Statistique Appliquée

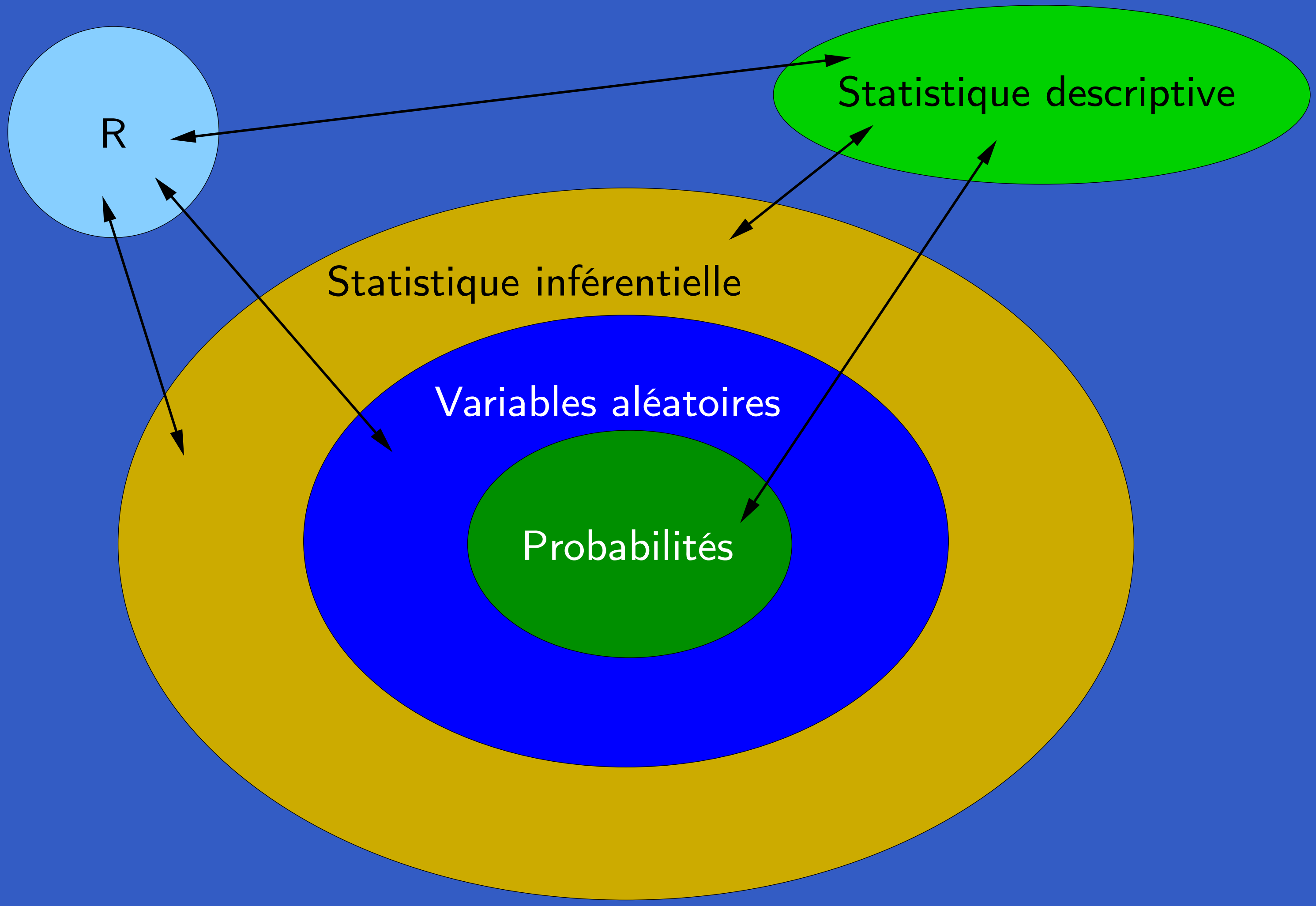
Iannis Aliferis

École Polytechnique de l'Université de Nice – Sophia Antipolis
Polytech'Nice Sophia
Département d'Électronique, 3e année, 2007–2008

Iannis.Aliferis@unice.fr

Introduction

Le cours en bref



Plan du cours

- Rappels sur les probabilités
  - différentes définitions
  - probabilité conditionelle
  - indépendance
- Variables aléatoires (discrètes et continues)
  - fonction/densité de probabilité
  - espérance, variance, moments
  - indépendance entre v.a.
- Statistique descriptive
  - moyenne, écart-type, quartiles, . . .
  - histogrammes, boîtes à moustaches
- Statistique inférentielle
  - estimation
  - intervalles de confiance
  - tests d’hypothèse

Plan du cours

- Rappels sur les probabilités
  - différentes définitions
  - probabilité conditionelle
  - indépendance
- Variables aléatoires (discrètes et continues)
  - fonction/densité de probabilité
  - espérance, variance, moments
  - indépendance entre v.a.
- Statistique descriptive
  - moyenne, écart-type, quartiles, . . .
  - histogrammes, boîtes à moustaches
- Statistique inférentielle
  - estimation
  - intervalles de confiance
  - tests d'hypothèse

Plan du cours

- Rappels sur les probabilités
  - différentes définitions
  - probabilité conditionelle
  - indépendance
- Variables aléatoires (discrètes et continues)
  - fonction/densité de probabilité
  - espérance, variance, moments
  - indépendance entre v.a.
- Statistique descriptive
  - moyenne, écart-type, quartiles, . . .
  - histogrammes, boîtes à moustaches
- Statistique inférentielle
  - estimation
  - intervalles de confiance
  - tests d'hypothèse

Plan du cours

- Rappels sur les probabilités
  - différentes définitions
  - probabilité conditionelle
  - indépendance
- Variables aléatoires (discrètes et continues)
  - fonction/densité de probabilité
  - espérance, variance, moments
  - indépendance entre v.a.
- Statistique descriptive
  - moyenne, écart-type, quartiles, ...
  - histogrammes, boîtes à moustaches
- Statistique inférentielle
  - estimation
  - intervalles de confiance
  - tests d'hypothèse

Plan du cours

- Rappels sur les probabilités
  - différentes définitions
  - probabilité conditionelle
  - indépendance
- Variables aléatoires (discrètes et continues)
  - fonction/densité de probabilité
  - espérance, variance, moments
  - indépendance entre v.a.
- Statistique descriptive
  - moyenne, écart-type, quartiles, ...
  - histogrammes, boîtes à moustaches
- Statistique inférentielle
  - estimation
  - intervalles de confiance
  - tests d'hypothèse

Bibliographie

- Probabilités, Variables Aléatoires :
  - P. Bogaert, “Probabilités pour scientifiques et ingénieurs”, De Boeck, Bruxelles, 2006
  - D. Bertsekas, J. Tsitsiklis, “Introduction to Probability”, Athena Scientific, Belmont, 2002
- Statistique :
  - T.H. Wonnacott, R.J. Wonnacott, “Introductory Statistics”, 5th ed., Wiley, 1990
  - R.E. Walpole, R.H. Mayers, “Probability and Statistics for Engineers and Scientists”, Prentice Hall International, 1993.
- R (livres disponibles en ligne) :
  - E. Paradis, “R pour les débutants”, 2005
  - W. N. Venables, D. M. Smith and the R Development Core Team, “An introduction to R”, 2006
  - W. J. Owen, “The R Guide”, 2006

Bibliographie

- Probabilités, Variables Aléatoires :
  - P. Bogaert, "Probabilités pour scientifiques et ingénieurs", De Boeck, Bruxelles, 2006
  - D. Bertsekas, J. Tsitsiklis, "Introduction to Probability", Athena Scientific, Belmont, 2002
- Statistique :
  - T.H. Wonnacott, R.J. Wonnacott, "Introductory Statistics", 5th ed., Wiley, 1990
  - R.E. Walpole, R.H. Mayers, "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Prentice Hall International, 1993.
- R (livres disponibles en ligne) :
  - E. Paradis, "R pour les débutants", 2005
  - W. N. Venables, D. M. Smith and the R Development Core Team, "An introduction to R", 2006
  - W. J. Owen, "The R Guide", 2006

Bibliographie

- Probabilités, Variables Aléatoires :
  - P. Bogaert, "Probabilités pour scientifiques et ingénieurs", De Boeck, Bruxelles, 2006
  - D. Bertsekas, J. Tsitsiklis, "Introduction to Probability", Athena Scientific, Belmont, 2002
- Statistique :
  - T.H. Wonnacott, R.J. Wonnacott, "Introductory Statistics", 5th ed., Wiley, 1990
  - R.E. Walpole, R.H. Mayers, "Probability and Statistics for Engineers and Scientists", Prentice Hall International, 1993.
- R (livres disponibles en ligne) :
  - E. Paradis, "R pour les débutants", 2005
  - W. N. Venables, D. M. Smith and the R Development Core Team, "An introduction to R", 2006
  - W. J. Owen, "The R Guide", 2006

Rappels sur les Probabilités

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\boldsymbol{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins. . .), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\mathbf{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins...), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\boldsymbol{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins...), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\mathbf{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins...), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\mathsf{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\boldsymbol{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins. . .), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\boldsymbol{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins...), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers $\boldsymbol{\Omega}$** : l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement $\mathbf{A}$** : un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins…), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\mathbf{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins. . .), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\mathsf{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\mathbf{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins. . .), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\mathsf{max}}\}$
  - $A = \{$il y a moins de 5 personnes$\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Définitions

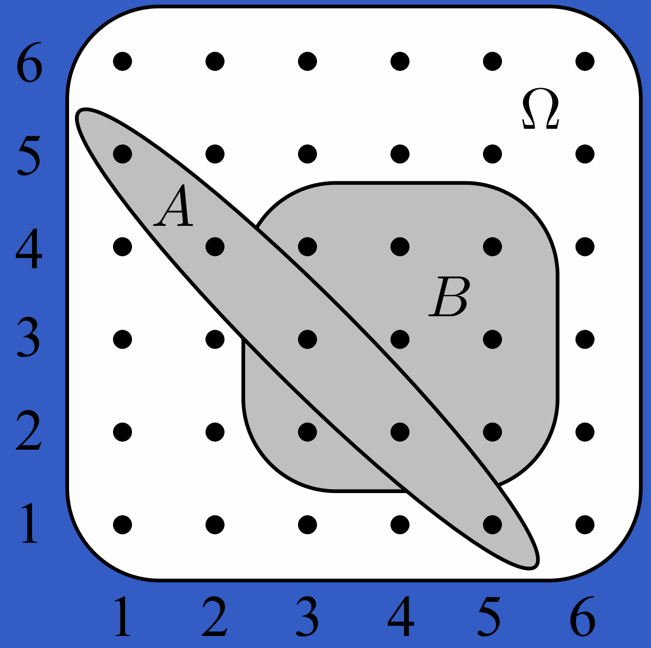
- **Expérience aléatoire** : plusieurs résultats possibles
- **Issue** ou **éventualité** ω : un des résultats possibles
- **Univers** $\boldsymbol{\Omega}$: l'ensemble de *tous* les résultats
- **Événement** $\mathbf{A}$: un sous-ensemble de Ω

- Exemple :
  - « Compter le nombre de personnes présentes »
  - $\omega_1 = 1$ (au moins. . .), $\omega_2 = 70$, etc.
  - $\Omega = \{1, 2, \ldots, N_{\text{max}}\}$
  - $A = \{\text{il y a moins de 5 personnes}\} = \{1, 2, 3, 4\} \subset \Omega$

Exemple : lancer deux dés

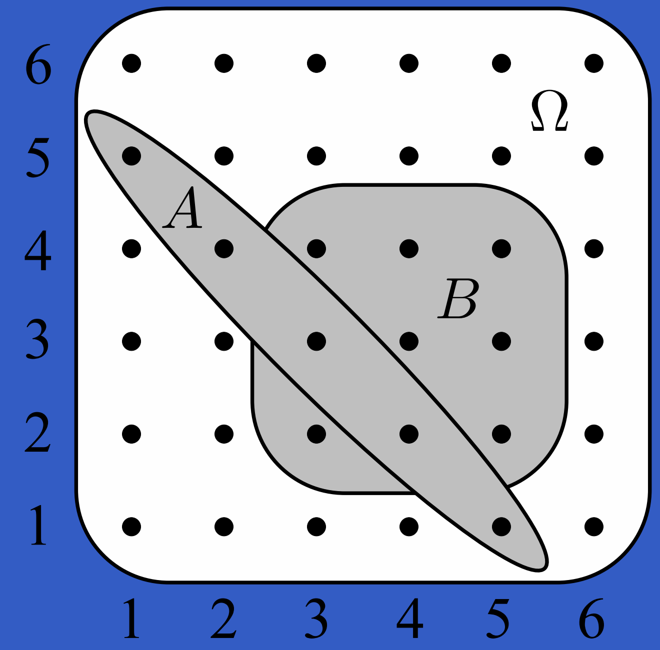
- $\omega_1 = (1,1)$, $\omega_2 = (3,4)$, $\omega_3 = (4,3)$, ...
- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),\dots,(6,6)\}$
- $A = \{$la somme est égale à 6$\}$
- $B = \{$le 1$^{\text{er}}$ est entre 3 et 5 ; le 2$^{\text{nd}}$ entre 2 et 4$\}$

Exemple : lancer deux dés



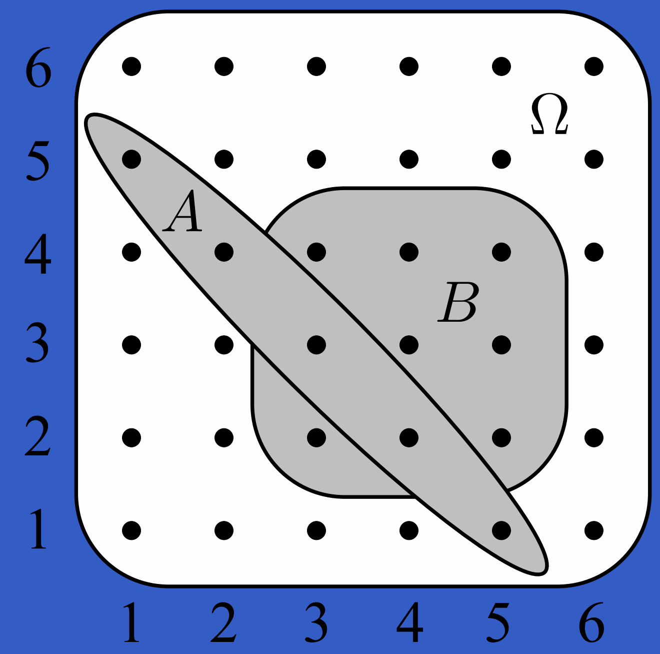
- $\omega_1 = (1,1)$, $\omega_2 = (3,4)$, $\omega_3 = (4,3)$, ...
- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$
- $A = \{$la somme est égale à 6$\}$
- $B = \{$le 1$^{\text{er}}$ est entre 3 et 5 ; le 2$^{\text{nd}}$ entre 2 et 4$\}$

Exemple : lancer deux dés



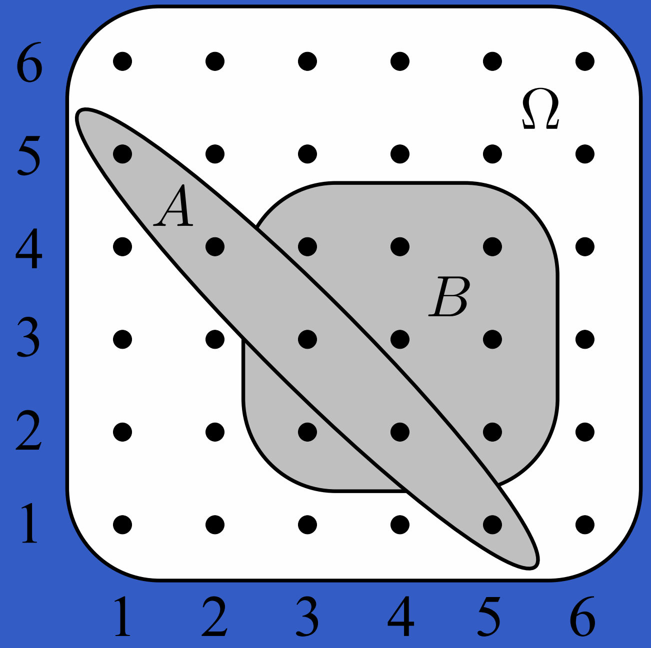
- $\omega_1 = (1, 1)$, $\omega_2 = (3, 4)$, $\omega_3 = (4, 3)$, . . .
- $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (6, 6)\}$
- $A = \{$la somme est égale à 6$\}$
- $B = \{$le 1$^{\text{er}}$ est entre 3 et 5 ; le 2$^{\text{nd}}$ entre 2 et 4$\}$

Exemple : lancer deux dés



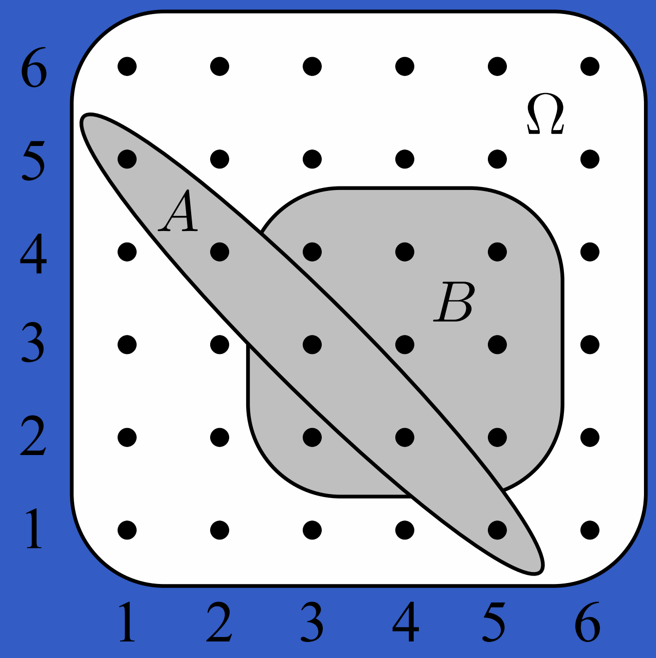
- $\omega_1 = (1,1)$, $\omega_2 = (3,4)$, $\omega_3 = (4,3)$, ...
- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$
- $A = \{$la somme est égale à 6$\}$
- $B = \{$le 1er est entre 3 et 5 ; le 2nd entre 2 et 4$\}$

Exemple : lancer deux dés



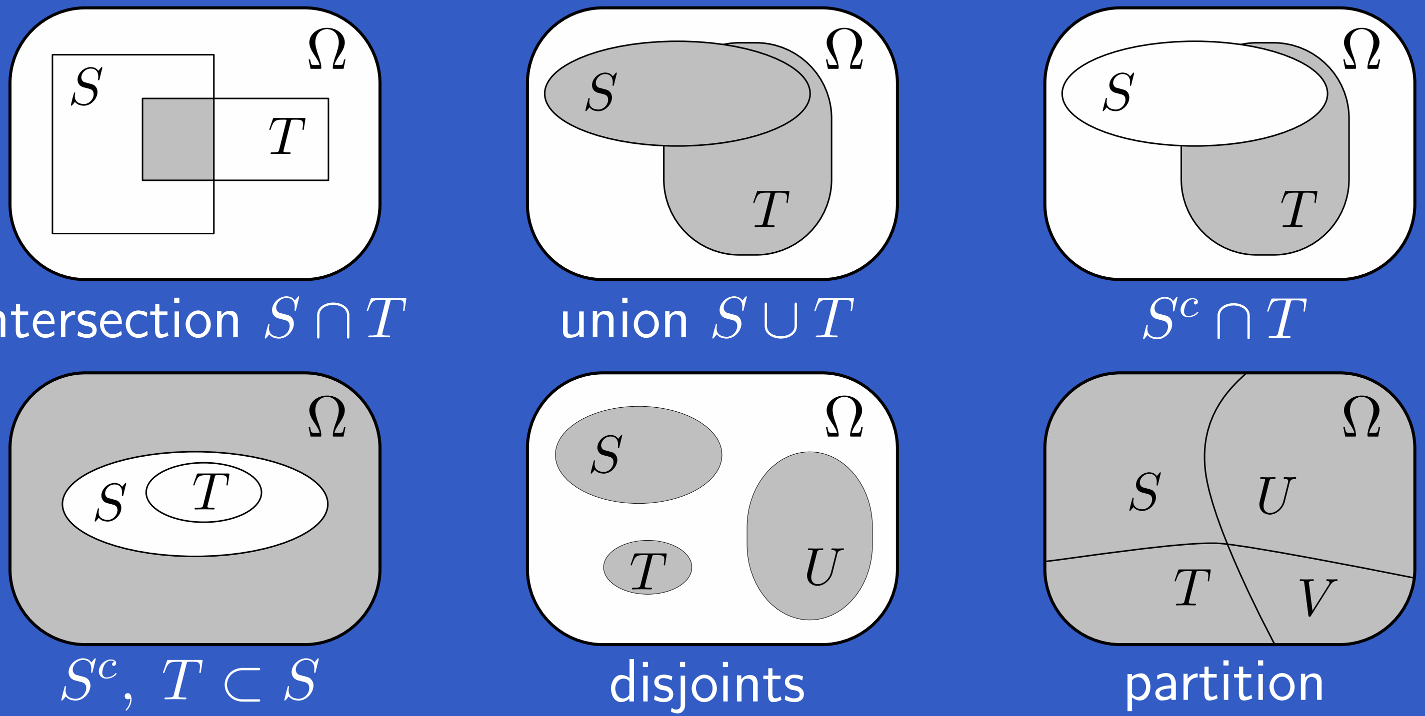
- $\omega_1 = (1,1)$, $\omega_2 = (3,4)$, $\omega_3 = (4,3)$, ...
- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$
- $A = \{$la somme est égale à 6$\}$
- $B = \{$le 1$^{\text{er}}$ est entre 3 et 5 ; le 2$^{\text{nd}}$ entre 2 et 4$\}$

Exemple : lancer deux dés

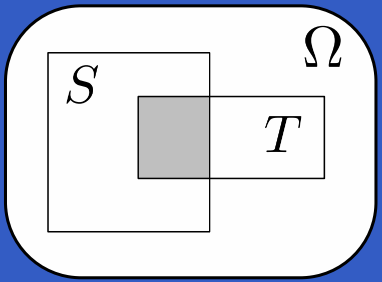


- $\omega_1 = (1,1)$, $\omega_2 = (3,4)$, $\omega_3 = (4,3)$, ...
- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$
- $A = \{$la somme est égale à 6$\}$
- $B = \{$le 1$^{\text{er}}$ est entre 3 et 5 ; le 2$^{\text{nd}}$ entre 2 et 4$\}$

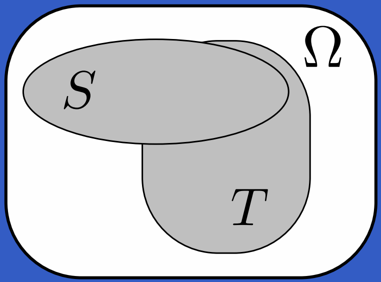
Ensembles



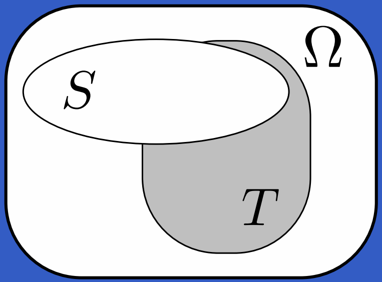
- Disjoints : $\bigcap_i S_i = \emptyset$ (mutuellement exclusifs)
- Partition : S_i disjoints *et* $\bigcup_i S_i = \Omega$
- De Morgan 1 : $\left(\bigcap_i S_i\right)^c = \bigcup_i S_i^c$
- De Morgan 2 : $\left(\bigcup_i S_i\right)^c = \bigcap_i S_i^c$



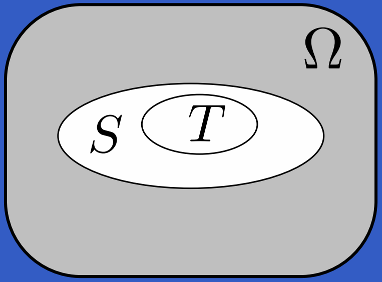
intersection $S \cap T$



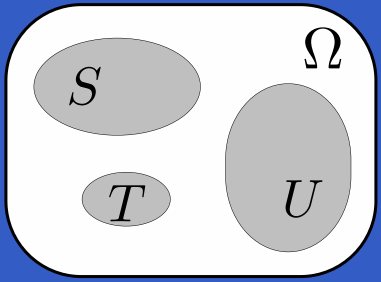
union $S \cup T$



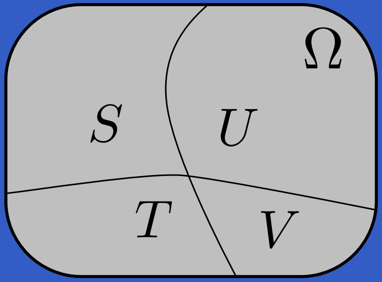
$S^c \cap T$



S^c, $T \subset S$



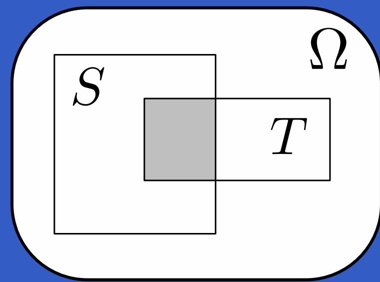
disjoints



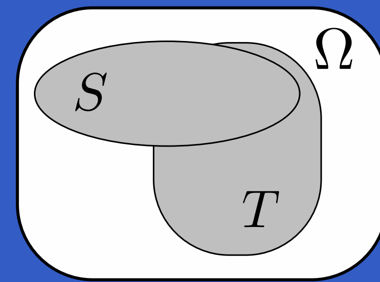
partition

- Disjoints : $\bigcap_i S_i = \emptyset$ (mutuellement exclusifs)
- Partition : S_i disjoints *et* $\bigcup_i S_i = \Omega$
- De Morgan 1 : $\left(\bigcap_i S_i\right)^c = \bigcup_i S_i^c$
- De Morgan 2 : $\left(\bigcup_i S_i\right)^c = \bigcap_i S_i^c$

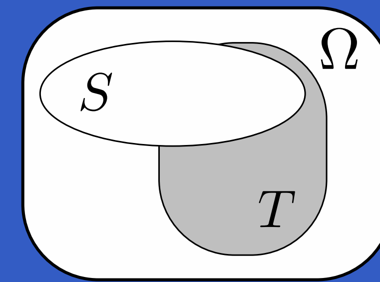
Ensembles



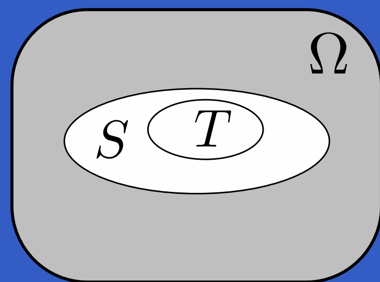
intersection $S \cap T$



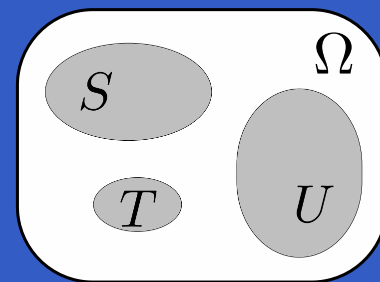
union $S \cup T$



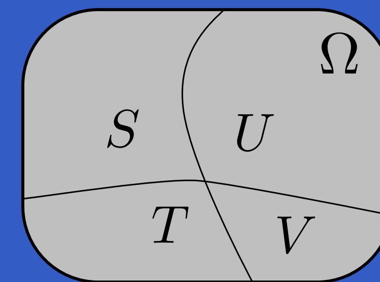
$S^c \cap T$



S^c, $T \subset S$



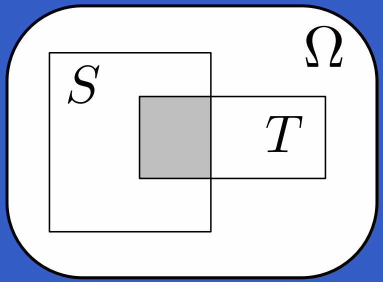
disjoints



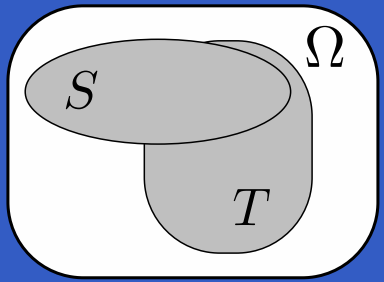
partition

- Disjoints : $\bigcap_i S_i = \emptyset$ (mutuellement exclusifs)
- Partition : S_i disjoints *et* $\bigcup_i S_i = \Omega$
- De Morgan 1 : $\left(\bigcap_i S_i\right)^c = \bigcup_i S_i^c$
- De Morgan 2 : $\left(\bigcup_i S_i\right)^c = \bigcap_i S_i^c$

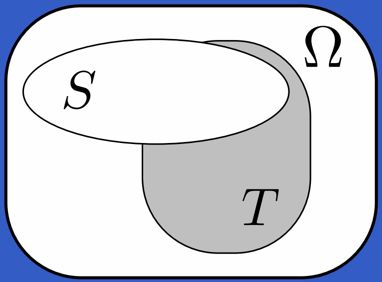
Ensembles



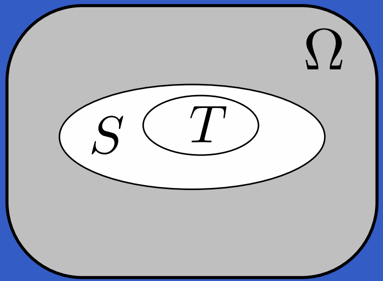
intersection $S \cap T$



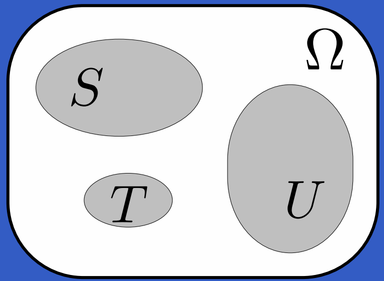
union $S \cup T$



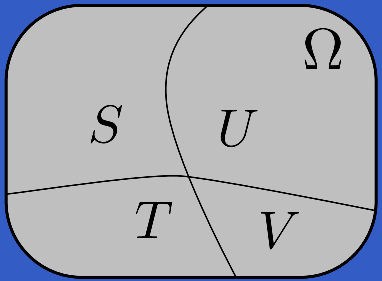
$S^c \cap T$



S^c, $T \subset S$



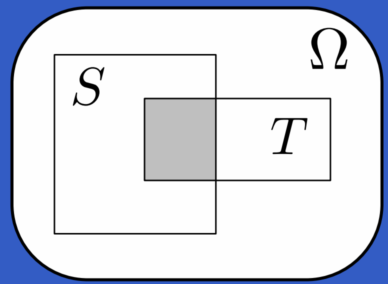
disjoints



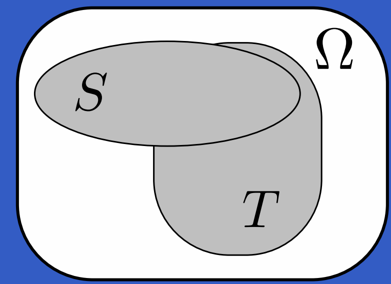
partition

- Disjoints : $\bigcap_i S_i = \emptyset$ (mutuellement exclusifs)
- Partition : S_i disjoints *et* $\bigcup_i S_i = \Omega$
- De Morgan 1 : $\left(\bigcap_i S_i\right)^c = \bigcup_i S_i^c$
- De Morgan 2 : $\left(\bigcup_i S_i\right)^c = \bigcap_i S_i^c$

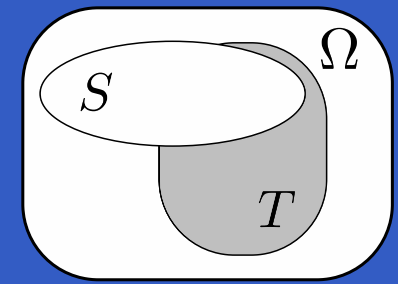
Ensembles



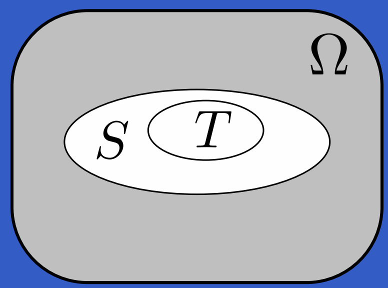
intersection $S \cap T$



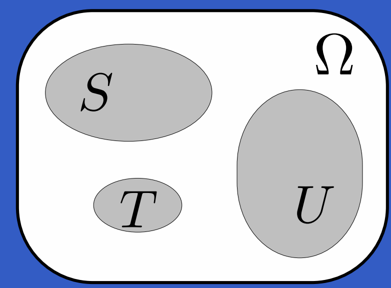
union $S \cup T$



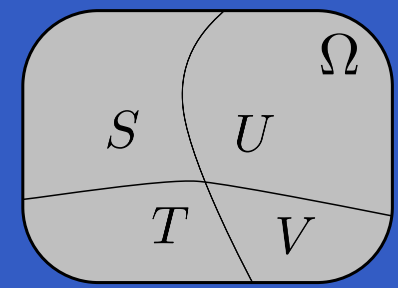
$S^c \cap T$



S^c, $T \subset S$



disjoints



partition

- Disjoints : $\bigcap_i S_i = \emptyset$ (mutuellement exclusifs)
- Partition : S_i disjoints *et* $\bigcup_i S_i = \Omega$
- De Morgan 1 : $(\bigcap_i S_i)^c = \bigcup_i S_i^c$
- De Morgan 2 : $(\bigcup_i S_i)^c = \bigcap_i S_i^c$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

1. $P(A) \geq 0 \quad$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad$ pour A et B disjoints
3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

  1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
  3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

  1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
  3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

  1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
  3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

▼ Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

▼ Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

▼ Définition axiomatique (Kolmogorov)

1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

  1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
  3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
3. $P(\Omega) = 1$

Modèle probabiliste

1. Définir l'ensemble Ω.
2. Attribuer un nombre $P(A) \in [0, 1]$ à un événement A.

- Définition classique (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas équiprobables favorables}}{\text{nombre de cas équiprobables possibles}}$$

- Définition intuitive (fréquence relative)

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

- Définition axiomatique (Kolmogorov)

  1. $P(A) \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A et B disjoints
  3. $P(\Omega) = 1$

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A\cap A^c=\emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \stackrel{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :

Propriétés

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

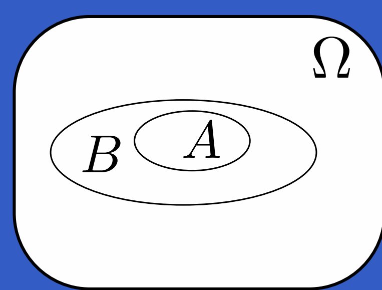
▼ Interprétation graphique :

Propriétés

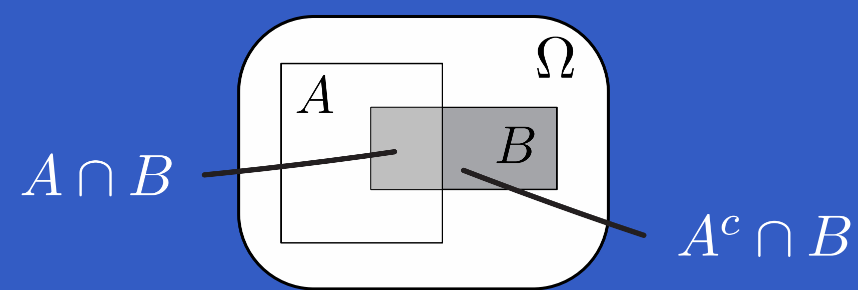
1. $P(A^c) = 1 - P(A)$

   dém. : $P(\Omega) = P(A \cup A^c) \overset{A \cap A^c = \emptyset}{=} P(A) + P(A^c) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0 = P(\Omega^c)$
3. Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(A^c \cap B) + P(A^c \cap B^c \cap C)$

▼ Interprétation graphique :



$P(A) \leq P(B)$



$P(A \cup B)$

Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0, 1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

▼ Exemple : lancer deux dés

Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

▼ Exemple : lancer deux dés

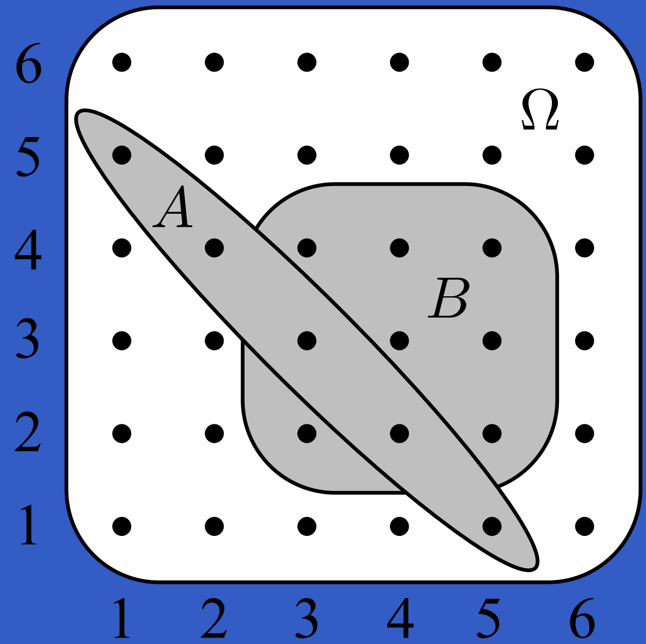
Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

▼ Exemple : lancer deux dés

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés



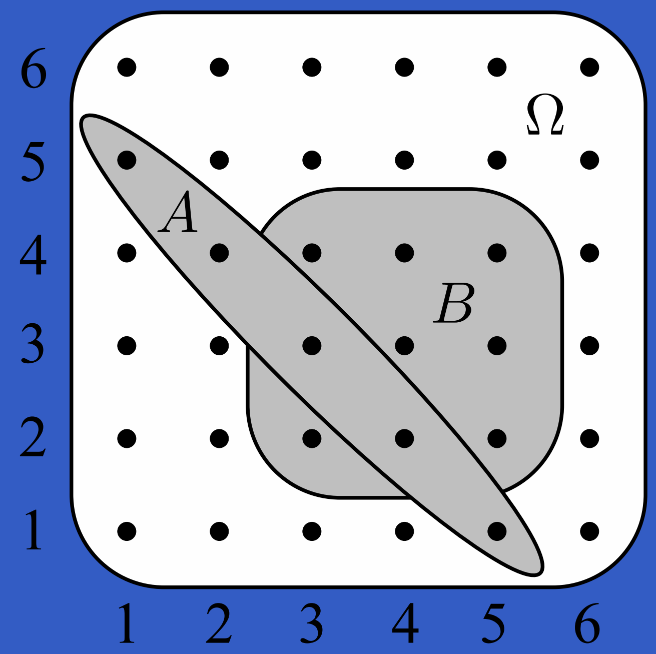
- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$
-

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés



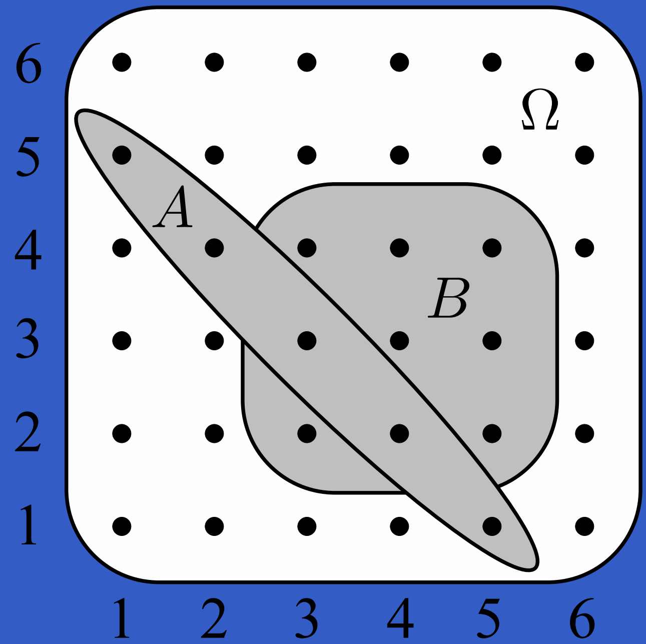
- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$
-

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés



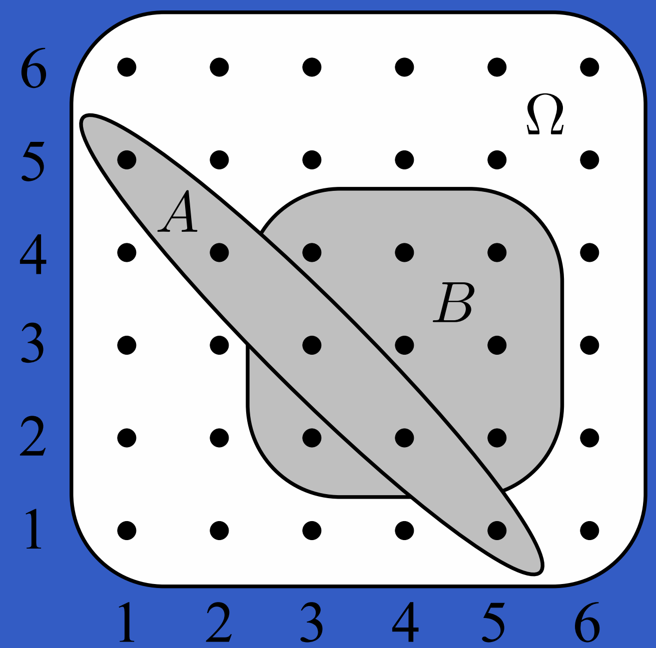
- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$
-

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B ($P(B) \neq 0$) a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés

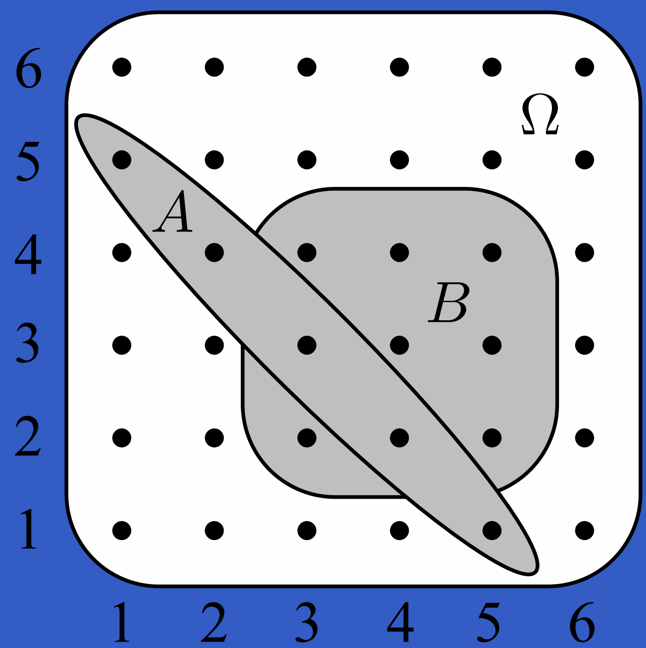


- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$
-

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés

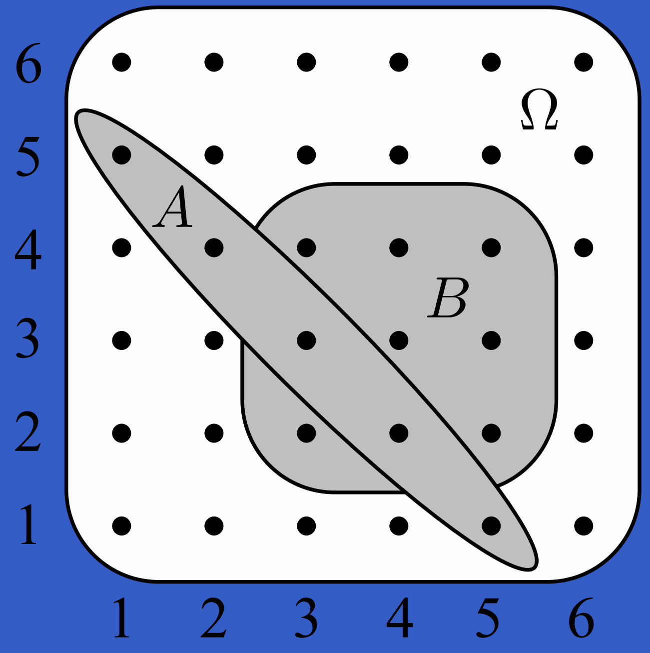


- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0,1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés



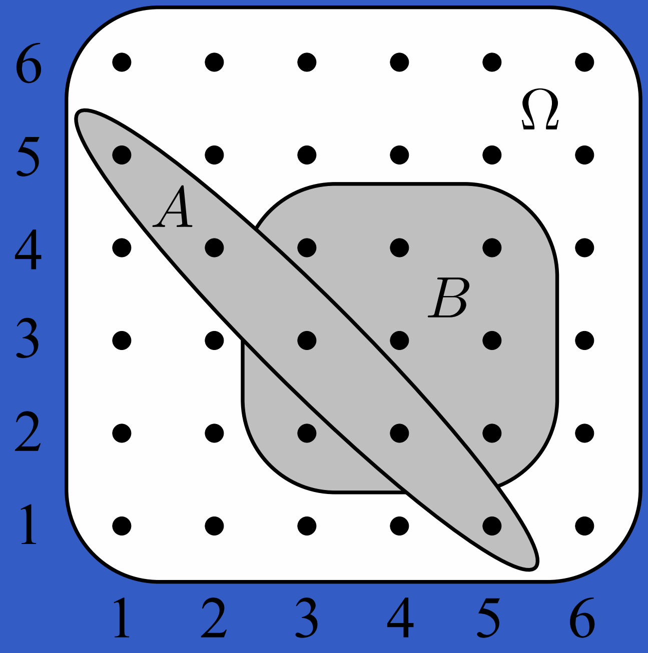
- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$
-

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Probabilité conditionnelle

Attribuer un nombre $P(A|B) \in [0, 1]$ à un événement A, *sachant que* l'événement B $(P(B) \neq 0)$ a été réalisé.

- Exemple : lancer deux dés



- Toutes les issues ω_i $(i = 1, \ldots, 36)$ sont équiprobables
- $P(A) = \frac{5}{36}$
- $P(B) = \frac{9}{36}$
- $P(A|B) = \frac{2}{9} = \frac{2/36}{9/36}$
-

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Femmes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Femmes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}) =$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Femmes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}) =$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Femmes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}) =$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Femmes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}) =$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}) =$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) =$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) =$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) =$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) =$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) = 289/673 = 0.43$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences relatives			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	0.26	0.24	0.49
Femmes	0.22	0.29	0.51
Total	0.47	0.53	1

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = \boxed{0.26/0.49}$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) = 289/673 = 0.43 = \boxed{0.22/0.51}$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences relatives		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	0.26	0.24	0.49
Femmes	0.22	0.29	0.51
Total	0.47	0.53	1

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = \boxed{0.26/0.49}$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) = 289/673 = 0.43 = \boxed{0.22/0.51}$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences relatives			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	0.26	0.24	0.49
Femmes	0.22	0.29	0.51
Total	0.47	0.53	1

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = \boxed{0.26/0.49}$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) = 289/673 = 0.43 = \boxed{0.22/0.51}$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences relatives			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	0.26	0.24	0.49
Femmes	0.22	0.29	0.51
Total	0.47	0.53	1

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Femmes}) = 673/1327 = 0.51$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Non fumeurs}) = 698/1327 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs} \cap \text{Hommes}) = 340/1327 = 0.26$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = \boxed{0.26/0.49}$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Femmes}) = 289/673 = 0.43 = \boxed{0.22/0.51}$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par 3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B\cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \rightarrow B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \rightarrow B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par 3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \rightarrow B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :

  1. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)

- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B\cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!

- Approche séquentielle :

  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B\cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par 3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par 3'. $P(B|B) = \frac{P(B\cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B\cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :

  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)

- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par 3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!

- Approche séquentielle :

  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :

  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \quad$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) \quad$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)

- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \rightarrow B}$!

- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \to B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Un nouvel Univers

- La probabilité conditionnelle satisfait les trois axiomes :
  1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ pour chaque événement $A \subseteq \Omega$
  2. $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$ pour A_1 et A_2 disjoints
  3. $P(\Omega|B) = 1$ (univers Ω)
- Les propriétés générales restent valables, p.ex., $P(A \cup C|B) \leq P(A|B) + P(C|B)$
- On peut remplacer 3. par
  3'. $P(B|B) = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$ (univers B)
- $P(A|B)$: *loi* de probabilité ; $\boxed{\text{univers : } \Omega \rightarrow B}$!
- Approche séquentielle :
  - $\boxed{P(A \cap B) = P(B)P(A|B)}$
  - $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P,D),(A,D),(P,N),(A,N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P,D),(P,N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P,D),(A,D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{$un avion est présent$\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{$le radar signale la présence d'un avion$\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P,D),(A,D),(P,N),(A,N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P,D),(P,N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P,D),(A,D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) =$

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c)$

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c)$

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$
- Quelle est la probabilité qu'un avion ne soit pas détecté ?

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$
- Quelle est la probabilité qu'un avion ne soit pas détecté ?
  $P(S \cap T^c) =$

Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$
- Quelle est la probabilité qu'un avion ne soit pas détecté ?
  $P(S \cap T^c) = P(S)P(T^c|S)$

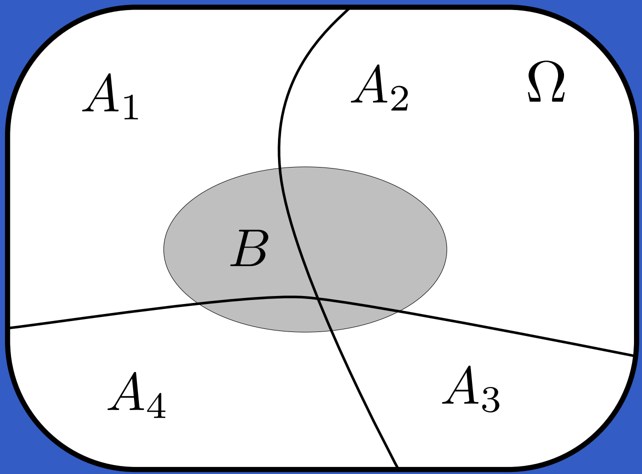
Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$
- Quelle est la probabilité qu'un avion ne soit pas détecté ?
  $P(S \cap T^c) = P(S)P(T^c|S) = P(S)[1 - P(T|S)]$

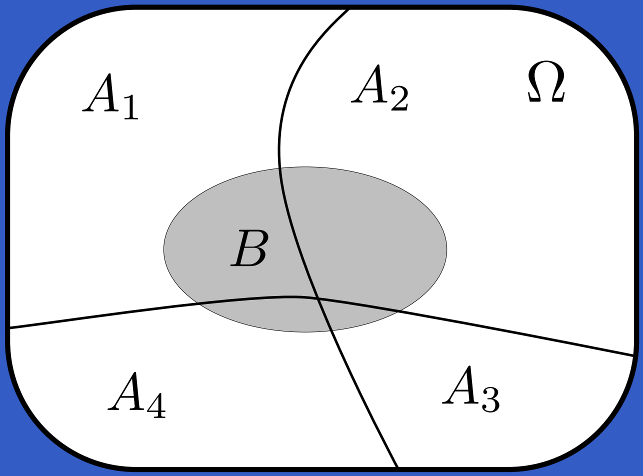
Exemple : fausse alarme

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une fausse alarme ?
  $P(S^c \cap T) = P(S^c)P(T|S^c) = [1 - P(S)]P(T|S^c) = 0.95 \cdot 0.10 = 0.095$
- Quelle est la probabilité qu'un avion ne soit pas détecté ?
  $P(S \cap T^c) = P(S)P(T^c|S) = P(S)[1 - P(T|S)] = 0.05 \cdot 0.01 = 0.0005$

Théorème de probabilité totale

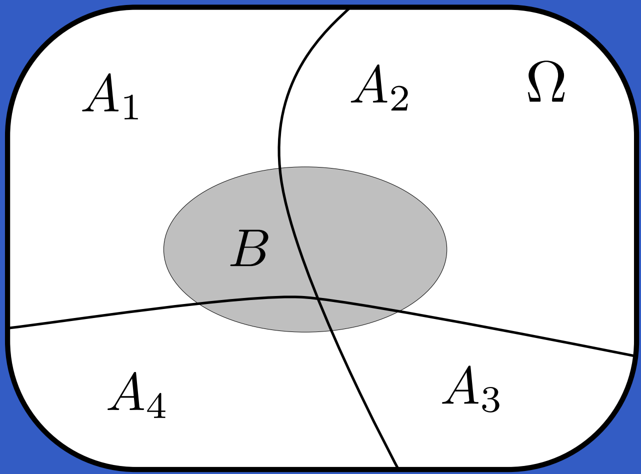


- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$
  $$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$
- $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$



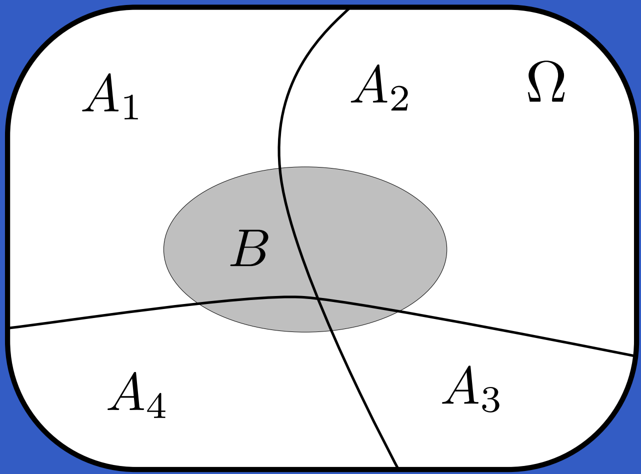
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$
  $= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de probabilité totale



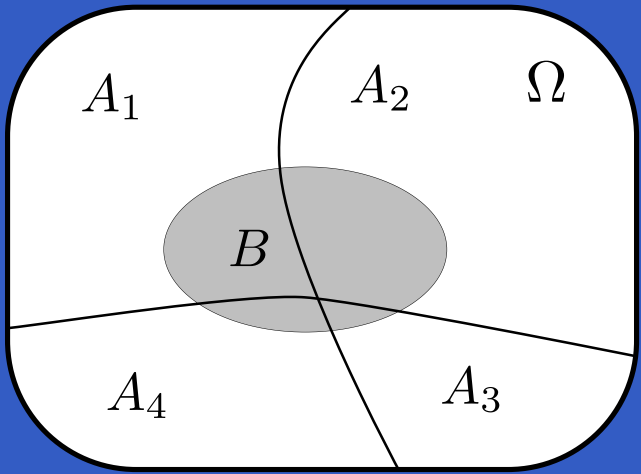
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$$
  $$= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$
- $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de probabilité totale



- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$
  $= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

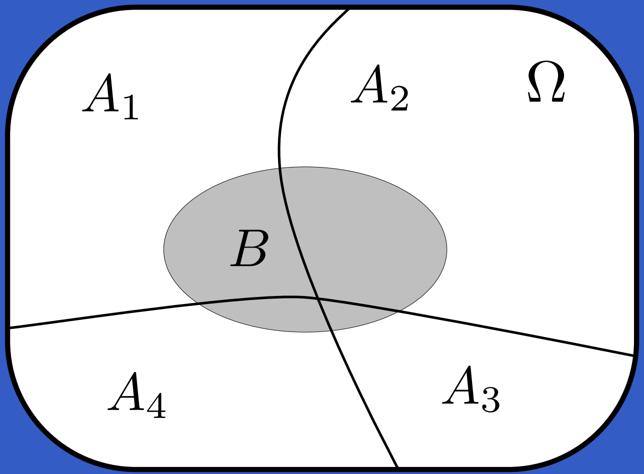
Théorème de probabilité totale



- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

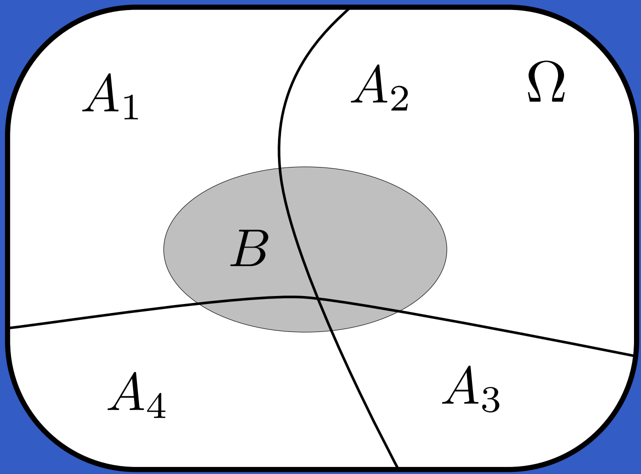
  $= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de probabilité totale



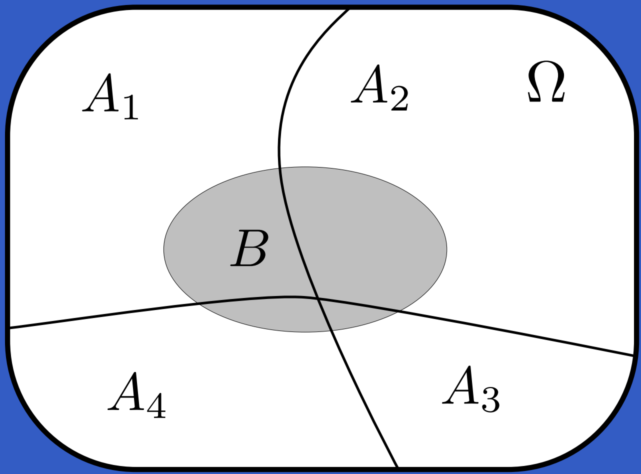
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$
  $= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de probabilité totale



- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$
  $= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

Théorème de probabilité totale



- $A_1, A_2, \ldots, A_n$: une partition de Ω
- $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$
- $B \cap A_1, B \cap A_2, \ldots, B \cap A_n$: événements disjoints
- $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$
  $= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$ *Diviser pour régner !*

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?
  $P(T) =$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?
  $P(T) = P(S)P(T|S)$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?
  $P(T) = P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c)$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

$$
\begin{aligned}
P(T) &= P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c) \\
&= P(S)P(T|S)
\end{aligned}
$$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c) \\ &= P(S)P(T|S) + [1 - P(S)]P(T|S^c) \end{aligned}$$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c) \\ &= P(S)P(T|S) + [1 - P(S)]P(T|S^c) \\ &= 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.10 \end{aligned}$$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c) \\ &= P(S)P(T|S) + [1 - P(S)]P(T|S^c) \\ &= 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.10 \\ &= 0.0495 + 0.0950 \end{aligned}$$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c) \\ &= P(S)P(T|S) + [1 - P(S)]P(T|S^c) \\ &= 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.10 \\ &= 0.0495 + 0.0950 \\ &= 0.1445 \end{aligned}$$

[Extra] Exemple : fausse alarme (suite)

- Système radar
  - Avion : Présent / Absent
  - Radar : Détection / Non détection
  - Quatre issues possibles, $\Omega = \{(P, D), (A, D), (P, N), (A, N)\}$
  - $S = \{\text{un avion est présent}\} = \{(P, D), (P, N)\}$
  - $T = \{\text{le radar signale la présence d'un avion}\} = \{(P, D), (A, D)\}$
  - $P(S) = 0.05$ (présence d'un avion)
  - $P(T|S) = 0.99$ (détection si avion présent)
  - $P(T|S^c) = 0.10$ (fausse détection : « détection » si avion absent)
- Quelle est la probabilité d'une alarme ?

$$\begin{aligned}
P(T) &= P(S)P(T|S) + P(S^c)P(T|S^c) \\
&= P(S)P(T|S) + [1 - P(S)]P(T|S^c) \\
&= 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.10 \\
&= 0.0495 + 0.0950 \\
&= 0.1445
\end{aligned}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » B, $P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Théorème de Bayes

- « Cause » $A \longrightarrow$ « effet » $B, P(B|A), P(B) \neq 0$
- À partir de $P(B|A)$, calculer $P(A|B)$ (effet $\longrightarrow$ cause)
- $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$

$$\boxed{P(A|B) = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}}$$

- Plusieurs causes A_i $(i = 1, \ldots, n)$, partition de Ω

$$P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes})$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) > P(\text{Fumeurs})$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) > P(\text{Fumeurs})$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs})$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Hommes}) = 654/1327 = 0.49$
- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53 = 0.26/0.49$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) = 340/629 = 0.54 = 0.26/0.47$
  $= 0.49 \cdot 0.53/0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) > P(\text{Fumeurs})$
- $P(\text{Hommes}|\text{Fumeurs}) > P(\text{Hommes})$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$

   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$
   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$
2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$
   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

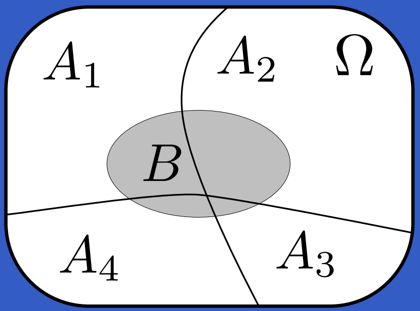
   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$



$P(B|A_3) < P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

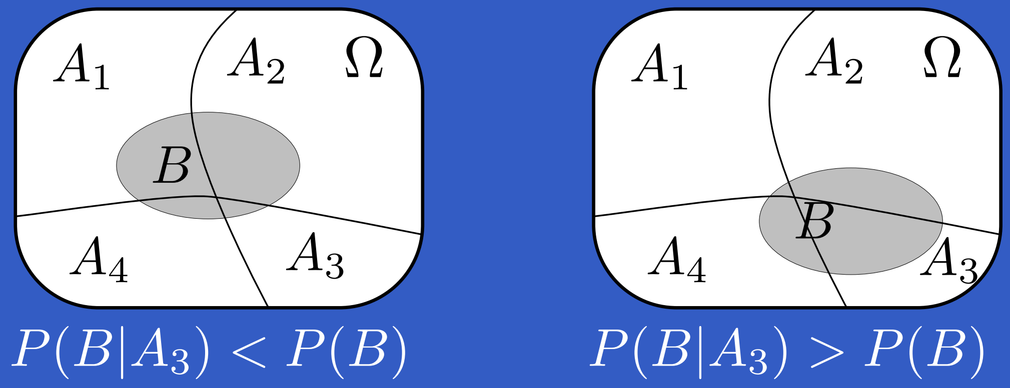
   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$



2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

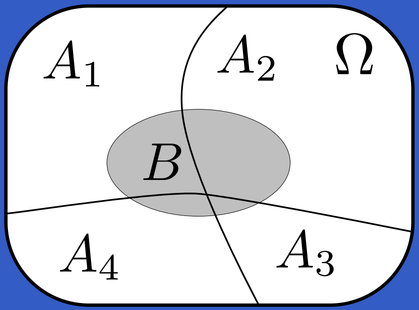
   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

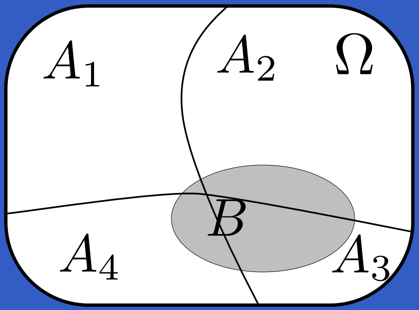
1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$



$P(B|A_3) < P(B)$



$P(B|A_3) > P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

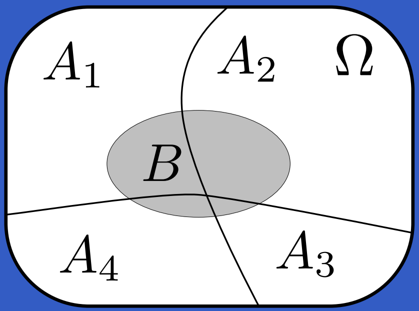
   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

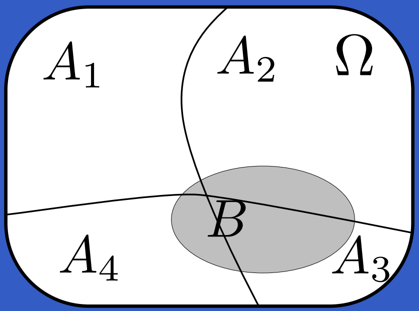
1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

    - $P(A_i)$: *a priori*
    - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
    - $P(A_i|B) > P(A_i)$

      si $P(B|A_i) > P(B)$



$P(B|A_3) < P(B)$



$P(B|A_3) > P(B)$

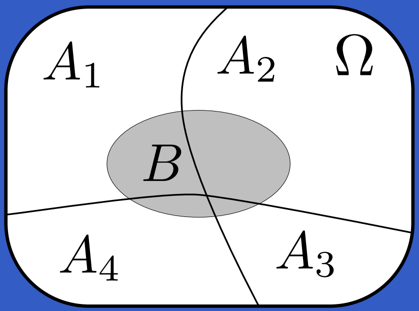
2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

    - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
    - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

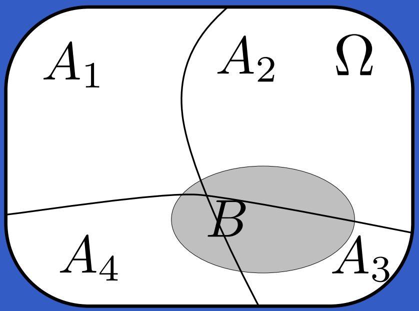
Inférence bayésienne

1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$
   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$



$P(B|A_3) < P(B)$



$P(B|A_3) > P(B)$

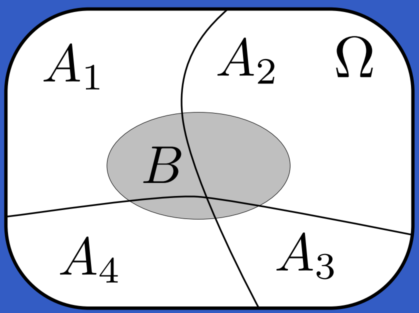
2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$
   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$

Inférence bayésienne

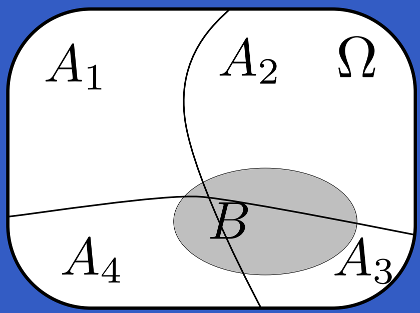
1. $P(A_i|B) = P(A_i)\frac{P(B|A_i)}{P(B)}$

   - $P(A_i)$: *a priori*
   - $P(A_i|B)$: *a posteriori*
   - $P(A_i|B) > P(A_i)$

     si $P(B|A_i) > P(B)$



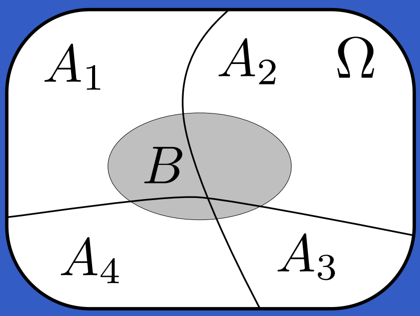
$P(B|A_3) < P(B)$



$P(B|A_3) > P(B)$

2. $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$

   - $P(A_i)P(B|A_i) = P(B \cap A_i)$
   - $P(A_i|B) \propto P(B \cap A_i)$



$P(A_2|B) > P(A_1|B) > P(A_4|B) > P(A_3|B)$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0$, $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0$, $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0, P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0, P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0, P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0, P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0$, $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0$, $P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

Indépendance

1. Entre deux événements A et B :
   - $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
   - si $P(B) \neq 0$, $\boxed{P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)}$
2. Entre deux événements A et B, conditionnés par C, $(P(C) \neq 0)$:
   - $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$
   - si $P(B|C) \neq 0, P(A|B \cap C) = P(A|C)$
3. Entre plusieurs événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$:
   - $P\left(\bigcap_{i \in S} A_i\right) = \prod_{i \in S} P(A_i)$
     pour *chaque* S, sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) \neq P(\text{Fumeurs})$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 340/654 = 0.53$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) \neq P(\text{Fumeurs})$
- $\{\text{Fumeur}\}$ et $\{\text{Homme}\}$ dépendants !

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	340	314	654
Femmes	289	384	673
Total	629	698	1327

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences modifiées			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	310	344	654
Femmes	319	354	673
Total	629	698	1327

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences modifiées			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	310	344	654
Femmes	319	354	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences modifiées			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	310	344	654
Femmes	319	354	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 310/654 = 0.47$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences modifiées			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	310	344	654
Femmes	319	354	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 310/654 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = P(\text{Fumeurs})$

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

Fréquences modifiées			
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	310	344	654
Femmes	319	354	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 310/654 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = P(\text{Fumeurs})$
- $\{\text{Fumeur}\}$ et $\{\text{Homme}\}$ indépendants !

[Extra] Exemple : le tabac et les jeunes (20-25 ans) (suite)

Source : INPES, baromètre santé 2000

	Fréquences modifiées		
	Fumeurs	Non fumeurs	Total
Hommes	310	344	654
Femmes	319	354	673
Total	629	698	1327

- $P(\text{Fumeurs}) = 629/1327 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = 310/654 = 0.47$
- $P(\text{Fumeurs}|\text{Hommes}) = P(\text{Fumeurs})$
- {Fumeur} et {Homme} indépendants !

(Comment faire pour trouver la modification ?)

[Extra] Disjoints = indépendants ?

[Extra] Disjoints = indépendants ?

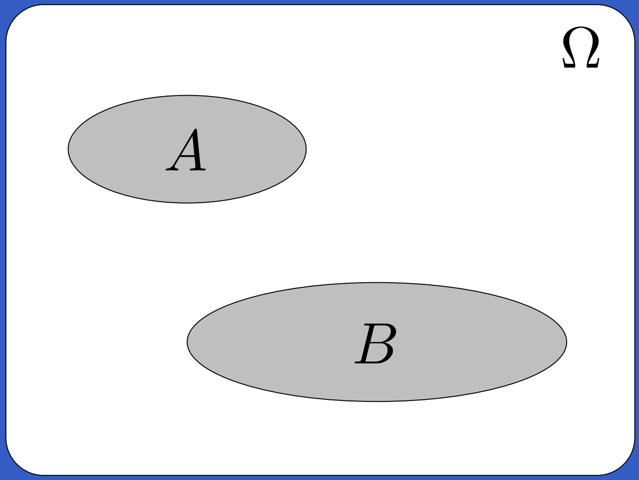
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).

[Extra] Disjoints = indépendants ?

- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?

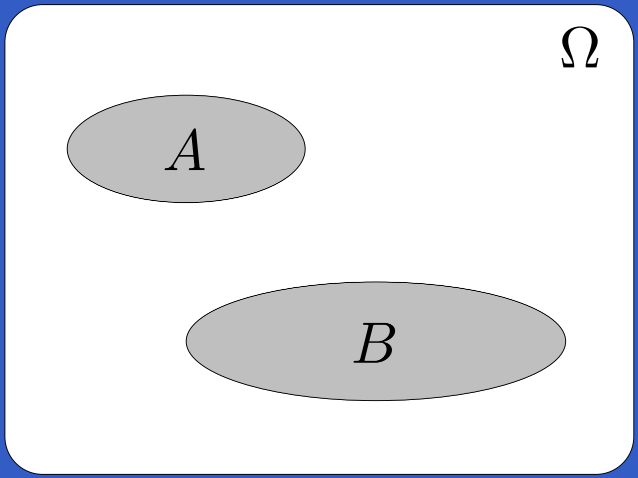
[Extra] Disjoints = indépendants ?

- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



[Extra] Disjoints = indépendants ?

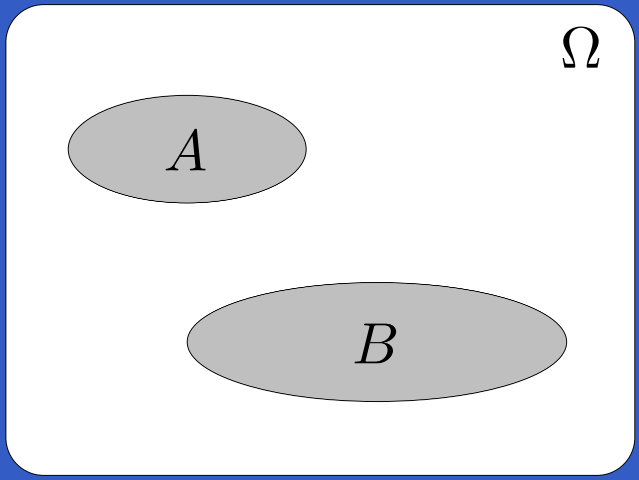
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants :

[Extra] Disjoints = indépendants ?

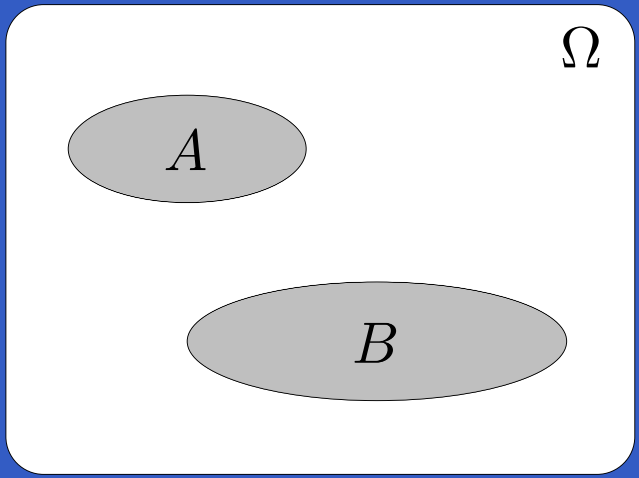
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

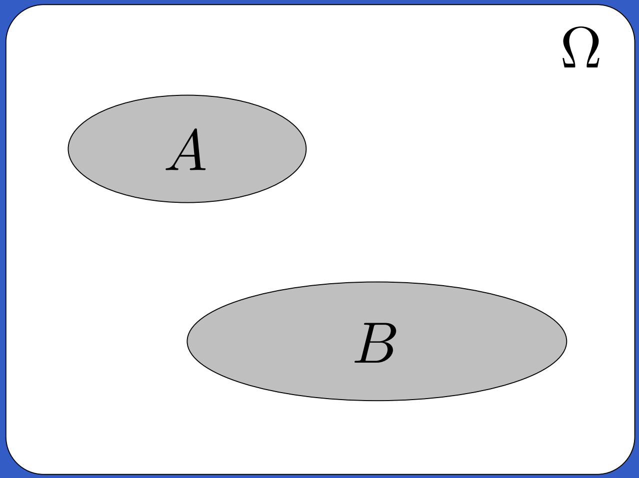
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs :

[Extra] Disjoints = indépendants ?

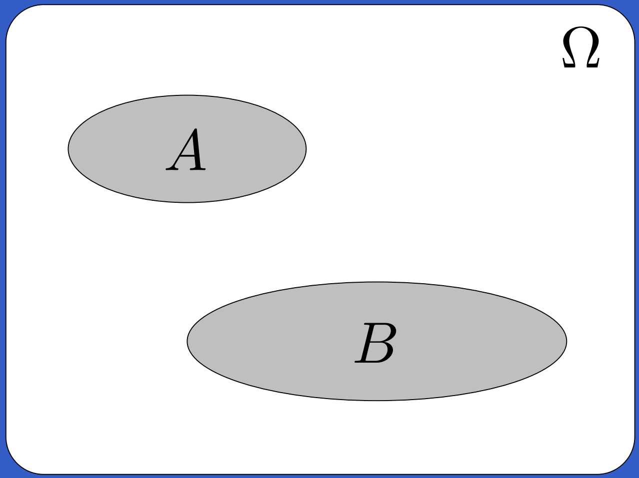
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

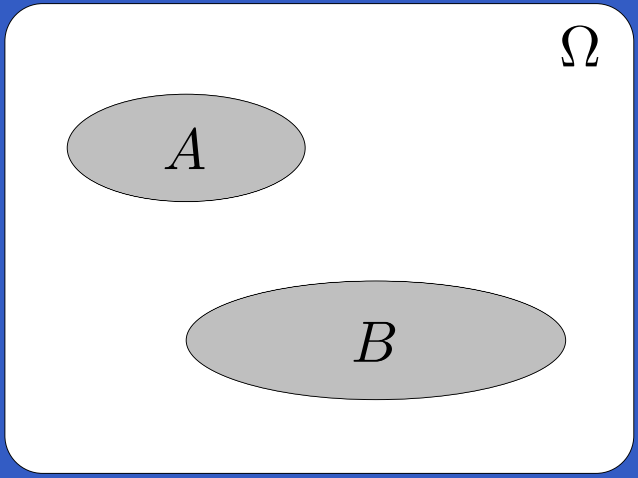
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cap B) = 0$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

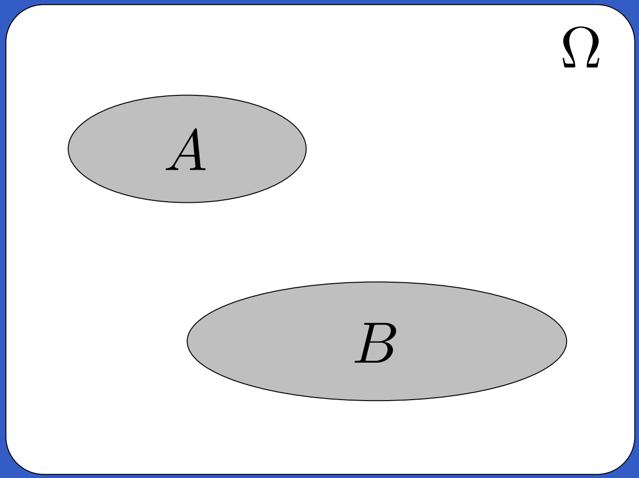
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cap B) = 0$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

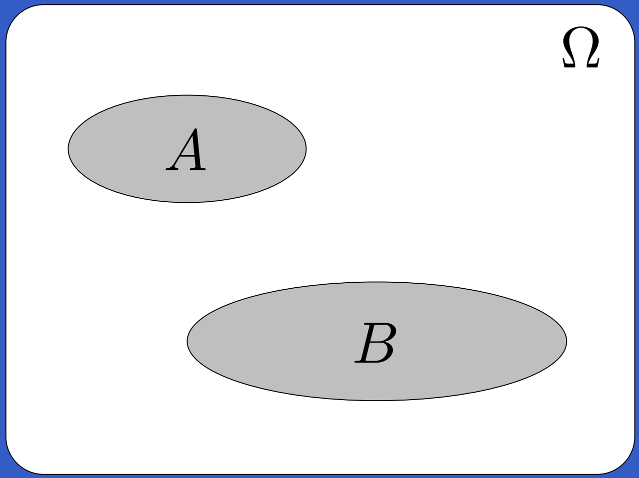
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cap B) = 0$
  $P(A|B) = 0$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

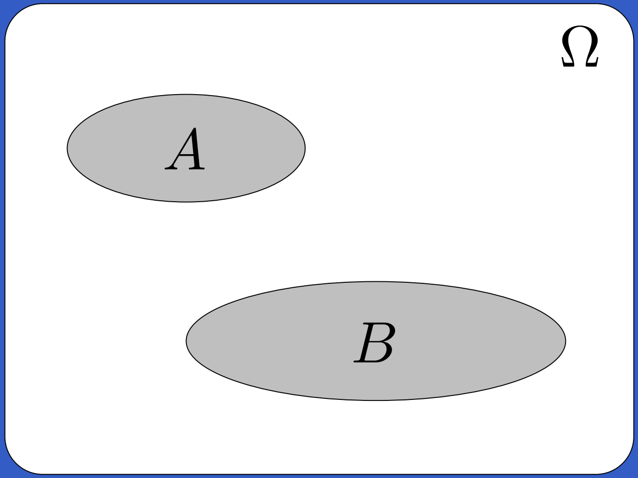
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cap B) = 0$
  $P(A|B) = 0$ et $P(B|A) = 0$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

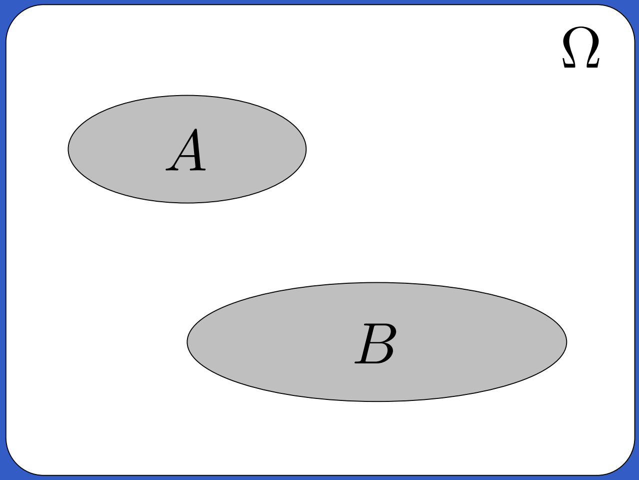
- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cap B) = 0$
  $P(A|B) = 0$ et $P(B|A) = 0$
  rappel : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

[Extra] Disjoints = indépendants ?

- Deux évenements A et B sont disjoints (mutuellement exclusifs).
- Sont-ils indépendants ?



- Indépendants : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Mutuellement exclusifs : $A \cap B = \emptyset \longrightarrow P(A \cap B) = 0$
  $P(A|B) = 0$ et $P(B|A) = 0$
  rappel : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Quelques stratégies

- Définir Ω
- . . . ou juste *compter* ses éléments. . .
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Quelques stratégies

- Définir Ω
- ...ou juste *compter* ses éléments...
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Quelques stratégies

- Définir Ω
- ...ou juste *compter* ses éléments...
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Quelques stratégies

- Définir Ω
- ...ou juste *compter* ses éléments...
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Quelques stratégies

- Définir Ω
- ...ou juste *compter* ses éléments...
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Quelques stratégies

- Définir Ω
- ...ou juste *compter* ses éléments...
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Quelques stratégies

- Définir Ω
- ...ou juste *compter* ses éléments...
- Issues équiprobables : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ (Laplace)
- Approche séquentielle (+ indépendance)
- Probabilité totale (trouver une partition)
- $P(B|A) \longrightarrow P(A|B)$: Bayes

Compter = multiplier. . .

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons $(i = 1, \ldots, M)$.

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons $(i = 1, \ldots, M)$.
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -

$$n$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -

$$n(n-1)$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons $(i = 1, \ldots, M)$.
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -
$$n(n-1)(n-2)$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -
   $$n(n-1)(n-2)\ldots$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -
$$n(n-1)(n-2)\ldots 2$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons $(i = 1, \dots, M)$.
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \dots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons $(i = 1, \ldots, M)$.
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $${}_nP_k = n$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $${}_nP_k = n(n-1)$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $${}_nP_k = n(n-1)(n-2)$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $$_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons $(i = 1, \ldots, M)$.
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $${}_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $$_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -
   $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   -
   $$_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = {_nC_k}$$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   - $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   - $${}_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = {}_nC_k\, k!$$

Compter = multiplier...

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -
   $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   -
   $$_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = {}_nC_k\, k!$$

$(_nP_n = n!$

Compter = multiplier. . .

- Opération à M étapes,
- chacune pouvant être réalisée selon N_i façons ($i = 1, \ldots, M$).
- Nombre total des réalisations :

$$N = N_1 N_2 \ldots N_M = \prod_{i=1}^{M} N_i$$

1. Permutations de n objets
   -
     $$n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = \boxed{n!}$$
2. Permutations de k objets choisis parmi n
   -
     $${}_nP_k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}} = {}_nC_k\, k!$$

$$({}_nP_n = n! \longrightarrow 0! = 1)$$

. . . ou diviser !

...ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

- $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} $$

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

- $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} $$

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   ▼
   $$_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   ▼
   $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} \,, \; (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} \; , \; (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

 ▼ $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

 ▼ $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}\ ,\ (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*)

... ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} \;,\; (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} \ , \ (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets : $n!$ permutations

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!} \;, \; (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets : $n!$ permutations
- n_i objets non distincts

... ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}\ , \ (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets : $n!$ permutations
- n_i objets non distincts (identiques

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}\ ,\ (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n)$$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets : $n!$ permutations
- n_i objets non distincts (identiques ou combinaisons)

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} \; , \; (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n)$$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets : $n!$ permutations
- n_i objets non distincts (identiques ou combinaisons) : diviser par $n_i!$

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} \ , \ (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*) :

- n objets : $n!$ permutations
- n_i objets non distincts (identiques ou combinaisons) : diviser par $n_i!$
- répéter pour tous les groupes d'objets

. . . ou diviser !

