique du constituant i , avec :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (\text{I.2})$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants ; de la céramique et du métal inoxydable en général. Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_1 V_1 + P_2 V_2 \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (\text{I.4})$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être

assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

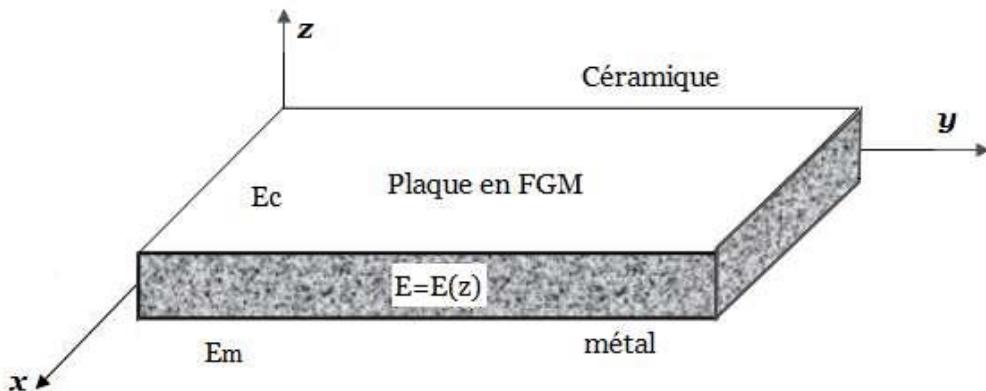


Figure I.9 : Géométrie d'une plaque FGM

Les coordonnées **x** et **y** définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe **z** est perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Elles varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe **z**) soit : $E = E(z)$ et $V = V(z)$.

[Jin et Batra 1996] indiquent que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.7.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^k \quad (\text{I.5})$$

Où **k** est un paramètre matériels et **h** est l'épaisseur de la plaque.

Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao et Wang 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_C - E_m) V(z) \quad (I.6)$$

Où E_m et E_C sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h/2$) et de la surface supérieure ($z = +h/2$) de la plaque FGM. La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.10.

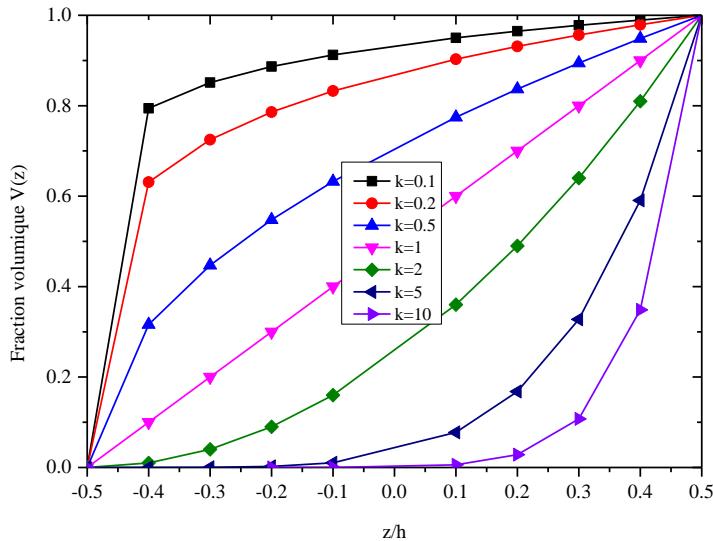


Figure I.10 : variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

I.7.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

[Chi et Chung 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (I.7a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k \text{ Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (I.7b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 + V_1(z)]E_2 \text{ Pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{I.8a})$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \text{ Pour } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{I.8b})$$

La figure I.11 montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.7a) et (I.7b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

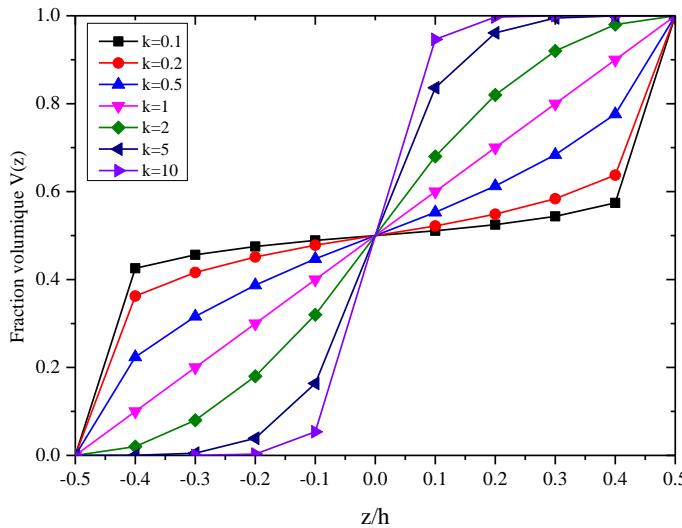


Figure I.11 : variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

I.7.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [Delale et Erdogan 1983].

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{I.10})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la figure I.12.

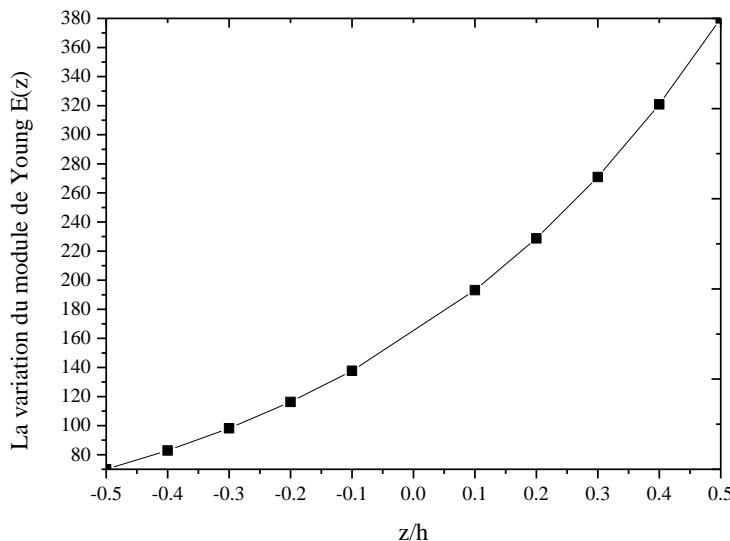


Figure I.12 : variation de la fraction volumique dans une plaque E-FGM

I.8 Définition des matériaux piézoélectrique

L'effet piézoélectrique direct fut découvert en 1880 par les frères Pierre et Jacques Curie. Sur la base de leurs savoirs sur la pyroélectricité et la symétrie cristalline, ils prédirèrent et démontrèrent expérimentalement l'effet piézoélectrique direct. Ils observèrent que certains cristaux polaires, à savoir le quartz et la tourmaline, s'électrifiaient sous l'effet d'une action mécanique. L'année suivante, Lippmann prédit l'existence de l'effet piézoélectrique inverse en se basant sur le principe de calculs thermodynamiques démontrés cette même année par les frères Curie. C'est Hankel qui proposa le nom ‘piézoélectricité’ associé à ces types de matériaux durant la même année (1881).

Le terme piézoélectricité vient du verbe grec ‘piézein’ ($\pi\acute{e}\zeta\epsilon\imath\tau$) qui signifie presser ou appuyer. Il traduit l’interaction entre les systèmes mécanique et électrique. L’effet direct est obtenu quand le matériau est comprimé et qu’il réagit par une production de charges à ses surfaces, récupérable par un appareil électrique. L’effet inverse se produit lorsque le matériau se déforme suite à l’application d’un champ électrique [ARNAU 2008].

1.8.1 Effet piézoélectrique

On distingue les effets Piézoélectriques direct et inverse. L'effet direct est un phénomène qui se traduit par l'apparition d'un champ électrique lorsque le matériau est soumis à une contrainte mécanique. Et l'effet inverse correspond à l'apparition d'une déformation mécanique du matériau lorsqu'on le soumet à un champ électrique, ainsi qu'illustré par la figure (I.13)

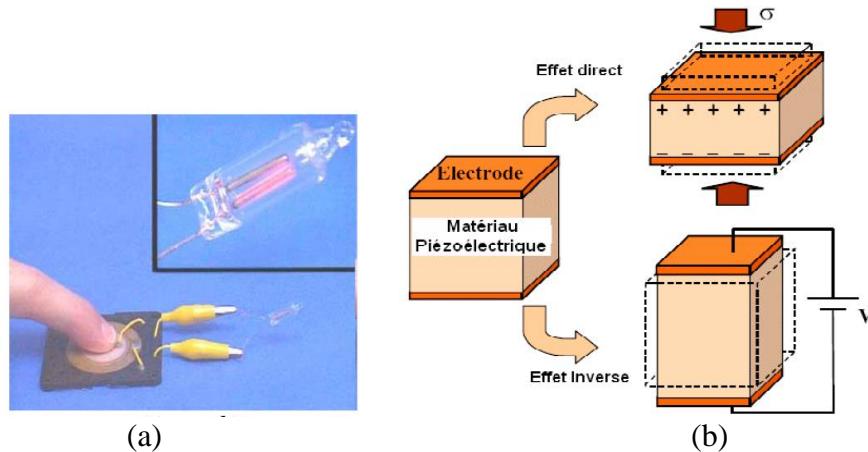


Figure I.13 : Schématisation de l'effet de la Piézoélectricité :a) L'effet Piézoélectrique direct, b) Illustration de l'effet direct et inverse d'un matériau Piézoélectrique. [SADOUNE 2013]

I.8.2 Piézoélectricité au niveau microscopique

Il est légitime de se demander quels sont les matériaux qui ont des propriétés piézoélectriques. Tout d'abord, ces matériaux ne doivent pas être conducteurs, car leur structure microscopique se déforme suivant le champ électrique appliqué. Ils sont diélectriques ou semi-conducteurs.

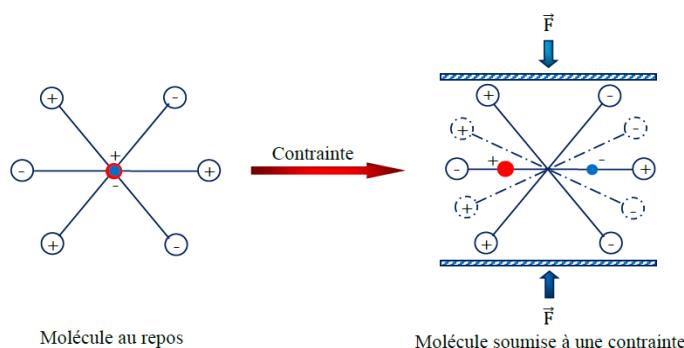


Figure I.14 : Effet piézoélectrique à l'échelle microscopique. [ARNAU 2008]

I.8.3 Lois de comportement de matériau piézoélectrique

De nombreux ouvrages présentent les équations constitutives des matériaux piézoélectriques. Les vecteurs de contraintes $\{\sigma\}$ et de déformations $\{\varepsilon\}$ et les vecteurs de champ électrique $\{E\}$ et de déplacement électrique $\{D\}$ sont reliés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (I.11)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (I.12)$$

Où $[e]$ représente la matrice des constantes piézo-électrique reliant les champs électriques et les contraintes, $[c]$ est la matrice de rigidité élastique mesurée à champ électrique constant et $[h]$ est la matrice des constantes diélectriques obtenues à déformation constante,

I.9 Investigations sur analyse thermoélastique des matériaux FGM

Le comportement thermoélastique des plaques rectangulaires en FG (céramique-métal) a été étudié à l'aide d'un élément fini des plaques rectangulaires iso-paramétriques en quatre nœuds par [Praveen et Reddy 1998] sur la base de la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FOSDT), y compris les effets non linéaires de Von Karman. Cette formulation prend en compte les déformations de cisaillement transversales, l'effet l'inertie de rotation et des rotations modérément grandes de la plaque FGM.

La formulation de Praveen et Reddy pour les plaques rectangulaires en FGMs a été présenté par [Reddy et al. 1999] pour les plaques circulaires et annulaires en FGMs en flexion. Ils ont trouvé des relations exactes entre les solutions de flexion utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre (FOSDT) et la théorie classique de la plaque (CPT).

La formulation adoptée par Praveen et Reddy en 1998 a été étendue par [Reddy 2000] pour étudier le comportement statique des plaques rectangulaires en FGMs en basant sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT).

[Woo et Meguid 2001] ont également présenté une formulation des grandes déformations des plaques et coques minces en FGM sous des charges thermiques et mécaniques en utilisant la théorie classique des plaques.

[Wu 2004] à traiter le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. La théorie de déformation du premier ordre a été utilisée. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement.

[Na et Kim 2006] ont présenté le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambement thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été étudié.

[Shen 2007] Présenter L'analyse du post-flambement des plaques avec des propriétés dépendant de la température. Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre élevé incluant les effets thermiques.

[Bodaghi et Saidi 2010] ont étudié le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en utilisant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont trouvé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre.

[Bouazza et al 2011] ont étudié trois types de charges thermiques pour la température critique des plaques et ont découvert que la théorie des plaques classiques surestime le comportement de flambement des plaques épaisses.

[Tounsi 2013] et son groupe de travail ont développé de nouvelles théories de plaque raffinées pour la réponse de flexion et flambement des plaques FG sandwiches avec quatre inconnues.

[Houari et al 2013] ont présenté une solution analytique pour la flexion thermomécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en utilisant une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique avec un nouveau champ de déplacement en incluant l'effet « stretching ».

[Kiani et Eslami 2010] ont discuté du flambement des poutres en matériaux à gradients fonctionnels sous trois types de charges thermiques à travers l'épaisseur.

Une méthode semi-inverse pour étudier l'instabilité et la vibration des poutres en FGM est réalisée par [Aydogdu 2008].

[Ke et al. 2009] ont présenté le post-flambement d'une poutre fissuré en FGM pour des conditions aux limites articulées–articulées et encastrer-articulées basées sur la théorie des poutres de Timoshenko.

[Ke et al. 2009] ont présenté la vibration libre et le flambement mécanique des poutres fissurés en FGM en utilisant la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour trois types de conditions aux limites. Ils ont constaté que les poutres en FGM avec un plus petit rapport d'élancement et un plus faible rapport de module de Young sont beaucoup plus sensibles à la fissure de chaque côté.

[Ma et Lee 2011] ont discuté du comportement non linéaire des poutres en FGM sous chargement thermique dans le plan au moyen de la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre des poutres. La dérivation des équations est basée sur le concept de surface neutre et la méthode numérique est utilisée pour résoudre les équations couplées non linéaires. Leur étude a conclu que lorsqu'une poutre FGM encastré-encastré est soumise à une charge thermique uniforme, elle suit Le flambement associé à une bifurcation d'équilibre, contrairement aux poutres simplement appuyée. Plus récemment, la trajectoire post-flambement d'une poutre d'Euler-Bernoulli sous l'action d'une charge thermique plane est étudiée par [Anandrao 2010] en utilisant la méthode de l'énergie basée sur la méthode de Ritz.

I.10 Investigations sur analyse thermoélastique des matériaux FGM piézoélectrique

[Kapuria et al. 2004] ont développé une théorie efficace de zigzag couplé pour l'analyse de contrainte électrothermique des poutres hybrides piézoélectriques.

Le contrôle et l'analyse de stabilité d'une poutre composite avec des couches piézoélectriques soumises à des charges de compression périodiques axiales sont rapportés par [Chen et al. 2002] Dans leur étude, en utilisant la théorie des poutres d'Euler et le déplacement-déformation non linéaire, le principe de Hamilton est utilisé pour obtenir l'équation dynamique des poutres intégrées aux couches piézoélectriques.

[Bian et al. 2006] ont présenté une solution exacte basée sur la formulation de l'espace d'état pour étudier les poutres à gradation fonctionnelle intégrés aux actionneurs et capteurs piézoélectriques.

[Alibeigloo 2010] a rapporté une solution analytique pour l'analyse thermoélastique des poutres FGM intégrées aux couches piézoélectriques. Avec les conditions aux limites simplement appuyées, il a utilisé la méthode de l'espace d'état en conjonction avec la série de Fourier dans la direction longitudinale pour obtenir une solution analytique.

Une méthode analytique pour le contrôle de la flexion des poutres FGM contenant deux couches piézoélectriques est rapportée par [Gharib et al. 2008].

La vibration des poutres en matériau à gradient fonctionnel post-flambé thermiquement avec des couches piézoélectriques liées en surface soumises à des charges thermiques et électriques est réalisée par [Li et al. 2009].

L'analyse du flambement et du post-flambement des poutres en FGM avec des conditions aux limites générales est rapportée par [Kiani et al. 2011] et. [Liew 2003] sur la base des théories d'Euler et de Timoshenko.

[Shen 2001] a présenté le post-flambement thermique des plaques laminées déformé par cisaillement avec des actionneurs piézoélectriques sous chargement de température uniforme en utilisant une technique de perturbation.

Une méthode théorique pour l'analyse de la réponse de flambement et de post-flambement des stratifiés composites et des plaques avec des piézo-actionneurs et des capteurs est présenté par [Varelis et al. 2004].

[Liew et al. 2003] ont présenté un post-flambement des plaques FGM piézoélectriques soumises à un chargement thermo-électro-mécanique. Ils ont utilisé un processus d'itération semi-analytique pour déterminer la réponse post-flambement de la plaque.

Le post-flambement des plaques FGM avec des actionneurs piézoélectriques sous chargements thermo-électromécaniques est étudié par [Shen 2005], en utilisant une technique de perturbation singulière.

[Shen 2001] présente le post-flambement mécanique et thermique des coques cylindriques laminées avec des actionneurs piézoélectriques sous plusieurs types de chargement, telles que la pression externe, la compression axiale et l'élévation uniforme de la

température. Il a utilisé une technique de perturbation singulière pour déterminer les charges de flambement et les trajectoires d'équilibre post- flambement.

[Ganesan et Kadoli 2003] ont étudié le flambement et l'analyse dynamique des coques cylindriques composites piézo-thermiques en utilisant une méthode semi-analytique par éléments finis.

L'optimisation du flambement des structures stratifiées composites lier avec des actionneurs piézoélectriques est étudiée par [Correia et al.2003].

[Shen 2002] a étudié l'analyse post-caudale des coques cylindriques hybrides en FGM chargées axialement.

[Mirzavand et Eslami 2007] ont présenté les solutions de forme fermée pour la charge critique de température de flambement des coques cylindriques en FGM avec des actionneurs piézoélectriques sous l'action combinée de plusieurs types de charges thermiques et de tension constante d'actionneur. Ils ont appliqué la méthode de Ritz aux équations de stabilité linéaire pour trouver les solutions de forme fermée pour les charges critiques de flambage.

Sofiyev a étudié le flambement des coques tronconiques en FGM sous divers types de chargement mécaniques, notamment la pression hydrostatique, la pression externe et la tension axiale combinée à la pression hydrostatique [Sofiyev et al.2009] et [Sofiyev 2010]. En appliquant la méthode de Galerkin aux équations de stabilité et de compatibilité, on obtient la charge critique de flambement de la coque.

Récemment, [Sofiyev 2011] a présenté l'analyse de flambement thermique et mécanique de coques circulaires en FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres. Les charges critiques de flambement avec et sans fondation élastique sont obtenues en utilisant la méthode de Galerkin.

[Bich et al. 2012] ont étudié l'instabilité des panneaux coniques en FGM sur la base de la théorie classique sous compression axiale, pression externe et combinaison de ces éléments.

Les méthodes de superposition et de Galerkin sont appliquées aux équations de stabilité et de compatibilité de type Donnell non linéaires modifiées et les charges axiales critiques supérieures et inférieures sont obtenues sont illustrés par [Sofiyev2011].

CHPITRE II

Analyse du flambement thermique
des poutres FGM piézoélectriques

II.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, l'utilisation des matériaux FGM liés à des actionneurs piézoélectriques dans différentes applications d'ingénierie a largement augmenté. Du fait des nombreux avantages qu'offrent les composites par rapport aux matériaux conventionnels.

Les FGM possèdent un certain nombre d'avantages excédant que les composites stratifiés, y compris une réduction potentielle de contraintes membranaires et transversales à travers l'épaisseur, tendance d'efforts, absente ou sévèrement réduite de décollement, un effort résiduel amélioré, propriétés thermiques augmentées, une dureté plus élevée de rupture, et réduit facteurs d'intensité d'effort.

L'étude de comportement de flambement des poutres fonctionnellement graduées FGM liés à des actionneurs piézoélectriques soumis à des différents types de chargement est un sujet très important et d'actualité. Récemment, de nombreuses études ont été établies. Par exemples, [Yang 1998] a analysé le comportement tridimensionnel des poutres électro-élastiques. [Wang et Queck 2000] ont analysé le problème de vibrations libres d'une poutre intégré avec une ou plusieurs couches piézoélectriques par la théorie classique des poutres. [Shi et Chen 2004] ont étudié le problème d'une poutre en porte à faux piézoélectrique fonctionnellement gradué soumis à différentes charges. [Lee 2005] a mis au point une méthode par éléments finis pour étudier la réponse d'une poutre en matériaux fonctionnellement graduées soumis à l'action combinée de charges thermiques et électriques. [Kapuria et al. 2006] ont présenté une formulation unifiée pour couplage efficace en zigzag, troisième ordre, des modèles cohérents du troisième ordre et du premier ordre pour des poutres de matériaux hybrides piézoélectriques à couches fonctionnellement graduées sous une charge thermo-électromécanique. Les états électriques des circuits ouverts et fermés sont examinés et l'effet des conditions aux limites électriques sur le mouvement des vibrations libre est étudié. Les vibrations d'une poutre de Timoshenko avec des couches piézoélectriques liées en surface dans les deux états de pré / post-flambement sont étudiées par [Li et al. 2009]. L'analyse exacte pour deux types de cylindres creux piézoélectriques à des propriétés graduées est présentée par [Zhang et Shi 2010]. [Alibegloo 2010] a présenté une solution analytique pour l'analyse de la thermo-élasticité de poutre en matériaux fonctionnellement gradués intégrés à des couches piézoélectriques. [Dai et Rao 2011] ont étudié l'interaction électromagnétique de la sphère creuse piézoélectrique. [Wang et al 2011] ont présenté les comportements de vibration radiale de transducteurs piézoélectriques composites cylindriques intégrés à une couche élastique fonctionnelle graduée. [Kiani et al. 2011] ont étudié le flambage thermique de poutre en matériaux fonctionnellement

gradué avec des couches piézoélectriques liées en surface, qui sont soumises à la fois à une charge thermique et à une tension constante. La théorie de la poutre de Timoshenko et les relations non linéaires de déplacement- déformation sont utilisées pour obtenir les équations gouvernant de la poutre FGM piézoélectrique.