3. Combinaisons de k objets choisis parmi n

   - $$ {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \boxed{\frac{n!}{k!(n-k)!}} $$

4. Repartitions de n objets dans $n_1, n_2, \ldots, n_r$ groupes

   - $$ \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} \ , \ (n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n) $$

Méthode générale (*par étape*) :

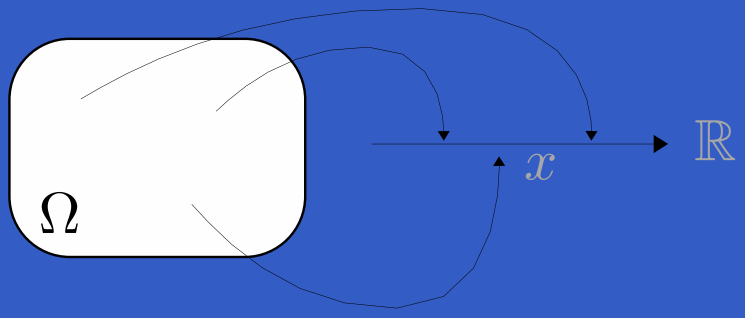
- n objets : $n!$ permutations
- n_i objets non distincts (identiques ou combinaisons) : diviser par $n_i!$
- répéter pour tous les groupes d'objets

Multiplier pour toutes les étapes.

Variable Aléatoire Discrète (une seule)

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

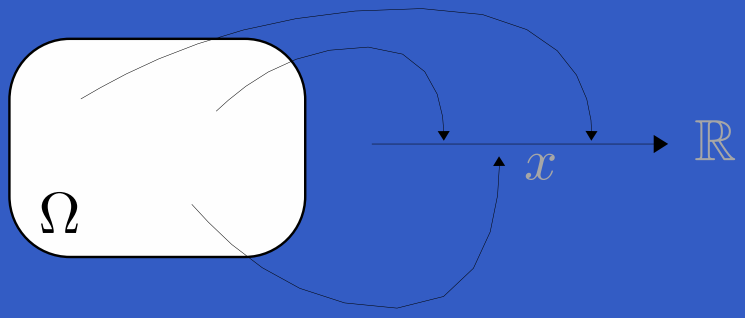


- Une variable aléatoire est une fonction ! ($\Omega \to \mathbb{R}$)
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

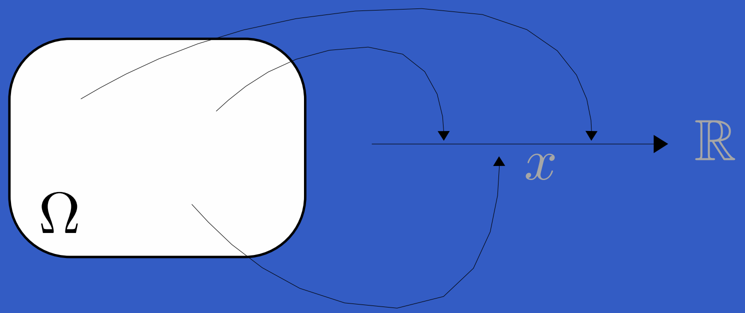


- Une variable aléatoire est une fonction ! ($\Omega \rightarrow \mathbb{R}$)
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

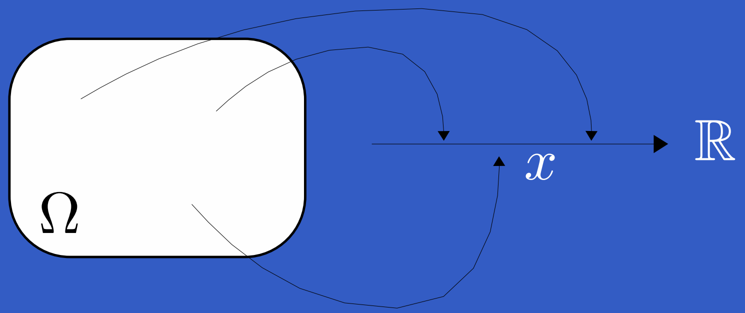
Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable



- Une variable aléatoire est une fonction ! $(\Omega \to \mathbb{R})$
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:
  $$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

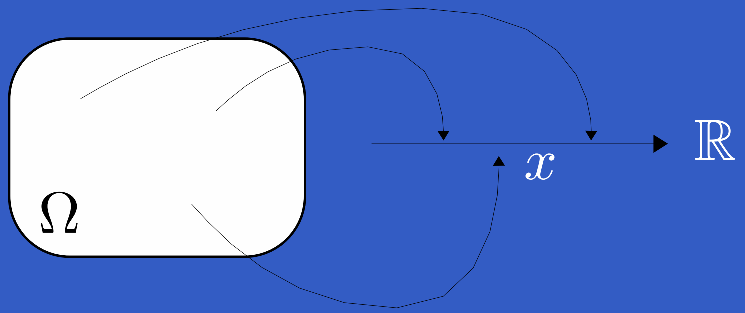


- Une variable aléatoire est une fonction ! $(\Omega \to \mathbb{R})$
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\ \underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}\ ) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

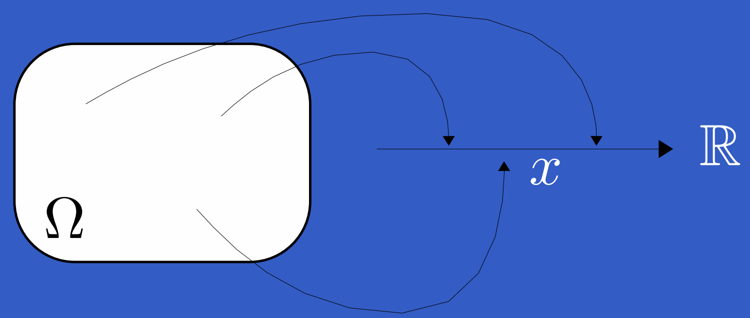


- Une variable aléatoire est une fonction ! $(\Omega \to \mathbb{R})$
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \stackrel{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

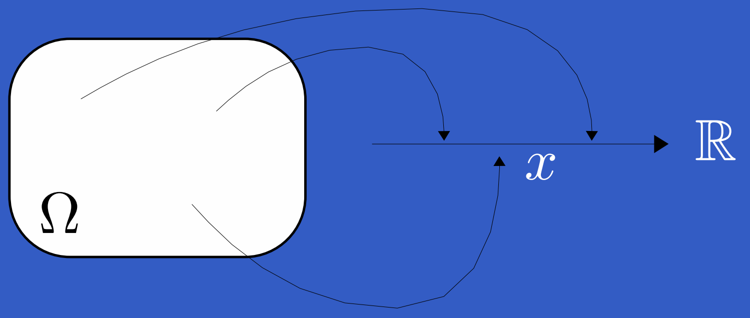


- Une variable aléatoire est une fonction ! $(\Omega \rightarrow \mathbb{R})$
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X=x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

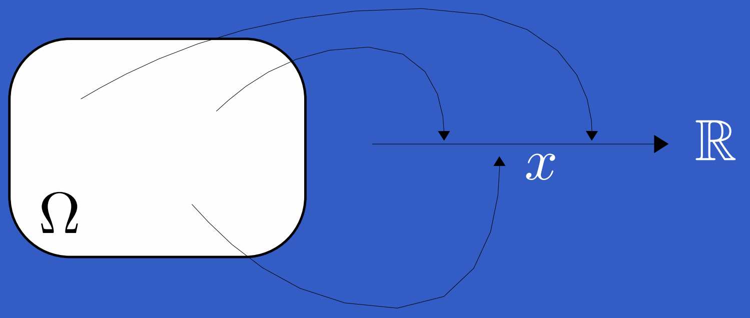


- Une variable aléatoire est une fonction ! $(\Omega \to \mathbb{R})$
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

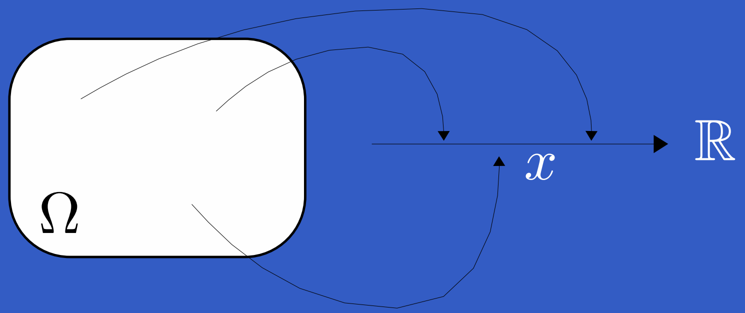


- Une variable aléatoire est une fonction ! ($\Omega \to \mathbb{R}$)
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

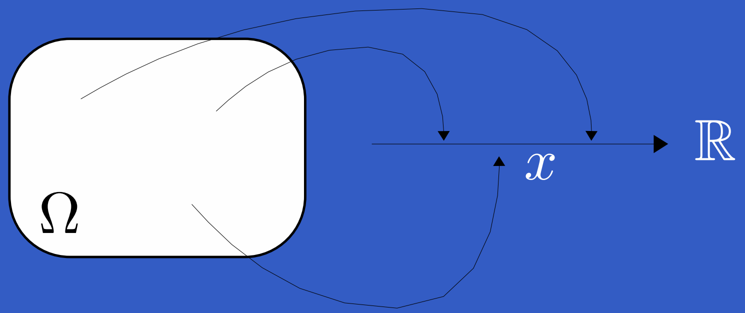


- Une variable aléatoire est une fonction ! ($\Omega \to \mathbb{R}$)
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable

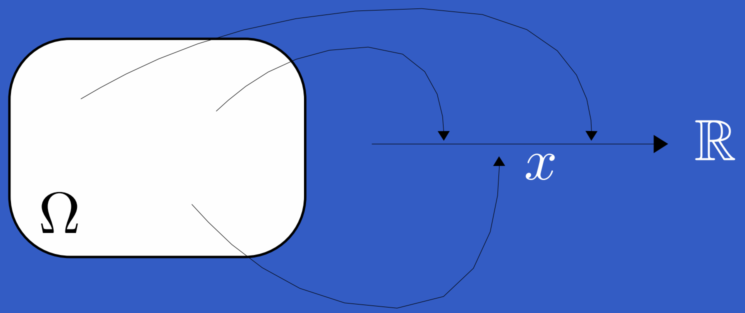


- Une variable aléatoire est une fonction ! ($\Omega \to \mathbb{R}$)
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

Définition

- Associer *une valeur réelle* x à chaque issue ω d'une expérience aléatoire
- Variable aléatoire discrète (VAD) :
  Nombre de valeurs possibles : fini ou infini dénombrable



- Une variable aléatoire est une fonction ! ($\Omega \to \mathbb{R}$)
- $\boxed{X \text{ : la variable aléatoire / } x \text{ : une valeur possible}}$
- Fonction de probabilité $p_X(x)$:

$$P(\ \underbrace{\{X = x\}}_{\text{événement} \in \Omega}\ ) \overset{\text{simpl.}}{=} \boxed{P(X = x) \triangleq p_X(x)}$$

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

▼ Une v.a. X :

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

▼ Une v.a. X :

1. représente une expérience aléatoire

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire
     et une association $\Omega \to \mathbb{R}$

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

▼ Une v.a. X :

1. représente une expérience aléatoire *et* une association $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

▼ Une v.a. X :

1. représente une expérience aléatoire
   et une association $\Omega \to \mathbb{R}$
2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire
     et une association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !
- N v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_N$

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire
     et une association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !
- N v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ identiquement distribuées :

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire *et* une association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !
- N v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ identiquement distribuées :
  1. représente, chacune, la même expérience aléatoire

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire *et* une association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !
- N v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ identiquement distribuées :
  1. représente, chacune, la même expérience aléatoire *et* la même association $\Omega \to \mathbb{R}$

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire *et* une association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !
- N v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ identiquement distribuées :
  1. représente, chacune, la même expérience aléatoire *et* la même association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est, chacune, à usage unique

V.A. : à usage unique

1. On « interroge » la v.a. X
2. L'expérience aléatoire associée est effectuée
3. Une issue $\omega \in \Omega$ est réalisée
4. À l'issue ω correspond une valeur x
5. La v.a. X « répond » avec la valeur x

- Une v.a. X :
  1. représente une expérience aléatoire
     et une association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est à $\boxed{\text{usage unique}}$: une seule expérience effectuée !

- N v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ identiquement distribuées :
  1. représente, chacune, la même expérience aléatoire
     et la même association $\Omega \to \mathbb{R}$
  2. est, chacune, à usage unique :
     la même expérience répetée N fois !

Une partition naturelle de l'Univers

Une partition naturelle de l'Univers

- Expérience : lancer deux dés

Une partition naturelle de l'Univers

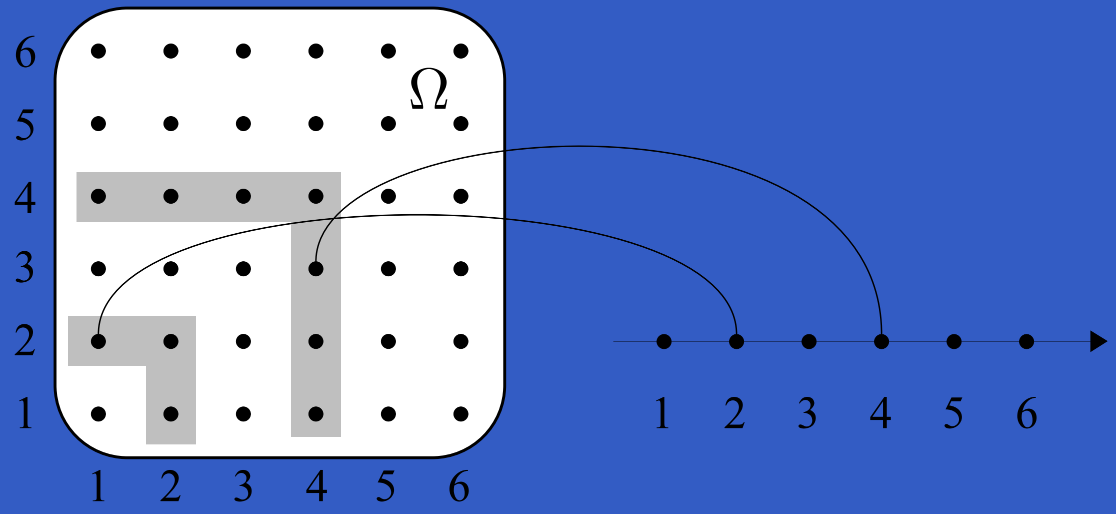
- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale

Une partition naturelle de l'Univers

- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale
  p.ex. : $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$

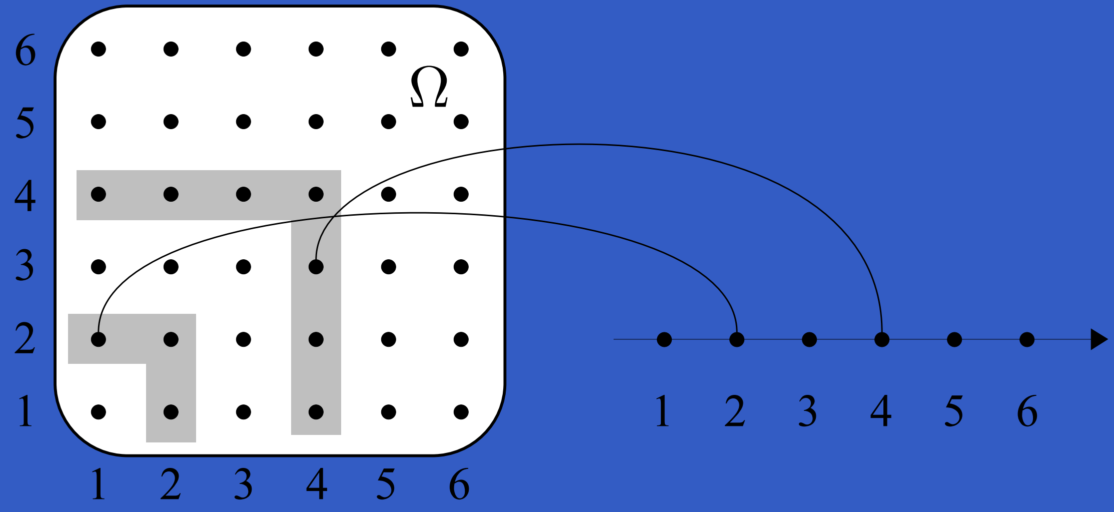
Une partition naturelle de l'Univers

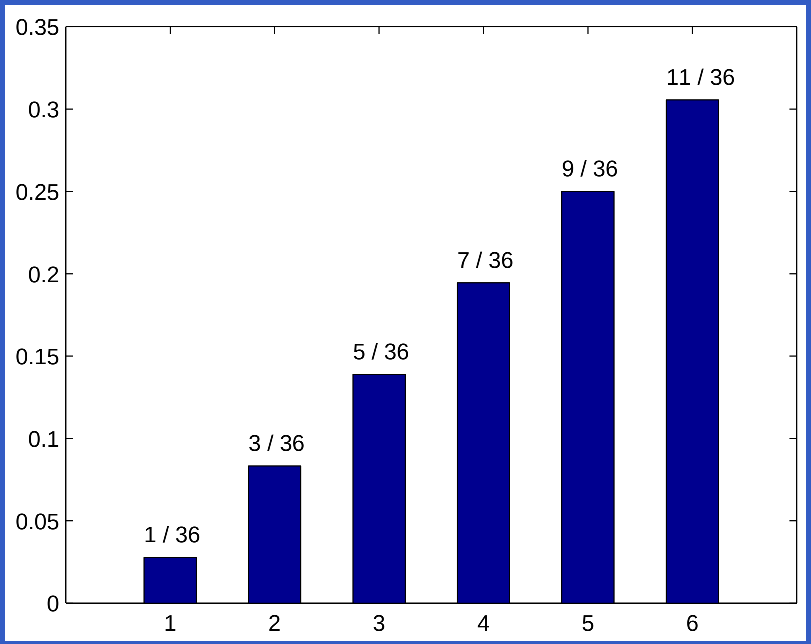
- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale
  p.ex. : $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$



Une partition naturelle de l'Univers

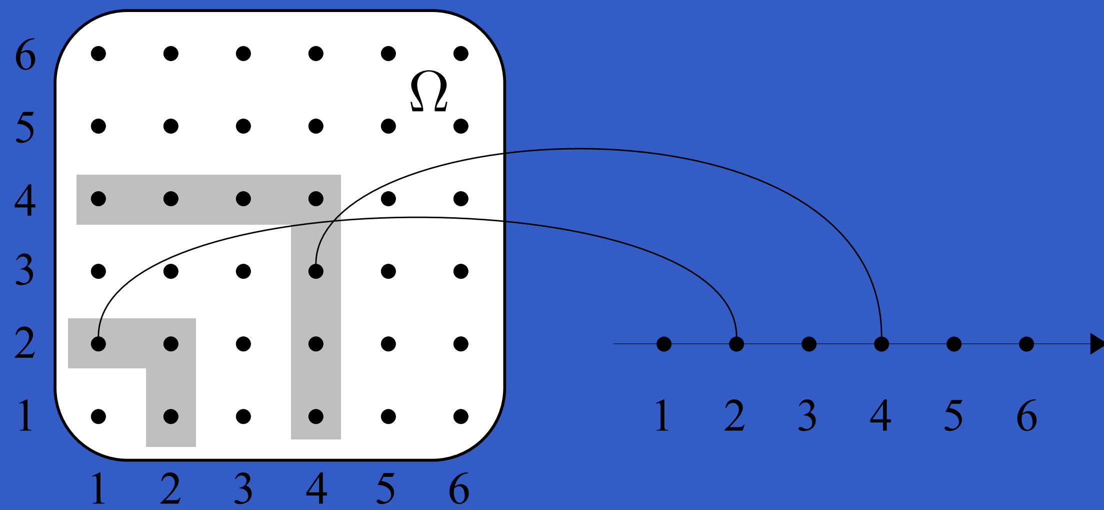
- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale
  p.ex. : $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$

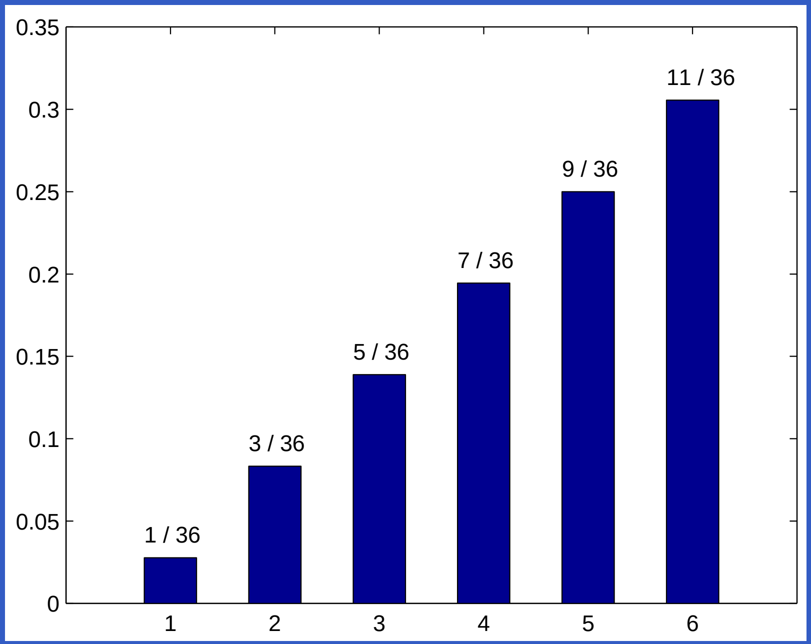




Une partition naturelle de l'Univers

- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale
  p.ex. : $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$

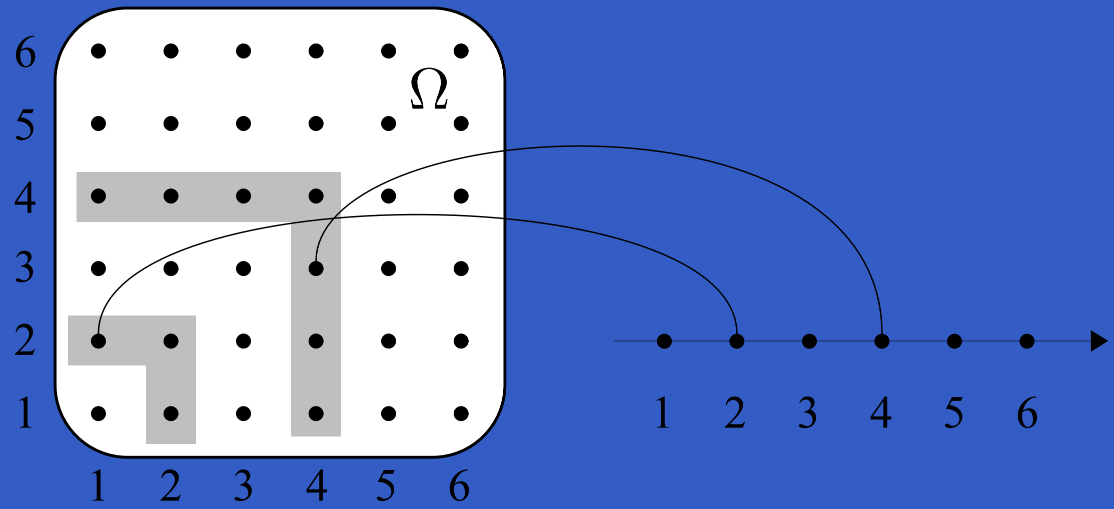


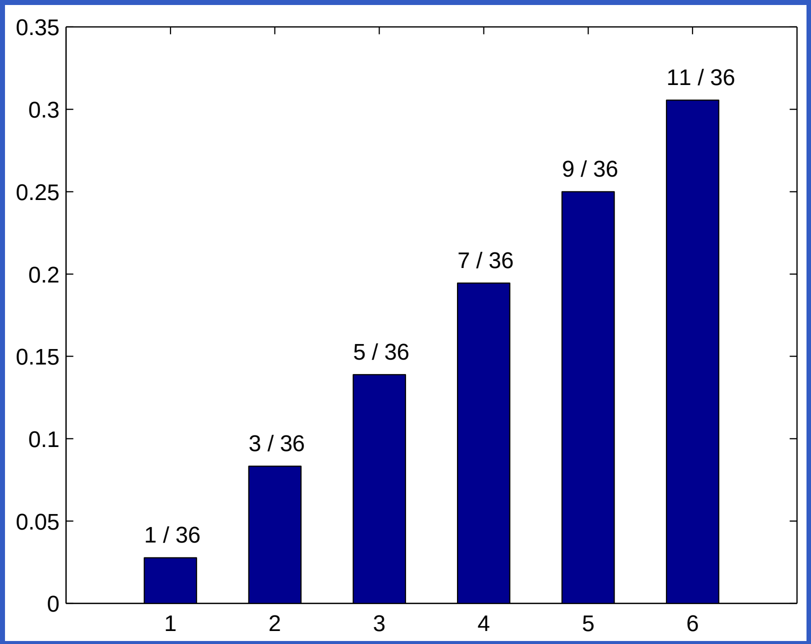


- $\bigcap_x \{X = x\} = \emptyset$

Une partition naturelle de l'Univers

- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale
  p.ex. : $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$

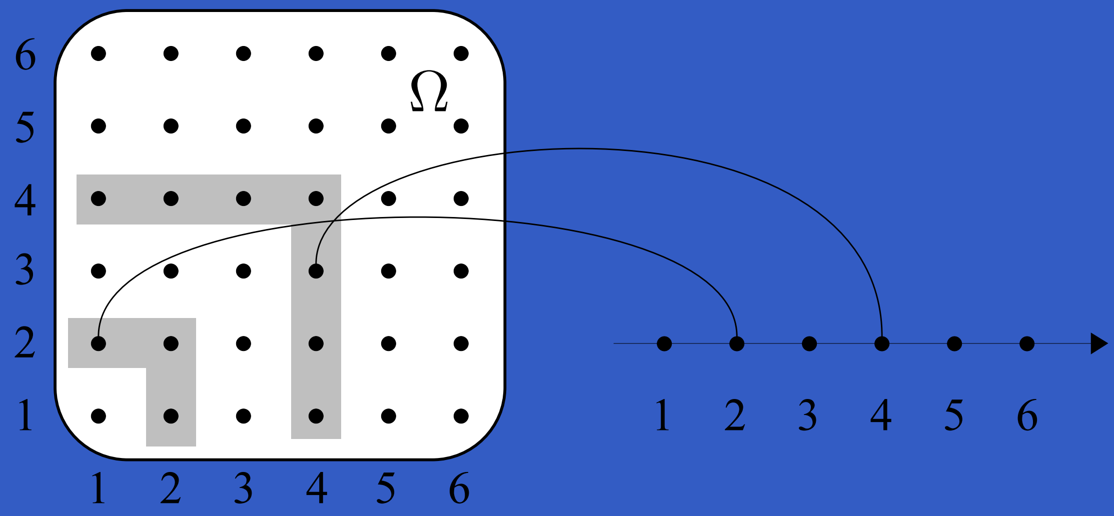


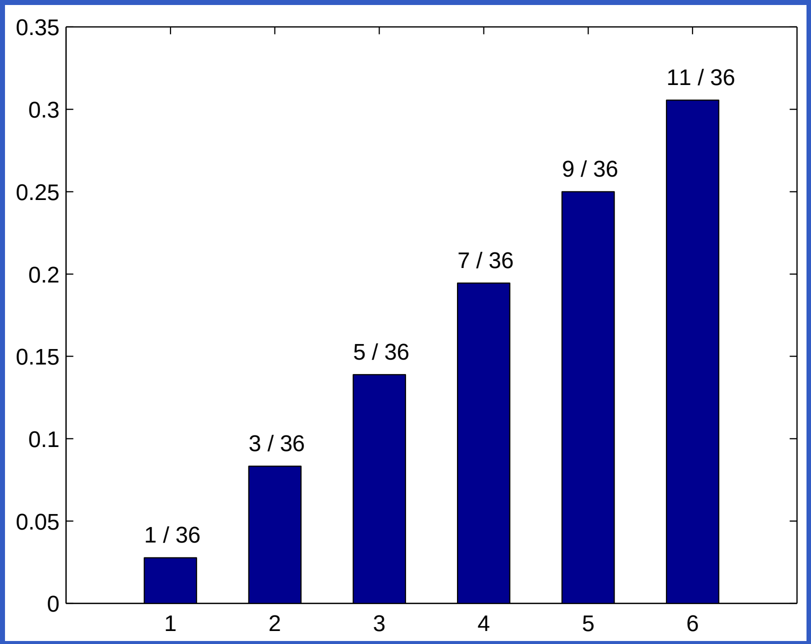


- $\bigcap_x \{X = x\} = \emptyset$
- $\bigcup_x \{X = x\} = \Omega$

Une partition naturelle de l'Univers

- Expérience : lancer deux dés ; X est la valeur maximale
  p.ex. : $p_X(2) = P(\{X = 2\}) = \frac{3}{36}$





- $\bigcap_x \{X = x\} = \emptyset$
- $\bigcup_x \{X = x\} = \Omega$
- Les événements $\{X = x\}$ forment une partition de Ω

Fonction de Probabilité

- Normalisation

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x)$

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\})$

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
$\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \stackrel{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\})$

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
$\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega)$

Fonction de Probabilité

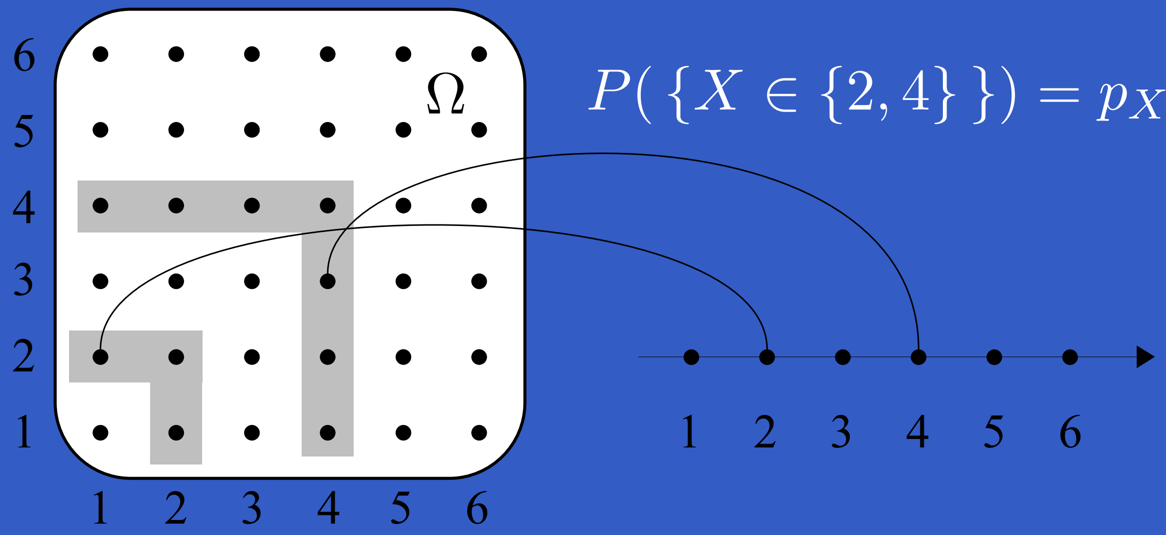
- Normalisation :
$\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \stackrel{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \stackrel{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$

Fonction de Probabilité

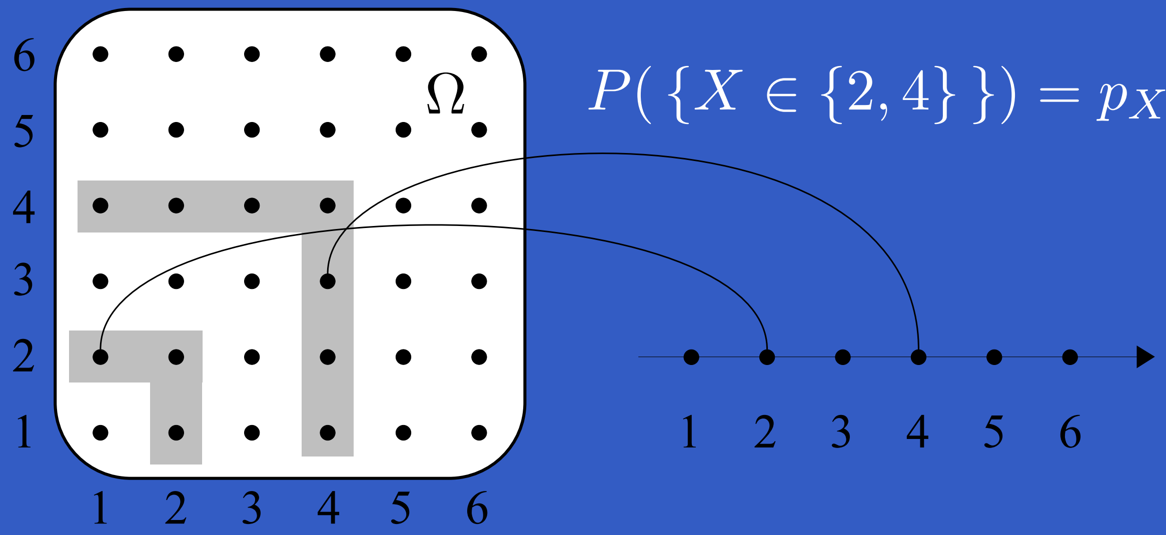
- Normalisation :
$\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$



$P(\,\{X \in \{2,4\}\,\}) = p_X(2) + p_X(4) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36}$

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$

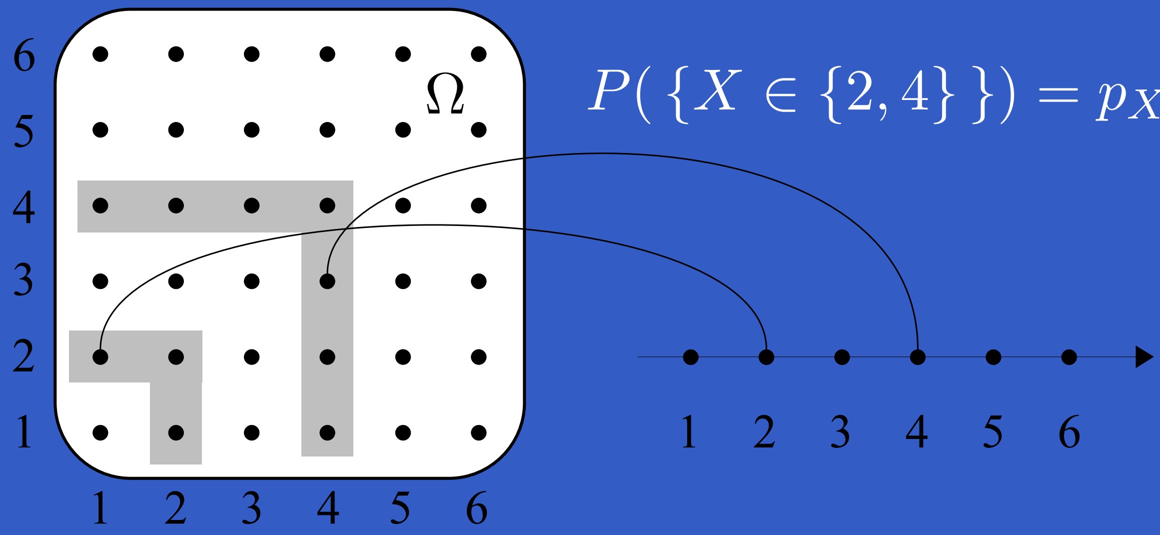


$P(\,\{X \in \{2,4\}\,\}) = p_X(2) + p_X(4) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36}$

- Comment calculer $p_X(x)$:

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$



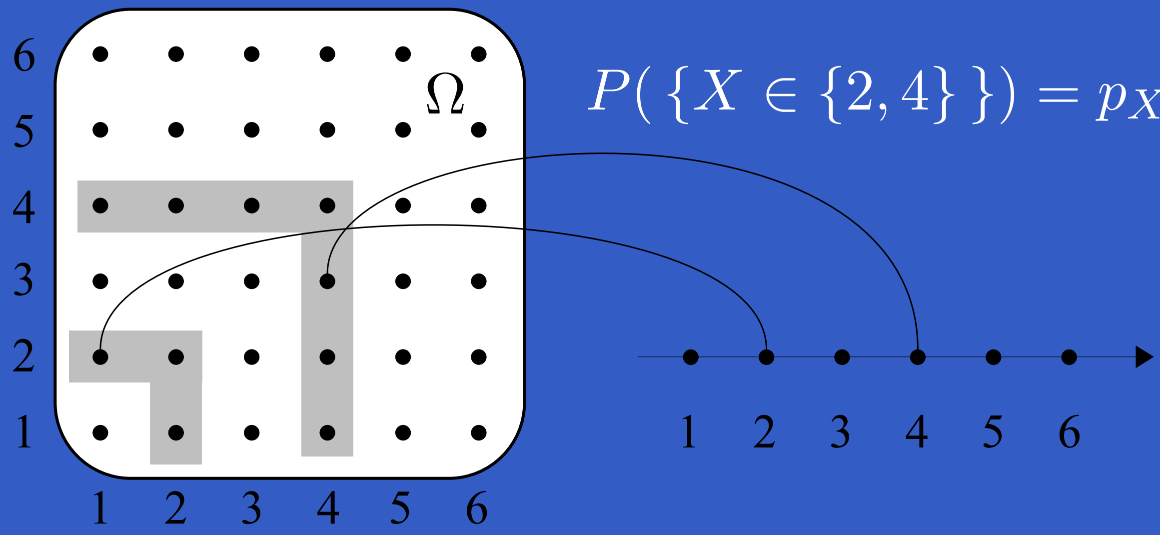
$P(\,\{X \in \{2,4\}\,\}) = p_X(2) + p_X(4) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36}$

- Comment calculer $p_X(x)$:

1. Trouver les valeurs possibles

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$



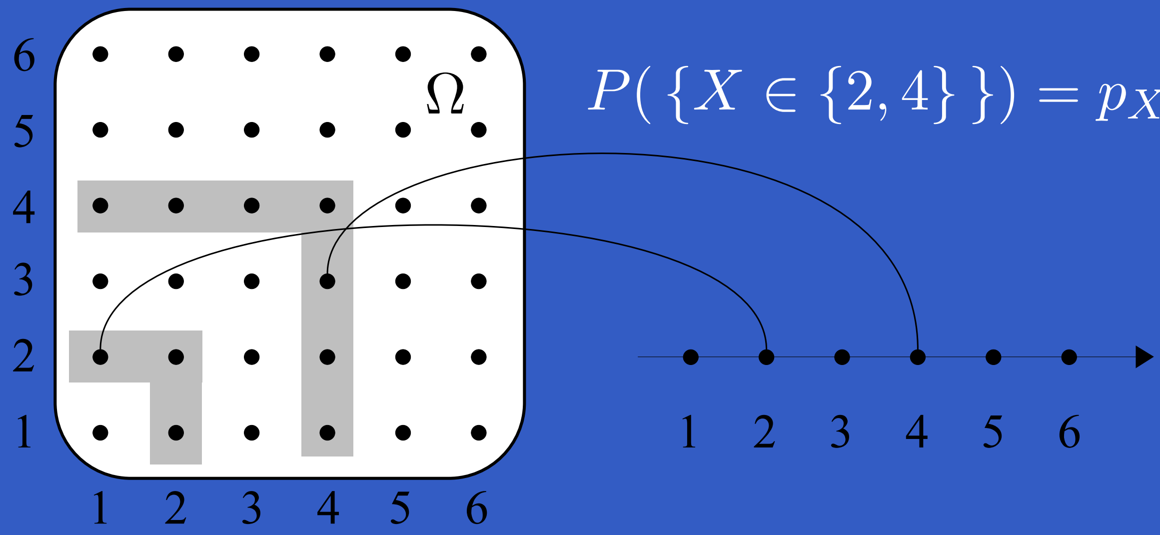
$P(\{X \in \{2, 4\}\}) = p_X(2) + p_X(4) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36}$

- Comment calculer $p_X(x)$:

  1. Trouver les valeurs possibles ; indiquer les valeurs impossibles

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
$\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$



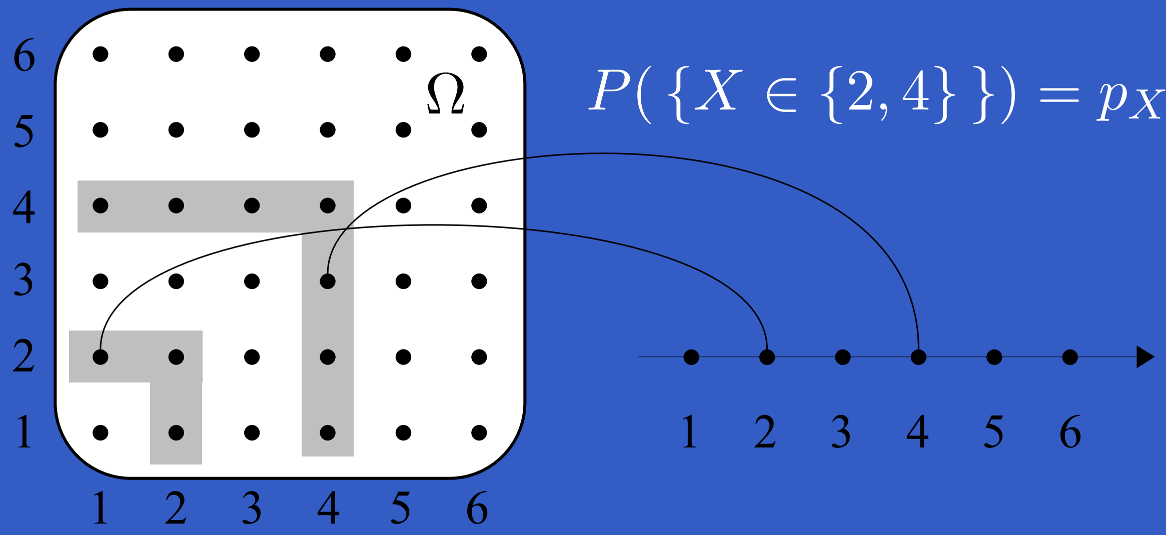
$P(\ \{X \in \{2, 4\}\ \}) = p_X(2) + p_X(4) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36}$

- Comment calculer $p_X(x)$:

1. Trouver les valeurs possibles ; indiquer les valeurs impossibles
2. Répérer les issues ω_i constituant l'événement $\{X = x\}$

Fonction de Probabilité

- Normalisation :
  $\sum_x p_X(x) = \sum_x P(\{X = x\}) \overset{\text{disj.}}{=} P(\bigcup_x \{X = x\}) \overset{\text{part.}}{=} P(\Omega) = 1$
- $P(\{X \in S\}) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{x \in S} p_X(x)$



$P(\,\{X \in \{2, 4\}\,\}) = p_X(2) + p_X(4) = \frac{3}{36} + \frac{7}{36}$

- Comment calculer $p_X(x)$:

1. Trouver les valeurs possibles ; indiquer les valeurs impossibles
2. Repérer les issues ω_i constituant l'événement $\{X = x\}$
3. Additionner les probabilités $P(\omega_i)$

Fonction d'une V.A.

- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.

Fonction d'une V.A.

- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$

Fonction d'une V.A.

- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\})$

Fonction d’une V.A.

- Une fonction d’une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right)$

Fonction d'une V.A.

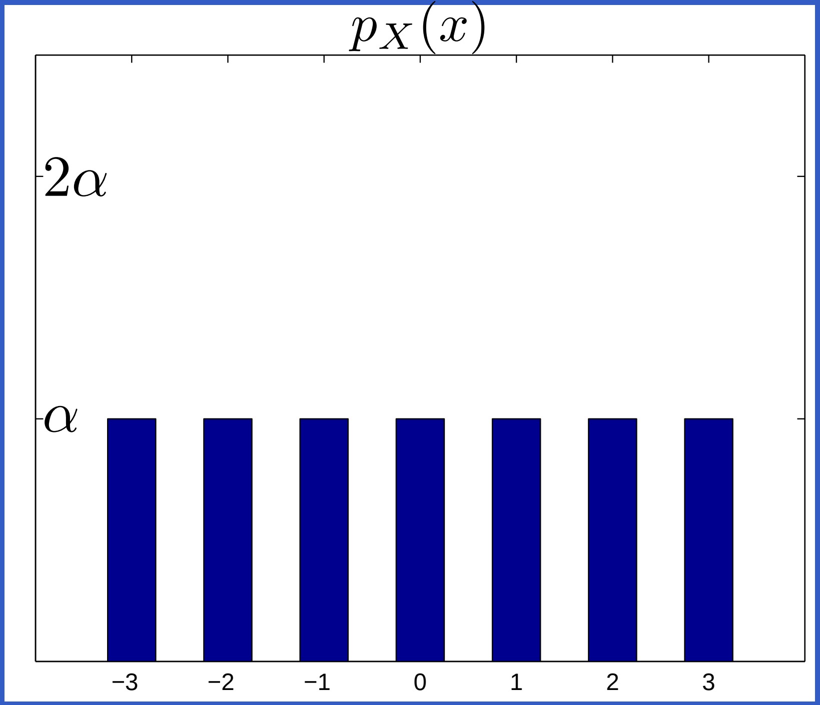
- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$

Fonction d'une V.A.

- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right) \stackrel{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$; $Y = |X|$

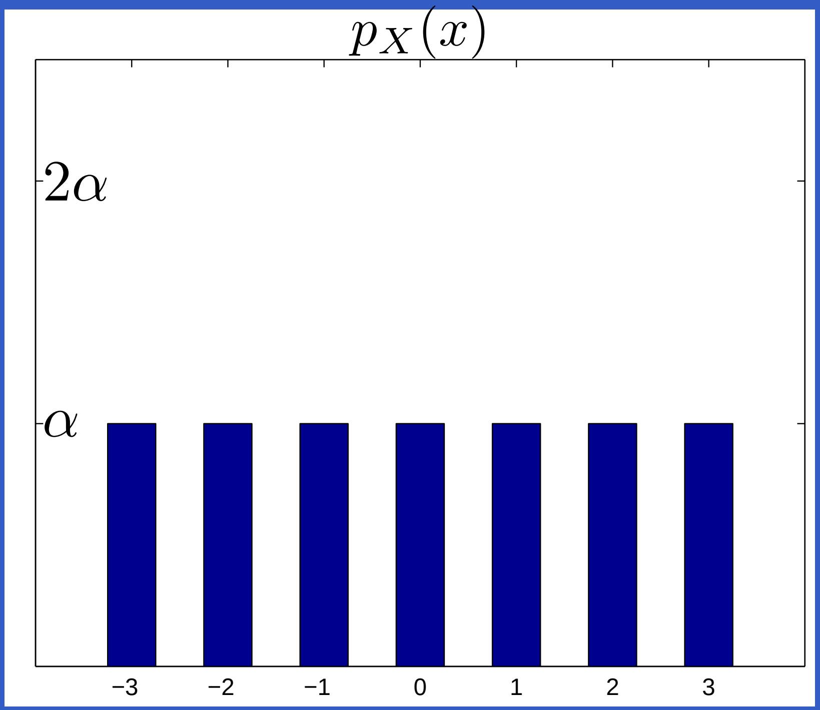
Fonction d'une V.A.

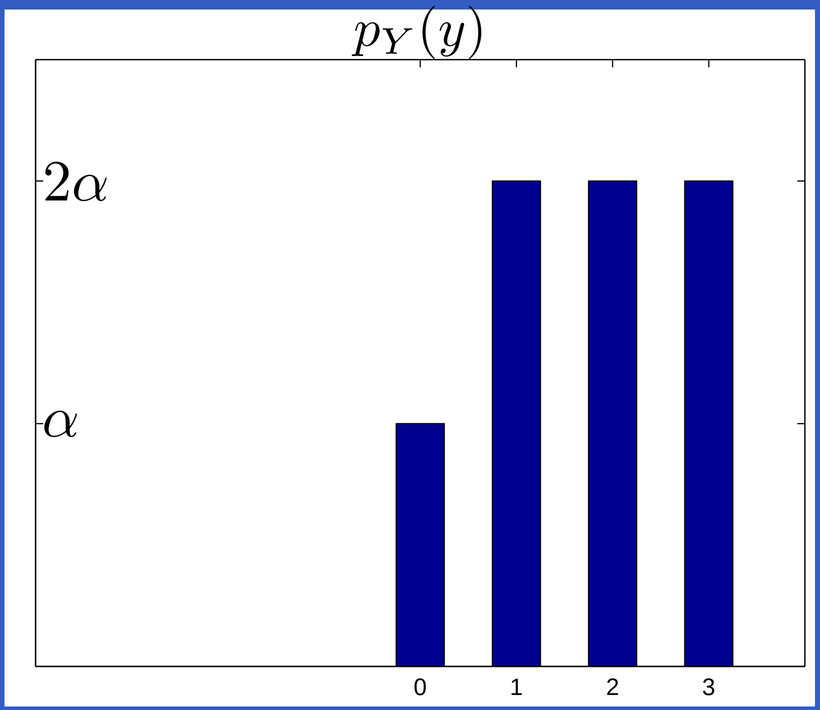
- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$; $Y = |X|$



Fonction d'une V.A.

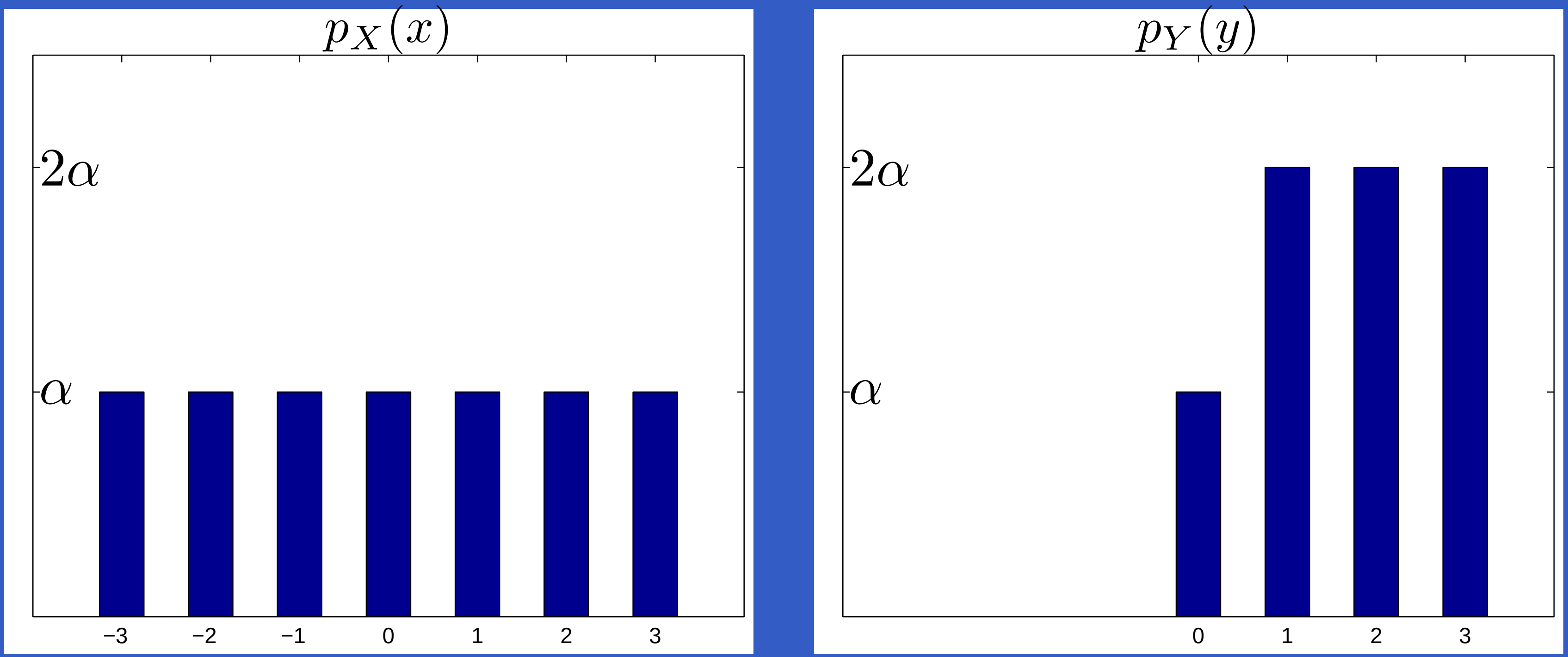
- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$; $Y = |X|$





Fonction d'une V.A.

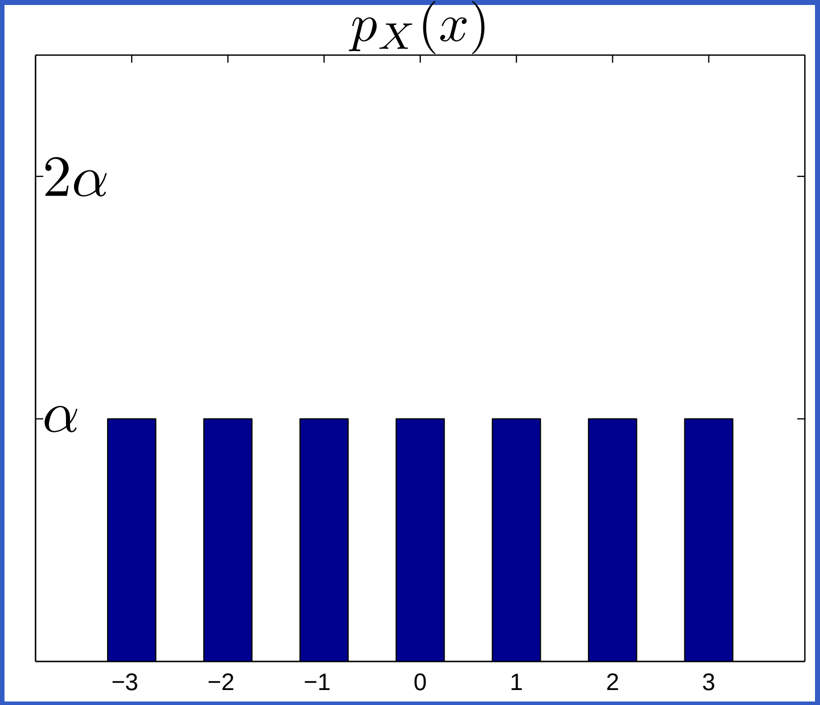
- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$; $Y = |X|$

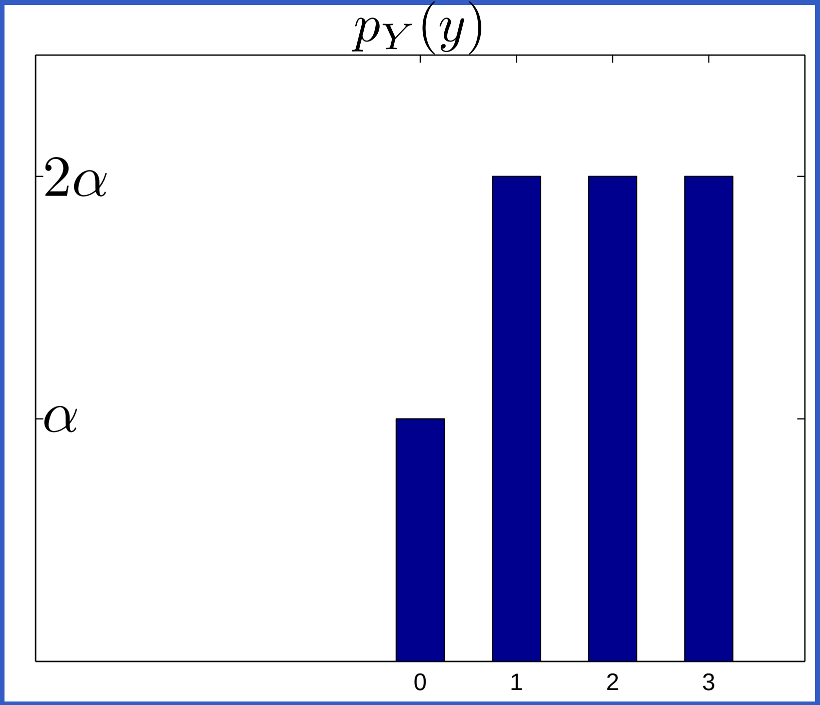


- Normalisation :

Fonction d'une V.A.

- Une fonction d'une V.A. est aussi une V.A.
- $Y = g(X)$
- $p_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P\left(\{X \in S\}_{S=\{x|g(x)=y\}}\right) \overset{\text{disj.}}{=} \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$; $Y = |X|$





- Normalisation : $\alpha = 1/7$

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)
2. Prendre la moyenne des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenues :

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)
2. Prendre la moyenne des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenues :

   moyenne $= \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)

2. Prendre la moyenne des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenues :

   $$\text{moyenne} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

   $$\overset{\text{regrouper}}{=} \frac{x_{(1)}N_n(x_{(1)})+x_{(2)}N_n(x_{(2)})+\ldots+x_{(m)}N_n(x_{(m)})}{n}$$

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)

2. Prendre la moyenne des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenues :

   moyenne $= \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

$$\overset{\text{regrouper}}{=} \frac{x_{(1)}N_n(x_{(1)})+x_{(2)}N_n(x_{(2)})+\ldots+x_{(m)}N_n(x_{(m)})}{n}$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_{(1)}p_X(x_{(1)}) + x_{(2)}p_X(x_{(2)}) + \ldots + x_{(m)}p_X(x_{(m)})$$

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)

2. Prendre la moyenne des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenues :

   moyenne $= \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

$$\overset{\text{regrouper}}{=} \frac{x_{(1)}N_n(x_{(1)})+x_{(2)}N_n(x_{(2)})+\ldots+x_{(m)}N_n(x_{(m)})}{n}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} x_{(1)}p_X(x_{(1)}) + x_{(2)}p_X(x_{(2)}) + \ldots + x_{(m)}p_X(x_{(m)})$$

$$= \sum_x x p_X(x)$$

Espérance de X

- v.a.d. X ; m valeurs possibles
- classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$
- Comment calculer une valeur « moyenne » ?

1. Répéter la même expérience n fois !

   (Considérer n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées)

2. Prendre la moyenne des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenues :

$$\text{moyenne} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

$$\overset{\text{regrouper}}{=} \frac{x_{(1)}N_n(x_{(1)})+x_{(2)}N_n(x_{(2)})+\ldots+x_{(m)}N_n(x_{(m)})}{n}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} x_{(1)}p_X(x_{(1)}) + x_{(2)}p_X(x_{(2)}) + \ldots + x_{(m)}p_X(x_{(m)})$$

$$= \sum_x x p_X(x) \triangleq \mathrm{E}[X]$$

Grandeurs statistiques

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution : $\sum_x (x-c) p_X(x) = 0$

Grandeurs statistiques

▼ Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :
$\sum_x (x - c) p_X(x) = 0 \ , \ c = \mathrm{E}[X]$

▼ Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :
$\sum_x (x - c) p_X(x) = 0 \ , \ c = \mathrm{E}[X]$
$p_X(x)$: « masse de probabilité »

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :
$\sum_x (x-c)p_X(x) = 0$, $c = \mathrm{E}[X]$
$p_X(x)$: « masse de probabilité »

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\big[(X-\mathrm{E}[X])^2\big] \geq 0}$$

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :
$\sum_x (x-c)p_X(x) = 0$, $c = \mathrm{E}[X]$
$p_X(x)$: « masse de probabilité »

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] \geq 0}$$

- Écart-type

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}[X]}}$$

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :
$\sum_x (x - c) p_X(x) = 0 \ , \ c = \mathrm{E}[X]$
$p_X(x)$: « masse de probabilité »

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] \geq 0}$$

- Écart-type

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}[X]}}$$

- n-ième moment (moment d'ordre n) : $\mathrm{E}[X^n]$

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_x x p_X(x)}$$

centre de gravité de la distribution :
$\sum_x (x-c)p_X(x) = 0$, $c = \mathrm{E}[X]$
$p_X(x)$: « masse de probabilité »

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])^2\big] \geq 0}$$

- Écart-type

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}[X]}}$$

- n-ième moment (moment d'ordre n) : $\mathrm{E}[X^n]$
- n-ième moment centré : $\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n]$

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$
1	p
0	$1 - p$

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$
1	p
0	$1-p$
	$\sum = 1$

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	p	p
0	$1-p$	0
	$\sum = 1$	

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	p	p
0	$1-p$	0
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = p$

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	$(x - \mathrm{E}[X])^2$
1	p	p	$(1-p)^2$
0	$1-p$	0	$(0-p)^2$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = p$	

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	$(x - \mathrm{E}[X])^2$	$(x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x)$
1	p	p	$(1-p)^2$	$(1-p)^2 p$
0	$1-p$	0	$(0-p)^2$	$p^2(1-p)$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = p$		

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

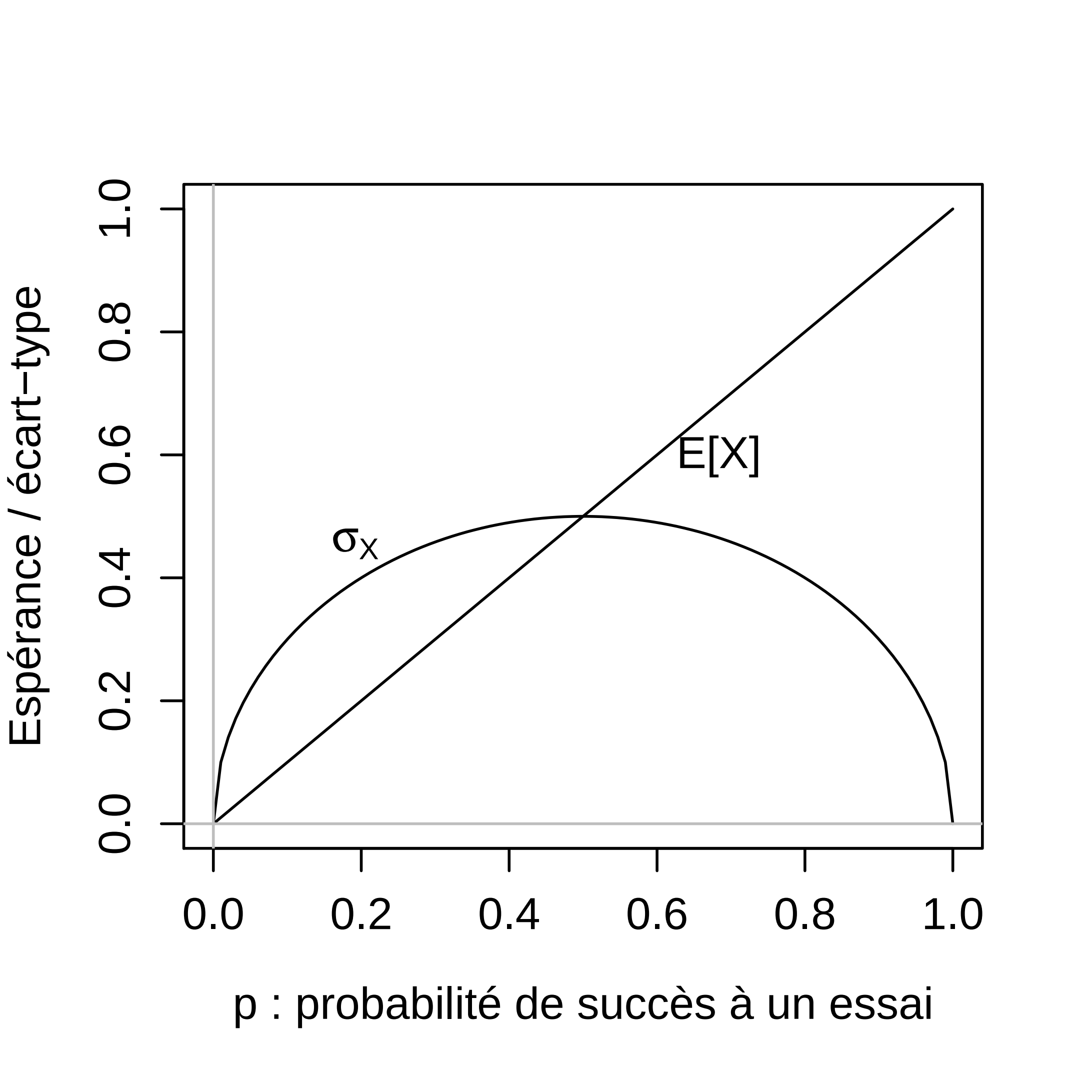
x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	$(x - \mathrm{E}[X])^2$	$(x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x)$
1	p	p	$(1-p)^2$	$(1-p)^2 p$
0	$1-p$	0	$(0-p)^2$	$p^2(1-p)$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = p$		$\mathrm{var}[X] = p(1-p)$

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli

- Expérience aléatoire : lancer une « pièce »
- Univers : $\Omega = \{P, F\}$
- Variable aléatoire X : $x = 1$ si « pile », $x = 0$ si « face »

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	$(x - \mathrm{E}[X])^2$	$(x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x)$
1	p	p	$(1-p)^2$	$(1-p)^2 p$
0	$1-p$	0	$(0-p)^2$	$p^2(1-p)$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = p$		$\mathrm{var}[X] = p(1-p)$
				$\sigma_X = \sqrt{p(1-p)}$

[Extra] Variable aléatoire de Bernoulli



[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$
-3	α
-2	α
-1	α
0	α
1	α
2	α
3	α

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$
-3	α
-2	α
-1	α
0	α
1	α
2	α
3	α
	$\sum = 1$

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
-3	α	-3α
-2	α	-2α
-1	α	-1α
0	α	0
1	α	1α
2	α	2α
3	α	3α
	$\sum = 1$	

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
-3	α	-3α
-2	α	-2α
-1	α	-1α
0	α	0
1	α	1α
2	α	2α
3	α	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y
-3	α	-3α	3
-2	α	-2α	2
-1	α	-1α	1
0	α	0	0
1	α	1α	1
2	α	2α	2
3	α	3α	3
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$	

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y	$yp_X(x)$
-3	α	-3α	3	3α
-2	α	-2α	2	2α
-1	α	-1α	1	1α
0	α	0	0	0
1	α	1α	1	1α
2	α	2α	2	2α
3	α	3α	3	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$		

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y	$yp_X(x)$
-3	α	-3α	3	3α
-2	α	-2α	2	2α
-1	α	-1α	1	1α
0	α	0	0	0
1	α	1α	1	1α
2	α	2α	2	2α
3	α	3α	3	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$		$\mathrm{E}[Y] = 12\alpha$

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y	$yp_X(x)$
-3	α	-3α	3	3α
-2	α	-2α	2	2α
-1	α	-1α	1	1α
0	α	0	0	0
1	α	1α	1	1α
2	α	2α	2	2α
3	α	3α	3	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$		$\mathrm{E}[Y] = 12\alpha$

y	$p_Y(y)$
0	α
1	2α
2	2α
3	2α

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y	$yp_X(x)$
-3	α	-3α	3	3α
-2	α	-2α	2	2α
-1	α	-1α	1	1α
0	α	0	0	0
1	α	1α	1	1α
2	α	2α	2	2α
3	α	3α	3	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$		$\mathrm{E}[Y] = 12\alpha$

y	$p_Y(y)$
0	α
1	2α
2	2α
3	2α
	$\sum = 1$

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \dots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y	$yp_X(x)$
-3	α	-3α	3	3α
-2	α	-2α	2	2α
-1	α	-1α	1	1α
0	α	0	0	0
1	α	1α	1	1α
2	α	2α	2	2α
3	α	3α	3	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$		$\mathrm{E}[Y] = 12\alpha$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$
0	α	0
1	2α	2α
2	2α	4α
3	2α	6α
	$\sum = 1$	

[Etra] Espérance de $g(X)$

- Exemple : X V.A. à distribution uniforme, $x \in \{-3, -2, \ldots, 3\}$
- $Y = |X|$

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$	y	$yp_X(x)$
-3	α	-3α	3	3α
-2	α	-2α	2	2α
-1	α	-1α	1	1α
0	α	0	0	0
1	α	1α	1	1α
2	α	2α	2	2α
3	α	3α	3	3α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 0$		$\mathrm{E}[Y] = 12\alpha$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$
0	α	0
1	2α	2α
2	2α	4α
3	2α	6α
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] = 12\alpha$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$
- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y] \\ &= \textstyle\sum_y y p_Y(y) \\ &= \textstyle\sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

$$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$

- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y]$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_y y p_Y(y) \\
&= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\
&= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\
&= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\
&= \sum_x g(x) p_X(x)
\end{aligned}
$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$
- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y] & \\ &= \sum_y y p_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \sum_x g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$

- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y]$

$$\begin{aligned}
&= \sum_y y p_Y(y) \\
&= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\
&= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\
&= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\
&= \sum_x g(x) p_X(x)
\end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$

- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[g(X)] &= \mathrm{E}[Y] \\ &= \sum_y y p_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \sum_x g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$

- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[g(X)] &= \mathrm{E}[Y] \\ &= \sum_y y p_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \sum_x g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$

- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[g(X)] &= \mathrm{E}[Y] \\ &= \sum_y y p_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \sum_x g(x) p_X(x) \end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$
- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned}\mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[Y] \\ &= \sum_y y p_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \sum_x g(x) p_X(x)\end{aligned}$$

Espérance de $g(X)$

- $$\boxed{\mathrm{E}[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)}$$

- $Y = g(X)$, $p_Y(y) = \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x)$
- $$\begin{aligned}\mathrm{E}[g(X)] &= \mathrm{E}[Y] \\ &= \sum_y y p_Y(y) \\ &= \sum_y y \sum_{\{x|g(x)=y\}} p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} y p_X(x) \\ &= \sum_y \sum_{\{x|g(x)=y\}} g(x) p_X(x) \\ &= \sum_x g(x) p_X(x)\end{aligned}$$

Fonction linéaire

$$Y = aX + b$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

$$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

$$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x)$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[aX+b] = \sum_x (ax+b)p_X(x) = a\sum_x x p_X(x) + b\sum_x p_X(x)\\ &= a\mathrm{E}[X] + b\end{aligned}$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$
  $= a\mathrm{E}[X] + b$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[aX + b]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$
  $= a\mathrm{E}[X] + b$

- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[aX + b] = \mathrm{E}\left[(aX + b - \mathrm{E}[aX + b])^2\right]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

$$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$
  $= a\mathrm{E}[X] + b$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[aX + b] = \mathrm{E}\Big[(aX + b - \mathrm{E}[aX + b])^2\Big]$
  $= \mathrm{E}\Big[(aX + b - a\mathrm{E}[X] - b)^2\Big]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$
  $= a\mathrm{E}[X] + b$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[aX + b] = \mathrm{E}\left[(aX + b - \mathrm{E}[aX + b])^2\right]$
  $= \mathrm{E}\left[(aX + b - a\mathrm{E}[X] - b)^2\right] = \mathrm{E}\left[(aX - a\mathrm{E}[X])^2\right]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

$$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b] = \sum_x (ax + b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$
  $= a\mathrm{E}[X] + b$
- $\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[aX + b] = \mathrm{E}\left[(aX + b - \mathrm{E}[aX + b])^2\right]$
  $= \mathrm{E}\left[(aX + b - a\mathrm{E}[X] - b)^2\right] = \mathrm{E}\left[(aX - a\mathrm{E}[X])^2\right]$
  $= a^2\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX+b] = \sum_x (ax+b)p_X(x) = a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x)$
  $= a\mathrm{E}[X] + b$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[Y] = \mathrm{var}[aX+b] &= \mathrm{E}\left[(aX+b-\mathrm{E}[aX+b])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[(aX+b-a\mathrm{E}[X]-b)^2\right] = \mathrm{E}\left[(aX-a\mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= a^2\mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}[X])^2\right] = a^2\mathrm{var}[X]\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \geq 0}$$

- $\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x)$

  $= \sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x)$

  $= \sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x)$

  $= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$

- $\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right]$

  $= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])^2\big] &= \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] &= \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\operatorname{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\operatorname{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\operatorname{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2\end{aligned}$$

Calcul de la variance

- $$\boxed{\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 \geq 0}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \textstyle\sum_x (x - \mathrm{E}[X])^2 p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x \{x^2 - 2x\mathrm{E}[X] + (\mathrm{E}[X])^2\} p_X(x) \\ &= \textstyle\sum_x x^2 p_X(x) - 2\mathrm{E}[X] \sum_x x p_X(x) + (\mathrm{E}[X])^2 \sum_x p_X(x) \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2(\mathrm{E}[X])^2 + (\mathrm{E}[X])^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\text{cste}})^2] = \mathrm{E}\left[X^2 - 2X\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - 2\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[X] + \left(\mathrm{E}[X]\right)^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}[X]\right)^2\end{aligned}$$

Variables Aléatoires Discrètes (deux et plus)

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :

  X : la valeur du premier dé

  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$
	$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$
	$\sum = 1$	

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :

  X : la valeur du premier dé

  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 21/6 = 3.5$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :

  X : la valeur du premier dé

  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 21/6 = 3.5$

y	$p_Y(y)$
1	$1/36$
2	$3/36$
3	$5/36$
4	$7/36$
5	$9/36$
6	$11/36$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 21/6 = 3.5$

y	$p_Y(y)$
1	$1/36$
2	$3/36$
3	$5/36$
4	$7/36$
5	$9/36$
6	$11/36$
	$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 21/6 = 3.5$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$
1	$1/36$	$1/36$
2	$3/36$	$6/36$
3	$5/36$	$15/36$
4	$7/36$	$28/36$
5	$9/36$	$45/36$
6	$11/36$	$66/36$
	$\sum = 1$	

[Extra] Deux variables aléatoires

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variables aléatoires :

  X : la valeur du premier dé

  Y : la valeur maximale des deux dés

x	$p_X(x)$	$xp_X(x)$
1	$1/6$	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$
3	$1/6$	$3/6$
4	$1/6$	$4/6$
5	$1/6$	$5/6$
6	$1/6$	$6/6$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[X] = 21/6 = 3.5$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$
1	$1/36$	$1/36$
2	$3/36$	$6/36$
3	$5/36$	$15/36$
4	$7/36$	$28/36$
5	$9/36$	$45/36$
6	$11/36$	$66/36$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] = 161/36 \approx 4.47$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

	$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
$p_Y(y)$							$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

	$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	0	$2/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	0	0	$3/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	0	0	0	$4/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/36$	$1/36$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/36$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y) | g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX+bY+c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement } \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \stackrel{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX+bY+c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement } \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \stackrel{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement } \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \stackrel{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX+bY+c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\ \underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement} \in \Omega}\ ) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX+bY+c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)\ ,\ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y)\ ,\ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)$, $p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX+bY+c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement } \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) \ , \ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)$, $p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement} \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement} \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) \ , \ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y) \ , \ p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement } \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) \;,\; p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y) \;,\; p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX+bY+c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la même expérience aléatoire
- Fonction de probabilité conjointe :

$$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\underbrace{\{X=x\}}_{\text{événement } \in \Omega} \cap \underbrace{\{Y=y\}}_{\text{événement } \in \Omega}) \overset{\text{sim.}}{=} P(X=x, Y=y)$$

- $P((X,Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x,y)$
- Fonctions de probabilité marginales :

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) \ , \ p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y)$$

- $Z = g(X,Y)$, $p_Z(z) = \sum_{\{(x,y)|g(x,y)=z\}} p_{XY}(x,y)$

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$$

- Généralisation à n variables aléatoires

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$
1	$1/36$
2	$3/36$
3	$5/36$
4	$7/36$
5	$9/36$
6	$11/36$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$
1	$1/36$
2	$3/36$
3	$5/36$
4	$7/36$
5	$9/36$
6	$11/36$
	$\sum = 1$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$y p_Y(y)$
1	$1/36$	$1/36$
2	$3/36$	$6/36$
3	$5/36$	$15/36$
4	$7/36$	$28/36$
5	$9/36$	$45/36$
6	$11/36$	$66/36$
	$\sum = 1$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$
1	$1/36$	$1/36$
2	$3/36$	$6/36$
3	$5/36$	$15/36$
4	$7/36$	$28/36$
5	$9/36$	$45/36$
6	$11/36$	$66/36$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	
2	$3/36$	$6/36$	
3	$5/36$	$15/36$	
4	$7/36$	$28/36$	
5	$9/36$	$45/36$	
6	$11/36$	$66/36$	
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$y p_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$y p_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : A = {le 1er dé est impair}, B = {le 1er dé est pair}

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$	$p_{Y\|B}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$	
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$	
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$	
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$	
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$	
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$y p_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$y p_{Y\|A}(y)$	$p_{Y\|B}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	0
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$	$2/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$	$1/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$	$5/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$	$2/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$	$8/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : $Y =$ la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$	$p_{Y\|B}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	0
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$	$2/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$	$1/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$	$5/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$	$2/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$	$8/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$	$\sum = 1$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$	$p_{Y\|B}(y)$	$yp_{Y\|B}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	0	0
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$	$2/18$	$4/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$	$1/18$	$3/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$	$5/18$	$20/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$	$2/18$	$10/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$	$8/18$	$48/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$	$\sum = 1$	

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$	$p_{Y\|B}(y)$	$yp_{Y\|B}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	0	0
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$	$2/18$	$4/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$	$1/18$	$3/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$	$5/18$	$20/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$	$2/18$	$10/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$	$8/18$	$48/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|B] \approx 4.72$

[Extra] V.A. conditionnée par un évenement

- Expérience aléatoire : lancer deux dés (encore)
- Univers : $\Omega = \{\ldots\}$ (utiliser la grille 6×6)
- Variable aléatoire : Y = la valeur maximale des deux dés
- Évenements : $A = \{$le 1er dé est impair$\}$, $B = \{$le 1er dé est pair$\}$

y	$p_Y(y)$	$yp_Y(y)$	$p_{Y\|A}(y)$	$yp_{Y\|A}(y)$	$p_{Y\|B}(y)$	$yp_{Y\|B}(y)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	0	0
2	$3/36$	$6/36$	$1/18$	$2/18$	$2/18$	$4/18$
3	$5/36$	$15/36$	$4/18$	$12/18$	$1/18$	$3/18$
4	$7/36$	$28/36$	$2/18$	$8/18$	$5/18$	$20/18$
5	$9/36$	$45/36$	$7/18$	$35/18$	$2/18$	$10/18$
6	$11/36$	$66/36$	$3/18$	$18/18$	$8/18$	$48/18$
	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y] \approx 4.47$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|A] \approx 4.22$	$\sum = 1$	$\mathrm{E}[Y\|B] \approx 4.72$

- $\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{2}\mathrm{E}[Y|A] + \frac{1}{2}\mathrm{E}[Y|B]$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X|Y}(x|y) \triangleq P(\{X = x\}|\{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
$p_Y(y)$							$\sum = 1$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{XY}(x,y) \triangleq P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
2	0	$2/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
3	0	0	$3/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
4	0	0	0	$4/36$	$1/36$	$1/36$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/36$	$1/36$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/36$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$							

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1						

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$					

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5				

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$			

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$		

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5	22/7	35/9	51/11	

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5	22/7	35/9	51/11	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$							

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$						

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$	$5/36$					

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5	22/7	35/9	51/11	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1/36	5/36	12/36				

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5	22/7	35/9	51/11	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1/36	5/36	12/36	22/36			

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$	$5/36$	$12/36$	$22/36$	$35/36$		

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$	$5/36$	$12/36$	$22/36$	$35/36$	$51/36$	

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5	22/7	35/9	51/11	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1/36	5/36	12/36	22/36	35/36	51/36	$\sum = 126/36$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$	$5/36$	$12/36$	$22/36$	$35/36$	$51/36$	$\sum = 126/36$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$	$5/36$	$12/36$	$22/36$	$35/36$	$51/36$	$\sum = 126/36$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|Y=y]$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
2	0	2/3	1/5	1/7	1/9	1/11	1/6
3	0	0	3/5	1/7	1/9	1/11	1/6
4	0	0	0	4/7	1/9	1/11	1/6
5	0	0	0	0	5/9	1/11	1/6
6	0	0	0	0	0	6/11	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	5/3	12/5	22/7	35/9	51/11	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1/36	5/36	12/36	22/36	35/36	51/36	$\sum = 126/36$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|Y=y] = \mathrm{E}[\ \mathrm{E}[X|Y=y]\ ]$

[Extra] V.A. conditionnée par une autre V.A.

- Variables aléatoires :
  X : la valeur du premier dé, Y : la valeur maximale des deux dés

	$p_{X\|Y}(x\|y) \triangleq P(\{X=x\}\|\{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	1	$1/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
2	0	$2/3$	$1/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
3	0	0	$3/5$	$1/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
4	0	0	0	$4/7$	$1/9$	$1/11$	$1/6$
5	0	0	0	0	$5/9$	$1/11$	$1/6$
6	0	0	0	0	0	$6/11$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$
$\mathrm{E}[X\|Y=y]$	1	$5/3$	$12/5$	$22/7$	$35/9$	$51/11$	?
$p_Y(y)\mathrm{E}[X\|Y=y]$	$1/36$	$5/36$	$12/36$	$22/36$	$35/36$	$51/36$	$\sum = 126/36$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|Y=y] = \mathrm{E}[\ \mathrm{E}[X|Y=y]\ ]$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x)$$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A)$$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A)$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \Rightarrow \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \Rightarrow \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$p_{X|Y}(x|y)$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \ \Rightarrow \ \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0})$$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})}$$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \ \Rightarrow \ \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}| \underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y)$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$
Approche séquentielle :

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$
Approche séquentielle :
$p_{XY}(x, y)$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y) \neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$
Approche séquentielle :
$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_{Y|X}(y|x)$

V.A. conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

$$p_{X|A}(x) = P(\{X = x\}|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

$\bigcap_x (\{X = x\} \cap A) = \emptyset$, $\bigcup_x (\{X = x\} \cap A) = A$
$P(A) = \sum_x P(\{X = x\} \cap A) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|A}(x) = 1$

- V.A. conditionnée par une autre V.A.

$$p_{X|Y}(x|y) = P(\{X = x\}|\underbrace{\{Y = y\}}_{p_Y(y)\neq 0}) = \frac{P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y) \;\Rightarrow\; \sum_x p_{X|Y}(x|y) = 1$
Approche séquentielle :
$p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|\{Y=y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)\mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)\mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y = y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y) \mathrm{E}[X|\{Y = y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B) \mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|\{Y=y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)\mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)\mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|\{Y=y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)\mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)\mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|\{Y=y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)\mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)\mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y = y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|\{Y = y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)\mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)\mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y = y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y) \mathrm{E}[X|\{Y = y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i) \mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B) \mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|A] \triangleq \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \triangleq \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_y p_Y(y)\mathrm{E}[X|\{Y=y\}]$ (théorème d'espérance totale)
- $A_1, \ldots, A_n$: partition de Ω, $P(A_i) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^n P(A_i)\mathrm{E}[X|A_i]$
- $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$: partition de B, $P(A_i \cap B) \neq 0$

  $\mathrm{E}[X|B] = \sum_{i=1}^n P(A_i|B)\mathrm{E}[X|A_i \cap B]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)\ ,\ \forall x$
  - si $P(A)\neq 0\ ,\ p_{X|A}(x) = p_X(x)\ ,\ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x,y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y)\neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}\ ,\ \boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1,\ldots,X_n$
  - $p_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1,\ldots,x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1\ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\ldots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1+\ldots+X_n] = \mathrm{var}[X_1]+\ldots+\mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)\ ,\ \forall x$
  - si $P(A)\neq 0\ ,\ p_{X|A}(x) = p_X(x)\ ,\ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x,y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y)\neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}\ ,\ \boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X]+\mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1,\ldots,X_n$
  - $p_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1,\ldots,x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1\ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\ldots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1+\ldots+X_n] = \mathrm{var}[X_1]+\ldots+\mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x, y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$ $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \text{ , } \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x, y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$ $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)\ ,\ \forall x$
  - si $P(A) \neq 0\ ,\ p_{X|A}(x) = p_X(x)\ ,\ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x,y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}\ ,\ \boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1,\dots,X_n$
  - $p_{X_1\dots X_n}(x_1,\dots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\dots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1,\dots,x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1\dots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\dots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1+\dots+X_n] = \mathrm{var}[X_1]+\dots+\mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A)\neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y)\neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1,\ldots,x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1\ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\ldots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1+\ldots+X_n] = \mathrm{var}[X_1]+\ldots+\mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x, y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x, y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$ $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \text{ , } \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A)\neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x,y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y)\neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1,\ldots,X_n$
  - $p_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1,\ldots,x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1\ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\ldots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1+\ldots+X_n] = \mathrm{var}[X_1]+\ldots+\mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x, y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\} \cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)$, $\forall x$
  - si $P(A) \neq 0$, $p_{X|A}(x) = p_X(x)$, $\forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \; , \; \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$, $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A) \ , \ \forall x$
  - si $P(A) \neq 0 \ , \ p_{X|A}(x) = p_X(x) \ , \ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$ $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x) \ , \ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \ , \ \boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n) \ , \ \forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)\ ,\ \forall x$
  - si $P(A) \neq 0\ ,\ p_{X|A}(x) = p_X(x)\ ,\ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}\ ,\ \boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\ldots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X = x\} \cap A) = P(\{X = x\})P(A) = p_X(x)P(A) \ , \ \forall x$
  - si $P(A) \neq 0 \ , \ p_{X|A}(x) = p_X(x) \ , \ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x, y)} = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(\{X = x\})P(\{Y = y\})$ $\boxed{= p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x, y) = p_X(x) \ , \ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \ , \ \boxed{\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
  - $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n) \ , \ \forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Indépendance

- Entre une V.A. X et un événement A :
  - $P(\{X=x\}\cap A) = P(\{X=x\})P(A) = p_X(x)P(A)\ ,\ \forall x$
  - si $P(A)\neq 0\ ,\ p_{X|A}(x) = p_X(x)\ ,\ \forall x$
- Entre deux V.A. X et Y :
  - $\boxed{p_{XY}(x,y)} = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = P(\{X=x\})P(\{Y=y\})$
    $\boxed{= p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x,y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y)\neq 0$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}\ ,\ \boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X]+\mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1,\ldots,X_n$
  - $p_{X_1\ldots X_n}(x_1,\ldots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\ldots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1,\ldots,x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1\ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1]\ldots\mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1+\ldots+X_n] = \mathrm{var}[X_1]+\ldots+\mathrm{var}[X_n]$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
$p_Y(y)$							$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	
$p_Y(y)$							$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$							$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] =$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xy p_{XY}(x,y)$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x,y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xyp_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{216}$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x, y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xyp_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{216}$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x,y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xyp_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{216} + \ldots + 6 \cdot 6 \cdot \frac{11}{216}$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x,y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xy p_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{216} + \ldots + 6 \cdot 6 \cdot \frac{11}{216}$
  $\overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x,y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xy p_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{216} + \ldots + 6 \cdot 6 \cdot \frac{11}{216}$

  $\overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \left(1 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6}\right)$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x,y \Longrightarrow X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xyp_{XY}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{216} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{216} + \ldots + 6 \cdot 6 \cdot \frac{11}{216}$

$$\stackrel{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \left(1 \cdot \tfrac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \tfrac{1}{6}\right)\left(1 \cdot \tfrac{1}{36} + \ldots + 6 \cdot \tfrac{11}{36}\right)$$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$						
$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \forall x,y \implies X$ et Y indépendantes
- $\mathrm{E}[XY] = \sum_{x,y} xyp_{XY}(x,y) = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{216} + 1\cdot 2\cdot\frac{3}{216} + \ldots + 6\cdot 6\cdot\frac{11}{216}$

  $\stackrel{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] = \left(1\cdot\frac{1}{6} + \ldots + 6\cdot\frac{1}{6}\right)\left(1\cdot\frac{1}{36} + \ldots + 6\cdot\frac{11}{36}\right)$

  $= \frac{21}{6}\cdot\frac{161}{36} \approx 15.65$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y]$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big]$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x\backslash y$	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ 1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$
  $= \big\{(1+1)^2 \cdot \frac{1}{216}$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$
  $= \big\{(1+1)^2 \cdot \frac{1}{216} + \ldots + (6+6)^2 \cdot \frac{11}{216}\big\}$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	$p_{XY}(x,y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ 1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$
  $= \big\{(1+1)^2 \cdot \frac{1}{216} + \ldots + (6+6)^2 \cdot \frac{11}{216}\big\} - \big(\frac{21}{6} + \frac{161}{36}\big)^2$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$
  $= \big\{(1+1)^2 \cdot \frac{1}{216} + \ldots + (6+6)^2 \cdot \frac{11}{216}\big\} - \big(\frac{21}{6} + \frac{161}{36}\big)^2$
  $\stackrel{\text{ind.}}{=} \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $$\begin{aligned}\operatorname{var}[X+Y] &= \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\ &= \Big\{(1+1)^2 \cdot \tfrac{1}{216} + \ldots + (6+6)^2 \cdot \tfrac{11}{216}\Big\} - \Big(\tfrac{21}{6} + \tfrac{161}{36}\Big)^2 \\ &\overset{\text{ind.}}{=} \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big] - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}\big[Y^2\big] - \mathrm{E}[Y]^2\end{aligned}$$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$

$$= \left\{(1+1)^2\cdot\tfrac{1}{216}+\ldots+(6+6)^2\cdot\tfrac{11}{216}\right\} - \left(\tfrac{21}{6}+\tfrac{161}{36}\right)^2$$

$$\overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{var}[X]+\mathrm{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big]-\mathrm{E}[X]^2+\mathrm{E}\big[Y^2\big]-\mathrm{E}[Y]^2$$

$$= \left(1^2\cdot\tfrac{1}{6}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{1}{6}\right)$$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
1	1/216	3/216	5/216	7/216	9/216	11/216	1/6
2	1/216	3/216	5/216	7/216	9/216	11/216	1/6
3	1/216	3/216	5/216	7/216	9/216	11/216	1/6
4	1/216	3/216	5/216	7/216	9/216	11/216	1/6
5	1/216	3/216	5/216	7/216	9/216	11/216	1/6
6	1/216	3/216	5/216	7/216	9/216	11/216	1/6
$p_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$
  $= \big\{(1+1)^2 \cdot \frac{1}{216} + \ldots + (6+6)^2 \cdot \frac{11}{216}\big\} - \big(\frac{21}{6} + \frac{161}{36}\big)^2$
  $\overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big] - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}\big[Y^2\big] - \mathrm{E}[Y]^2$
  $= \big(1^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6}\big) - \big(\frac{21}{6}\big)^2$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$						
$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $$\begin{aligned}\operatorname{var}[X+Y] &= \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\ &= \big\{(1+1)^2\cdot\tfrac{1}{216}+\ldots+(6+6)^2\cdot\tfrac{11}{216}\big\} - \big(\tfrac{21}{6}+\tfrac{161}{36}\big)^2 \\ &\overset{\text{ind.}}{=} \operatorname{var}[X]+\operatorname{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big]-\mathrm{E}[X]^2+\mathrm{E}\big[Y^2\big]-\mathrm{E}[Y]^2 \\ &= \big(1^2\cdot\tfrac{1}{6}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{1}{6}\big)-\big(\tfrac{21}{6}\big)^2+\big(1^2\cdot\tfrac{1}{36}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{11}{36}\big)\end{aligned}$$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$						
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2$

$$= \Big\{(1+1)^2\cdot\tfrac{1}{216}+\ldots+(6+6)^2\cdot\tfrac{11}{216}\Big\} - \big(\tfrac{21}{6}+\tfrac{161}{36}\big)^2$$

$$\stackrel{\text{ind.}}{=} \mathrm{var}[X]+\mathrm{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big]-\mathrm{E}[X]^2+\mathrm{E}\big[Y^2\big]-\mathrm{E}[Y]^2$$

$$= \big(1^2\cdot\tfrac{1}{6}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{1}{6}\big)-\big(\tfrac{21}{6}\big)^2+\big(1^2\cdot\tfrac{1}{36}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{11}{36}\big)-\big(\tfrac{161}{36}\big)^2$$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$						
$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $$\begin{aligned}
\operatorname{var}[X+Y] &= \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\
&= \left\{(1+1)^2 \cdot \tfrac{1}{216} + \ldots + (6+6)^2 \cdot \tfrac{11}{216}\right\} - \left(\tfrac{21}{6} + \tfrac{161}{36}\right)^2 \\
&\overset{\text{ind.}}{=} \operatorname{var}[X] + \operatorname{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big] - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}\big[Y^2\big] - \mathrm{E}[Y]^2 \\
&= \left(1^2 \cdot \tfrac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \tfrac{1}{6}\right) - \left(\tfrac{21}{6}\right)^2 + \left(1^2 \cdot \tfrac{1}{36} + \ldots + 6^2 \cdot \tfrac{11}{36}\right) - \left(\tfrac{161}{36}\right)^2 \\
&= \tfrac{91}{6} - \left(\tfrac{21}{6}\right)^2 + \tfrac{791}{36} - \left(\tfrac{161}{36}\right)^2
\end{aligned}$$

[Extra] Deux variables aléatoires indépendantes

	$p_{XY}(x,y) = P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$						
$x\backslash y$	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
1	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
2	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
3	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
4	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
5	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
6	$1/216$	$3/216$	$5/216$	$7/216$	$9/216$	$11/216$	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/36$	$3/36$	$5/36$	$7/36$	$9/36$	$11/36$	$\sum = 1$

- $$\begin{aligned}\operatorname{var}[X+Y] &= \mathrm{E}\big[(X+Y-\mathrm{E}[X+Y])^2\big] = \mathrm{E}\big[(X+Y)^2\big] - \mathrm{E}[X+Y]^2 \\ &= \Big\{(1+1)^2\cdot\tfrac{1}{216}+\ldots+(6+6)^2\cdot\tfrac{11}{216}\Big\} - \big(\tfrac{21}{6}+\tfrac{161}{36}\big)^2 \\ &\overset{\text{ind.}}{=} \operatorname{var}[X]+\operatorname{var}[Y] = \mathrm{E}\big[X^2\big]-\mathrm{E}[X]^2+\mathrm{E}\big[Y^2\big]-\mathrm{E}[Y]^2 \\ &= \big(1^2\cdot\tfrac{1}{6}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{1}{6}\big)-\big(\tfrac{21}{6}\big)^2+\big(1^2\cdot\tfrac{1}{36}+\ldots+6^2\cdot\tfrac{11}{36}\big)-\big(\tfrac{161}{36}\big)^2 \\ &= \tfrac{91}{6}-\big(\tfrac{21}{6}\big)^2+\tfrac{791}{36}-\big(\tfrac{161}{36}\big)^2 \approx 4.89\end{aligned}$$

Deux variables aléatoires indépendantes

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

Deux variables aléatoires indépendantes

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

▼ R en 5 points

Deux variables aléatoires indépendantes

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

▼ R en 5 points

1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`
   (les deux sont équivalents dans les versions récentes !)

Deux variables aléatoires indépendantes

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

▼ R en 5 points

1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`
   (les deux sont équivalents dans les versions récentes !)
2. `x = c(1, 2, 3)` : $x = (1, 2, 3)$
   (fonction de concantenation ; on la trouve partout !)

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

▼ R en 5 points

1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`
   (les deux sont équivalents dans les versions récentes !)
2. `x = c(1, 2, 3)` : $x = (1, 2, 3)$
   (fonction de concantenation ; on la trouve partout !)
3. On utilise le point "." dans les noms à la place de "_"
   (`esp.x.fois.y` n'est qu'un nom de variable !)

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

▼ R en 5 points

1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`
   (les deux sont équivalents dans les versions récentes !)
2. `x = c(1, 2, 3)` : $x = (1, 2, 3)$
   (fonction de concantenation ; on la trouve partout !)
3. On utilise le point "." dans les noms à la place de "_"
   (`esp.x.fois.y` n'est qu'un nom de variable !)
4. Obtenir de l'aide sur une commande :
   `?nom_de_la_commande` ou
   `help(nom_de_la_commande)`

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

▼ R en 5 points

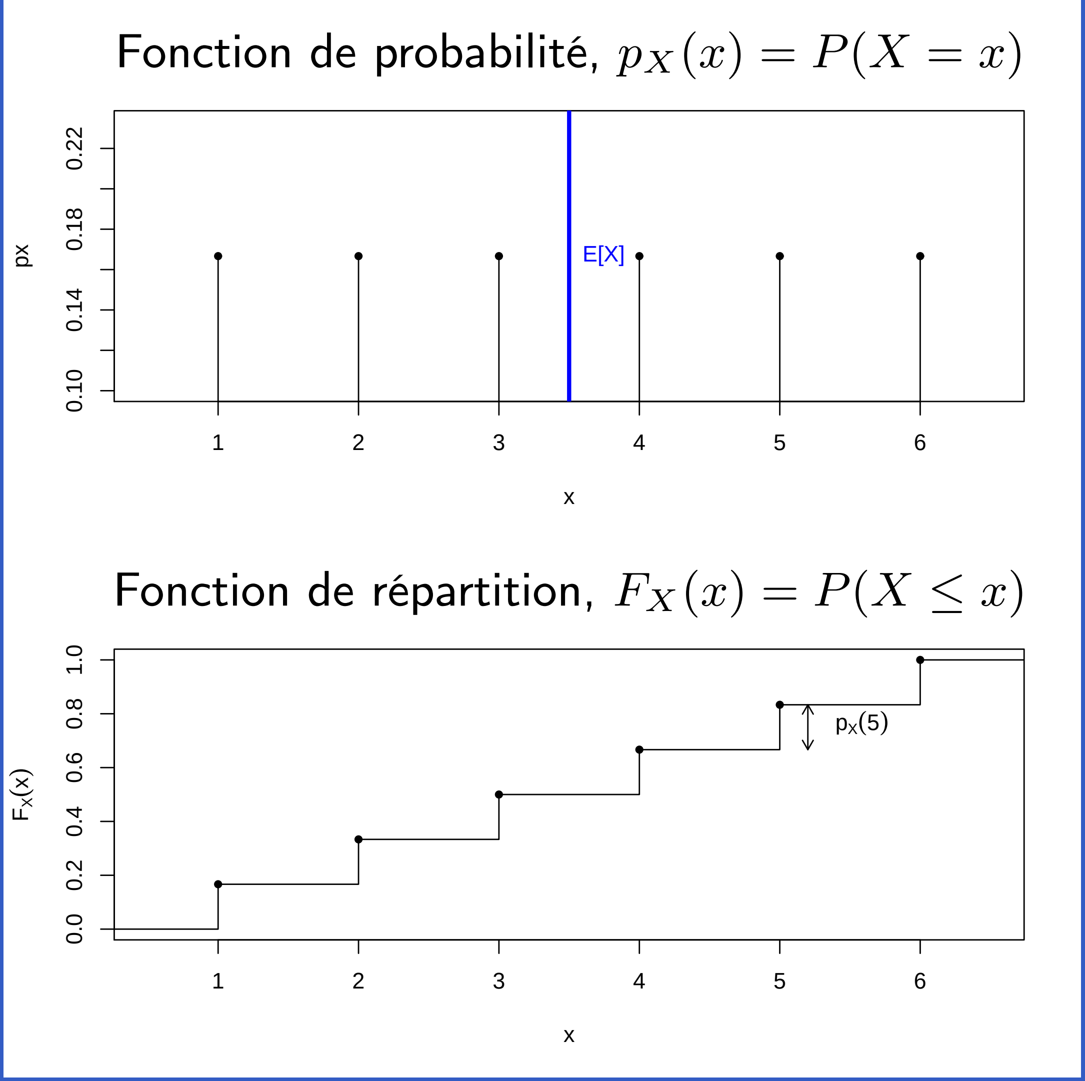
1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`
   (les deux sont équivalents dans les versions récentes !)
2. `x = c(1, 2, 3)` : $x = (1, 2, 3)$
   (fonction de concantenation ; on la trouve partout !)
3. On utilise le point "." dans les noms à la place de "_"
   (`esp.x.fois.y` n'est qu'un nom de variable !)
4. Obtenir de l'aide sur une commande :
   `?nom_de_la_commande` ou
   `help(nom_de_la_commande)`
5. Un document très utile :
   Short-refcard.pdf (4 pages)

Cliquer sur le logo pour télécharger le script R !

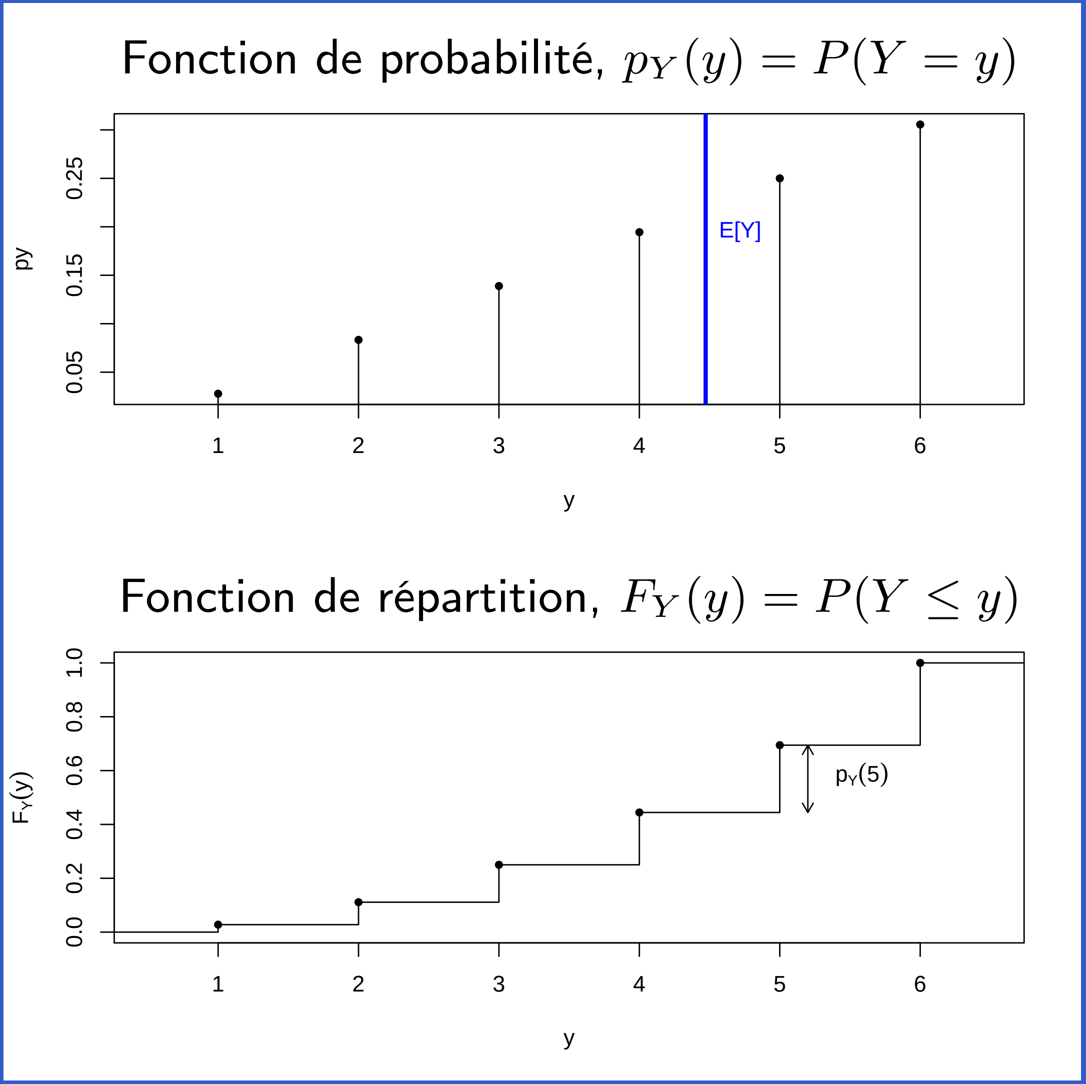
▼ R en 5 points

1. `x <- 5` équivalent à `x = 5`
   (les deux sont équivalents dans les versions récentes !)
2. `x = c(1, 2, 3)` : $x = (1, 2, 3)$
   (fonction de concantenation ; on la trouve partout !)
3. On utilise le point "." dans les noms à la place de "_"
   (`esp.x.fois.y` n'est qu'un nom de variable !)
4. Obtenir de l'aide sur une commande :
   `?nom_de_la_commande` ou
   `help(nom_de_la_commande)`
5. Un document très utile :
   Short-refcard.pdf (4 pages)
   (plus la documentation proposée en bibliographie)

[Extra] Fonction de probabilité / Fonction de répartition



[Extra] Fonction de probabilité / Fonction de répartition



Fonction de répartition

$$F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\})$$

Fonction de répartition

▼

$$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\})$$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite
  - $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite
  - $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - Monotone croissante (au sens large) :

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \le x\}) = \sum_{x' \le x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \le x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite
  - $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - Monotone croissante (au sens large) : si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite
  - $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - Monotone croissante (au sens large) : si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite
  - $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - Monotone croissante (au sens large) : si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \sum_{x' \leq x} p_X(x')}$$

- Classement par ordre : $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(m)}$

$$F_X(x_{(k)}) = P(\{X \leq x_{(k)}\}) = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_{(i)})$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue à droite
  - $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - Monotone croissante (au sens large) : si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$

Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire

Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire
- Est-ce que $Y = aX + b$?

Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire
- Est-ce que $Y = aX + b$?

  Si oui :

Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire
- Est-ce que $Y = aX + b$?
  Si oui :
  - $y = ax + b$ (les valeurs des v.a.)

Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire
- Est-ce que $Y = aX + b$?
  Si oui :
  - $y = ax + b$ (les valeurs des v.a.)
  - $\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$ (les espérances des v.a.)

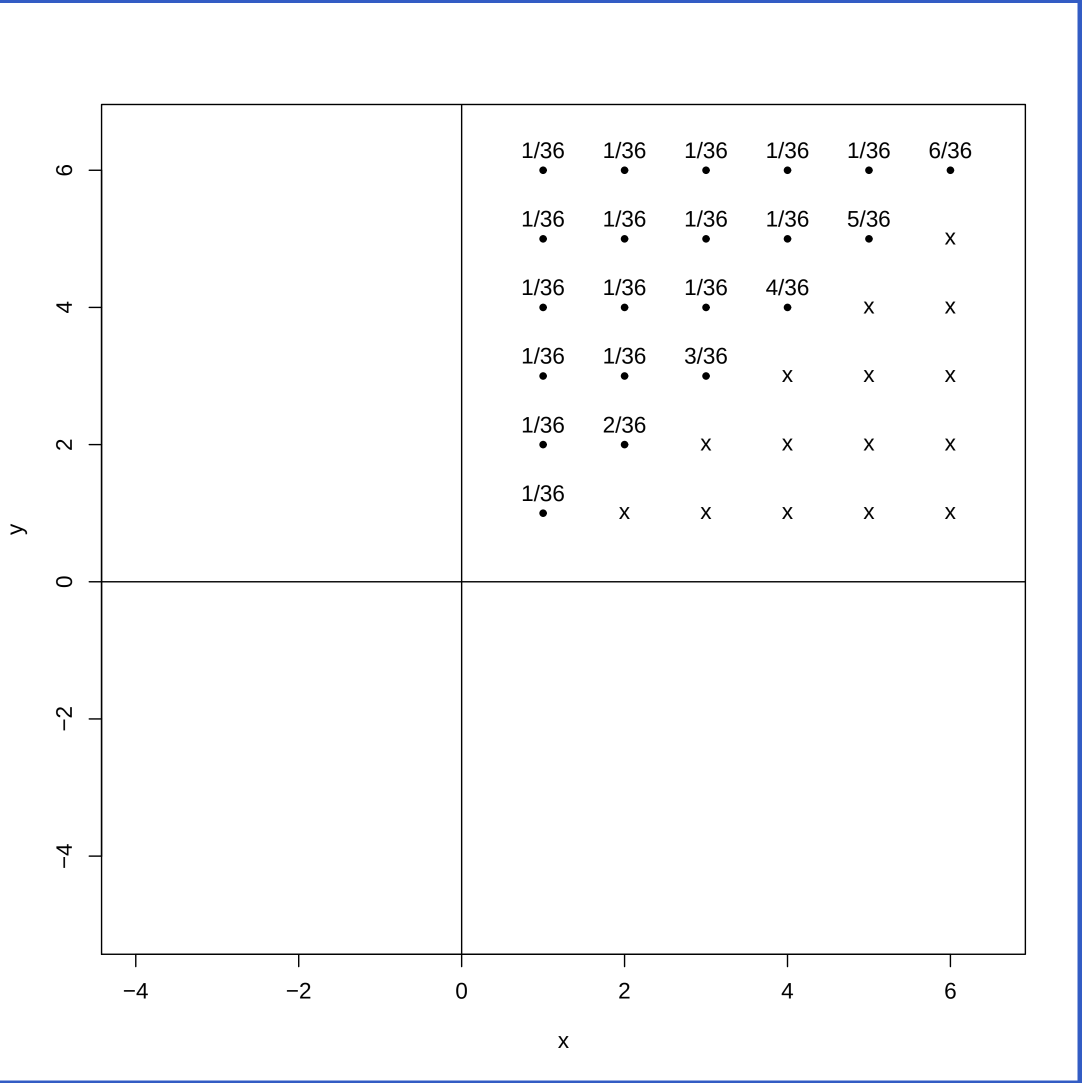
Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire
- Est-ce que $Y = aX + b$?
  Si oui :
  - $y = ax + b$ (les valeurs des v.a.)
  - $\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$ (les espérances des v.a.)
- Comment « mesurer » la dépendance linéaire ?

Relation linéaire entre deux v.a. ?

- X et Y associées à la même expérience aléatoire
- Est-ce que $Y = aX + b$?
  Si oui :
  - $y = ax + b$ (les valeurs des v.a.)
  - $\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$ (les espérances des v.a.)
- Comment « mesurer » la dépendance linéaire ?
- Exemple :
  Expérience aléatoire : lancer deux dés
  X : la valeur du premier dé
  Y : la valeur maximale des deux dés

Relation linéaire ? (exploration graphique)



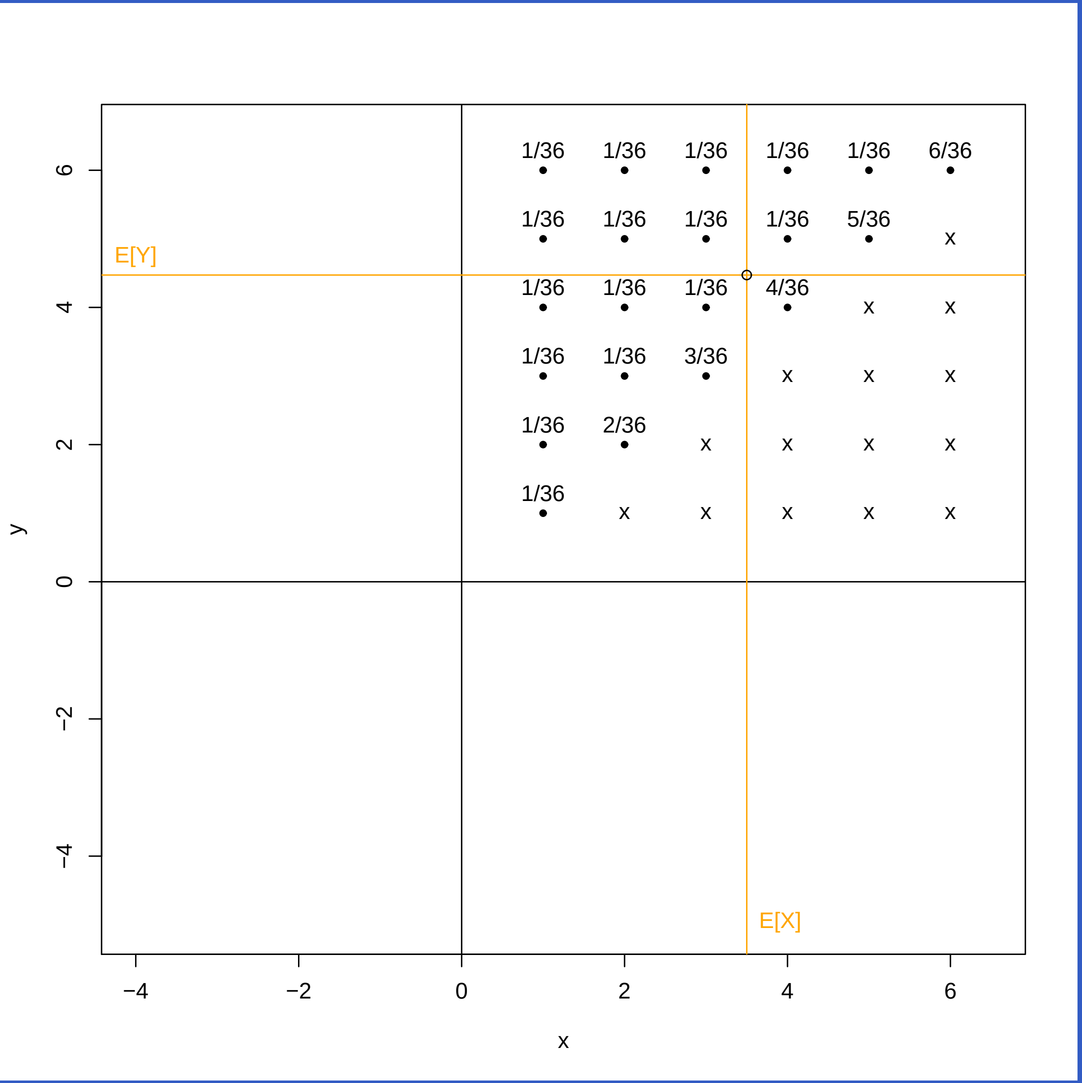
$Y \stackrel{?}{=} aX + b$

Si oui :

$y = ax + b$

$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$

Relation linéaire ? (exploration graphique)

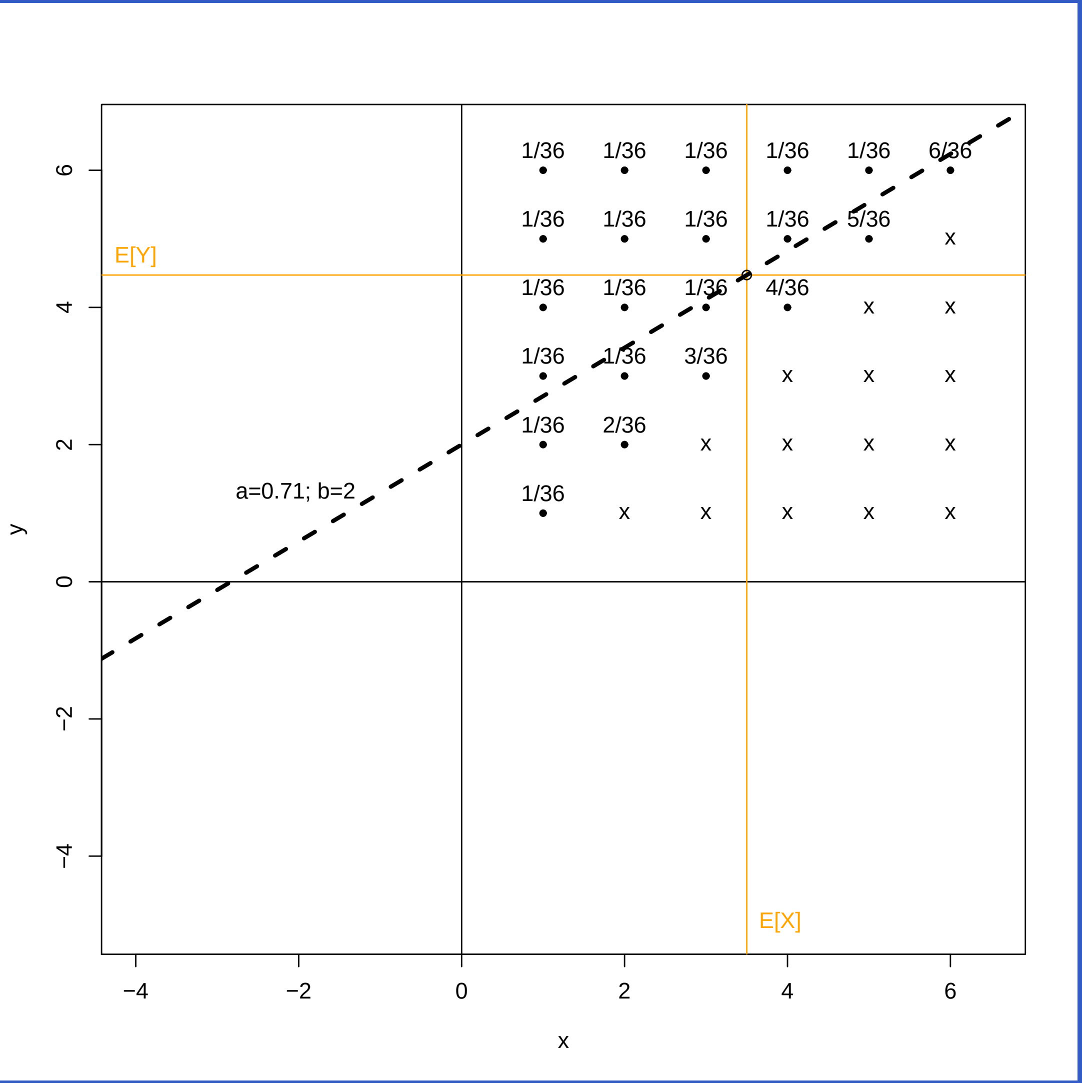


$Y \stackrel{?}{=} aX + b$

Si oui :

$y = ax + b$

$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$



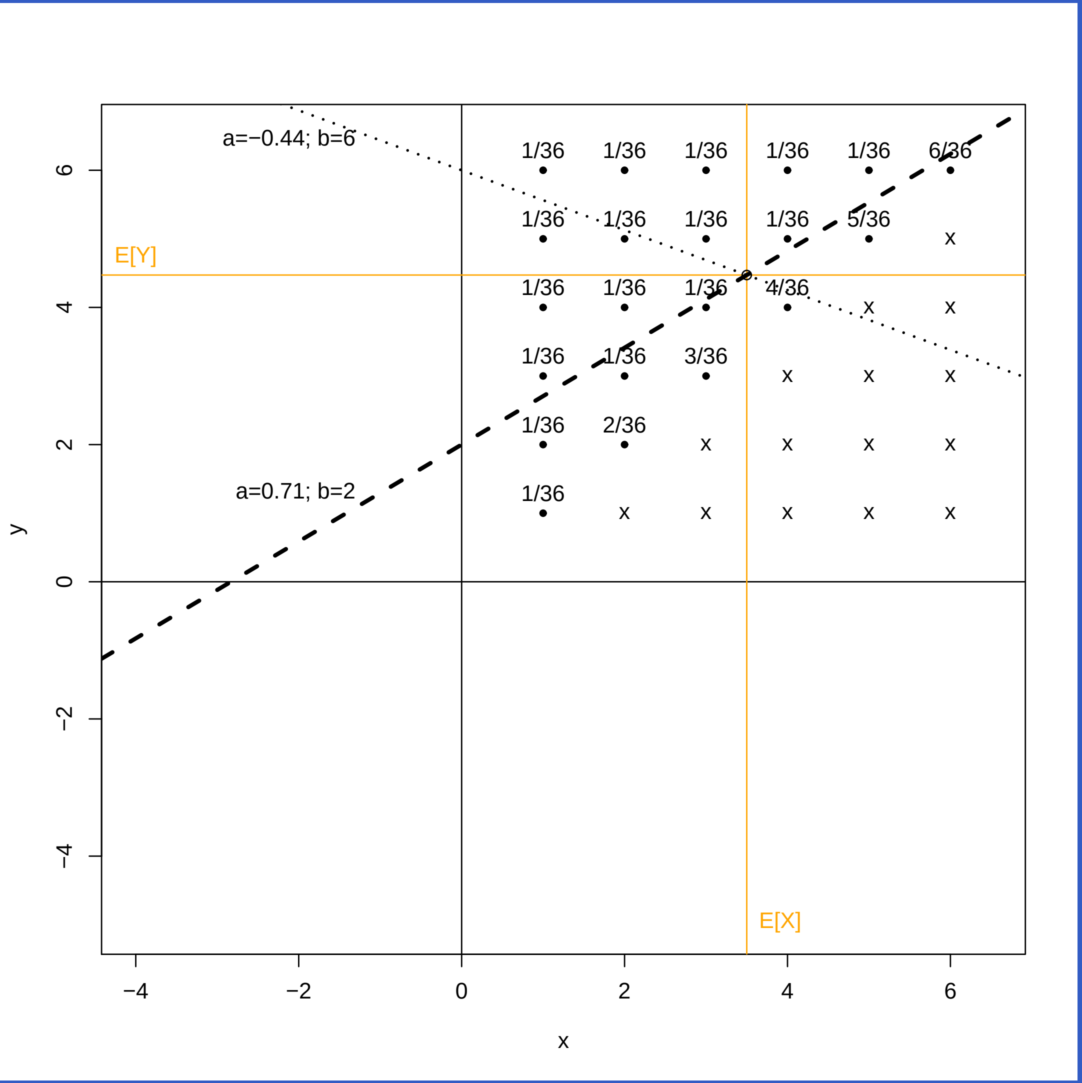
$Y \stackrel{?}{=} aX + b$

Si oui :

$y = ax + b$

$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$

Relation linéaire ? (exploration graphique)



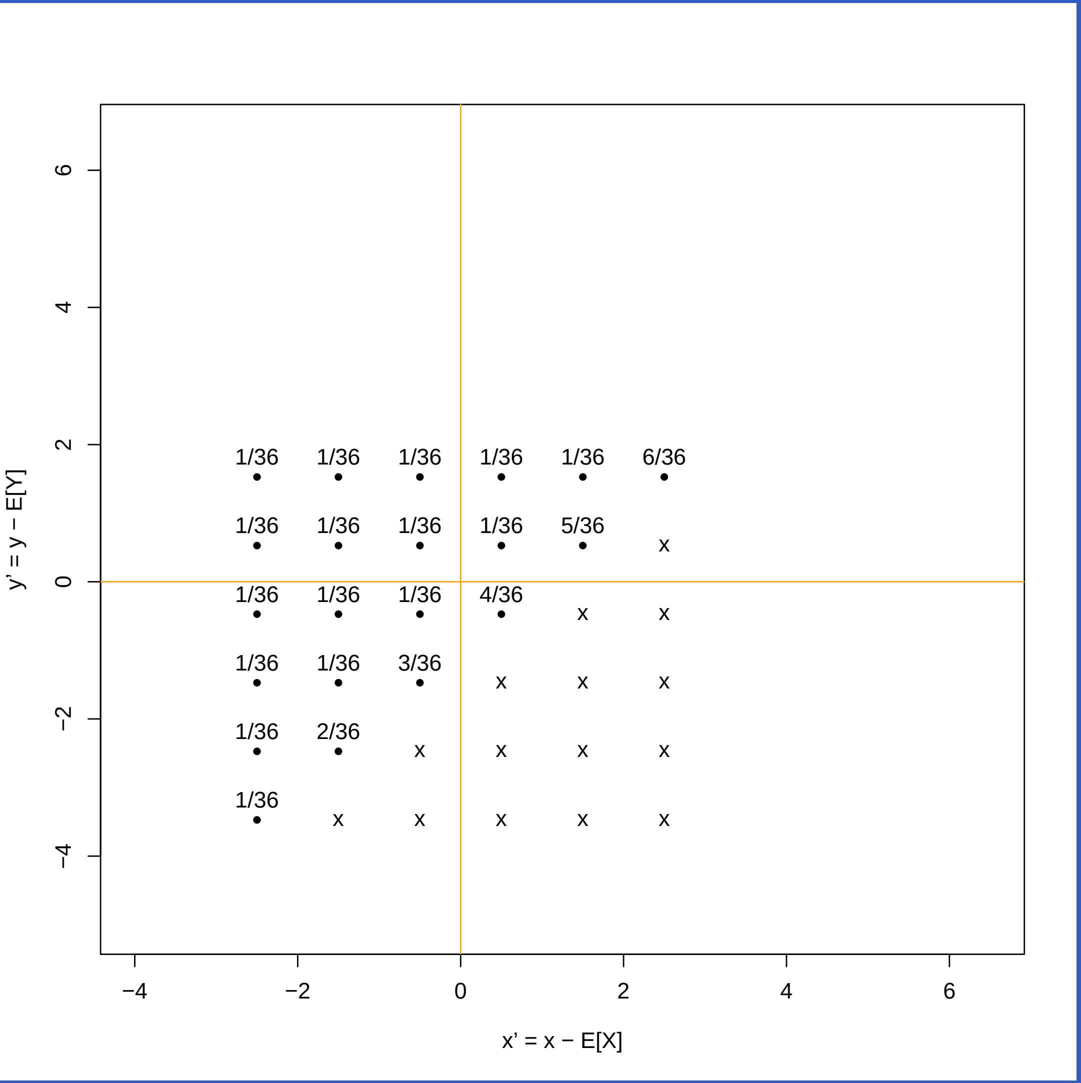
$$Y \stackrel{?}{=} aX + b$$

Si oui :

$$y = ax + b$$

$$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$$

Relation linéaire ? (exploration graphique 2)



$Y \stackrel{?}{=} aX + b$

Si oui :

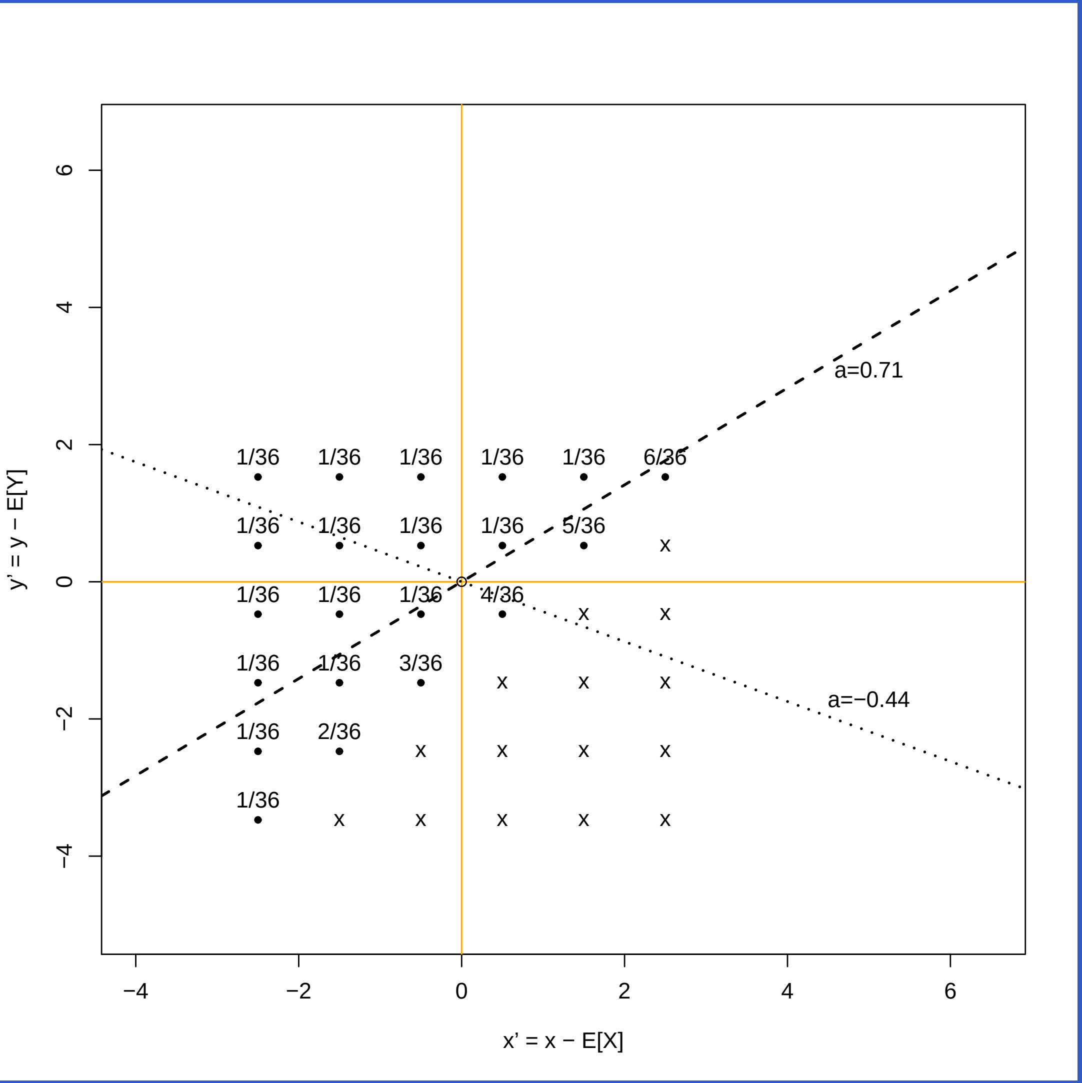
$y = ax + b$

$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$

$X' = X - \mathrm{E}[X]$

$Y' = Y - \mathrm{E}[Y]$

Relation linéaire ? (exploration graphique 2)



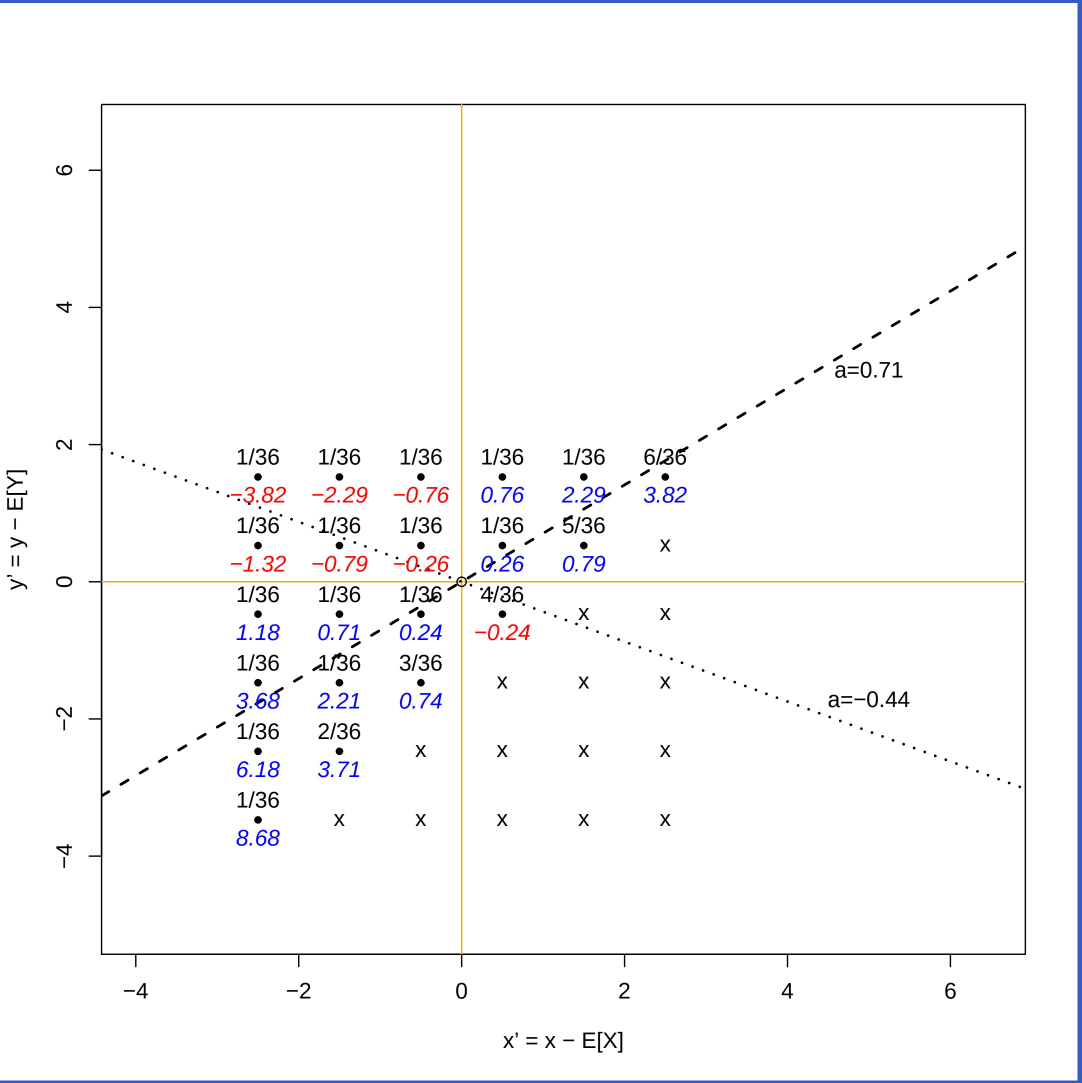
$$Y \stackrel{?}{=} aX + b$$

Si oui :

$$y = ax + b$$
$$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$$

$$X' = X - \mathrm{E}[X]$$
$$Y' = Y - \mathrm{E}[Y]$$
$$Y' = aX'$$

Relation linéaire ? (exploration graphique 2)



$Y \stackrel{?}{=} aX + b$

Si oui :

$y = ax + b$

$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$

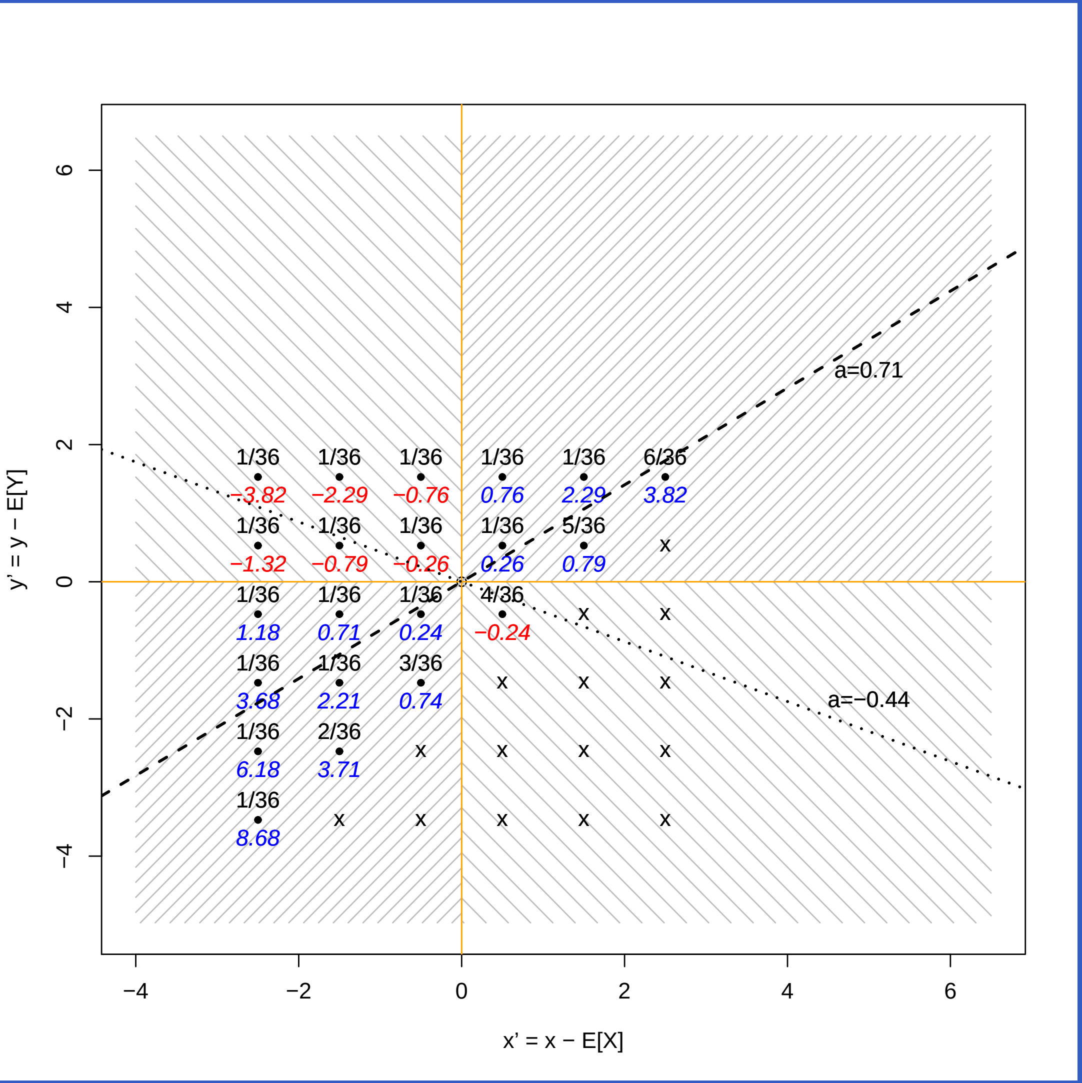
$X' = X - \mathrm{E}[X]$

$Y' = Y - \mathrm{E}[Y]$

$Y' = aX'$

$x'y' = ?$

Relation linéaire ? (exploration graphique 2)



$Y \stackrel{?}{=} aX + b$

Si oui :

$y = ax + b$

$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$

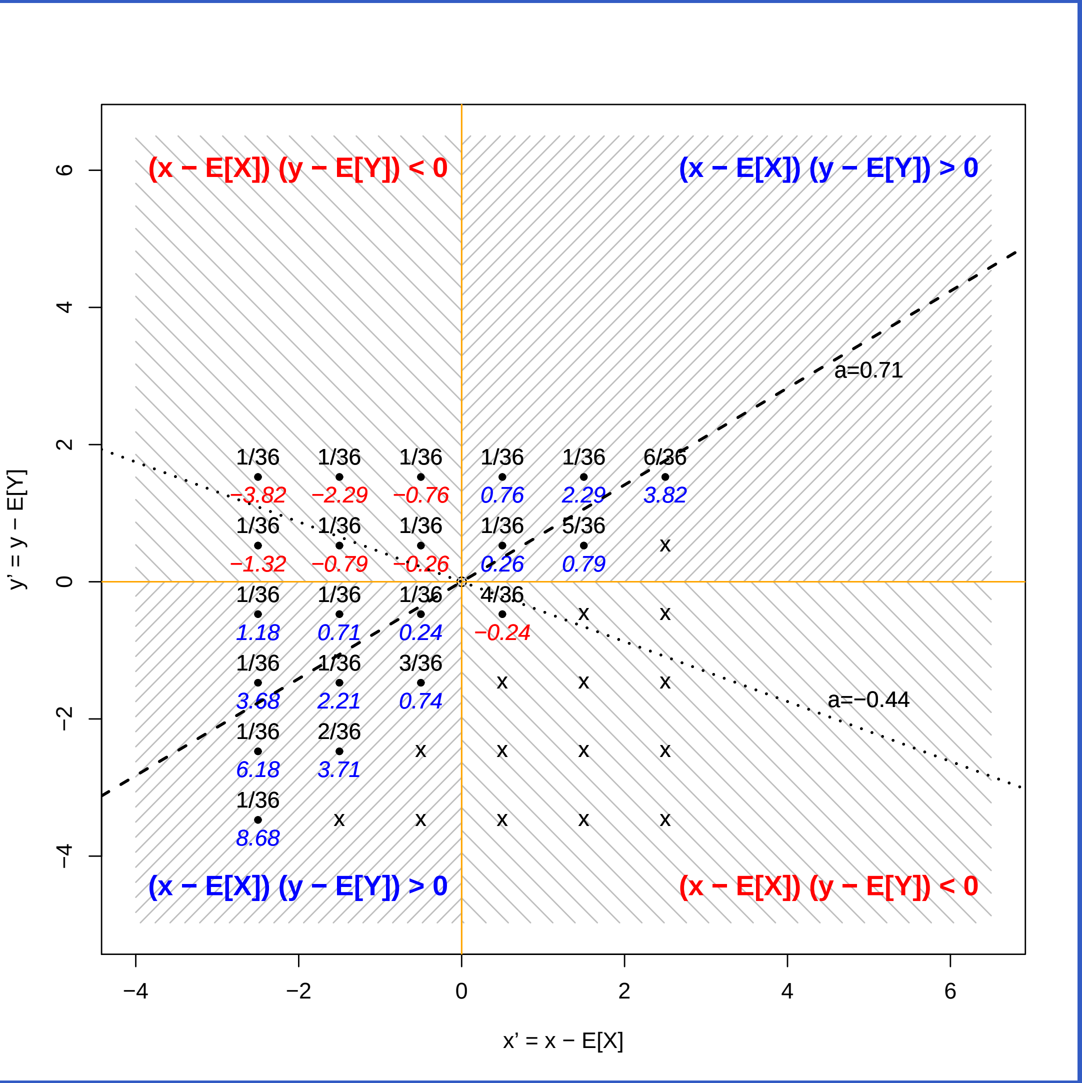
$X' = X - \mathrm{E}[X]$

$Y' = Y - \mathrm{E}[Y]$

$Y' = aX'$

$x'y' = ?$

Relation linéaire ? (conclusion)



$$Y \stackrel{?}{=} aX + b$$

Si oui :

$$y = ax + b$$

$$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$$

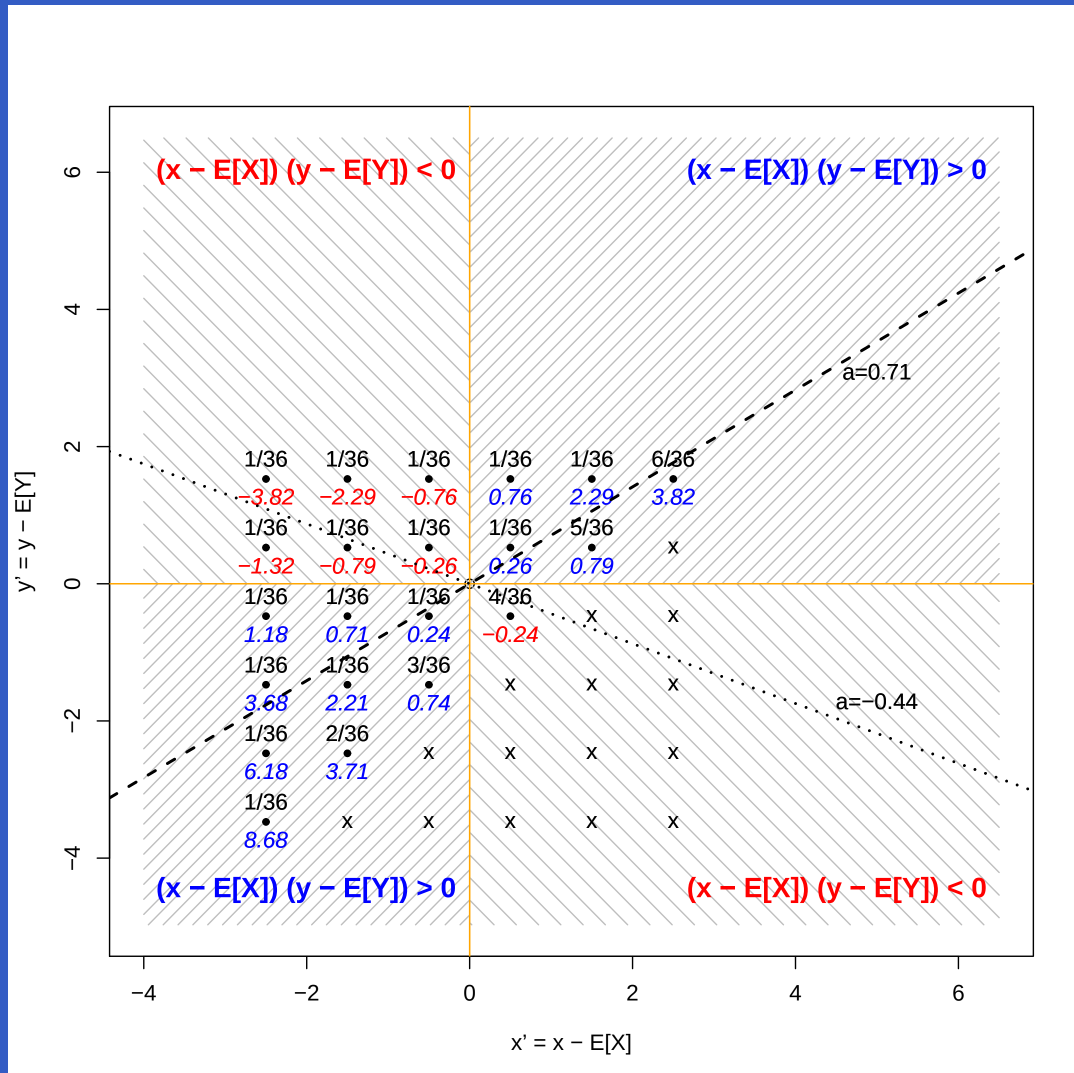
$$X' = X - \mathrm{E}[X]$$

$$Y' = Y - \mathrm{E}[Y]$$

$$Y' = aX'$$

$$x'y' = ?$$

Relation linéaire ? (conclusion)



$$Y \stackrel{?}{=} aX + b$$

Si oui :

$$y = ax + b$$

$$\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b$$

$$X' = X - \mathrm{E}[X]$$

$$Y' = Y - \mathrm{E}[Y]$$

$$Y' = aX'$$

$$x'y' = ?$$

$$\mathrm{E}[X'Y'] \approx 1.46$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])]$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY}-\mu_X\mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])]$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \operatorname{var}[X]$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{var}[X]$$

$\mathrm{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{var}[X]$$

$\mathrm{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\mathrm{cov}[X,Y]$?

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY}-\mu_X\mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right]-\mathrm{E}[X]^2 = \operatorname{var}[X]$$

$\operatorname{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\operatorname{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX+b$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY}-\mu_X\mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right]-\mathrm{E}[X]^2 = \operatorname{var}[X]$$

$\operatorname{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\operatorname{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \operatorname{cov}[X,Y] = \ldots = a\operatorname{var}[X]$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{var}[X]$$

$\mathrm{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\mathrm{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = \ldots = a\mathrm{var}[X] = a\sigma_X^2$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \operatorname{var}[X]$$

$\operatorname{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\operatorname{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \operatorname{cov}[X,Y] = \ldots = a\operatorname{var}[X] = a\sigma_X^2 \overset{\sigma_Y = |a|\sigma_X}{=}$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X\mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{var}[X]$$

$\mathrm{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\mathrm{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = \ldots = a\mathrm{var}[X] = a\sigma_X^2 \overset{\sigma_Y = |a|\sigma_X}{=} \mathrm{sign}(a)\sigma_X\sigma_Y$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{var}[X]$$

$\mathrm{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\mathrm{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = \ldots = a\mathrm{var}[X] = a\sigma_X^2 \overset{\sigma_Y = |a|\sigma_X}{=} \mathrm{sign}(a)\sigma_X\sigma_Y$
$-\sigma_X\sigma_Y \leq \mathrm{cov}[X,Y] \leq +\sigma_X\sigma_Y$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY]-\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY}-\mu_X\mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right]-\mathrm{E}[X]^2 = \operatorname{var}[X]$$

$\operatorname{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\operatorname{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX+b \Rightarrow \operatorname{cov}[X,Y] = \ldots = a\operatorname{var}[X] = a\sigma_X^2 \overset{\sigma_Y=|a|\sigma_X}{=} \operatorname{sign}(a)\sigma_X\sigma_Y$
$-\sigma_X\sigma_Y \leq \operatorname{cov}[X,Y] \leq +\sigma_X\sigma_Y$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho \triangleq \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\operatorname{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \operatorname{var}[X]$$

$\operatorname{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\operatorname{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \operatorname{cov}[X,Y] = \ldots = a\operatorname{var}[X] = a\sigma_X^2 \overset{\sigma_Y = |a|\sigma_X}{=} \operatorname{sign}(a)\sigma_X\sigma_Y$
$-\sigma_X\sigma_Y \leq \operatorname{cov}[X,Y] \leq +\sigma_X\sigma_Y$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho \triangleq \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad -1 \leq \rho \leq +1$$

Covariance / coefficient de corrélation linéaire

- Covariance

$$\boxed{\mathrm{cov}[X,Y] \triangleq \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} = \mathrm{R}_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

$$\mathrm{cov}[X,X] = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{var}[X]$$

$\mathrm{cov}[X,Y] \gg 0$ ou $\ll 0$: relation linéaire entre X et Y
Quelles sont les valeurs extrêmes de $\mathrm{cov}[X,Y]$?

Si $Y = aX + b \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = \ldots = a\mathrm{var}[X] = a\sigma_X^2 \overset{\sigma_Y = |a|\sigma_X}{=} \mathrm{sign}(a)\sigma_X\sigma_Y$
$-\sigma_X\sigma_Y \leq \mathrm{cov}[X,Y] \leq +\sigma_X\sigma_Y$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho \triangleq \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} \qquad -1 \leq \rho \leq +1 \qquad \rho = \mathrm{sign}(a) \text{ si } Y = aX + b}$$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]}$$

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x,y)$$

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy\,p_{XY}(x,y)$$

- $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]$

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x,y)$$

- $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \Rightarrow \rho = 0$

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x,y)$$

- $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \Rightarrow \rho = 0$
- $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{décorrélées}}$

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x,y)$$

- $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \Rightarrow \rho = 0$
- $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{décorrélées}}$
- Attention (1) : l'inverse n'est pas nécessairement vraie !

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x,y)$$

- $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \Rightarrow \rho = 0$
- $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{décorrélées}}$
- Attention (1) : l'inverse n'est pas nécessairement vraie ! (examiner, p.ex., X et $Y = |X|$ dans le cas où $\mathrm{E}[X] = 0$)

Indépendance / corrélation

- Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Corrélation entre X et Y

$$\boxed{R_{XY} \triangleq \mathrm{E}[XY]} = \sum_x \sum_y xy p_{XY}(x,y)$$

- $\mathrm{E}[XY] \overset{\text{ind.}}{=} \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y] \Rightarrow \rho = 0$
- $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \Rightarrow \text{décorrélées}}$
- Attention (1) : l'inverse n'est pas nécessairement vraie ! (examiner, p.ex., X et $Y = |X|$ dans le cas où $\mathrm{E}[X] = 0$)
- Attention (2) : « corrélées / décorrélées » se réfère à ρ ($\neq$ corrélation R_{XY} !)

Variables Aléatoires Continues

Définition

Définition

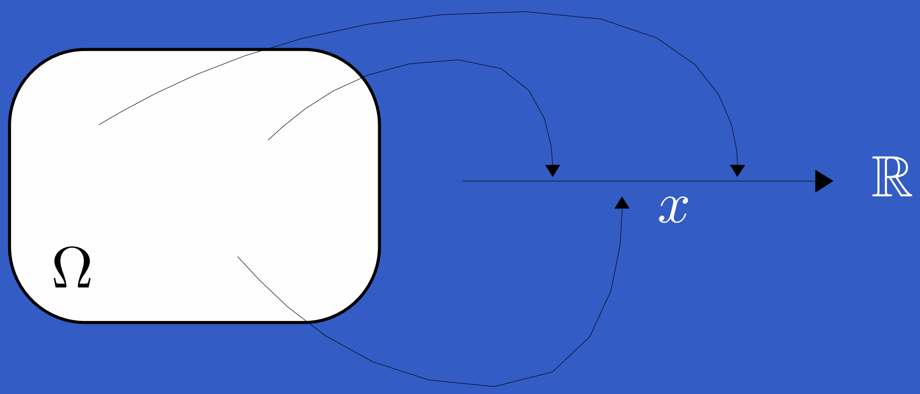
- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire

Définition

- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)

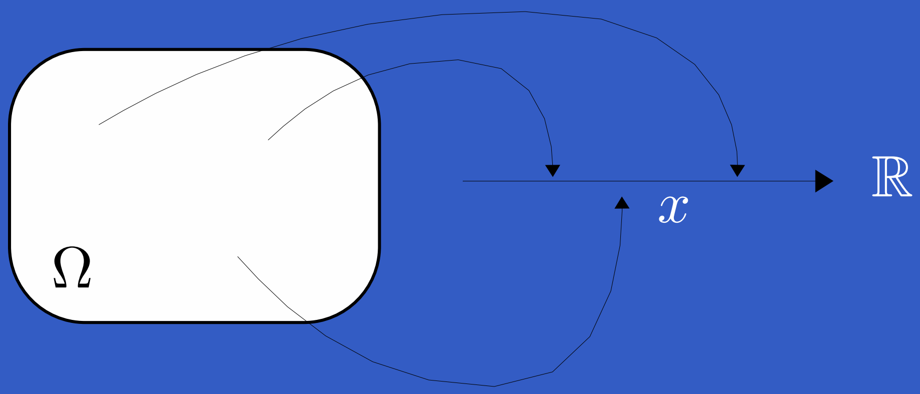
Définition

- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)



Définition

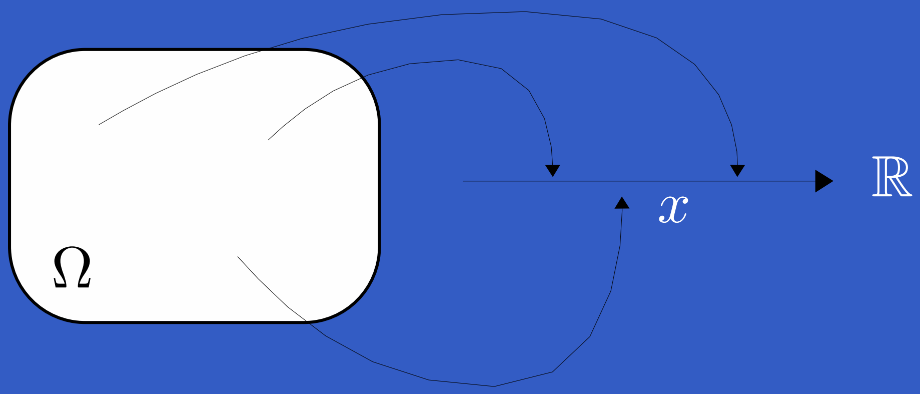
- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)



- Exemples :

Définition

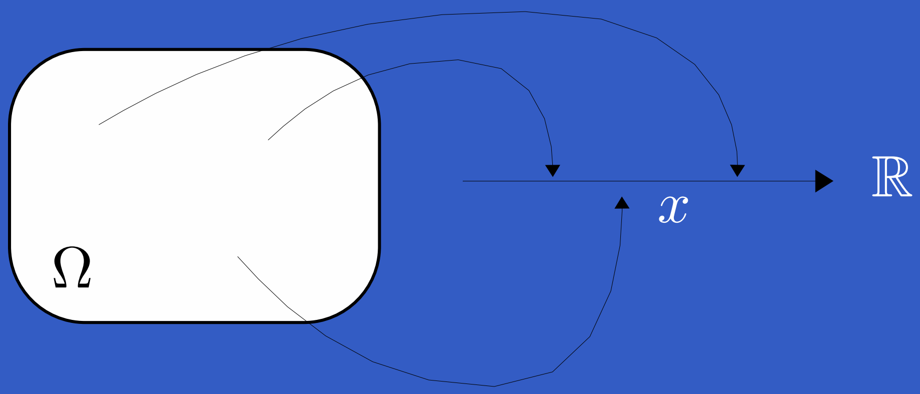
- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)



- Exemples :
  - la vitesse d'une voiture

Définition

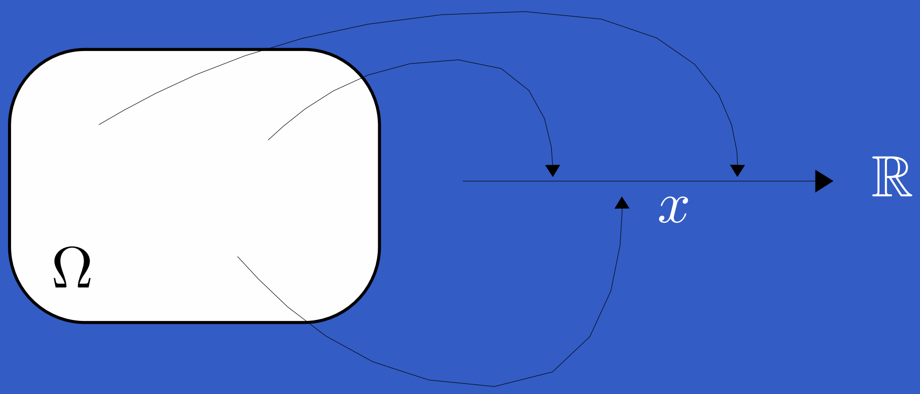
- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)



- Exemples :
  - la vitesse d'une voiture
  - le temps entre l'arrivée de deux clients

Définition

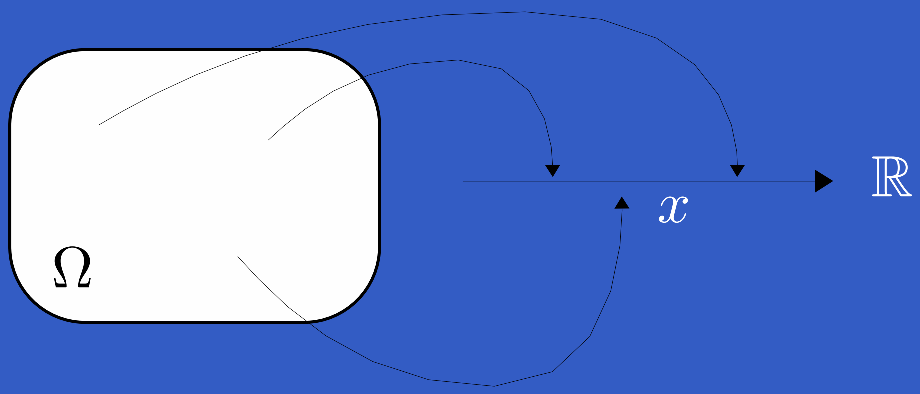
- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)



- Exemples :
  - la vitesse d'une voiture
  - le temps entre l'arrivée de deux clients
  - la « position » d'un électron

Définition

- Associer *une valeur réelle* à chaque issue d'une expérience aléatoire
- Nombre de valeurs possibles : infini (non dénombrable)

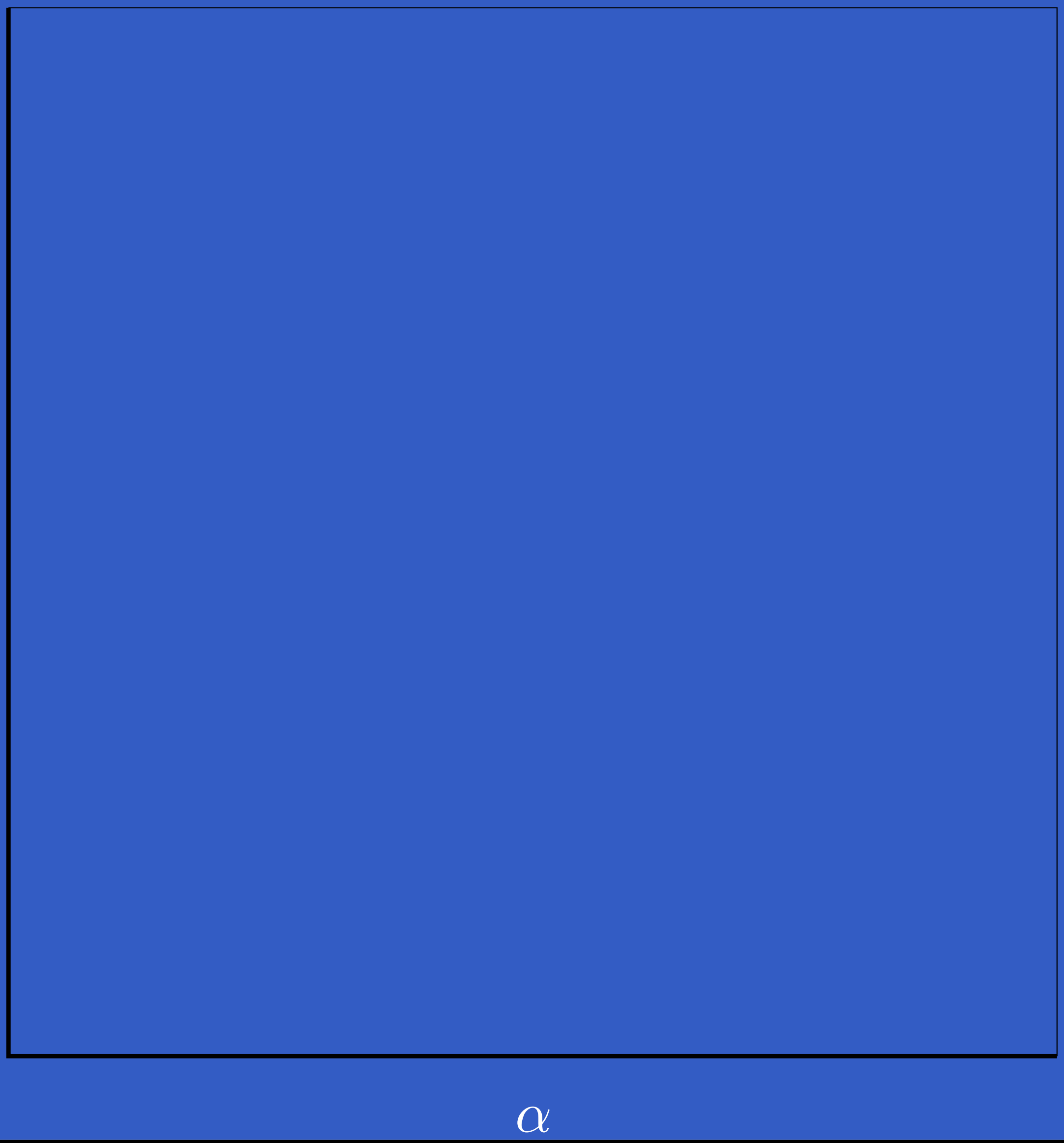


- Exemples :
  - la vitesse d'une voiture
  - le temps entre l'arrivée de deux clients
  - la « position » d'un électron
  - l'énergie d'une particule

[Extra] Quel infini ?

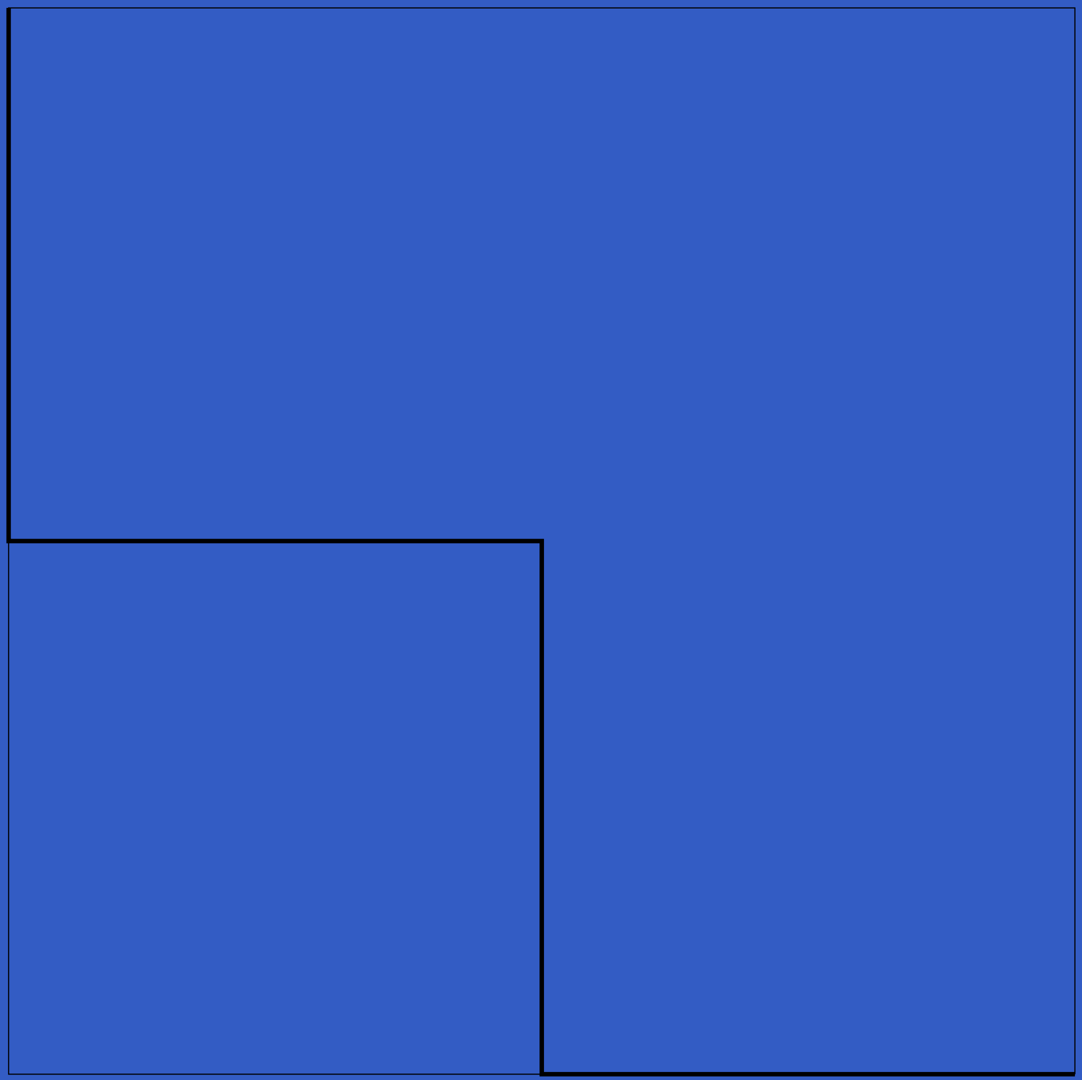
α

[Extra] Quel infini ?



# segm.	longueur
2	2α

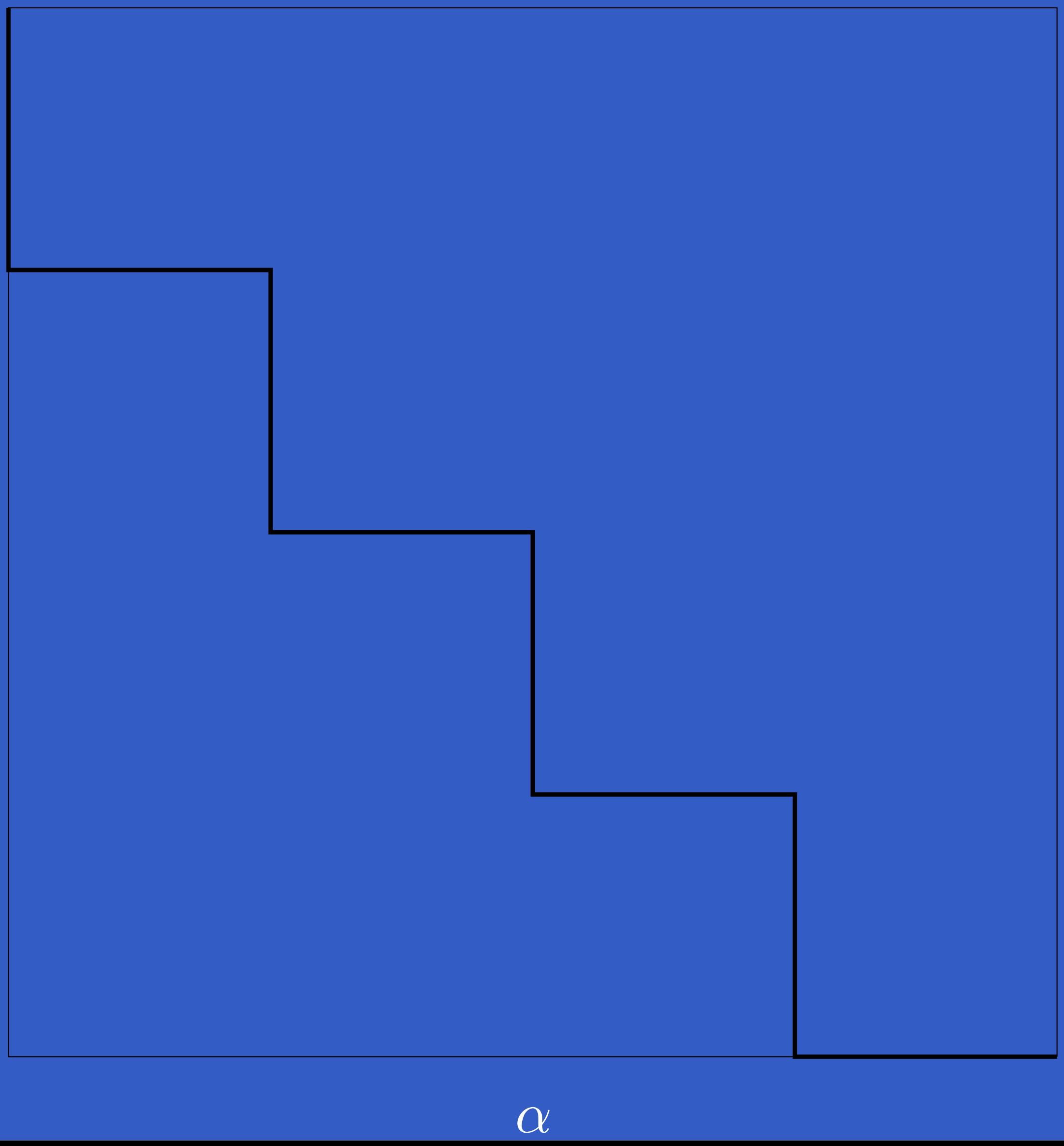
[Extra] Quel infini ?