Récemment, [Fu et al 2012] ont étudié l'analyse non linéaire du flambement de la vibration libre et de la stabilité dynamique des poutres piézoélectriques fonctionnellement graduée dans un environnement thermique. [Arefi et al 2012] ont présenté une solution analytique d'un cylindre piézoélectrique fonctionnellement gradué (FGP) dans le champ magnétique et sous chargement mécaniques, thermiques et électriques. [Arefi et Rahimi 2012] ont étudié le comportement non linéaire des plaques annulaires fonctionnellement graduées avec des couches piézoélectriques en tant que capteur et actionneur sous pression normale.

[Saadatfar et Aghaie-Khafri 2015] ont étudié le comportement électro-magnéto-thermo-élastique d'un cylindre creux long fonctionnellement gradué tournant avec des couches piézoélectriques fonctionnellement gradué (FGPM).

L'analyse de vibration libre des plaques circulaires pleines et annulaires fonctionnellement graduées avec deux couches piézoélectriques en haut présenté par [Arefi 2015]. Le fond des plaques circulaires soumis à un champ électrique basé sur la théorie classique des plaques pour la description de tous les composants de déformation basés sur une distribution symétrique. Une formulation unifiée de méthodes de couche finies (FLMs), basée sur le théorème de variation mixte de Reissner est développée par [Wu et Ding 2015] pour les plaques tridimensionnelles (3D) en matériau fonctionnellement gradué (FGPM) piézoélectrique couplé électro-élastiquement avec des conditions de surface en circuit ouvert et en circuit fermé et sous chargement électromécanique.

[Ghasemabadian et Kadkhodayan 2016] ont étudié le comportement de flambement de plaques rectangulaires piézoélectriques fonctionnellement gradué (FGP) dans des conditions de circuit ouvert et fermé basées sur la théorie de la plaque de déformation de cisaillement d'ordre supérieur.

[Shegokar 2016] ont présenté l'analyse de l'instabilité dynamique de poutres piézoélectriques fonctionnellement gradué (FG) non amortis, supportés élastiquement, soumis à des chargements thermomécaniques périodiques statiques et dynamiques dans le plan avec des propriétés du système incertaine. [Xiong et Tian 2017] ont présenté les réponses thermo-

piézo-élastiques transitoires d'une plaque piézoélectrique fonctionnellement graduée sous choc thermique.

Dans ce chapitre nous avons analysé le flambement thermique d'une poutre en matériaux fonctionnellement gradué (FGM) avec des couches piézoélectriques liées en surface, qui sont soumises à la fois à une charge thermique et à une tension constante.

La nouveauté du présent travail est d'obtenir des solutions de forme fermée pour les charges de flambement basées sur la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre. Les propriétés de la poutre en matériau fonctionnellement gradué FGM sont supposées variée de manière continue à travers l'épaisseur de la poutre.

Les conditions aux limites sont supposées être simplement appuyées. Les équations de stabilité correspondantes sont établies et donnent lieu aux relations de flambement.

Les charges de flambage thermique sont obtenues sous forme de solution fermée pour chaque type de charge. Les résultats sont comparés aux résultats de travaux antérieurs dans la littérature. Les effets de la tension de l'actionneur appliquée, de la géométrie de la poutre et du cisaillement transversal sur les charges de flambement sont discutés.

II.2 Formulation théorique

II.2.1 Poutre fonctionnellement graduée piézoélectrique (P-FGM)

Nous considérons une poutre piézoélectrique fonctionnellement graduée ayant une longueur L , une épaisseur h , définie dans son système d'axes (x, y, z), est représentée sur la figure II.1.

Les couches supérieure et inférieure de la partie FGM sont attachées avec une couche piézoélectrique liée en surface ayant une épaisseur h_a , l'épaisseur de La poutre de matériau fonctionnellement graduée ayant l'épaisseur h et l'épaisseur de La poutre de matériau fonctionnellement graduée piézoélectrique totale est supposée être H .

Il est supposé qu'il existe une liaison parfaite entre le matériau fonctionnellement gradué et les couches piézoélectriques liées à la surface, de sorte qu'aucun glissement ne peut se produire à l'interface. Et Il est supposé que la contrainte subie par le matériau fonctionnellement gradué (FGM) est égale à la contrainte subie par le matériau piézoélectrique.

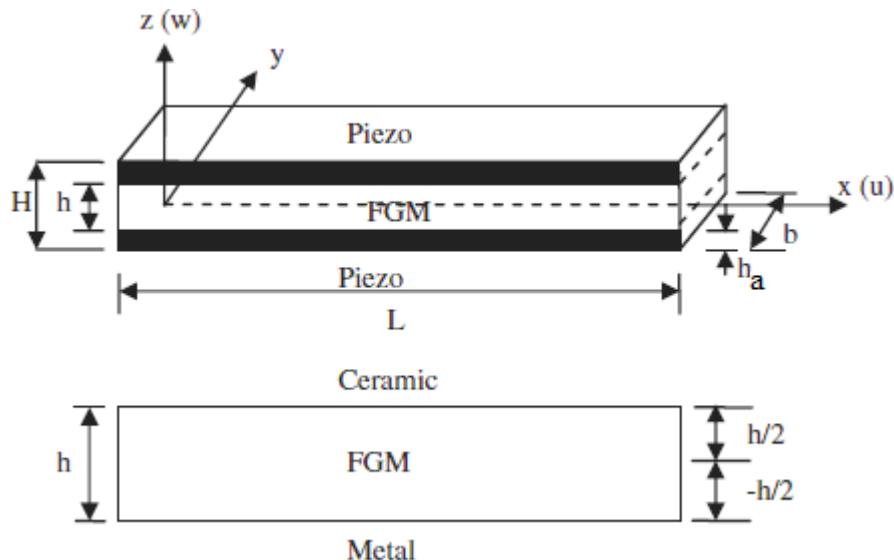


Figure II. 1 : Système des coordonnées et la géométrie de la poutre FGM piézoélectrique.

La surface inférieure de la poutre de matériau à gradation fonctionnelle est une couche métallique et la surface supérieure est une couche de céramique. La région entre les deux surfaces comprend un matériau avec différents rapports de mélange de la céramique et du métal et peut être exprimé comme dans l'équation suivante :

$$P_f = (1 - V(z))P_m + V(z)P_c \quad (\text{II.1})$$

Où P_f est la propriété matérielle effective du matériau à gradation fonctionnelle, P_m et P_c sont les propriétés du métal et de la céramique, respectivement. $V(z)$ est la fraction volumique du constituant métallique de matériau fonctionnellement gradué (FGM), où z est la coordonnée d'épaisseur ($-h/2 \leq z \leq h/2$). La fraction de volume est supposée suivre une fonction de loi de puissance comme suit :

$$V(z) = (z/h + 1/2)^k \quad (\text{II.2})$$

Où k ($0 \leq k \leq \infty$) est l'indice de fraction volumique et représente le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur de la poutre, et peuvent être modifiés pour obtenir la répartition optimale des matériaux constitutifs. Les propriétés matérielles effectives d'une poutre en FGM peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + (E_c - E_m)V_f(z) \\ \alpha(z) &= \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m)V_f(z) \\ \nu(z) &= \nu_0 \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

II.2.2 Cinématique et équations constitutives

Les composantes de champ de déplacement d'un point arbitraire à l'intérieur de la poutre le long des directions x et z basées sur la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT) est proposé par [Reddy 1984] :

$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= u + z\phi(x) - c_1 z^3 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ u_3(x, z) &= w(x) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où

$$c_1 = 4/3h^2,$$

$u, w, \phi(x)$ et $\partial w / \partial x$ sont le déplacement axial dans le plan médian, le déplacement transversal, la rotation de la normale vers le plan médian le long de l'axe des y et la pente le long de l'axe des x, respectivement.

Ensuite, les relations déformation-déplacement de la théorie des poutres de Reddy peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi}{\partial x} - c_1 z^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) - 3z^2 c_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Où ε_{xx} et γ_{xz} représentent les déformations normale et de distorsion.

Lorsque l'effet thermique est pris en compte, les équations constitutives des contraintes pour la couche FGM peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(z)[\varepsilon_x - \alpha(z)\Delta T] \\ \sigma_{xz} &= G(z)\gamma_{xz} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}\gamma_{xz} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Comme [Kiani et al 2011], en ignorant les effets thermiques dans les couches piézoélectriques, les équations constitutives des contraintes peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_x^a &= E_a \left[\varepsilon_x - d_{31} E_z \right] \\ \sigma_{xz}^a &= G_a \gamma_{xz} = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)} \gamma_{xz}\end{aligned}\quad (\text{II.7})$$

Où :

$$E_z = \frac{V_0}{h_a} \quad (\text{II.8})$$

Avec V_0 est la tension appliquée à travers l'épaisseur, E_z est le champ électrique généré uniquement dans la direction z. ν et ν_a sont les coefficients de Poisson pour la couche de matériau fonctionnellement graduée et les couches piézoélectriques.

Les résultats des efforts et des moments sont exprimés comme suit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \\ P_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{bmatrix} dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \sigma_x^a \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \sigma_x^a \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^3 \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.9a})$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ R_x \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \sigma_{xz}^a \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \sigma_{xz}^a \begin{bmatrix} 1 \\ z^2 \end{bmatrix} dz \quad (\text{II.9b})$$

La substitution des équations. (6-8) et (5) dans les équations. (9a) et (9b) donnent les relations constitutives suivantes de la poutre :

$$\begin{aligned}N_x &= \left(E_1 + 2E_a h_a \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + E_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - c_1 E_4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x^T - 2V_0 E_a d_{31} \\ M_x &= E_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(E_3 + H E_a \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - c_1 \left(E_5 + H_1 E_a \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_x^T \\ P_x &= E_4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(E_5 + H_1 E_a \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} - c_1 \left(E_7 + H_2 E_a \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - P_x^T \\ Q_x &= \left(\frac{E_1}{2(1+\nu)} + \frac{h_a E_a}{2(1+\nu_a)} \right) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 3c_1 \left(\frac{E_3}{2(1+\nu)} + \frac{H E_a}{2(1+\nu_a)} \right) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ R_x &= \left(\frac{E_3}{2(1+\nu)} + \frac{H E_a}{2(1+\nu_a)} \right) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 3c_1 \left(\frac{E_5}{2(1+\nu)} + \frac{H_1 E_a}{2(1+\nu_a)} \right) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (\text{II.10})$$

Où E_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) sont la rigidité ; η_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) sont des coefficients liés à la rigidité. N_x^T, M_x^T et P_x^T sont les forces, les moments et les forces d'ordre supérieur causés par effet de température sont définis par :

$$\begin{aligned} H &= \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} (z^2) dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} (z^2) dz = H = \frac{1}{2} h^2 h_a + h h_a^2 + \frac{2}{3} h_a^3 \\ H_1 &= \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} (z^4) dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} (z^4) dz = \frac{1}{8} h^4 h_a + \frac{1}{2} h^3 h_a^2 + h^2 h_a^3 + h h_a^4 + \frac{2}{5} h_a^5 \\ H_2 &= \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} (z^6) dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} (z^6) dz = \frac{1}{32} h^6 h_a + \frac{3}{16} h^5 h_a^2 + \frac{5}{8} h^4 h_a^3 + \frac{5}{4} h^3 h_a^4 + \frac{3}{2} h^2 h_a^5 + h h_a^6 + \frac{2}{7} h_a^7 \end{aligned} \quad (\text{II.11a})$$

$$(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7) = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)(1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) dz \quad (\text{II.11b})$$

$$(N_x^T, M_x^T, P_x^T) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^3) E(z) \alpha(z) T(x, y, z) dz \quad (\text{II.11c})$$

II.2.3 Équations gouvernantes

L'énergie de déformation virtuelle totale U est définie comme étant la somme de l'énergie de déformation virtuelle totale pour la couche piézoélectrique U_a et de l'énergie de déformation virtuelle pour la couche de matériau fonctionnellement graduée U_f . L'énergie de déformation virtuelle totale de poutre peut être écrite comme suit :

$$U = U_a + U_f \quad (\text{II.12})$$

Avec

$$U_a = \delta \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x^a \varepsilon_a + \sigma_{xz}^a \gamma_{xz} - E_z D_z) d\Omega \right] \text{ for } Z \in \left[-\frac{h}{2} - h_a, -\frac{h}{2} \right] \cup \left[\frac{h}{2}, \frac{h}{2} + h_a \right] \quad (\text{II.13a})$$

$$U_f = \delta \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x (\varepsilon_x - \alpha(z) \Delta T) + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) d\Omega \right] \text{ for } z \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \right] \quad (\text{II.13b})$$

Où Ω désigne le domaine de la poutre fonctionnellement graduée. En utilisant le principe de Hamilton, et recueillir les coefficients de $\delta u, \delta v, \delta \phi$, on peut obtenir les équations gouvernantes suivantes :

$$\delta u : \frac{dN_x}{dx} = 0 \quad (\text{II.14a})$$

$$\delta \phi : \frac{dM_x}{dx} - Q_x + 3c_1 R_x - c_1 \frac{dP_x}{dx} = 0 \quad (\text{II.14b})$$

$$\delta w : \frac{dQ_x}{dx} - 3c_1 \frac{dR_x}{dx} + c_1 \frac{d^2 P_x}{dx^2} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (\text{II.14c})$$

En substituant l'équation. (10) dans les équations. (14a) - (14c), les équations gouvernantes deviennent comme suit :

$$(E_1 + 2E_a h_a) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + E_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - c_1 E_4 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (\text{II.15a})$$

$$(E_2 - c_1 E_4) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + [-\eta_1 + \eta_2] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + [-2\eta_1 + \eta_2 + \eta] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \eta_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) = 0 \quad (\text{II.15b})$$

$$c_1 E_4 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \eta_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \eta_2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) - \eta_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{II.15c})$$

Où

$$\begin{aligned} \eta &= (E_3 + H E_a) \\ \eta_1 &= c_1 (E_5 + H_1 E_a) \\ \eta_2 &= c_1^2 (E_7 + H_2 E_a) \\ \eta_3 &= 3c_1 G_3 + 3H_3 G_a c_1 - 2G_a h_a - G_1 + 3c_1 ((-3G_5 - 3H_1 G_a)c_1 + G_3 + HG_a) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

II.2.4 Solution de flambement thermique

Les équations ci-dessus sont résolues analytiquement pour les problèmes de flambement. La procédure de solution Navier est utilisée pour déterminer les solutions analytiques d'une poutre simplement appuyée. La solution est supposée être de la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_s \cos \lambda x \\ w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_s \sin \lambda x \\ \phi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_s \sin \lambda x \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Avec ;

U_s, W_s, X_s Sont des paramètres arbitraires à déterminer et $\lambda = m\pi/L$.

En substituant l'équation (17) aux équations (15a) - (15c) et en mettant le déterminant de la matrice de coefficients des équations obtenues à zéro, nous trouvons les températures de flambement.

$$\begin{aligned} C_{11} &= -(E_1 + 2E_a h_a) \lambda^2; & C_{12} &= c_1 E_4 \lambda^3; & C_{13} &= (E_2 - c_1 E_4) \lambda^2 \\ C_{21} &= (-E_2 + c_1 E_4) \lambda^2 = C_{13}; & C_{22} &= (\eta_1 - \eta_2) \lambda^3 + \eta_3 \lambda; & C_{23} &= [2\eta_1 - \eta_2 - \eta] \lambda^2 + \eta_3 \\ C_{31} &= c_1 E_4 \lambda^3 = C_{12}; & C_{32} &= -\eta_2 \lambda^4 + (\eta_3 - N_x) \lambda^2; & C_{33} &= (\eta_1 - \eta_2) \lambda^3 + \eta_3 \lambda \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

II.2.4.1 Flambement des poutres piézoélectriques fonctionnelles graduées sous élévation uniforme de la température.

La température initiale de la poutre est supposée être T_i . La température est augmentée uniformément jusqu'à une valeur finale T_f dans lequel la poutre se déforme. Le changement de température est [Javaheri et Eslami 2002], [Bouazza et al 2010] :

$$\Delta T = T_f - T_i \quad (\text{II.19})$$

II.2.4.2 Flambement des poutres piézoélectriques fonctionnelles graduées sous élévation linéaire de la température.

Le champ de température sous l'augmentation linéaire de la température à travers l'épaisseur est supposé comme suit [Javaheri et Eslami 2002], [Bouazza et al 2010] :

$$T(z) = \frac{\Delta T}{h} (z + h/2) + T_m \quad (\text{II.20})$$

Où z est la variable dans la direction de l'épaisseur mesurée à partir du plan moyen de la poutre.

T_m est la température du métal et ΔT est la différence de température entre la surface de la céramique et la surface métallique c'est-à-dire :

$$\Delta T = T_c - T_m.$$

II.2.4.3 Flambement des poutres piézoélectriques fonctionnelles graduées sous changement de température non linéaire à travers l'épaisseur

Les matériaux fonctionnellement gradués sont conçus pour résister à une forte élévation de température, de sorte que le changement de température sera très différent des deux côtés des structures de FGM. La distribution de la température à travers l'épaisseur est régie par l'équation de conduction thermique en régime permanent et les conditions aux limites suivantes [Praveen et Reddy 1998], [Javaheri et Eslami 2002], [Kiani et al 2011] :

$$\frac{d}{dz} \left(K(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 , \quad T(h/2) = T_c , \quad T(-h/2) = T_m \quad (\text{II.21})$$

Où $K(z)$ est le coefficient de conduction thermique. Nous supposons que le coefficient de conductivité thermique est également une fonction de la forme de puissance comme suit :

$$K(z) = K_{cm} (z/h + 1/2)^k + K_m \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$$K_{cm} = K_c - K_m \quad (\text{II.23})$$

La solution d'équation (21) est obtenue au moyen de séries polynomiales. En prenant les sept premiers termes de la série. La solution pour la distribution de température à travers l'épaisseur de la plaque devient [Praveen et Reddy 1998], [Javaheri et Eslami 2002], [Kiani et al 2011] :

$$T(z) = T_m + \frac{\Delta T}{C} \eta \quad (\text{II.24})$$

Où

$$\eta = (z + 1/2) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-(z + 1/2)^k K_{cm}/K_m)^n}{nk + 1} \quad (\text{II.25})$$

$$C = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-K_{cm}/K_m)^n}{nk + 1} \quad (\text{II.26})$$

Où $\Delta T = T_c - T_m$ est définie comme la différence de température entre les surfaces riches en céramique et les surfaces riches en métal de la poutre.

II.3 Résultats et discussion

Dans cette section, divers exemples numériques sont présentés et discutés pour vérifier la précision et l'efficacité de la présente théorie dans la prédiction de la charge critique de flambement thermique des poutres en FGM piézoélectriques soumises à l'action combinée de la charge thermique et de la tension appliquée constante de l'actionneur. Les résultats obtenus par la présente théorie sont comparés à ceux de la littérature utilisant la théorie de poutre d'Euler-Bernoulli (EBT), la théorie de poutre de Timoshenko (TBT). Les propriétés des matériaux utilisés sont les suivantes :

Matériaux 1 : AL/Al₂O₃ (FGM) : le module d'Young, la conductivité et le coefficient de dilatation thermique de l'alumine sont : E_c = 380 GPa, K_c= 10.4 W/mK, α_c = 7.4x10⁻⁶ (1/°C), et pour l'aluminium : E_m=70 GPa, K_m=204 W/mK, α_m= 23x10⁻⁶ (1/°C), respectivement. Le coefficient de Poisson est choisi ν= 0.3.

Matériaux 2 : PZT-5A pour (couches piézoélectriques) : Les propriétés PZT-5A sont : E_a=63GPa, ν_a=0.3 et d₃₁ = 2.549 10⁻¹⁰ m/V.

II.3.1 Études comparatives

La première comparaison est effectuée pour une poutre en FGM simplement appuyée, sans couches piézoélectriques avec diverses variations des fractions volumiques des constituants (k = 0, 0.5, 1, 2,5 et 10).

Les valeurs du rapport géométrique L/h sont considérées respectivement 10, 15, 20, 30, 40,50 et 75. La poutre est constituée d'un mélange d'aluminium (Al) et d'alumine (Al₂O₃), et soumis soit à des cas linéaires soit non linéaires de distribution de température à travers l'épaisseur comme il est montré dans les tableaux (II.1 et II.2), respectivement.

Les comparaisons des charges thermiques de flambement critiques obtenues par la présente théorie avec celles données par [Kiani et al 2011] basé sur théories d'EBT et TBT. On peut voir que les résultats de la présente théorie sont en excellent accord avec ceux obtenus par la théorie TBT pour toutes les valeurs d'indice de loi de puissance (k) et de rapport longueur / hauteur (L/h).

De plus, comme la théorie EBT néglige les effets de déformation par cisaillement, il surestime la température critique de flambement des poutres en FGM profonds (voir les tableaux (II.1 et II.2))

Tableau II.1: Comparaison de la différence de température critique (en [K]) pour les poutres en FGM simplement appuyée dans le cas d'une distribution de température linéaire à travers l'épaisseur, (L = 1m).

L/h	Theories	k= 0	k = 0.5	k = 1	k = 2	k = 5	k = 10
10	EBT ^a	2212.88	1249.79	959.01	797.03	804.31	851.48
	TBT ^a	2156.55	1221.29	938.27	779.55	783.16	826.30
	Présent	2157,286	1222,072	938,540	778,756	779,354	821,873
15	EBT ^a	977.95	549.90	421.02	349.34	352.69	373.51
	TBT ^a	966.66	544.20	416.87	345.85	348.45	368.46
	Présent	966,810	544,361	416,925	345,688	347,674	367,550
20	EBT ^a	545.72	304.95	232.72	192.66	195.62	206.22
	TBT ^a	542.13	303.13	231.40	191.54	193.27	204.62
	Présent	542.179	303.183	231.419	191.493	193.026	204.325
30	EBT ^a	236.99	129.97	98.22	80.73	81.72	86.73
	TBT ^a	236.28	129.61	97.96	80.51	81.45	86.41
	Présent	236,285	129,625	97,964	80,504	81,401	86,356
40	EBT ^a	128.93	68.73	51.14	41.56	42.20	44.91
	TBT ^a	128.70	68.62	51.06	41.49	42.12	44.81
	Présent	128.708	68.623	51.065	41.490	42.100	44.791
50	EBT ^a	78.91	40.39	29.36	23.43	23.91	25.55
	TBT ^a	78.82	40.34	29.32	23.40	23.88	25.51
	Présent	78.824	40.343	29.325	23.401	23.869	25.504
75	EBT ^a	29.51	12.39	7.84	5.52	5.84	6.43
	TBT ^a	29.50	12.38	7.83	5.52	5.84	6.43
	Présent	29.500	12.384	7.832	5.518	5.837	6.425

^a [Kiani et al 2011].