# segm.	longueur
2	2α
4	2α

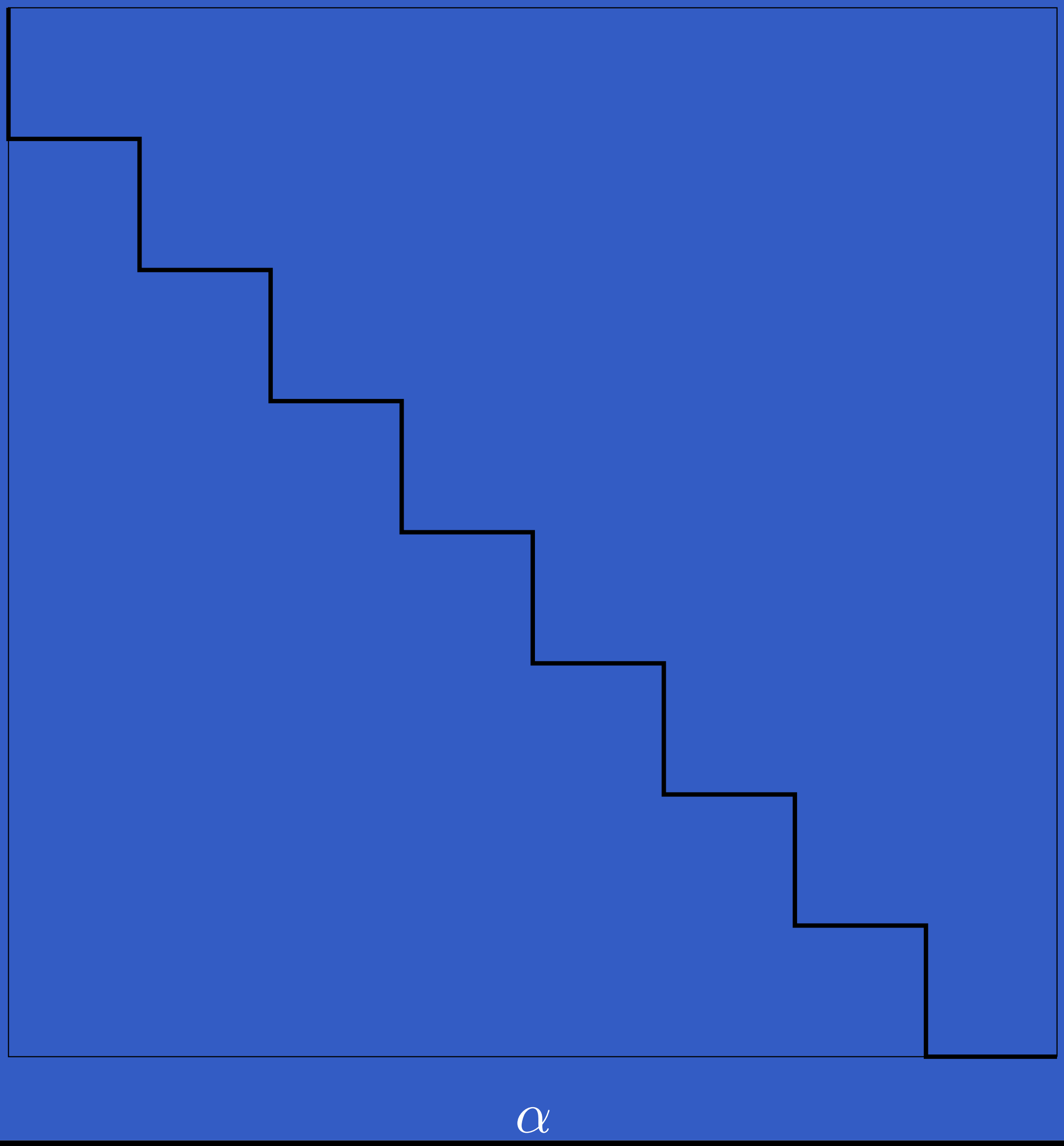
α

[Extra] Quel infini ?



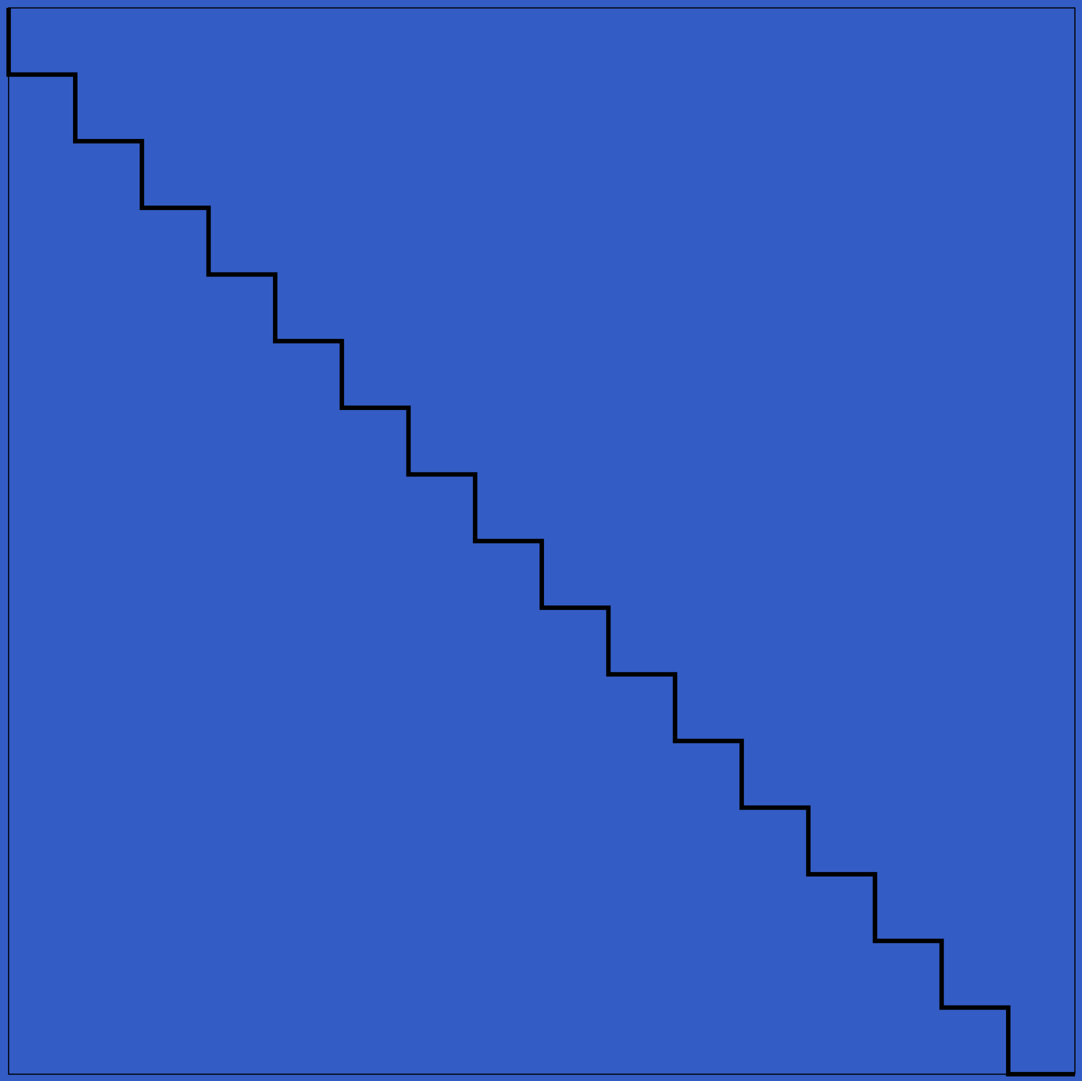
# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α

[Extra] Quel infini ?



# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α
16	2α

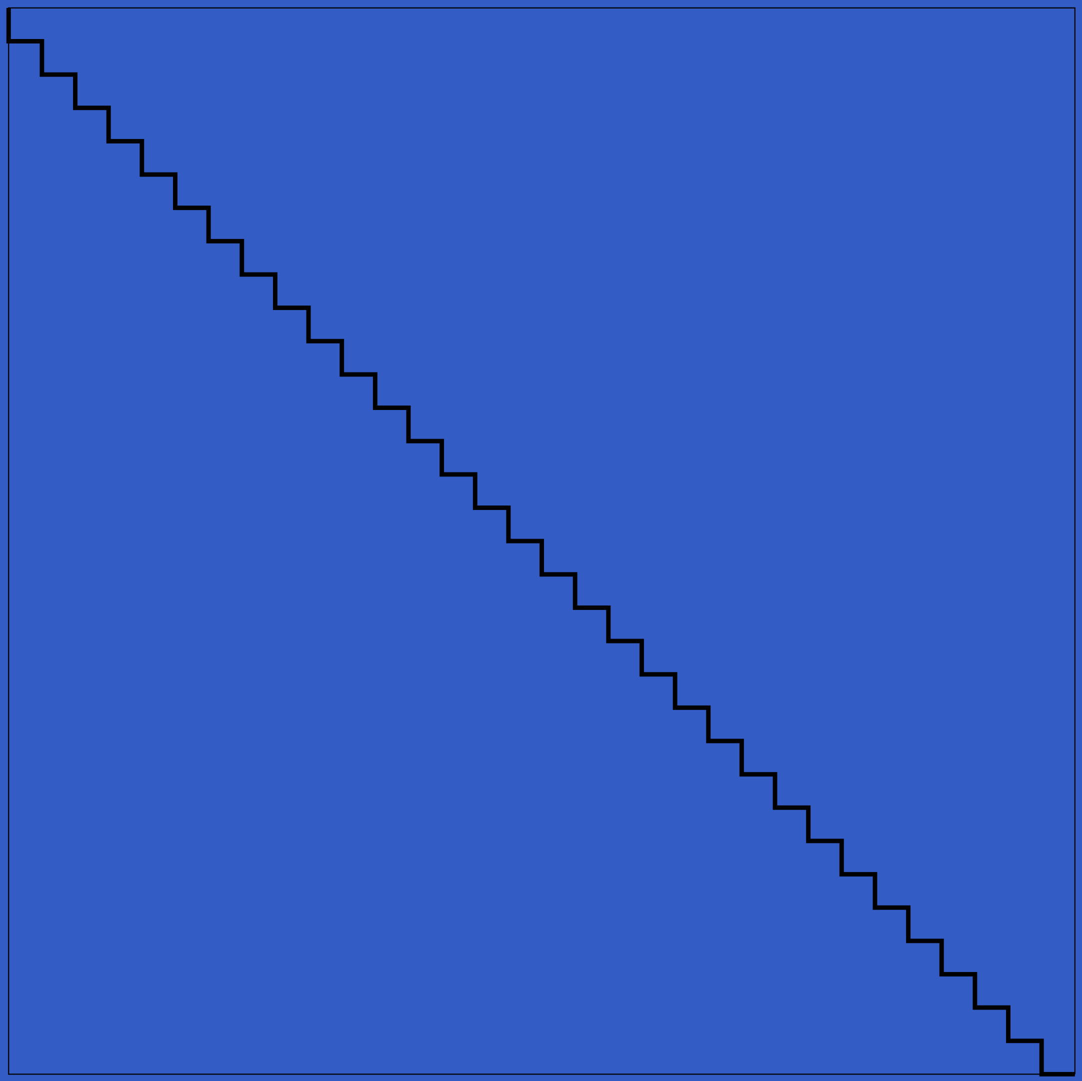
[Extra] Quel infini ?



α

# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α
16	2α
32	2α

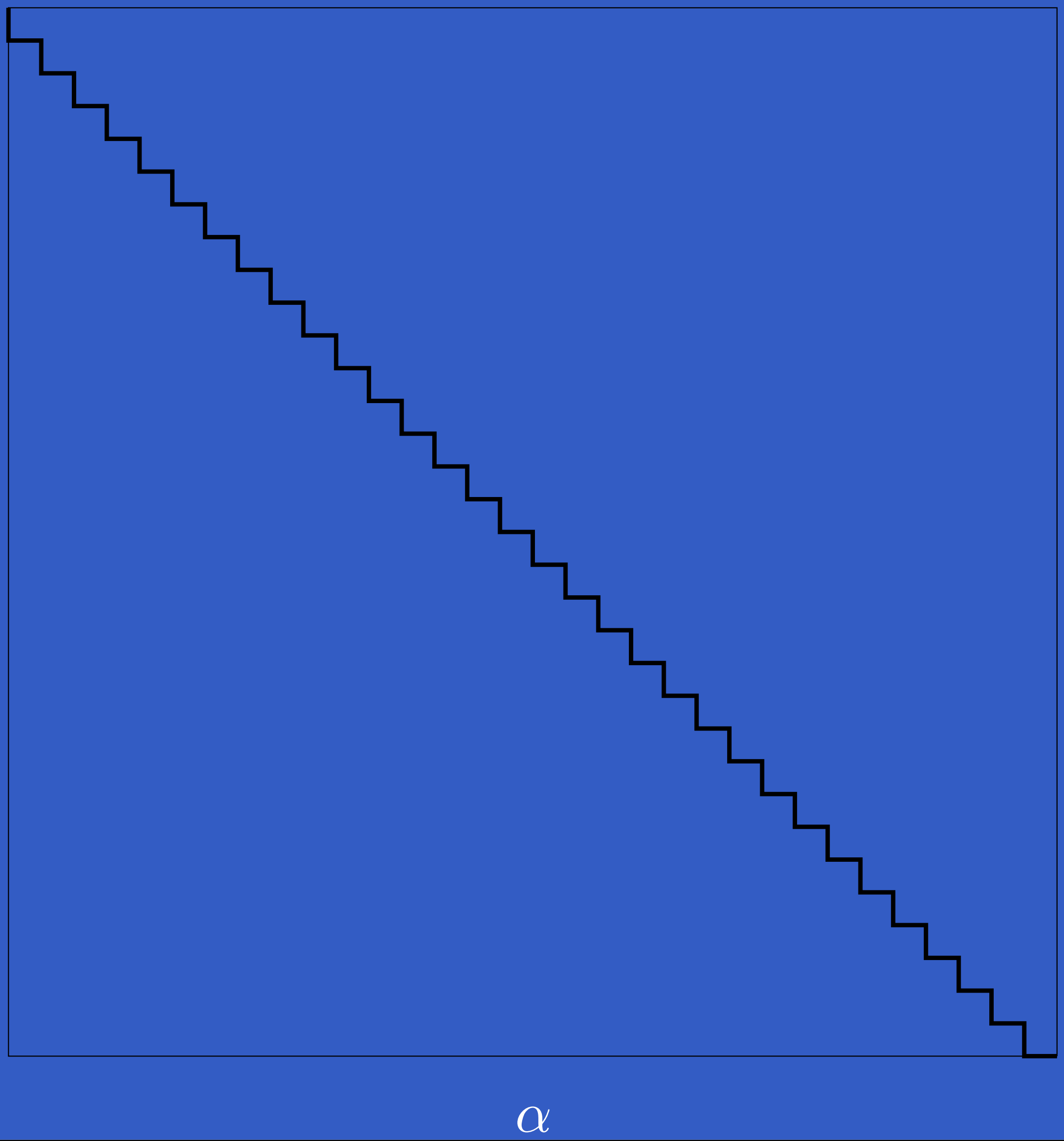
[Extra] Quel infini ?



α

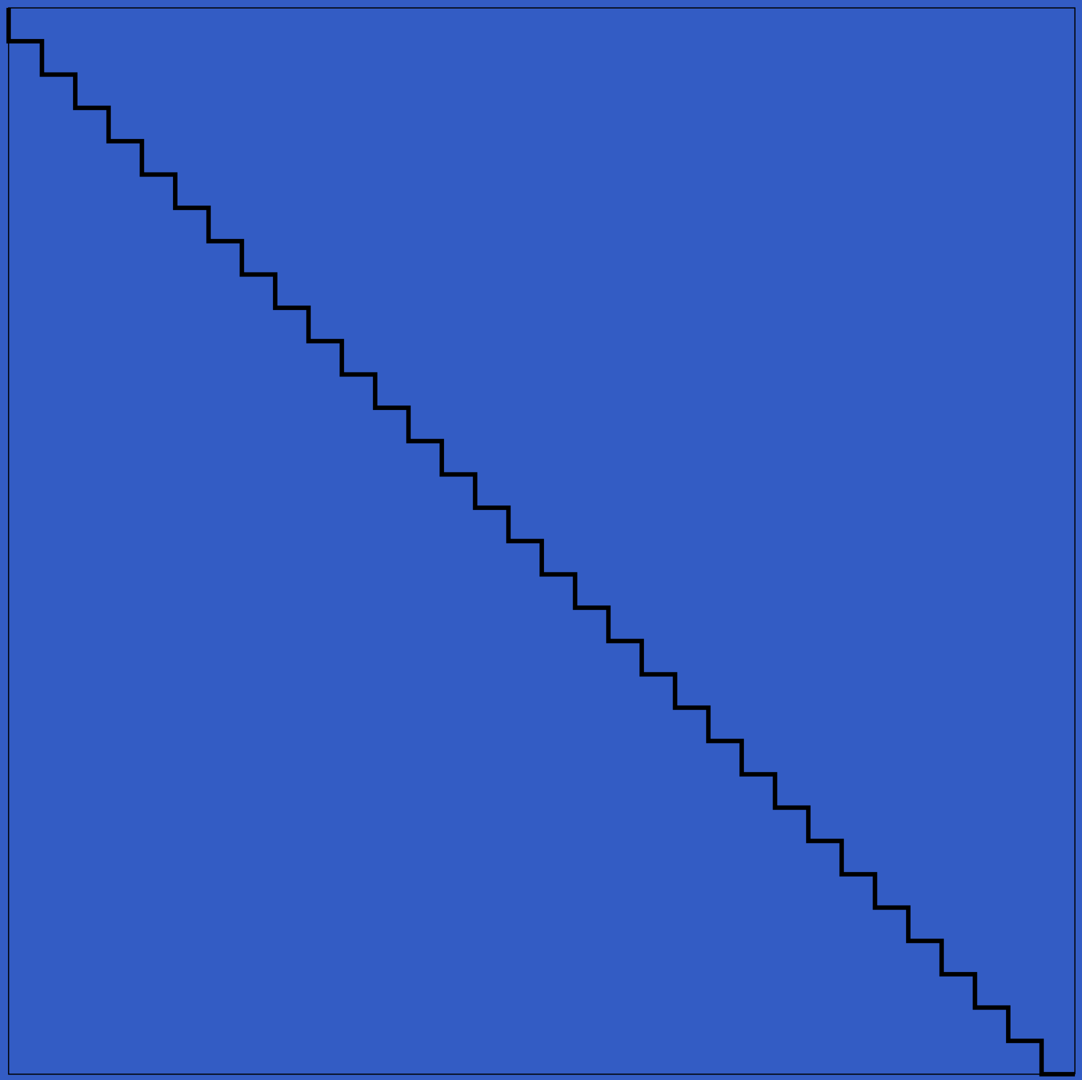
# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α
16	2α
32	2α
64	2α

[Extra] Quel infini ?



# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α
16	2α
32	2α
64	2α
$\ldots$	2α

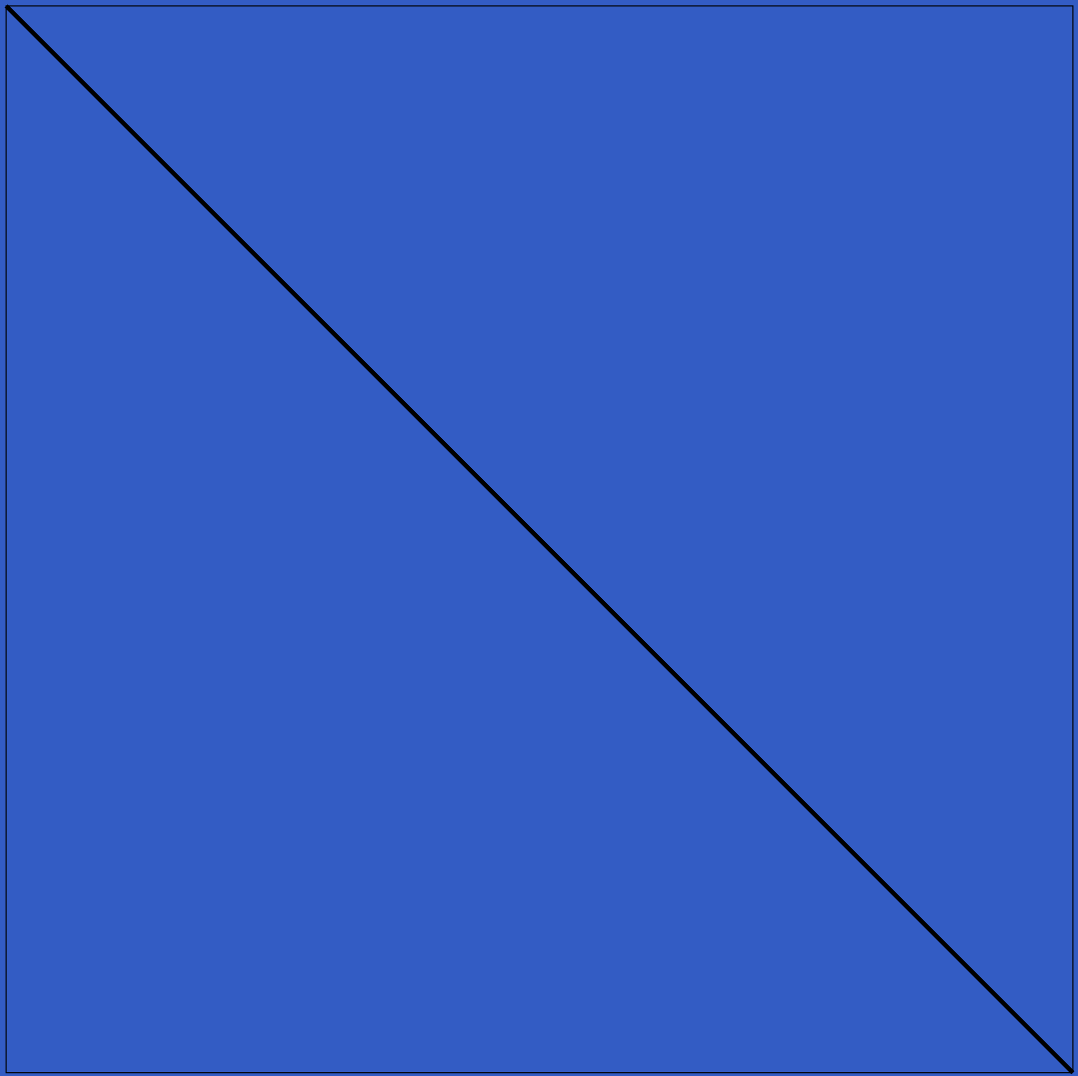
[Extra] Quel infini ?



α

# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α
16	2α
32	2α
64	2α
$\ldots$	2α
$2^n \longrightarrow \infty$	2α

[Extra] Quel infini ?



# segm.	longueur
2	2α
4	2α
8	2α
16	2α
32	2α
64	2α
$\dots$	2α
$2^n \longrightarrow \infty$	2α
∞	$\sqrt{2}\alpha$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli :

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i]$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n\mathrm{E}[X_i]$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)
$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \le k \le n)$$
- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n\mathrm{E}[X_i] = \boxed{np}$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n\mathrm{E}[X_i] = \boxed{np}$
- $\mathrm{var}[X] \overset{\text{ind}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i]$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n\mathrm{E}[X_i] = \boxed{np}$
- $\mathrm{var}[X] \stackrel{\text{ind}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = n\mathrm{var}[X_i]$

Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n\mathrm{E}[X_i] = \boxed{np}$
- $\mathrm{var}[X] \overset{\text{ind}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = n\mathrm{var}[X_i] = \boxed{np(1-p)}$

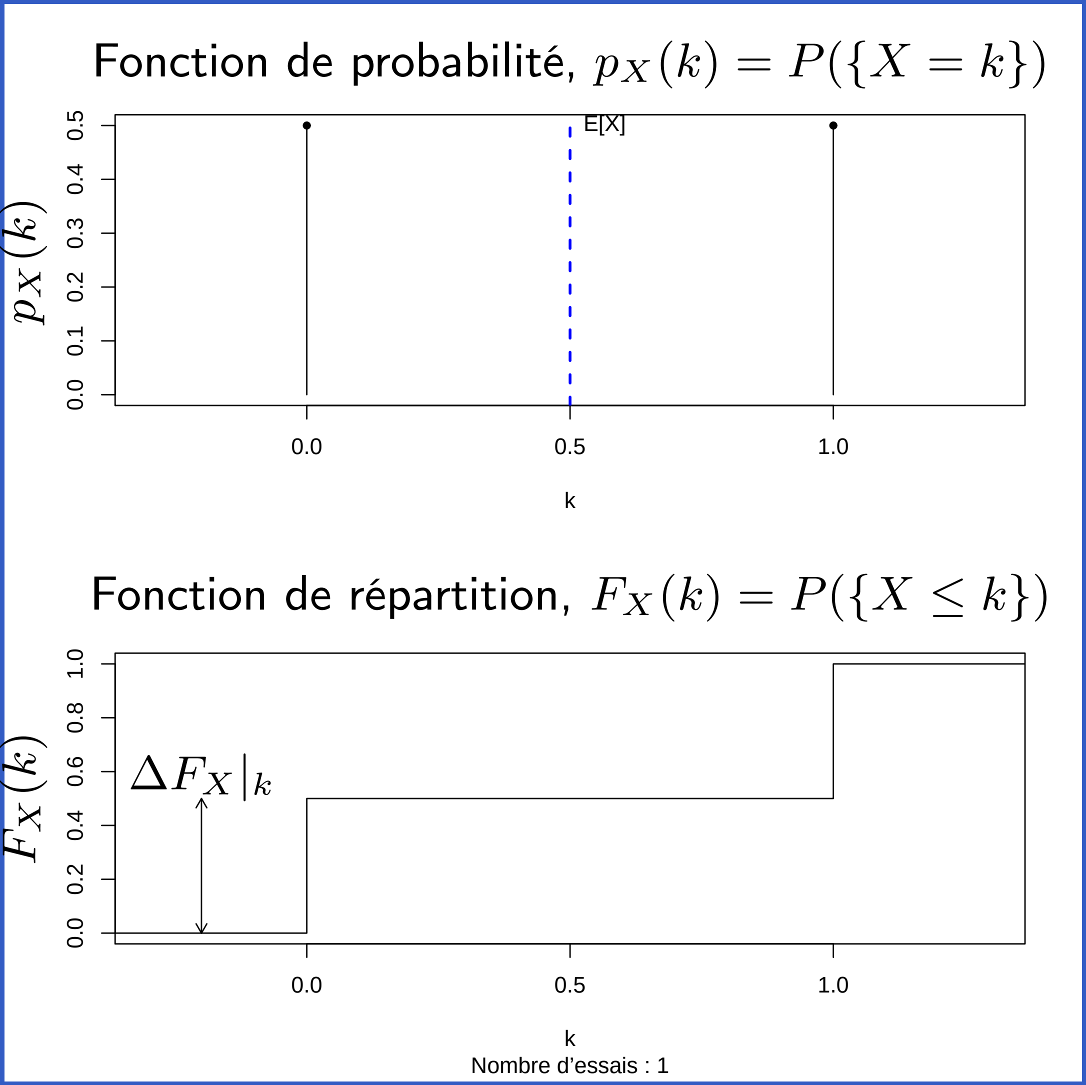
Nombre de succès sur n essais (v.a.d. binomiale)

- Expérience aléatoire : lancer n « pièces »
- Les pièces sont indépendantes : « pile » avec probabilité p indépendemmant des autres résultats
- La pièce i est représentée par une v.a.d. X_i de Bernoulli : $x_i = 1$ si « pile », $x_i = 0$ si « face »
- Nombre de « piles » sur n essais : $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- X : somme de n v.a. Bernoulli indépendantes
- X : v.a. binomiale de paramètres p, n (v.a. discrète)

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

- $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] = n\mathrm{E}[X_i] = \boxed{np}$
- $\mathrm{var}[X] \overset{\text{ind}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}[X_i] = n\mathrm{var}[X_i] = \boxed{np(1-p)}$
- (Comment faire la transition v.a.d. $\rightarrow$ v.a.c. ?)

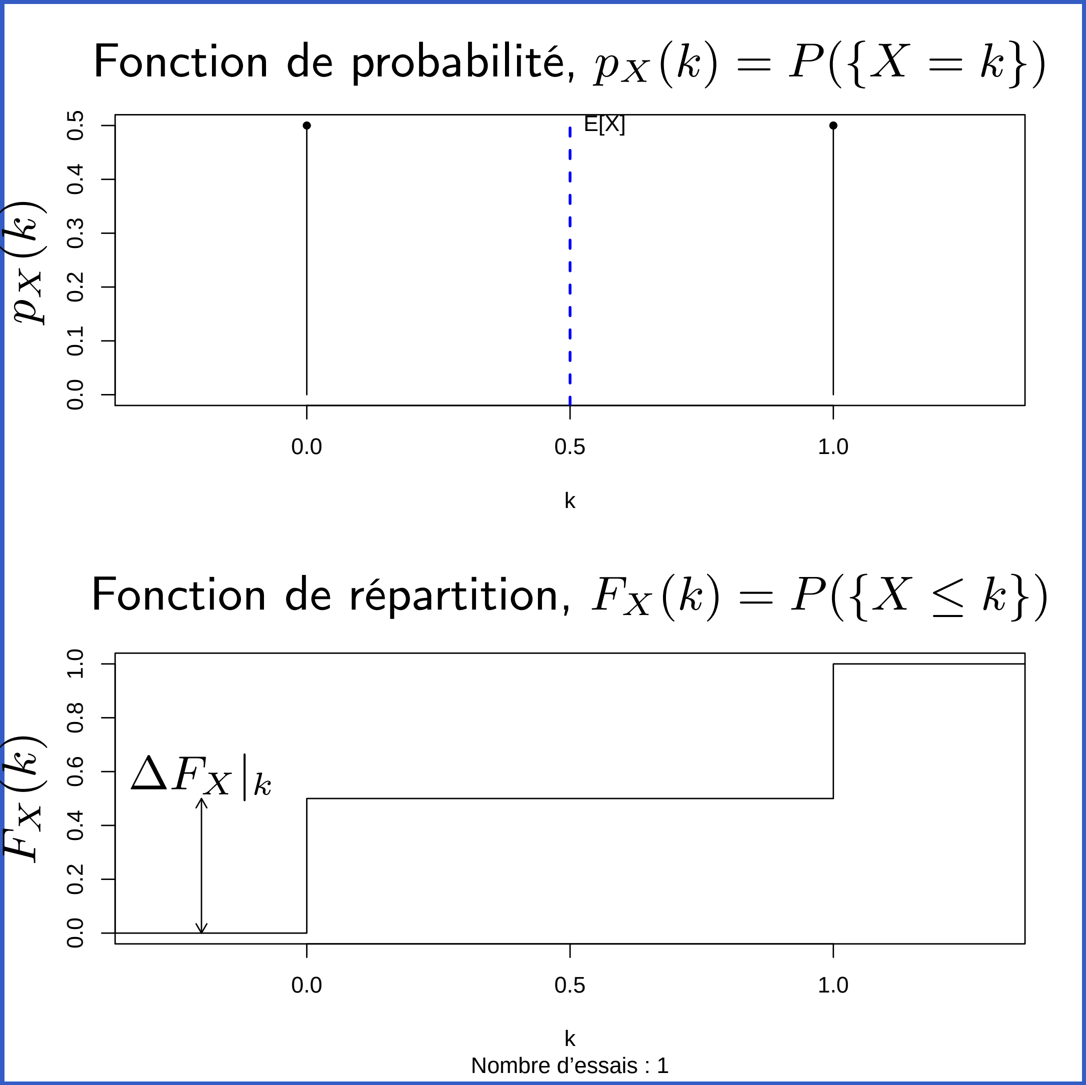
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$

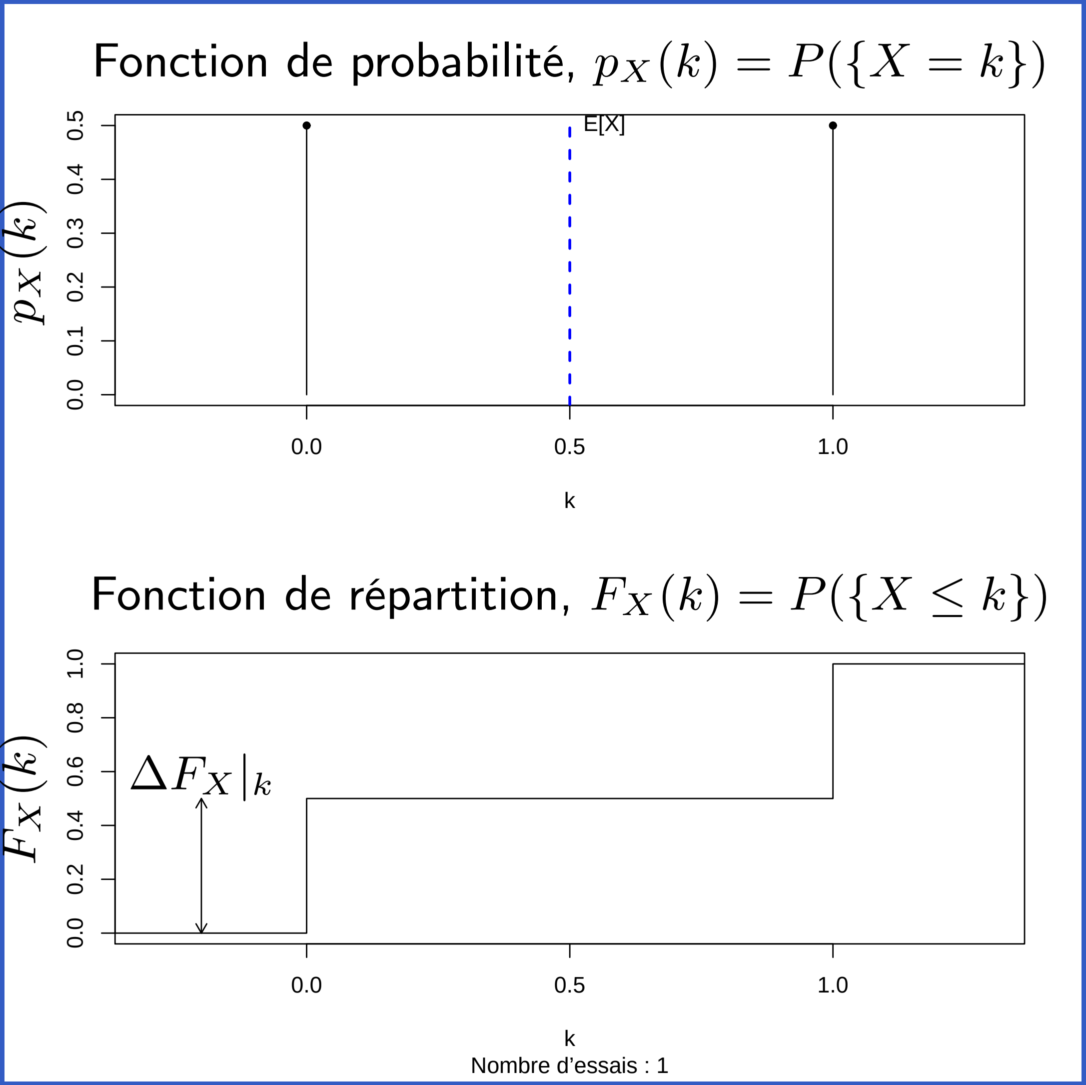
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $$F_X(b) - F_X(a) = \\ = P(\{a < X \leq b\})$$

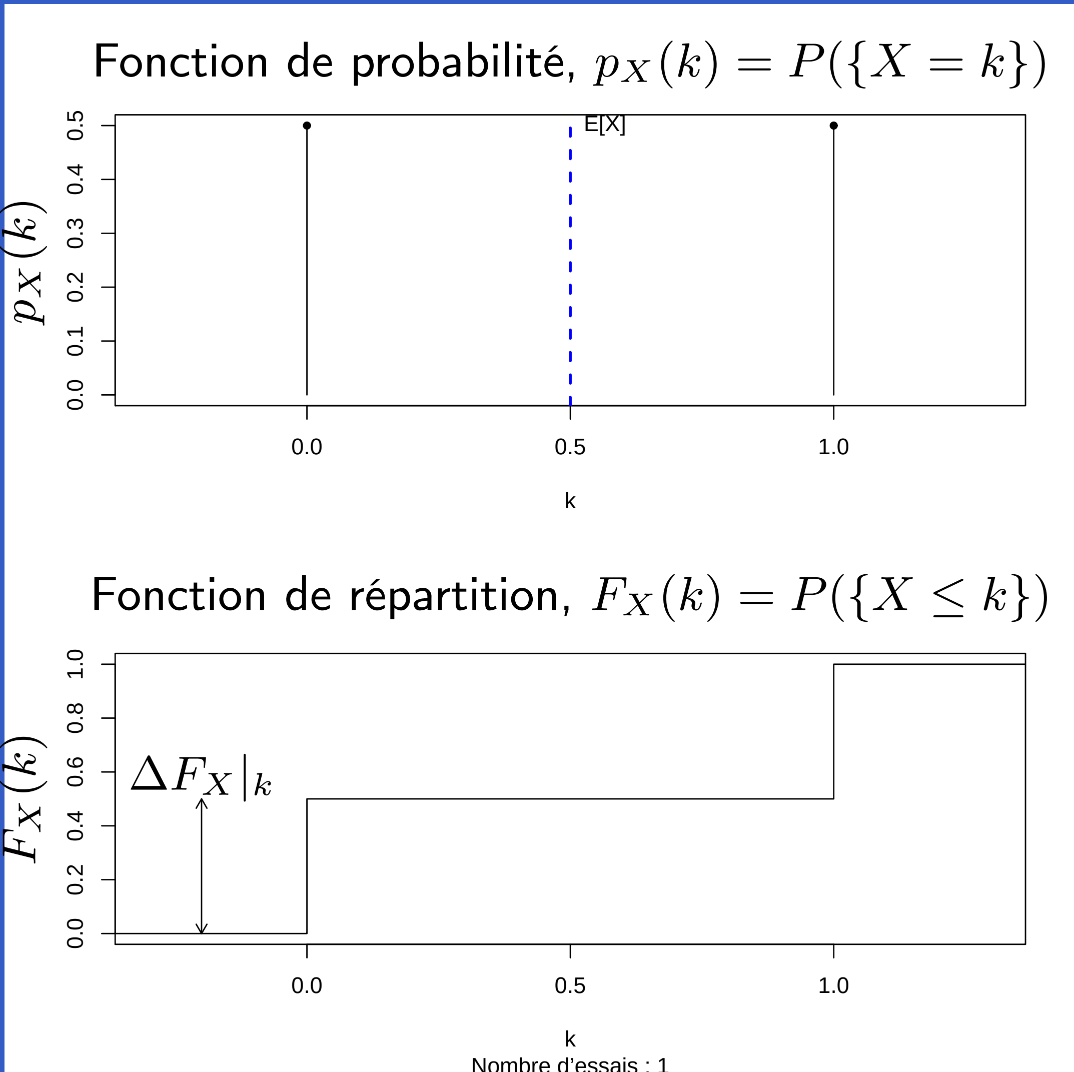
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-)$

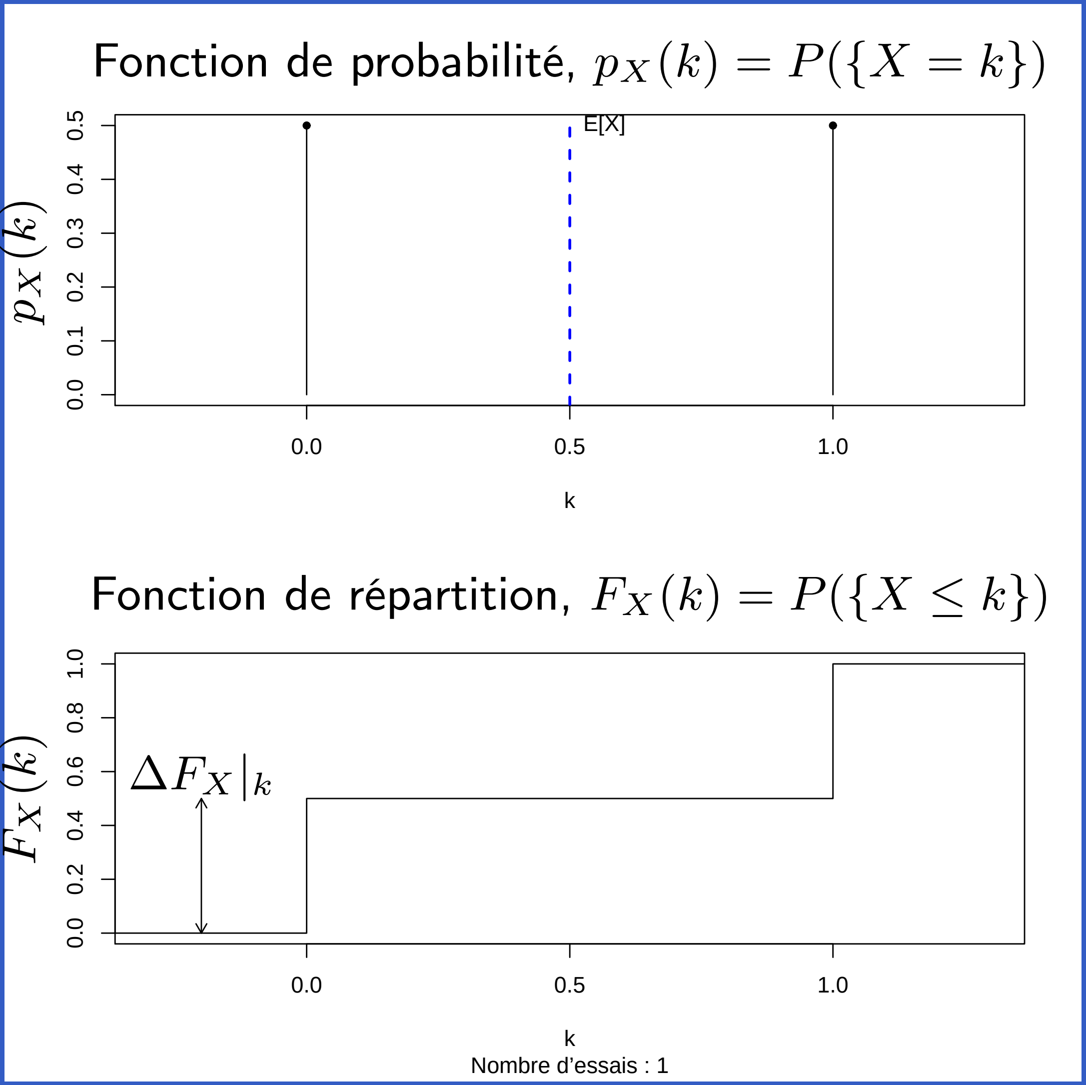
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$

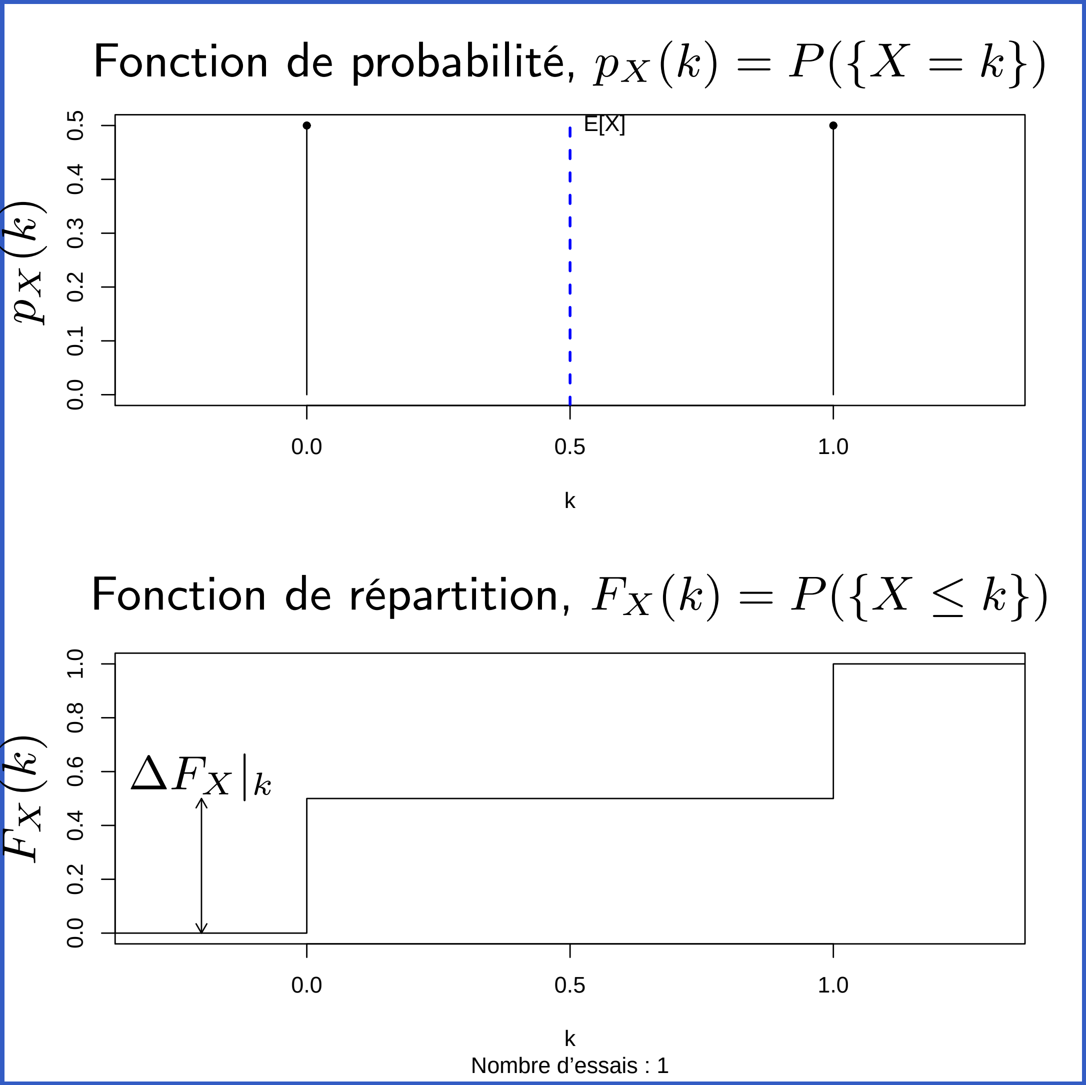
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\})$

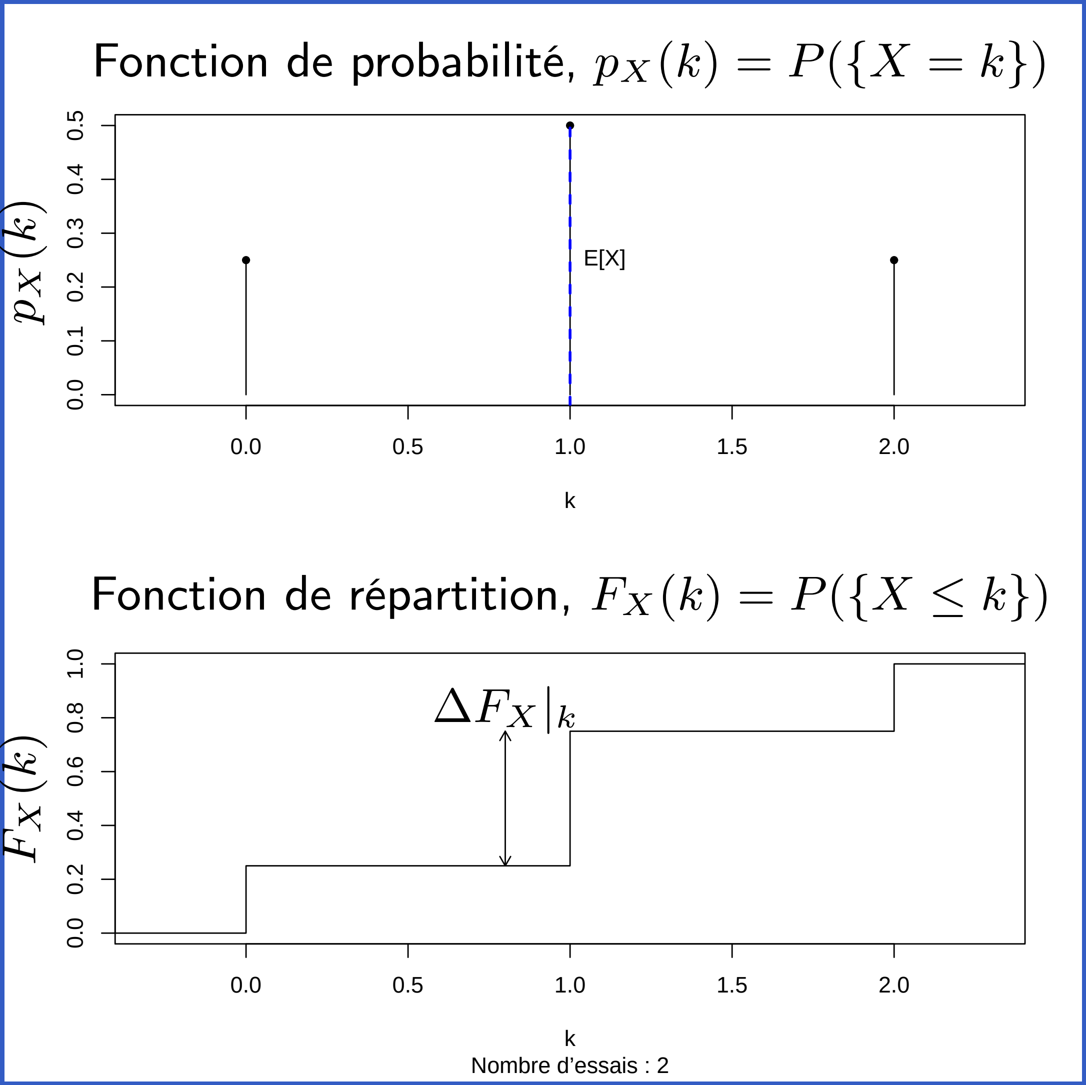
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

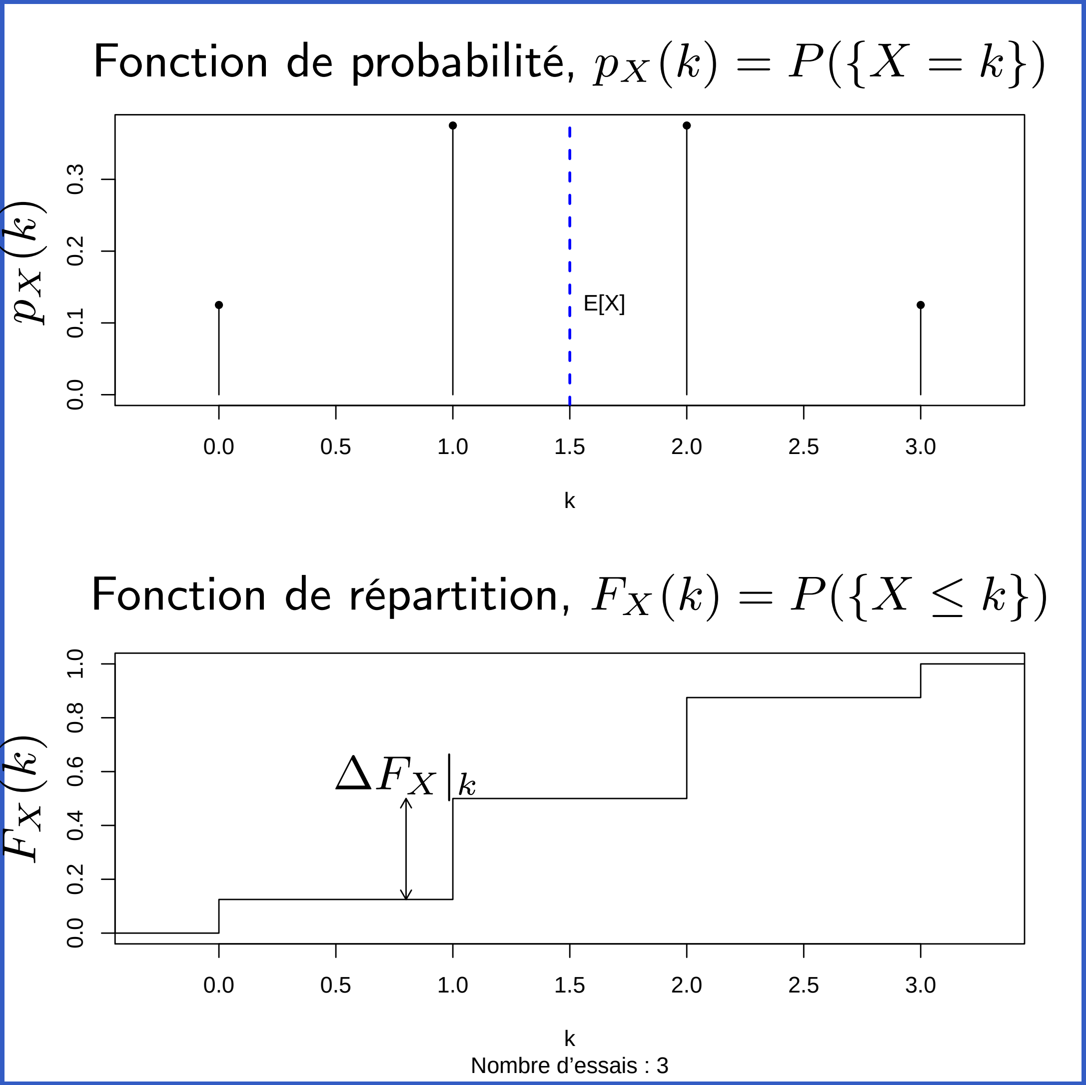
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

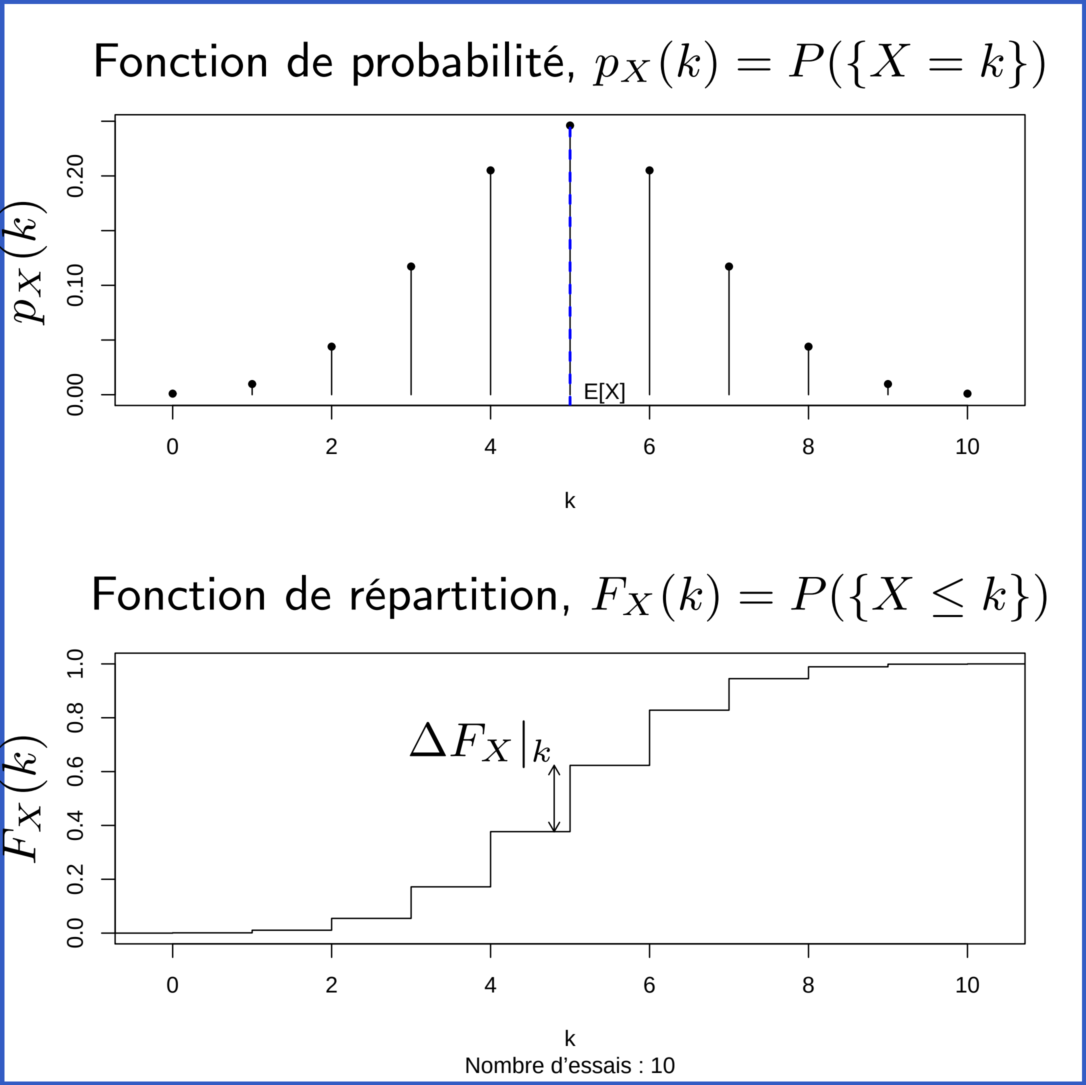
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

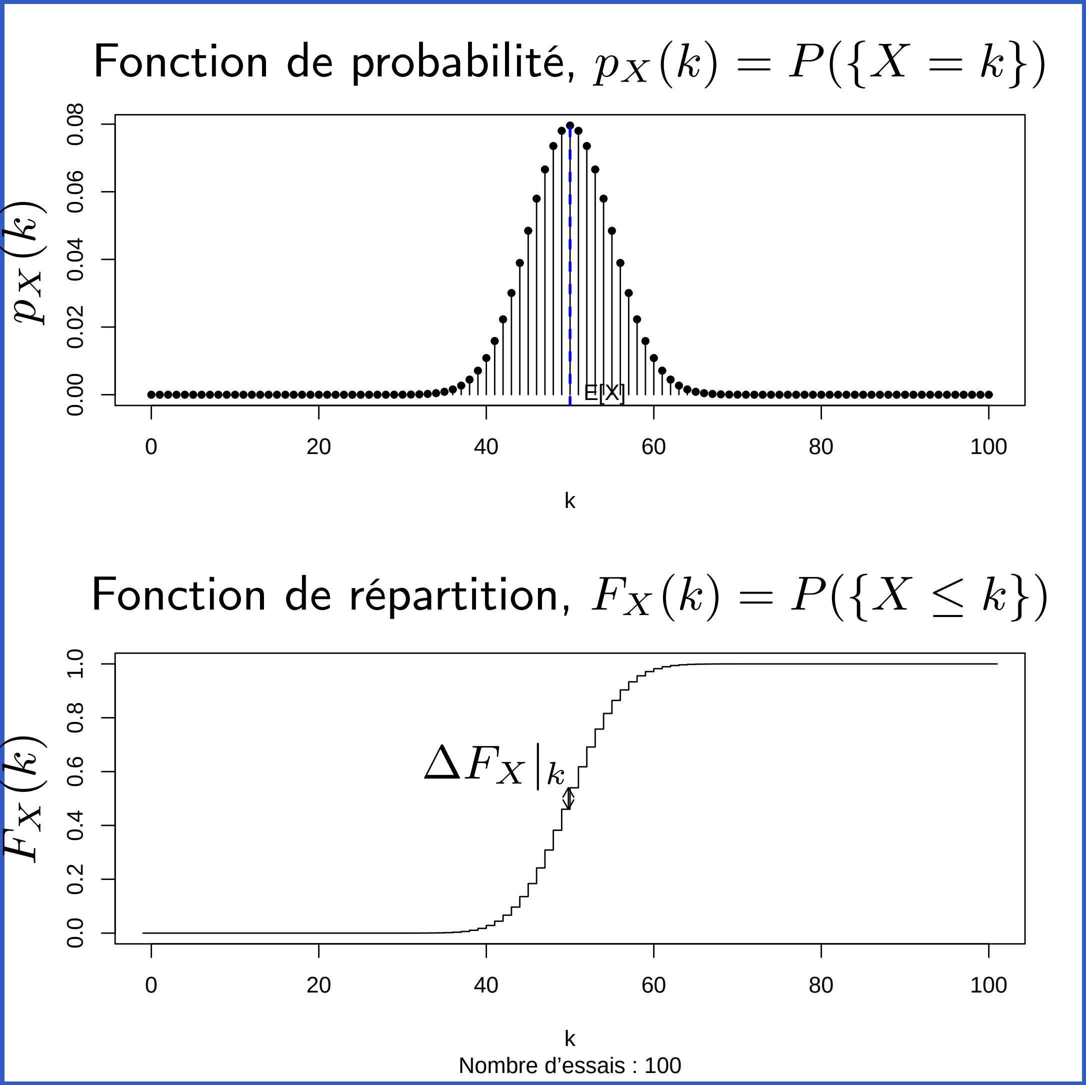
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

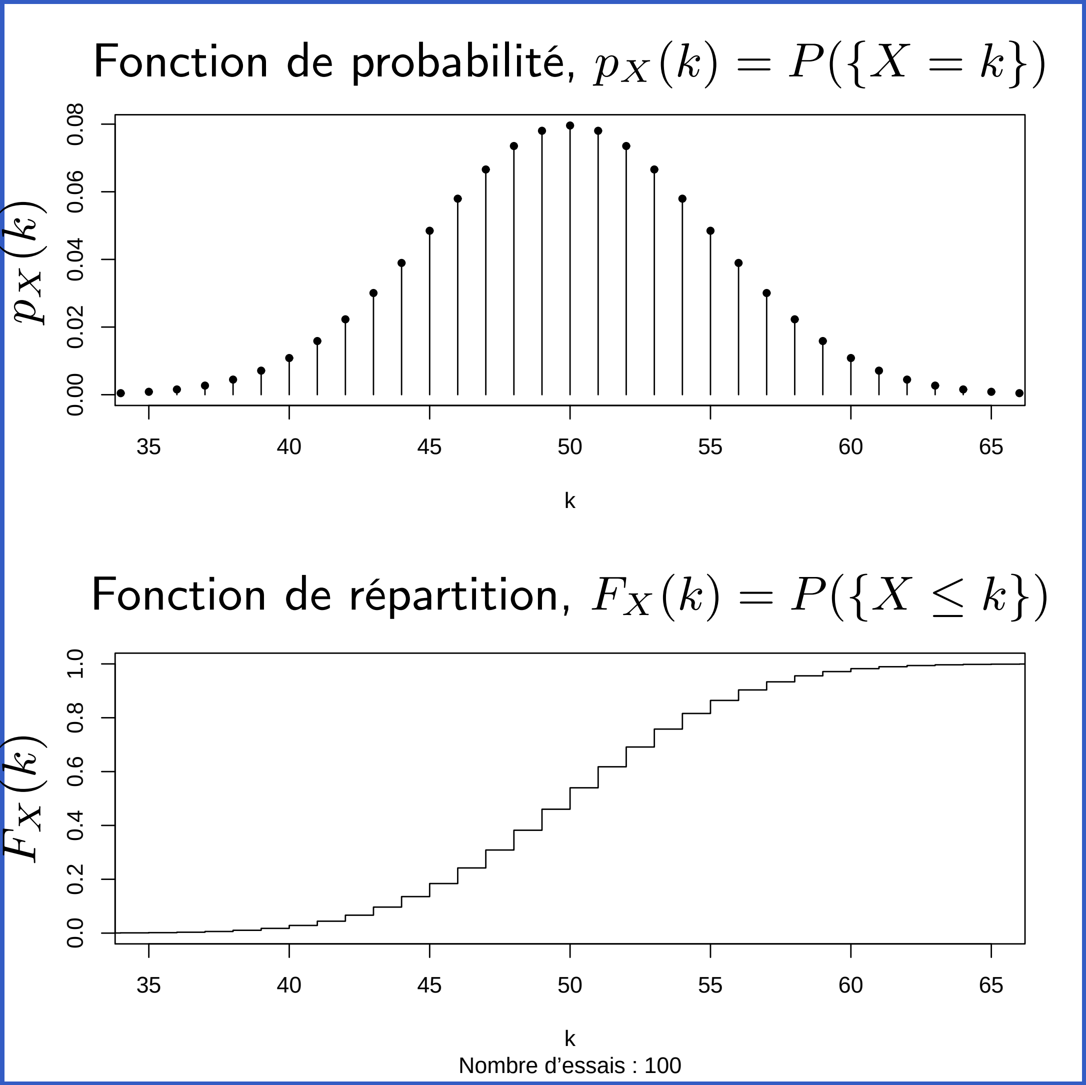
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) = $
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

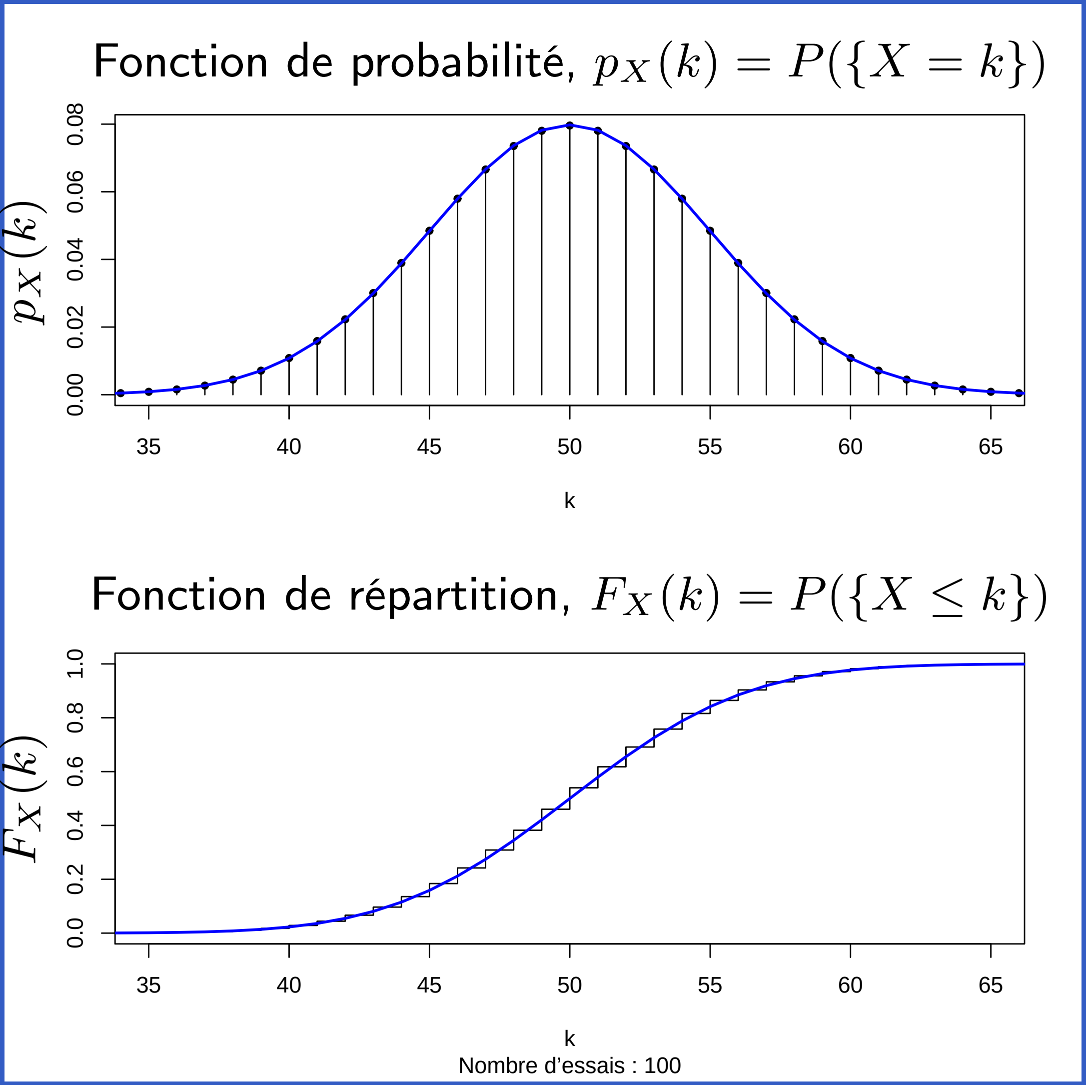
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \leq b\})$$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $$= P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

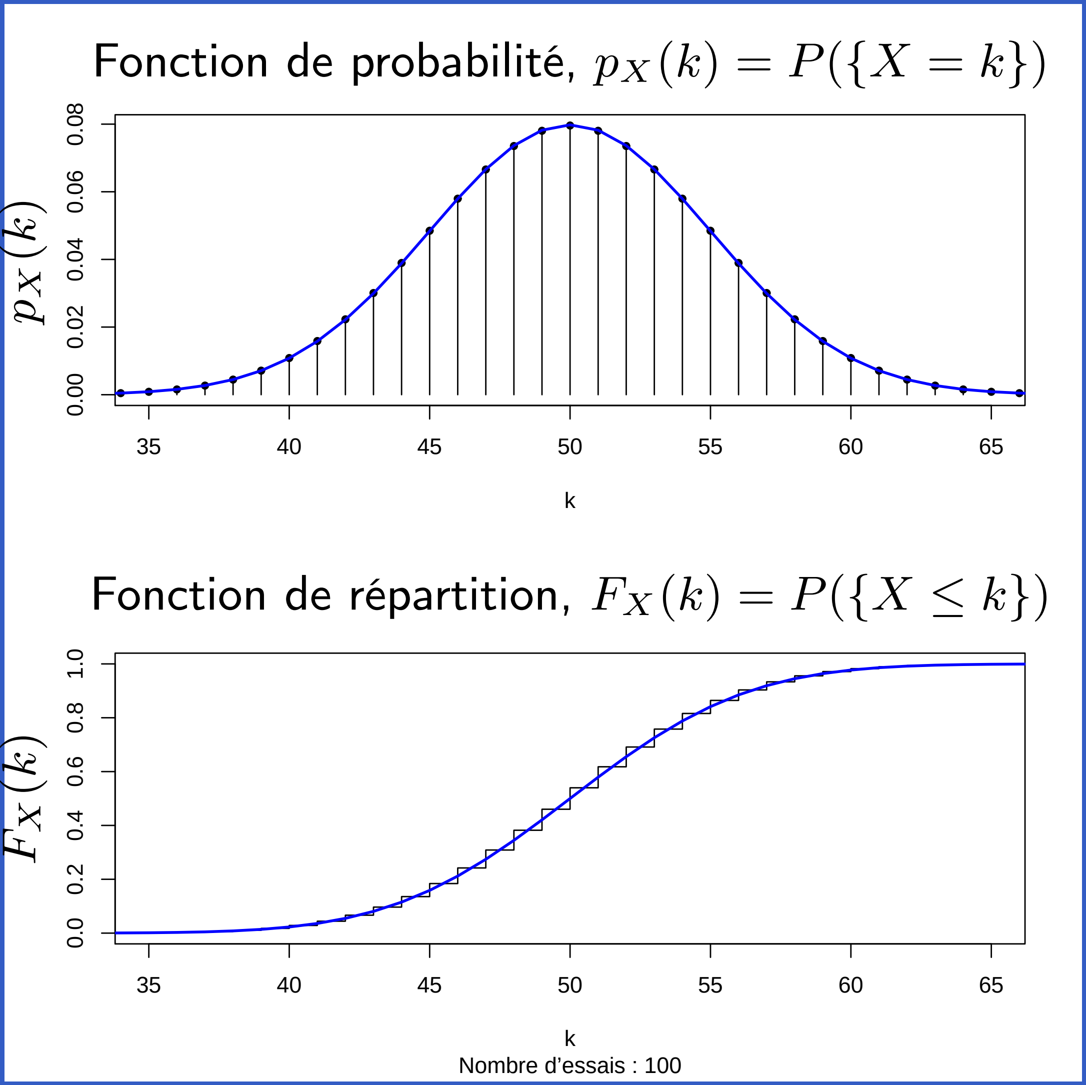
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \leq b\})$$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $$= P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.

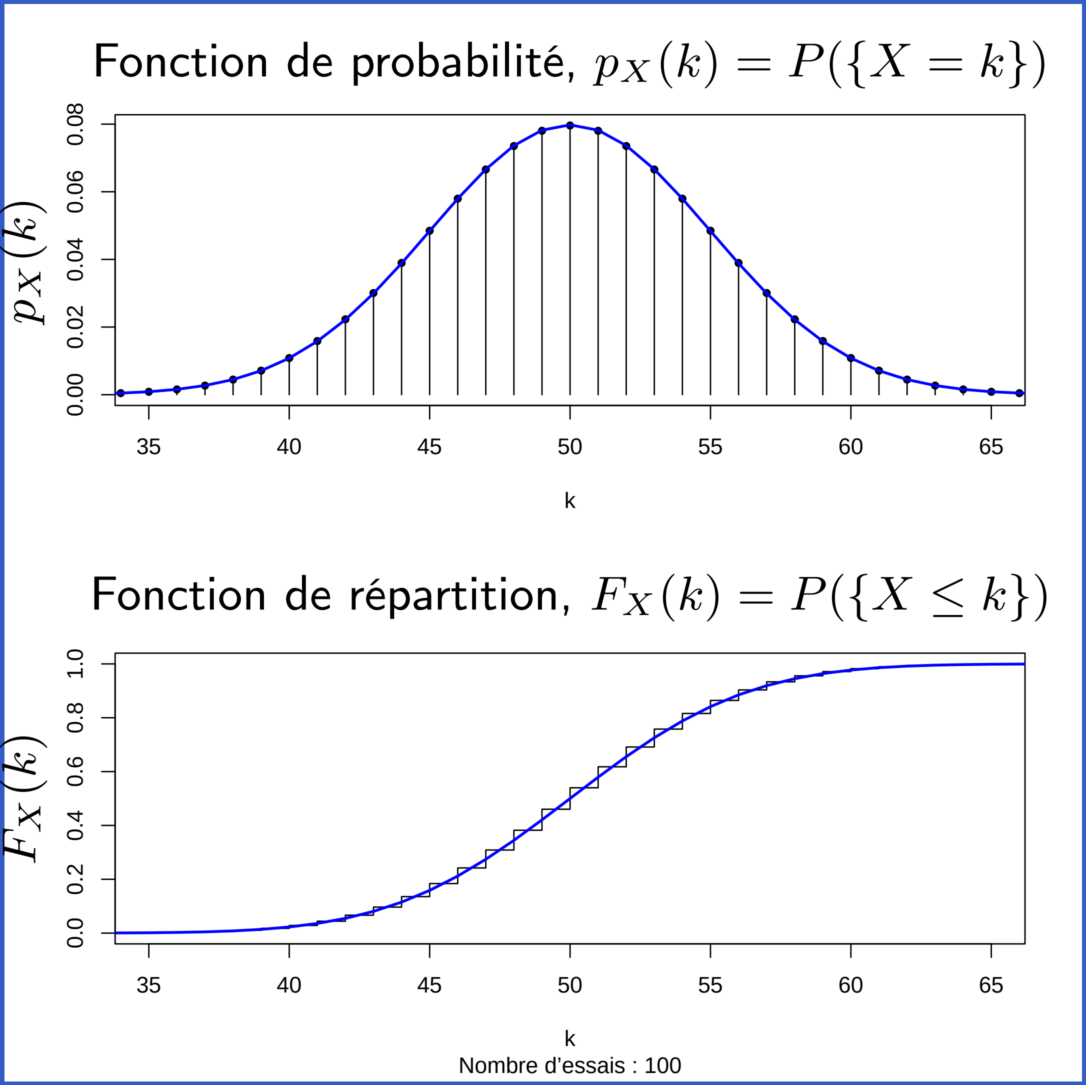


V.A.D.

- $$F_X(b) - F_X(a) = \\ = P(\{a < X \leq b\})$$
- $$F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k \\ = P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

V.A.C.

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



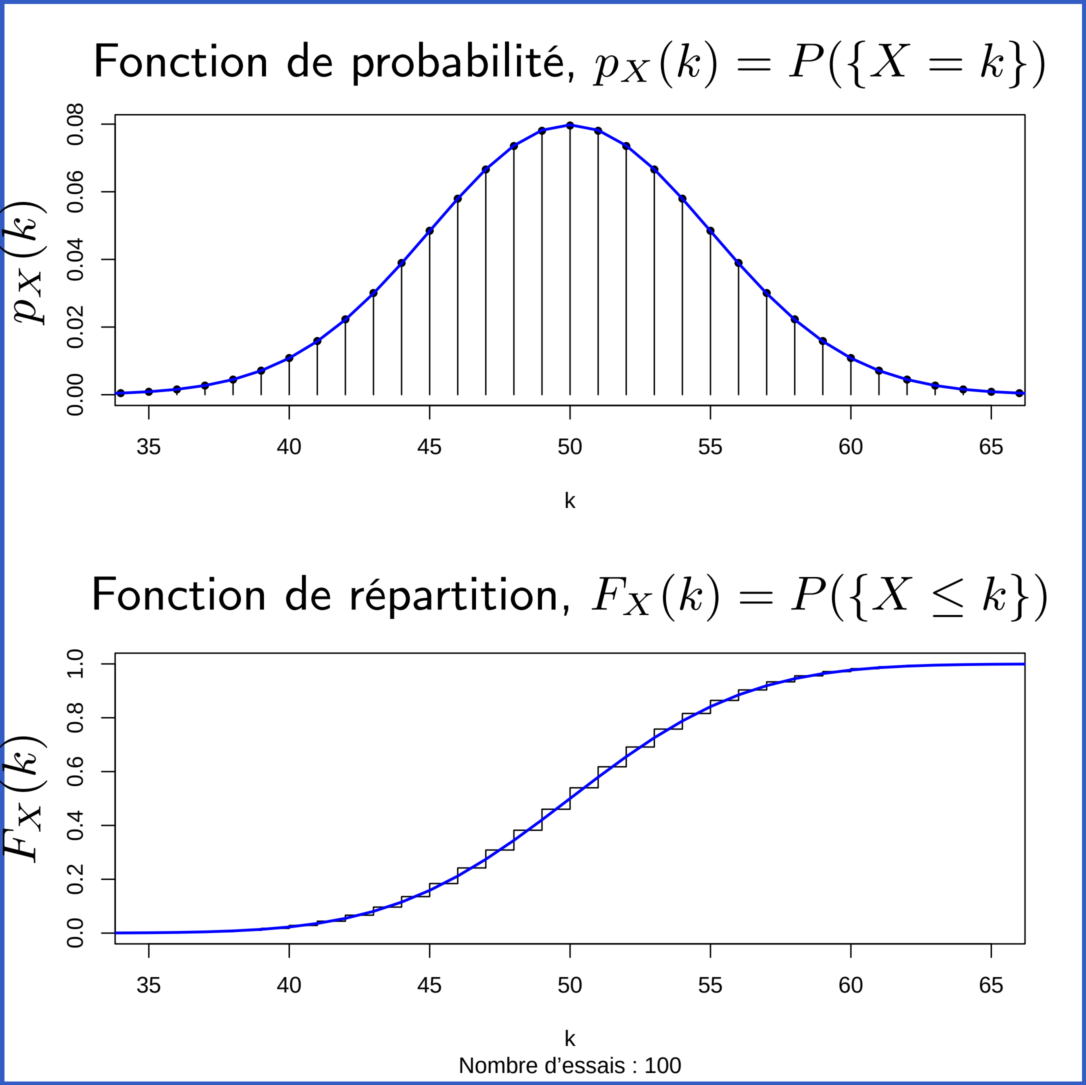
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \le b\})$$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $$= P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \le b\})$$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



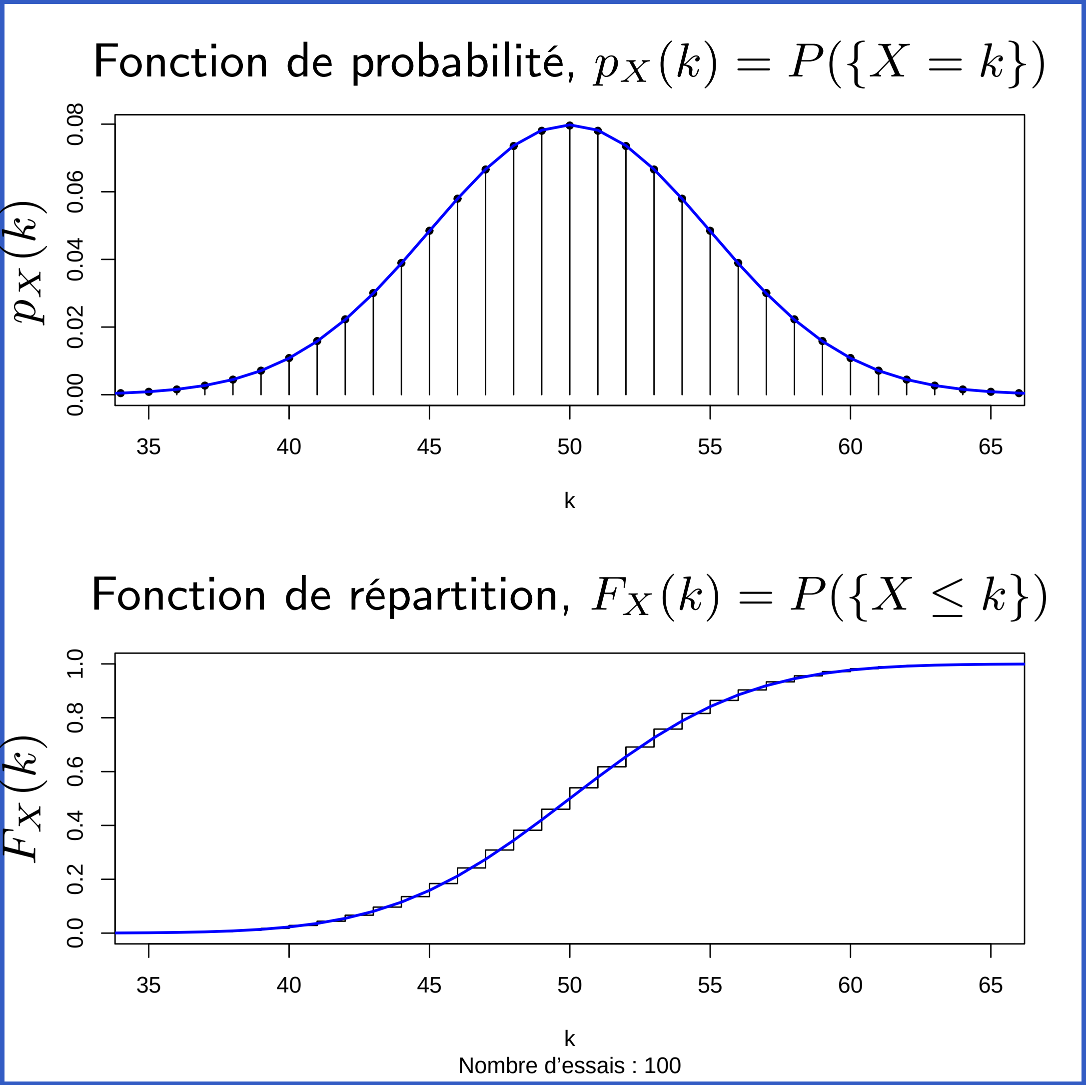
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \leq b\})$$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $$= P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \leq b\})$$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x)$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



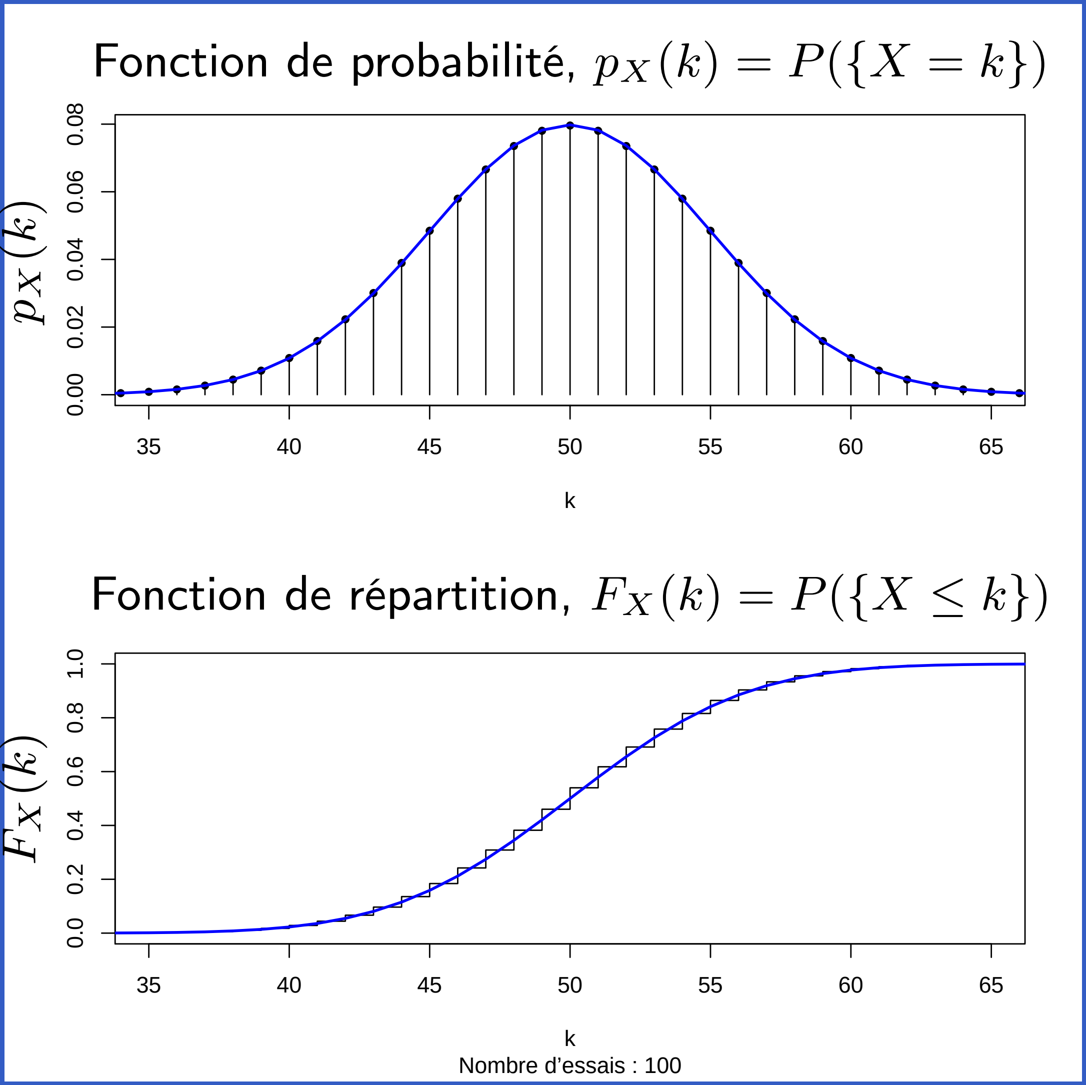
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \leq b\})$$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $$= P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $$= P(\{a < X \leq b\})$$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



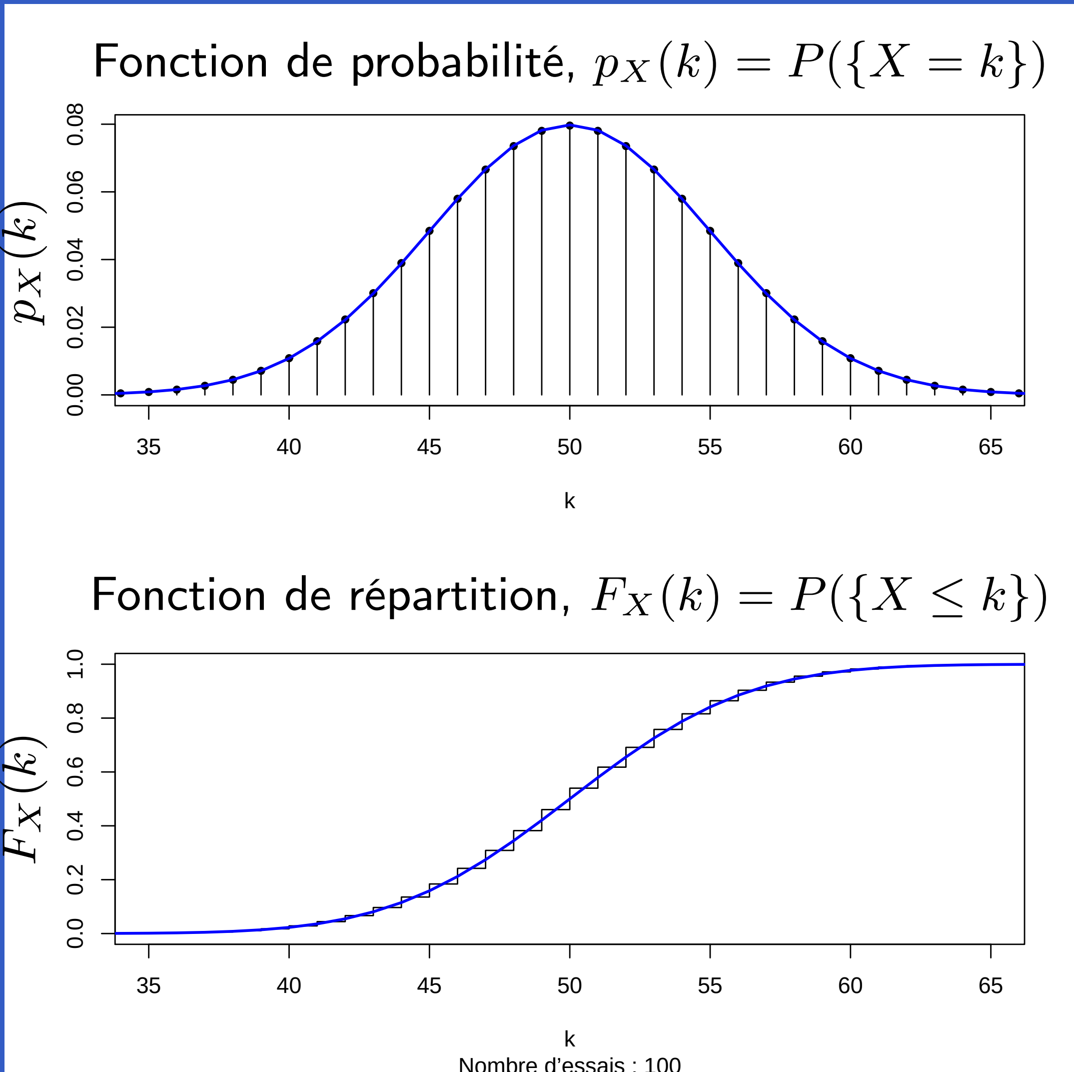
V.A.D.

- $$F_X(b) - F_X(a) = \\ = P(\{a < X \leq b\})$$
- $$F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k \\ = P(\{X = k\}) = p_X(k)$$

V.A.C.

- $$F_X(b) - F_X(a) = \\ = P(\{a < X \leq b\})$$
- $$F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X \\ = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



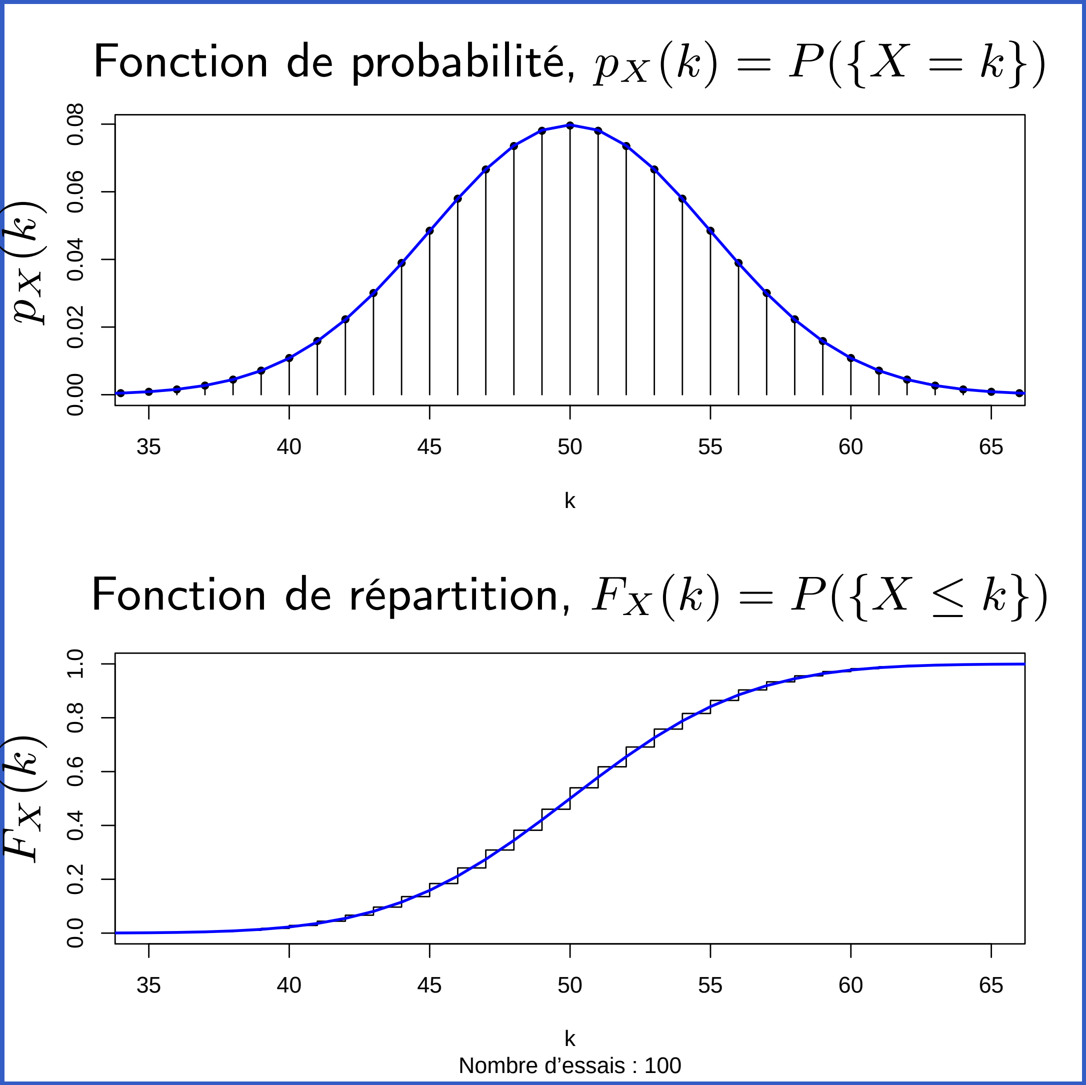
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$
  $= P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$
- $\dfrac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



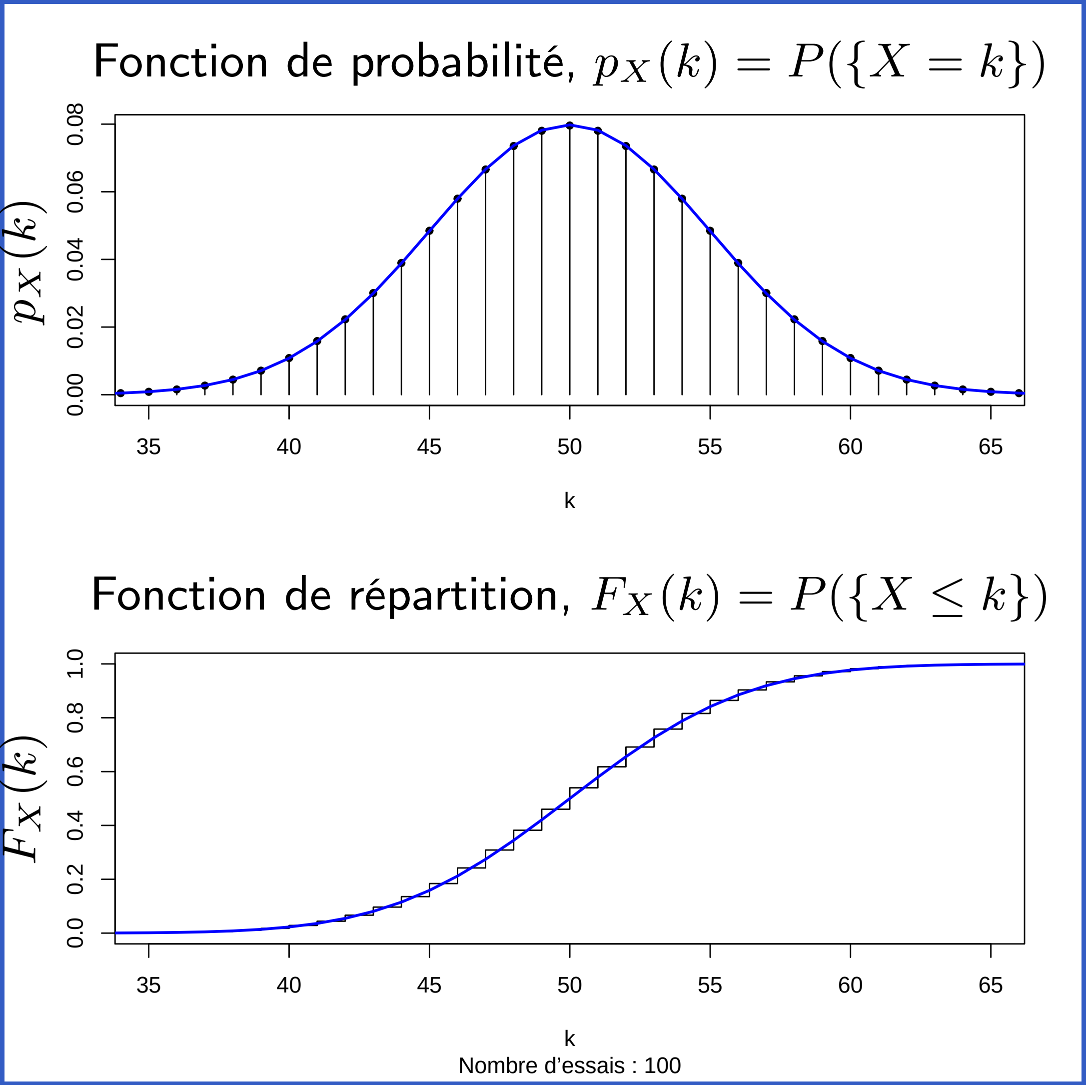
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$
  $= P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$
- $\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x} = \frac{P(\{x<X\leq x+\mathrm{d}x\})}{\mathrm{d}x}$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



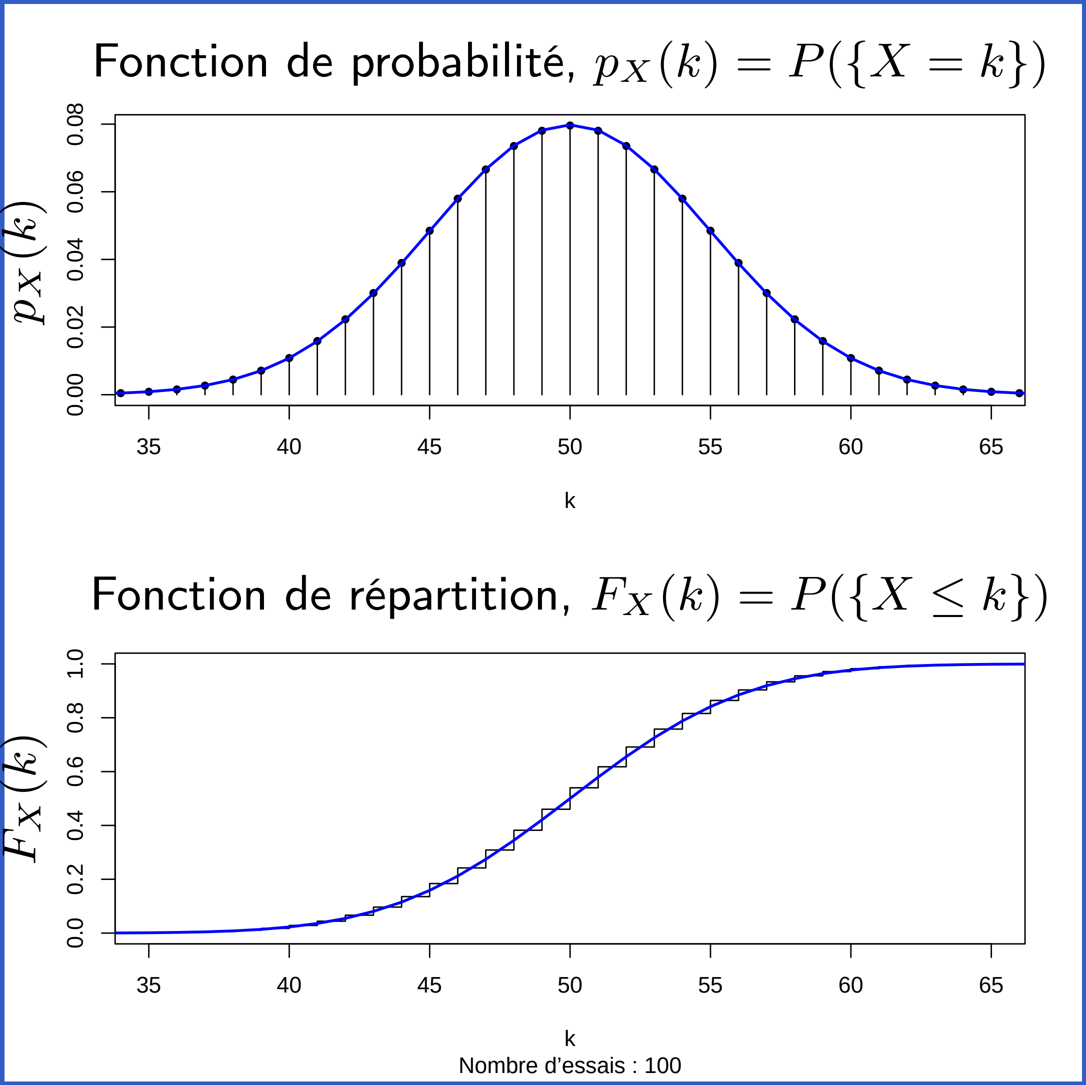
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k$
  $= P(\{X = k\}) = p_X(k)$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$
  $= P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$
- $\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x} = \frac{P(\{x<X\leq x+\mathrm{d}x\})}{\mathrm{d}x}$
  $\triangleq p_X(x)$ ddp

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



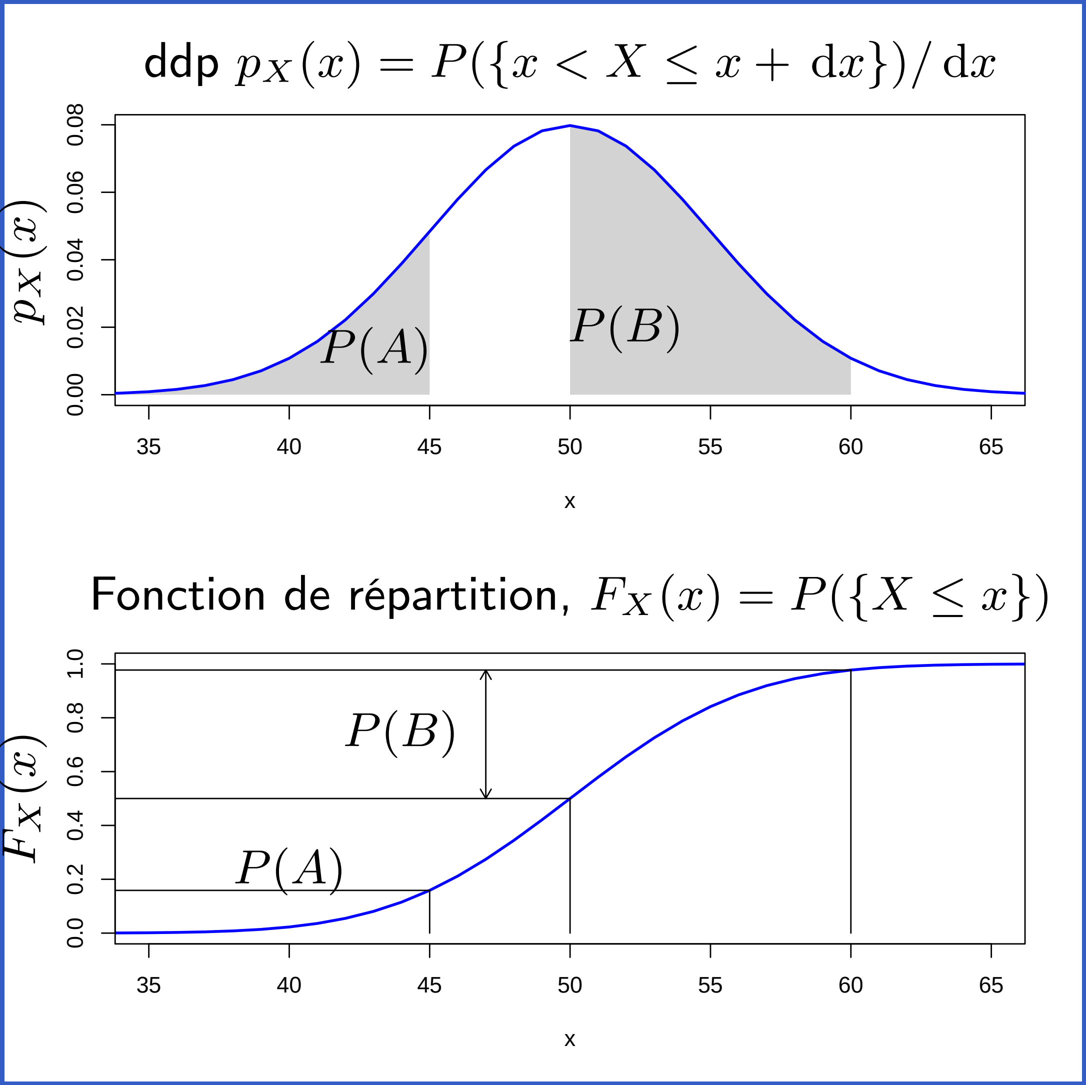
V.A.D.

- $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(k) - F_X(k^-) \triangleq \Delta F_X|_k = P(\{X = k\}) = p_X(k)$

V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) = P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$
- $\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x} = \frac{P(\{x<X\leq x+\mathrm{d}x\})}{\mathrm{d}x} \triangleq p_X(x)$ ddp
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u$

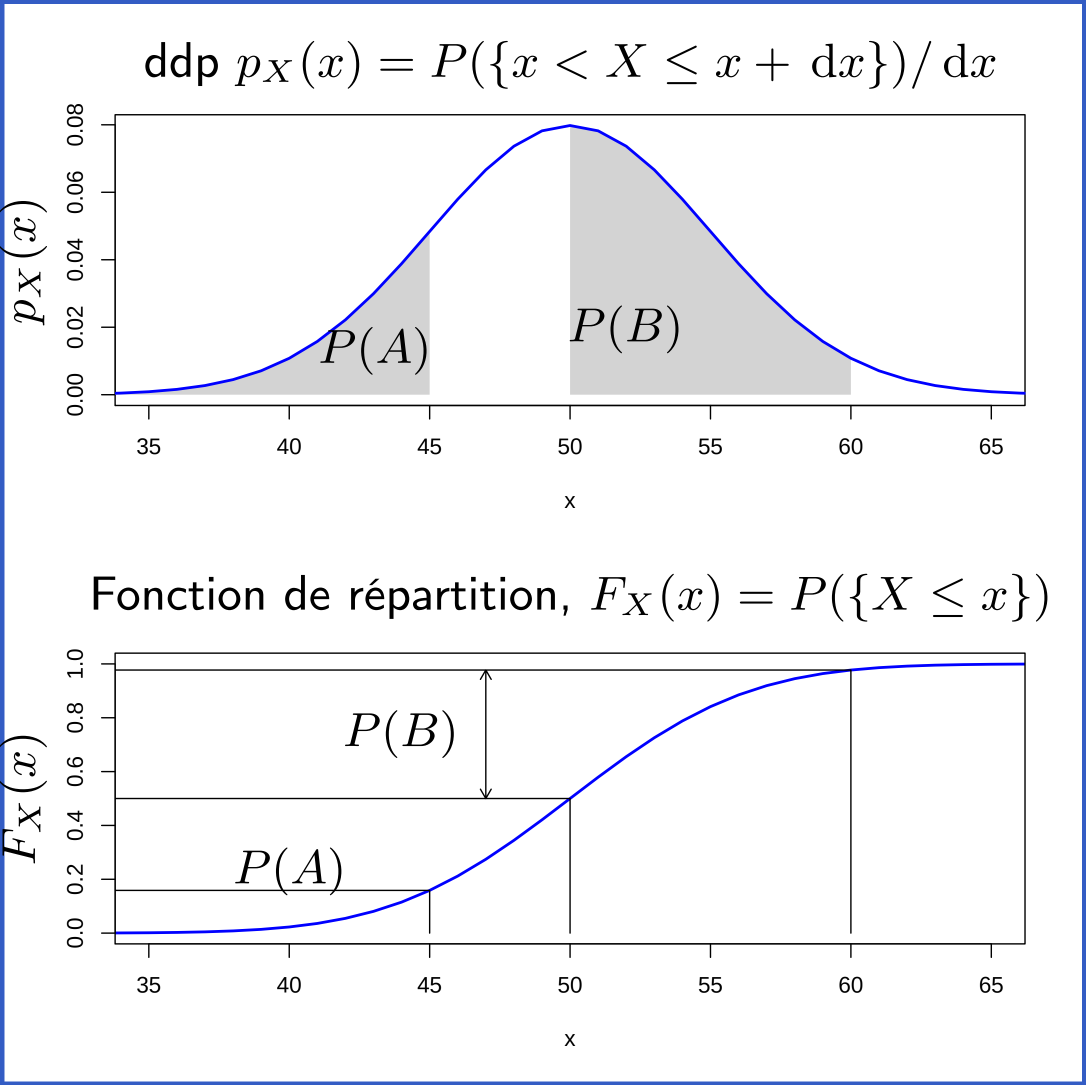
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \le b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$
  $= P(\{x < X \le x + \mathrm{d}x\})$
- $\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x} = \frac{P(\{x<X\le x+\mathrm{d}x\})}{\mathrm{d}x}$
  $\triangleq p_X(x)$ ddp
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u$

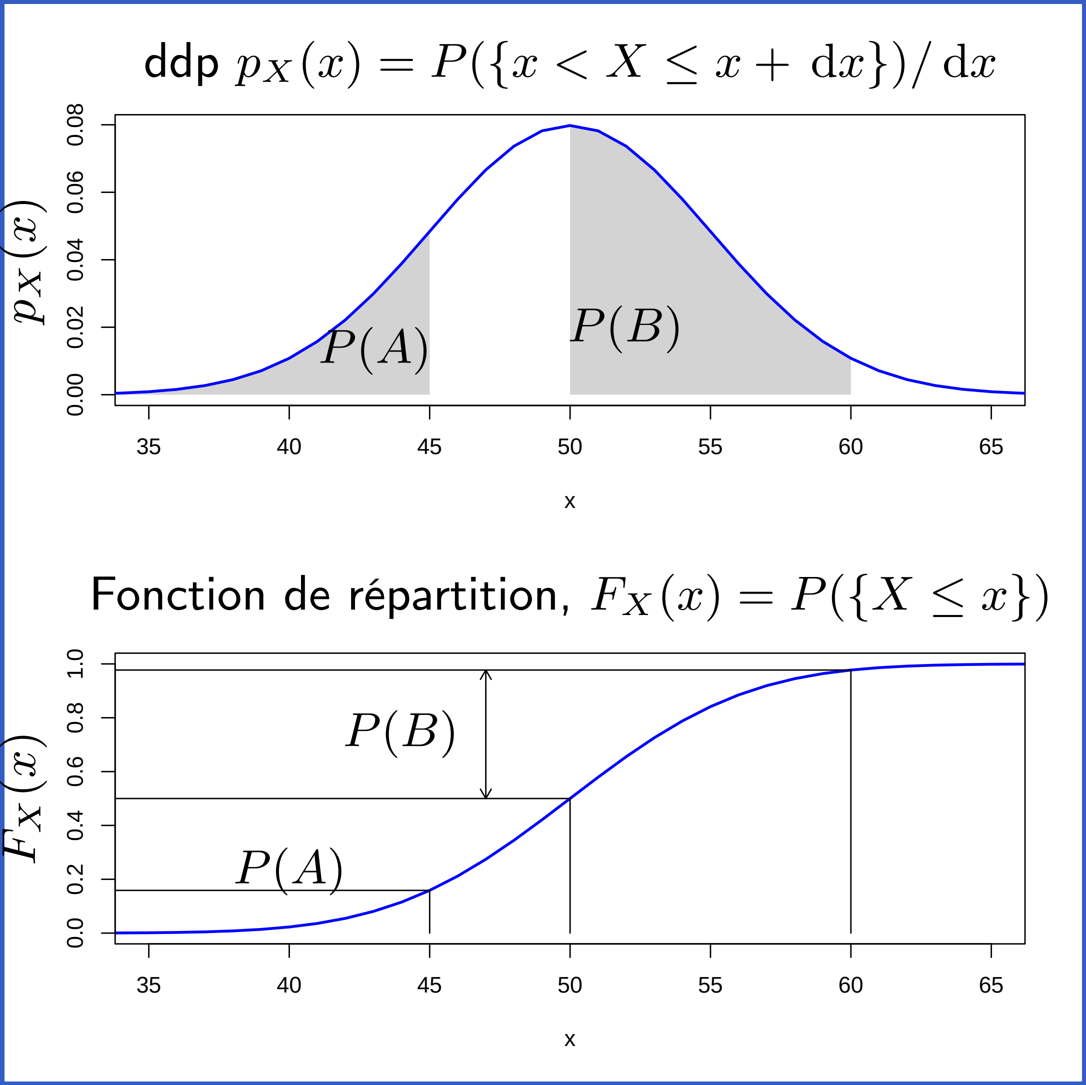
Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$
  $= P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$
- $\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x} = \frac{P(\{x<X\leq x+\mathrm{d}x\})}{\mathrm{d}x}$
  $\triangleq p_X(x)$ ddp
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u$
- $A = \{X \leq 45\}$

Fonction de répartition : v.a.d. vers v.a.c.



V.A.C.

- $F_X(b) - F_X(a) =$
  $= P(\{a < X \leq b\})$
- $F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) \triangleq \mathrm{d}F_X$
  $= P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})$
- $\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x} = \frac{P(\{x<X\leq x+\mathrm{d}x\})}{\mathrm{d}x}$
  $\triangleq p_X(x)$ ddp
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u$
- $A = \{X \leq 45\}$
- $B = \{50 < X \leq 60\}$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Densité de probabilité

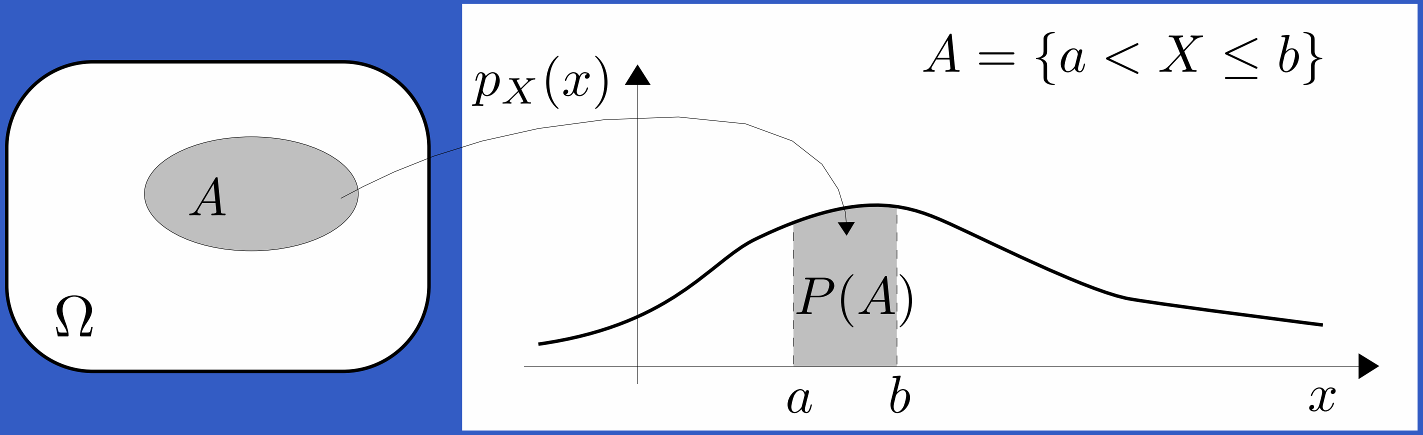
$$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

Densité de probabilité

$$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

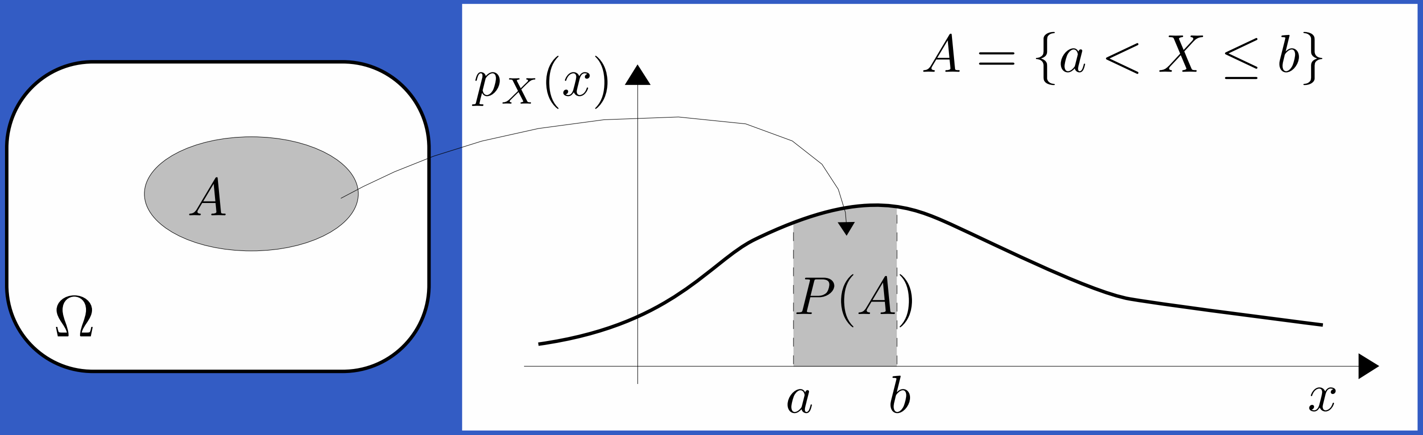
$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$



Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

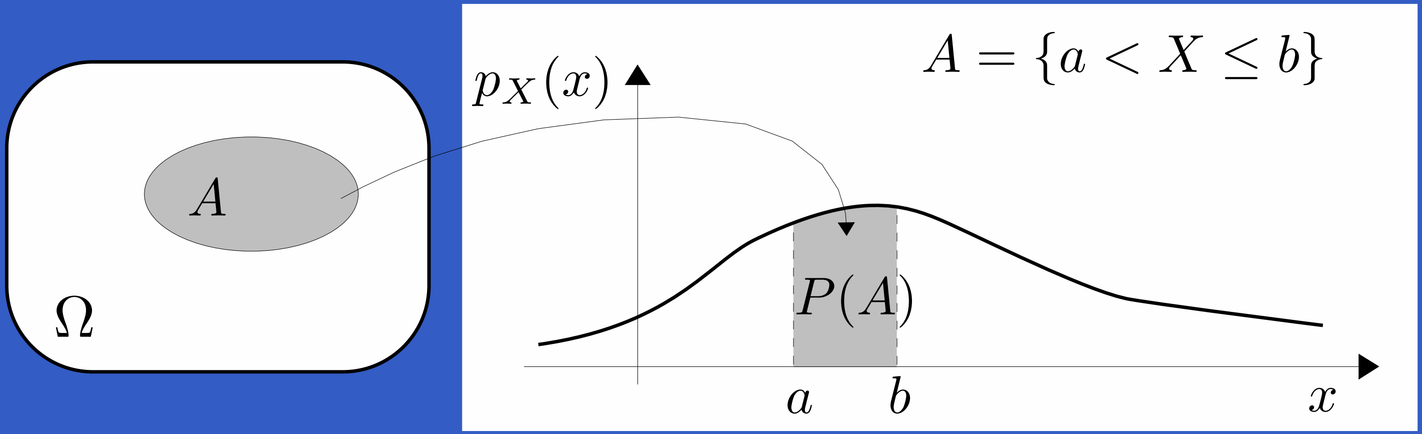


- $p_X(x) \geq 0\ ,\ \forall x$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

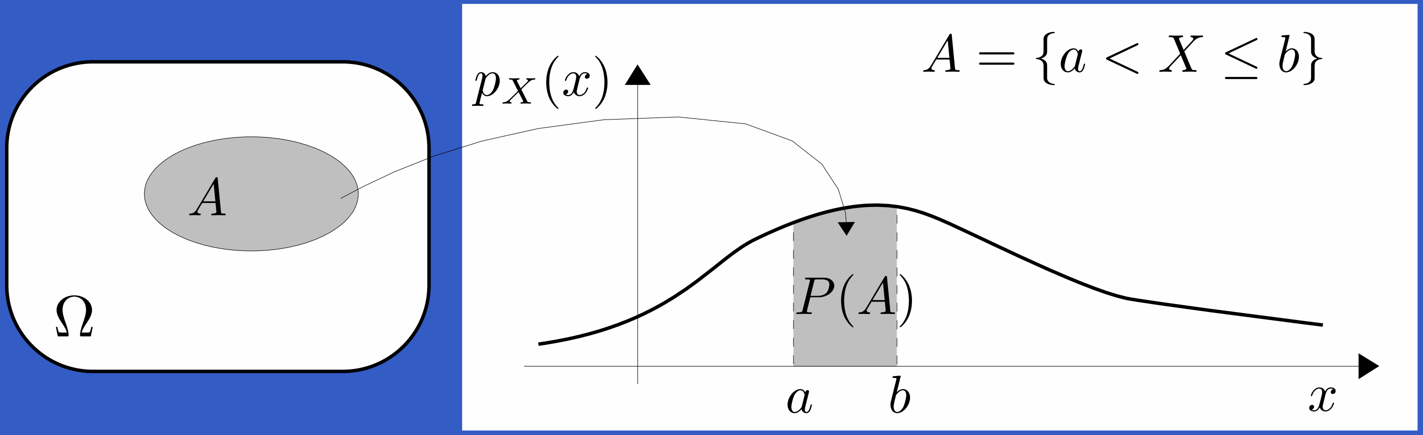


- $p_X(x) \geq 0$, $\forall x$
- $P(\{X = x_0\})$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

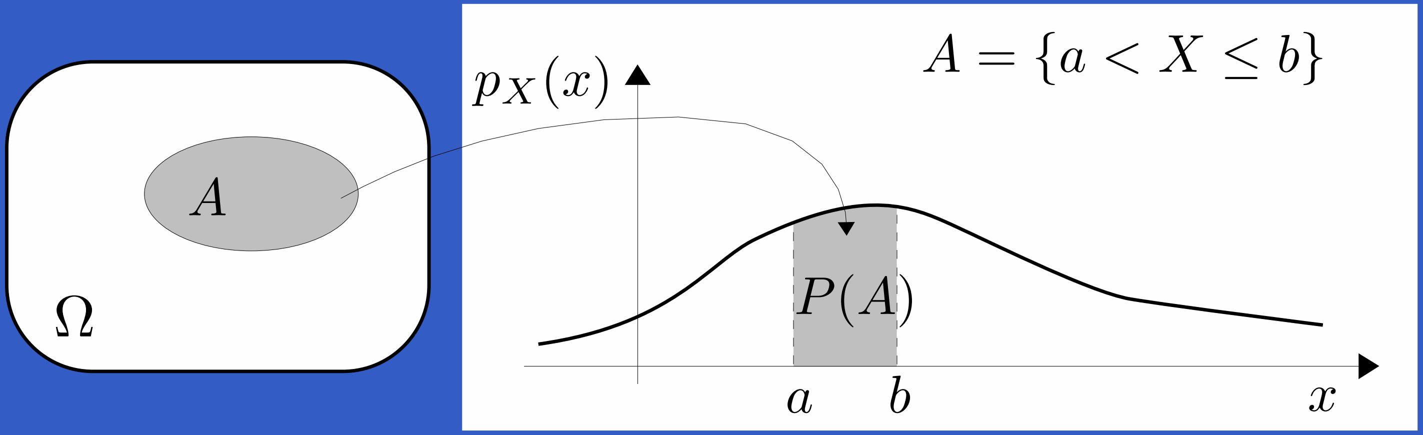


- $p_X(x) \geq 0 \ , \ \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\})$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

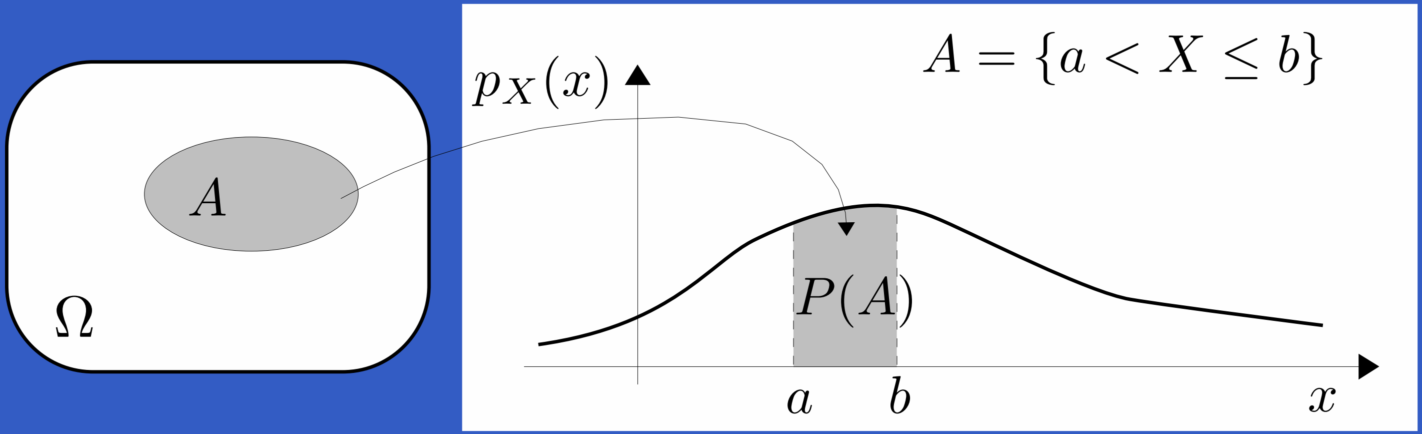


- $p_X(x) \geq 0\ ,\ \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

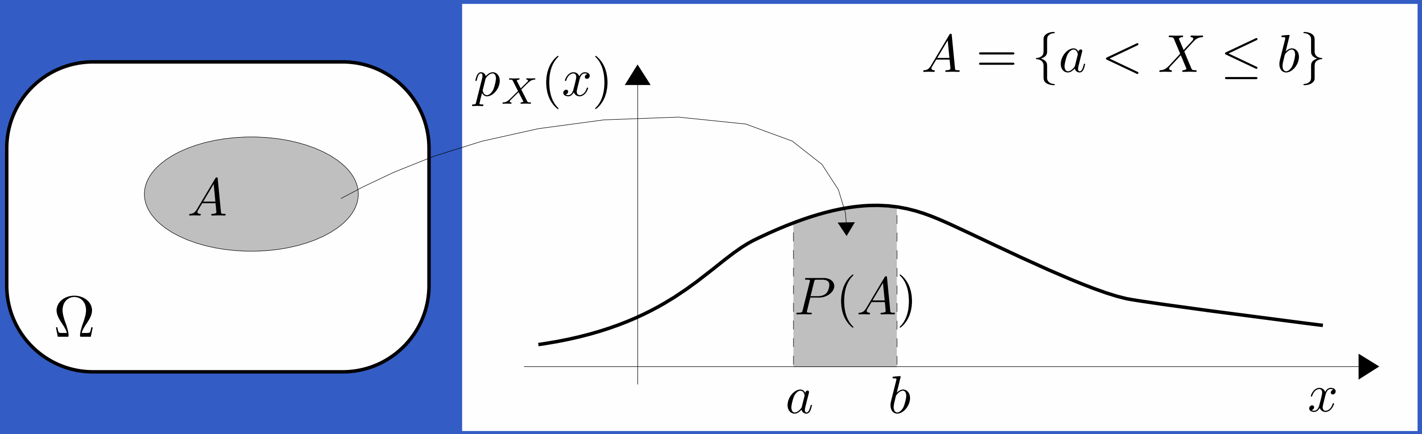


- $p_X(x) \geq 0\ ,\ \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

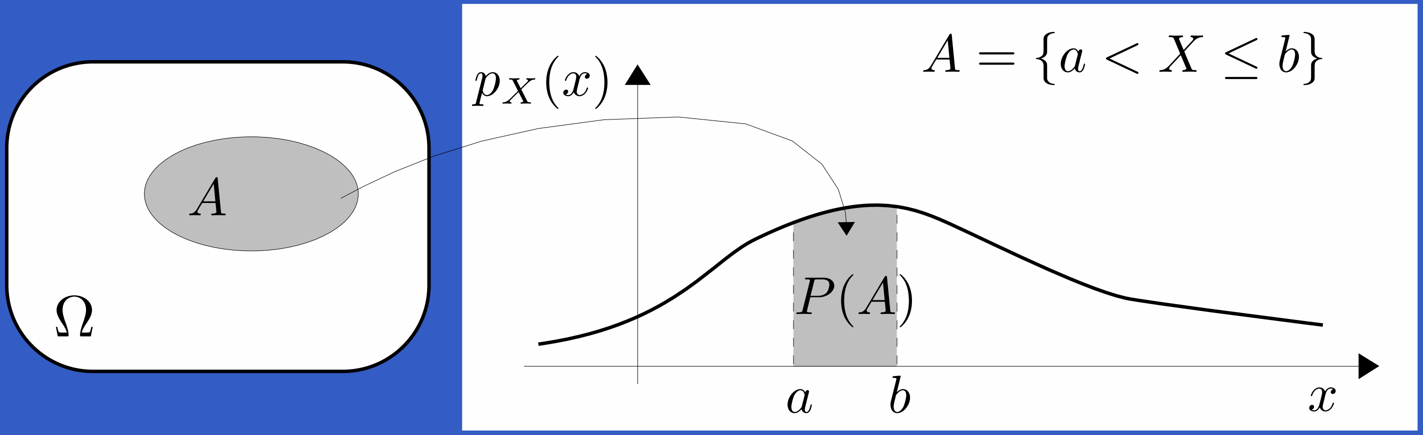


- $p_X(x) \geq 0 \;, \; \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Normalisation :

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

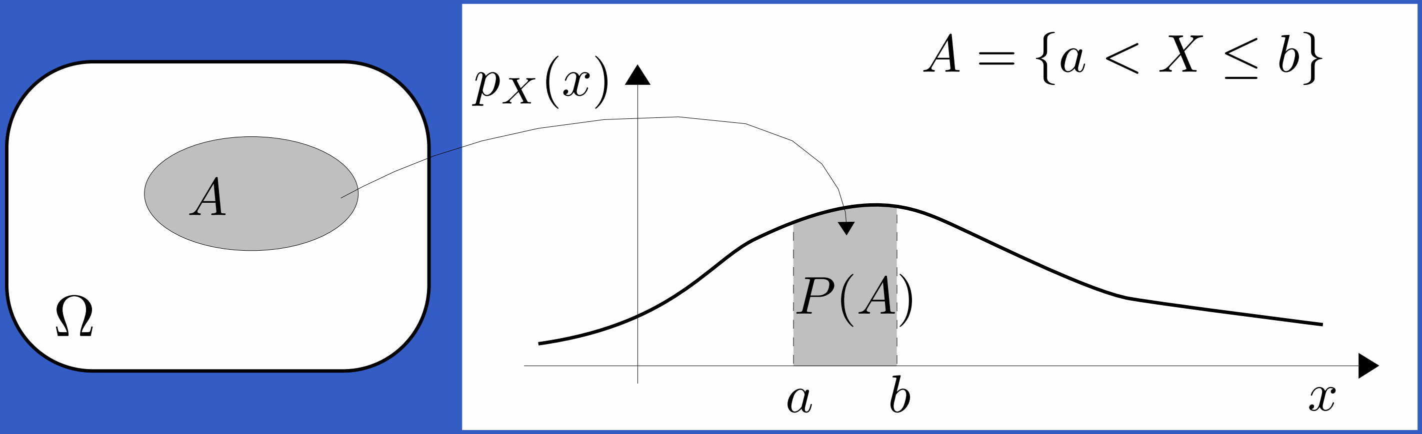


- $p_X(x) \geq 0\ ,\ \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

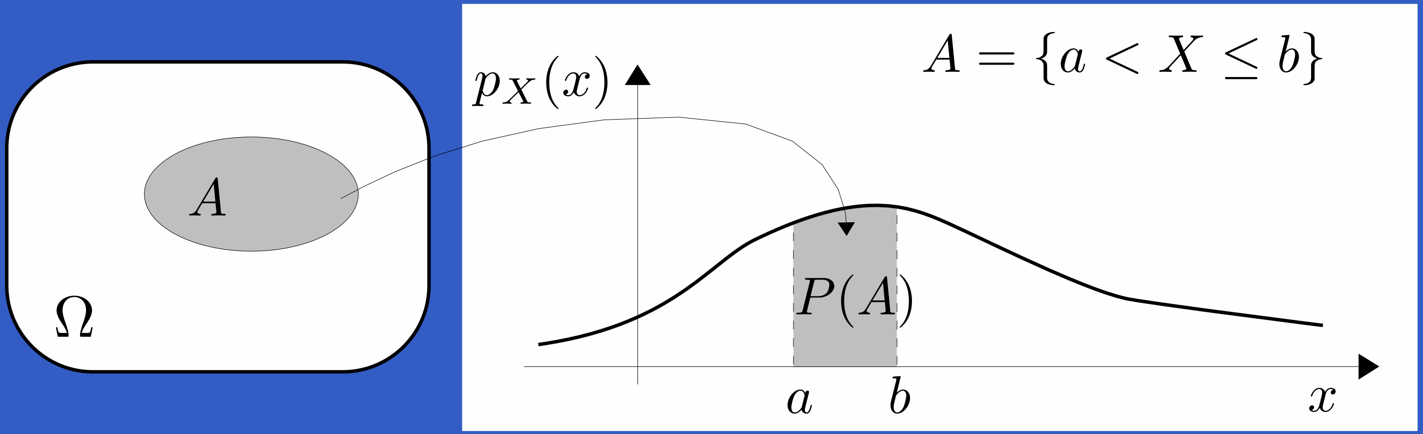


- $p_X(x) \geq 0$, $\forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x = P(\{-\infty < X < +\infty\})$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

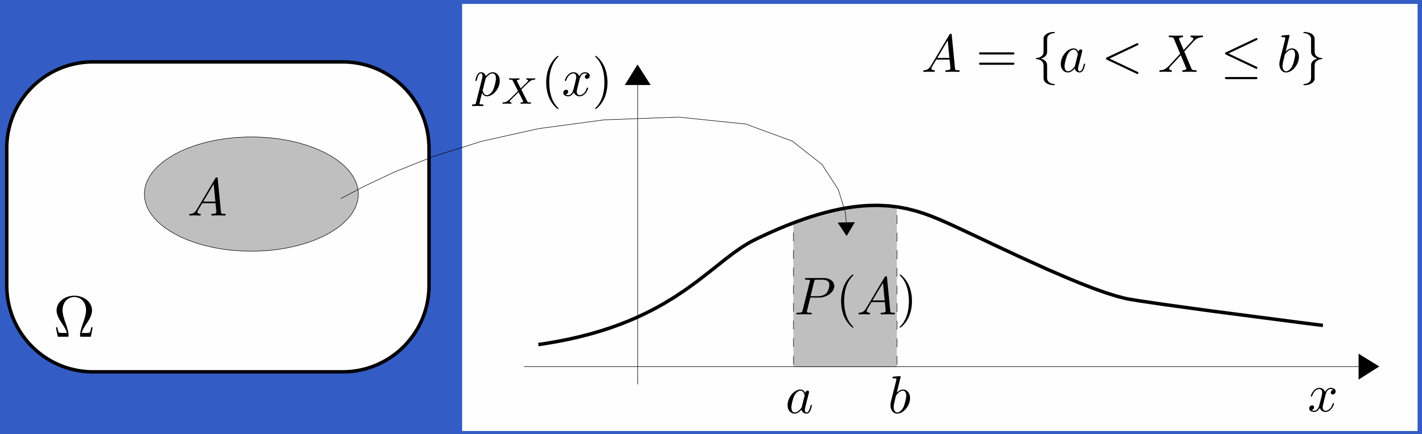


- $p_X(x) \geq 0\ ,\ \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x = P(\{-\infty < X < +\infty\}) = P(\Omega)$

Densité de probabilité

- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) = p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$



- $p_X(x) \geq 0 \ , \ \forall x$
- $P(\{X = x_0\}) = P(\{x_0 < X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} p_X(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x = P(\{-\infty < X < +\infty\}) = P(\Omega) = 1$

Fonction de répartition

Fonction de répartition

- $$F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\})$$

Fonction de répartition

$$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u}$$

Fonction de répartition

$$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \le x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \quad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
  - $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
  - $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$
  - v.a.d. : $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$

Fonction de répartition

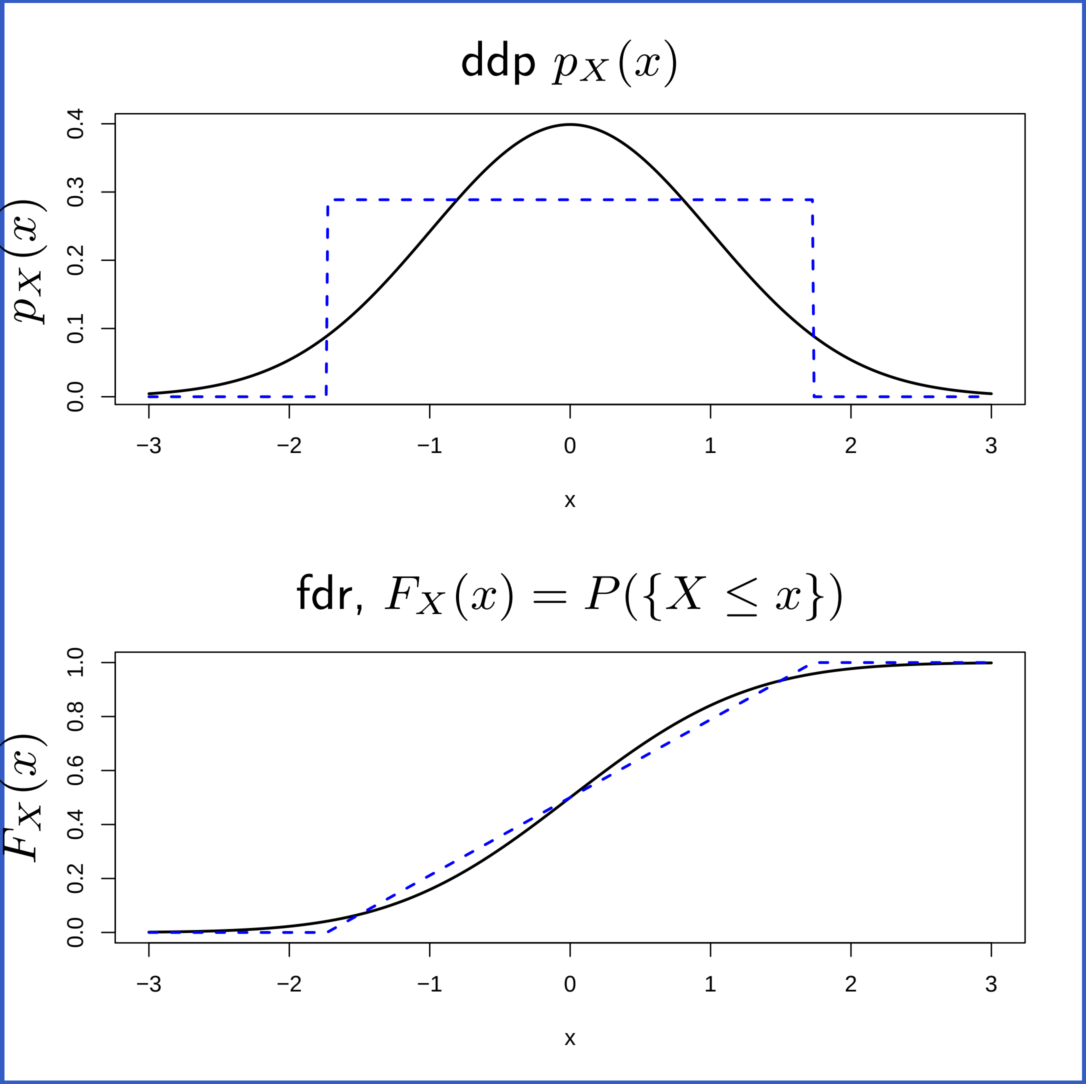
- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
  - $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$
  - v.a.d. : $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - v.a.c. : $\mathrm{d}F_X(x) = F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) = P(x < X \leq x + \mathrm{d}x)$

Fonction de répartition

- $$\boxed{F_X(x) \triangleq P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,\mathrm{d}u} \qquad \boxed{p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}}$$

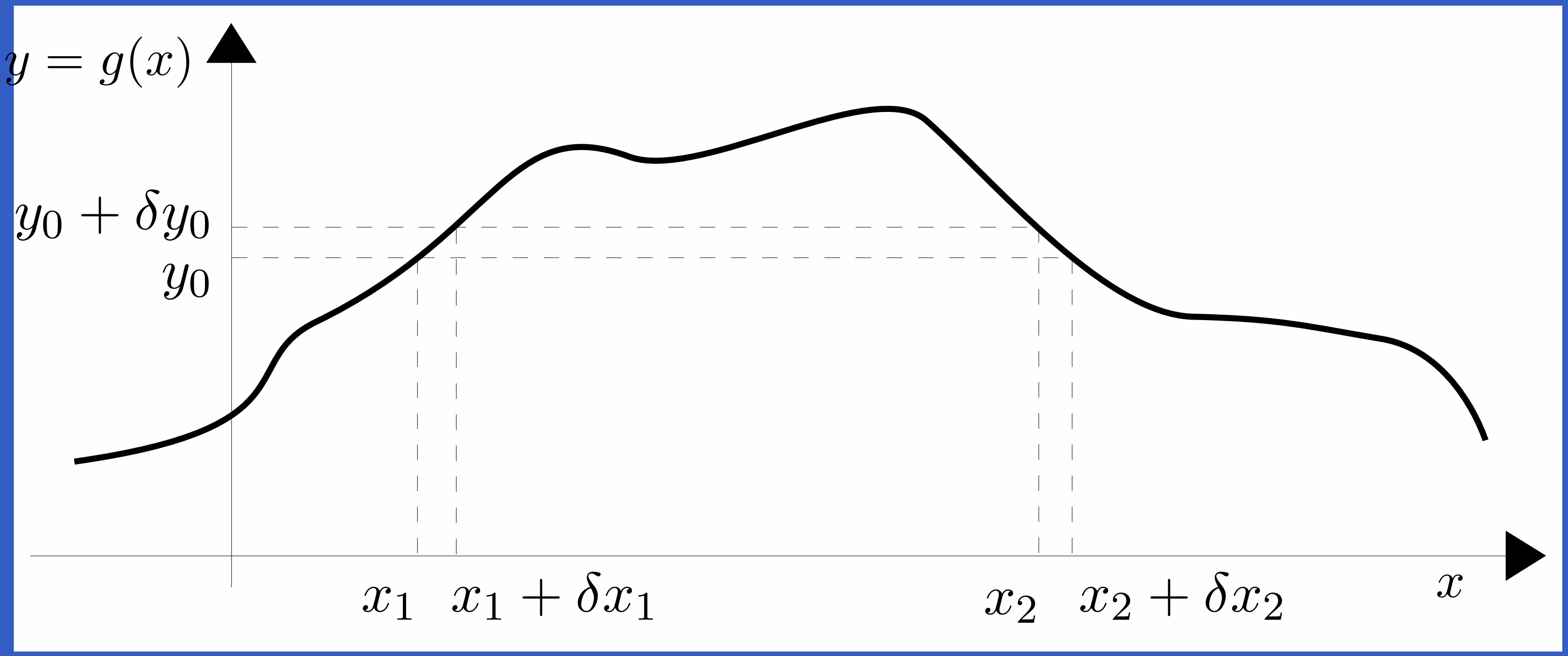
- Propriétés :
  - $F_X(x)$: définie sur $\mathbb{R}$; continue (v.a.c.) / cont. à droite (v.a.d.)
  - Monotone croissante (au sens large) :
    si $x_1 < x_2$, $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
  - $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
  - $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
  - $F_X(x_2) - F_X(x_1) = P(\{x_1 < X \leq x_2\})$
  - v.a.d. : $F_X(x_{(k)}) - F_X(x_{(k)}^-) = p_X(x_{(k)})$
  - v.a.c. : $\mathrm{d}F_X(x) = F_X(x + \mathrm{d}x) - F_X(x) = P(x < X \leq x + \mathrm{d}x)$
  - $\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{P(x<X\leq x+\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \triangleq p_X(x)$



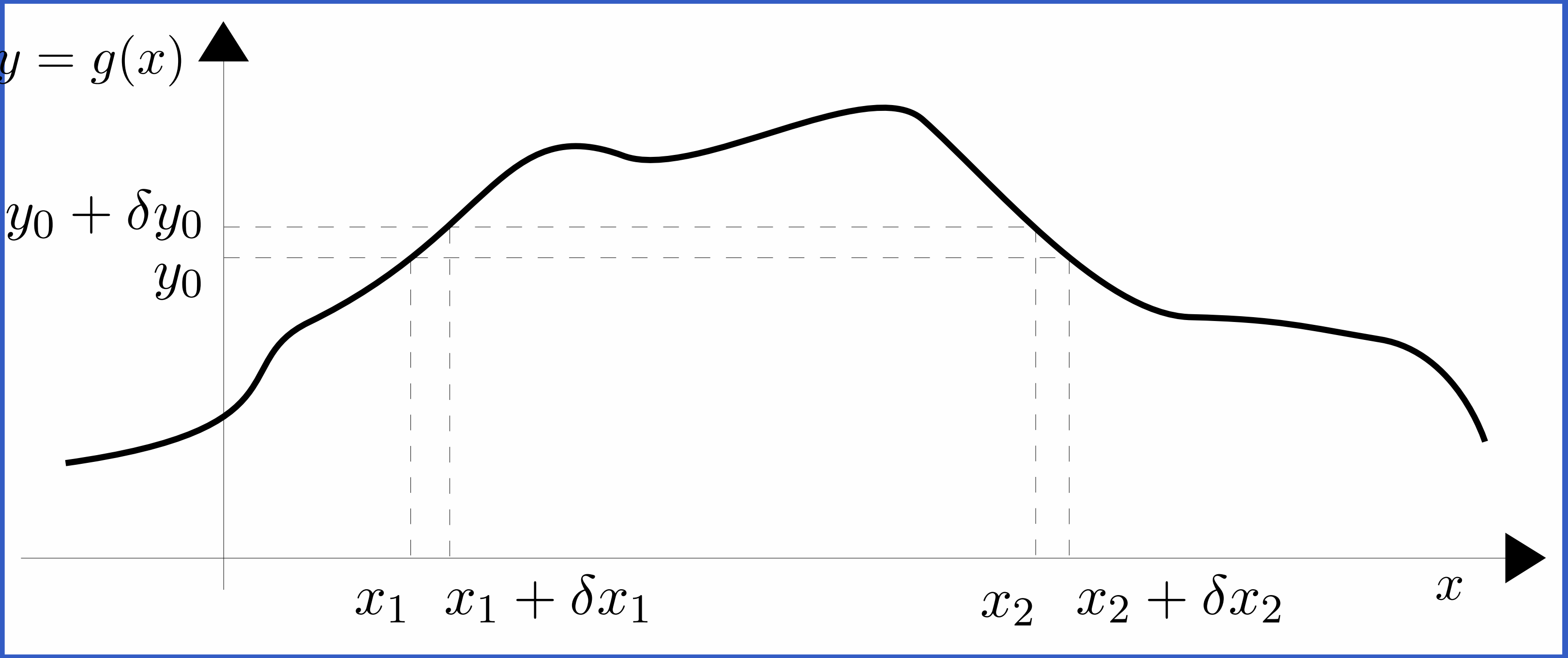
ddp $p_X(x)$
$p_X(x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
fdr, $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
x

Fonction d'une V.A.

Fonction d'une V.A.

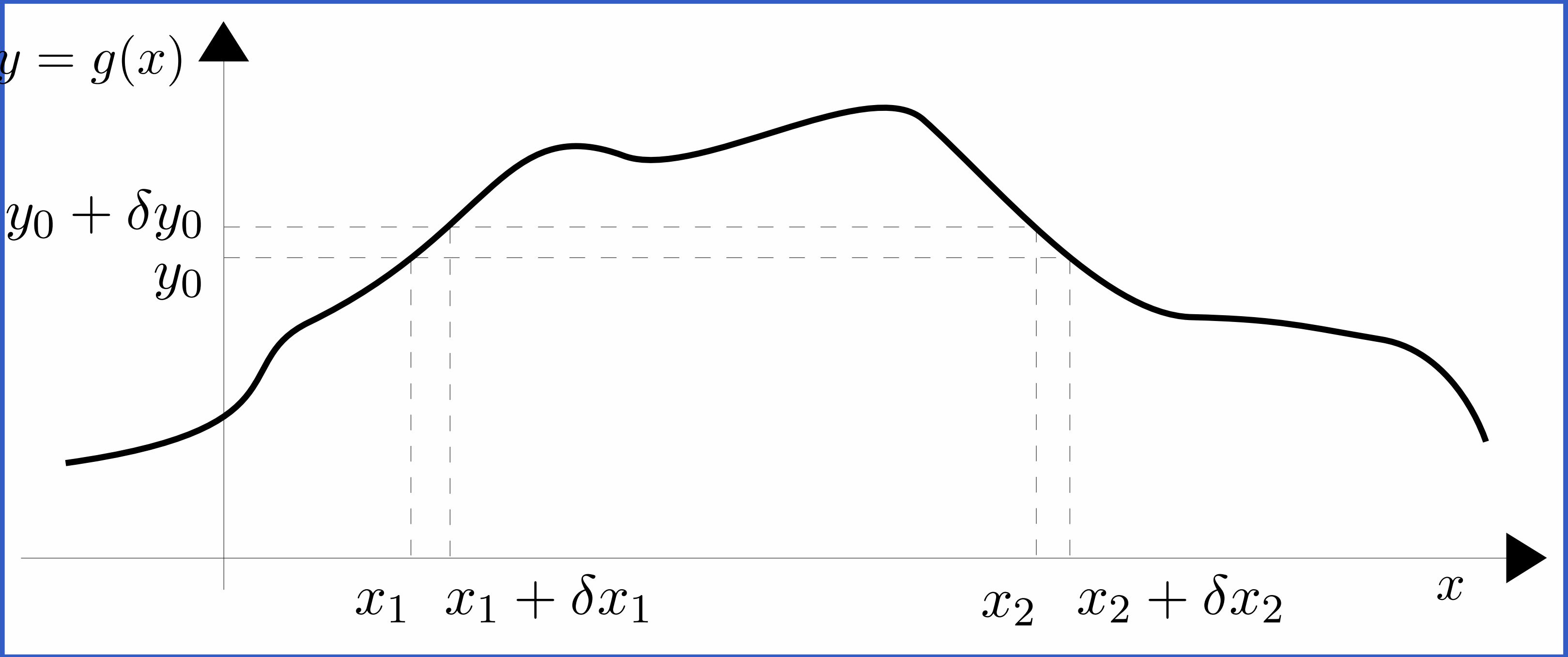


Fonction d'une V.A.



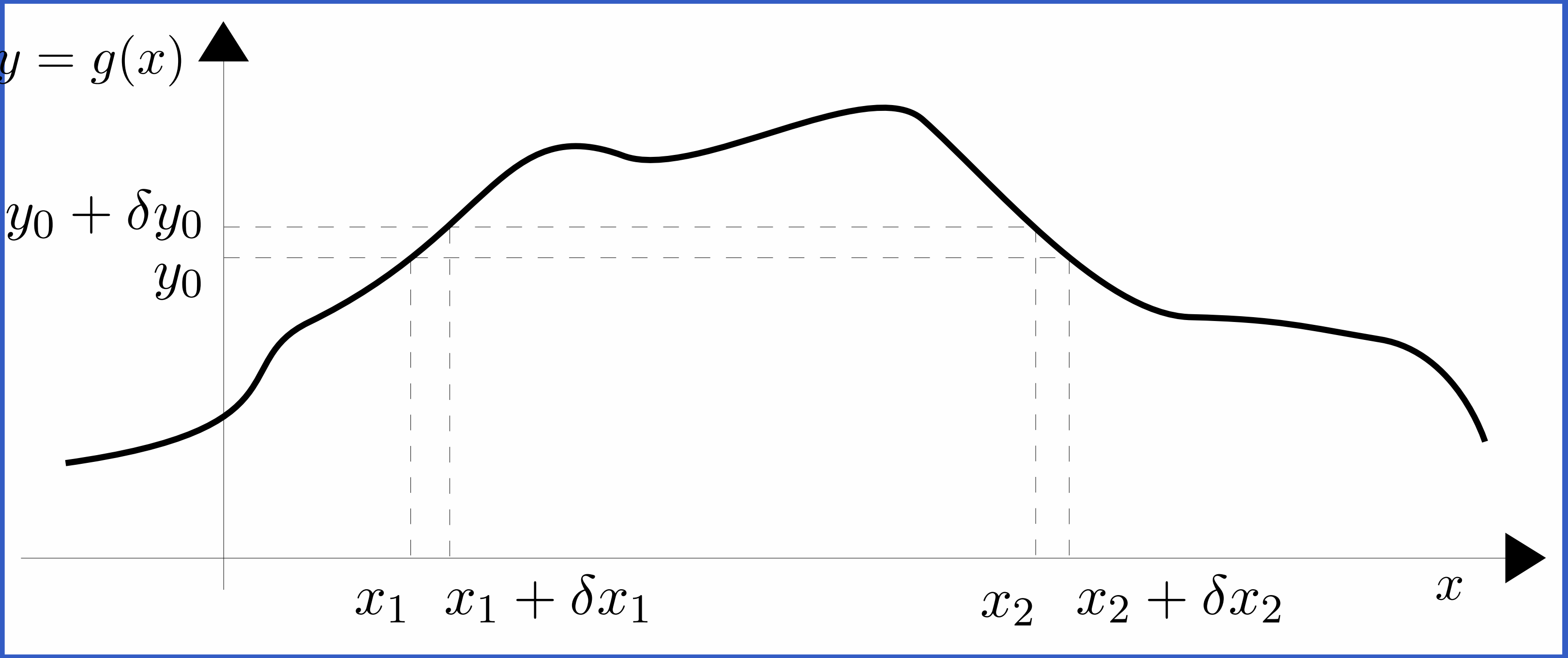
- $P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\})$

Fonction d'une V.A.



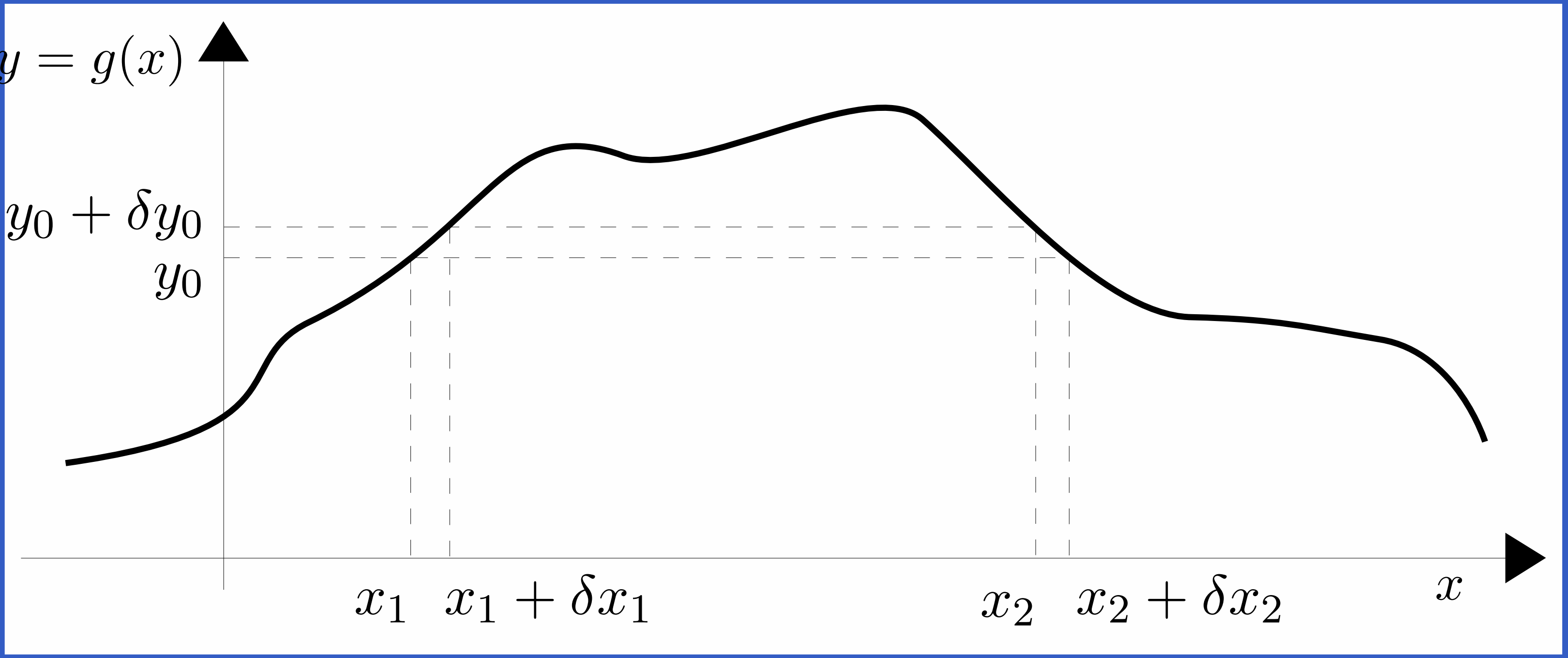
- $P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\}) = p_Y(y_0) \cdot \delta y_0$

Fonction d'une V.A.



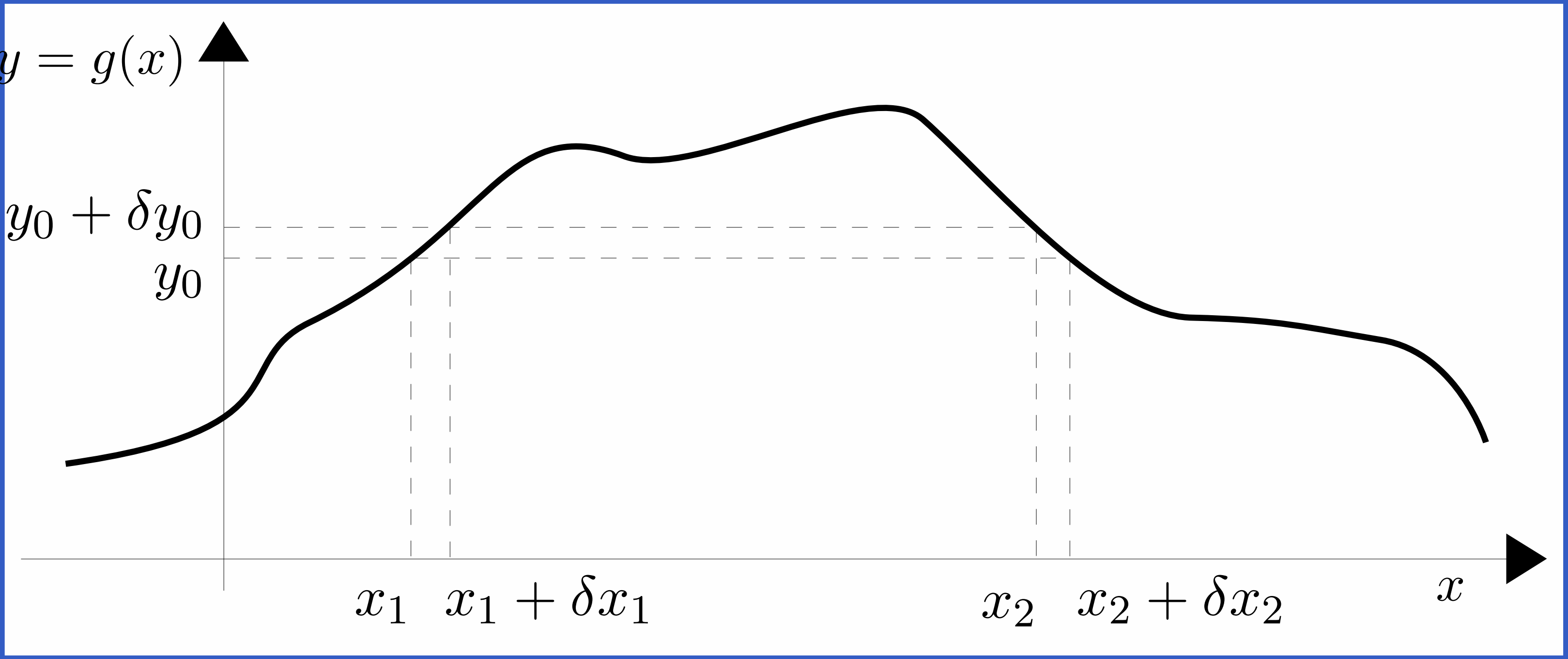
- $$\begin{aligned} P(\{y_0 < Y \le y_0 + \delta y_0\}) &= p_Y(y_0) \cdot \delta y_0 \\ &= \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} P(\{x_i < X \le x_i + \delta x_i\}) \end{aligned}$$

Fonction d'une V.A.



- $$\begin{aligned} P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\}) &= p_Y(y_0) \cdot \delta y_0 \\ &= \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} P(\{x_i < X \leq x_i + \delta x_i\}) \\ &= \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \cdot \delta x_i \end{aligned}$$

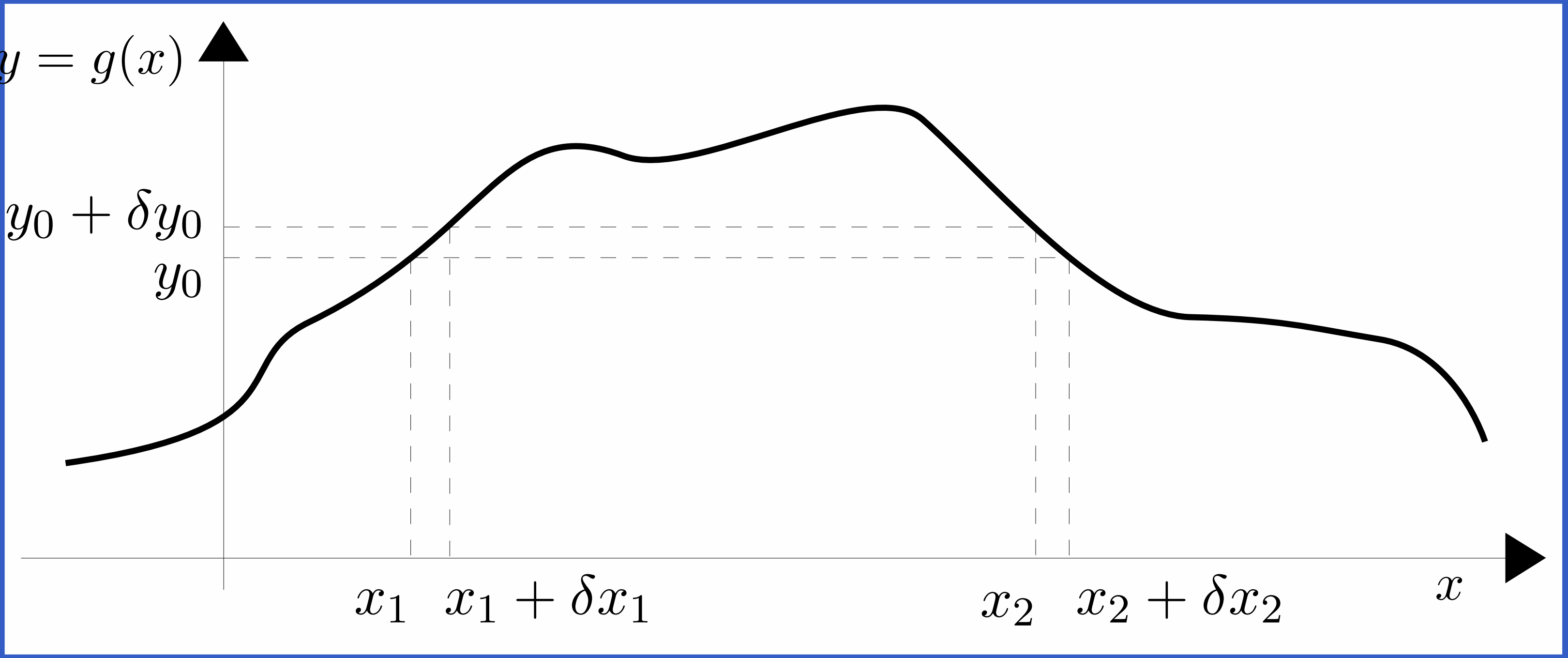
Fonction d'une V.A.



- $$\begin{aligned} P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\}) &= p_Y(y_0) \cdot \delta y_0 \\ &= \textstyle\sum_{\{x_i \mid g(x_i) = y_0\}} P(\{x_i < X \leq x_i + \delta x_i\}) \\ &= \textstyle\sum_{\{x_i \mid g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \cdot \delta x_i \end{aligned}$$
-

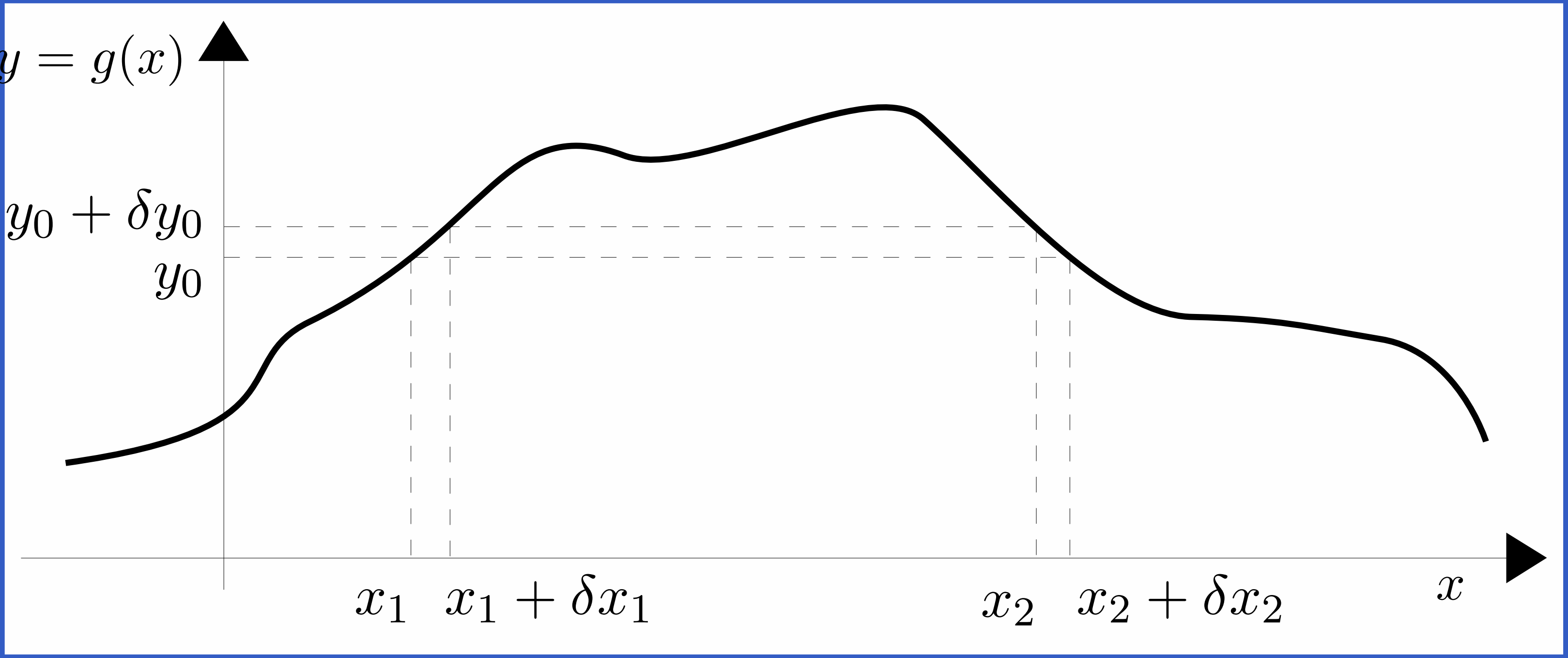
$p_Y(y_0)$

Fonction d'une V.A.



- $$\begin{aligned} P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\}) &= p_Y(y_0) \cdot \delta y_0 \\ &= \textstyle\sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} P(\{x_i < X \leq x_i + \delta x_i\}) \\ &= \textstyle\sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \cdot \delta x_i \end{aligned}$$
- $$p_Y(y_0) = \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \frac{1}{\delta y_0 / \delta x_i}$$

Fonction d'une V.A.



- $$\begin{aligned} P(\{y_0 < Y \leq y_0 + \delta y_0\}) &= p_Y(y_0) \cdot \delta y_0 \\ &= \textstyle\sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} P(\{x_i < X \leq x_i + \delta x_i\}) \\ &= \textstyle\sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \cdot \delta x_i \end{aligned}$$
- $$p_Y(y_0) = \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} p_X(x_i) \frac{1}{\delta y_0 / \delta x_i} = \sum_{\{x_i | g(x_i) = y_0\}} \frac{p_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

Grandeurs statistiques

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p_X(x) \, \mathrm{d}x}$$

- Espérance de $g(X)$

$$\mu_{g(X)} = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, p_X(x) \, \mathrm{d}x$$

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; p_X(x) \, \mathrm{d}x}$$

- Espérance de $g(X)$

$$\mu_{g(X)} = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \; p_X(x) \, \mathrm{d}x$$

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])^2\big] = \mathrm{E}\big[X^2\big] - \mathrm{E}[X]^2}$$

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, p_X(x) \, \mathrm{d}x}$$

- Espérance de $g(X)$

$$\mu_{g(X)} = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, p_X(x) \, \mathrm{d}x$$

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2}$$

- n-ième moment :

$$\mathrm{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, p_X(x) \, \mathrm{d}x$$

Grandeurs statistiques

- Espérance

$$\boxed{\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

- Espérance de $g(X)$

$$\mu_{g(X)} = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

- Variance

$$\boxed{\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}[X]^2}$$

- n-ième moment :

$$\mathrm{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

- n-ième moment centré :

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{E}[X])^n\, p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Fonction linéaire

$$Y = aX + b$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

Fonction linéaire

▼

$$Y = aX + b$$

▼

$$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

$$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[aX + b]$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[aX + b] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)\, p_X(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[aX + b] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)\, p_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x)\,\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Fonction linéaire

- $$Y = aX + b$$

- $$\boxed{\mathrm{E}[Y] = a\mathrm{E}[X] + b}$$

  $$\boxed{\mathrm{var}[Y] = a^2\mathrm{var}[X]} \qquad \boxed{\sigma_Y = |a|\sigma_X}$$

- $$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[aX + b] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)\, p_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&= a \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_X(x)\, \mathrm{d}x + b \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&= a\mathrm{E}[X] + b
\end{aligned}$$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- Densités de probabilité marginales :

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  $$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- Densités de probabilité marginales :
  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}y$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  $$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
- Densités de probabilité marginales :
  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}y$, $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- Densités de probabilité marginales :
  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}y$, $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x$
- $Z = g(X, Y)$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x, y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  $$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
- Densités de probabilité marginales :
  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}y$, $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x$
- $Z = g(X, Y)$
  $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X, Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x,y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  $$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
- Densités de probabilité marginales :
  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y$, $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x$
- $Z = g(X,Y)$
  $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
  $\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$

Deux variables aléatoires

- X, Y : V.A. associées à la *même* expérience aléatoire
- Densité de probabilité conjointe $p_{XY}(x,y)$:
- $$P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\} \cap \{y < Y \leq y + \mathrm{d}y\}) = p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

  $$P(\{a < X \leq b\} \cap \{c < Y \leq d\}) = \int_c^d \int_a^b p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
- Densités de probabilité marginales :
  $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y$, $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x$
- $Z = g(X,Y)$
  $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[g(X,Y)] = \int\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) p_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
  $\mathrm{E}[aX + bY + c] = a\mathrm{E}[X] + b\mathrm{E}[Y] + c$
- Généralisation à n variables aléatoires

V.A. Conditionnées

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- V.A. conditionnée par une V.A.