Tableau II.2 : Comparaison de la différence de température critique (en [K]) pour les poutres en FGM simplement appuyée dans le cas d'une distribution de température non linéaire à travers l'épaisseur, (L = 1m).

L/h	Theories	k= 0	k = 0.5	k = 1	k = 2	k = 5	k = 10
10	EBT ^a	2212.88	1647.78	1331.19	1093.12	1005.90	984.13
	TBT ^a	2156.55	1610.20	1302.40	1069.15	979.45	955.03
	Présent	2157.286	1611.238	1302.780	1068.062	974.690	949.913
15	EBT ^a	977.95	725.02	584.41	479.12	441.09	431.70
	TBT ^a	966.66	717.50	578.65	474.33	435.79	425.86
	Présent	966.810	717.712	578.730	474.110	434.814	424.811
20	EBT ^a	545.72	402.05	323.04	264.23	243.40	238.35
	TBT ^a	542.13	399.66	321.21	262.70	241.72	236.49
	Présent	542.179	399.731	321.231	262.633	241.405	236.157
30	EBT ^a	236.99	171.36	136.34	110.73	102.20	100.25
	TBT ^a	236.28	170.89	135.98	110.43	101.86	99.88
	Présent	236.285	170.904	135.983	110.412	101.803	99.809
40	EBT ^a	128.93	90.62	71.00	57.00	52.77	51.90
	TBT ^a	128.70	90.47	70.88	56.91	52.67	51.79
	Présent	128.708	90.476	70.883	56.903	52.652	51.770
50	EBT ^a	78.91	53.25	40.75	32.13	29.90	29.53
	TBT ^a	78.82	53.20	40.70	32.10	29.86	29.49
	Présent	78.824	53.191	40.705	32.095	29.851	29.478
75	EBT ^a	29.51	16.34	10.88	7.58	7.31	7.44
	TBT ^a	29.50	16.33	10.87	7.57	7.30	7.43
	Présent	29.500	16.328	10.871	7.568	7.300	7.426

^a [Kiani et al 2011].

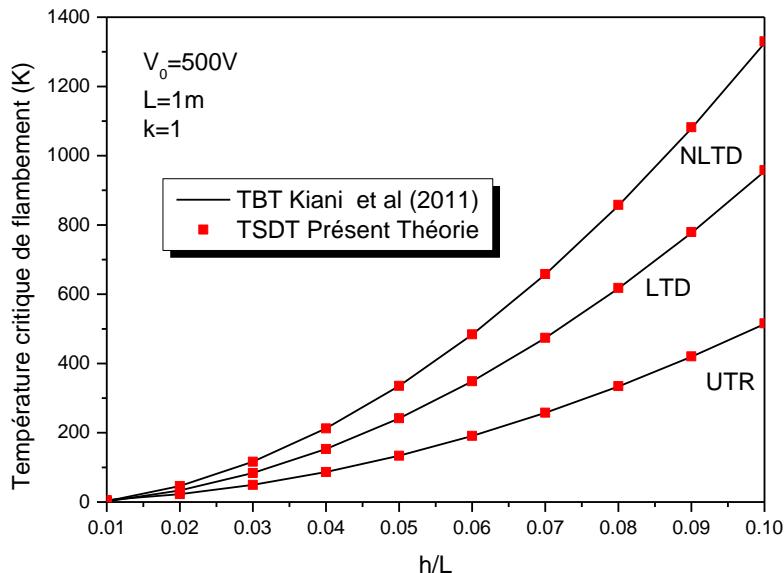


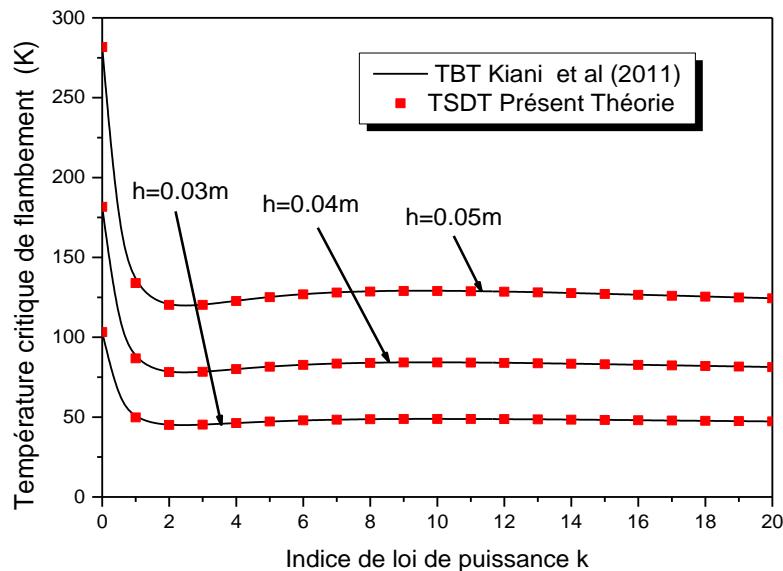
Figure II.2 : Comparaison de la différence de température critique de flambement d'une poutre fonctionnellement graduée piézoélectrique avec différentes valeurs de rapports (h / L).

Toujours dans le contexte, la comparaison suivante est effectuée pour des poutres simplement appuyées soumises à trois cas de chargement thermique. La poutre FGM piézoélectrique est composée de FGM intégrées à des couches piézoélectriques liées à la surface. La comparaison avec la variation linéaire de fraction volumique des constituants ($k=1$), quand la tension appliquée est ($V_0=500$ V).

Les poutres ont subi une augmentation uniforme de la température (UTR), des distributions linéaires de température (LTD) et des distributions de température non linéaires à travers l'épaisseur (NLTD). Pour que la température linéaire et non linéaire augmente à travers l'épaisseur, la température augmente de 5 ° C dans la surface riche en métal de la plaque (i.e. $T_m=5^{\circ}\text{C}$).

La température critique de flambement de la poutre simplement appuyée pour différentes valeurs de rapport (h/L) est indiquée sur la figure II.2. On peut voir que la charge critique de flambement de la présente théorie est presque identique à celle rapportée par [Kiani et al 2011] basée sur la théorie TBT. La dernière comparaison est effectuée pour des poutres FGM piézoélectriques ayant des épaisseurs différentes de matériaux à graduation fonctionnelle soumis à une élévation de température uniforme.

Les résultats de la théorie actuelle sont comparés à ceux de [Kiani et al 2011] basés sur la théorie TBT, la longueur des poutres FGM piézoélectriques est estimée à 1 m. La température critique de flambement des poutres FGM piézoélectriques pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance (k) lorsque la tension d'application est $V_0 = 200$ V. Les résultats sont présentés dans la figure II.3. Pour toutes les épaisseurs de poutres FGM et toutes les valeurs d'indice de loi de puissance k , un accord étroit entre les résultats peut être observé.



FigureII.3 : Comparaison de la différence de température critique de flambement d'une poutre piézoélectrique fonctionnellement graduée, avec différentes valeurs d'indice de loi de puissance et d'épaisseur de P-FGM.

II.3.2 Études paramétriques

Des études de paramètres sont effectuées pour étudier les effets de la tension de l'actionneur appliquée, de la géométrie de la poutre et de l'indice de loi de puissance de la poutre FGM sur la différence critique de température de flambement.

Premièrement, le tableau II.3 représente le changement de température critique par rapport à l'indice de fraction volumique k et à l'application de la tension V_0 ; sous une élévation de température uniforme, changement de température linéaire et non- linéaire à travers l'épaisseur, dans le cas où la longueur du matériau piézoélectrique à graduation fonctionnelle est égale à 1m, l'épaisseur de la poutre en matériau à graduation fonctionnelle (h) est supposé égale à 0,01m et pour cinq valeurs de la tension appliquée $V_0 = 0 \pm 200V \pm 500$ V. Ici, $V_0 = 0V$ indique une condition de mise à la terre.

Les résultats montrent que, pour ce type de couche piézoélectrique, la température de flambement critique diminue avec l'augmentation de la tension appliquée.

Les changements sont cependant minimes. Il convient de mentionner que l'augmentation ou la diminution de la température critique en appliquant une tension par rapport à la condition de mise à la terre dépend à la fois du signe de la tension appliquée et du signe de la constante piézoélectrique.

Pour les couches piézoélectriques utilisées dans cette étude, la constante piézoélectrique d_{31} est positive, et on peut voir que la température de flambement critique diminue en augmentant la tension.

De plus, les résultats montrent que la température critique sous élévation de température non linéaire est supérieure à celle sous élévation de température linéaire, qui est supérieure à celle sous élévation de température uniforme.

Tableau II. 3 : Comparaison de la différence critique de température de flambement pour une poutre piézoélectrique à graduation fonctionnelle simplement appuyée soumise à différentes charges thermiques ($L = 0,25$ m, $h = 0,01$ m).

$V_0(V)$	Temperature distribution	$k= 0$	$k= 0.5$	$k= 1$	$k= 2$	$k= 3$	$k= 5$
500	UTR	197.866	118.879	102.513	96.498	98.460	103.824
	LTD	385.732	227.824	182.883	161.068	161.197	170.104
	N LTD	385.732	300.374	253.8589	220.904	213.618	212.739
200	UTR	198.207	119.177	102.832	96.860	98.855	104.265
	LTD	386.414	228.421	183.480	161.704	161.878	170.864
	N LTD	386.414	301.161	254.687	221.777	214.521	213.688
0	UTR	198.435	119.376	103.044	97.101	99.119	104.559
	LTD	386.870	228.819	183.878	162.129	162.333	171.370
	N LTD	386.870	301.686	255.240	222.359	215.124	214.321
-200	UTR	198.662	119.575	103.256	97.342	99.382	104.853
	LTD	387.325	229.217	184.276	162.553	162.788	171.876
	N LTD	387.325	302.211	255.792	222.941	215.726	214.954
-500	UTR	199.004	119.874	103.574	97.704	99.778	105.294
	LTD	388.008	229.814	184.873	163.189	163.469	172.635
	N LTD	388.008	302.998	256.620	223.814	216.630	215.904
Sans couches du piézoélectrique	UTR	177.104	100.393	82.331	72.972	72.584	75.182
	LTD	344.207	190.841	145.031	119.654	116.567	120.804
	N LTD	344.207	251.614	201.3165	164.105	154.474	151.082

La température critique de flambement ou les différences de température en fonction du rapport entre la longueur et la hauteur (L/h) est calculée pour les poutres en matériaux piézoélectriques à graduations fonctionnelles avec une fraction de volume différente et quand la tension appliquée est $V_0=+500V$.

La température critique du flambement des poutres en matériaux piézoélectriques à graduation fonctionnelle soumises à une élévation de température uniforme, une distribution de température linéaire et non linéaire à travers l'épaisseur est présentée sur les Figure II.4 et II.5.

La variation de la température critique de flambement en fonction des rapports L/h d'une poutre FGM piézoélectrique sollicitée par différents chargement thermique est indiquée sur Les figures II.4 et II.5. Il est a constaté que mise à part le type de chargement, la différence de température critique de flambement décroît avec l'augmentation des valeurs du rapport L/h . En plus, on constate que la température critique de flambement décroît rapidement avec l'augmentation de l'indice k .

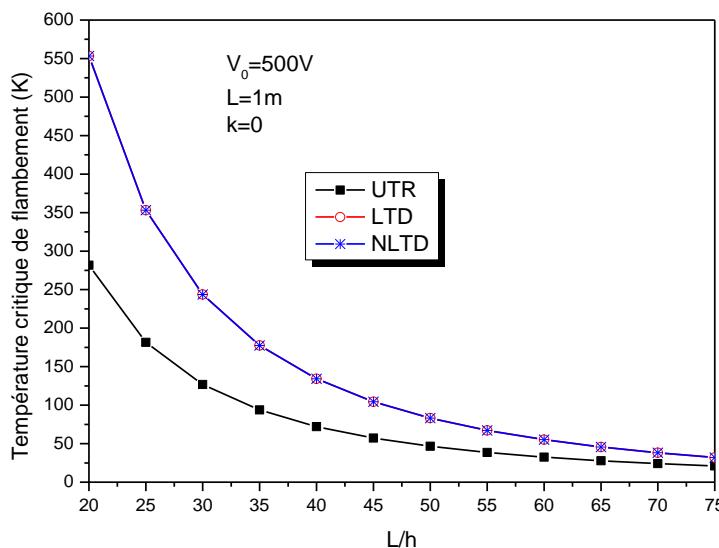


Figure II.4 : Variation de la température critique du flambement d'un matériau piézoélectrique à gradation fonctionnelle en fonction de rapport (L/h), ($L = 1m$, $k = 0$, $V_0 = 500V$).

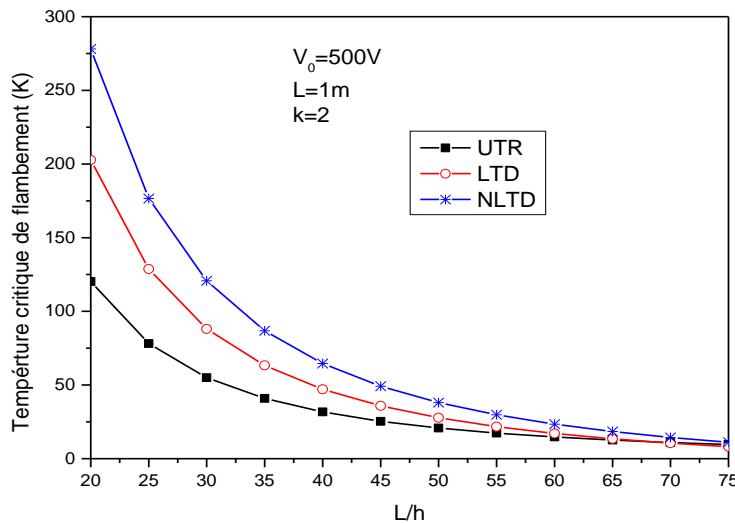


Figure II.5 : Variation de la température critique du flambement d'un matériau piézoélectrique à gradation fonctionnelle en fonction de rapport (L/h), (L = 1m, k = 2, V₀ = 500V).

II.4Conclusions

Dans cette étude, une formulation basée sur la théorie de la déformation par cisaillement de troisième ordre a été présentée pour l'analyse du flambement d'une poutre piézoélectrique FGM soumise à une charge thermoélectrique. La charge thermique est supposée être uniforme, linéaire et non linéaire à travers la direction de l'épaisseur. Les propriétés de la poutre FGM sont variées dans la direction de l'épaisseur selon la distribution de la puissance traduite par la fraction volumique. Les résultats numériques sont présentés pour une poutre en FGM simplement appuyée avec des couches piézoélectriques. Les effets de différents paramètres tels que les indices de loi de puissance, les propriétés des matériaux et les différents types de changements de température et de tension appliquée ont également été étudiés, et certaines conclusions peuvent être tirées:

- La température critique de flambement de la poutre en FGM piézoélectrique est supérieure à celle la poutre métallique piézoélectrique, mais inférieure à celle de la céramique piézoélectrique.
- La déformation par cisaillement transversal a un effet considérable sur la différence critique de température de flambement d'une poutre FGM piézoélectrique.

- La différence critique de température de flambement peut être contrôlée en appliquant une tension appropriée sur les couches de l'actionneur. L'effet de cette tension est faible.
- La température critique de la poutre FGM avec et sans couches piézoélectriques diminue avec l'augmentation du rapport longueur / épaisseur et de l'indice de fraction volumique.
- Pour une poutre en FGM piézoélectrique, la solution de l'équation de conduction thermique résulte en une distribution non linéaire de la température sur l'épaisseur du poutre. La température de flambement qui en résulte est supérieure à celle obtenue dans l'hypothèse d'une distribution linéaire de la température.

CHPITRE III

Analyse du flambement thermique des
plaques FGM poreux piézoélectriques

III.1 Introduction

L'industrie moderne dans la mécanique de construction, l'aéronautique, le génie civil et plus généralement le domaine des transports sont à la recherche de matériaux possédant des avantages fonctionnels comme la légèreté, une bonne résistance mécanique et chimique, une durée de vie élevée, une maintenance réduite, un temps de fabrication le plus court possible. Ces matériaux peuvent être vulnérables à des charges dans le plan (par exemple : compression, cisaillement, thermique ou une combinaison des deux). Par conséquent, la fiabilité de la conception de ces composants exige d'évaluer soigneusement les charges de flambement qui peuvent fortement limiter la capacité portante admissible. Par conséquent, il est important d'étudier le comportement de flambement et de post-flambement des plaques sous des charges mécaniques, thermiques et thermomécaniques combinées pour une conception précise et fiable.

Quelques travaux sur la stabilité de la plaque sont présentés ci-après. Par exemple [Reddy2004], [Wu et al 2007], [Boley et Weiner1960], [Gowda et Padalai1970], [Kari et al 1989], [Chen et al 1991], [Ganapathi et Touratier1997], [Bouazza et al 2010], [Becheri et al 2016], [Chen et al 2011].

Récemment, l'utilisation de matériaux intelligents, en tant que capteurs et actionneurs, pour le contrôle du comportement mécanique des systèmes structurels intelligents, est de plus en plus répandue. Parmi les matériaux intelligents déployés, on peut citer les matériaux piézoélectriques, les alliages à mémoire de forme et les fluides rhéologiques [Liew et al 2003].

Les matériaux piézoélectriques sont des matériaux qui convertissent le courant électrique en force mécanique et vice-versa. Par conséquent, les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés dans les capteurs et les actionneurs. En raison des fortes concentrations de contraintes, les matériaux piézoélectriques stratifiées se délamine et se rompe. Par conséquent, [Jam et Nia 2012].ont proposé de fabriquer une nouvelle forme de matériaux piézoélectriques avec une distribution fonctionnellement graduée des propriétés des matériaux qui sont appelés matériaux piézoélectriques fonctionnellement gradués (FGPM) .En raison de l'importance et des vastes applications techniques des FGM piézoélectriques, le comportement de ces matériaux a été étudié par de nombreux chercheurs. Par exemple[Liew et al 2003],[Jam et Nia 2012],[Wu et al. 2004],[Mirzavand et Eslami 2011], [Akhras et Li2009], [Arefi et Rahimi 2012], [Zenz et al 2013], [Benjeddou et al 2013], [Li et al2014], [Tondreau et al 2014], [Wu et Ding 2015], [ALamir, Nestorović et al 2015] [Nami et al 2015], [Ghasemabadian et Kadkhodayan 2016].

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'analyse du flambement thermique de plaques rectangulaires poreuses fonctionnellement graduées qui sont intégrées à des actionneurs piézoélectriques liés en surface soumis à l'action combinée d'une charge thermique et d'une tension d'actionneur appliquée constante avec deux distributions de porosité différentes dans la partie des FGM. Ces types de répartitions de porosité, c'est-à-dire FGM-I et FGM-II, à travers les directions de l'épaisseur sont pris en compte. La plaque soumise à une charge thermique uniforme. Une solution analytique est obtenue pour les plaques piézoélectriques poreuses en FGM simplement appuyées via la théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre élevé. Les propriétés du matériau sont supposées indépendantes de la variation de température et varient dans le sens de l'épaisseur en fonction de la loi de puissance modifiée. Les équations d'équilibre et de flambement dérivées sont ensuite résolues analytiquement pour une plaque avec des conditions aux limites simplement appuyée. Ces équations sont résolues en utilisant la méthode de Navier.

III.2 Formulation mathématique

III.2.1 Propriétés des plaques FGM piézoélectriques avec répartition de porosité

Considérons une plaque rectangulaire en FGM et deux couches piézoélectriques identiques parfaitement collées sur les surfaces supérieure et inférieure, comme illustré à la Figure III.1. La largeur, la longueur et l'épaisseur de la plaque FGM sont représentées par b , a et h , respectivement. De plus, dénote l'épaisseur de chaque couche piézoélectrique et l'épaisseur totale de la structure est également représentée par H dans lequel $H = (h + 2h_a)$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont supposées variées suivant une loi bien déterminée en fonction de la distribution de la porosité.

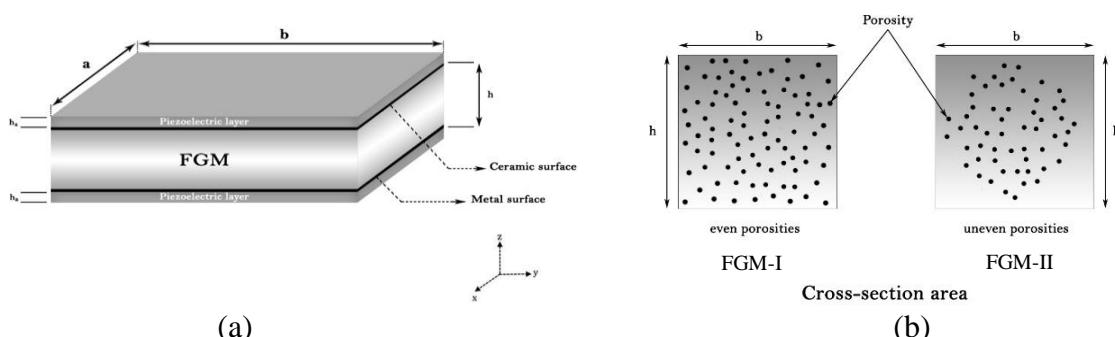


Figure III.1 : (a) Géométrie et coordonnées de la plaque en matériau fonctionnellement gradué intégré aux actionneurs piézoélectriques à liant de surface. (b) Coupe transversale de la plaque de FGM avec deux distributions de la porosité.

Les propriétés effectives des plaques FGM avec deux types de distributions de porosité qui sont distribuées de manière identique dans deux phases de céramique et de métal peuvent être exprimées en utilisant la règle modifiée du mélange comme [Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2014].

$$P = P_c \left(V_c - \frac{e}{2} \right) + P_m \left(V_m - \frac{e}{2} \right) \quad (\text{III.1})$$

Où, e est la fraction volumique des porosités ($e \ll 1$). Pour une plaque FGM parfaite, (e) est fixée à zéro. P_c et P_m sont les propriétés de céramique et du métal. V_c et V_m sont la fraction volumique de la céramique et du métal, respectivement ; les compositions sont représentées par rapport à :

$$V_c + V_m = 1 \quad (\text{III.2})$$

Ensuite, la fraction volumique de la céramique V_c peut s'écrire comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (\text{III.3})$$

Avec z la distance par rapport au plan moyen d'une plaque en FGM et k la loi de puissance exposant le paramètre variable non négatif ($k \geq 0$) qui détermine la répartition du matériau FGM à travers l'épaisseur des plaques. Selon cette distribution, nous disposons d'une plaque entièrement métallique pour de grandes valeurs de k et une plaque entièrement en céramique lorsque $k = 0$.

Dans ce chapitre, nous avons étudié une plaque en FGM avec deux types de distribution de porosité (FGM I et FGM II) à travers l'épaisseur de la plaque en raison de défaut de fabrication. Pour une distribution des porosités (FGM-I), les propriétés effectives du matériau sont données comme suit :

$$P(z) = \left(P_c - P_m \right) V_c + P_m - \frac{e}{2} \left(P_c + P_m \right) \quad (\text{III.4})$$

Où les indices désignent les constituants métalliques et céramiques. Pour le deuxième type, la distribution des porosités définies comme (FGM-II), les propriétés effectives du matériau sont données comme suit:

$$P(z) = (P_c - P_m) V_c + P_m - \frac{e}{2} (P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.5})$$

Ici, il faut noter que la FGM-I a des phases de porosité avec une distribution uniforme de la fraction volumique sur la section transversale, tandis que la FGM-II a des phases de porosité qui s'étendent fréquemment près de la zone moyen de la section transversale et la quantité de porosité semble être linéairement réduite à zéro au haut et au bas de la section transversale.

III.2.2 Champ de déplacement et déformations

La théorie des plaques du troisième ordre de [Reddy2004] est basée sur le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - c_1 z^3 \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ u_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - c_1 z^3 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ u_3(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Où (u_0, v_0, w_0) et (u_1, v_1, w_1) ont la même signification physique que dans la théorie du premier ordre ; ils désignent respectivement les déplacements et les rotations des normales transversales dans le plan $z = 0$. Ensuite, le champ de déplacement de FSDT est obtenu en mettant $c_1 = 0$, ainsi pour la théorie du troisième ordre en mettant, $c_1 = 4/3h^2$.

Les déplacements non linéaires de Von Karman du TSDT, qui sont à l'origine de petites déplacements et de rotations modérées, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(3)} \\ \varepsilon_y^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Où

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^{(0)} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_x^{(3)} = -c_1 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\
 \varepsilon_y^{(0)} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_y^{(3)} = -c_1 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 \gamma_{xy}^{(0)} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xy}^{(3)} = -c_1 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 \gamma_{yz}^{(0)} &= \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad \gamma_{yz}^{(2)} = -3c_1 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right), \quad \gamma_{xz}^{(0)} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^{(2)} = -3c_1 \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

III.2.3 Contraintes, moment et force de cisaillement transversale résultants

La relation constitutive de l'électro-thermoélastique le long du système de coordonnées du matériau est donnée par les équations (III.9) et (III.10). Equation (III.9) correspond à la relation contrainte-déformation dans le plan ; Equation (III.10) correspond à la relation contrainte-déformation en cisaillement et la relation constitutive pour le déplacement électrique dû aux couches piézo-électriques est représentée dans Equation (III.11).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^T \\ \varepsilon_y^T \\ \gamma_{xy}^T \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{III.9}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{24} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \tag{III.10}$$

$$e_{31} = (d_{31}Q_{11}^a + d_{32}Q_{12}^a), \quad e_{32} = (d_{31}Q_{12}^a + d_{32}Q_{22}^a), \quad e_{24} = d_{24}Q_{44}^a, \quad e_{15} = d_{15}Q_{55}^a \tag{III.11}$$

Où, $\{\sigma_{ij}\}$ est le vecteur de contrainte, $[Q_{ij}]$ est la matrice constitutive, $\{\varepsilon_{ij}^T\}$ est le vecteur de déformation dû à la charge mécanique, $\{\varepsilon_{ij}^T\}$ est le vecteur de déformation dû à la charge thermique, $e_{31}, e_{32}, e_{15}, e_{24}$ est la rigidité piézoélectrique, $d_{31}, d_{32}, d_{15}, d_{24}$ est les constantes diélectriques et $Q_{ij}^a (i, j = 1, 2, 4, 5, 6)$ est la rigidité élastique des couches d'actionneurs piézoélectriques. Le vecteur de contrainte thermique est donné sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^T \\ \varepsilon_y^T \\ \gamma_{xy}^T \end{Bmatrix} = \alpha(z) \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Si V_a la tension appliquée aux actionneurs dans le sens de l'épaisseur et E_z en tant que composante de champ électrique transversale est dominante dans le matériau piézoélectrique de type plaque, alors le vecteur de champ électrique peut être écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/h_a \end{Bmatrix} V_a \quad (\text{III.13})$$

La force normale, le moment et la force de cisaillement transversale résultants par unité de longueur sont liés aux composantes de contrainte peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix} dz \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix} z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix} z dz \\ \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix} z^3 dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \begin{Bmatrix} \sigma_x^a \\ \sigma_y^a \\ \sigma_{xy}^a \end{Bmatrix} z^3 dz \\ \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} z^2 dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^a \\ \sigma_{yz}^a \end{Bmatrix} z^2 dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^a \\ \sigma_{yz}^a \end{Bmatrix} z^2 dz \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^a \\ \sigma_{yz}^a \end{Bmatrix} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_a} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz}^a \\ \sigma_{yz}^a \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

La substitution des équations (III.9)-(III.11) et (III.7) dans l'équation (III.14) donne :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [B_{ij}] & [E_{ij}] \\ [B_{ij}] & [D_{ij}] & [F_{ij}] \\ [E_{ij}] & [F_{ij}] & [H_{ij}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^T\} \\ \{P^T\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15a})$$

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{ij}] & [D_{ij}] \\ [D_{ij}] & [F_{ij}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15b})$$

Où les indices ‘ T ’ et ‘ a ’ indiquent les charges thermiques et électriques, respectivement. $[A_{ij}]$ désignent la matrice de rigidité à la traction, $[D_{ij}]$ la matrice de rigidité à la flexion, $[B_{ij}]$ la matrice de rigidité à la traction et à la flexion, et $([E_{ij}] [F_{ij}] [H_{ij}])$ sont la matrice de rigidité d'ordre supérieur.

$$([A_{ij}] [B_{ij}] [D_{ij}] [E_{ij}] [F_{ij}] [H_{ij}]) = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{ij}] \{1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\} dz \quad (\text{III.16})$$

Les efforts et les moments résultants, dus à la charge thermique et piézoélectrique sont définis par :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x^T & M_x^T \\ N_y^T & M_y^T \\ N_{xy}^T & M_{xy}^T \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha(z) \\ \alpha(z) \\ 0 \end{Bmatrix} (1, z) \Delta T dz + \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{bmatrix} Q_{11}^a & Q_{12}^a & 0 \\ Q_{12}^a & Q_{21}^a & 0 \\ 1 & 0 & Q_{66}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11}^a \\ \alpha_{22}^a \\ 0 \end{Bmatrix} (1, z) \Delta T dz \\ &+ \int_{-h/2-h_a}^{-h/2} \begin{bmatrix} Q_{11}^a & Q_{12}^a & 0 \\ Q_{12}^a & Q_{21}^a & 0 \\ 1 & 0 & Q_{66}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{11}^a \\ \alpha_{22}^a \\ 0 \end{Bmatrix} (1, z) \Delta T dz \end{aligned} \quad (\text{III.17a})$$

$$\begin{Bmatrix} N_x^a & M_x^a \\ N_y^a & M_y^a \\ N_{xy}^a & M_{xy}^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} (1, z) \frac{V}{h_a} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} (1, z) \frac{V}{h_a} dz \quad (\text{III.17b})$$

III.2.4 Équations de stabilité

Les équations de stabilité d'une plaque rectangulaire piézoélectrique FGM par la théorie TSDT sont données comme suit :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.18a})$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.18b})$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - 3c_1 \left(\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} \right) + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) + \bar{N} = 0 \quad (\text{III.18c})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + 3c_1 R_x - c_1 \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{III.18d})$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + 3c_1 R_y - c_1 \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{III.18e})$$

Avec

$$\bar{N} = (N_x^m + N_x^a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (N_y^m + N_y^a) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(N_{xy}^m + N_{xy}^a) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{III.19})$$

Où N_x^m, N_y^m, N_{xy}^m et $, N_x^a, N_y^a, N_{xy}^a$ sont, respectivement, les forces mécaniques et les forces électriques avec :

$$N_x^m = N_y^m = -\frac{\int_{-h/2}^{h/2} E(z) \alpha(z) \Delta T dz}{1-\nu}; \quad N_{xy}^m = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$N_x^a = N_y^a = -2V_a (d_{31}Q_{11}^a + d_{32}Q_{12}^a); \quad N_y^a = -2V_a (d_{31}Q_{12}^a + d_{32}Q_{22}^a); \quad N_{xy}^a = 0$$

Les équations de stabilité en termes de composantes de déplacement peuvent être obtenues par la substitution de l'équation (III.18) dans l'équation (III.15). Les équations résultantes sont celles de stabilité basées sur la présente théorie de déformation de cisaillement.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - c_1 E_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - c_1 E_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (\text{III.21.a})$$

$$+ A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - c_1 E_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial N_x^T}{\partial x} - \frac{\partial Z_1^a}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - c_1 E_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
 & + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - c_1 E_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - c_1 E_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - \frac{\partial N_y^T}{\partial x} - \frac{\partial Z_4^a}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.21.b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - 6c_1 D_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + 9c_1^2 F_{55} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 & + c_1 \left[E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + E_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + F_{11} \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + F_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + F_{22} \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} \right] \\
 & - c_1^2 \left[H_{11} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + H_{12} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + H_{22} \left(\frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) \right] \quad (\text{III.21.c}) \\
 & - 2c_1^2 H_{66} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + c_1 \left[2E_{66} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2F_{66} \left(\frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) \right] \\
 & - 6c_1 D_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + 9c_1^2 F_{44} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - c_1 \left(\frac{\partial^2 P_x^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y^T}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial Z_3^a}{\partial x^2} - \frac{\partial Z_6^a}{\partial y^2} + \bar{N} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + 6c_1 D_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - 9c_1^2 F_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \\
 & D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} - c_1 F_{11} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) - c_1 F_{12} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 & - c_1 \left[E_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + E_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y} \right] + c_1^2 \left[H_{11} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \quad (\text{III.21.d}) \\
 & + B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2c_1 F_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 & - c_1 E_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial x \partial y} \right) + c_1^2 H_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial M_x^T}{\partial x} - \frac{\partial Z_2^a}{\partial x} + c_1 \frac{\partial P_x^T}{\partial x} - \frac{\partial Z_3^a}{\partial x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + 6c_1 D_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 9c_1^2 F_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \\
 & + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - c_1 \left[F_{12} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + F_{22} \left(2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + 2F_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \right] \\
 & - c_1 \left[E_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + E_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + E_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x^2} \right) \right] + c_1^2 \left[H_{12} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + H_{22} \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \right] \\
 & + B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + c_1^2 H_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (\text{III.21.e}) \\
 & - \frac{\partial M_y^T}{\partial y} - \frac{\partial Z_5^a}{\partial y} + c_1 \frac{\partial P_y^T}{\partial y} - \frac{\partial Z_6^a}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

La solution approximative suivante est considérée comme satisfaisant à la fois l'équation différentielle et les conditions aux limites

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y \\ V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y \\ W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \\ X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y \\ Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Substitution de l'équation (III.22) en équations (III.21a)-(III.21e), on obtient un système 5x5 des équations différentielles :

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

Où s_{ij} est défini par :

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2, \quad s_{12} = \lambda \mu (A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -c_1 \lambda [E_{11} \lambda^2 + (E_{12} + 2E_{66}) \mu^2], \\
 s_{14} &= (B_{11} - c_1 E_{11}) \lambda^2 + (B_{66} - c_1 E_{66}) \mu^2, \quad s_{15} = [(B_{12} - c_1 E_{12}) + (B_{66} - c_1 E_{66})] \lambda \mu, \\
 s_{22} &= A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2, \quad s_{23} = -c_1 \mu [(E_{12} + 2E_{66}) \lambda^2 + E_{22} \mu^2], \quad s_{24} = s_{15}, \quad (\text{III.24a}) \\
 s_{25} &= (B_{66} - c_1 E_{66}) \lambda^2 + (B_{22} - c_1 E_{22}) \mu^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_{33} &= (A_{55} - 6c_1 D_{55})\lambda^2 + (A_{44} - 6c_1 D_{44})\mu^2 \\
 &+ c_1^2 [H_{11}\lambda^4 + 2(H_{12} + 2H_{66})\lambda^2\mu^2 + H_{22}\mu^4 + 9F_{44}\mu^2 + 9F_{55}\lambda^2] + N_x^0\lambda^2 + N_y^0\mu^2 \\
 s_{34} &= (A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55})\lambda - c_1 [(F_{11} - c_1 H_{11})\lambda^3 + ((F_{12} - c_1 H_{12}) + 2(F_{66} - c_1 H_{66}))\lambda\mu^2] \\
 s_{35} &= (A_{44} - 6c_1 D_{44} + 9c_1^2 F_{44})\mu - c_1 [(F_{22} - c_1 H_{22})\mu^3 + ((F_{12} - c_1 H_{12}) + 2(F_{66} - c_1 H_{66}))\lambda^2\mu] \\
 s_{44} &= A_{55} - 6c_1 D_{55} + 9c_1^2 F_{55} + (D_{11} - 2c_1 F_{11} + c_1^2 H_{11})\lambda^2 + (D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66})\mu^2 \quad (\text{III.24b}) \\
 s_{45} &= [(D_{12} - 2c_1 F_{12} + c_1^2 H_{12}) + (D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66})]\lambda\mu \\
 s_{55} &= A_{44} - 6c_1 D_{44} + 9c_1^2 F_{44} + (D_{66} - 2c_1 F_{66} + c_1^2 H_{66})\lambda^2 + (D_{22} - 2c_1 F_{22} + c_1^2 H_{22})\mu^2
 \end{aligned}$$

III.2.5. Température uniforme

La température initiale de la plaque est supposée être de T_i . La température est uniformément augmentée jusqu'à une valeur finale T_f à laquelle la plaque piézoélectrique poreuse FGM se déforme. Le changement de température est donné par :

$$\Delta T = T_f - T_i \quad (\text{III.25})$$

III.3 Résultats numériques et discussion

Dans le but d'obtenir des résultats numériques, une plaque fonctionnellement graduée Al/Al₂O₃ composée d'Aluminium et d'Alumine est considérée, avec deux couches piézoélectriques G-1195N. L'épaisseur de la couche piézoélectrique est de ha=0,001m. Les propriétés du matériau pour l'aluminium, l'alumina et le G-1195N sont indiquées dans le tableau III.1.

Tableau III.1 : Propriétés matériau constitués la partie FGM et piézoélectriques.

Properties	Aluminium	Alumine	G-1195N
Le module de Young E (GPa)	70	380	63.0
Le coefficient de Poisson ν	0.3	0.3	0.3
coefficient de dilatation thermique α (1/ $^{\circ}$ C)	23x10-6	10.4x10-6	1.2x10-6
la conductivité thermique k (W/mK)	2.09	204	5.0
Constante piézoélectrique d_{31} (m/V)	--	--	2.54x10-10
Constante piézoélectrique d_{32} (m/V)	--	--	2.54x10-10

La comparaison est effectuée pour des plaques isotropes simplement appuyées soumises à une élévation de température uniforme pour différentes valeurs du rapport géométrique (a/b) sont présentées dans le tableau III.2. Le rapport géométrique a/h est supposé égale à $=100$. La charge critique de flambement thermique de la présente théorie est comparée aux résultats de [Boley et Weiner 1960] basé sur la théorie classique des plaques, [Chen et al 1991] basé sur un élément fini à huit nœuds de type "serendip" avec quarante degrés de liberté, [Chun-Sheng 2011] basé sur la méthode des contraintes moyennes et [Ganapathi 1997] basé sur la méthode des éléments finis. Ils sont en excellent accord.

Tableaux III.2 : Comparaison des températures critiques de flambement des plaques isotropes simplement appuyée, ($a/h = 100, \nu = 0.3, \alpha = 1.0 \times 10^{-6}$).

a/b	Boley et Weiner	Chen	Chun-Sheng	Ganapathi	Présente théorie
0.25	0.686	0.691	0.672	0.676	0.6720
0.50	0.808	0.814	0.791	0.789	0.7905
1.0	1.283	1.319	1.264	1.272	1.2646
1.50	2.073	2.101	2.054	2.072	2.0543
2.0	3.179	3.191	3.158	3.176	3.1589
2.5	4.599	4.601	4.578	4.585	4.5775
3.0	6.332	6.330	6.306	6.341	6.3089

III.3.1 Études paramétriques

Tout d'abord, l'influence du rapport longueur-épaisseur (a/h) sur la charge de flambement thermique avec différentes valeurs du coefficient de porosité (e) pour une plaque carrée simplement appuyée avec deux distributions de porosité (FGM I et FGM II) est représenté sur les figures III.2 et III.3, respectivement. Les figures III.4 et III.5 illustrent l'effet du rapport géométrique (a/b) sur la température critique de flambement d'une plaque FGM piézoélectrique simplement appuyée pour deux types de répartition de la porosité (FGM-I et FGM-II), respectivement. Le rapport longueur/épaisseur de la plaque PFGM est supposé égale à $=20$, indexe des fractions volumiques des constituants (k) est supposé égale à 2, ainsi, la tension d'application est ($V_0=500V$). Cette étude réalisée pour différentes valeurs des paramètres de porosité ($e=0, 0.1, 0.2$). On observe qu'en augmentant le rapport d'aspect a/b de la plaque de 0,5 à 3, la différence de température critique de flambement augmente également régulièrement, quels que soient les paramètres de porosité (e).

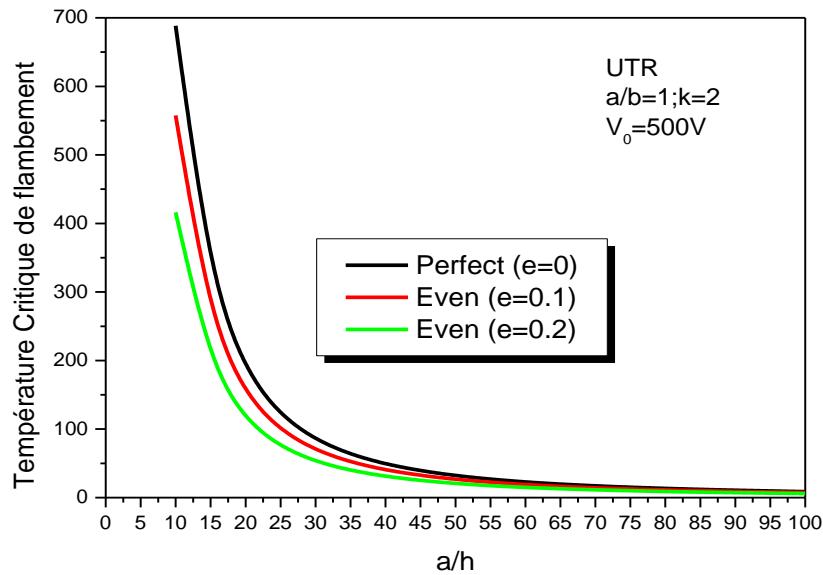


Figure III.2 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-I en fonction au rapport longueur-épaisseur de la plaque (a/h). Cas d'élévation de température uniforme

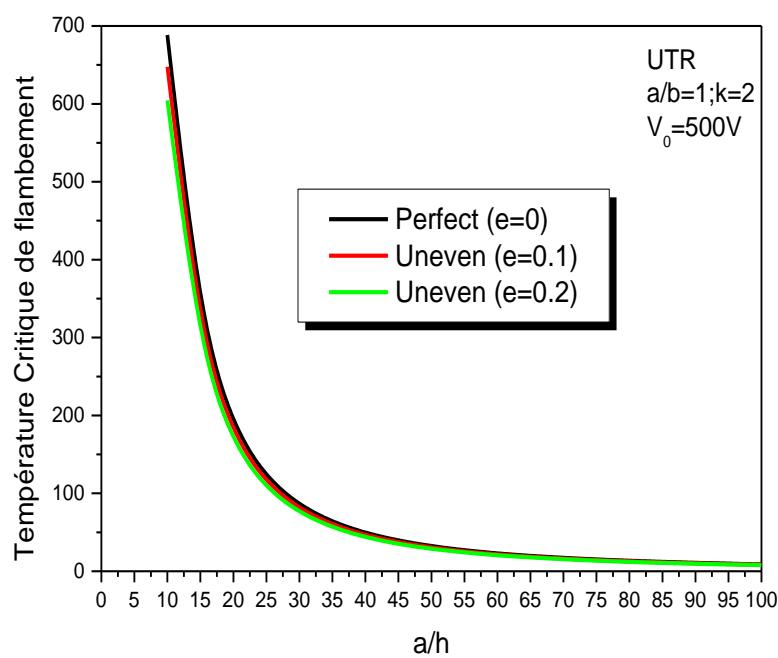


Figure III.3 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-II en fonction au rapport longueur-épaisseur de la plaque (a/h). Cas d'élévation de température uniforme

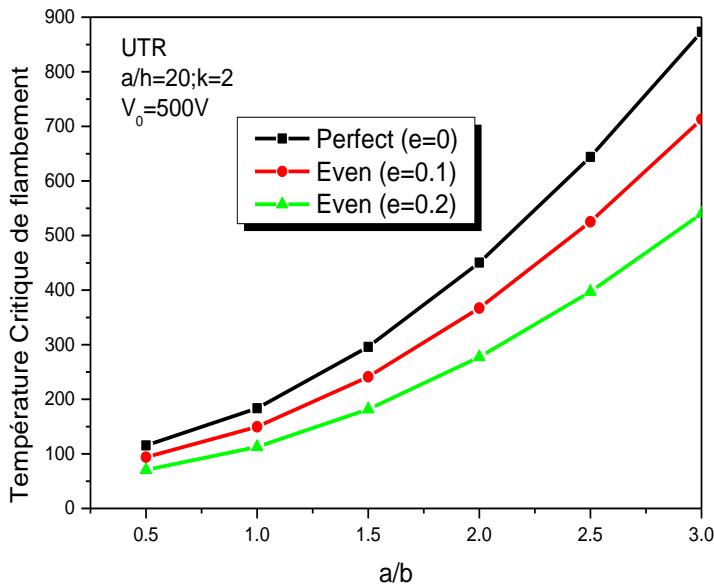


Figure III.4 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-I en fonction au rapport longueur- largeur de la plaque (a/b). Cas d'élévation de température uniforme

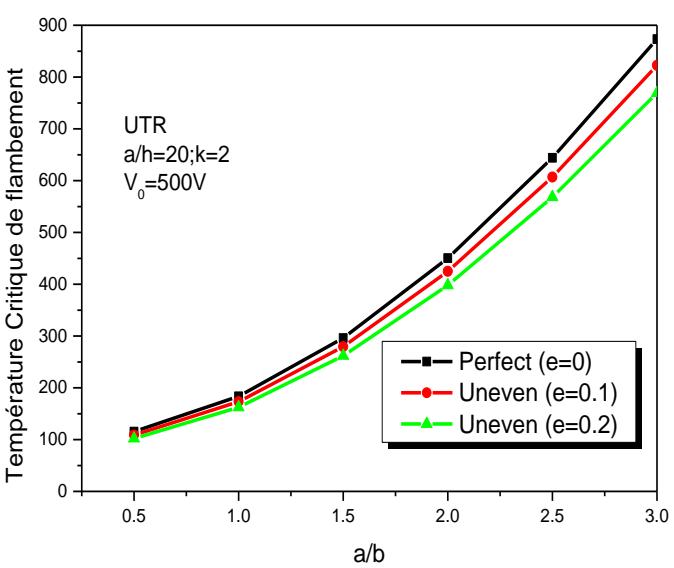


Figure III.5 : Température critique de flambement de la plaque piézoélectrique poreuse FGM-II en fonction au rapport longueur- largeur de la plaque (a/b). Cas d'élévation de température uniforme

III.4 Conclusions

Le flambement thermique de la plaque FGM piézoélectrique poreuse simplement appuyer a été étudié. Deux types de répartition de la porosité, dite FGM-I et FGM-II, ont été pris en compte. Une fonction de loi de puissance modifiée a été utilisée pour décrire les propriétés du matériau en tenant compte l'effet de porosité.