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- V.A. conditionnée par une V.A.
  - $$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}\,, \qquad \forall y \mid p_Y(y) \neq 0$$

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- V.A. conditionnée par une V.A.
  - $$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}\,, \qquad \forall y \mid p_Y(y) \neq 0$$
  - Approche séquentielle :

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- V.A. conditionnée par une V.A.
  -

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}\,, \qquad \forall y \mid p_Y(y) \neq 0$$

  - Approche séquentielle :
  - $p_{XY}(x,y)$

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- V.A. conditionnée par une V.A.
  - $$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}\,, \qquad \forall y \mid p_Y(y) \neq 0$$
  - Approche séquentielle :
  - $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)$

V.A. Conditionnées

- V.A. conditionnée par un événement $A, P(A) \neq 0$
  - ddpc $p_{X|A}(x)$: $P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}|A) = p_{X|A}(x)\,\mathrm{d}x$
  - cas spécial : si $A = \{X \in C\}$:

$$p_{X|\{X\in C\}}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{P(\{X\in C\})} & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

- V.A. conditionnée par une V.A.
  - $$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}\,, \qquad \forall y \mid p_Y(y) \neq 0$$
  - Approche séquentielle :
  - $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)p_{X|Y}(x|y)$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] = \int x \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] = \int x \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$

- $\mathrm{E}[X] = \int \mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \; p_Y(y) \, \mathrm{d}y$ (théorème d'espérance totale)

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] = \int x \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[X] = \int \mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \; p_Y(y) \, \mathrm{d}y$ (théorème d'espérance totale)
- $\mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}] = \int g(x) \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] = \int x \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[X] = \int \mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \; p_Y(y) \, \mathrm{d}y$ (théorème d'espérance totale)
- $\mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}] = \int g(x) \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[g(X)] = \int \mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}] \; p_Y(y) \, \mathrm{d}y$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] = \int x \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[X] = \int \mathrm{E}[X|\{Y=y\}] \; p_Y(y) \, \mathrm{d}y$ (théorème d'espérance totale)
- $\mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}] = \int g(x) \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[g(X)] = \int \mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}] \; p_Y(y) \, \mathrm{d}y$
- $\mathrm{E}[g(X,Y)|\{Y=y\}] = \int g(x,y) \, p_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x$

Espérance conditionnelle

- $\mathrm{E}[X|\{Y=y\}] = \int x\, p_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[X] = \int \mathrm{E}[X|\{Y=y\}]\ p_Y(y)\,\mathrm{d}y$ (théorème d'espérance totale)
- $\mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}] = \int g(x)\, p_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[g(X)] = \int \mathrm{E}[g(X)|\{Y=y\}]\ p_Y(y)\,\mathrm{d}y$
- $\mathrm{E}[g(X,Y)|\{Y=y\}] = \int g(x,y)\, p_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$
- $\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int \mathrm{E}[g(X,Y)|\{Y=y\}]\ p_Y(y)\,\mathrm{d}y$

Indépendance

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :
- $$\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$$

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x) \ , \ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}$

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x) \ , \ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées
  - $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)]$

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées
  - $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)]$
  - $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$, $\forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées
  - $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)]$
  - $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées
  - $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)]$
  - $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
- $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1, \ldots, x_n$

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \ , \ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x) \ , \ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées
  - $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)]$
  - $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
- $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n) \ , \ \forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$

Indépendance

- Entre deux V.A. X et Y :
- $\boxed{p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ ,\ \forall x, y}$
  - $p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)\ ,\ \forall x$ et $\forall y, p_Y(y) \neq 0$
  - $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\}) \cdot P(\{Y \in B\})$
  - $\boxed{\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]} \Rightarrow \mathrm{cov}[X,Y] = 0$: v.a. non corrélées
  - $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\,\mathrm{E}[h(Y)]$
  - $\boxed{\mathrm{var}[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]}$
- Entre n V.A. $X_1, \ldots, X_n$
- $p_{X_1 \ldots X_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \ldots p_{X_n}(x_n)\ ,\ \forall x_1, \ldots, x_n$
  - $\mathrm{E}[X_1 \ldots X_n] = \mathrm{E}[X_1] \ldots \mathrm{E}[X_n]$
  - $\mathrm{var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{var}[X_1] + \ldots + \mathrm{var}[X_n]$

Statistique Descriptive

Quelques définitions

Quelques définitions

- Population statistique : ensemble d'individus à étudier
  - finie
  - infinie
- Individu / unité statistique
- Caractère / variable statistique
  - qualitatif
  - quantitatif (discret / continu)
- Échantillon : sous-ensemble de la population
- Fréquences
  - absolues (effectifs)
  - relatives (proportions)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max - min`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max - min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max - min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)
  - Variance de l'échantillon : (`var`)

    $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max` - `min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)
  - Variance de l'échantillon : (`var`)

    $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max - min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)
  - Variance de l'échantillon : (`var`)

    $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max` - `min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)
  - Variance de l'échantillon : (`var`)

    $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)
  - Écart-type de l'échantillon : s (`sd`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max` - `min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)
  - Variance de l'échantillon : (`var`)

    $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)
  - Écart-type de l'échantillon : s (`sd`)
  - Écart absolu médian par rapport à la médiane (`mad`)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (`mean`)
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties (`median`)
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties (`quantile`)
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3 (`summary`)
  - Mode(s) : la (les) valeur(s) avec la plus grande fréquence
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $x_{(n)} - x_{(1)}$ (`max` - `min`)
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$ (`IRQ`)
  - Variance de l'échantillon : (`var`)

    $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)
  - Écart-type de l'échantillon : s (`sd`)
  - Écart absolu médian par rapport à la médiane (`mad`)
  - Coefficient de variation : $s/\bar{x}$

Exemple : notes TP Élec 2006-2007

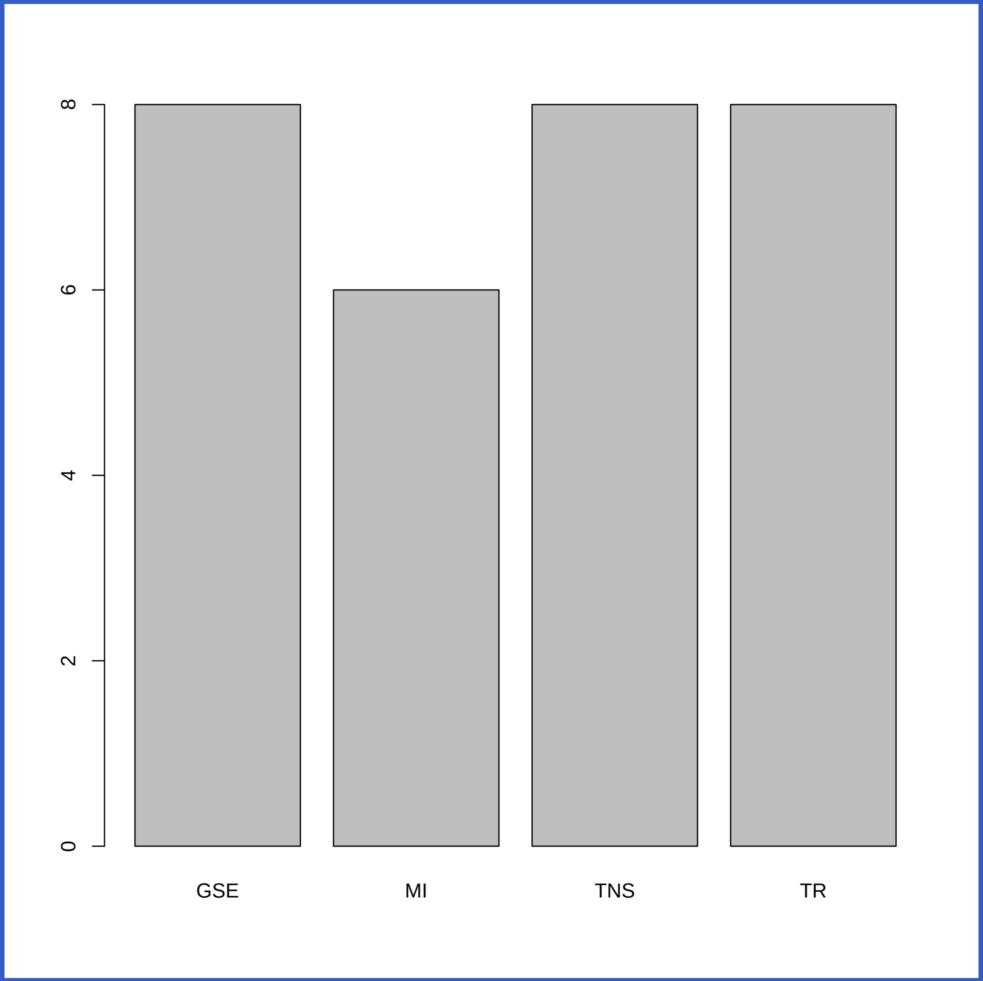
- Population : étudiants Élec4, 2006-2007
- Caractère étudié :

  1. option (qualitatif)
  2. moyenne tp (quantitatif)
  3. contrôle final (quantitatif)

- Échantillon : 30 étudiants

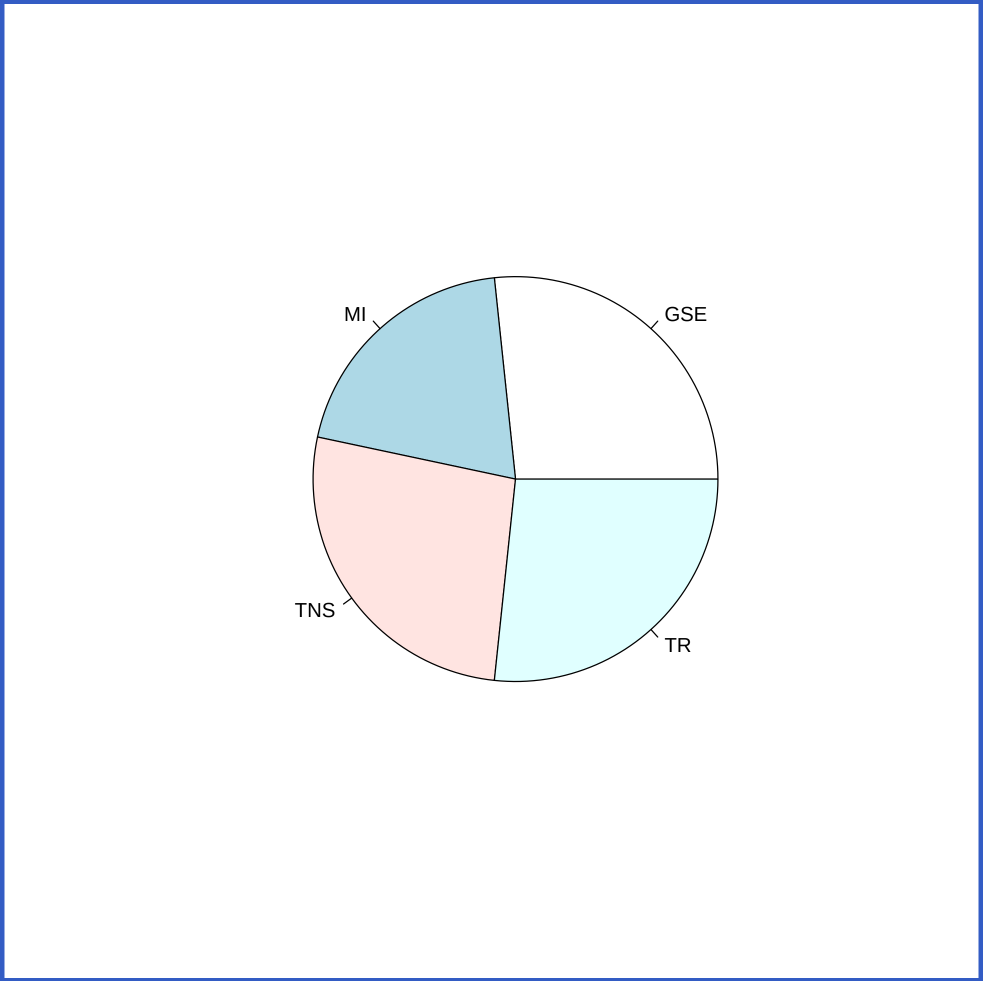
[Extra] « Barplot »

Caractère : option



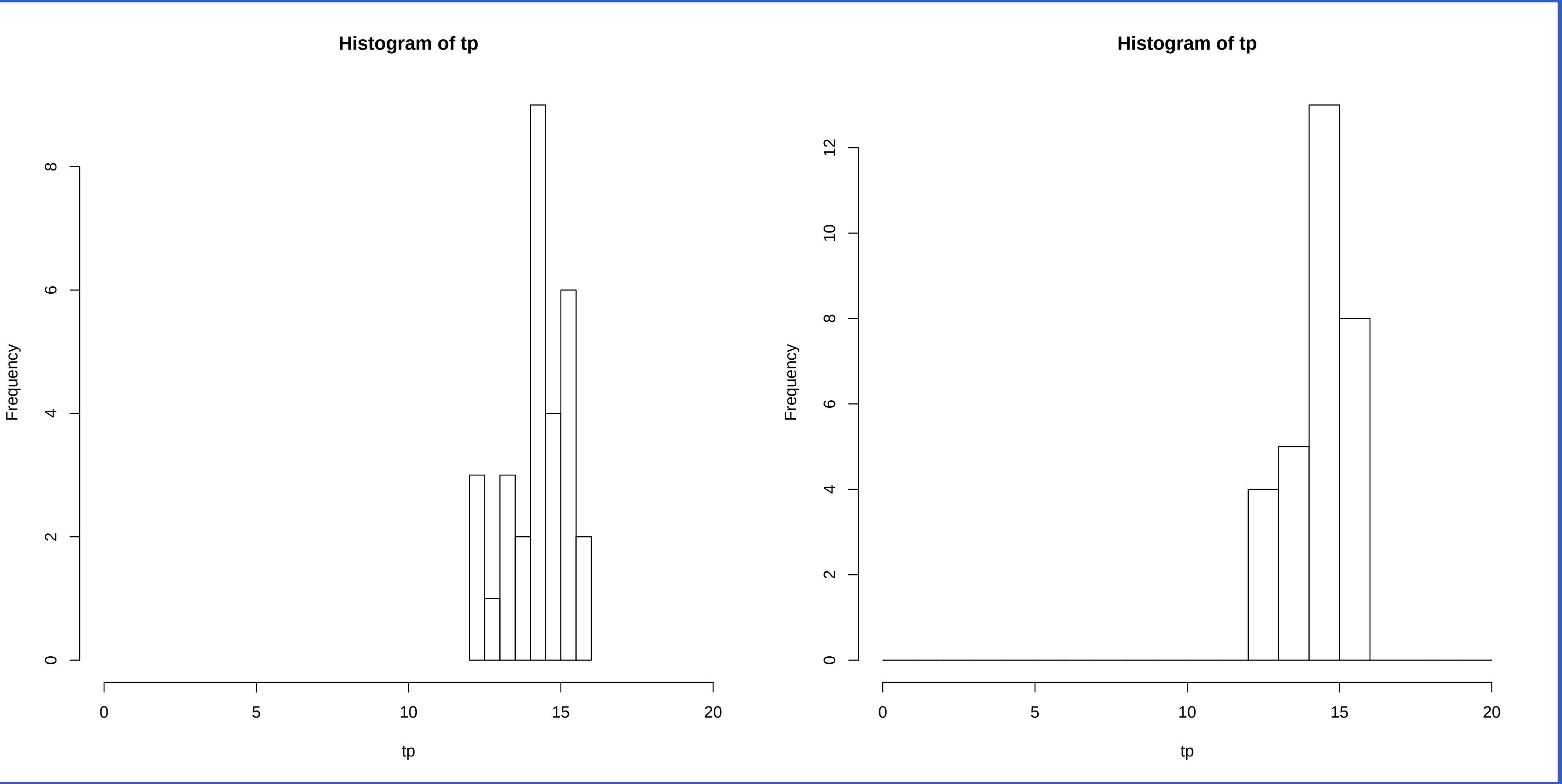
[Extra] « Piechart »

Caractère : option



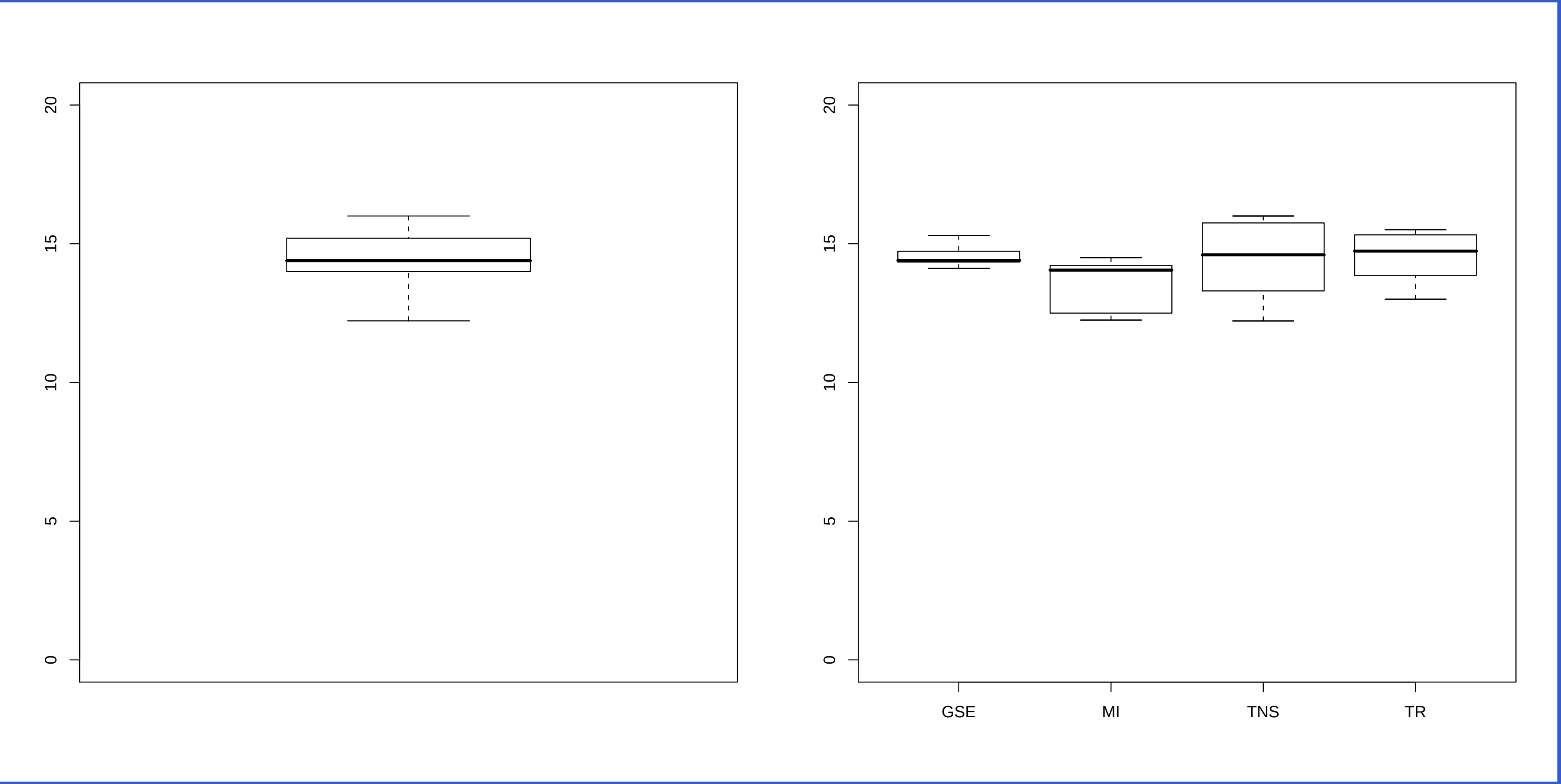
[Extra] Histogrammes

Caractère : moyenne tp (classes différentes)



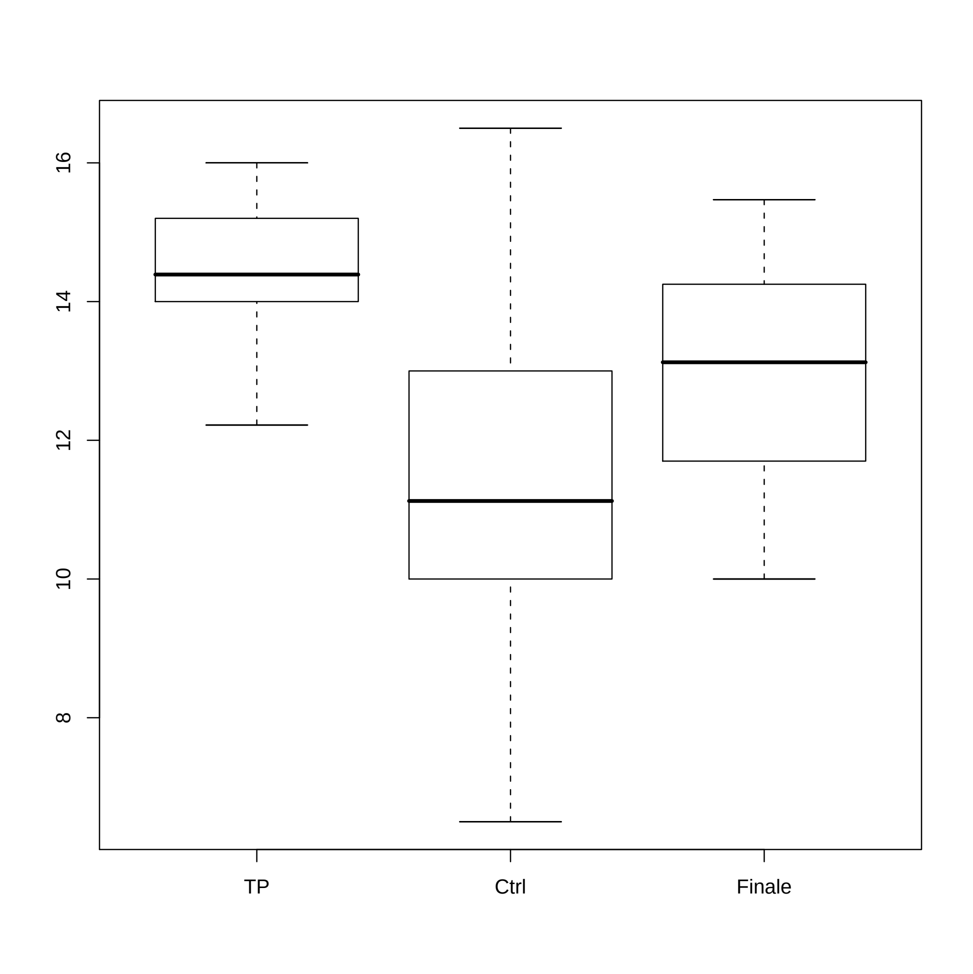
[Extra] « Boxplot » (boîte à moustache)

Caractère : moyenne tp



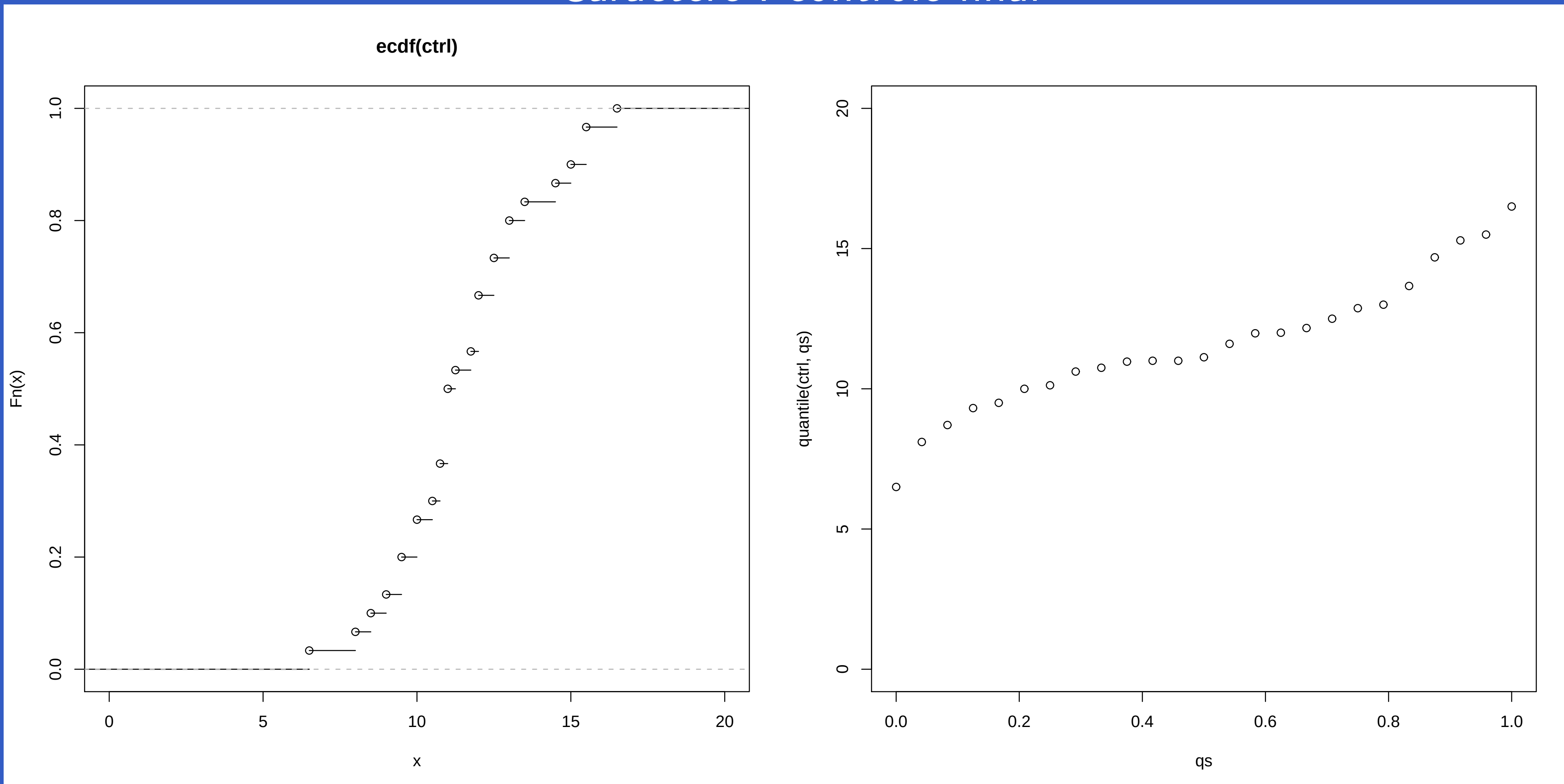
[Extra] « Boxplots »

Caractère : moyenne tp / contrôle final / note finale (50-50)



[Extra] Fréquence relative cumulée / quantiles

Caractère : contrôle final



$$x \xrightarrow{F_X} F_X(x) = P(X \leq x) = p$$

$$p \xrightarrow{Q_X = F_X^{-1}} Q_X(p) = x$$

Statistique Inférentielle : introduction

Objectif

Obtenir, à partir de mesures sur une *partie* de la population (échantillon), des informations (de caractère *probabiliste*) sur la *totalité* de celle-ci.

Objectif

Obtenir, à partir de mesures sur une *partie* de la population (échantillon), des informations (de caractère *probabiliste*) sur la *totalité* de celle-ci.

$$\text{Population} \xrightarrow{\text{proba}} \text{Échantillon}$$

Objectif

Obtenir, à partir de mesures sur une *partie* de la population (échantillon), des informations (de caractère *probabiliste*) sur la *totalité* de celle-ci.

$$\text{Population} \xrightarrow{\text{proba}} \text{Échantillon}$$

$$\text{Échantillon} \xrightarrow{\text{stat. inf.}} \text{Population}$$

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif
     procédure naturelle ou obligatoire (contrôle destructif)

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif
     procédure naturelle ou obligatoire (contrôle destructif)
- Population de taille finie + éch. non exhaustif

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif
     procédure naturelle ou obligatoire (contrôle destructif)
- Population de taille finie + éch. non exhaustif
  $\Rightarrow$ population de taille infinie

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif
     procédure naturelle ou obligatoire (contrôle destructif)
- Population de taille finie + éch. non exhaustif
  $\Rightarrow$ population de taille infinie
- Éch. exhaustif de taille n + Population de taille $N \gg n$

Échantillonnage : définition

Choisir *au hasard* n individus de la population afin d'étudier un ou plusieurs caractères.

- Deux types d'échantillonnage :
  1. *avec* remplacement de l'individu choisi
     traitement théorique plus simple
  2. *sans* remplacement : échantillonnage exhaustif
     procédure naturelle ou obligatoire (contrôle destructif)
- Population de taille finie + éch. non exhaustif
  $\Rightarrow$ population de taille infinie
- Éch. exhaustif de taille n + Population de taille $N \gg n$
  $\Rightarrow$ échantillonnage non exhaustif

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

  À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

  $\boxed{\text{À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !}}$

$$\text{population} \xrightarrow{\text{éch.}} \text{individu} \xrightarrow{\text{caract.}} \text{valeur}$$

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

  $\boxed{\text{À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !}}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{population} & \xrightarrow{\text{éch.}} & \text{individu} & \xrightarrow{\text{caract.}} & \text{valeur} \\ \Omega & \xrightarrow{\text{éch.}} & \omega & \xrightarrow{\text{caract.}} & x \end{array}$$

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

  $\boxed{\text{À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !}}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{population} & \xrightarrow{\text{éch.}} & \text{individu} & \xrightarrow{\text{caract.}} & \text{valeur} \\ \Omega & \xrightarrow{\text{éch.}} & \omega & \xrightarrow{\text{caract.}} & x \end{array}$$

- Expérience aléatoire : choisir au hasard un individu de la population

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

$\boxed{\text{À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !}}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{population} & \xrightarrow{\text{éch.}} & \text{individu} & \xrightarrow{\text{caract.}} & \text{valeur} \\ \Omega & \xrightarrow{\text{éch.}} & \omega & \xrightarrow{\text{caract.}} & x \end{array}$$

- Expérience aléatoire : choisir au hasard un individu de la population
- Variable aléatoire X associée : le caractère étudié (quantitatif / qualitatif)

Une expérience aléatoire

Choisir *au hasard* un individu de la population. Obtenir une valeur du caractère étudié.

- Valeurs possibles du caractère : celles présentes dans la population
- Probabilité associée : fréquence relative des individus possedant cette valeur dans la population

$\boxed{\text{À condition que chaque individu ait la même probabilité d'être choisi !}}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{population} & \xrightarrow{\text{éch.}} & \text{individu} & \xrightarrow{\text{caract.}} & \text{valeur} \\ \Omega & \xrightarrow{\text{éch.}} & \omega & \xrightarrow{\text{caract.}} & x \end{array}$$

- Expérience aléatoire : choisir au hasard un individu de la population
- Variable aléatoire X associée : le caractère étudié (quantitatif / qualitatif)
- Fonction/densité de probabilité $p_X(x)$: dépend de la population

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !

  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \dots, n)$

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) :

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \ldots p_X(x_n)$$

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois ! *ensemble* de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \ldots p_X(x_n)$$

c-à-d : *avec* remplacement + *même probabilité* de choisir chaque individu

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \ldots p_X(x_n)$$

  c-à-d : *avec* remplacement + *même probabilité* de choisir chaque individu
- $\boxed{\text{Statistique}\textit{s} \text{ : des v.a., fonctions des } X_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ d'un échantillon}}$

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \ldots p_X(x_n)$$

  c-à-d : *avec* remplacement + *même probabilité* de choisir chaque individu
- $\boxed{\text{Statistique}\textit{s} \text{ : des v.a., fonctions des } X_i \ (i = 1, \ldots, n) \text{ d'un échantillon}}$
  (théorie d'échantillonnage : quelles valeurs et quelles probabilités ?)

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois ! *ensemble* de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \ldots p_X(x_n)$$

  c-à-d : *avec* remplacement + *même probabilité* de choisir chaque individu
- Statistique*s* : des v.a., fonctions des X_i $(i = 1, \ldots, n)$ d'un échantillon (théorie d'échantillonnage : quelles valeurs et quelles probabilités ?)
- Obtenir un échantillon, de taille n : ensemble de n valeurs x_i $(i = 1, \ldots, n)$ $\longrightarrow$ Statistique Descriptive !

Échantillon : ensemble de variables aléatoires

- « Population $p_X(x)$ » : génère des v.a.
- Observation d'un caractère d'un individu : v.a. X, loi $p_X(x)$
- Échantillonnage de taille n : la même expérience aléatoire répétée n fois !
  ensemble de n v.a. X_i $(i = 1, \ldots, n)$
- Échantillonnage *aléatoire* (non biaisé) : n v.a. *identiques* et *indépendantes* (iid)

$$p_{X_1}(x) = p_{X_2}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

$$p_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) \ldots p_X(x_n)$$

  c-à-d : *avec* remplacement + *même probabilité* de choisir chaque individu
- Statistique*s* : des v.a., fonctions des X_i $(i = 1, \ldots, n)$ d'un échantillon
  (théorie d'échantillonnage : quelles valeurs et quelles probabilités ?)
- Obtenir un échantillon, de taille n :
  ensemble de n valeurs x_i $(i = 1, \ldots, n)$ $\longrightarrow$ Statistique Descriptive !
- Expérience mentale : obtenir une infinité d'échantillons

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles $(k = 4)$: Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles $(k = 9)$: D_1, D_2, $\ldots$, D_5 (médiane), $\ldots$, D_9

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, …, D_5 (médiane), …, D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$
  - Variance de l'échantillon :

    $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$
  - Variance de l'échantillon :
    $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$
  - Variance de l'échantillon :
    $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, $\ldots$, D_5 (médiane), $\ldots$, D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$
  - Variance de l'échantillon :
    $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)
  - Écart-type de l'échantillon : S

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$
  - Variance de l'échantillon :
    $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)
  - Écart-type de l'échantillon : S
  - Écart absolu médian par rapport à la médiane

Paramètres statistiques d'un échantillon

- Mesures de tendance centrale (position)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - Médiane : partage les valeurs en deux parties
  - Quantiles : partagent les valeurs en k parties
  - Quartiles ($k = 4$) : Q_1, Q_2 (médiane), Q_3
  - Déciles ($k = 9$) : D_1, D_2, ..., D_5 (médiane), ..., D_9
- Statistiques d'ordre : $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ où $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$
- Mesures de dispersion
  - Étendue : $X_{(n)} - X_{(1)}$
  - Intervalle interquartile (IQR) : $Q_3 - Q_1$
  - Variance de l'échantillon :
    $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}$ (attn. si $s/\bar{x} \ll 1$)
  - Écart-type de l'échantillon : S
  - Écart absolu médian par rapport à la médiane
  - Coefficient de variation : $S/\bar{X}$

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »
  - Réponses possibles : « oui » / « non »

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »
  - Réponses possibles : « oui » / « non »
  - Population : 2 « types » d'individus ; fréquences relatives π_j, $1 - \pi_j$

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »
  - Réponses possibles : « oui » / « non »
  - Population : 2 « types » d'individus ; fréquences relatives π_j, $1 - \pi_j$
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à 2 valeurs $(1 =$ « oui », $0 =$ « non »$)$;
    probabilités associées π_j, $1 - \pi_j$

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »
  - Réponses possibles : « oui » / « non »
  - Population : 2 « types » d'individus ; fréquences relatives π_j, $1 - \pi_j$
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à 2 valeurs $(1 =$ « oui », $0 =$ « non »$)$;
    probabilités associées π_j, $1 - \pi_j$
  - X : v.a.d. de Bernoulli, de paramètre π_j

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \dots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »
  - Réponses possibles : « oui » / « non »
  - Population : 2 « types » d'individus ; fréquences relatives π_j, $1 - \pi_j$
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à 2 valeurs ($1 =$ « oui », $0 =$ « non ») ;
    probabilités associées π_j, $1 - \pi_j$
  - X : v.a.d. de Bernoulli, de paramètre π_j
  - Échantillon de taille n :
    Moyenne $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Cas spécial : caractère qualitatif (les proportions)

- Étudier un caractère qualitatif à M modalités (réponses possibles)
  - Population : M « types » d'individus ; M fréquences relatives π_j
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à M valeurs ; probabilités associées π_j $(j = 1, \ldots, M)$
- Autre approche (cas par cas) :
  - Pour chaque modalité du caractère, étudier le nouveau caractère « l'individu présente la modalité j du caractère initial »
  - Réponses possibles : « oui » / « non »
  - Population : 2 « types » d'individus ; fréquences relatives π_j, $1 - \pi_j$
  - Échantillonnage aléatoire d'un individu :
    v.a.d. X à 2 valeurs $(1 =$ « oui », $0 =$ « non »$)$;
    probabilités associées π_j, $1 - \pi_j$
  - X : v.a.d. de Bernoulli, de paramètre π_j
  - Échantillon de taille n :
    Moyenne $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \triangleq \hat{P}$ proportion de « oui » dans l'échantillon

Statistique inférentielle : feuille de route

Théorie d'échantillonnage : Population $\longrightarrow$ Échantillon

Statistique inférentielle : Échantillon $\longrightarrow$ Population

Théorie d'échantillonnage : Population $\longrightarrow$ Échantillon

Statistique inférentielle : Échantillon $\longrightarrow$ Population

Échantillon		Population $p_X(x)$
v.a.	valeur	paramètre
une population		
$\bar{X}$ S^2	$m = \bar{x}$ s^2	$\mu_X = \mathrm{E}[X]$ $\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$
$\hat{P}$	$\hat{p}$	π
deux populations		
$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ S_2^2/S_1^2	$m_2 - m_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ $(s_2/s_1)^2$	$\mu_2 - \mu_1$ $(\sigma_2/\sigma_1)^2$
$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	$\pi_2 - \pi_1$

Statistique inférentielle : feuille de route

Théorie d'échantillonnage : Population $\longrightarrow$ Échantillon
Statistique inférentielle : Échantillon $\longrightarrow$ Population

Échantillon		Population $p_X(x)$
v.a.	valeur	paramètre
une population		
$\bar{X}$ S^2	$m = \bar{x}$ s^2	$\mu_X = \mathrm{E}[X]$ $\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$
$\hat{P}$	$\hat{p}$	π
deux populations		
$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ S_2^2/S_1^2	$m_2 - m_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ $(s_2/s_1)^2$	$\mu_2 - \mu_1$ $(\sigma_2/\sigma_1)^2$
$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	$\pi_2 - \pi_1$

- Estimer les paramètres de la population

Statistique inférentielle : feuille de route

Théorie d'échantillonnage : Population $\longrightarrow$ Échantillon

Statistique inférentielle : Échantillon $\longrightarrow$ Population

Échantillon		Population $p_X(x)$
v.a.	valeur	paramètre
une population		
$\bar{X}$ S^2	$m = \bar{x}$ s^2	$\mu_X = \mathrm{E}[X]$ $\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$
$\hat{P}$	$\hat{p}$	π
deux populations		
$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ S_2^2/S_1^2	$m_2 - m_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ $(s_2/s_1)^2$	$\mu_2 - \mu_1$ $(\sigma_2/\sigma_1)^2$
$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	$\pi_2 - \pi_1$

- Estimer les paramètres de la population
- Calculer des intervalles de confiance

Statistique inférentielle : feuille de route

Théorie d'échantillonnage : Population $\longrightarrow$ Échantillon

Statistique inférentielle : Échantillon $\longrightarrow$ Population

Échantillon		Population $p_X(x)$
v.a.	valeur	paramètre
une population		
$\bar{X}$ S^2	$m = \bar{x}$ s^2	$\mu_X = \mathrm{E}[X]$ $\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X]$
$\hat{P}$	$\hat{p}$	π
deux populations		
$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$ S_2^2/S_1^2	$m_2 - m_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ $(s_2/s_1)^2$	$\mu_2 - \mu_1$ $(\sigma_2/\sigma_1)^2$
$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	$\pi_2 - \pi_1$

- Estimer les paramètres de la population
- Calculer des intervalles de confiance
- Formuler des hypothèses et les tester

Distribution uniforme

Distribution uniforme

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Distribution uniforme

- $$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- $$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}(a+b)$$

Distribution uniforme

- $$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- $$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}(a+b)$$

- $$\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \frac{1}{12}(a-b)^2$$

Distribution uniforme

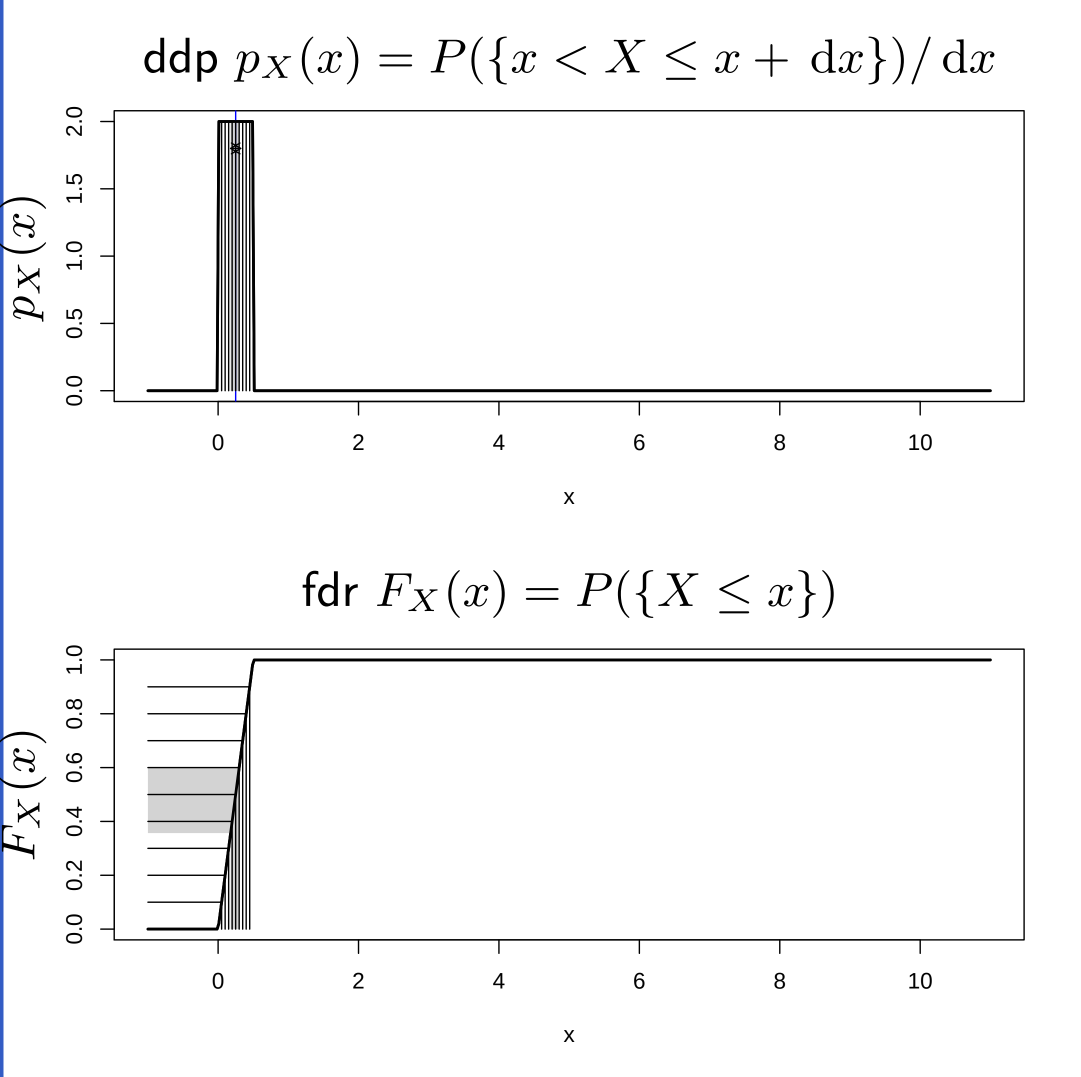
- $$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

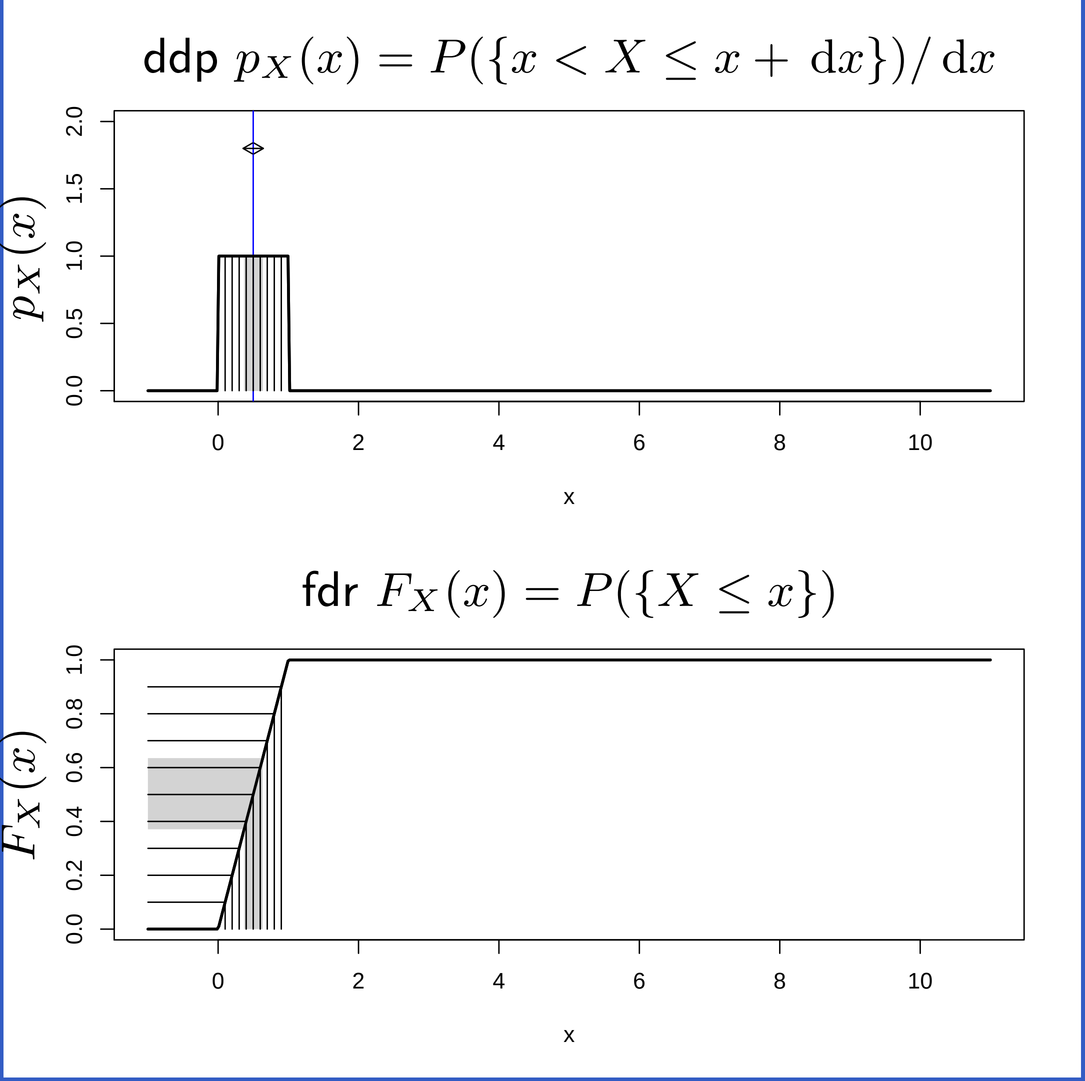
- $$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2}(a+b)$$

- $$\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2 = \frac{1}{12}(a-b)^2$$

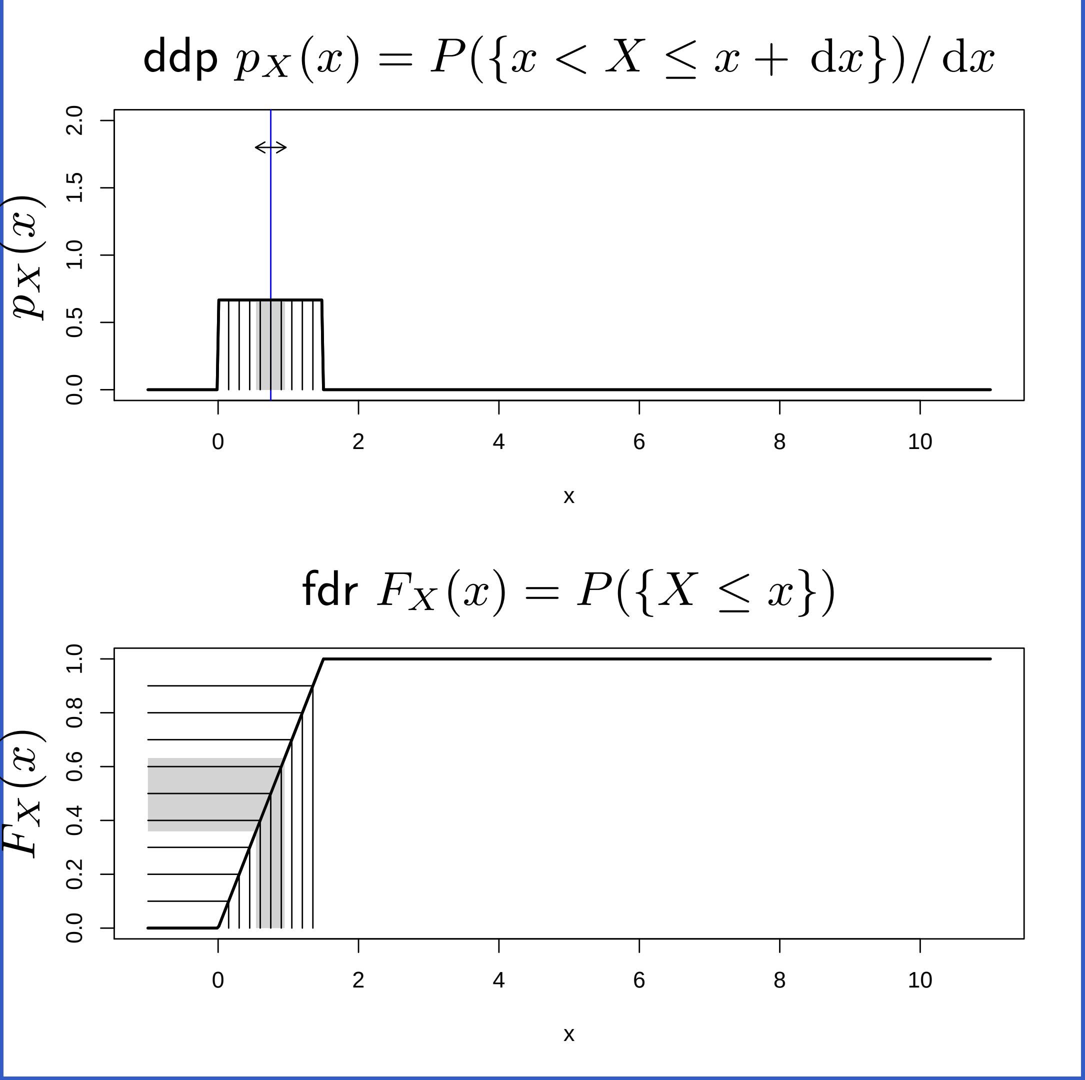
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Distribution uniforme

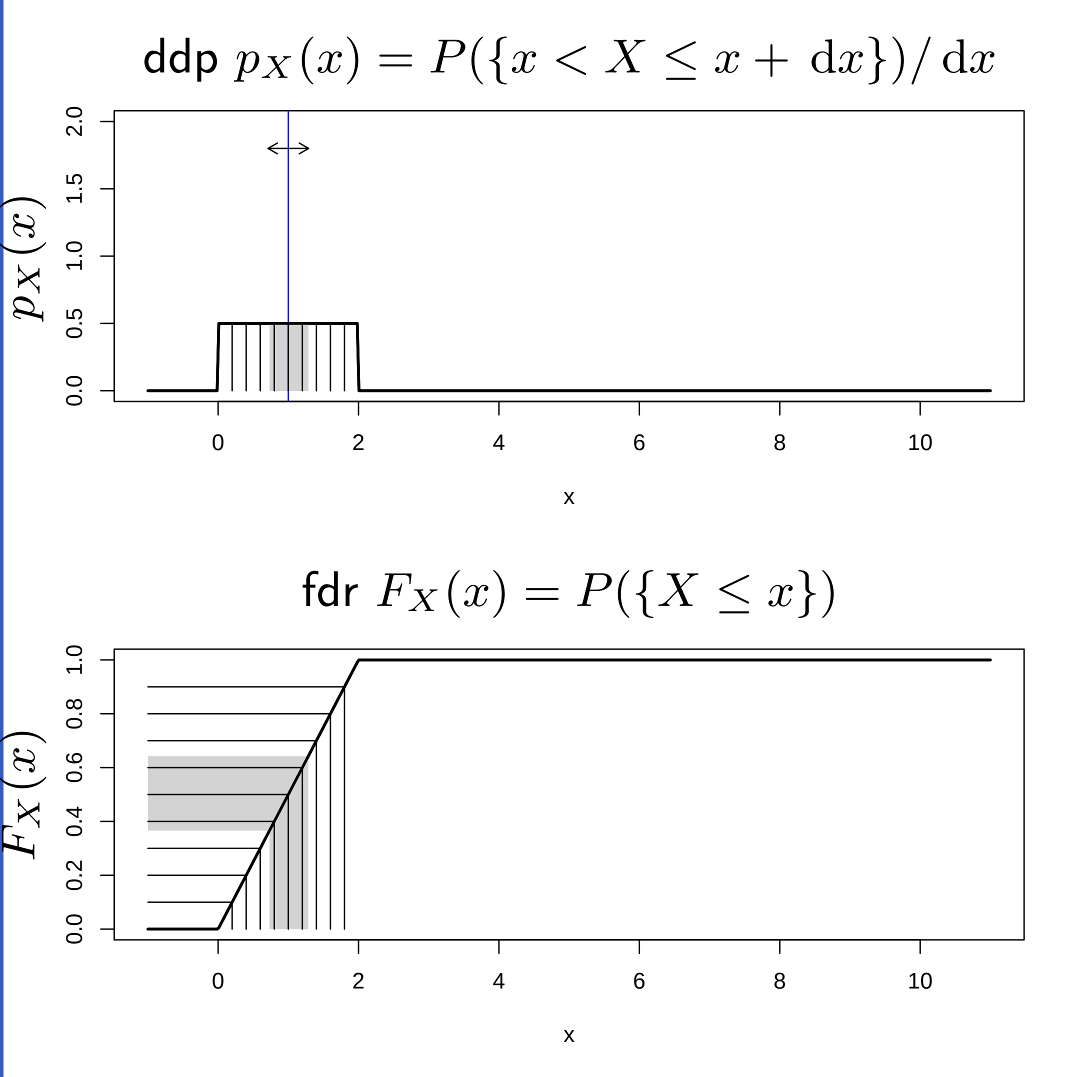



ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})/\,\mathrm{d}x$
$p_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
2
4
6
8
10
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
x

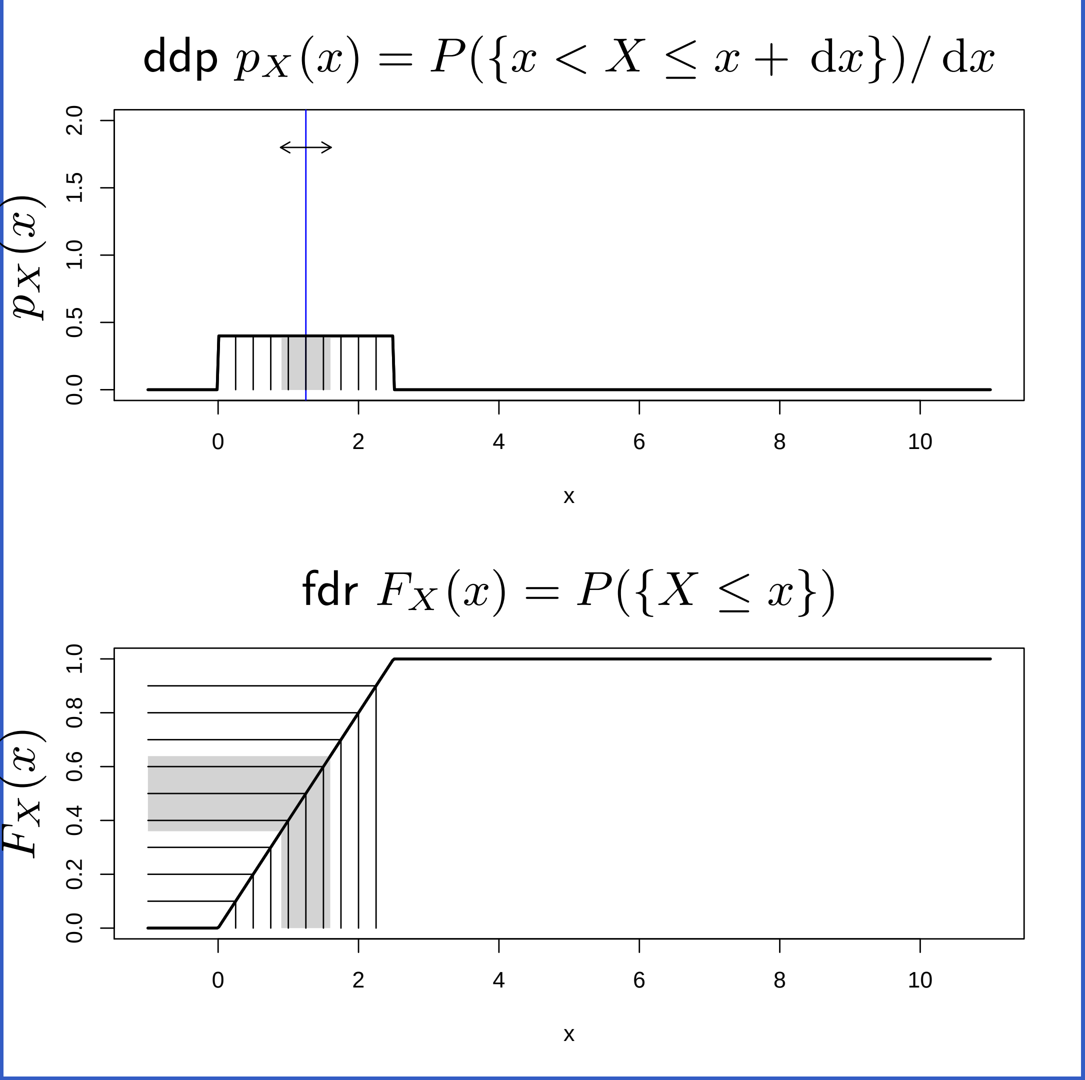
Distribution uniforme



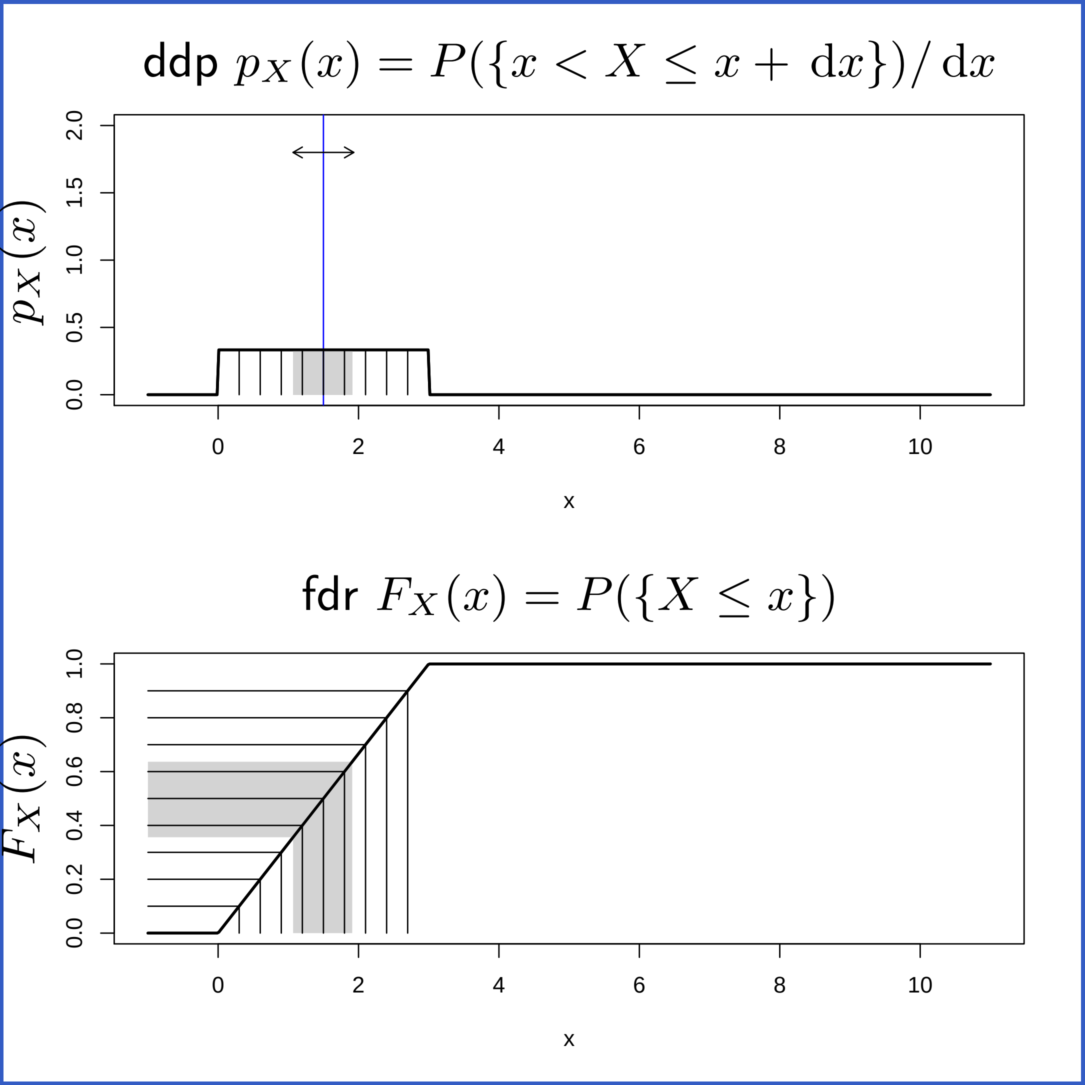
Distribution uniforme



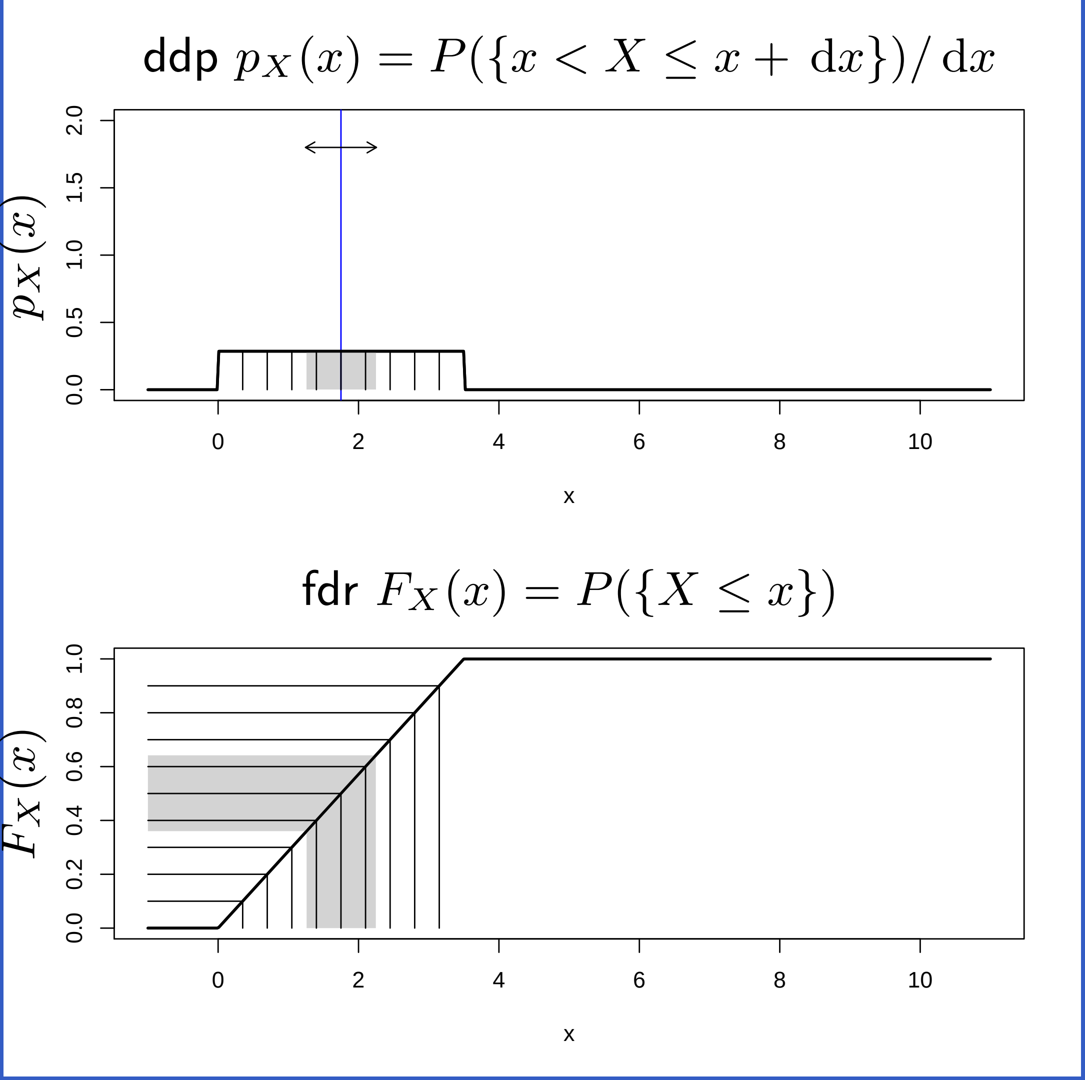
Distribution uniforme



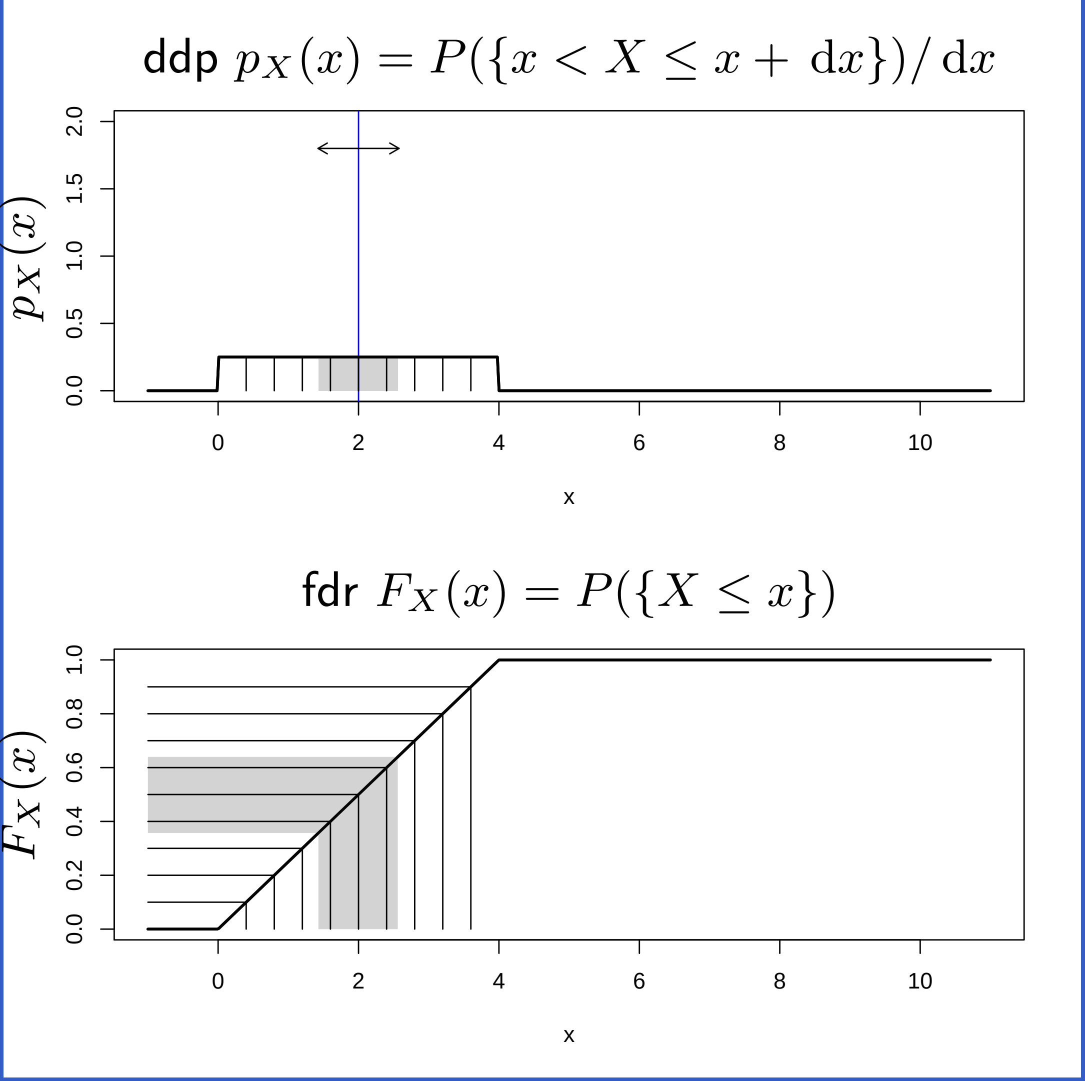
Distribution uniforme



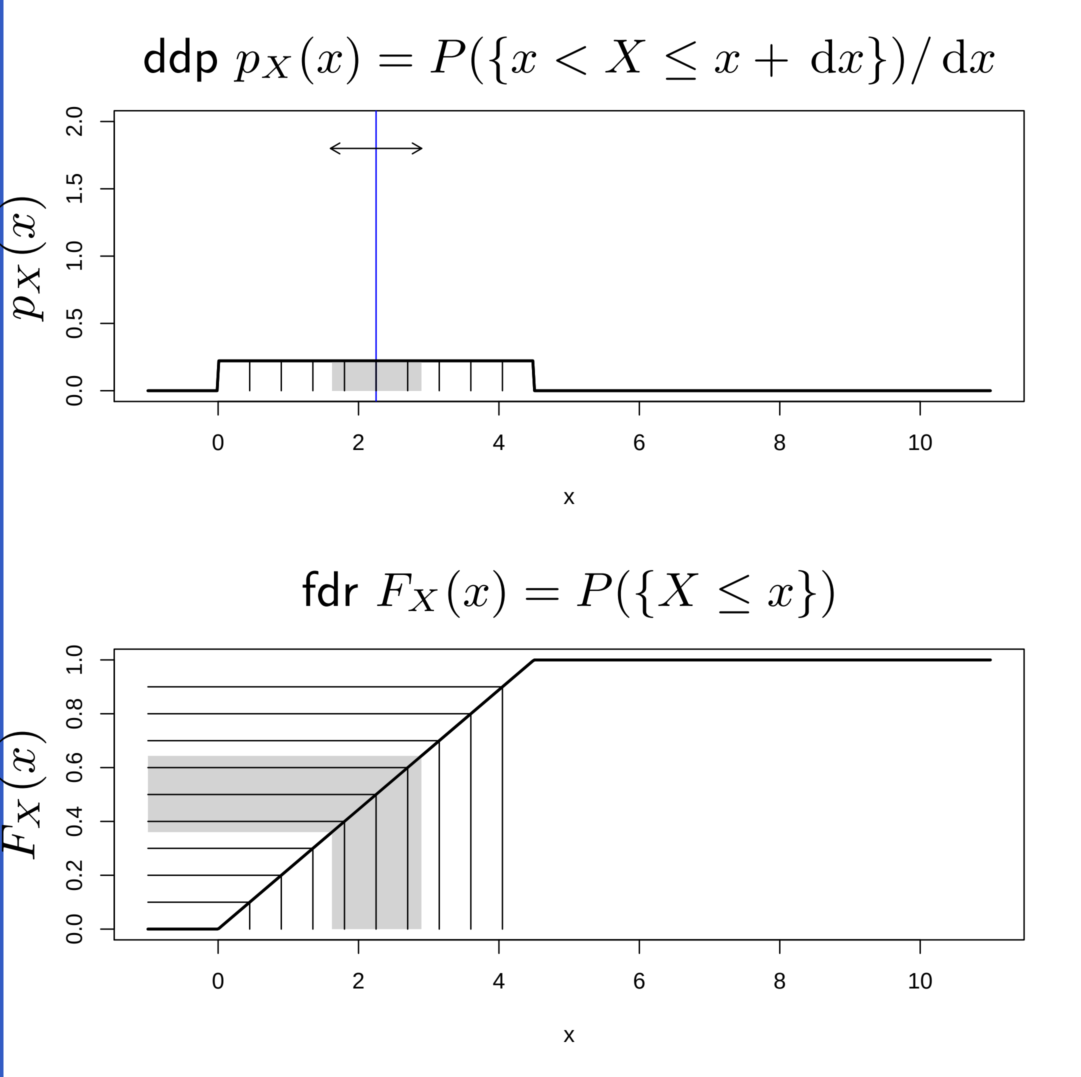
Distribution uniforme



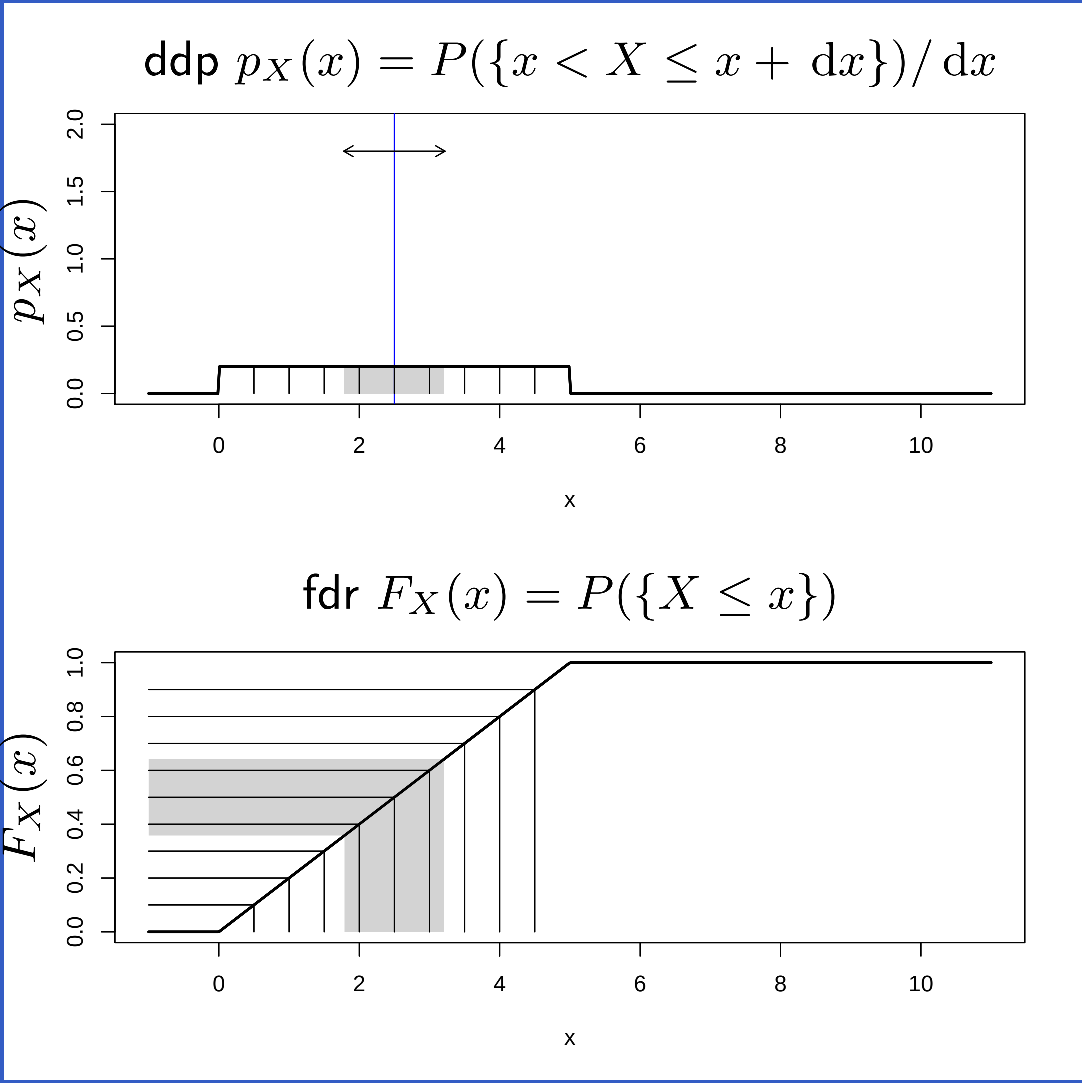
Distribution uniforme



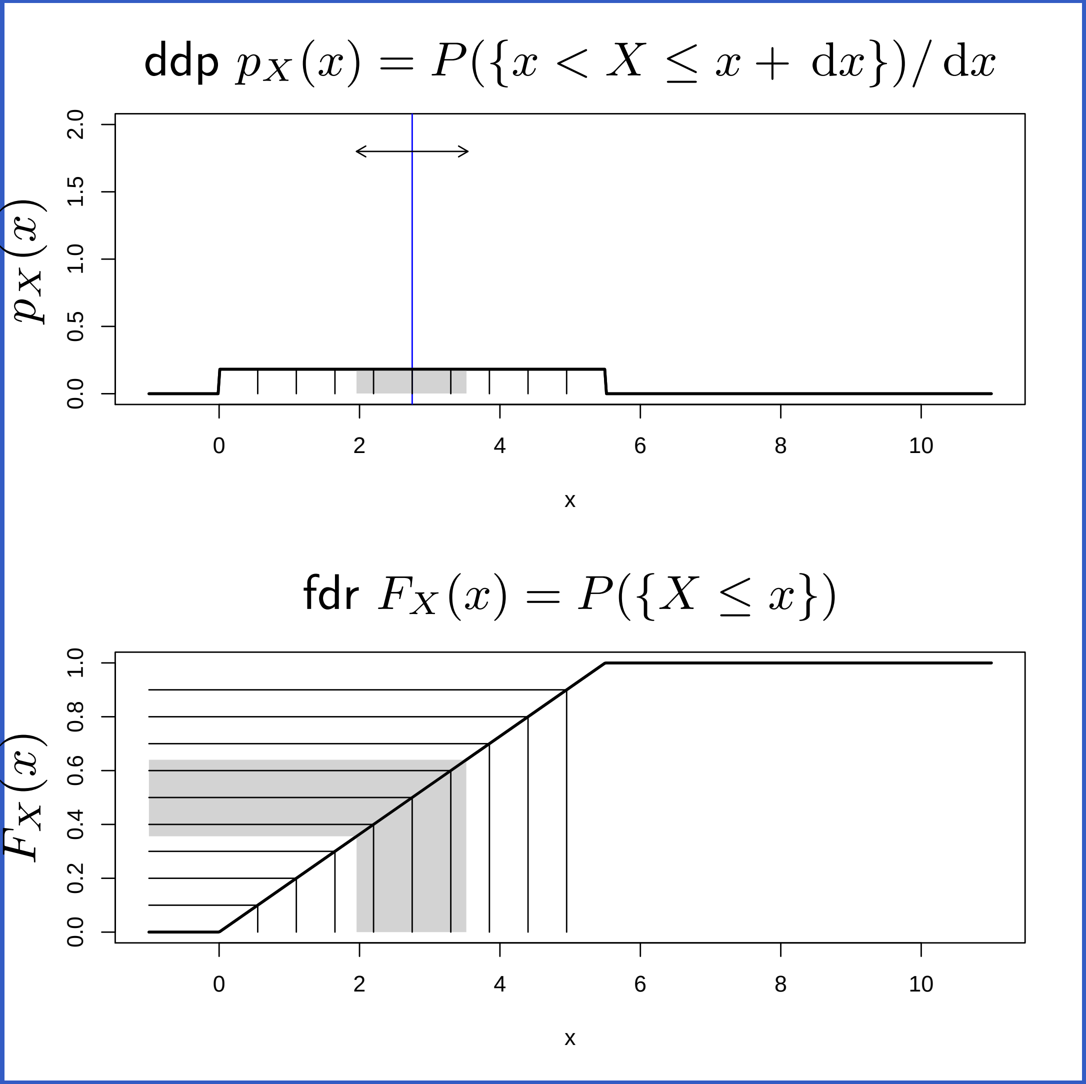
Distribution uniforme



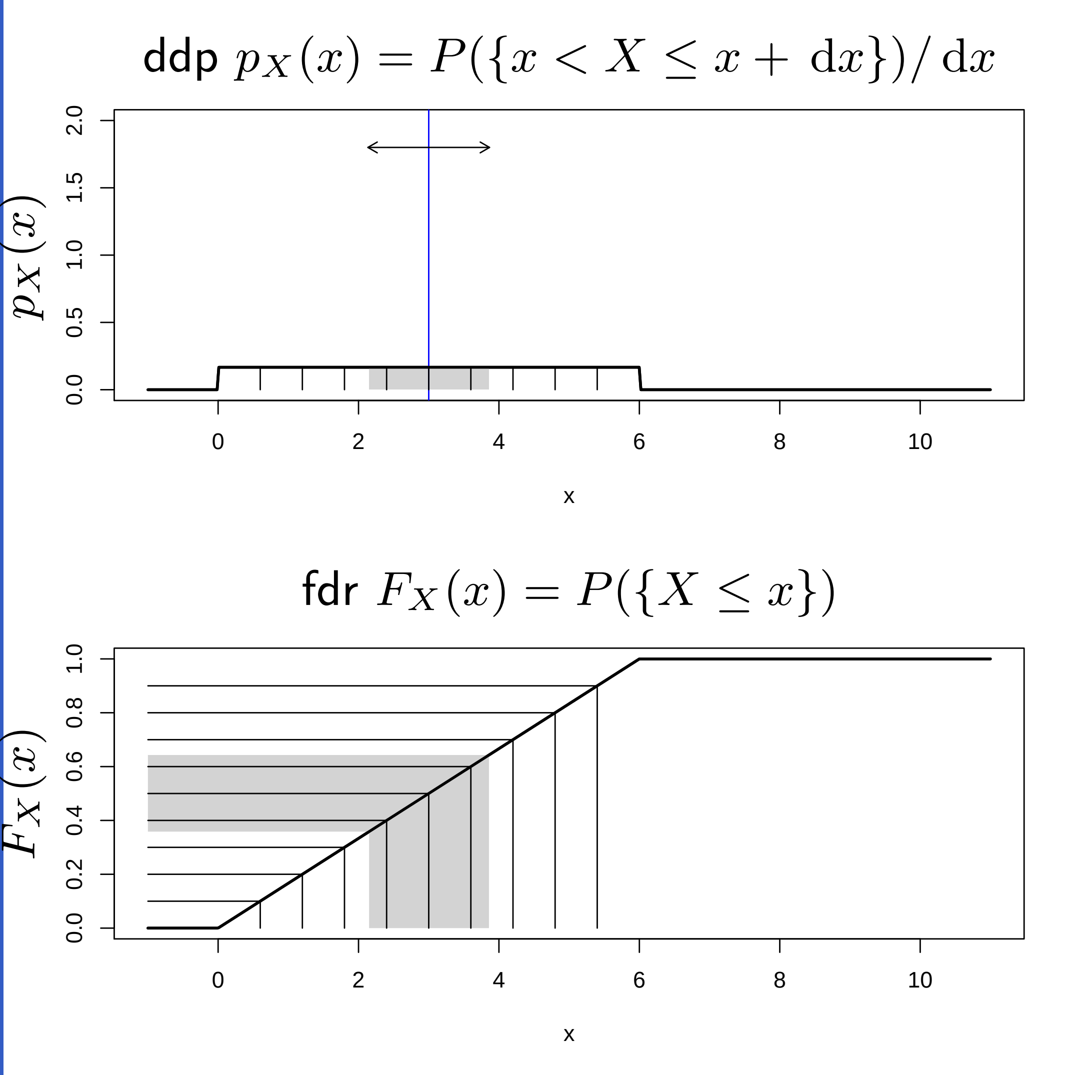
Distribution uniforme

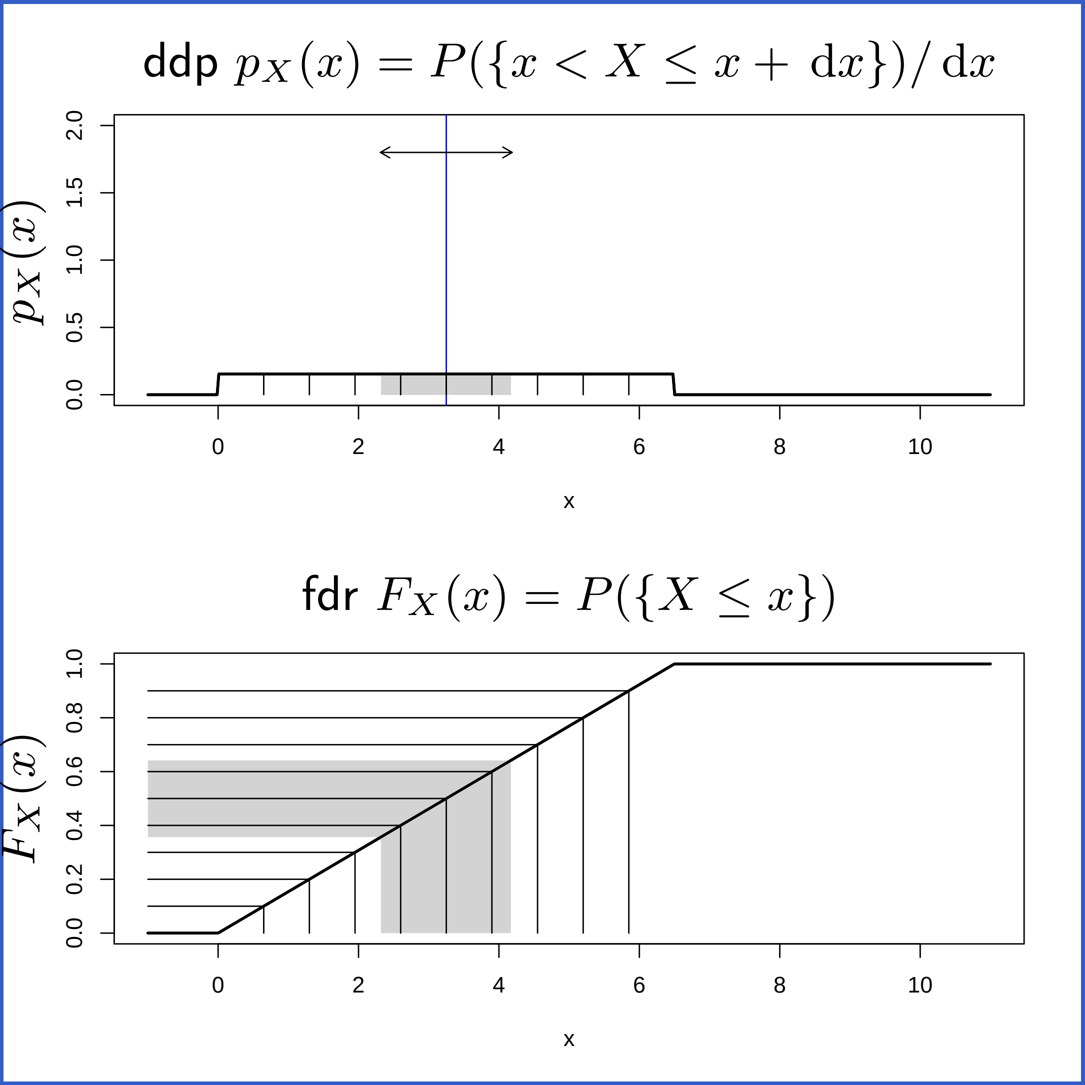


Distribution uniforme

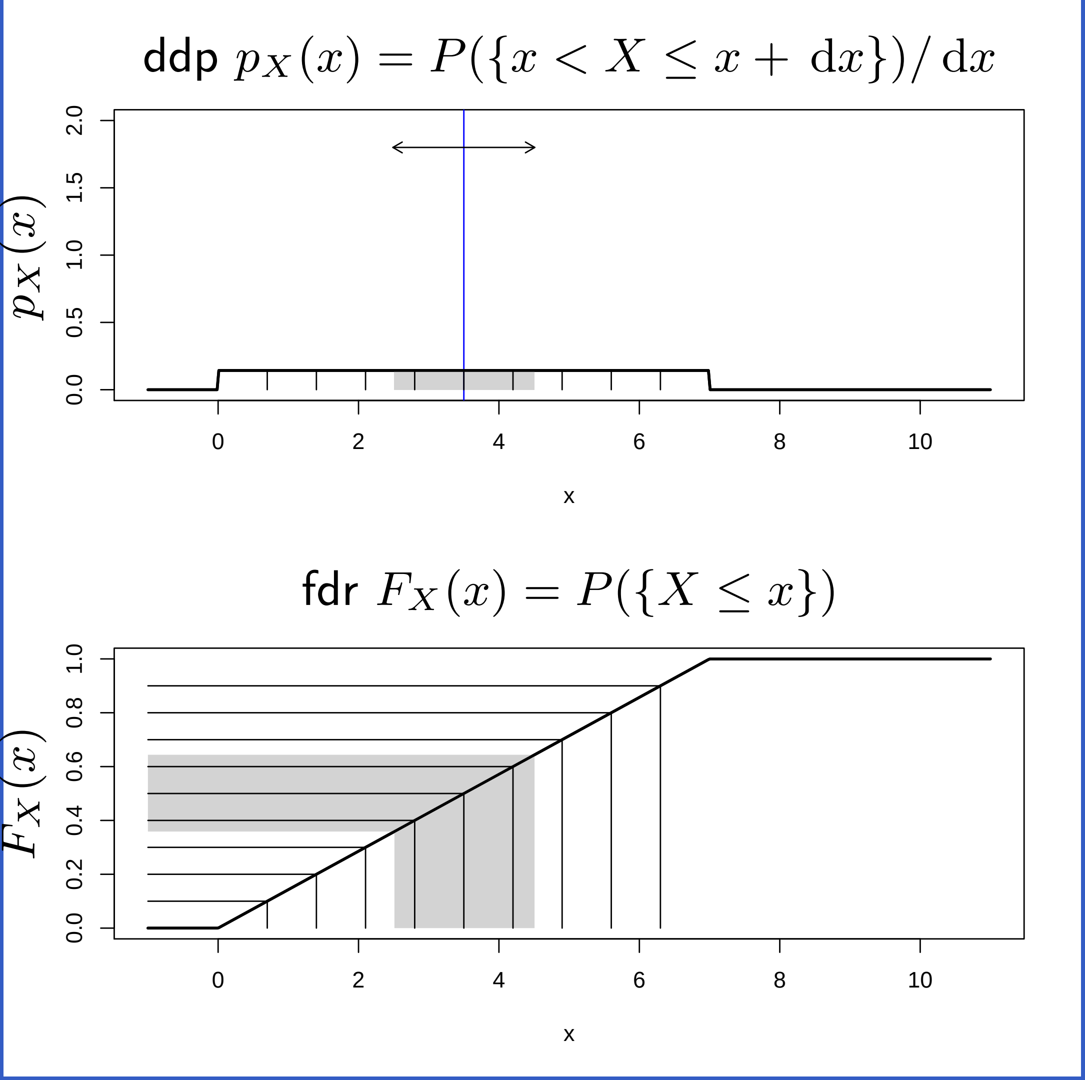


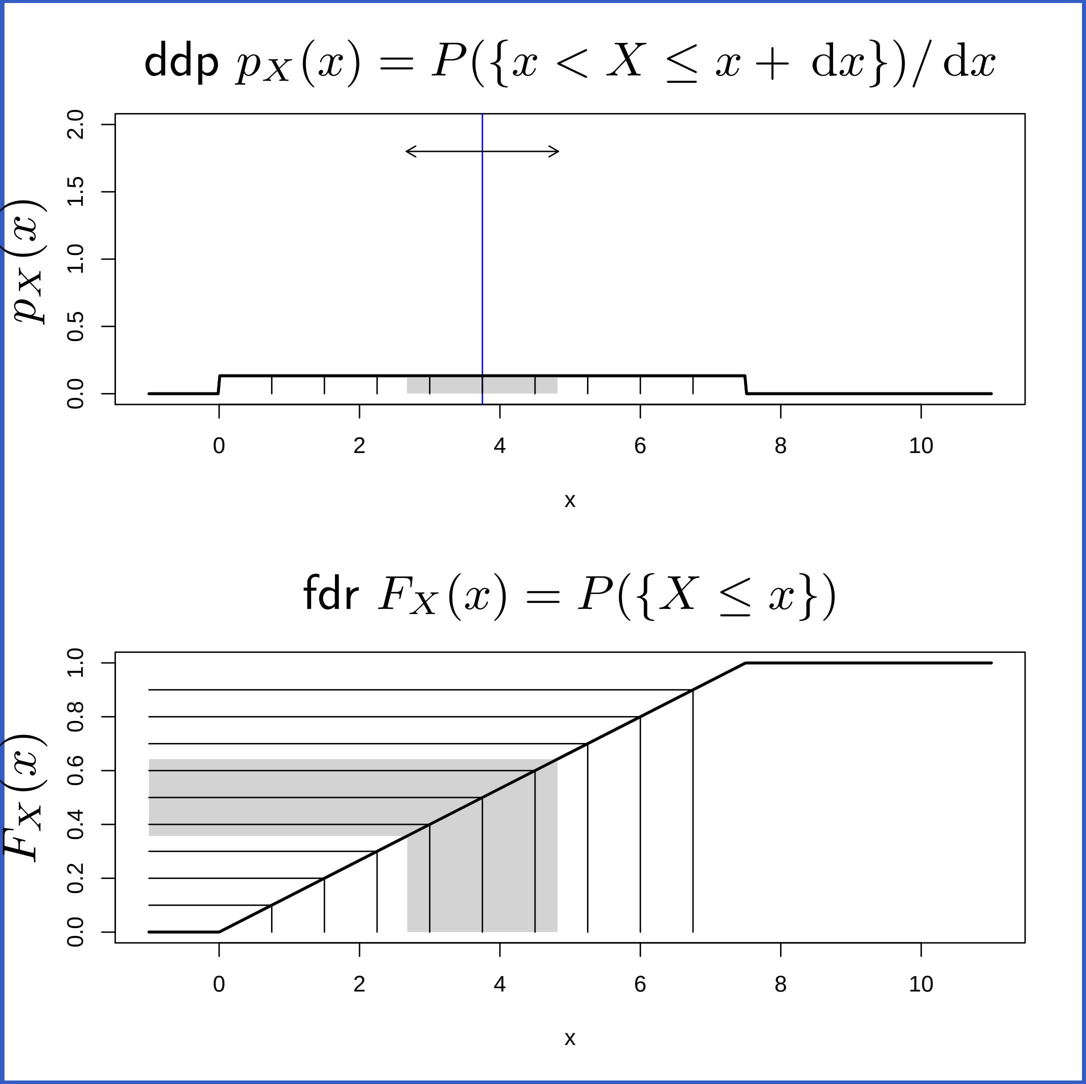
Distribution uniforme




ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})/\,\mathrm{d}x$
$p_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
2
4
6
8
10
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
x