Les formulations théoriques s'inscrivent dans le cadre de la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre. La méthode de Navier est utilisée pour obtenir la charge de flambement thermique critique. Les effets du coefficient de porosité (e) et du rapport longeur/ épaisseur (a/h) et du rapport longueur- largeur (a/b) sur la charge de flambement thermique critique sont examinés et certaines conclusions peuvent être tirées :

- Une augmentation du coefficient de porosité et du rapport entre la longueur et l'épaisseur entraîne une diminution des charges thermiques critiques de flambement des plaques poreuses piézoélectriques fonctionnellement graduée.
- La température critique de flambement peut être contrôlée en appliquant un voltage appropriée sur les couches piézoélectriques.
- La température critique de flambement augmente en augmentant l'épaisseur.
- La répartition de la porosité a une influence significative sur le comportement critique de la température de flambement de la plaque.
- La température de flambement critique de la plaque FGM piézoélectrique est plus sensible lorsque les pores sont répartis uniformément.

CHPITRE IV

Analyse du flambement des plaques magnéto-piézoélectriques

IV.1 Introduction

Un matériau intelligent est sensible, adaptatif et évolutif. Il possède des fonctions qui lui permettent de se comporter comme un capteur (détecter des signaux), un actionneur (effectuer une action sur son environnement) ou parfois comme un processeur (traiter, comparer, stocker des informations). Ce matériau est capable de modifier spontanément ses propriétés physiques, par exemple sa forme, sa connectivité, sa viscoélasticité ou sa couleur, en réponse à des excitations naturelles ou provoquées venant de l'extérieur ou de l'intérieur du matériau variations de température, contraintes mécaniques, champs électriques ou magnétiques. Le matériau va donc adapter sa réponse, signaler une modification apparue dans l'environnement et dans certains cas, provoquer une action de correction. Il devient ainsi possible de détecter des faiblesses de structures dans le revêtement d'un avion, des fissures apparaissant dans un bâtiment ou un barrage en béton, réduire les vibrations de pales d'hélicoptère, ou insérer dans les artères des filtres qui se déplieront pour réduire le risque de dispersion de caillots sanguins. Les matériaux piézo-électriques produisent une tension électrique lorsqu'ils subissent une contrainte mécanique. Par exemple lorsqu'ils sont comprimés, soumis à un courant électrique ils peuvent aussi se déformer mécaniquement. La fréquence du signal électrique et son amplitude varient directement en fonction de la déformation mécanique qu'ils subissent. Ces matériaux sont généralement constitués de céramique et plus récemment de polymères. Les plus connus sont le quartz des montres à quartz permettant d'entretenir les vibrations de base servant à la mesure du temps. On utilise aussi les matériaux piézo-électriques pour amortir des vibrations et réduire le bruit. On peut, par exemple, entourer un axe rotatif avec des matériaux piézo-électriques afin de diminuer considérablement les vibrations. On utilise aussi des polymères piézo-électriques pour des applications médicales ou pour capter des ultrasons. Une application intéressante des matériaux piézo-électriques est le contrôle de santé de certains matériaux intervenant dans la construction des carlingues d'avions ou les bâtiments en ciment. Un capteur piézo-électrique pourra détecter des défauts localisés, comme des fissures, des trous ou des impacts.

Les matériaux magnétostrictifs peuvent se déformer sous l'action d'un champ magnétique. Il en est de même des matériaux electrostrictifs qui vont subir le même type de déformation, laquelle sera proportionnelle au carré de la puissance des champs appliqués. Ces matériaux ou ces polymères vont être capables de s'adapter automatiquement à l'environnement en prenant des formes utiles en réaction à des sollicitations extérieures d'ordre acoustique vibratoire, mécanique ou thermique.

La piézoélectricité attire l'attention de nombreux chercheurs ([Avellaneda et Harshe 1994]; [Benveniste 1995]; [Li et Dunn 1998]; [Achenbach 2000]; [Wu et Huang 2000]; [Aboudi, 2001]; [Priya et al.,2007]).

En ce qui concerne l'analyse structurelle magnéto-élastique, des progrès ont été réalisés ces dernières années. [Pan 2001] a présenté une solution exacte pour la déformation statique de la plaque magnéto-électro-élastique stratifiée à l'aide de la méthode du vecteur d'état, [Wang et al 2003] obtenu une solution analytique pour des plaques rectangulaires magnéto-électro-élastiques, simplement appuyée et multicouches sous la forme de séries infinies. La solution exacte est présentée par [Pan et Han. 2005] pour la plaque rectangulaire multicouche composée de matériaux fonctionnellement gradués et matériaux magnéto-élastiques. [Bhangale et Ganesan 2006] Présentent une analyse statique par la méthode des éléments finis d'une plaque en matériau à gradient fonctionnel magnéto-électro-élastique. L'approche de vecteur d'état a été proposée par [Chen et al. 2007] pour l'analyse de la vibration libre des plaques magnéto-électro-élastiques. [Wang et al. 2010] utilisent la méthode Pagano pour analyser une plaque rectangulaire simplement appuyée en matériau à gradient fonctionnel sous chargement magnéto-électro-mécaniques. Un modèle à grande déflexion non linéaire pour plaques minces rectangulaires magnéto-électro-élastiques est proposé par [Xue et al. 2011] Un modèle à couche unique pour l'analyse dynamique de plaques laminées magnéto-électromécaniques est présenté par [Milazzo. 2012].

[Sladek et al. 2013] résolus le problème mécanique de la plaque magnéto-électro-élastique sous charge stationnaire et harmonique. L'analyse de flambement d'une plaque magnéto-électro-élastique reposant sur la fondation élastique de Pasternak est étudiée sur la base de la théorie des plaques de Mindlin est présenté par [Y.S. Li 2014].

[Ghorbanpour Arani, et al 2016] ont fourni l'analyse de vibration d'une microplaquette composite sandwich sous Charges électro-magnéto mécaniques. L'Analyse hygrothermique de la plaque magnéto-électro-élastique représentée par éléments finis 3Det a étudié par [Vinyas et Kattimani 2017].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'analyse du flambement des plaques magnéto-piézoélectrique reposant sur une fondation élastique par la théorie d'ordre élevée. Des évaluations qualitatives et quantitatives du champ de déplacement et de contraintes sont présentées et discutés. Des champs électriques et magnétiques peuvent être ignorés dans le plan. Les équations de mouvement des plaques magnéto-piézoélectriques sont établies d'après l'application du principe variationnel ainsi en utilisant l'approche de Navier pour obtenir la

charge du flambement. Les résultats numériques montrent les effets de potentialité électrique et magnétique et les coefficients de fondation Winkler et Pasternak sur la charge de flambement.

IV.2 Formulations mathématiques

La figure IV.1 représente une plaque magnéto-piézoélectrique de longueur L, largeur b et d'épaisseur h reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Un système cartésien de coordonnées est utilisé pour décrire la plaque. Cette dernière est soumise à une potentialité électrique et une potentialité magnétique.

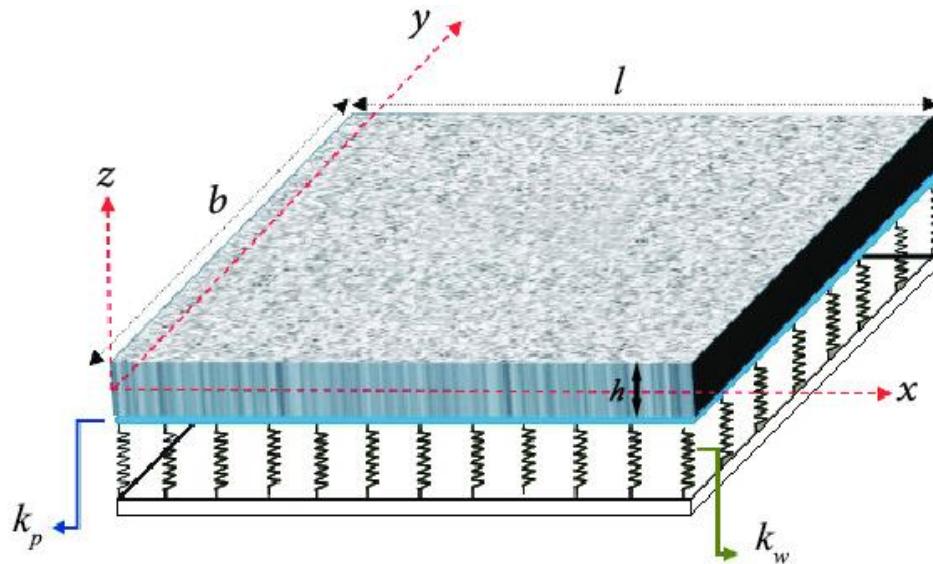


Figure V.1 : plaque magnéto-piézoélectrique sur une fondation élastique

Le tenseur des déformations s'écrit (Reddy 2004) :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \\
 \varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \\
 \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y}, \\
 \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y}, \\
 \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x},
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Avec ε_{xx} et ε_{yy} représentent les déformations dans la direction x et y. γ_{xy} , γ_{yz} et γ_{xz} sont les déformations de distorsion. u, v et w sont les déplacements dans les directions (x, y, z).

Le champ de déplacement est déterminé en utilisant la théorie des plaques d'ordre élevé donnée par [Reddy 2004] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) - c_1z^3(\phi_x + w_{0,x}) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) - c_1z^3(\phi_y + w_{0,y}) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Avec u_0, v_0 et w_0 représentent respectivement le déplacement dans le plan moyen ($Z=0$) de la plaque, ϕ_x et ϕ_y la rotation suivant x et y respectivement. $w_{0,x}$ et $w_{0,y}$ la rotation de la section. $c_1 = \frac{4}{3h^2}$.

Les équations déplacement-déformation sont formulées comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} &= -c_1 \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} + w_{0,xx} \\ \phi_{y,y} + w_{0,yy} \\ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{0,xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + w_{0,y} \\ \phi_x + w_{0,x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -3c_1 \begin{Bmatrix} \phi_y + w_{0,y} \\ \phi_x + w_{0,x} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Pour les solides isotropes magnéto-piézoélectriques, les relations constitutives peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{31} \\ 0 & 0 & f_{31} \\ 0 & f_{24} & 0 \\ f_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.5})$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f_{15} & 0 \\ 0 & 0 & f_{24} & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

Avec :

σ_{ij} : Les composantes de contrainte ; D_{ij} et B_{ij} : les composantes de déplacement électrique et les composantes de l'induction magnétique, respectivement. c_{ij} , e_{ij} et h_{ij} : les constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques respectivement. f_{ij} , g_{ij} et μ_{ij} : les coefficients piézo-magnétiques, magnétoélectriques et perméabilité magnétique respectivement. E_i et H_i : les intensités de champs électriques et magnétiques respectivement. Les intensités électriques et magnétiques peuvent être exprimées comme des gradients des potentiels électriques et magnétiques scalaires ψ et φ respectivement.

$$E = -\nabla\psi \quad (\text{IV.8})$$

$$H = -\nabla\varphi$$

IV.2.1 Equations de stabilité

L'énergie de déformation de plaque magnéto-piézoélectrique peut être donnée par la relation suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{xz}\varepsilon_{xz} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} - D_x E_x - D_y E_y - D_z E_z - B_x H_x - B_y H_y - B_z H_z) d\Omega dz \quad (\text{IV.9})$$

Où les relations contraintes - déplacement peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{cases} 1 \\ z \\ z^3 \end{cases} dz$$

$$\begin{cases} Q_\alpha \\ R_\alpha \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{cases} 1 \\ z^2 \end{cases} dz$$
(IV.10)

Où α et β prennent les symboles x et y.

Le travail externe dû au milieu élastique moyen peut s'écrire :

$$\delta W = \int_{\Omega} q \delta w_0 d\Omega$$
(IV.11)

Où q est liée à la fondation de Pasternak et à la charge transversale, qui peut être exprimée par :

$$q = k_w w_0 - k_g \nabla^2 w_0 + (N_{xm} + N_{xe} + N_{xa}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (N_{ym} + N_{ye} + N_{ya}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$
(IV.12)

Considérons maintenant le principe variationnel :

$$\delta U - \delta W = 0$$
(IV.13)

En remplaçant les équations (IV.9) - (IV.12) dans (IV.13), on intégrant par parties puis on obtient les équations régissant :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ N_{yy,y} + N_{xy,x} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - 3c_1(R_{x,x} + R_{y,y}) + c_1(P_{xx,xx} + 2P_{xy,xy} + P_{yy,yy}) + k_w w_0 - k_g \nabla^2 w_0 \\ &+ (N_{xm} + N_{xe} + N_{xa}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + (N_{ym} + N_{ye} + N_{ya}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \\ M_{xx,x} + M_{xy,y} - Q_x + 3c_1 R_x - c_1(P_{xx,x} + P_{xy,y}) &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{yy,y} - Q_y + 3c_1 R_y - c_1(P_{xy,x} + P_{yy,y}) &= 0 \\ D_{z,z} &= 0 \\ B_{z,z} &= 0 \end{aligned}$$
(IV.14)

k_w et k_g : Les coefficients de fondation élastique Winkler et Pasternak, respectivement.

$N_{xm}, N_{xe}, N_{xa}, N_{ym}, N_{ye}$ et N_{ya} : Les forces mécaniques, électriques et magnétiques pour la direction x, y.

$$N_{xm} = P$$

$$N_{xe} = e_{31} V_0$$

$$N_{xa} = f_{31} \Omega_0 \quad (\text{IV.15})$$

$$N_{ym} = \lambda P$$

$$N_{ye} = e_{31} V_0$$

$$N_{ya} = f_{31} \Omega_0$$

Dans laquelle P est la charge mécanique le long de la direction x et λ le paramètre de charge latéral.

En substituant les équations (IV.1) dans les équations (IV.14), les deux équations algébriques suivantes peuvent être facilement obtenues :

$$e_{31}[\phi_{x,x} - 3c_1 z^2(\phi_{x,x} + w_{0,xx})] + e_{31}[\phi_{y,y} - 3c_1 z^2(\phi_{y,y} + w_{0,yy})] - h_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - g_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$f_{31}[\phi_{x,x} - 3c_1 z^2(\phi_{x,x} + w_{0,xx})] + f_{31}[\phi_{y,y} - 3c_1 z^2(\phi_{y,y} + w_{0,yy})] - g_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Ainsi, en adoptant la règle de Cramer, on peut avoir :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{(\mu_{33}e_{31} - g_{33}f_{31})\Delta}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{(h_{33}f_{31} - g_{33}e_{31})\Delta}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} \quad (\text{IV.19})$$

Avec :

$$\Delta = [\phi_{x,x} - 3c_1 z^2(\phi_{x,x} + w_{0,xx})] + [\phi_{y,y} - 3c_1 z^2(\phi_{y,y} + w_{0,yy})] \quad (\text{IV.20})$$

Il peut être dérivé les équations (IV.18) et (IV.19) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{(\mu_{33}e_{31} - g_{33}f_{31})z\Delta}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} + \psi_0(x, y) \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{(h_{33}f_{31} - g_{33}e_{31})z\Delta}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} + \varphi_0(x, y) \quad (\text{IV.22})$$

Donc :

$$\psi = \frac{(\mu_{33}e_{31} - g_{33}f_{31})\Delta}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \frac{V_0}{h}z + \frac{V_0}{2} \quad (\text{IV.23})$$

$$\varphi = \frac{(h_{33}f_{31} - g_{33}e_{31})\Delta}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \frac{\Omega_0}{h}z + \frac{\Omega_0}{2} \quad (\text{IV.24})$$

Les conditions aux limites électriques et magnétiques sont :

$$\psi(h/2) = V_0, \quad \psi(-h/2) = 0 \text{ et}$$

$$\varphi(h/2) = \Omega_0, \quad \varphi(-h/2) = 0.$$

A partir des équations (IV.10), on peut obtenir les relations suivantes :

$$N_{xx} = c_{11}u_{0,x}h + f_{31}\Omega_0 + e_{31}V_0 + c_{12}v_{0,y}h \quad (\text{IV.25})$$

$$N_{yy} = c_{12}u_{0,x}h + f_{31}\Omega_0 + e_{31}V_0 + c_{22}v_{0,y}h \quad (\text{IV.26})$$

$$N_{xy} = c_{66}(u_{0,y} + v_{0,x})h \quad (\text{IV.27})$$

$$\begin{aligned} M_{xx} = & \frac{1}{80} \left[e_{31}M_1 \left(-\frac{4}{h^2}(\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2}(\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) - \frac{4}{3h^2}c_{12}(\phi_{y,y} + w_{0,yy}) - \right. \\ & \left. \frac{4}{3h^2}c_{11}(\phi_{x,x} + w_{0,xx}) + f_{31}M_2 \left(-\frac{4}{h^2}(\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2}(\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) \right] h^5 + \\ & \frac{1}{12}[c_{12}\phi_{y,y} + c_{11}\phi_{x,x} + f_{31}M_2(\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) + e_{31}M_1(\phi_{x,x} + \phi_{y,y})]h^3 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

$$M_{yy} = \frac{1}{80} \left[e_{31} M_1 \left(-\frac{4}{h^2} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) - \frac{4}{3h^2} c_{22} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) - \frac{4}{3h^2} c_{12} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) + f_{31} M_2 \left(-\frac{4}{h^2} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) \right] h^5 + \frac{1}{12} [c_{22} \phi_{y,y} + c_{12} \phi_{x,x} + f_{31} M_2 (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) + e_{31} M_1 (\phi_{x,x} + \phi_{y,y})] h^3 \quad (\text{IV.29})$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{60} c_{66} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{0,xy}) h^3 + \frac{1}{12} c_{66} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) h^3 \quad (\text{IV.30})$$

$$P_{xx} = \frac{1}{448} \left[e_{31} M_1 \left(-\frac{4}{h^2} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) - \frac{4}{3h^2} c_{12} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) - \frac{4}{3h^2} c_{11} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) + f_{31} M_2 \left(-\frac{4}{h^2} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) \right] h^7 + \frac{1}{80} [c_{12} \phi_{y,y} + c_{11} \phi_{x,x} + f_{31} M_2 (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) + e_{31} M_1 (\phi_{x,x} + \phi_{y,y})] h^5 \quad (\text{IV.31})$$

$$P_{yy} = \frac{1}{448} \left[e_{31} M_1 \left(-\frac{4}{h^2} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) - \frac{4}{3h^2} c_{22} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) - \frac{4}{3h^2} c_{12} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) + f_{31} M_2 \left(-\frac{4}{h^2} (\phi_{x,x} + w_{0,xx}) - \frac{4}{h^2} (\phi_{y,y} + w_{0,yy}) \right) \right] h^7 + \frac{1}{80} [c_{22} \phi_{y,y} + c_{12} \phi_{x,x} + f_{31} M_2 (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) + e_{31} M_1 (\phi_{x,x} + \phi_{y,y})] h^5 \quad (\text{IV.32})$$

$$P_{xy} = -\frac{1}{336} c_{66} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x} + 2w_{0,xy}) h^5 + \frac{1}{80} c_{66} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) h^5 \quad (\text{IV.33})$$

$$Q_x = \frac{2}{3} c_{44} (\phi_x + w_{0,x}) h \quad (\text{IV.34})$$

$$Q_y = \frac{2}{3} c_{44} (\phi_y + w_{0,y}) h \quad (\text{IV.35})$$

$$R_x = \frac{1}{30} c_{44} (\phi_x + w_{0,x}) h^3 \quad (\text{IV.36})$$

$$R_y = \frac{1}{30} c_{44} (\phi_y + w_{0,y}) h^3 \quad (\text{IV.37})$$

Avec :

$$M_1 = \frac{(\mu_{33}e_{31} - g_{33}f_{31})}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} \quad (\text{IV.38})$$

$$M_2 = \frac{(h_{33}f_{31} - g_{33}e_{31})}{h_{33}\mu_{33} - g_{33}^2} \quad (\text{IV.39})$$