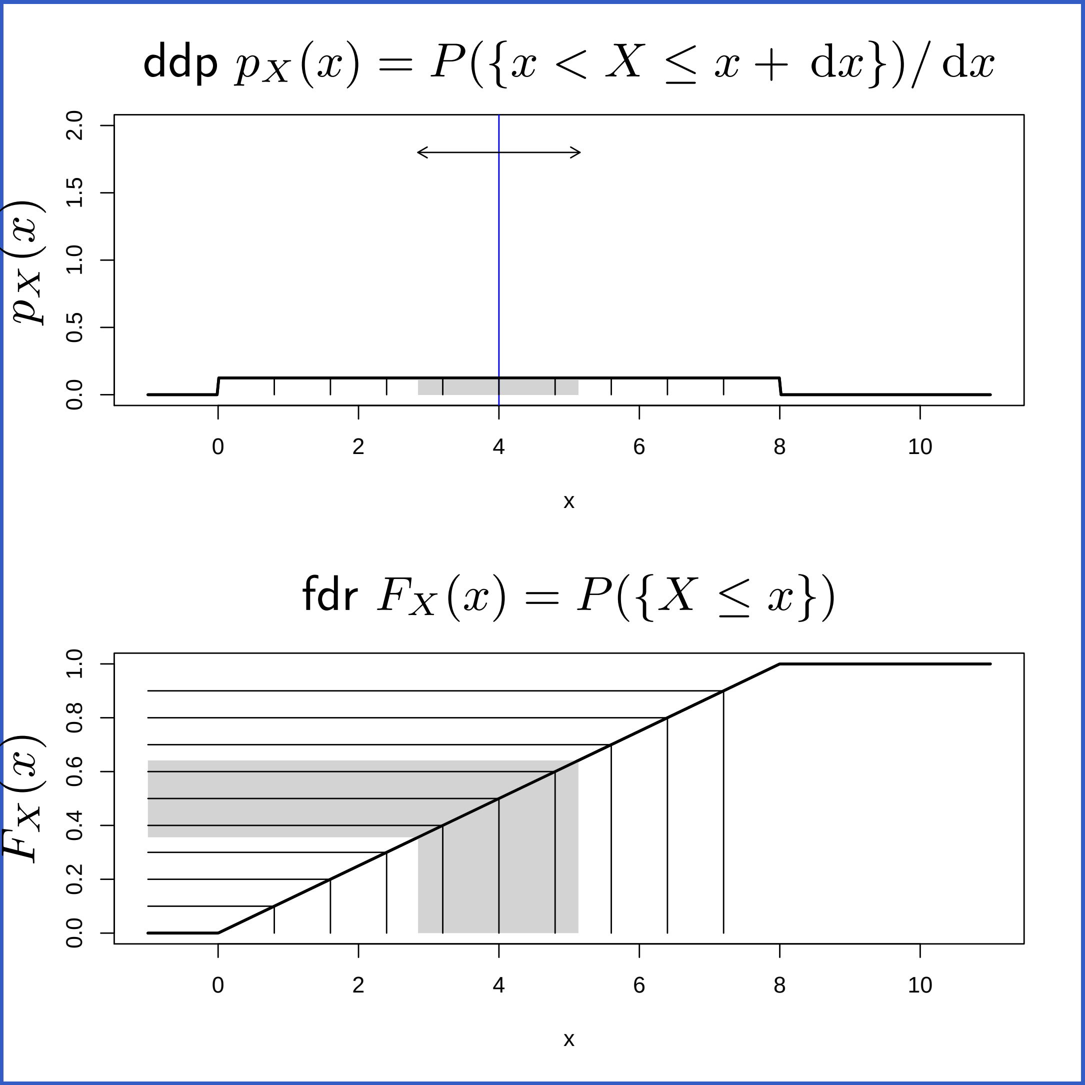
Distribution uniforme

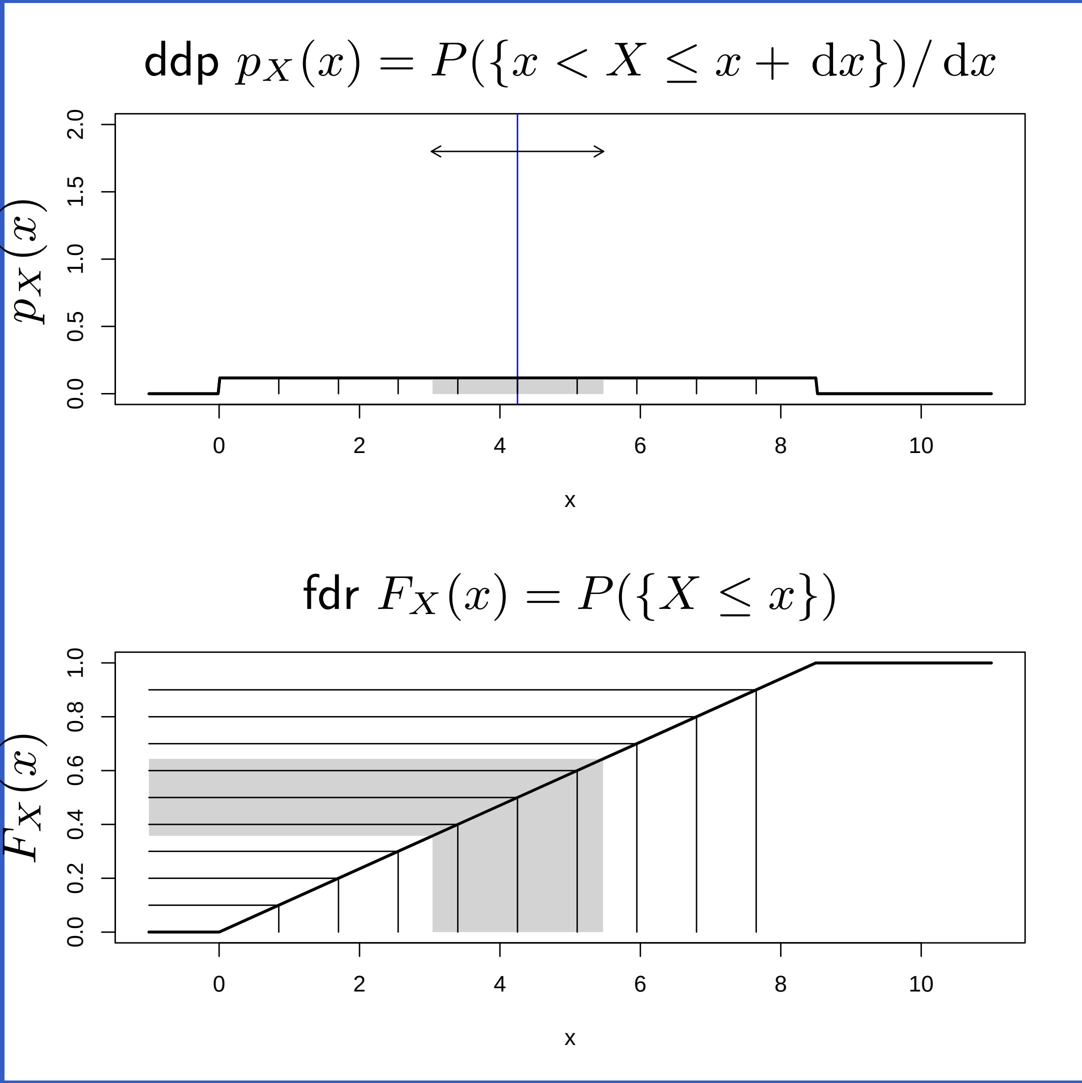




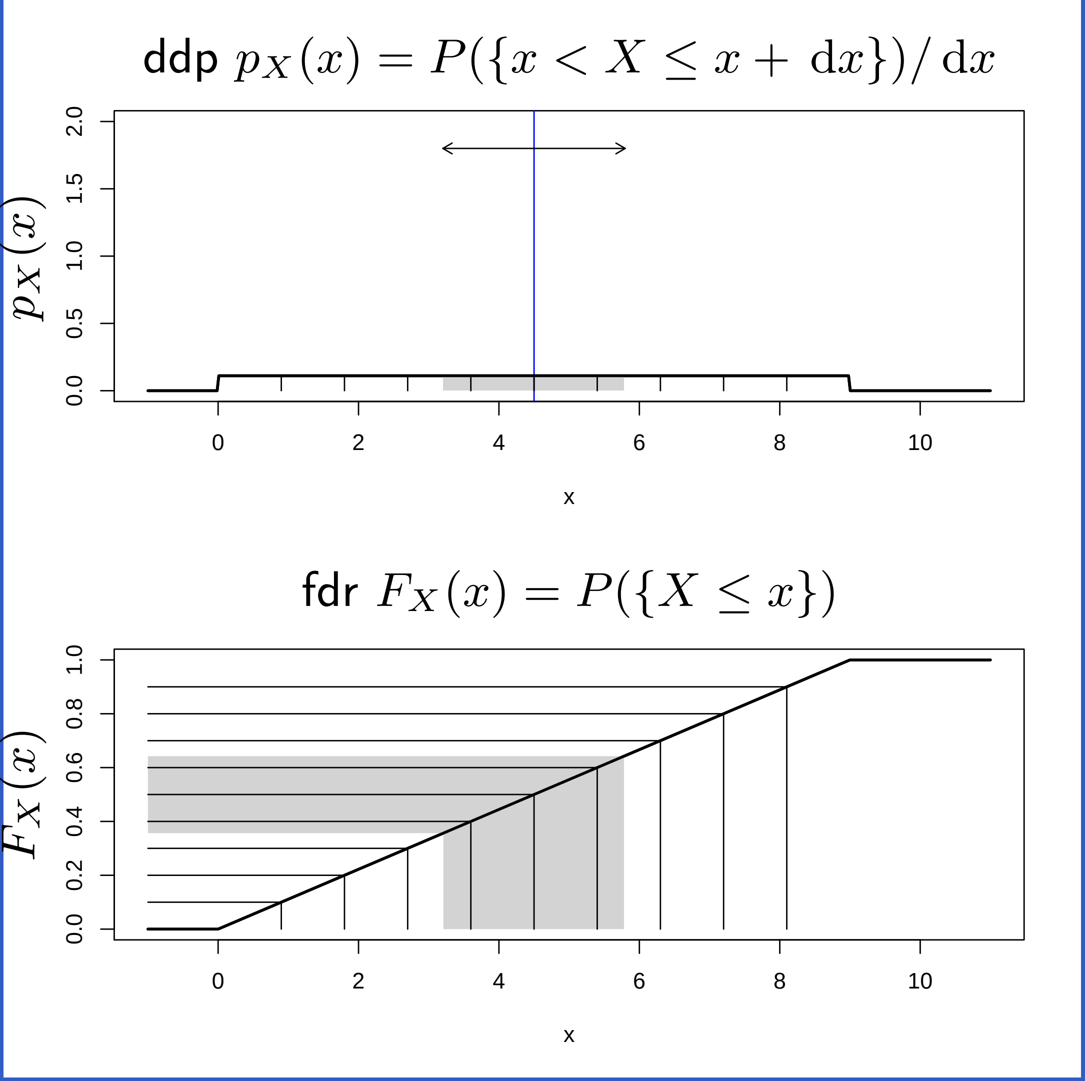
ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) / \mathrm{d}x$
$p_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
2
4
6
8
10
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
x

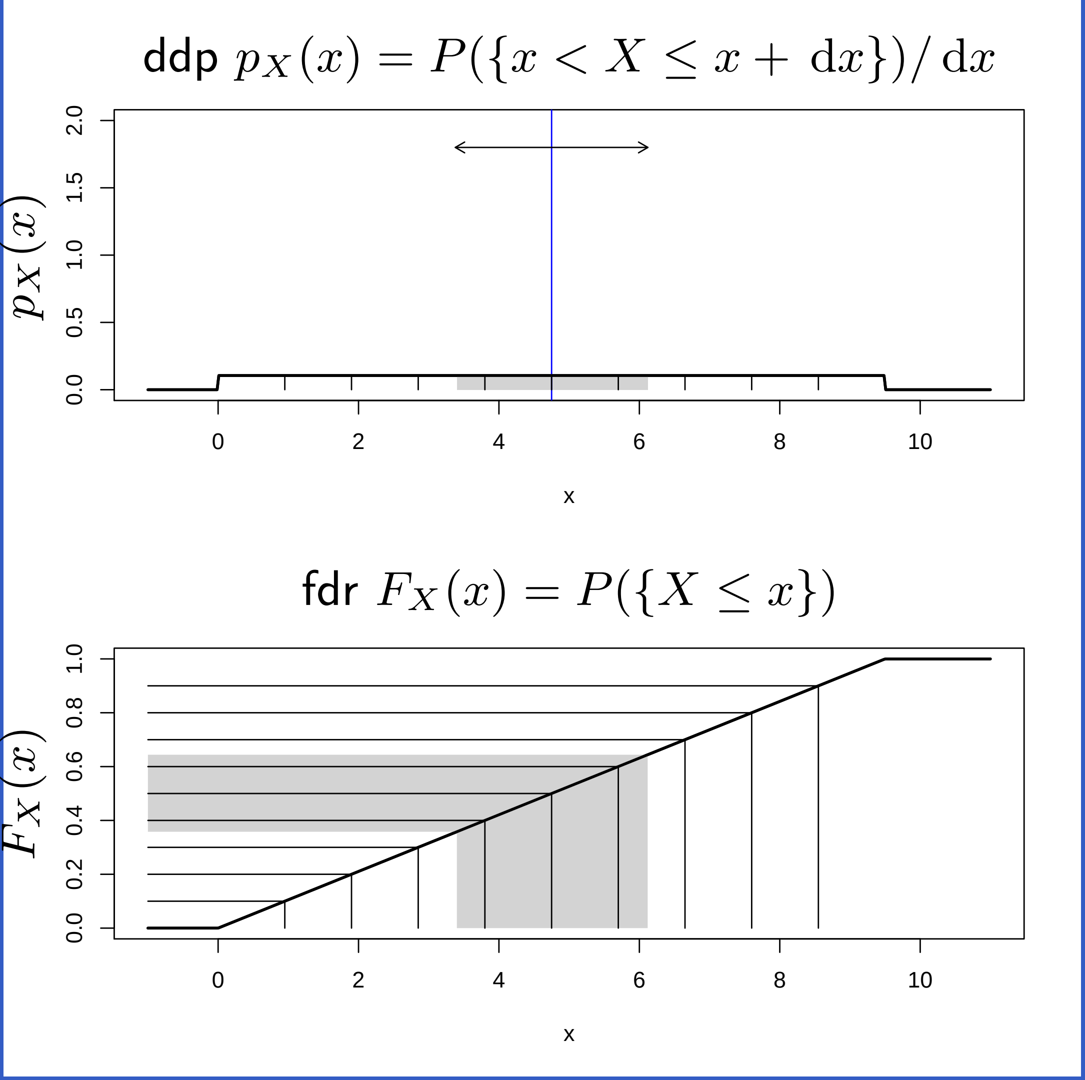
Distribution uniforme



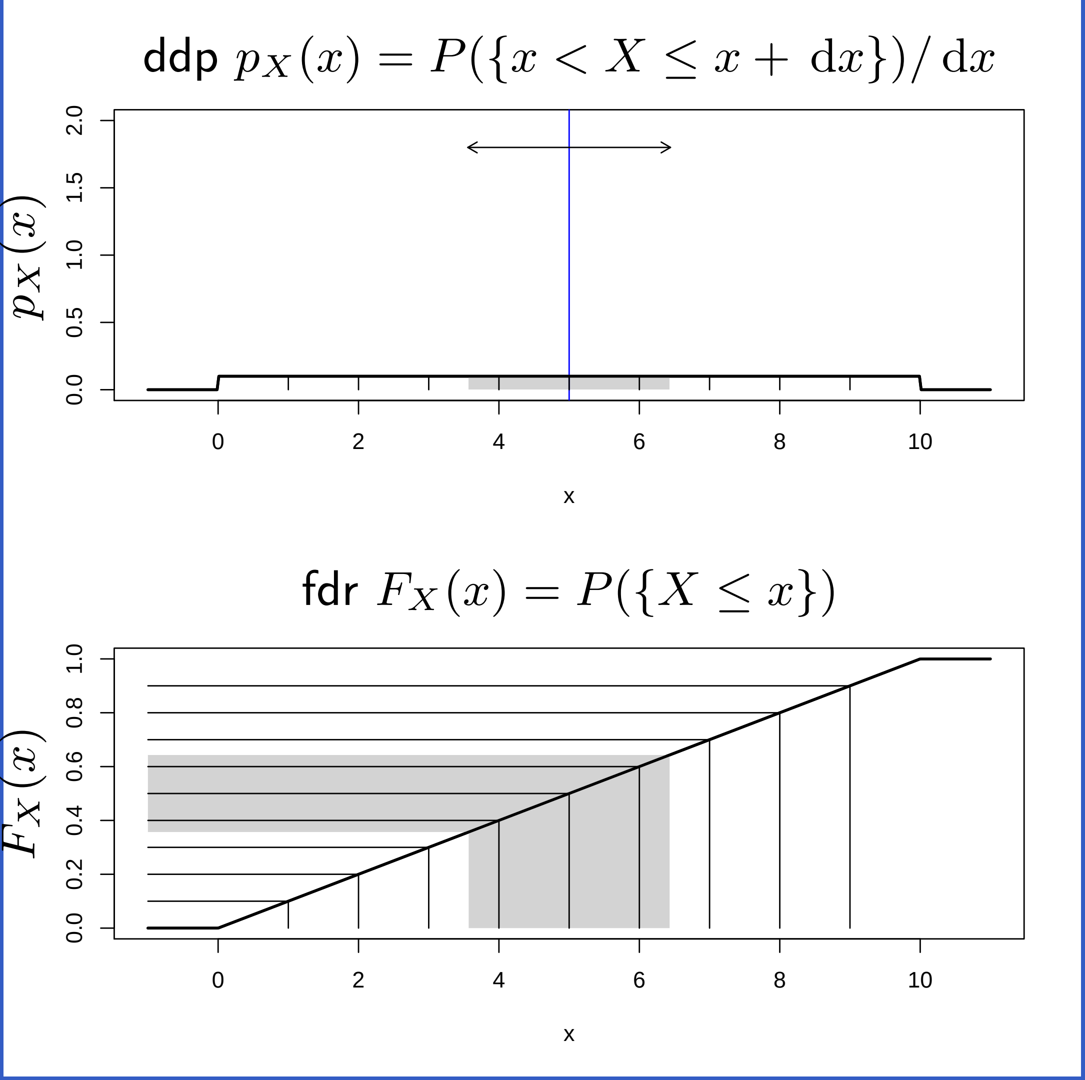

ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) / \mathrm{d}x$
$p_X(x)$
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
x

Distribution uniforme




ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})/\,\mathrm{d}x$
$p_X(x)$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
2
4
6
8
10
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
x

Distribution uniforme



Distribution normale (gaussienne)

Distribution normale (gaussienne)

$$N(\mu_X, \sigma_X): \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

Distribution normale (gaussienne)

- $$N(\mu_X, \sigma_X) : \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

- $$\mathrm{E}[X] = \mu_X$$

Distribution normale (gaussienne)

▼

$$N(\mu_X, \sigma_X) : \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

▼

$$\mathrm{E}[X] = \mu_X$$

▼

$$\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2$$

Distribution normale (gaussienne)

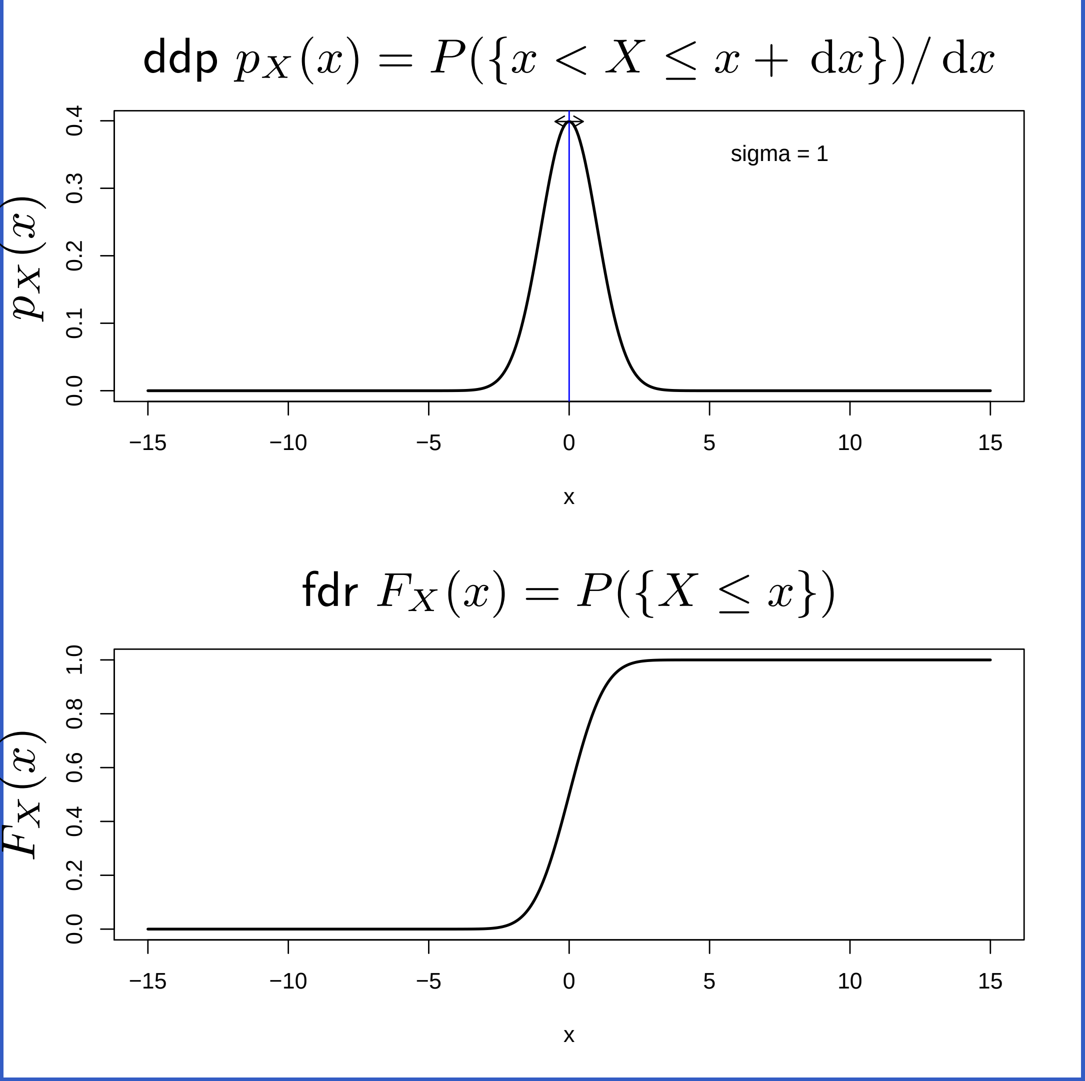
- $$N(\mu_X, \sigma_X) : \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$$

- $$\mathrm{E}[X] = \mu_X$$

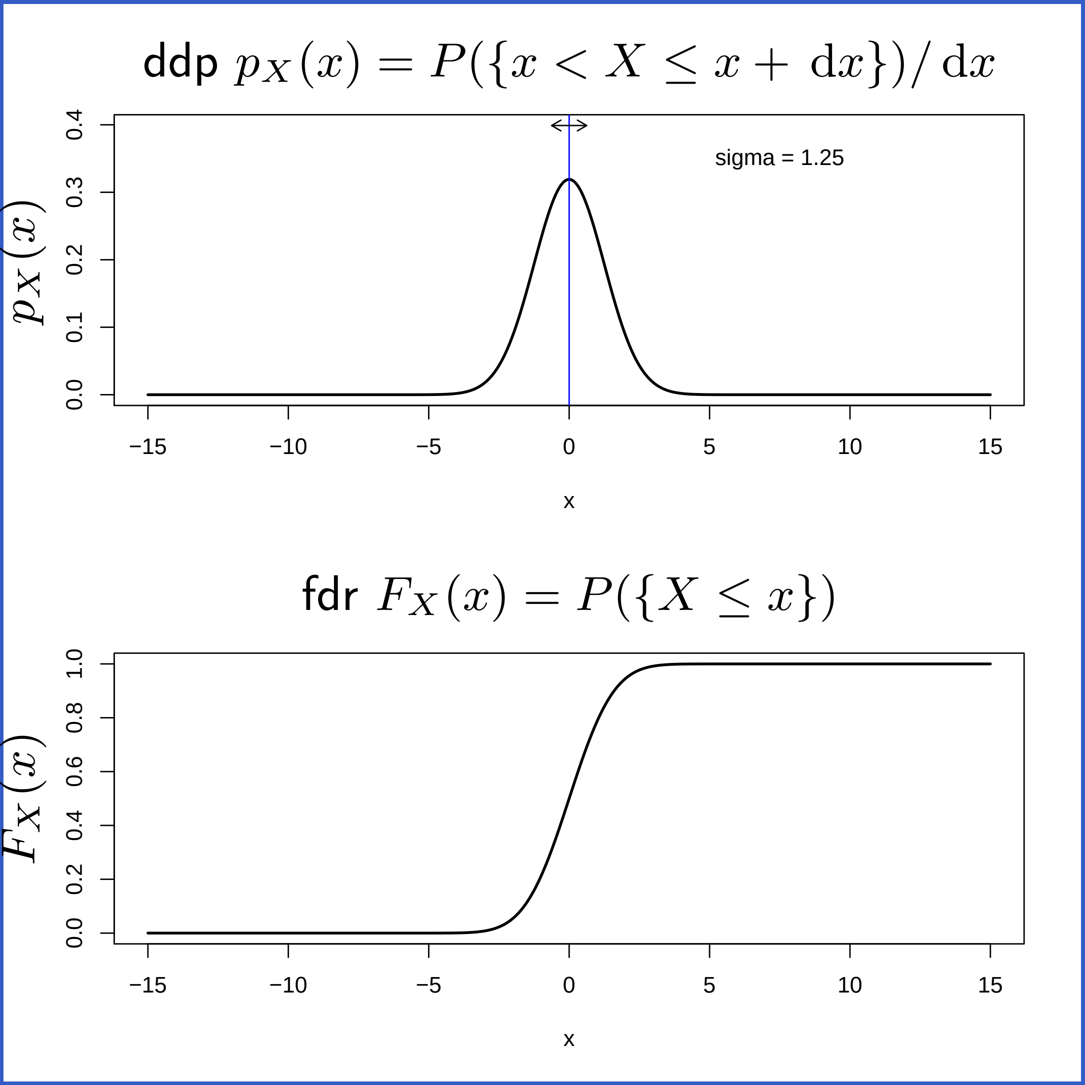
- $$\mathrm{var}[X] = \sigma_X^2$$

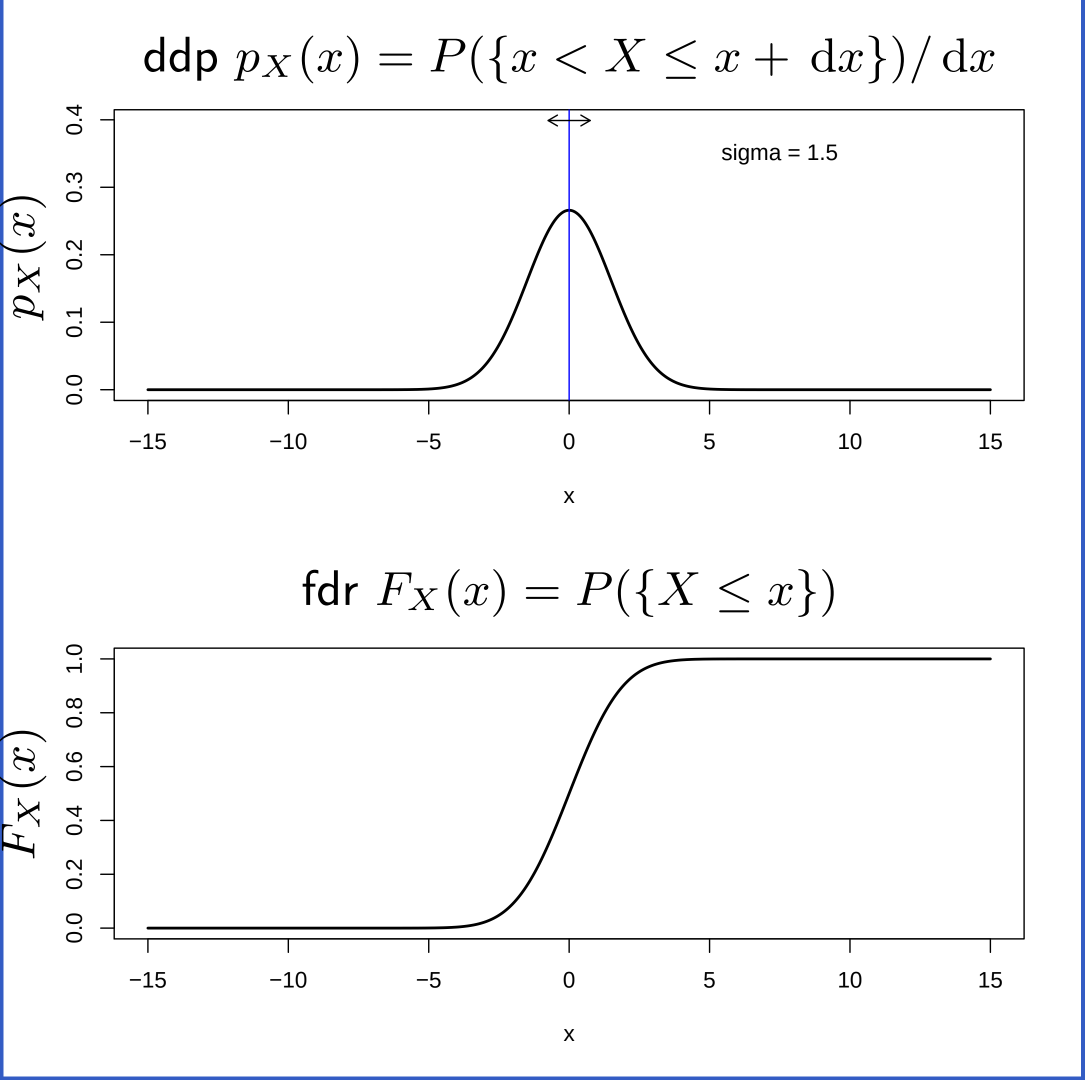
- $$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x'$$

Distribution normale



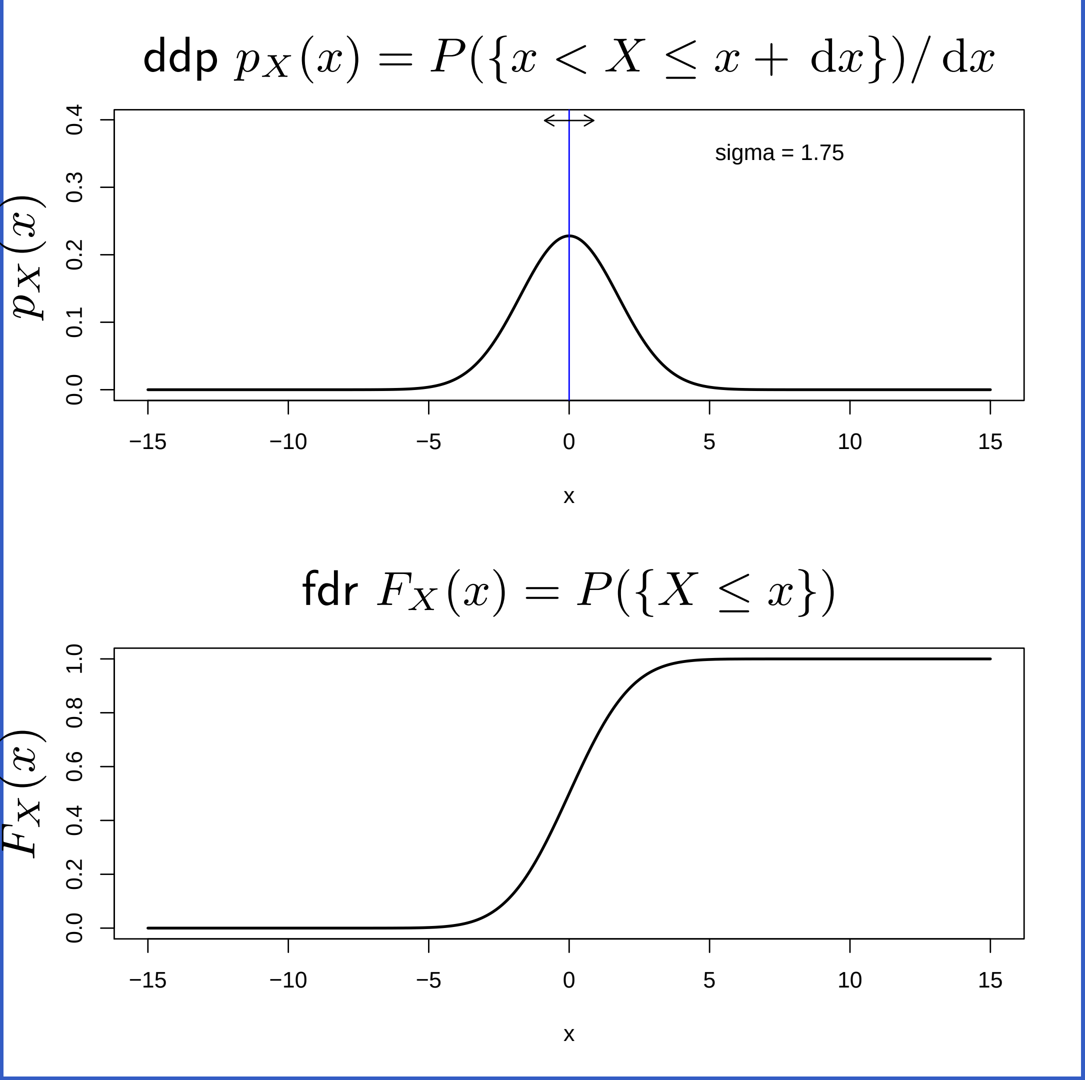
Distribution normale



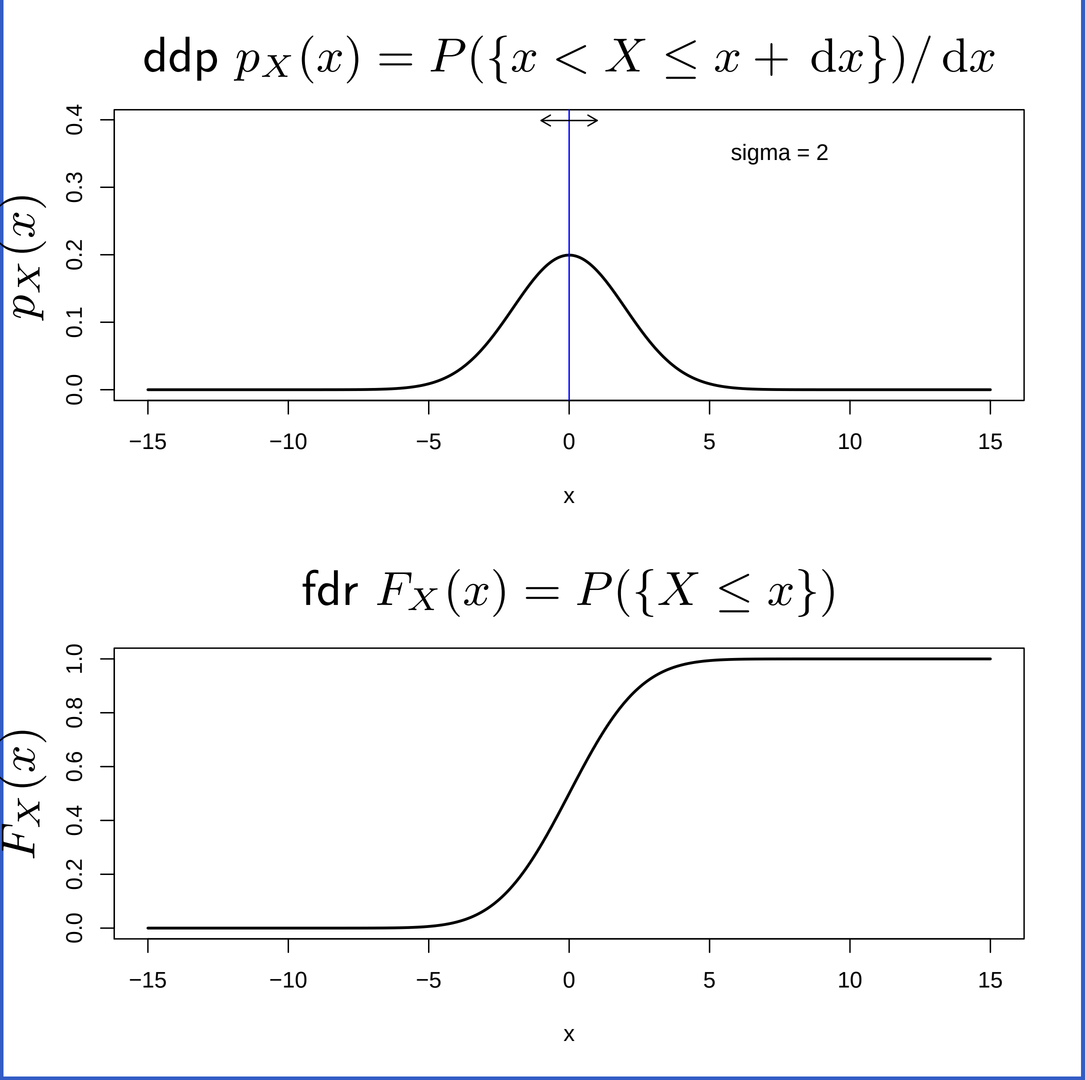


ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) / \mathrm{d}x$
sigma = 1.5
$p_X(x)$
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
x

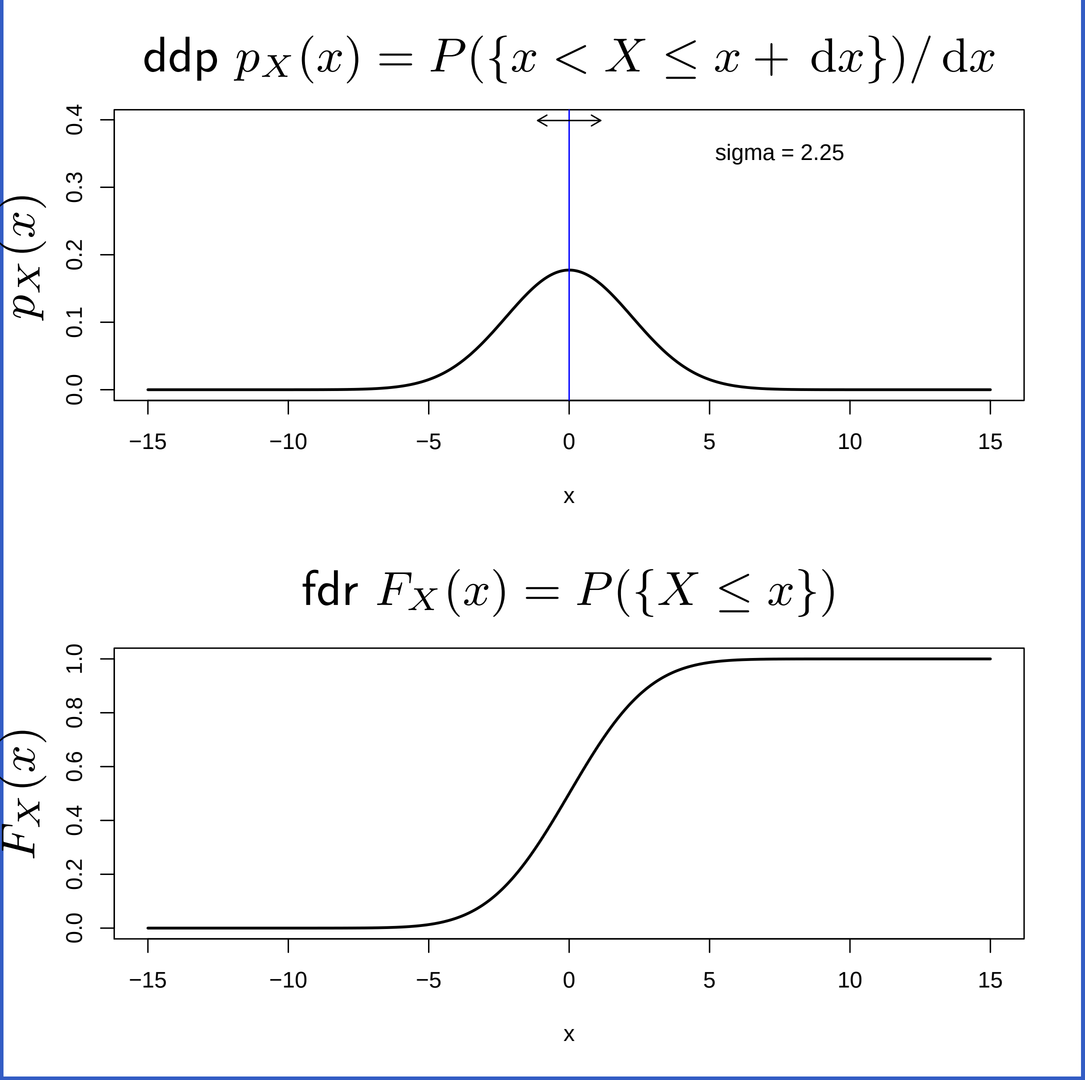
Distribution normale



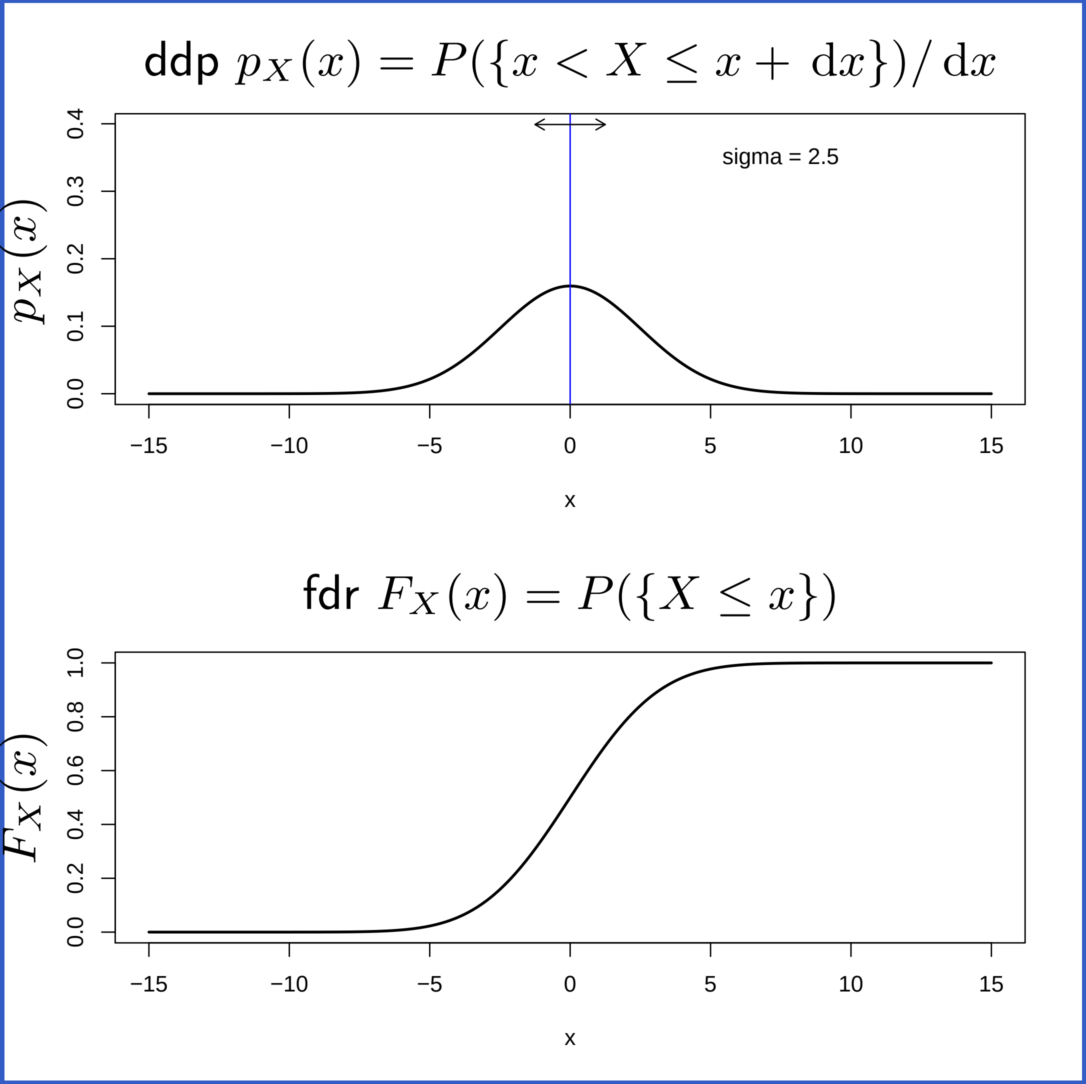
Distribution normale



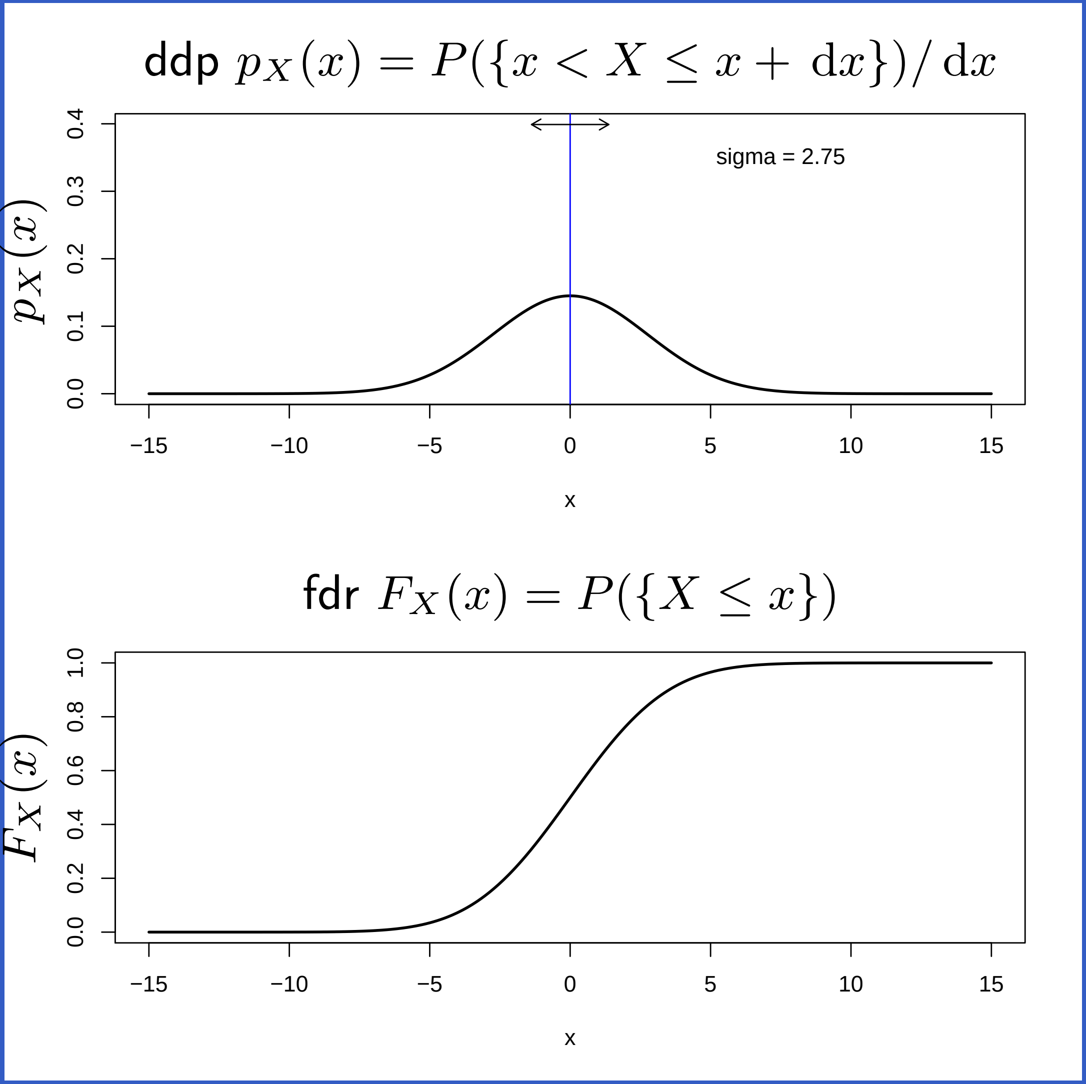
Distribution normale

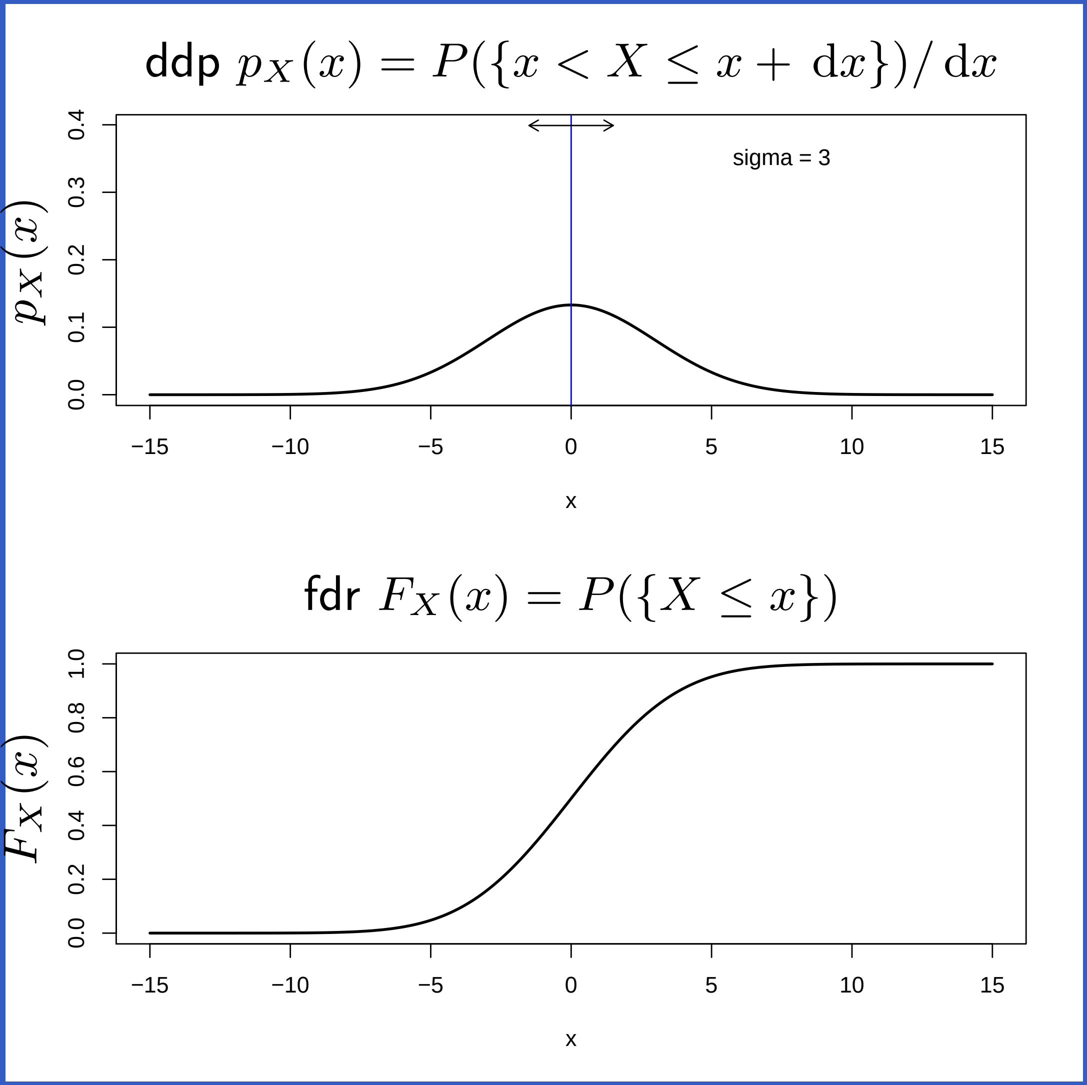


Distribution normale

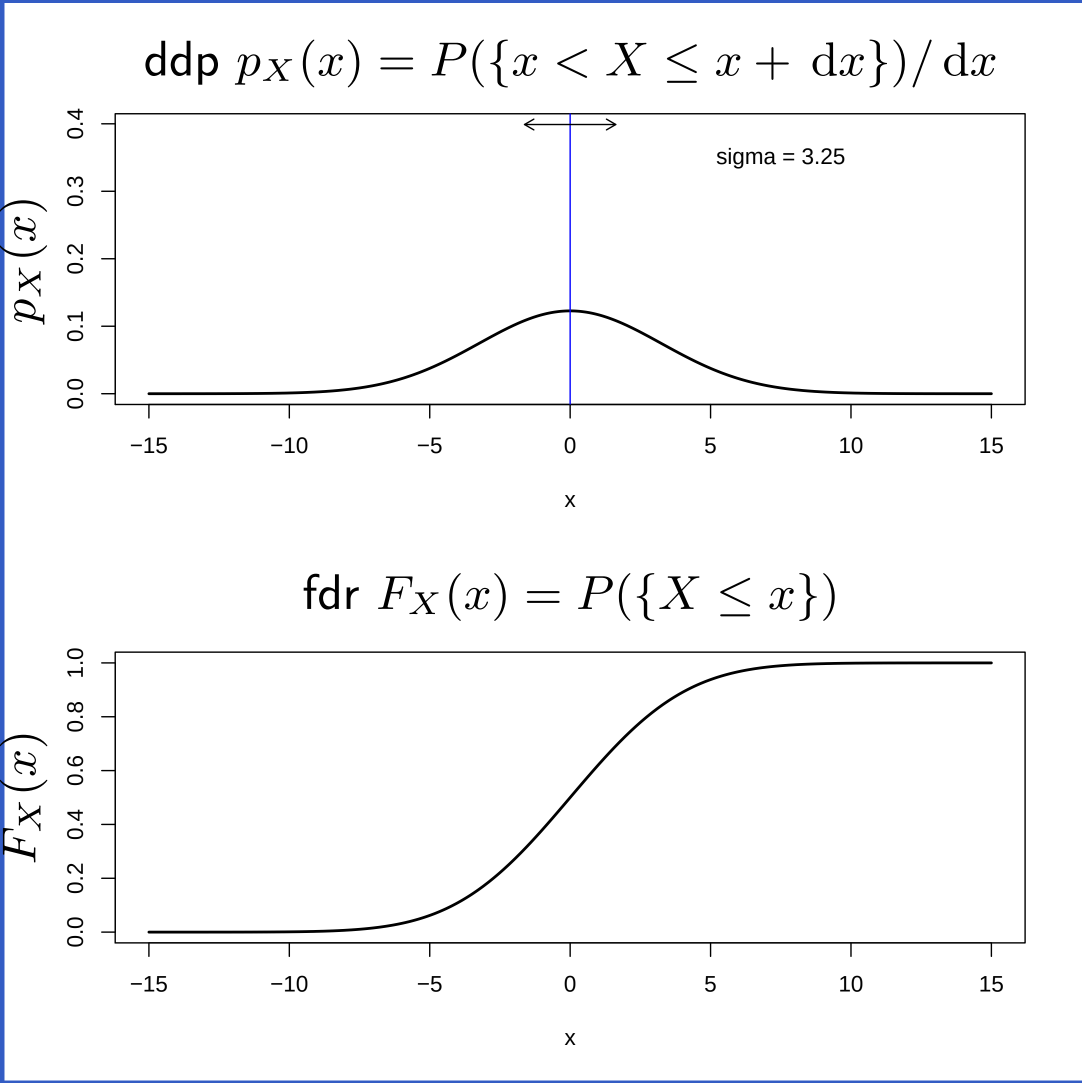


Distribution normale

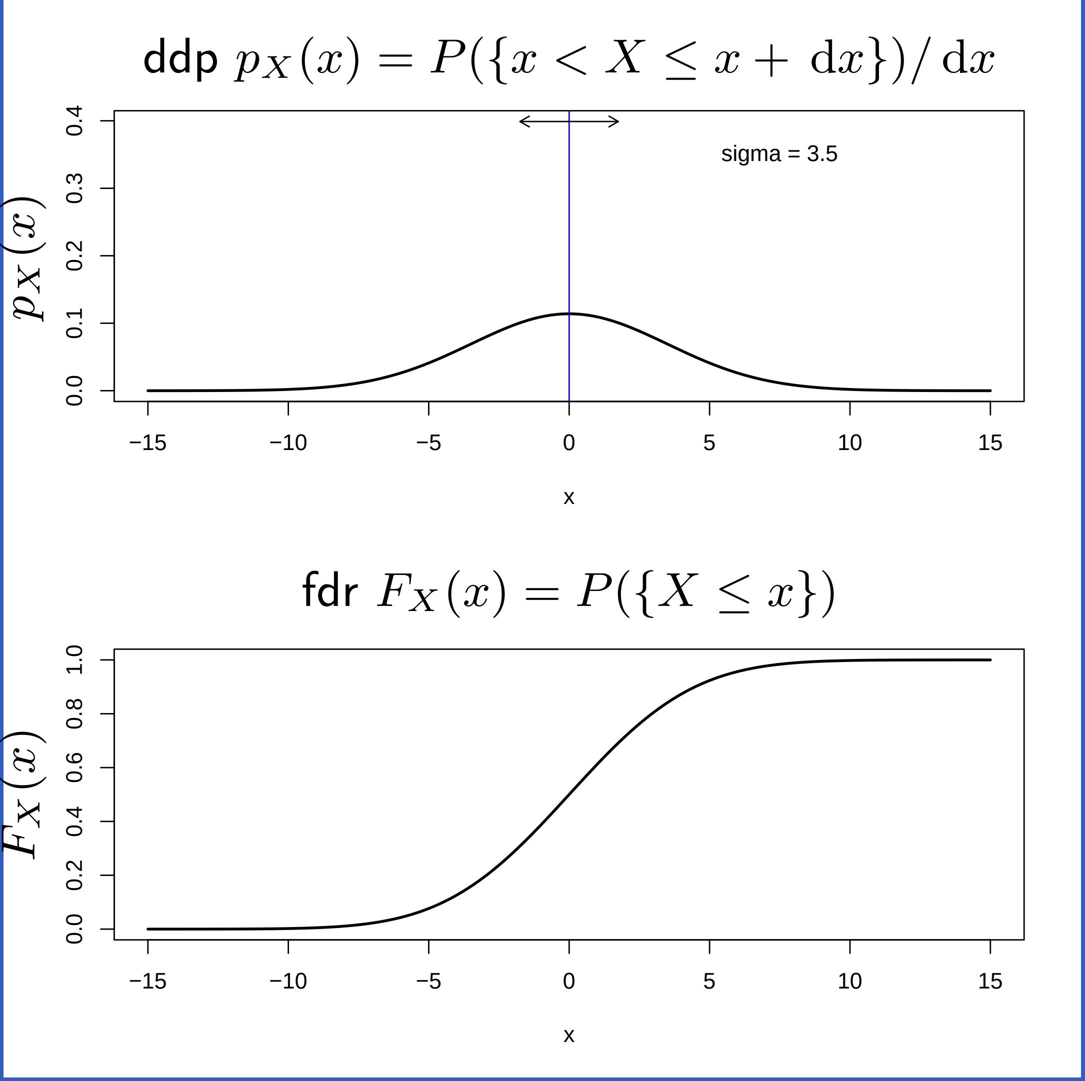


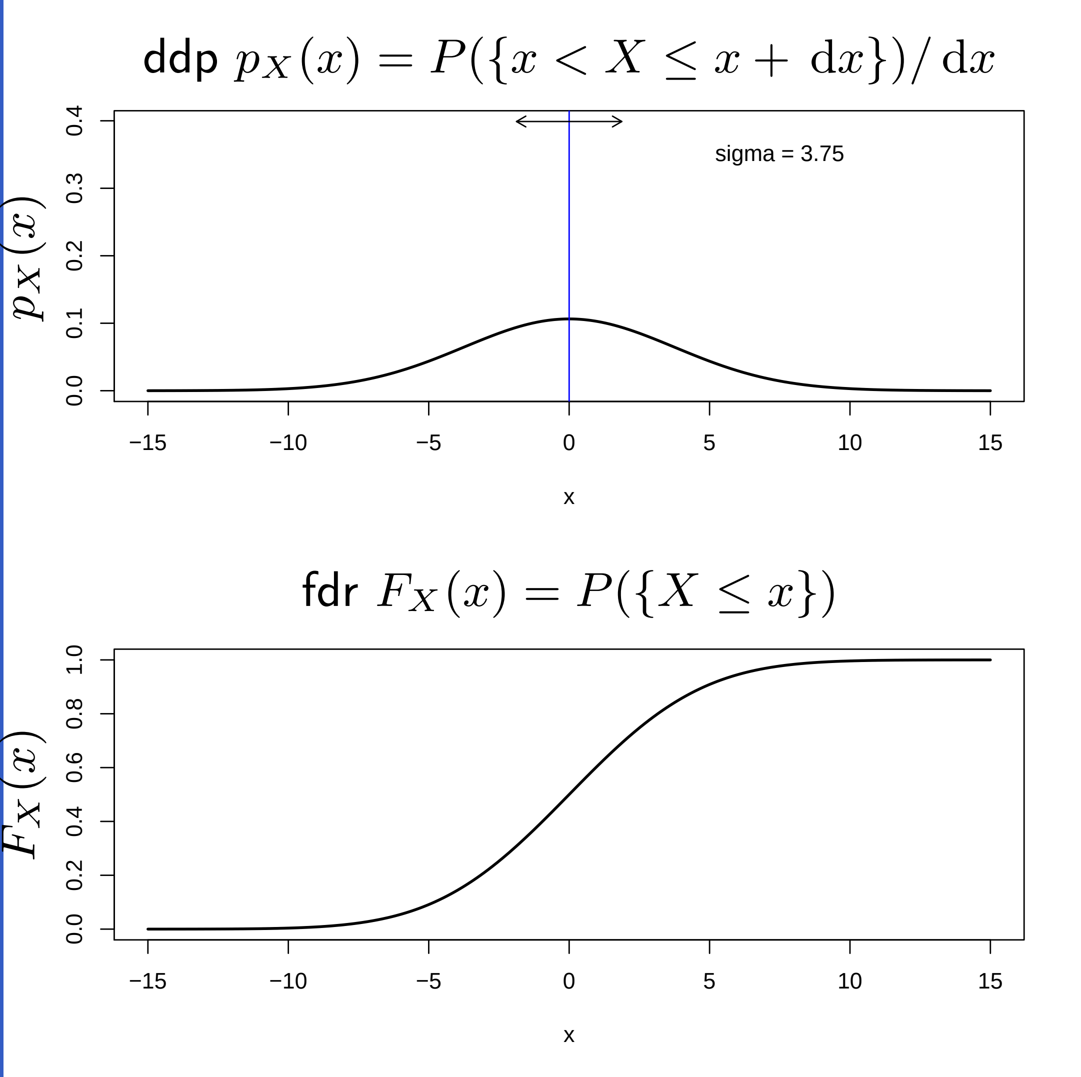

ddp $p_X(x) = P(\{x < X \le x + \mathrm{d}x\})/\,\mathrm{d}x$
$p_X(x)$
sigma = 3
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−15
−10
−5
0
5
10
15
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \le x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−15
−10
−5
0
5
10
15
x

Distribution normale

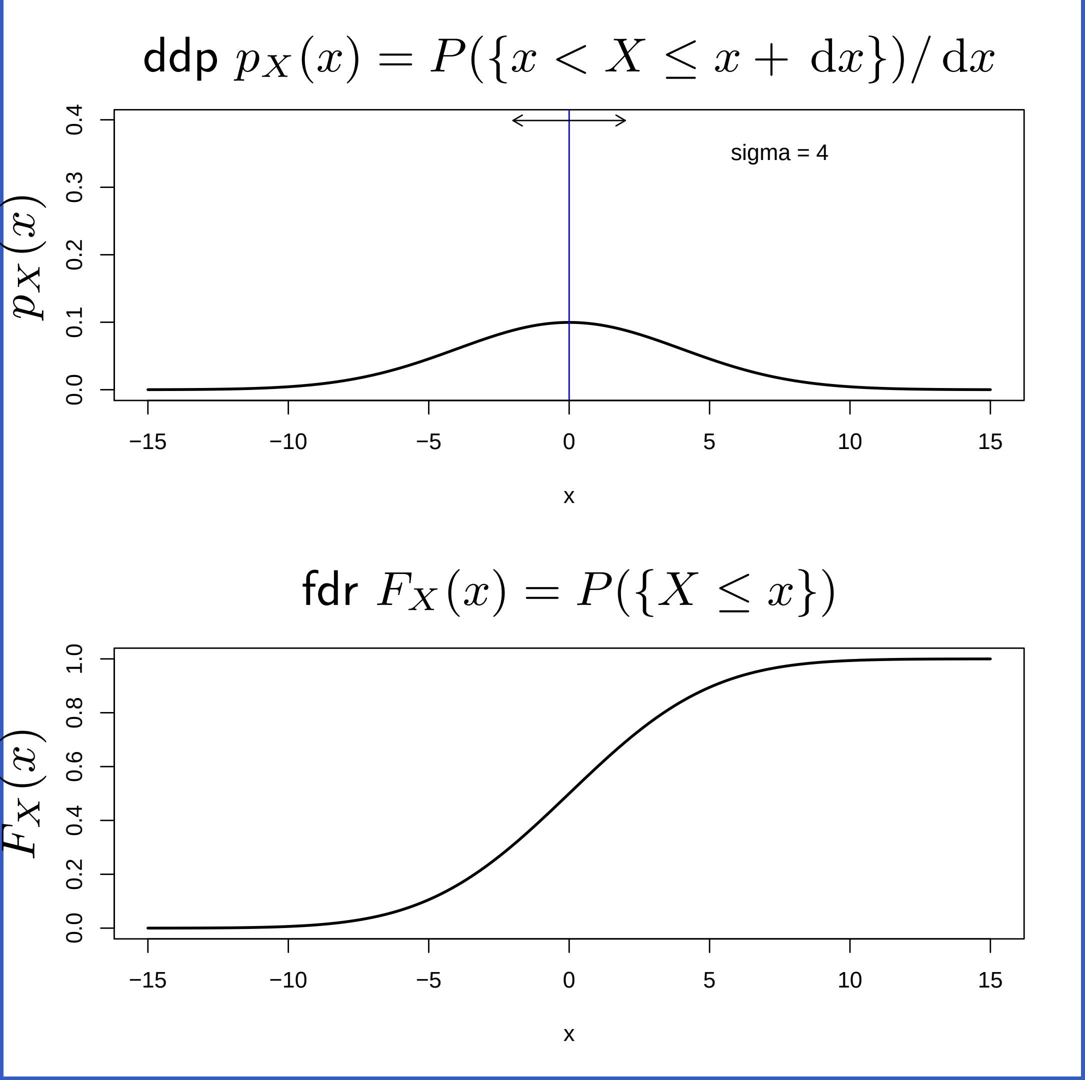


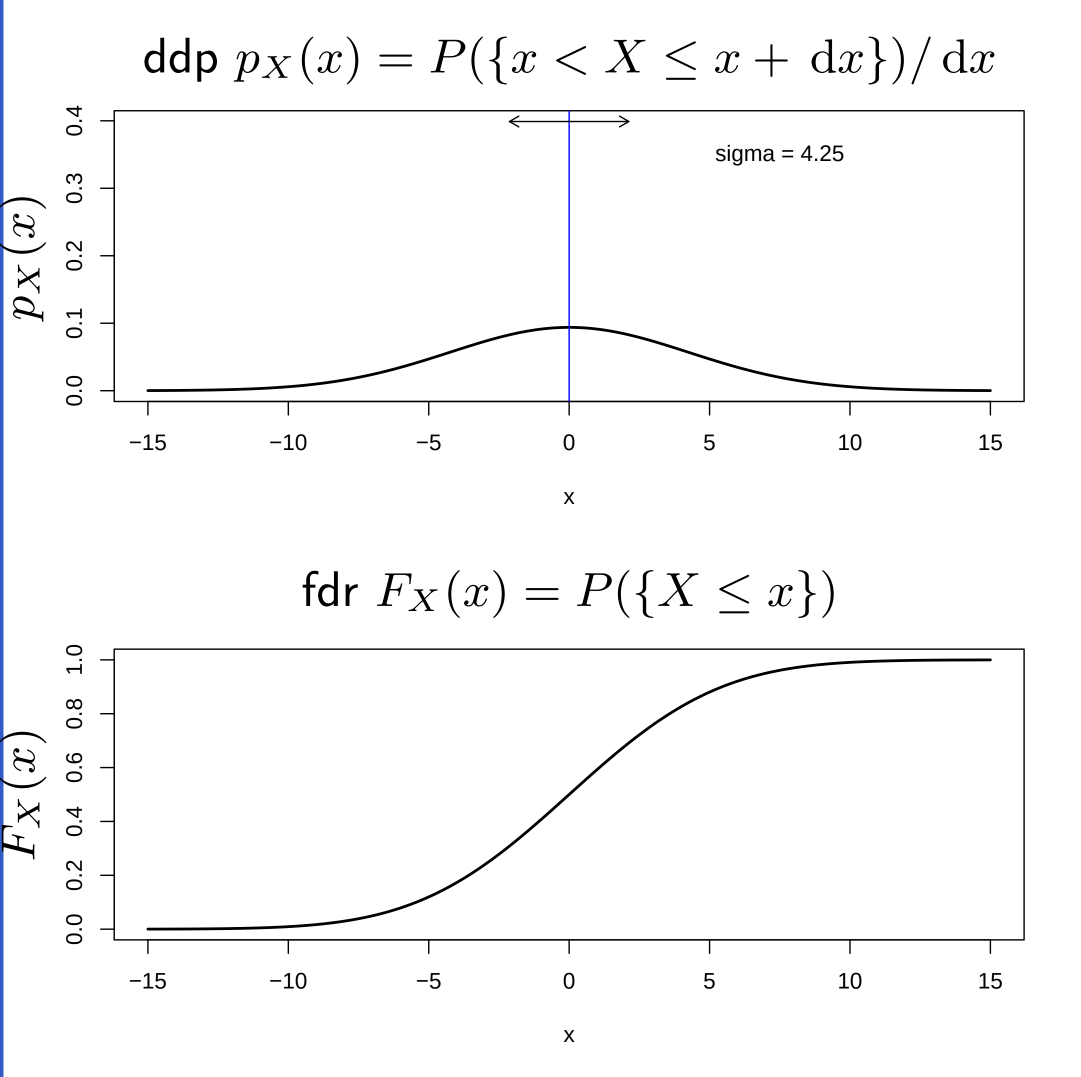
Distribution normale



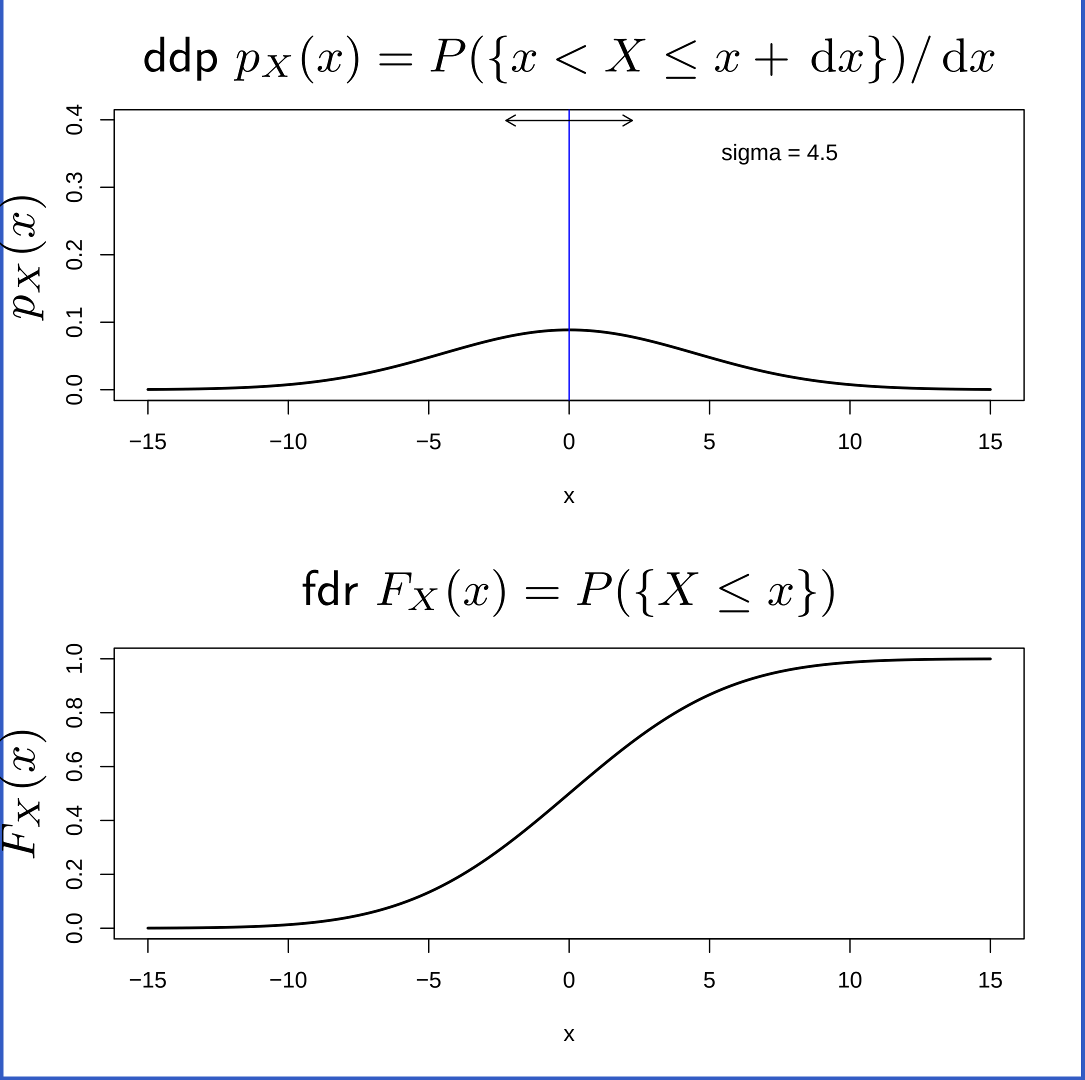

ddp $p_X(x) = P(\{x < X \le x + \mathrm{d}x\})/\,\mathrm{d}x$
sigma = 3.75
$p_X(x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−15
−10
−5
0
5
10
15
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \le x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−15
−10
−5
0
5
10
15
x

Distribution normale

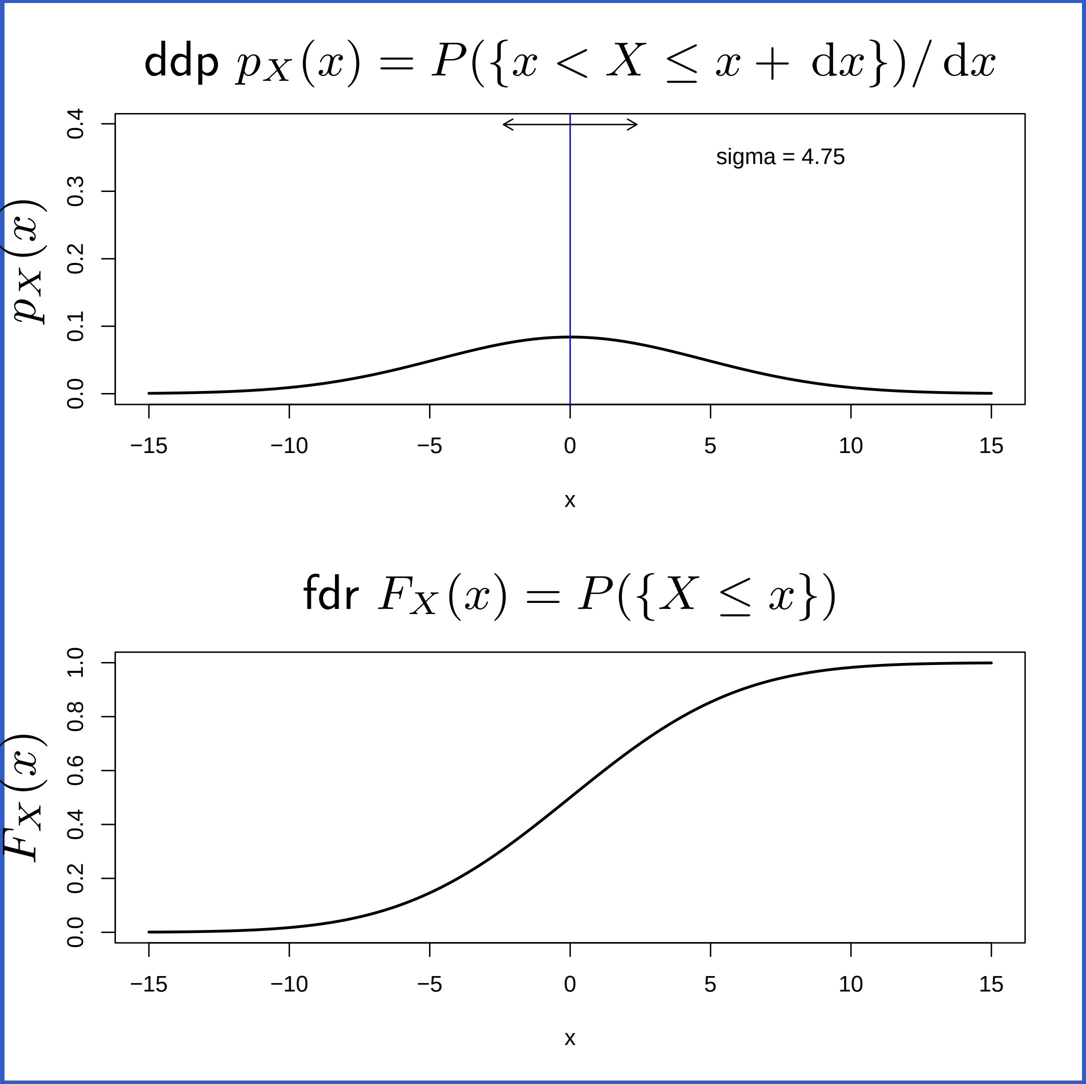




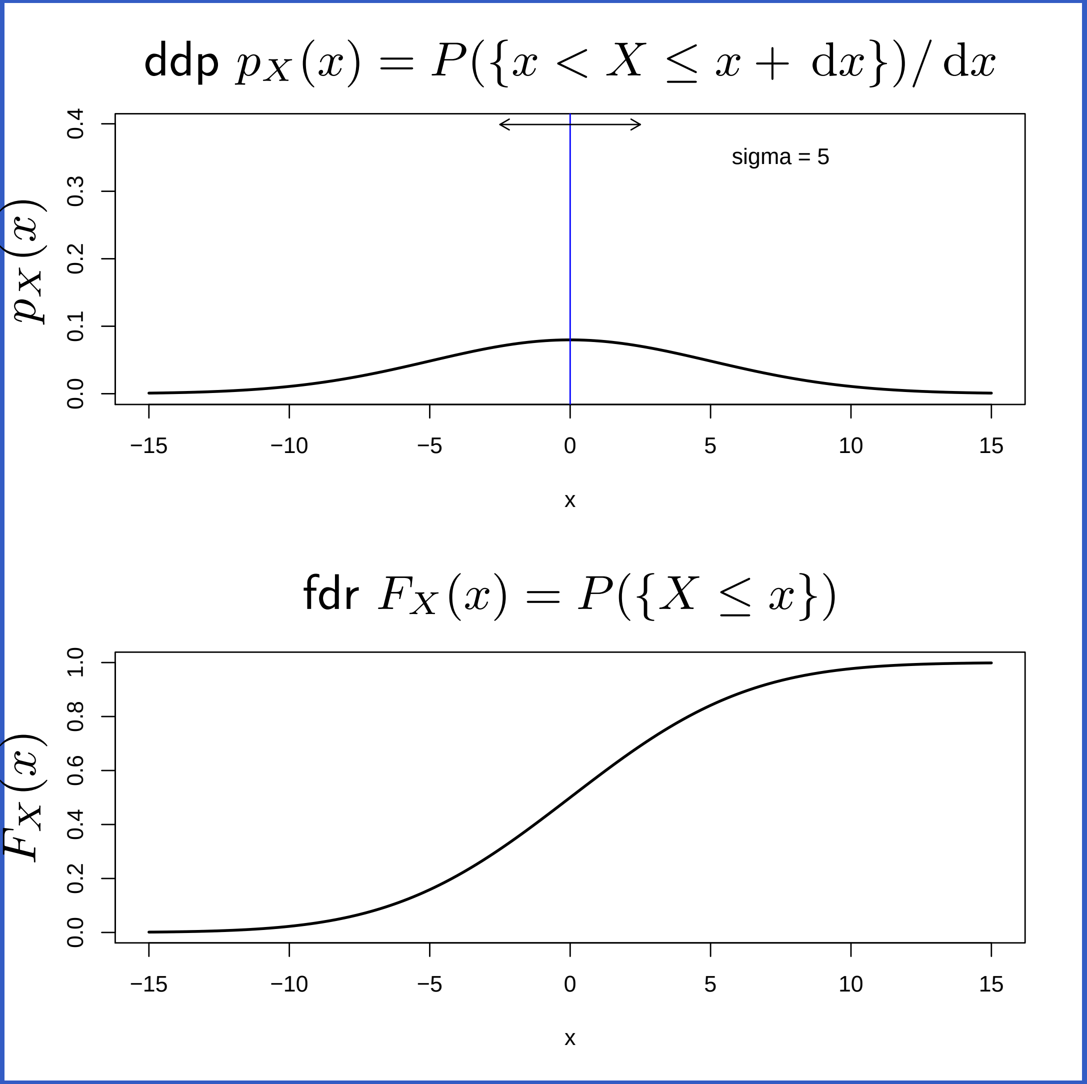
ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\}) / \mathrm{d}x$
sigma = 4.25
$p_X(x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−15
−10
−5
0
5
10
15
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−15
−10
−5
0
5
10
15
x


ddp $p_X(x) = P(\{x < X \leq x + \mathrm{d}x\})/\,\mathrm{d}x$
sigma = 4.5
$p_X(x)$
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−15
−10
−5
0
5
10
15
x
fdr $F_X(x) = P(\{X \leq x\})$
$F_X(x)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−15
−10
−5
0
5
10
15
x

Distribution normale



Distribution normale



Distribution normale standard (centrée réduite)

- $$X = N(\mu_X, \sigma_X) \ : \ P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

Distribution normale standard (centrée réduite)

- $$X = N(\mu_X, \sigma_X) \ : \ P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

Distribution normale standard (centrée réduite)

$$X = N(\mu_X, \sigma_X) \;:\; P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u$$

Distribution normale standard (centrée réduite)

$$X = N(\mu_X, \sigma_X) \ : \ P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = P(\{Z \leq z\})$$

Distribution normale standard (centrée réduite)

▼

$$X = N(\mu_X, \sigma_X) \ : \ P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = P(\{Z \leq z\}) = F_Z\left(z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$$

Distribution normale standard (centrée réduite)

$$X = N(\mu_X, \sigma_X) \; : \; P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = P(\{Z \leq z\}) = F_Z\left(z = \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) \triangleq 1 - Q(z)$$

Distribution normale standard (centrée réduite)

- $$X = N(\mu_X, \sigma_X) \;:\; P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = P(\{Z \leq z\}) = F_Z\left(z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \triangleq 1 - Q(z)$$

- $$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}}$$: normale standard (centrée réduite) $N(0, 1)$

Distribution normale standard (centrée réduite)

- $$X = N(\mu_X, \sigma_X) \ : \ P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = P(\{Z \leq z\}) = F_Z\left(z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \triangleq 1 - Q(z)$$

- $$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}}$$: normale standard (centrée réduite) $N(0,1)$

- z : exprime l'écart entre x et μ_X en termes (unité de mesure) de σ_X

Distribution normale standard (centrée réduite)

- $$X = N(\mu_X, \sigma_X) \ : \ P(\{X \leq x = \mu_X + z\sigma_X\}) = F_X(x = \mu_X + z\sigma_X)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\mu_X + z\sigma_X} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u = P(\{Z \leq z\}) = F_Z\left(z = \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) \triangleq 1 - Q(z)$$

- $$\boxed{Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}}$$: normale standard (centrée réduite) $N(0,1)$

- z : exprime l'écart entre x et μ_X en termes (unité de mesure) de σ_X
toujours sans unité !