En substituant les équations (IV.25) - (IV.37) aux équations (14), on peut obtenir :

$$[c_{11}u_{0,xx} + c_{12}v_{0,xy} + c_{66}(u_{0,yy} + v_{0,xy})]h = 0 \quad (\text{IV.40})$$

$$[c_{12}u_{0,xy} + c_{22}v_{0,yy} + c_{66}(u_{0,xy} + v_{0,xx})]h = 0 \quad (\text{IV.41})$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{(\phi_{x,xxx} + \phi_{x,xyy} + \phi_{y,xxy} + \phi_{y,yyy})}{210} - \frac{(w_{0,xxxx} + w_{0,yyyy} + 2w_{0,xxyy})}{84} \right) (e_{31}M_1 + f_{31}M_2) + \right. \\ & \left(\frac{(\phi_{x,xxy} + 8\phi_{y,xxx} - 5w_{0,xxyy})}{315} \right) c_{66} + \left(\frac{4(\phi_{x,xyy} + \phi_{y,xxy})}{315} - \frac{w_{0,xxyy}}{126} \right) c_{12} + \left(\frac{4\phi_{x,xxx}}{315} - \right. \\ & \left. \left. \frac{w_{0,xxxx}}{252} \right) c_{11} + \left(\frac{4\phi_{y,yyy}}{315} - \frac{w_{0,yyyy}}{252} \right) c_{22} \right] h^3 + \left[\frac{8(\phi_{x,x} + \phi_{y,y} + w_{0,xx} + w_{0,yy})}{15} \right] h + \\ & (N_{xm} + N_{xe} + N_{xa} - k_g)w_{0,xx} + (N_{ym} + N_{ye} + N_{ya} - k_g)w_{0,yy} + k_w w_0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{315} \left[\left((9\phi_{x,xx} + 9\phi_{y,xy} - 12w_{0,xxx} - 12w_{0,xxy})(e_{31}M_1 + f_{31}M_2) + (17\phi_{y,xy} - \right. \right. \\ & \left. \left. 4w_{0,xxy})c_{12} + (17\phi_{x,xx} - 4w_{0,xxx})c_{11} + (17\phi_{x,yy} + 17\phi_{y,xy} - 8w_{0,xxy})c_{66} \right) h^3 - \right. \\ & \left. 168(\phi_x + w_{0,x})c_{44}h \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{315} \left[\left((9\phi_{x,xy} + 9\phi_{y,yy} - 12w_{0,xxy} - 12w_{0,yyy})(e_{31}M_1 + f_{31}M_2) + (17\phi_{x,xy} - \right. \right. \\ & \left. \left. 4w_{0,xxy})c_{12} + (17\phi_{y,yy} - 4w_{0,yyy})c_{22} + (17\phi_{x,xy} + 17\phi_{y,xx} - 8w_{0,xxy})c_{66} \right) h^3 - \right. \\ & \left. 168(\phi_y + w_{0,y})c_{44}h \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

On introduit les termes non-dimensionnels suivants :

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \frac{u_0}{l}, \bar{v}_0 = \frac{v_0}{l}, \bar{w}_0 = \frac{w_0}{l}, \bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \delta = \frac{h}{l}, \eta = \frac{l}{b}, \theta = \frac{1}{\delta^2}, \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{11}}, \\ \bar{e}_{31}\bar{M}_1 &= \frac{e_{31}M_1}{c_{11}}, \bar{f}_{31}\bar{M}_2 = \frac{f_{31}M_2}{c_{11}}, \bar{k}_w = \frac{k_w l^4}{h^3 c_{11}}, \bar{k}_g = \frac{k_g l^2}{h^3 c_{11}}, \bar{N}_{ij} = \frac{N_{ij} l^2}{h^3 c_{11}}. \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

Les équations (IV.40) - (IV.44) peuvent être écrites sous la forme non dimensionnelle suivante :

$$[\bar{c}_{11}\bar{u}_{0,xx} + \bar{c}_{12}\eta\bar{v}_{0,xy} + \bar{c}_{66}(\eta^2\bar{u}_{0,yy} + \eta\bar{v}_{0,xy})]\theta = 0 \quad (\text{IV.46})$$

$$[\bar{c}_{12}\eta\bar{u}_{0,xy} + \bar{c}_{22}\eta^2\bar{v}_{0,yy} + \bar{c}_{66}(\eta\bar{u}_{0,xy} + \bar{v}_{0,xx})]\theta = 0 \quad (\text{IV.47})$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(\phi_{x,xxx} + \eta^2\phi_{x,xyy} + \eta\phi_{y,xxy} + \eta^3\phi_{y,yyy})}{210} - \frac{(\bar{w}_{0,xxxx} + \eta^4\bar{w}_{0,yyyy} + 2\eta^2\bar{w}_{0,xxyy})}{84} \right) (\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \\ &\bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \left(\frac{(8\eta\phi_{x,xxy} + 8\phi_{y,xxx} - 5\eta\bar{w}_{0,xxyy})}{315} \right) \bar{c}_{66} + \left(\frac{4(\eta^2\phi_{x,xyy} + \eta\phi_{y,xxy})}{315} - \frac{\eta^2\bar{w}_{0,xxyy}}{126} \right) \bar{c}_{12} + \\ &\left(\frac{4\phi_{x,xxx}}{315} + \frac{\bar{w}_{0,xxxx}}{252} \right) \bar{c}_{11} + \left(\frac{4\eta^3\phi_{y,yyy}}{315} - \frac{\eta^4\bar{w}_{0,yyyy}}{252} \right) \bar{c}_{22} + \left[\frac{8(\phi_{x,x} + \eta\phi_{y,y} + \bar{w}_{0,xx} + \eta^2\bar{w}_{0,yy})}{15} \right] \theta + \\ &(\bar{N}_{xm} + \bar{N}_{xe} + \bar{N}_{xa} - \bar{k}_g)\bar{w}_{0,xx} + (\bar{N}_{ym} + \bar{N}_{ye} + \bar{N}_{ya} - \bar{k}_g)\eta^2\bar{w}_{0,yy} + \bar{k}_w\bar{w}_0 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{315} \left[(9\phi_{x,xx} + 9\eta\phi_{y,xy} - 12\bar{w}_{0,xxx} - 12\eta^2\bar{w}_{0,xxy}) (\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + (17\eta\phi_{y,xy} - \right. \\ &4\eta^2\bar{w}_{0,xyy}) \bar{c}_{12} + (17\phi_{x,xx} - 4\bar{w}_{0,xxx}) \bar{c}_{11} + (17\eta^2\phi_{x,yy} + 17\eta\phi_{y,xy} - \\ &8\eta^2\bar{w}_{0,xyy}) \bar{c}_{66} - 168(\phi_x + \bar{w}_{0,x}) \bar{c}_{44} \theta \Big] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{315} \left[(9\eta\phi_{x,xy} + 9\eta^2\phi_{y,yy} - 12\eta\bar{w}_{0,xxy} - 12\eta^3\bar{w}_{0,yyy}) (\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \right. \\ &(17\eta\phi_{x,xy} - 4\eta\bar{w}_{0,xxy}) \bar{c}_{12} + (17\eta^2\phi_{y,yy} - 4\eta^3\bar{w}_{0,yyy}) \bar{c}_{22} + (17\eta\phi_{x,xy} + 17\phi_{y,xx} - \\ &8\eta w_{0,xxy}) \bar{c}_{66} - 168(\phi_y + \eta w_{0,y}) \bar{c}_{44} \theta \Big] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

IV.2.2 Solution de Navier d'une plaque magnéto-piezooélectrique simplement appuyée :

Pour une plaque magnéto-piezooélectrique simplement appuyée, nous avons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = M_{xx} = 0 & \text{ on } x = 0, a, \\ \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = M_{yy} = 0 & \text{ on } y = 0, b.\end{aligned}\quad (\text{IV.51})$$

Pour résoudre le problème de flambement, nous supposons la solution suivante :

$$\begin{aligned}\bar{u}_0 &= U \cos(\alpha \bar{x}) \sin(\beta \bar{y}), \\ \bar{v}_0 &= V \sin(\alpha \bar{x}) \cos(\beta \bar{y}), \\ \bar{w}_0 &= W \sin(\alpha \bar{x}) \sin(\beta \bar{y}), \\ \phi_x &= A \cos(\alpha \bar{x}) \sin(\beta \bar{y}), \\ \phi_y &= B \sin(\alpha \bar{x}) \cos(\beta \bar{y}).\end{aligned}\quad (\text{IV.52})$$

Dans laquelle $\alpha = m\pi$ et $\beta = n\pi$, respectivement. Avec : m et n : Les nombres des modes.

A partir des équations (IV.46) et (IV.50), on peut obtenir les relations suivantes :

$$(-\bar{c}_{11}\alpha^2 - \bar{c}_{66}\eta^2\beta^2)\theta U + (-\bar{c}_{12}\eta\alpha\beta - \bar{c}_{66}\eta\alpha\beta)\theta V = 0 \quad (\text{IV.53})$$

$$(-\bar{c}_{12}\eta\alpha\beta - \bar{c}_{66}\eta\alpha\beta)\theta U + (-\bar{c}_{22}\eta^2\beta^2 - \bar{c}_{66}\alpha^2)\theta V = 0 \quad (\text{IV.54})$$

$$\begin{aligned}& \left[-\frac{1}{84}(\alpha^4 + \eta^4\beta^4 + 2\eta^2\alpha^2\beta^2)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{1}{252}(4\eta\alpha^3\beta\bar{c}_{66} + 2\eta^2\alpha^2\beta^2\bar{c}_{12} - \alpha^4\bar{c}_{11} - \eta^4\beta^4\bar{c}_{22}) + \frac{8}{15}(-\alpha^2 - \eta^2\beta^2)\bar{c}_{44}\theta - (\bar{N}_{xm} + \bar{N}_{xe} + \bar{N}_{xa} - \bar{k}_g)\alpha^2 + (\bar{N}_{ym} + \bar{N}_{ye} + \bar{N}_{ya} - \bar{k}_g)\eta^2\beta^2 + \bar{k}_w \right] W + \left[\frac{1}{210}(\alpha^3 + \eta^2\alpha\beta^2)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}(\eta^2\alpha\beta^2\bar{c}_{12} + \alpha^3\bar{c}_{11} - 2\eta\alpha^2\beta\bar{c}_{66}) - \frac{8}{15}\alpha\bar{c}_{44}\theta \right] A + \left[\frac{1}{210}(\eta\alpha^2\beta + \eta^3\beta^3)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}(-2\alpha^3\bar{c}_{66} + \eta^3\beta^3\bar{c}_{22} + \eta\alpha^2\beta\bar{c}_{12}) - \frac{8}{15}\eta\beta\bar{c}_{44}\theta \right] B = 0\end{aligned}\quad (\text{IV.55})$$

$$\begin{aligned}& \left[\frac{1}{315}(12\alpha^3 + 12\eta^2\alpha\beta^2)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}\alpha^2\eta\beta^2\bar{c}_{12} + \frac{4}{315}\alpha^3\bar{c}_{11} + \frac{8}{315}\eta^2\alpha\beta^2\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\alpha\bar{c}_{44}\theta \right] W + \left[-\frac{1}{35}\alpha^2(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\alpha^2\bar{c}_{11} - \frac{17}{315}\eta^2\beta^2\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\bar{c}_{44}\theta \right] A + \left[-\frac{1}{35}\eta\alpha\beta(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\eta\alpha\beta\bar{c}_{12} - \frac{17}{315}\eta\alpha\beta\bar{c}_{66} \right] B = 0\end{aligned}\quad (\text{IV.56})$$

$$\left[\frac{1}{315} (12\alpha^2\beta + 12\eta^2\beta^3) (\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}\eta^2\alpha\beta\bar{c}_{12} + \frac{4}{315}\beta^3\bar{c}_{22} + \frac{8}{315}\eta^2\alpha^2\beta\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\beta\bar{c}_{44}\theta \right] W + \left[-\frac{1}{35}\alpha\beta(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\eta^2\alpha\beta\bar{c}_{66} - \frac{17}{315}\eta\alpha\beta\bar{c}_{12} \right] A + \left[-\frac{1}{35}\eta\beta^2(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\beta^2\bar{c}_{22} - \frac{17}{315}\eta\alpha^2\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\bar{c}_{44}\theta \right] B = 0 \quad (IV.57)$$

Donc, on obtient la solution suivante :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV.58)$$

Les éléments de la matrice sont :

$$\begin{aligned} L_{11} &= -\bar{c}_{11}\alpha^2\theta - \bar{c}_{66}\eta^2\beta^2\theta \\ L_{12} &= -\bar{c}_{12}\eta\alpha\beta\theta - \bar{c}_{66}\eta\alpha\beta\theta \\ L_{13} &= L_{14} = L_{15} = 0 \end{aligned} \quad (IV.59)$$

$$\begin{aligned} L_{21} &= -\bar{c}_{12}\eta\alpha\beta\theta - \bar{c}_{66}\eta\alpha\beta\theta \\ L_{22} &= -\bar{c}_{22}\eta^2\beta^2\theta - \bar{c}_{66}\alpha^2\theta \\ L_{23} &= L_{24} = L_{25} = 0 \end{aligned} \quad (IV.60)$$

$$\begin{aligned} L_{31} &= L_{32} = 0 \\ L_{33} &= -\frac{1}{84}(\alpha^4 + \eta^4\beta^4 + 2\eta^2\alpha^2\beta^2)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{1}{252}(4\eta\alpha^3\beta\bar{c}_{66} + 2\eta^2\alpha^2\beta^2\bar{c}_{12} - \alpha^4\bar{c}_{11} - \eta^4\beta^4\bar{c}_{22}) + \frac{8}{15}(-\alpha^2 - \eta^2\beta^2)\bar{c}_{44}\theta - (\bar{N}_{xm} + \bar{N}_{xe} + \bar{N}_{xa} - \bar{k}_g)\alpha^2 + (\bar{N}_{ym} + \bar{N}_{ye} + \bar{N}_{ya} - \bar{k}_g)\eta^2\beta^2 + \bar{k}_w \\ L_{34} &= \frac{1}{210}(\alpha^3 + \eta^2\alpha\beta^2)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}(\eta^2\alpha\beta^2\bar{c}_{12} + \alpha^3\bar{c}_{11} - 2\eta\alpha^2\beta\bar{c}_{66}) - \frac{8}{15}\alpha\bar{c}_{44}\theta \\ L_{35} &= \frac{1}{210}(\eta\alpha^2\beta + \eta^3\beta^3)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}(-2\alpha^3\bar{c}_{66} + \eta^3\beta^3\bar{c}_{22} + \eta\alpha^2\beta\bar{c}_{12}) - \frac{8}{15}\eta\beta\bar{c}_{44}\theta \end{aligned} \quad (IV.61)$$

$$L_{41} = L_{42} = 0$$

$$\begin{aligned} L_{43} &= \frac{1}{315}(12\alpha^3 + 12\eta^2\alpha\beta^2)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}\alpha^2\eta\beta^2\bar{c}_{12} + \frac{4}{315}\alpha^3\bar{c}_{11} + \\ &\quad \frac{8}{315}\eta^2\alpha\beta^2\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\alpha\bar{c}_{44}\theta \\ L_{44} &= -\frac{1}{35}\alpha^2(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\alpha^2\bar{c}_{11} - \frac{17}{315}\eta^2\beta^2\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\bar{c}_{44}\theta \\ L_{45} &= -\frac{1}{35}\eta\alpha\beta(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\eta\alpha\beta\bar{c}_{12} - \frac{17}{315}\eta\alpha\beta\bar{c}_{66} \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

$$L_{51} = L_{52} = 0$$

$$\begin{aligned} L_{53} &= \frac{1}{315}(12\alpha^2\beta + 12\eta^2\beta^3)(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) + \frac{4}{315}\eta^2\alpha\beta\bar{c}_{12} + \frac{4}{315}\beta^3\bar{c}_{22} + \\ &\quad \frac{8}{315}\eta^2\alpha^2\beta\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\beta\bar{c}_{44}\theta \\ L_{54} &= -\frac{1}{35}\alpha\beta(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\eta^2\alpha\beta\bar{c}_{66} - \frac{17}{315}\eta\alpha\beta\bar{c}_{12} \\ L_{55} &= -\frac{1}{35}\eta\beta^2(\bar{e}_{31}\bar{M}_1 + \bar{f}_{31}\bar{M}_2) - \frac{17}{315}\beta^2\bar{c}_{22} - \frac{17}{315}\eta\alpha^2\bar{c}_{66} - \frac{8}{15}\bar{c}_{44}\theta \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

IV.3 Résultats et discussion

IV.3.1 Matériaux utilisés :

En première étape, basé sur les formulations mathématiques, un programme informatique avec le langage Maple est développé pour étudier le comportement de flambement des plaques carrées en matériau piézoélectrique BaTiO₃ avec des inclusions de matériau piézo-magnétique CoFe₂O₄ dans la matrice. Les propriétés de ce matériau sont (Wang and Han, 2007) :

$$\begin{aligned} c_{11} &= 226 \times 10^9 N/m^2, c_{12} = 124 \times 10^9 N/m^2, c_{12} = 216 \times 10^9 N/m^2, c_{44} = 44 \times 10^9 N/m^2, \\ e_{31} &= -2.2 C/m^2, f_{31} = 209.2 N/Am, h_{33} = 6.35 \times 10^9 C^2/Nm^2, g_{33} = 2737.5 \times 10^{-12} Ns/VC, \\ \mu_{33} &= 83.5 \times 10^{-6} Ns^2/C^2. \end{aligned}$$

La longueur de la plaque magnéto-piézoélectrique est $L = 1m$, Les résultats numériques peuvent être vus dans les figures IV.2-IV.6, L'expression de la charge du flambement le long de la direction x est donnée sous la forme adimensionnelle suivante :

$$P_{cr} = \bar{N}_{xm} = \frac{Pl^2}{h^3 c_{11}}$$

IV.3.2 Etudes paramétrique

Premièrement, la figure IV.2 illustre l'effet du paramètre de charge latérale λ sur la charge de flambement critique adimensionnelle d'une plaque du rapport géométrique $\eta = \frac{l}{b}$ varie, sans prendre en considération l'effet de fondation élastique. On constate que la charge augmente avec l'augmentation de la valeur du rapport géométrique η et diminue avec la présence de la charge latérale λ .

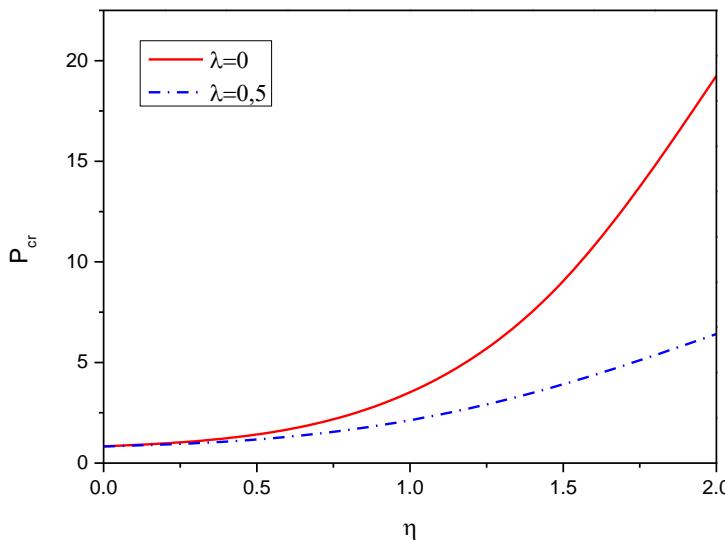


Figure IV.2 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnétoélectroélastique rectangulaire sous différents paramètres de charge latérale λ ($\delta = 0.001, V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$).

Une autre étude comparative pour l'évaluation de la charge critique de flambement entre la présente théorie qui est fondée sur la théorie d'ordre élevé et celle développée par [Li 2014] utilisant la théorie des plaques de Mindlin pour le facteur de correction de cisaillement $\pi^2/12$. Cependant, le tableau VI.1 donne les valeurs de la charge critique de flambement P_{cr} d'une plaque magnétoélectroélastique sans fondation élastique en fonction du rapport $\delta = \frac{h}{l}$.

A partir des résultats présentés, des différences observation sont constatées entre la théorie d'ordre élevé et la théorie des plaques de Mindlin. Les deux théories prennent en considération

l'effet de déformation de cisaillement. Finalement, on constate aussi que la charge critique de flambement diminue avec l'augmentation de la valeur du rapport géométrique $\delta = \frac{h}{l}$.

Tableau IV.1 : Etude comparative des paramètres de charge de flambement, P_{cr} pour une plaque magnéto-électro-élastique carrée. ($V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$).

$\delta = h/l$							
	Theories	0.001	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2
$\lambda=0$	FSDT*($ks=\pi/12$)	3.2794	3.2760	3.1975	2.9747	2.6652	2.3264
	Present	2.9824	2.9794	2.9089	2.7087	2.4304	2.1254
$\lambda=0.5$	FSDT*($ks=\pi/12$)	2.1862	2.1840	2.1317	1.9831	1.7768	1.5509
	Present	1.9882	1.9863	1.9392	1.8058	1.6203	1.4169
$\lambda=-0.5$	FSDT*($ks=\pi/12$)	6.5587	6.5520	6.3950	5.9494	5.3304	4.6527
	Present	5.9647	5.9588	5.8177	5.4174	4.8608	4.2508

*[Li 2014]

La figure IV.3 montre l'influence du potentiel électrique sur la charge de flambement critique adimensionnelle d'une plaque magnéto-électro-élastique carré en fonction de rapport $= \frac{h}{l}$. On voit que la charge de flambement décroît linéairement avec une augmentation de la valeur de la charge électrique.

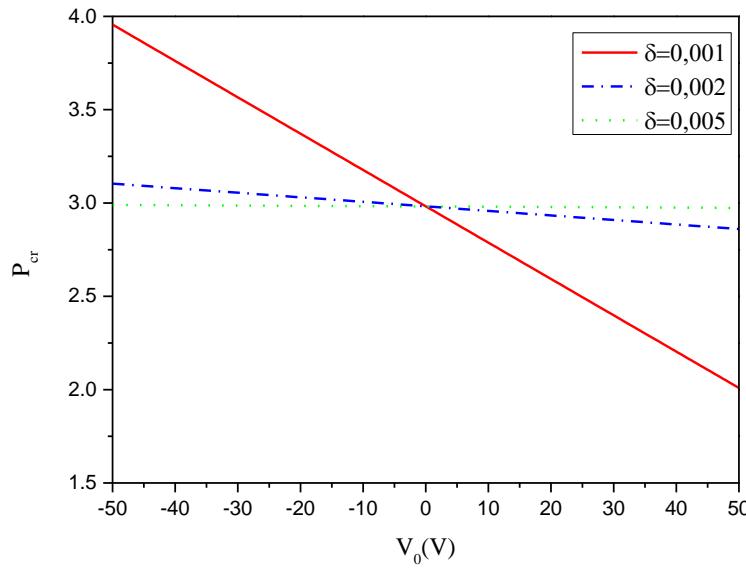


Figure IV.3 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de V_0 pour la plaque magnétoélectroélastique carrée sous différents valeurs de rapports $\delta = \frac{h}{l} (\lambda = 0, \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1)$.

La figure IV.4 illustre l'influence du rapport $\eta = l/b$ sur la charge de flambage critique d'une plaque rectangulaire en fonction de la variation de la charge électrique V_0 . On peut conclure que la charge de flambage critique augmente avec l'augmentation de la valeur du rapport η pour toutes les valeurs du V_0 et que la tendance devient plus apparente pour une charge électrique négative. Ceci est dû au fait que les structures flexibles minces peuvent ne pas suivre une tendance spécifiée des résultats en raison des distorsions géométriques qui sont de nature non linéaire.

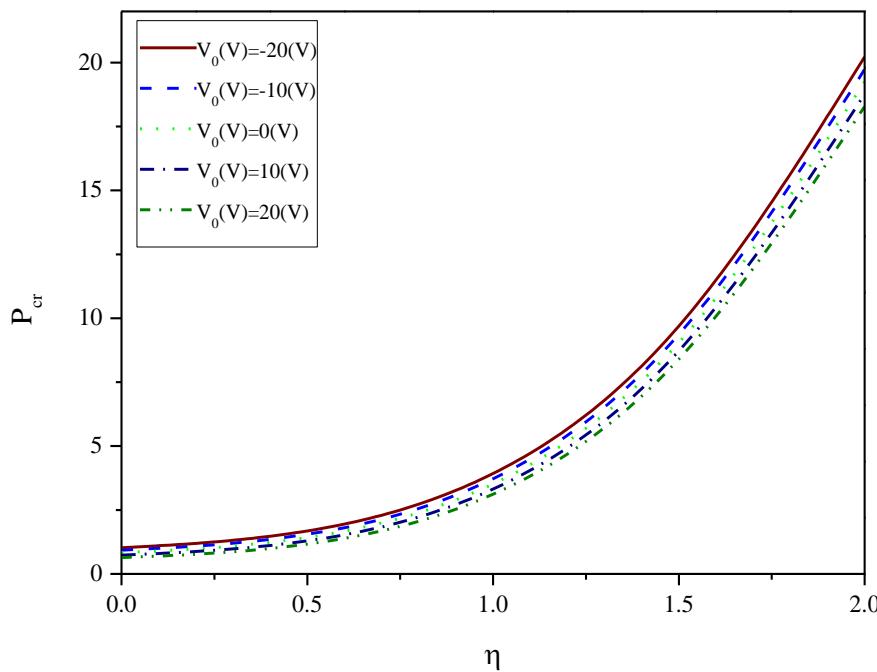


Figure IV.4 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différents valeurs de V_0 ($\delta = 0.001, \lambda = 0, \Omega_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$).

La figure IV.5 montre l'influence de la charge magnétique sur la charge de flambement critique adimensionnelle d'une plaque magnéto-électro-élastique carrée sous différents rapports $\delta = \frac{h}{l}$.

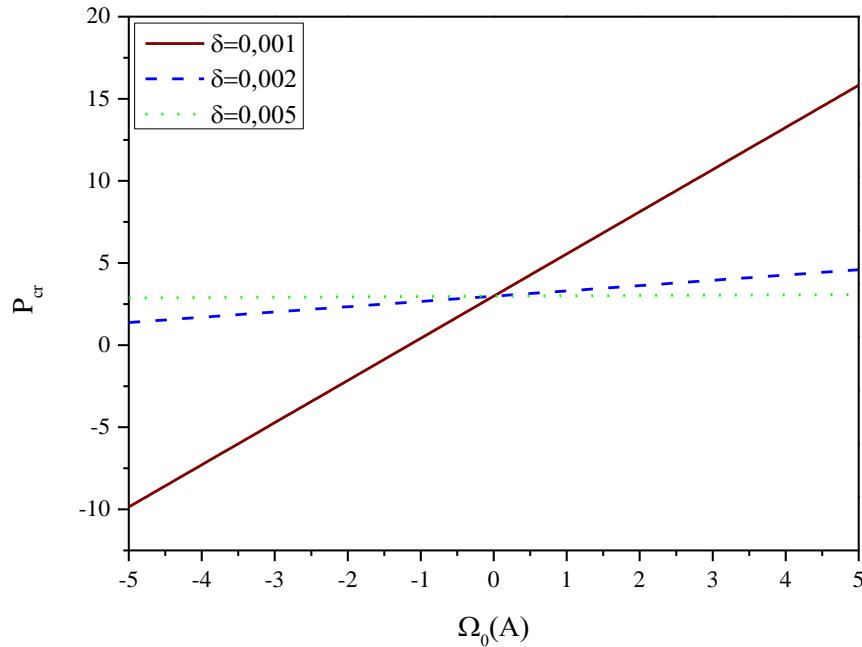


Figure IV.5 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de Ω_0 pour une plaque magnéto-électro-élastique carrée sous différents valeurs de rapports $\delta = \frac{h}{l} (\lambda = 0, V_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1)$.

La figure IV.6 illustre l'influence du rapport $\eta = l/b$ sur la charge de flambage critique d'une plaque rectangulaire en fonction de la variation de la charge magnétique Ω_0 . On peut conclure que la charge de flambage critique augmente avec l'augmentation de la valeur du rapport η pour toutes les valeurs du Ω_0 et que la tendance devient plus apparente pour une charge magnétique en particulier plus grande.

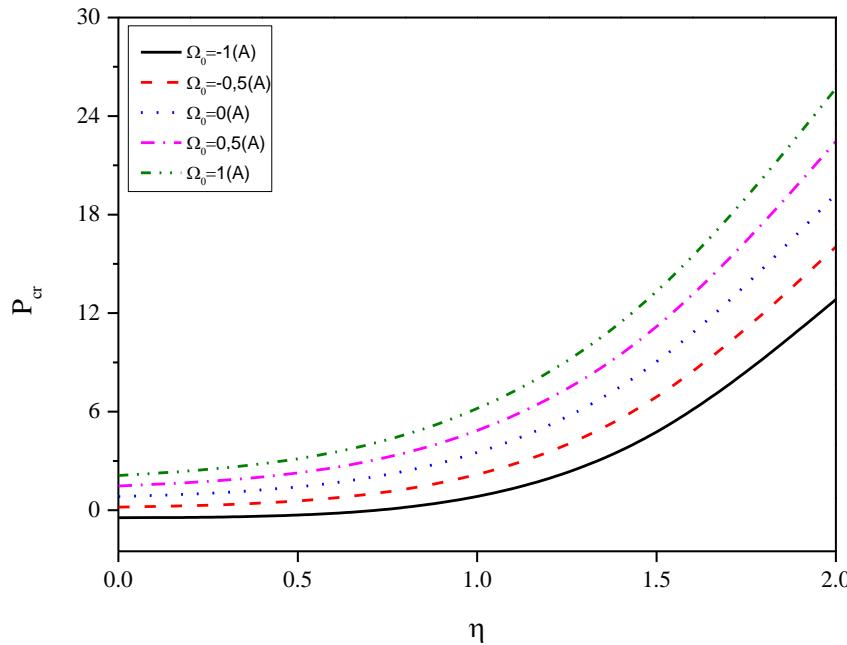


Figure IV.6 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différents valeurs de Ω_0 ($\delta = 0.001, \lambda = 0, V_0 = 0, k_w = k_g = 0, m = n = 1$).

La figure IV.7 représente la variation de la charge critique de flambement en fonction de coefficient de Winkler de la fondation élastique, on remarquer que la charge critique de flambement diminue linéairement avec l'augmentation du coefficient k_w et on peut conclure aussi que l'effet de coefficient k_w sur la charge critique de flambement est réduit pour les plaques épaisses.

La figure IV.8 illustre l'influence du rapport $\eta = l/b$ sur la charge de flambage critique d'une plaque rectangulaire en fonction de la variation de coefficient de Winkler k_w . On peut conclure que la charge de flambage critique augmente avec l'augmentation de la valeur du rapport η pour toutes les valeurs du k_w et que la tendance devient plus apparente pour une valeur de k_w en particulier plus petite.

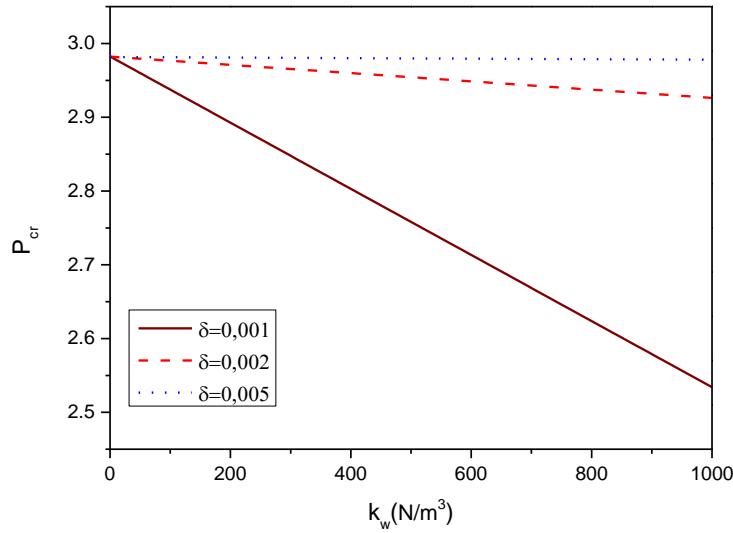


Figure IV.7 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de δ pour la plaque magnéto-électro-élastique carré sous différents valeurs de k_w ($V_0 = \Omega_0 = 0, \lambda = 0, k_g = 0, m = n = 1$).

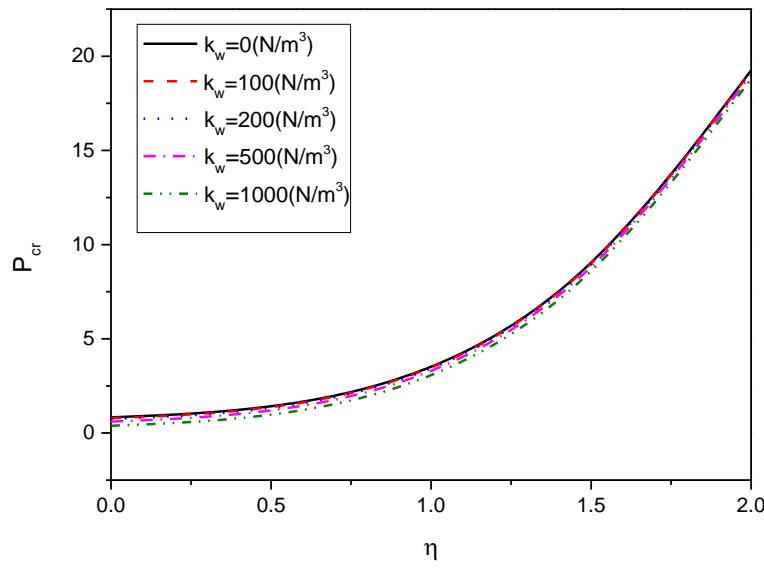


Figure IV.8 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différentes valeurs de k_w ($\delta = 0.001, \lambda = 0, V_0 = \Omega_0 = 0, k_g = 0, m = n = 1$).

L'effet du coefficient de cisaillement k_g , est étudié en choisissant le coefficient de ressort $k_w = 0$, il est remarqué d'après les résultats présentés à la figure IV.9 que la charge critique de flambement diminue linéairement avec une augmentation de la valeur du coefficient de cisaillement k_g . Les résultats illustrent également le rôle significatif du coefficient de cisaillement sur la charge critique de flambement, en particulier pour les plaques minces, et l'effet du coefficient de cisaillement diminue lorsque l'épaisseur de la plaque devient importante. L'effet du rapport longueur/largeur sur la charge de flambement pour différents coefficients de cisaillement est illustré à la figure IV.10 qui illustre des résultats similaires à ceux de la figure IV. 8.

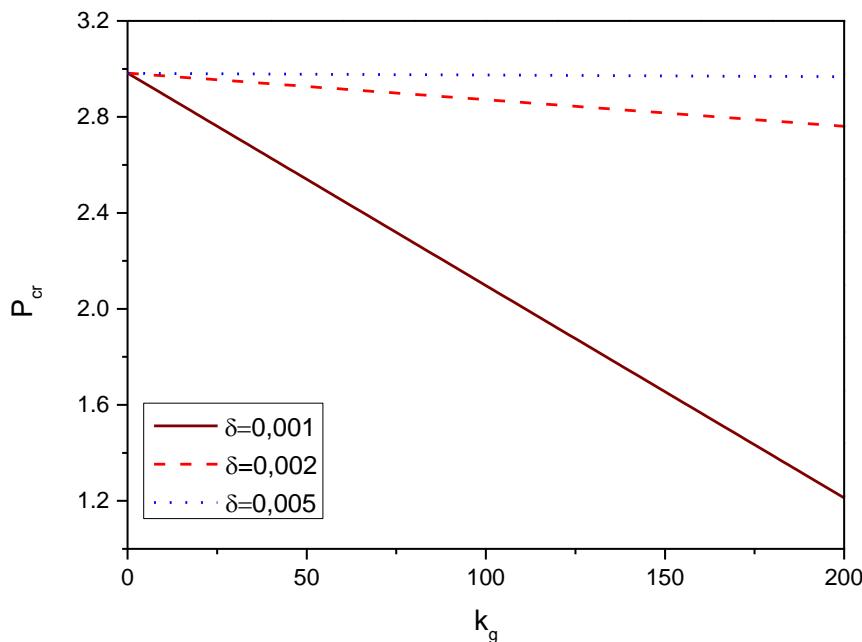


Figure IV.9 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de δ pour la plaque magnéto-électro-élastique carré sous différents valeurs de k_g
 $(\lambda = 0, V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = 0, m = n = 1)$.

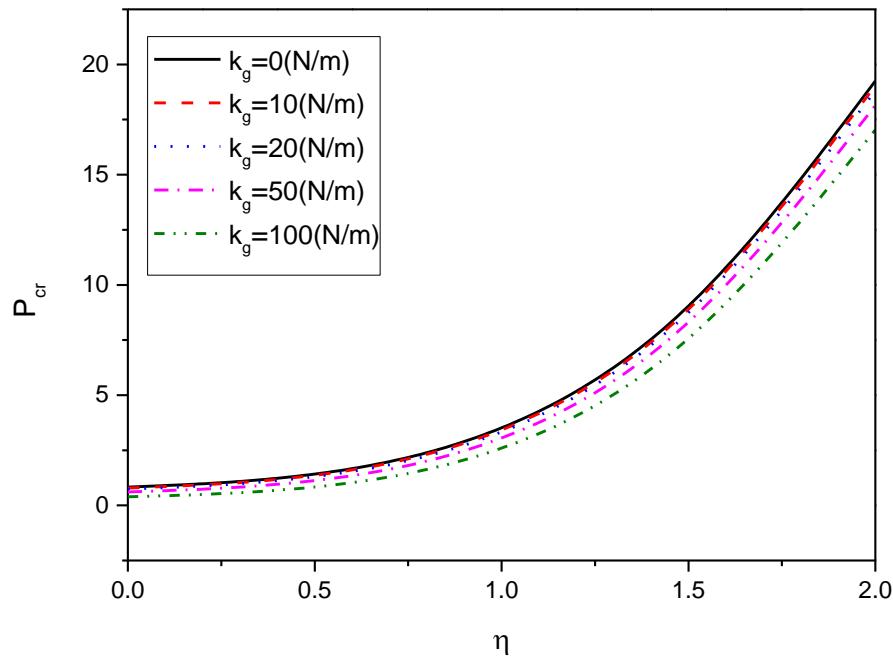


Figure IV.10 : Variation de la charge de flambement critique adimensionnelle P_{cr} en fonction de η pour la plaque magnéto-électro-élastique rectangulaire sous différents valeurs de k_g ($\delta = 0.001, \lambda = 0, V_0 = \Omega_0 = 0, k_w = 0, m = n = 1$).

IV.4 Conclusion

Le flambement des plaques magnéto-piezoelectrique carrées reposant sur un milieu élastique a été obtenu en utilisant des équations d'ordre élevé de la théorie de déformation du cisaillement. Les champs électriques et magnétiques sont ignorés dans le plan de la plaque. D'après l'équation de Maxwell et les conditions aux limites électromagnétiques, la variation des potentialités électriques et magnétiques le long de la direction de l'épaisseur est déterminée. A partir, des résultats obtenus, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- La charge critique adimensionnelle du flambement diminue avec l'augmentation du paramètre.
- La charge critique adimensionnelle du flambement décroît linéairement avec l'augmentation de la charge électrique V_0 , coefficient de cisaillement k_g , coefficient de Winkler k_w par contre la charge de flambement augmente avec l'augmentation de la charge magnétique.
- Ces résultats peuvent être utiles pour l'analyse et la conception de structures intelligentes construites à partir des matériaux piezoelectriques.

CONCLUSION GENERALE

&

PERSPECTIVES

CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Les exigences actuelles, ont conduit les industriels mais aussi les chercheurs dans leurs laboratoires à développer de nouveaux matériaux et également à améliorer les anciennes nuances déjà largement utilisées. En effet, D'une part, ces dernières années ont vu l'émergence de nombreux développements dans le domaine des matériaux dits intelligents. Les matériaux FGM piézoélectriques appartiennent à cette catégorie de matériaux. Dans cette contexte, afin de combler les lacunes de la littérature, l'objectif de cette étude était d'analyser le comportement de structures FGM piézoélectriques. Les points suivants présentent un résumé des conclusions importantes tirées en raison de cette étude :

- L'exactitude du présent modèle est déterminée par comparaison de ses résultats avec des autres solutions analytiques et numériques où un excellent accord a été observé.
- Les plaques et les poutres sont des éléments de structures très répandus en domaine de génie civil. On les rencontre dans de nombreuses structures, notamment, les dalles et les parois, les enceintes de réacteurs, les tours de refroidissement, les barrages...
- La déformation par cisaillement transversal a un effet considérable sur la différence critique de température du flambement des matériaux FGM piézoélectrique. Le cisaillement transversal a pour effet d'assouplir la structure et par conséquent, de baisser la charge critique du flambement.
- La température critique de la poutre FGM avec et sans couches piézoélectriques diminue soit avec l'augmentation du rapport longueur/épaisseur ou l'indice de fraction volumique.
- la charge critique du flambement d'une poutre FGM piézoélectrique soumise à une température de distribution linéaire est plus grande que la charge critique du flambement d'une poutre FGM piézoélectrique soumise à une température uniforme tandis qu'elle est moins que les valeurs de la charge critique d'une poutre FGM piézoélectrique soumise à une température de distribution non-linéaire.
- La température critique de flambement augmente avec l'augmentation de l'épaisseur.
- La température de flambement critique de la plaque FGM piézoélectrique est plus sensible lorsque les pores sont répartis uniformément

Conclusion générale & perspectives

- La charge critique du flambement décroît linéairement avec l'augmentation de la charge électrique V_0 , tandis qu'elle augmente lorsque la charge magnétique augmente.
- L'analyse du flambement des plaques et des poutres composites FGM piézoélectriques est beaucoup plus complexe par rapport aux matériaux conventionnels.

Ces résultats peuvent être utiles pour l'analyse et la conception de structures intelligentes construites à partir des matériaux FGM piézoélectriques.

En perspective, nous voyons très intéressant d'appliquer le modèle d'ordre élevé pour analyser différentes formes de structures FGM piézoélectriques sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, vibratoire, hygrothermique) et en tenant compte des propriétés des matériaux dépendent de la température.

En plus, il serait très intéressant d'étudier la réponse des plaques et poutres FGM piézoélectriques sous différentes types de sollicitations et pour différentes conditions aux limites.

En fin, ce modeste travail s'inscrit dans les axes de recherche de notre laboratoire dans le domaine des structures intelligentes et précisément les composites à gradient de propriétés intégrées aux actionneurs piézo-électriques liés en surface, ainsi nous espérons avoir apporté un plus dans la compréhension du comportement des FGM piézoélectriques.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

A.

- Aboudi, J (2001)**, Micromechanical analysis of fully coupled electro-magneto-thermo-elastic multiphase composites. *Smart Mater. Struct.* 10, 867–877.
- Achenbach, J.D (2000)**, Quantitative nondestructive evaluation. *Int. J. Solids Struct.* 37, 13–27.
- Akavci S. S (2014)**, Thermal buckling analysis of functionally graded plates on an elastic foundation according to a hyperbolic shear deformation theory. Vol. 50, No. 2, pp. 279–298.
- Akhavan, H., Hosseini Hashemi, Sh., Rokni Damavandi Taher, H., Alibeigloo, A., Vahabi, Sh(2009)**, Exact solution for rectangular Mindlin plates under in-plane loads resting on Pasternak elastic foundation. Part I: Buckling analysis. *Comput. Mater. Sci.* 44, 968–978.
- Akhras G and Li W. C (2000)**, Spline finite strip method incorporating different plate theories for thick piezoelectric composite plates. *Smart Struct. Syst.*, Vol. 5 No. 5, pages 531–546.
- ALamir A. E (2015)**, optimal control and design of composite laminated piezoelectric plates. *Smart Struct. Syst.*, Vol. 15 No. 5, pages 1177-1202.
- Alibeigloo, A. (2010)**, Thermoelasticity analysis of functionally graded beam with integrated surface piezoelectric layers. *Composite Structures*, 92(6), 1535–1543.
- Anandrao, K. S., Gupta, R. K., Ramchandran, P., & Rao, G. V. (2010)**, Thermal post-buckling analysis of uniform slender functionally graded material beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 36(5), 545–560.
- Arefi M and Rahimi G.H (2012)**, Studying the nonlinear behavior of the functionally graded annular plates with piezoelectric layers as a sensor and actuator under normal pressure. *Smart Struct. Syst.*, Vol. 9 No. 2, pages 127-143.
- Arefi, M. (2015)**, “The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers”, *Smart Struct and Syst*, Vol. 15 No. 5.
- Arefi, M., Rahimi, G.H. and Khoshgoftar, M.J.(2012)**, “Exact solution of a thick walled functionally graded piezoelectric cylinder under mechanical, thermal and electrical loads in the magnetic field”, *Smart Mater Struct*, Vol. 9 No. 5,
- ARNAU VIVES, (2008)**, A. Piezoelectric transducers and applications. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 525 p.
- Avellaneda, M, Harshe, G (1994)**, Magnetoelectric effect in piezoelectric/magnetostrictive multilayer (2 ± 2) composites. *J. Intel. Mat. Syst. Str.* 5, 501–513.
- Aydogdu, M. (2008)**, Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 27(7), 683–691.

B.

Bao. G, Wang. L. (1995), Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal

Becheri Tawfiq, Amara Khaled, Bouazza Mokhtar and Benseddiq Noureddine (2016), buckling of symmetrically laminated plates using nth-order shear deformation theory with curvature effects. Steel Compos. Struct., Vol. 21, No. 6 1347-1368,

Benjeddou A, Hamdi Mohsen and Ghanmi Samir (2013), robust inverse identification of piezoelectric and dielectric effective behaviors of a bonded patch to a composite plate. Smart Struct. Syst., Vol. 12 No. 5, pages 523-545.

Benveniste, Y (1995), Magnetoelectric effect in fibrous composites with piezoelectric and piezomagnetic phases. Phys. Rev. B 51, 16424–16427.

Bhangale, R.K., Ganesan, N (2006), Static analysis of functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. Int. J. Solids Struct. 43, 3230–3253

Bian, Z. G., Lim, C.W., & Chen,W. Q. (2006), On functionally graded beams with integrated surface piezoelectric layers. Composite Structures, 72(3), 339–351.

Bich, D., Phoung, N.,&Tung, H. (2012), Buckling of functionally graded conical panels under mechanical loads. Composite Structures, 94, 1379–84.

Bishop, a, lin, c.y. navaratnam, m. rawlings.r.d mc. chane (1993), a functionally graded material produced by a powder metallurgical process, journal of materials science letters 1993.

Boch. T. Chartier., M. Huttepain (1986), «Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram». Soc; 69 (8):191-192, 1986.

Bodaghi, M. et Saidi, A.R, (2010), «Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory», Applied Mathematical Modelling, 3659–3673,

Boley B. A. and Weiner J. J. (1960), Theory of Thermal Stresses. John Wiley, New York .

Bouazza .M, Tounsi. A, Adda-Bedia .E.A, Megueni.A, (2010), Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach “, Computational Materials Science 49 pp. 865-870.

Bouazza .M, Tounsi. A, Adda-Bedia .E.A, Megueni.A, (2011a), Thermal buckling of simply supported FGM square plates. Applied Mechanics and Materials Vol. 61,pp 25-32.

Bouazza .M, Tounsi. A, Adda-Bedia .E.A, Megueni.A, (2011b), Stability Analysis of Functionally Graded Plates Subject to Thermal Loads. Shell-like Structures-Advanced Structured Materials, 15 (8) (2011) 669-680.

Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, E. A., Megueni, (2011), A. "Stability analysis of functionally graded plates subject to thermal loads." In: Shell-like Structure. pp. 669-680. Springer,

C.

Chen C-S, Lin C-Y, Chien R-D (2011), Thermally induced buckling of functionally graded hybrid composite plates. International Journal of Mechanical Sciences 53,51-58.

Chen W. J, Lin F. D and Chen L. W (1991), Thermal Buckling Behavior Of Thick Composite Laminated Plates Under Nonuniform Temperature Distribution. Compu. Struct. Vol. 41, No. 4, pp. 637-645.

Chen, J.Y., Chen, H.L., Pan, E., Heyliger, P.R (2007), Modal analysis of magneto-electro-elastic plates using the state-vector approach. J. Sound Vib. 304, 722–734.

Chen, L. W., Lin, C. Y., & Wang, C. C. (2002), Dynamic stability analysis and control of a composite beam with piezoelectric layers. Composite Structures, 56(1), 97–109.

Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. (2003), cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatingsl. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227 1243.

Chun-Sheng Chen, Chih-Yung Lin , Rean-Der Chien (2011), Thermally induced buckling of functionally graded hybrid composite plates. Int. J.Mech. Sci., 53 51–58.

Correia, V. M. F., Soares, C. M. M., & Soares, C. A. M. (2003). Buckling optimization of composite laminated adaptive structures. Composite Structures, 62, 315–321.

Croce, L. D., Venini, P., (2004), Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 193, 705-725.

D.

Dai, H-Land Rao, Y-N. (2011), “Investigation on electromagnetothermoelastic interaction of functionally graded piezoelectric hollow spheres”, Struct. Eng. Mech., Vol. 40 No. 1.

Delale. F, Erdogan. F. (1983), The crack problem for a non-homogeneous plane|. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614.

F.

Fazelzadeh S. A, Hosseini M, and Madani H (2011), Thermal divergence of supersonic functionally graded plates. Journal of Thermal Stresses, 34: 759-777, 2011.

Fu Y, Wang J and Mao Y. (2012), “Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment”, Appl Math Model 36(9): 4324–4340.

G.

Ganapathi M, Touratier M. A (1997), study on thermal postbuckling behaviour of laminated composite plates using a shear-flexible finite element. Finit. Elem.Analy.Desig ; 28:115-35.

Ganesan, N., & Kadoli, R. (2003), Buckling and dynamic analysis of piezothermoelastic composite cylindrical shell. Composite Structures, 59, 45–60.

Gharib, A., Salehi,M., & Fazeli, S. (2008), Deflection control of functionally graded material beams with bonded piezoelectric sensors and actuators. Material Science and Engineering.A-Structures, 498(1–2), 110–114.

Ghasemabadian M.A and Kadkhodayan M (2016), Investigation of buckling behavior of functionally graded piezoelectric (FGP) rectangular plates under open and closed circuit conditions. Struct. Eng. Mech., Vol. 60 No. 2, pages 271-299.

Ghorbanpour Arani A, Khani Arani H, Khoddami Maraghi Z (2016), Vibration analysis of sandwich composite micro-plate under electro-magneto-mechanical loadings. Appl Math Model (In press).

Gowda R. M. S and Padalai K. A. V. (1970), Thermal buckling of orthotropic plates. Struct. Mech., pp. 9-44. IIT, Madras.

H.

Hari Krishnan K P, Shashi Dharan (2017), - Recent Development in Modelling and Analysis of Functionally Graded Materials. Engineering and Technology (IRJET); 04(03):1739-1744

Hashemi Hosseini, Fadaee Sh, Atashipour M, S.R (2011), A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates. Int.J. Mech. Sci. 53, 11–22.

Houari, A. Tounsi, and O. A. Beg, (2013), «Thermoelastic Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using a New Higher Order Shear and Normal Deformation Theory», International Journal of Mechanical Science, vol. 76, pp. 102–111,

J.

Jam, J.E., Nia, N.G. (2012), Dynamic analysis of FGPM annular plate based on the 3-D theory of elasticity. Int. J. Compos.Mater. 2, 53-62.

Javaheri R, Eslami MR (2002a), Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. ZAMM 82(4):277-283.

Javaheri R, Eslami MR (2002c), Thermal buckling of functionally graded plates. AIAA J. 40(1):162-169.

Javaheri R, Eslami MR. (2002), “Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory”, J.Therm. Stresses; 25:603–25.

Javaheri, R., Eslami, M.R., (2002b), Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. ZAMM 82 (4), 277–283.

Jin. Z. H, Batra. R. C. (1996), Journal of Thermal Stresses 19, 317–339.

K.

Kapuria, S., Ahmed, A., & Dumir, P. C. (2004), Static and dynamic thermo-electro-mechanical analysis of angle-ply hybrid piezoelectric beams using an efficient coupled zigzag theory. Composite Science and Technology, 64(16), 2463–2475.

Kapuria, S., Bhattacharyya, M., Kumar, A.N. (2006), “Assessment of coupled 1D models for hybrid piezoelectric layered functionally graded beams”, Compos Struct 72, 455–468.

Kari R. Thangaratnam, Palaninathan and j. Ramachandran (1989), Thermal buckling of composite laminated plates. Compu. Struct. vol.32, no. 5. pp. 1117-1124,

Ke, L. L., Yang, J., Kitipornchai, S., & Xiang, Y. (2009), Flexural vibration and elastic buckling of a cracked Timoshenko beam made of functionally graded materials. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 16(6), 488–502.

Ke,L.L.,Yang, J.,&Kitipornchai, S. (2009), Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded timoshenko beams under end shortening. Composite Structures, 90(2), 152–160.

Kiani, Y., & Eslami,M. R. (2010), Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 6(3), 229–238.

Kiani, Y., Taheri, S., & Eslami, M. R. (2011), Thermal buckling of piezoelectric functionally graded material beams. Journal of Thermal Stresses, 34(8), 835–850.

Kiani, Y.,Rezaei,M., Taheri, S.,&Eslami, M. R. (2011), Thermo-electrical buckling of piezoelectric functionally graded material Timoshenko beams. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 7(3), 185–197.

Kieback.B, neubranda, riedelh (2005), processing techniques for functionally graded materials, material science and engineering a362 (2003) 81-105

Koizumi M (1997), FGM activities in Japan. Composites Part B; 28: 1–4.

Koizumi, M. (1996), «FGM activities in Japan», department of materials chemistry». Ryukoku University, Ohtsu, 520-21 Japan.

Koizumi, M. (1993), “The concept of FGM”, Ceram Trans, Funct Gradient Mater, 34,3–10.

L.

Lee HJ (2005), “Layerwise laminate analysis of functionally graded piezoelectric bimorph beams”, J. Intel. Mater. Syst. Struc. 16(2): 365–371.

Li S, Zhao Rong, Li J, Mo Y and Sun Z (2014), DOB-based piezoelectric vibration control for stiffened plate considering accelerometer measurement noise. Smart Struct. Syst., Vol. 14 No. 3, pages 327-345.

Li, J.Y., Dunn, M.L (1998), Micromechanics of magneto-electro-elastic composite materials: average fields and effective behavior. J. Intel. Mat. Syst. Str. 9, 404–416.

Li, S. R., Su, H. D., & Cheng, C. J. (2009), Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment. *Applied Mathematics and Mechanics*, 30(8), 969–982.

Li Y.S. (2014), Buckling analysis of magnetoelastic plate resting on Pasternak elastic foundation. *Mechanics Research Communications* 56, 104–11.

Liew, K. M., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2003), Post-buckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*, 40(15), 3869–3892.

Liu, M.F., Chang, T.P (2010), Closed form expression for the vibration problem of a transversely isotropic magneto-electro-elastic plate. *ASME J. Appl. Mech.* 77, 024502-1-8.

M.

Ma, L. S., & Lee, D. W. (2011), A further discussion of nonlinear mechanical behavior for FGM beams under in-plane thermal loading. *Composite Structures*, 93(2), 831–842.

Mahamood (2012): Rasheedat m.Mahamood,esther t.aklinlabi member.laeng.mukul shukla and sisa pityana ;functionally graded material :an overview ;proceeding of the world congress on engineering 2012 vol iii

Milazzo, A (2012), An equivalent single-layer model for magnetoelastic multilayered plate dynamics. *Compos. Struct.* 94, 2078–2086.

Mirzavand B, Eslami M.R (2011), A closed-form solution for thermal buckling of piezoelectric FGM rectangular plates with temperature-dependent properties, *Acta Mech.* 218 87-101.

Mirzavand, B., & Eslami, M. R. (2007), Thermal buckling of simply supported piezoelectric FGM cylindrical shells. *Journal of Thermal Stresses*, 30(11), 1117–1135.

Miyamoto.(2013), Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, Springer Science & Business Media;2013, p 4-5.

Mohammadi M , Saidi A. R , Jomehzadeh E (2009), Levy Solution for Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates. *Int. J. Appl. Comp. Mater.*, DOI 10.1007/s10443-009-9100-z.

N.

Na. K. S et Kim. J. H (2006), “Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method”, *Finite Elem. Anal. Des.*, 42, 749-756.

Nami MR, Janghorban M and Damadam M (2015), Thermal buckling analysis of functionally graded rectangular nanoplates based on nonlocal third-order shear deformation theory. *Aerospace Sci Technol*; 41: 7-15.

Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi (2011), Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions; John Wiley & Sons;page 110, 4 août 2011 .

Nestorović T, Trajkov Miroslav and Garmabi Seyedmehdi (2015), Optimal placement of piezoelectric actuators and sensors on a smart beam and a smart plate using multi-objective genetic algorithm. Smart Struct. Syst., Vol. 15 No. 4, pages 1041-1062.

Nguyen (2008), Trung-Kien Nguyen, quelques méthodes pour l'estimation des propriétés effectives des plaques hétérogènes, thèse de doctorat université paris-est ,2008 page 30-31.

Nguyen T-K (2014), A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials. Int J Mech .

P.

Pai B.C, Pillai R.M.and Rajan T.P.D (2004), functionally graded materials and composites for engineering applications,regional research laboratory,thiruvananthapuram-695 109

Pan, E (2001), Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates. ASME J. Appl. Mech. 68, 608–618.

Pan, E., Han, F (2005), Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. Int. J. Eng. Sci. 43, 321–339.

Praveen GN, Reddy JN. (1998), Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates. Int J Solids Struct; 35:4457–71.

Praveen, G.N. and Reddy, J.N. (1998), “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramicmetal plates”, Inter. J.Solds. Struct, 35(33), 4457-4476.

Priya, S, Islam, R., Dong, S.X, Vehland, D (2007), Recent advancements in magnetoelectric particular and laminate composites. J. Electroceram. 19, 149–166.

R.

Reddy J.N. (2004), Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, second ed., CRC Press, Boca Raton, Florida.

Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S. (1999), Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. Eur j Mech A/Solids; 18:185–99.

Reddy JN. (1984), Energy and variational methods in applied mechanics. New York: John Wiley.

Reddy JN. (2000), Analysis of functionally graded plates. Int J Numer Meth Eng; 47:663–84.

S.

Saadatfar, M and Aghaie-Khafri, M. (2015), “Electromagnetothermoelastic behavior of a rotating imperfect hybrid functionally graded hollow cylinder”, Smart Struct and Syst, Vol. 15 No. 6, 2015.

SADOUNE.Z(2013), Modélisation et simulation des matériaux composites Piézoélectriques Cas du SiO₂, thèse de doctorat. université mohammed v – agdal faculté des sciences rabat.

Samsam Shariat (2005), B.A.Samsam Shariat ,R.Jawaheri,M.R.Eslami,buckling of imperfect functionally graded plates under in-plane compressive loading,thin-walled structure 43 (2005) 1020-1036.

Shegokar, N. L. and Lal, A. (2016), “Stochastic dynamic instability response of piezoelectric functionally graded beams supported by elastic foundation”, Adv. Aircr Spac. Sci, Vol. 3 No. 4.

Shen (2011), Hui-Shen Shen, functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells,crc press,2011.

Shen, H.S. (2007), “Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature dependent properties”, Int. J. Mech. Sci., 49(4), 466-478.

Shen, H.-S. (2009), «Functionally Graded Materials – Nonlinear Analysis of Plates and Shells», New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Shen, H. S. (2001), Postbuckling analysis of axially-loaded laminated cylindrical shells with piezoelectric actuators. European Journal of Mechanics - A/Solids, 20, 1007–1022.

Shen, H. S. (2001), Thermal post-buckling of shear-deformable laminated plates with piezoelectric actuators. Composites Science and Technology, 61, 1931–1943.

Shen, H. S. (2002), Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments. Composites Science and Technology, 65, 16751690.

Shen, H. S. (2005), Post-buckling of FGM plates with piezoelectric actuators under thermoelectro-mechanical loadings. International Journal of Solids and Structures, 42, 6101–6121.

Shen, H. S., & Li, Q. S. (2002), Postbuckling of cross-ply laminated cylindrical shells with piezoelectric actuators under complex loading conditions. International Journal of Mechanical Sciences, 44, 1731–1754.

Shi, Z.F., Chen, Y. (2004), “Functionally graded piezoelectric cantilever beam under load”, Arch. Appl Mech. 74 (3–4) 237–247.

Sladek, J., Sladek, V., Krahulec, S., Pan, E (2013), The MLPG analyses of large deflections of magnetoelectroelastic plates. Eng. Anal. Bound. Elem. 37, 673–682.

Sofiyev, A. H. (2009), The vibration and stability behavior of freely supported FGM conical shells subjected to external pressure. Composite Structures, 89, 356–366.

Sofiyev, A. H. (2010), Buckling analysis of FGM circular shells under combined loads and resting on the Pasternak type elastic foundation. Mechanics Research Communications, 37, 539–544.

- Sofiyev, A. H. (2010)**, The buckling of FGM truncated conical shells subjected to combined axial tension and hydrostatic pressure. *Composite Structures*, 92, 488–498.
- Sofiyev, A. H. (2011)**, Influence of the initial imperfection on the non-linear buckling response of FGM truncated conical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 753–762.
- Sofiyev, A. H. (2011)**, Thermal buckling of FGM shells resting on a two-parameter elastic foundation. *Thin-Walled Structure*, 49(10), 1304–11.
- Sofiyev, A. H., Kuruoglu, N., & Turkmen, M. (2009)**, Buckling of FGM hybrid truncated conical shells subjected to hydrostatic pressure. *Thin-Walled Structures*, 47, 61–72.

T.

Tondreau G, Raamanujan Raman S and Deraemaeker A (2014), Point load actuation on plate structures based on triangular piezoelectric patches. *Smart Struct. Syst.*, Vol. 13 No. 4, pages 547-565.

Tounsi M. S. A. Houari, S. Benyoucef, and E. A. Adda Bedia, (2013), «A Refined Trigonometric Shear Deformation Theory for Thermoelastic Bending of Functionally Graded Sandwich Plates», *Aerospace Science and Technology*, vol. 24, no. 1, pp. 209–220,

Touratier .M (1991), An efficient standard plate theory, *Int. J. Eng. Sc*; 29 (8): 901-916.

V.

Varelis, D., & Saravanos, D. A. (2004), Coupled buckling and post-buckling analysis of active laminated piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 41, 1519–1538.

Vinyas M .Kattiman S.C (2017), Hygrothermal analysis of magneto-electro-elastic plate using 3D finite element analysis, *Composite Structures* Volume 180, , Pages 617-637.

W.

Wang Q, Quek ST. (2000), “Flexural vibration analysis of sandwich beam coupled with piezoelectric actuator. *Smart Mater Struct*; 9(1):103–9.

Wang, B.L., Han, J.C (2007), Multiple cracking of magnetoelectroelastic materials in coupling thermo-electro-magneto-mechanical loading environments. *Comput. Mater. Sci.*39, 291–304.

Wang, H.M., Wei, Y.K and Xu, Z.X. (2011), “Radial vibration behaviors of cylindrical composite piezoelectric transducers integrated with functionally graded elastic layer”, *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 38 No. 6.

Wang, J.G., Chen, L.F., Fang, S.S (2003), State vector approach to analysis of multilayered magneto-electro-elastic plates. *Int. J. Solids Struct.* 40, 1669–1680.

- Wattanasakulpong N. and Ungbhakorn V (2014)**, “Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGMbeams with porosities,” *Aerosp. Sci. Technolo.*, vol. 32, no.1, pp. 111–120.
- WOO J., MEGUID S.A. (2001)**, Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells, *International Journal of Solids and Structures* 38, 7409-7421.
- Wu C-P and Ding S (2015)**, Coupled electro-elastic analysis of functionally graded piezoelectric material plates. *Smart Struct. Syst.*, Vol. 16 No. 5, pages 781-806.
- Wu L, Jiang Z, and Feng Wenjie (2004)**, An analytical solution for static analysis of a simply supported moderately thick sandwich piezoelectric plate. *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 17 No. 5, pages 641-654.
- Wu T-L, Shukla K.K, Huang Jin H (2007)**, Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates, *Compos. Struct.*, vol. 81, pp. 1–10.
- Wu, L., (2004)**, «Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate», *Composite Structures*, 64, 211–218.
- X.**
- Xiong, Q-l and Tian,X.(2017)**, “Transient thermo-piezo-elastic responses of a functionally graded piezoelectric plate under thermal shock”, *Steel Comp. Struct.*, Vol. 25 No. 2.
- Y.**
- Yaghoobi, H. and Yaghoobi, P. (2013)**, «Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: An analytical approach», *Meccanica* , 48:2019–2035,
- Yang JS. (1998)**, “Equations for the extension and flexure of a piezoelectric beam with rectangular cross section and applications”, *Int J Appl Electromag Mech*;9(4):409–20.
- Yoshihisa Uchida (2004)**, «Properties of functionally graded materials, manufactured by Progressive Lamination Method for Applications», 39- 51-B, Vol. 39-B. coatings||, *Int. J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871.
- Z.**
- Zenz G, Berger W, Gerstmayr J, Nader M and Krommer M (2013)**, Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates. *Smart Struct. Syst.*, Vol. 12 No. 5, pages 547-577.
- Zhang,T and Shi,Z.(2010)**, “Exact analyses for two kinds of piezoelectric hollow cylinders with graded properties”, *Smart Mater Struct*, Vol. 6 No. 8.
- Zhao X, Lee Y.Y, Liew K.M (2009)**, Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Composite Structures* 90 161–171.

في هذا العمل نركز على تحليل الانلتواء للصفائح والروافد المتردجة وظيفيا مدمجة مع محسات كهرو ضغطية على السطح، حيث تتعرض هذه الأخيرة إلى حمولات حرارية وقوى الشد الخاصة بالمجسات الكهروضغطية، خصائص المواد المتردجة وظيفيا موزعة بشكل مستمر على كامل السمك حيث يتم الحصول على معادلات التوازن والاستقرار للصفحة أو الروافدة المتردجة وظيفيا كهرو ضغطية عن طريق نظرية تشوه القص.

الجديد في هذا العمل هو الحصول على الانلتواء الأعظمي للصفائح أو الروافدة المتردجة وظيفيا كهرو ضغطية. حيث يتم دراسة مختلف العوامل المؤثرة على الانلتواء الحراري الأعظمي مثل نوع الحمولة، الخصائص الهندسية، المؤشر الأسوي ، وشدة التوتر المطبق على المجسات كهرو ضغطية .

الكلمات الدالة: المواد المتردجة وظيفيا كهرو ضغطية،الصفائح،الروافد،الانلتواء الحراري،نظرية تشوه القص.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à l'analyse du flambement des plaques et des poutres fonctionnellement graduées intégrées aux actionneurs piézo-électriques liés en surface et est soumise à l'action combinée des charges thermiques et des charges de traction constantes dues à l'actionneur appliqué. Les propriétés du matériau fonctionnellement gradué supposées varier à travers l'épaisseur de façon continue. Les équations d'équilibre et de stabilité des poutres et des plaques FGM piézoélectrique sont obtenues basée sur la théorie de déformation de cisaillement. La nouveauté du présent travail est d'obtenir la solution de température critique de flambement des plaques et des poutres FGM intégrées avec des couches piézoélectriques.

Un effort particulier est porté sur les divers paramètres qui influent sur la charge critique du flambement thermique des plaques FGM piézo-électriques, tels que : type de chargement, paramètres géométriques, l'index de la loi de puissance ainsi que les effets de la tension appliquée de l'actionneur.

Mots clé : Matériaux FGM piézoélectriques ; plaques ; poutres ; flambement thermique ; théorie de déformation de cisaillement.

Abstract

This work focuses on the analysis of the buckling of functionally graduated plates and beams integrated into surface-bonded piezoelectric actuators and is subjected to the combined action of thermal loads and constant tensile loads due to the applied actuator. The properties of the functionally graduated material assumed to vary through the thickness continuously. The equations of equilibrium and stability of piezoelectric FGM beams and plates are obtained based on the theory of shear deformation. The novelty of this work is to obtain the critical buckling temperature solution for FGM plates and beams integrated with piezoelectric layers.

Particular attention is paid to the various parameters that influence the critical thermal buckling load of piezoelectric FGM plates, such as: loading type, geometric parameters, power law index and the effects of the applied actuator voltage.

Keywords: Piezoelectric FGM materials; plates; beams; thermal buckling; shear deformation theory.