Distribution normale standard (centrée réduite)

- v.a. centrée réduite : fonction linéaire d'une autre v.a.

Distribution normale standard (centrée réduite)

- v.a. centrée réduite : fonction linéaire d'une autre v.a.
- notion générale (pas seulement pour la normale !)

Distribution normale standard (centrée réduite)

- v.a. centrée réduite : fonction linéaire d'une autre v.a.
- notion générale (pas seulement pour la normale !)

	de X vers Z		de Z vers X	
v.a.	X	$Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$	Z	$X = \mu_X + Z\sigma_X$
valeur	x	$z = (x - \mu_X)/\sigma_X$	z	$x = \mu_X + z\sigma_X$
esp.	μ_X	0	0	μ_X
var.	σ_X^2	1	1	σ_X^2
ddp	$p_X(x)$	$\sigma_X p_X(\mu_X + z\sigma_X)$	$p_Z(z)$	$\frac{1}{\sigma_X} p_Z\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$
fdr	$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$		$F_Z(z) = F_X(\mu_X + z\sigma_X)$	

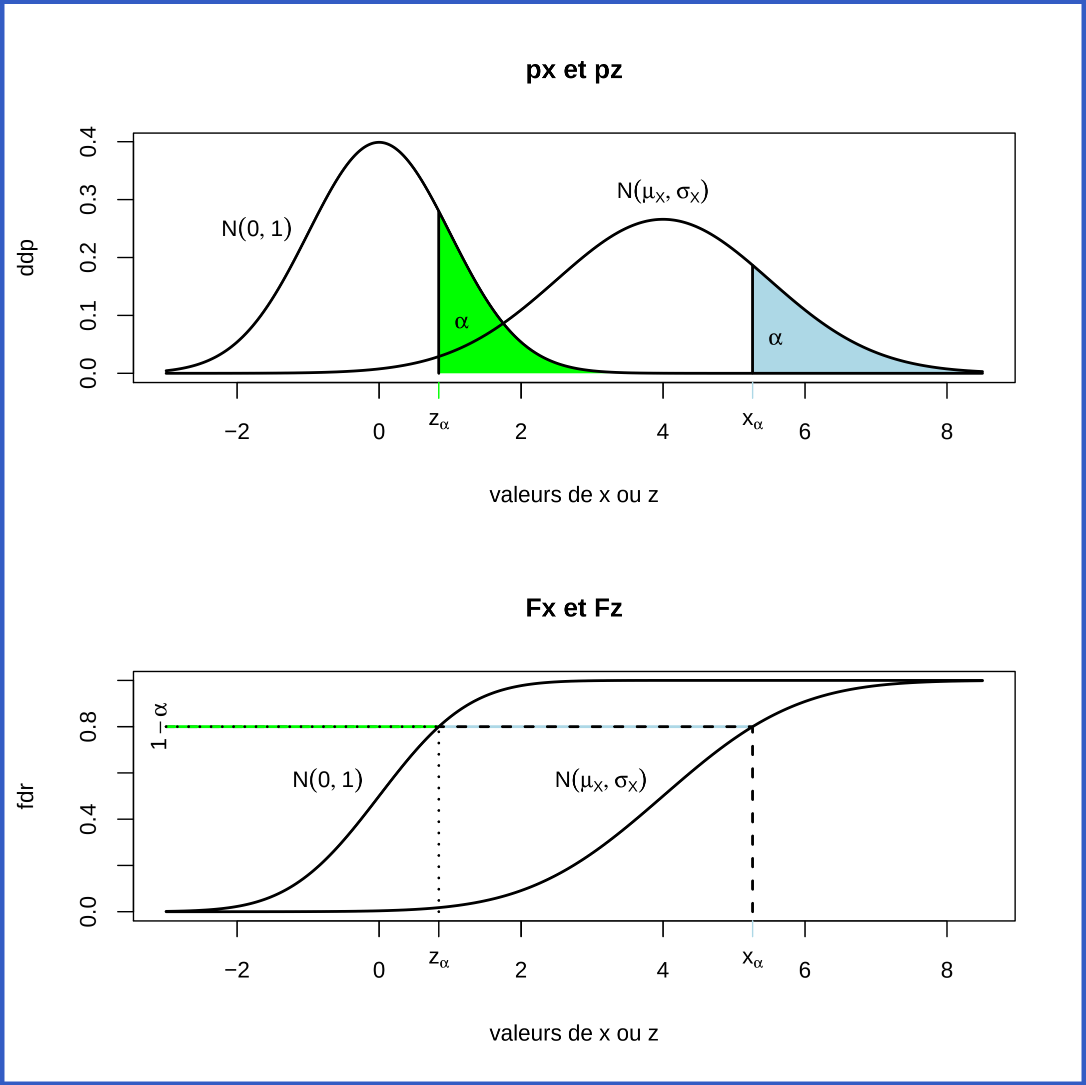
Distribution normale standard (centrée réduite)

- v.a. centrée réduite : fonction linéaire d'une autre v.a.
- notion générale (pas seulement pour la normale !)

	de X vers Z		de Z vers X	
v.a.	X	$Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$	Z	$X = \mu_X + Z\sigma_X$
valeur	x	$z = (x - \mu_X)/\sigma_X$	z	$x = \mu_X + z\sigma_X$
esp.	μ_X	0	0	μ_X
var.	σ_X^2	1	1	σ_X^2
ddp	$p_X(x)$	$\sigma_X p_X(\mu_X + z\sigma_X)$	$p_Z(z)$	$\frac{1}{\sigma_X} p_Z\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$
fdr	$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)$		$F_Z(z) = F_X(\mu_X + z\sigma_X)$	

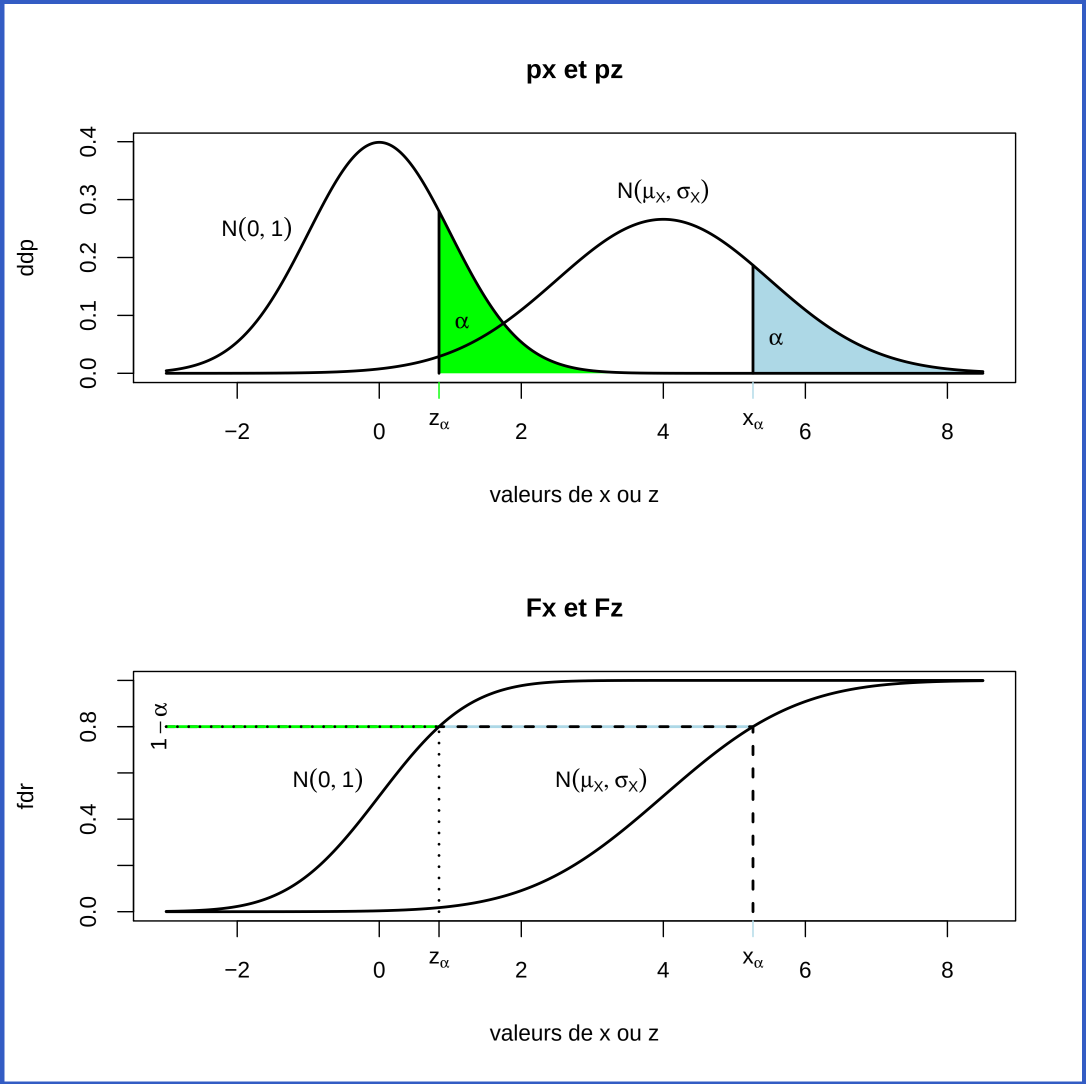
- On peut calculer des probabilités aussi bien en X qu'en Z !

Distribution normale standard (centrée réduite)



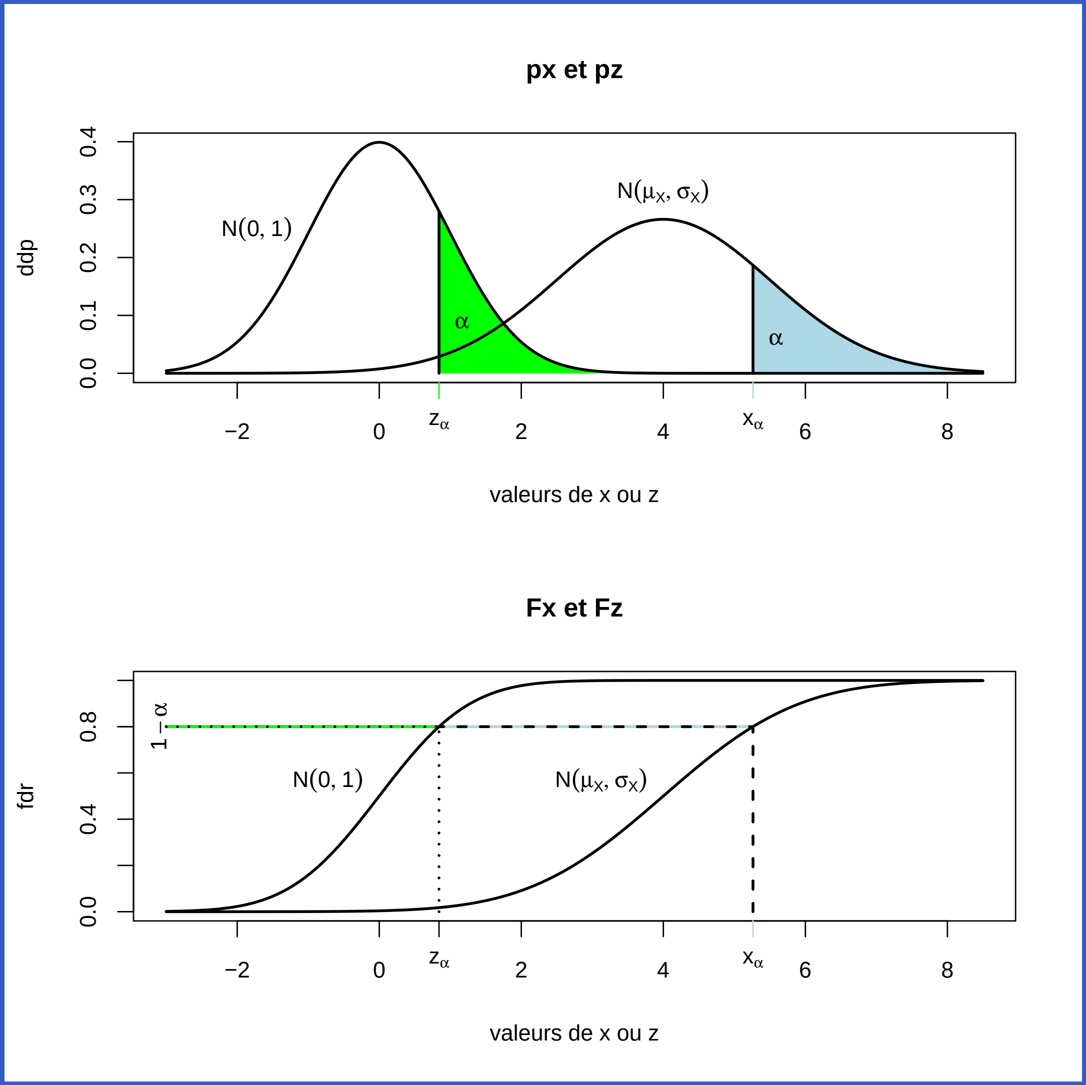
- $X : N(4, 1.5)$
- $Z : N(0, 1)$
- $X = \mu_X + Z\sigma_X$

Distribution normale standard (centrée réduite)



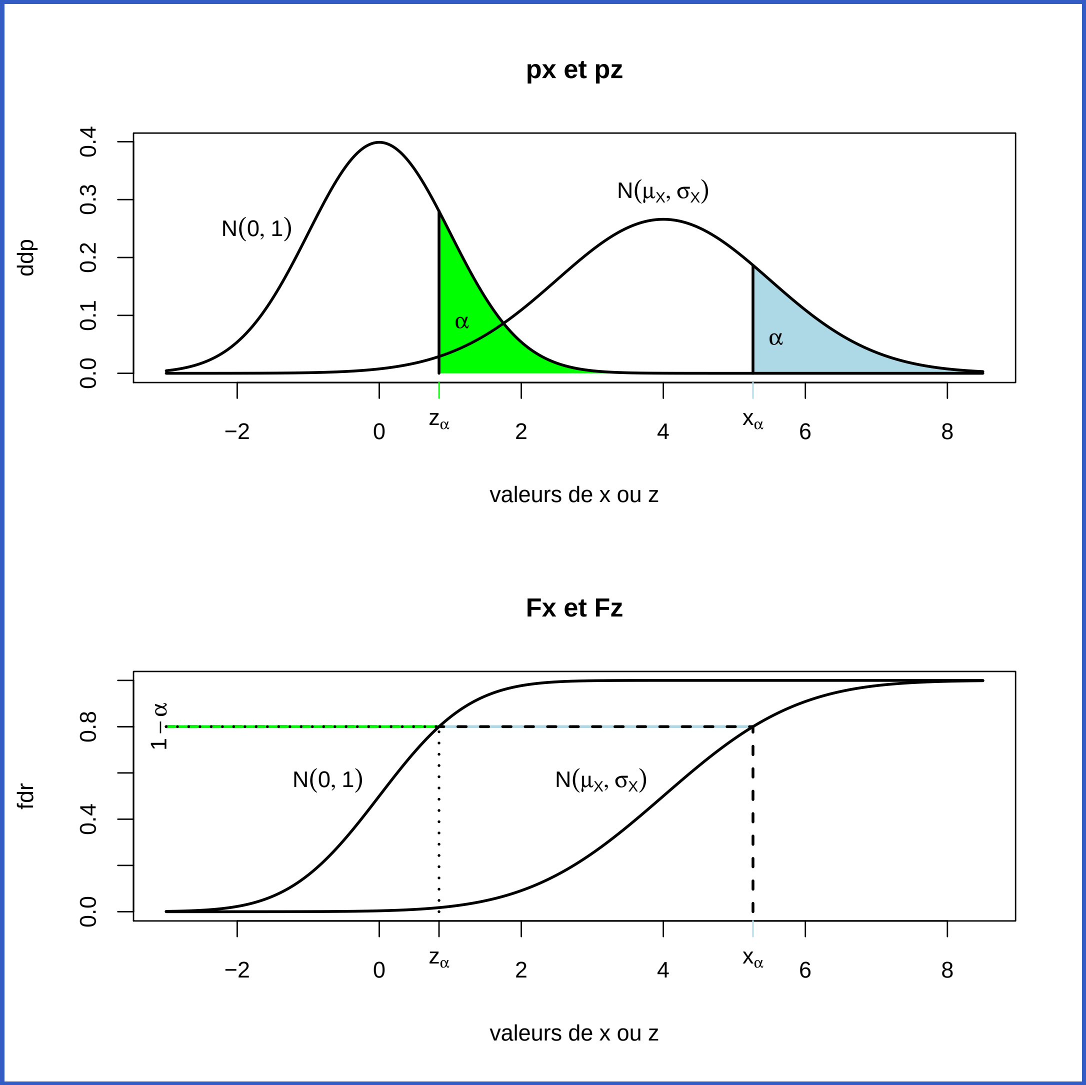
- $X : N(4, 1.5)$
- $Z : N(0, 1)$
- $X = \mu_X + Z\sigma_X$
- « Valeur critique » x_α : $P(\{X > x_\alpha\}) = \alpha$

Distribution normale standard (centrée réduite)



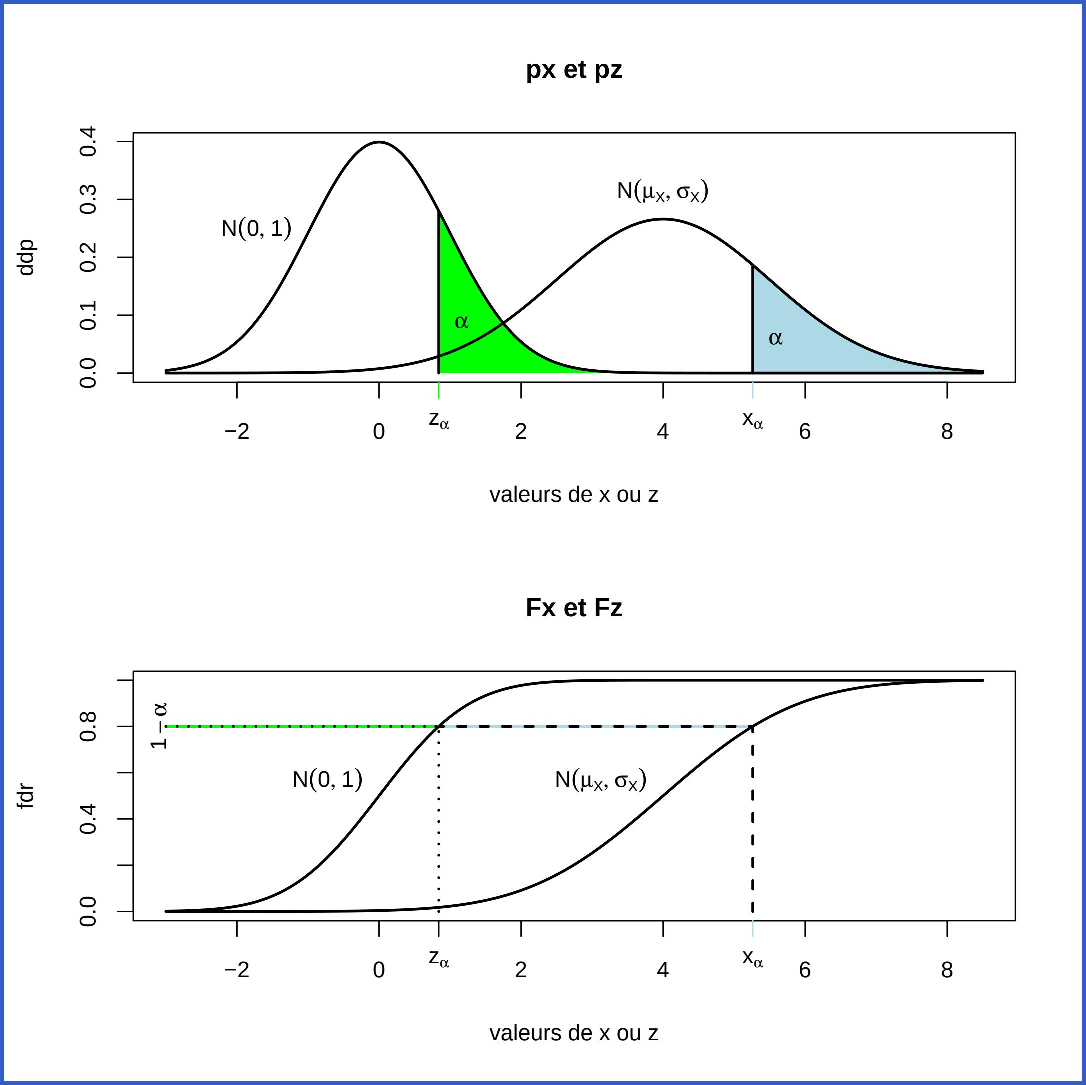
- $X : N(4, 1.5)$
- $Z : N(0, 1)$
- $X = \mu_X + Z\sigma_X$
- « Valeur critique » x_α :
  $P(\{X > x_\alpha\}) = \alpha$
- $\boxed{F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha}$

Distribution normale standard (centrée réduite)



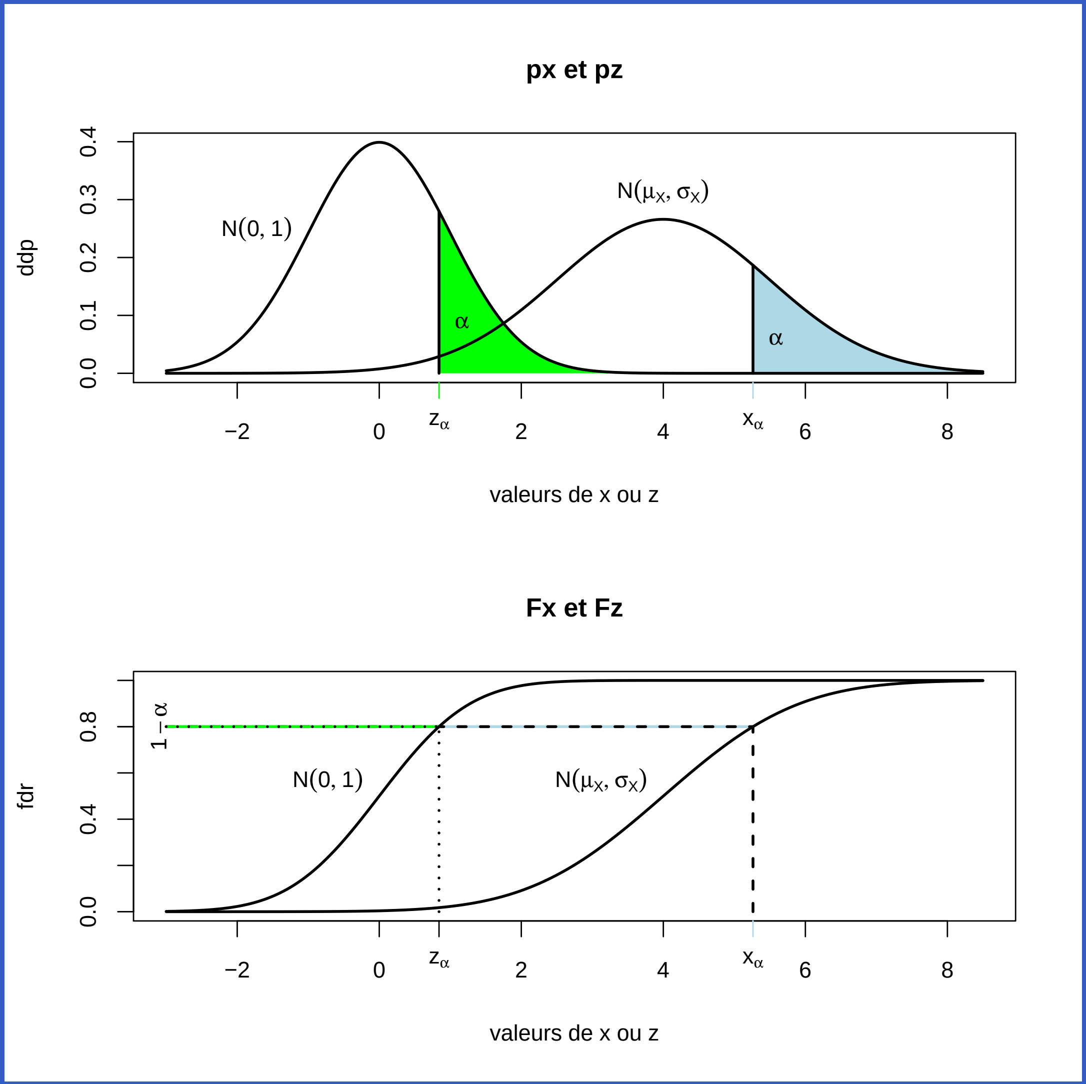
- $X : N(4, 1.5)$
- $Z : N(0, 1)$
- $X = \mu_X + Z\sigma_X$
- « Valeur critique » x_α : $P(\{X > x_\alpha\}) = \alpha$
- $\boxed{F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha}$
- « Valeur critique » z_α : $P(\{Z > z_\alpha\}) = \alpha$

Distribution normale standard (centrée réduite)



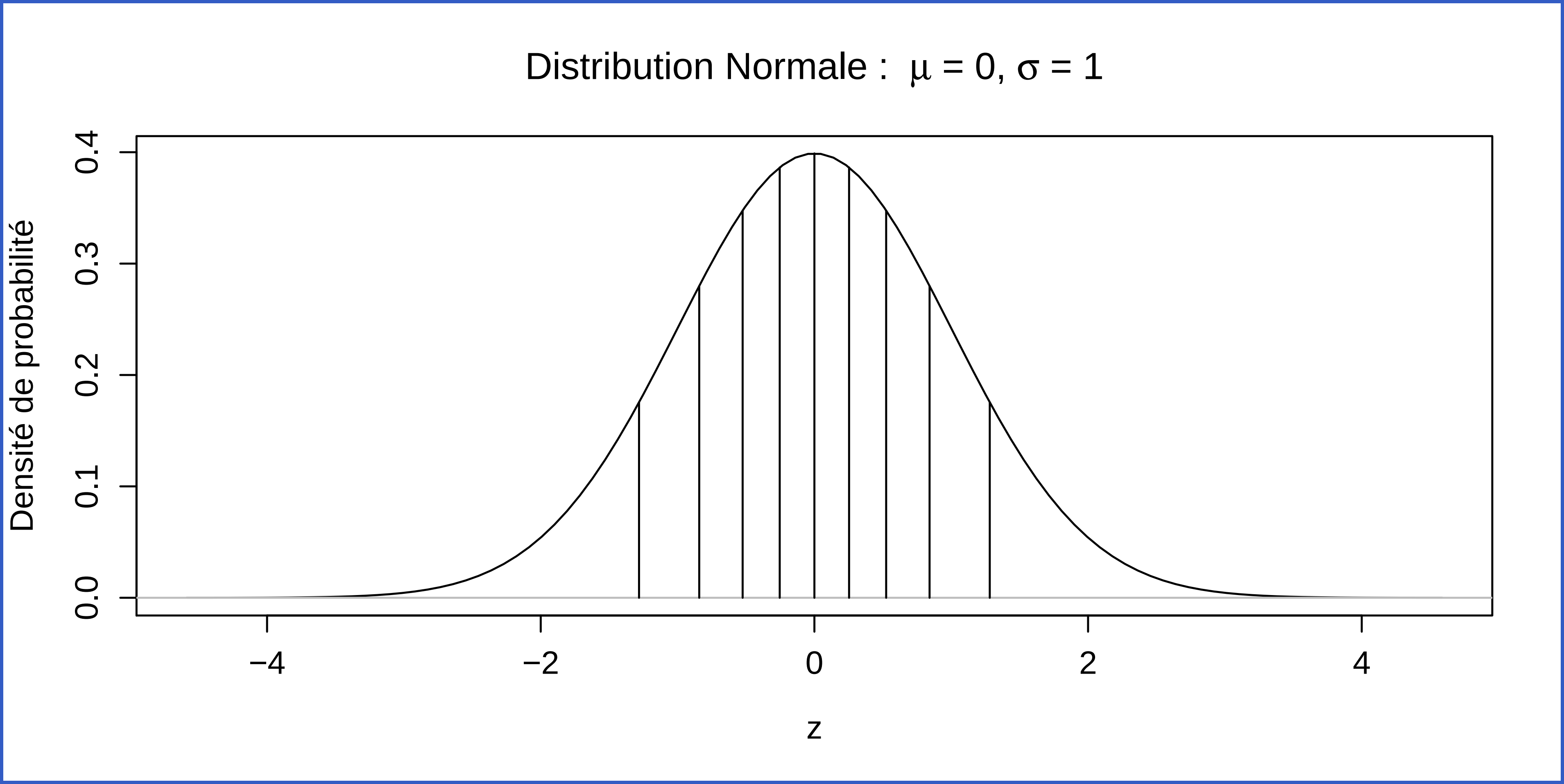
- $X : N(4, 1.5)$
- $Z : N(0, 1)$
- $X = \mu_X + Z\sigma_X$
- « Valeur critique » x_α : $P(\{X > x_\alpha\}) = \alpha$
- $\boxed{F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha}$
- « Valeur critique » z_α : $P(\{Z > z_\alpha\}) = \alpha$
- $\boxed{F_Z(z_\alpha) = 1 - \alpha}$

Distribution normale standard (centrée réduite)



- $X : N(4, 1.5)$
- $Z : N(0, 1)$
- $X = \mu_X + Z\sigma_X$
- « Valeur critique » x_α : $P(\{X > x_\alpha\}) = \alpha$
- $\boxed{F_X(x_\alpha) = 1 - \alpha}$
- « Valeur critique » z_α : $P(\{Z > z_\alpha\}) = \alpha$
- $\boxed{F_Z(z_\alpha) = 1 - \alpha}$
- $$\boxed{x_\alpha = \mu_X + z_\alpha \sigma_X}$$

Distribution normale standard (centrée réduite)



Propriétés de la loi normale

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$:

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)

   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$:

$$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1,x_2)$:
     $$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$:

     $$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1,x_2)$:
     $$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ
   - $\rho = 0 \Longrightarrow p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$:
   $$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
   $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ
   - $\rho = 0 \Longrightarrow p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$
2. La somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$:

     $$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ
   - $\rho = 0 \Longrightarrow p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$
2. La somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne
   - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normales $N(\mu_i, \sigma_i)$, indépendantes
   - $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$:

     $$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ
   - $\rho = 0 \Longrightarrow p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$
2. La somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne
   - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normales $N(\mu_i, \sigma_i)$, indépendantes
   - $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$
   - $\mu_X = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$:
     $$p_{X_1X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ
   - $\rho = 0 \Longrightarrow p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$
2. La somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne
   - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normales $N(\mu_i, \sigma_i)$, indépendantes
   - $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$
   - $\mu_X = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$
   - $\sigma_X^2 \overset{\text{ind}}{=} a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$

Propriétés de la loi normale

1. Deux gaussiennes décoréllées sont indépendantes (l'exception !)
   - X_1, X_2 conjointement normales : ddp conjointe $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$:
     $$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \right.$$
     $$\left. -2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$
   - ddp marginales : $X_1 = N(\mu_1, \sigma_1)$ et $X_2 = N(\mu_2, \sigma_2)$
   - coefficient de corrélation linéaire : ρ
   - $\rho = 0 \Longrightarrow p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$
2. La somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne
   - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normales $N(\mu_i, \sigma_i)$, indépendantes
   - $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = \sum_{i=1}^n a_iX_i$
   - $\mu_X = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_n\mu_n = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i$
   - $\sigma_X^2 \overset{\text{ind}}{=} a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$
   - $\boxed{X : N(\mu_X, \sigma_X)}$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :
   $p_X(x) = P(\{X = x\})$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :
   $p_X(x) = P(\{X = x\}) \overset{\text{prob. tot.}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\}) P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\})$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :

$$p_X(x) = P(\{X = x\}) \overset{\text{prob. tot.}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\})$$
$$\overset{\text{ind}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\})$$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :

$$
\begin{aligned}
p_X(x) = P(\{X = x\}) &\overset{\text{prob. tot.}}{=} \textstyle\sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\}) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \textstyle\sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\}) \\
&= \textstyle\sum_{x_1} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x - x_1)
\end{aligned}
$$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :

$$\begin{aligned} p_X(x) = P(\{X = x\}) &\overset{\text{prob. tot.}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\}) \\ &\overset{\text{ind}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\}) \\ &= \sum_{x_1} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x - x_1) = p_{X_1} \star p_{X_2} \end{aligned}$$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :

$$
\begin{aligned}
p_X(x) = P(\{X = x\}) &\overset{\text{prob. tot.}}{=} \textstyle\sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\}) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \textstyle\sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\}) \\
&= \textstyle\sum_{x_1} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x - x_1) = p_{X_1} \star p_{X_2}
\end{aligned}
$$

2. Cas v.a.c. :

$$
\begin{aligned}
p_X(x) &= \text{sans démonstration} \\
&= \textstyle\int_{x'} p_{X_1}(x')p_{X_2}(x - x')\,\mathrm{d}x'
\end{aligned}
$$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :
$$\begin{aligned} p_X(x) = P(\{X = x\}) &\overset{\text{prob. tot.}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\}) \\ &\overset{\text{ind}}{=} \sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\}) \\ &= \sum_{x_1} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x - x_1) = p_{X_1} \star p_{X_2} \end{aligned}$$
2. Cas v.a.c. :
$$\begin{aligned} p_X(x) &= \text{sans démonstration} \\ &= \int_{x'} p_{X_1}(x')p_{X_2}(x - x')\,\mathrm{d}x' = p_{X_1} \star p_{X_2} \end{aligned}$$

Somme de deux v.a. indépendantes

- X_1, X_2 : v.a. indépendantes (pas nécessairement identiques)
- $X = X_1 + X_2$: nouvelle v.a.
- Comment trouver $p_X(x)$ à partir de $p_{X_1}(x_1)$ et $p_{X_2}(x_2)$?

1. Cas v.a.d. :

$$\begin{aligned} p_X(x) = P(\{X = x\}) &\overset{\text{prob. tot.}}{=} \textstyle\sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1 | X_1 = x_1\}) \\ &\overset{\text{ind}}{=} \textstyle\sum_{x_1} P(\{X_1 = x_1\})P(\{X_2 = x - x_1\}) \\ &= \textstyle\sum_{x_1} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x - x_1) = p_{X_1} \star p_{X_2} \end{aligned}$$

2. Cas v.a.c. :

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \text{sans démonstration} \\ &= \textstyle\int_{x'} p_{X_1}(x')p_{X_2}(x - x')\,\mathrm{d}x' = p_{X_1} \star p_{X_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{X = X_1 + X_2 \overset{\text{ind}}{\Longrightarrow} p_X = p_{X_1} \star p_{X_2}}$$

[Théorème limite central]

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
-
$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X \ , \ \sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \stackrel{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X \ , \ \sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \stackrel{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}}$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X \ , \ \sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \overset{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X}$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X \ , \ \sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma_{S_n}^2 \overset{\text{ind}}{=} n\sigma_X^2$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0}$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \stackrel{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma^2_{Z_n} = 1}$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X \ , \ \sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \overset{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma^2_{Z_n} = 1}$$

- TLC :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\{Z_n \leq z\}\right)$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma_{S_n}^2 \overset{\text{ind}}{=} n\sigma_X^2$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma_{Z_n}^2 = 1}$$

- TLC :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\{Z_n \leq z\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \overset{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma^2_{Z_n} = 1}$$

- TLC :
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\{Z_n \leq z\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u$$

- TLC :
$n \to \infty$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X \ , \ \sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \overset{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma^2_{Z_n} = 1}$$

- TLC :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\{Z_n \leq z\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u$$

- TLC :

$$\boxed{n \rightarrow \infty \ : \ Z_n \rightarrow N(0,1)}$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma_{S_n}^2 \stackrel{\text{ind}}{=} n\sigma_X^2$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma_{Z_n}^2 = 1}$$

- TLC :
$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\{Z_n \leq z\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u$$

- TLC :
$$\boxed{n \rightarrow \infty \ : \ Z_n \rightarrow N(0,1)} \ , \ S_n \rightarrow N(n\mu_X, \sqrt{n}\sigma_X)$$

[Théorème limite central]

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$: série de v.a. indépendantes
- $p_{X_1}(x) = \ldots = p_{X_n}(x) = p_X(x)$ (même distribution)
- $\mathrm{E}[X_1] = \ldots = \mathrm{E}[X_n] = \mu_X$, $\sigma_{X_1} = \ldots = \sigma_{X_n} = \sigma_X$
- $$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \ , \ \mathrm{E}[S_n] = n\mu_X \ , \ \sigma^2_{S_n} \overset{\text{ind}}{=} n\sigma^2_X$$

$$\boxed{Z_n = \frac{S_n - \mu_{S_n}}{\sigma_{S_n}}} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu_X}{\sqrt{n}\sigma_X} \ , \ \boxed{\mathrm{E}[Z_n] = 0} \ , \ \boxed{\sigma^2_{Z_n} = 1}$$

- TLC :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\{Z_n \le z\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u$$

- TLC :

$$\boxed{n \to \infty \ : \ Z_n \to N(0,1)} \ , \ S_n \to N(n\mu_X, \sqrt{n}\sigma_X) \ , \ \frac{S_n}{n} \to N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right)$$

Théorie d'échantillonnage – un échantillon

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)
  - $n > 30$: $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (tlc)

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)
  - $n > 30 : \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (tlc)
  - $n < 30 : \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ si $p_X(x)$ « presque » normale

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)
  - $n > 30$: $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (tlc)
  - $n < 30$: $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ si $p_X(x)$ « presque » normale
- Presque toujours : $\boxed{\bar{X} = N(\mu, \sigma/\sqrt{n})}$

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)
  - $n > 30$: $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (tlc)
  - $n < 30$: $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ si $p_X(x)$ « presque » normale
- Presque toujours : $\boxed{\bar{X} = N(\mu, \sigma/\sqrt{n})}$
  - $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)
  - $n > 30 : \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (tlc)
  - $n < 30 : \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ si $p_X(x)$ « presque » normale
- Presque toujours : $\boxed{\bar{X} = N(\mu, \sigma/\sqrt{n})}$
  - $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$
  - $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ (définition de z_α « valeur critique »)

Distribution de la moyenne

- Échantillon aléatoire de taille n ; moyenne $\bar{X}$
- Population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\bar{X}$: normale (combinaison linéaire de v.a. normales)
  - $\mu_{\bar{X}} = \mu$
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (σ connu)
- Population non normale (σ connu)
  - $n > 30 : \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (tlc)
  - $n < 30 : \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ si $p_X(x)$ « presque » normale
- Presque toujours : $\boxed{\bar{X} = N(\mu, \sigma/\sqrt{n})}$
  - $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
  - $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ (définition de z_α « valeur critique »)
  - $P(Z < -z_\alpha) = \alpha$ (symétrie de la normale)

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}}$

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}}$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ (non définie pour $\nu \leq 2$)

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ (non définie pour $\nu \leq 2$)
- $P(T > t_\alpha) = \alpha$ (définition de t_α, valeur critique)

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ (non définie pour $\nu \leq 2$)
- $P(T > t_\alpha) = \alpha$ (définition de t_α, valeur critique)
- $P(T < -t_\alpha) = \alpha$ (symétrie de la loi t)

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ (non définie pour $\nu \leq 2$)
- $P(T > t_\alpha) = \alpha$ (définition de t_α, valeur critique)
- $P(T < -t_\alpha) = \alpha$ (symétrie de la loi t)
- $n \geq 30$: $s \to \sigma$

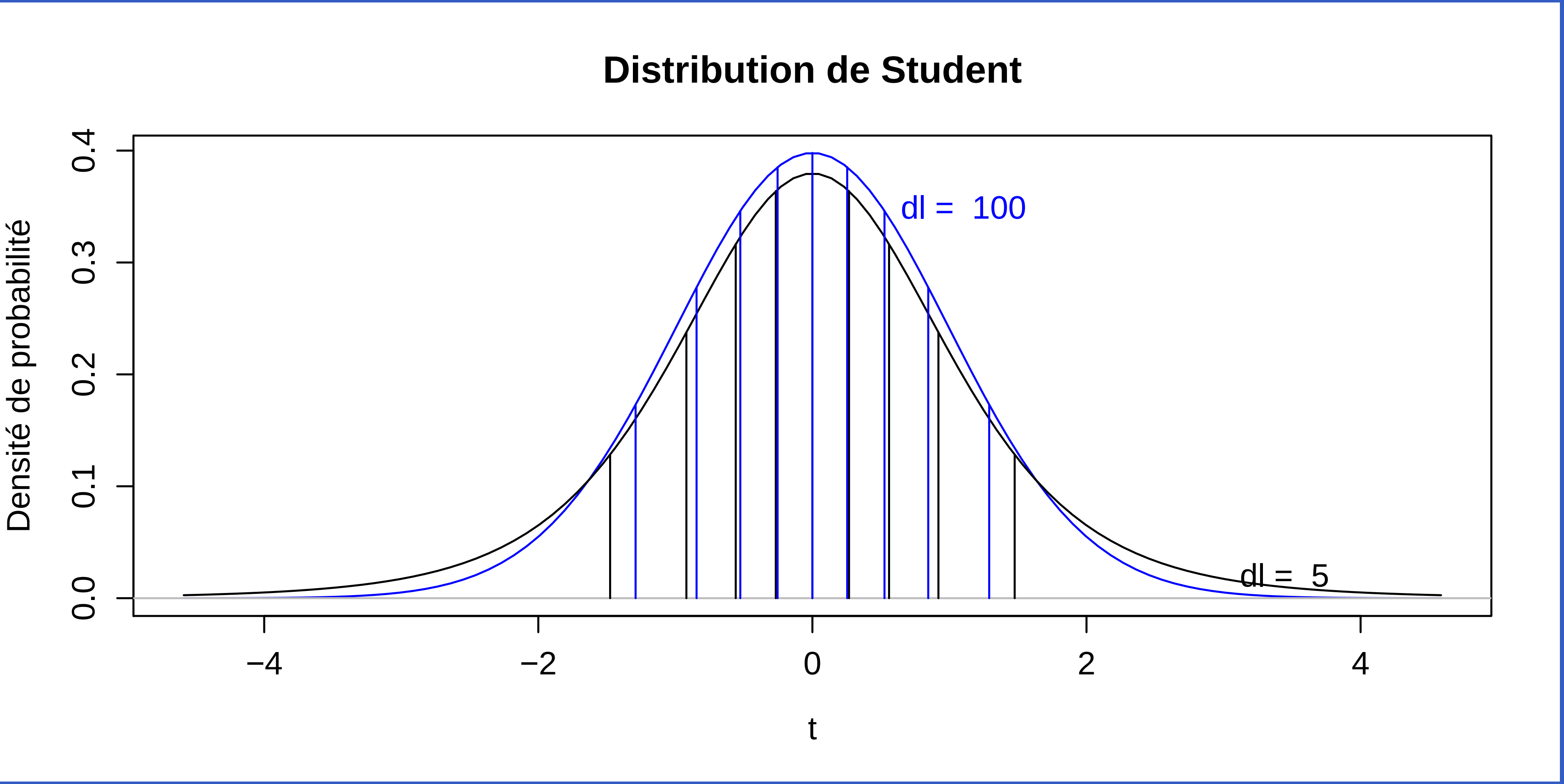
Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ (non définie pour $\nu \leq 2$)
- $P(T > t_\alpha) = \alpha$ (définition de t_α, valeur critique)
- $P(T < -t_\alpha) = \alpha$ (symétrie de la loi t)
- $n \geq 30$: $s \to \sigma$ donc $T \to Z$

Distribution de la moyenne ; σ_X inconnue

- $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S^2/\sigma^2}} = \frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$
- $V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$: loi du χ^2 à $\nu = n-1$ d.l.
- Condition : population normale
- Z, V indépendantes
- $\boxed{T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ : loi de Student à } \nu = n-1 \text{ d.l.}}$
- $\mathrm{E}[T] = 0$
- $\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ (non définie pour $\nu \leq 2$)
- $P(T > t_\alpha) = \alpha$ (définition de t_α, valeur critique)
- $P(T < -t_\alpha) = \alpha$ (symétrie de la loi t)
- $n \geq 30$: $s \to \sigma$ donc $T \to Z$
- "Student" : W.S. Gosset, 1908

Distribution de Student



$$\mathrm{E}[T] = 0 \quad , \quad \sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} > 1 \text{ (non définie pour } \nu \leq 2)$$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$
  - $X^2 > 0$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$
  - $X^2 > 0$
  - $\mathrm{E}\left[X^2\right] = n - 1$

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$
  - $X^2 > 0$
  - $\mathrm{E}[X^2] = n - 1 \longrightarrow \boxed{\mathrm{E}[S^2] = \sigma^2}$

Distribution de la variance

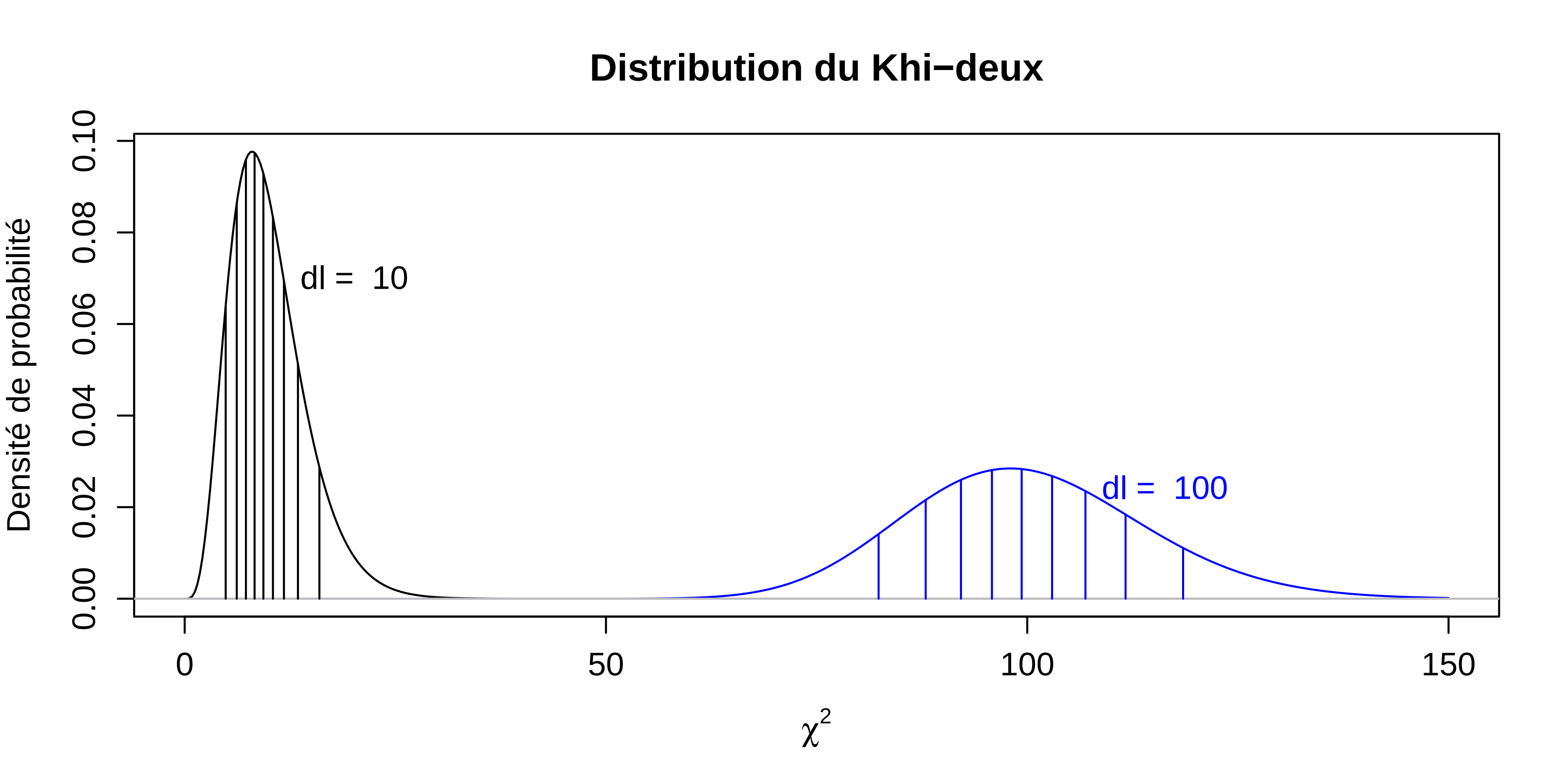
- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$
  - $X^2 > 0$
  - $\mathrm{E}\left[X^2\right] = n - 1 \longrightarrow \boxed{\mathrm{E}\left[S^2\right] = \sigma^2}$
  - $\sigma^2_{X^2} = 2(n-1)$

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$
  - $X^2 > 0$
  - $\mathrm{E}[X^2] = n - 1 \longrightarrow \boxed{\mathrm{E}[S^2] = \sigma^2}$
  - $\sigma^2_{X^2} = 2(n-1) \longrightarrow \sigma^2_{S^2} = 2\sigma^4/(n-1)$

Distribution de la variance

- Échantillon aléatoire de taille n ; variance S^2
  - Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
  - $\boxed{X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$
  - $\boxed{X^2 \text{ : v.a. loi du } \chi^2 \text{ à } \nu = n-1 \text{ degrés de liberté (d.l.)}}$
  - $X^2 > 0$
  - $\mathrm{E}[X^2] = n-1 \longrightarrow \boxed{\mathrm{E}[S^2] = \sigma^2}$
  - $\sigma^2_{X^2} = 2(n-1) \longrightarrow \sigma^2_{S^2} = 2\sigma^4/(n-1)$
  - $P(X^2 > \chi^2_\alpha(\nu)) = \alpha$ (définition de $\chi^2_\alpha(\nu)$, valeur critique)

Distribution du χ^2



$$\mathrm{E}\left[X^2\right] = n - 1 \quad , \quad \sigma^2_{X^2} = 2(n-1)$$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14$!)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :
  - $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :
  - $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n = \mu_X = \pi$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :
  - $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n = \mu_X = \pi \quad , \quad \sigma^2_{\hat{P}} \overset{\text{ind}}{=} (n\sigma^2_X)/n^2$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :
  - $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n = \mu_X = \pi \quad , \quad \sigma^2_{\hat{P}} \overset{\text{ind}}{=} (n\sigma^2_X)/n^2 = \pi(1 - \pi)/n$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1-\hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :
  - $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n = \mu_X = \pi \quad , \quad \sigma^2_{\hat{P}} \overset{\text{ind}}{=} (n\sigma^2_X)/n^2 = \pi(1-\pi)/n$
  - $\boxed{\hat{P} \text{ : normale } N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)}$

Distribution de la proportion

- Population
  - π : proportion d'individus possédant un caractère qualitatif ($\pi \neq 3.14\,!$)
- Échantillon aléatoire de taille n
  - n v.a. X_i ; $x_i \in \{0, 1\}$: Bernoulli indépendantes, de paramètre π
  - $\sum_{i=1}^{n} X_i$: nombre d'individus possédant le caractère (fréquence)
  - $\boxed{\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ : proportion d'individus (fréquence relative)}}$
- Conditions :
  - $n > 30$ (grand échantillon : théorème limite central)
  - $n\hat{p} \geq 5$ (fréquence de présence du caractère)
  - $n(1 - \hat{p}) = n - n\hat{p} \geq 5$ (fréquence d'absence du caractère)
  - ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
- Distribution :
  - $\mu_{\hat{P}} = (n\mu_X)/n = \mu_X = \pi \quad , \quad \sigma^2_{\hat{P}} \overset{\text{ind}}{=} (n\sigma^2_X)/n^2 = \pi(1 - \pi)/n$
  - $\boxed{\hat{P} \text{ : normale } N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)} \rightarrow Z$: normale $N(0, 1)$

Théorie d'échantillonnage – deux échantillons

Distribution de la différence des moyennes

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales

Distribution de la différence des moyennes

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$

Distribution de la différence des moyennes

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2}$

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$

Distribution de la différence des moyennes

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$

Distribution de la différence des moyennes

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \overset{\text{ind}}{=} \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2}$

Distribution de la différence des moyennes

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \overset{\text{ind}}{=} \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \overset{\text{ind}}{=} \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- D'autres cas à examiner ultérieurement...

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}}$

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- $\boxed{F \text{ : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ d.l.}}$

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- $\boxed{F \text{ : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ d.l.}}$
- $F \geq 0$

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- $\boxed{F \text{ : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ d.l.}}$
- $F \geq 0$
- $\mathrm{E}[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$ $(\nu_2 > 2)$

Distribution du rapport des variances

- Théorie d'échantillonnage – deux échantillons
  - Distribution de la différence des moyennes
  - Distribution du rapport des variances
  - Distribution de Fisher

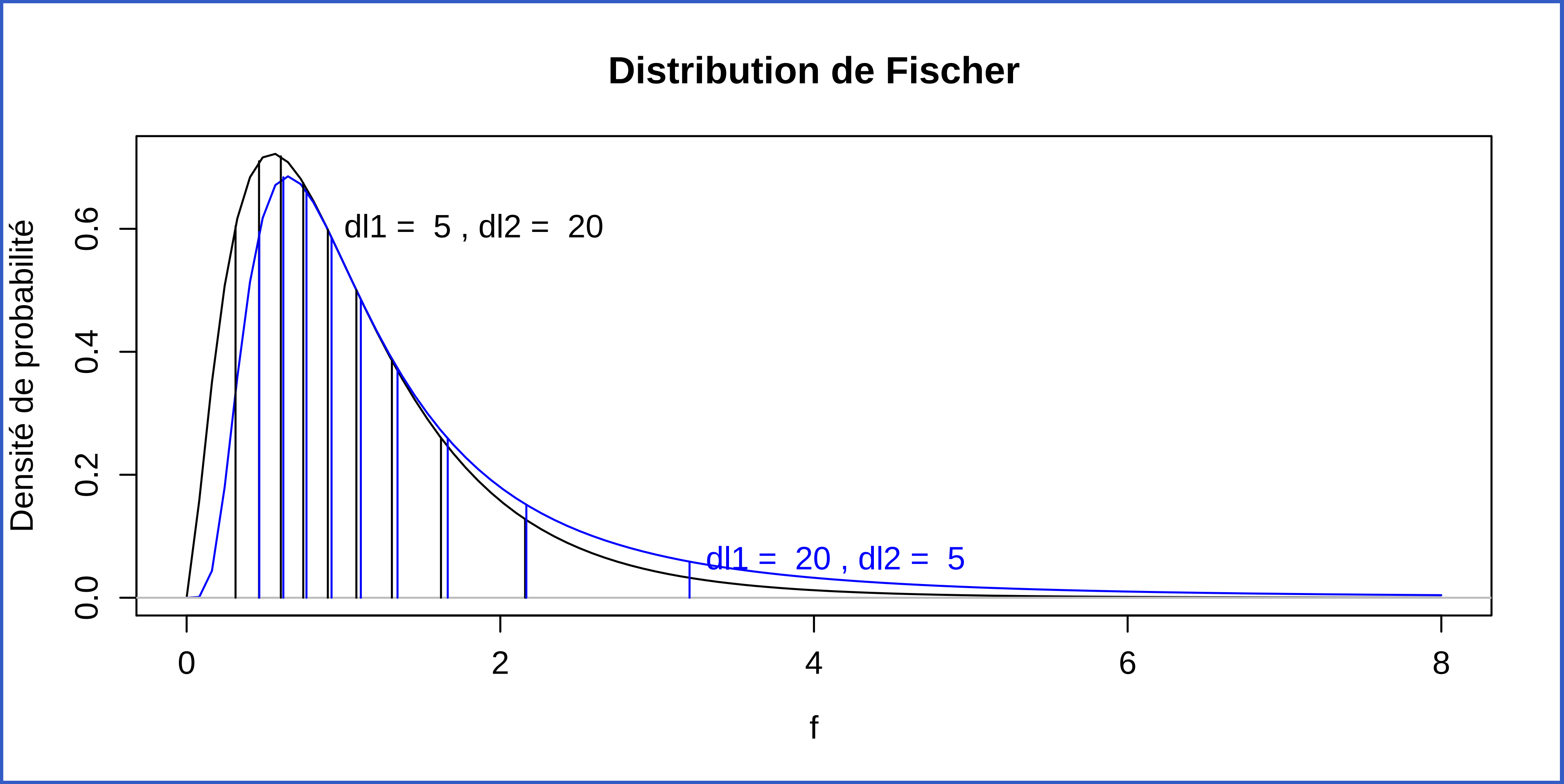
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- $\boxed{F \text{ : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ d.l.}}$
- $F \geq 0$
- $\mathrm{E}[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}\ (\nu_2 > 2)$
- $\sigma_F^2 = \frac{\nu_2^2(2\nu_1+2\nu_2-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}\ (\nu_2 > 4)$

Distribution du rapport des variances

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- $\boxed{F \text{ : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ d.l.}}$
- $F \geq 0$
- $\mathrm{E}[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$ $(\nu_2 > 2)$
- $\sigma_F^2 = \frac{\nu_2^2(2\nu_1+2\nu_2-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ $(\nu_2 > 4)$
- $P(F > f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$ (définition de $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$, v.c.)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $\boxed{F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- $\boxed{F \text{ : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec } \nu_1 \text{ et } \nu_2 \text{ d.l.}}$
- $F \geq 0$
- $\mathrm{E}[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$ $(\nu_2 > 2)$
- $\sigma_F^2 = \frac{\nu_2^2(2\nu_1+2\nu_2-4)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}$ $(\nu_2 > 4)$
- $P(F > f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$ (définition de $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$, v.c.)
- $\boxed{f_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \dfrac{1}{f_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)}}$ (propriété de la loi F)

Distribution de Fisher



$$f_\alpha(\nu_1, \nu_2) = 1/f_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)$$

Estimation – intervalles de confiance

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne
    $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$
  - Estimateur convergent : $n \to \infty \quad : \quad \mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ et $\mathrm{var}[\hat{\Theta}] = 0$

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$
  - Estimateur convergent : $n \to \infty \quad : \quad \mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ et $\mathrm{var}[\hat{\Theta}] = 0$
- Estimation par intervalle de confiance

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais = $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$
  - Estimateur convergent : $n \to \infty$: $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ et $\mathrm{var}[\hat{\Theta}] = 0$
- Estimation par intervalle de confiance
  - v.a. $\hat{\Theta}_L$, $\hat{\Theta}_H$: estimateurs ponctuels

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$
  - Estimateur convergent : $n \to \infty \quad : \quad \mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ et $\mathrm{var}[\hat{\Theta}] = 0$
- Estimation par intervalle de confiance
  - v.a. $\hat{\Theta}_L$, $\hat{\Theta}_H$: estimateurs ponctuels
  - $P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_H) = 1 - \alpha$

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$
  - Estimateur convergent : $n \to \infty \quad : \quad \mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ et $\mathrm{var}[\hat{\Theta}] = 0$
- Estimation par intervalle de confiance
  - v.a. $\hat{\Theta}_L$, $\hat{\Theta}_H$: estimateurs ponctuels
  - $P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_H) = 1 - \alpha$
  - $\boxed{\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_H}$: intervalle de confiance

Définitions

- Estimation ponctuelle
  - Paramètre à estimer : θ
  - Estimateur : v.a. $\hat{\Theta}$
  - Estimateur non biaisé : $\mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$
  - Biais $= \mathrm{E}[\hat{\Theta}] - \theta$
  - Estimateur efficace : sans biais ; de faible variance
  - Estimateur efficace : minimiser l'erreur quadratique moyenne $\mathrm{E}\left[(\hat{\Theta} - \theta)^2\right] = \sigma^2_{\hat{\Theta}} + (\text{biais})^2$
  - Estimateur convergent : $n \to \infty \quad : \quad \mathrm{E}[\hat{\Theta}] = \theta$ et $\mathrm{var}[\hat{\Theta}] = 0$
- Estimation par intervalle de confiance
  - v.a. $\hat{\Theta}_L$, $\hat{\Theta}_H$: estimateurs ponctuels
  - $P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_H) = 1 - \alpha$
  - $\boxed{\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_H}$: intervalle de confiance
  - $1 - \alpha$: niveau de confiance

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0, 1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0,1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0,1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0,1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$
- $1 - \alpha = 0.95$, $z_{\alpha/2} =$`qnorm(0.025,mean=0,sd=1,lower.tail=FALSE)`$= 1.96$

Estimation de la moyenne (1/3)

- Variance σ^2 connue
- $\bar{X}$: normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
- $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$: normale $N(0,1)$
- $\bar{X}$ estimateur non biaisé et convergent de μ
- $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $z_{\alpha/2}$)
- $P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la normale)
- $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}$
- $1 - \alpha = 0.95$, $z_{\alpha/2} =$`qnorm(0.025,mean=0,sd=1,lower.tail=FALSE)`$= 1.96$
- $1 - \alpha = 0.99$, $z_{\alpha/2} =$`qnorm(0.005,mean=0,sd=1,lower.tail=FALSE)`$= 2.56$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\mathsf{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\mathsf{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\mathsf{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\mathsf{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\mathsf{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\mathsf{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\mathsf{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\mathsf{max}}$ à $1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\text{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\text{max}}$ à $1 - \alpha$
- Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\text{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\text{max}}$ à $1 - \alpha$
- Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement
  - Population de taille N

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\text{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\text{max}}$ à $1 - \alpha$
- Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement
  - Population de taille N
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\text{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\text{max}}$ à $1 - \alpha$
- Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement
  - Population de taille N
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \overset{N \gg 1}{\approx} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N}}$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\text{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\text{max}}$ à $1 - \alpha$
- Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement
  - Population de taille N
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \overset{N\gg 1}{\approx} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}}$

Estimation de la moyenne (2/3) : taille de l'échantillon

- $P(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(|\bar{X} - \mu| < z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $e = |\bar{X} - \mu|$: erreur
- $e_{\text{max}} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: marge d'erreur à $1 - \alpha$
- $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- $\bar{X} - e_{\text{max}} < \mu < \bar{X} + e_{\text{max}}$ à $1 - \alpha$
- Cas particulier : échantillonnage d'une population finie, sans remplacement
  - Population de taille N
  - $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \overset{N \gg 1}{\approx} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}}$
  - $n_{\text{min}} = \frac{N z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{N e_{\text{max}}^2 + z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}$: taille d'échantillon minimale

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n - 1$ d.l.

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n - 1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$
- $1 - \alpha = 0.95$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.025,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.05$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$
- $1 - \alpha = 0.95$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.025,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.05$
- $1 - \alpha = 0.99$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.005,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.76$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$
- $1 - \alpha = 0.95$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.025,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.05$
- $1 - \alpha = 0.99$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.005,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.76$
- Rappel : $n \geq 30$, $T \to Z$

Estimation de la moyenne (3/3)

- Variance σ^2 inconnue
- Population normale
- $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$: Student à $n-1$ d.l.
- $P(T > t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (définition de $t_{\alpha/2}$)
- $P(T < -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$ (symétrie de la loi t)
- $P(-t_{\alpha/2} < T < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P(-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $P(\bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
- $\hat{\Theta}_L = \bar{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, $\hat{\Theta}_H = \bar{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$
- $1 - \alpha = 0.95$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.025,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.05$
- $1 - \alpha = 0.99$, $t_{\alpha/2} =$`qt(0.005,df=29,lower.tail=FALSE)`$= 2.76$
- Rappel : $n \geq 30$, $T \rightarrow Z$
- T : petits échantillons !

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- X^2 : v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (d.l.)

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- X^2 : v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (d.l.)
- $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$
- X^2 : v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (d.l.)
- $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- X^2 : v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (d.l.)
- $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- X^2 : v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (d.l.)
- $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}\right) = 1 - \alpha$

Estimation de la variance (un échantillon)

- Condition : population normale $N(\mu, \sigma)$
- $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$
- X^2 : v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (d.l.)
- $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}\right) = 1 - \alpha$
- Intervalle de confiance :

  $\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}$ à un niveau de confiance de $(1 - \alpha)100\%$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, $n\hat{p} \geq 5$, $n(1 - \hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
  - $\hat{P} = N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
  - $\hat{P} = N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$
- Les proportions (fréquences relatives) sont des moyennes !

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
  - $\hat{P} = N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$
- Les proportions (fréquences relatives) sont des moyennes !
- $\bar{X} \longrightarrow \hat{P}$: remplacer

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
  - $\hat{P} = N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$
- Les proportions (fréquences relatives) sont des moyennes !
- $\bar{X} \longrightarrow \hat{P}$: remplacer
  - $\mu \longrightarrow \pi$

Proportion = moyenne

- Caractère quantitatif (rappel)
  - Moyenne : $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, σ connu
  - $\bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- Caractère qualitatif
  - Proportion : $\hat{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - $n > 30$, $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$
  - $\hat{P} = N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$
- Les proportions (fréquences relatives) sont des moyennes !
- $\bar{X} \longrightarrow \hat{P}$: remplacer
  - $\mu \longrightarrow \pi$
  - $\sigma \longrightarrow \sqrt{\pi(1-\pi)}$

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\mathsf{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\mathsf{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- Caractère qualitatif

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$: $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- Caractère qualitatif
  - $P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1 - \alpha$

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- Caractère qualitatif
  - $P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < \pi < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$: $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- Caractère qualitatif
  - $P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$: $\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < \pi < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e_{\text{max}}}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$: taille d'échantillon minimale

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\mathsf{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\mathsf{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- Caractère qualitatif
  - $P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < \pi < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
  - $n_{\mathsf{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e_{\mathsf{max}}}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$: taille d'échantillon minimale
    estimer $\hat{p}$ (1er échantillonage, $n \geq 30$)

Estimation de la proportion

- Caractère quantitatif (rappel)
  - $P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e_{\text{max}}}\right)^2$: taille d'échantillon minimale
- Caractère qualitatif
  - $P\left(\hat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1 - \alpha$
  - Intervalle de confiance à un niveau de confiance de $(1-\alpha)100\%$:
    $\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < \pi < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
  - $n_{\text{min}} = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e_{\text{max}}}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$: taille d'échantillon minimale
    estimer $\hat{p}$ (1er échantillonage, $n \geq 30$) ou prendre $\hat{p} = 0.5$ (pire scénario)

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher - Snedecor avec ν_1 et ν_2 d.l.

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher - Snedecor avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $P(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < F < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)) = 1 - \alpha$

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher - Snedecor avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $P(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < F < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)) = 1 - \alpha$
- $P\left(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)\right) = 1 - \alpha$

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher - Snedecor avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $P(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < F < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)) = 1 - \alpha$
- $P\left(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}\right) = 1 - \alpha$

Estimation du rapport des variances (deux échantillons)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher - Snedecor avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $P(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < F < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)) = 1 - \alpha$
- $P\left(f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2} f_{\alpha/2}(\nu_2, \nu_1)\right) = 1 - \alpha$

Tests d’hypothèse

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0
  - $H_0 : \theta = \theta_0$

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0
  - $H_0 : \theta = \theta_0$
- Hypothèse alternative (trois choix possibles)

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0
  - $H_0 : \theta = \theta_0$
- Hypothèse alternative (trois choix possibles)
  - $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (test bilatéral)
  - $H_1 : \theta < \theta_0$ (test unilatéral)
  - $H_1 : \theta > \theta_0$ (test unilatéral)

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0
  - $H_0 : \theta = \theta_0$
- Hypothèse alternative (trois choix possibles)
  - $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (test bilatéral)
  - $H_1 : \theta < \theta_0$ (test unilatéral)
  - $H_1 : \theta > \theta_0$ (test unilatéral)
- Test : procédure suivie afin d'accepter/rejeter H_0

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0
  - $H_0 : \theta = \theta_0$
- Hypothèse alternative (trois choix possibles)
  - $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (test bilatéral)
  - $H_1 : \theta < \theta_0$ (test unilatéral)
  - $H_1 : \theta > \theta_0$ (test unilatéral)
- Test : procédure suivie afin d'accepter/rejeter H_0
- Rejet > Acceptation (non-rejet)

Définitions

- Hypothèse : énoncé concernant les caractéristiques d'une population
- Hypothèse nulle : fixer un paramètre θ à une valeur particulière θ_0
  - $H_0 : \theta = \theta_0$
- Hypothèse alternative (trois choix possibles)
  - $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (test bilatéral)
  - $H_1 : \theta < \theta_0$ (test unilatéral)
  - $H_1 : \theta > \theta_0$ (test unilatéral)
- Test : procédure suivie afin d'accepter/rejeter H_0
- Rejet > Acceptation (non-rejet)
- En pratique : formuler H_0 comme l'opposé de ce qu'on veut démontrer !

Types et probabilités d'erreur

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision $\backslash$ *état du monde*	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I})$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie})$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK
- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II})$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie})$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1-\alpha$	β
rejet de H_0	α	$1-\beta$

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1 - \alpha$	β
rejet de H_0	α	$1 - \beta$

- α : seuil de signification

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1 - \alpha$	β
rejet de H_0	α	$1 - \beta$

- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1 - \alpha$	β
rejet de H_0	α	$1 - \beta$

- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0, ok)

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1 - \alpha$	β
rejet de H_0	α	$1 - \beta$

- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0, ok)
- $1 - \beta$: puissance du test

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1-\alpha$	β
rejet de H_0	α	$1-\beta$

- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0, ok)
- $1-\beta$: puissance du test (calculée dans l'univers de H_1

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK
- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$
Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1 - \alpha$	β
rejet de H_0	α	$1 - \beta$
- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0, ok)
- $1 - \beta$: puissance du test (calculée dans l'univers de H_1, ? ? ?)

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1-\alpha$	β
rejet de H_0	α	$1-\beta$

- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0, ok)
- $1-\beta$: puissance du test (calculée dans l'univers de H_1, ? ? ?)
  - Préciser H_1

Types et probabilités d'erreur

Types d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	OK	Type II
rejet de H_0	Type I	OK

- $P(\text{Type I}) = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = \alpha$
- $P(\text{Type II}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie}) = \beta$

Probabilités d'erreur		
décision \ état du monde	H_0 vraie	H_1 vraie
non-rejet de H_0	$1 - \alpha$	β
rejet de H_0	α	$1 - \beta$

- α : seuil de signification (calculé dans l'univers de H_0, ok)
- $1 - \beta$: puissance du test (calculée dans l'univers de H_1, ? ? ?)
  - Préciser H_1, ensuite calculer une valeur de β liée à cette H_1

Tests : la procédure à suivre

Tests : la procédure à suivre

1. Formuler les hypothèses H_0 et H_1
2. Choisir le seuil de signification α (typiquement 1% ou 5%)
3. Déterminer la statistique utilisée ainsi que sa distribution
4. Définir la région critique (région de rejet de H_0)
5. Adopter une règle de décision (à partir des valeurs critiques)
6. Prélever un échantillon et faire les calculs
7. Décider

Test sur une moyenne (1/3)

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. P(non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie) $= 1 - \alpha$
   P(non-rejet de $H_0 | \mu = \mu_0$) $= 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < -z_{\alpha/2}$ et
   $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_{\alpha/2}$

Test sur une moyenne (1/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(z_{1-\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < -z_{\alpha/2}$ et
   $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $\bar{x} < \bar{x}_{c1} = \mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ou $\bar{x} > \bar{x}_{c2} = \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Test sur une moyenne (2/3)

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha) = 1 - \alpha$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha) = 1 - \alpha$
   région critique

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha$

Test sur une moyenne (2/3)

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :
   $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ si on connaît σ ou n grand (cas présenté dans la suite)
   $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$ si on ne connaît pas σ et n petit (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P(Z < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha$
   $P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) < z_\alpha) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie})$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = P(\text{rejet de } H_0 | \mu = \mu_0)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P$(rejet de $H_0 | H_0$ vraie)$= P$(rejet de $H_0 | \mu = \mu_0$)$= P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = P(\text{rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- H_0 : $\mu = \mu_0$, H_1 : $\mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P$(rejet de $H_0|H_0$ vraie)$= P$(rejet de $H_0|\mu = \mu_0$)$= P(Z > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P$(rejet de $H_1|H_1$ vraie)

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$)= P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0)= P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1 | H_1$ vraie$)= P($non-rejet de $H_0 | H_1$ vraie$)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0|H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0|\mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1|H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0|H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c|H_1$ vraie$)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1 | H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0 | H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1$ vraie$)$
- Préciser H_1

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P$(rejet de $H_0|H_0$ vraie)$= P$(rejet de $H_0|\mu = \mu_0$)$= P(Z > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P$(rejet de $H_1|H_1$ vraie)$= P$(non-rejet de $H_0|H_1$ vraie)
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c|H_1$ vraie)
- Préciser $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0|H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0|\mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha|\mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1|H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0|H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c|H_1$ vraie$)$
- Préciser $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$
- $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c|\mu = \mu_0 + \delta)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1 | H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0 | H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1$ vraie$)$
- Préciser $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$
- $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = \mu_0 + \delta) = P(Z < (\bar{x}_c - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) | \mu = \mu_0 + \delta)$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- H_0 : $\mu = \mu_0$, H_1 : $\mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1 | H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0 | H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1$ vraie$)$
- Préciser H_1 : $\mu = \mu_0 + \delta$
- $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = \mu_0 + \delta) = P(Z < (\bar{x}_c - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) | \mu = \mu_0 + \delta)$
- $= P(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1 | H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0 | H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1$ vraie$)$
- Préciser $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$
- $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = \mu_0 + \delta) = P(Z < (\bar{x}_c - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) | \mu = \mu_0 + \delta)$
- $= P(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- $= P(Z < z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P($rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = P($rejet de $H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P($rejet de $H_1 | H_1$ vraie$) = P($non-rejet de $H_0 | H_1$ vraie$)$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1$ vraie$)$
- Préciser $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$
- $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = \mu_0 + \delta) = P(Z < (\bar{x}_c - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) | \mu = \mu_0 + \delta)$
- $= P(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- $= P(Z < z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- $-z_\beta = z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}$

Test sur une moyenne (3/3) : taille de l'échantillon

- $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral)
- $\alpha = P(\text{rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = P(\text{rejet de } H_0 | \mu = \mu_0) = P(Z > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha | \mu = \mu_0)$
  $= P((\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha)$
- Règle de décision : rejeter H_0 si $\bar{x} > \bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- $\beta = P(\text{rejet de } H_1 | H_1 \text{ vraie}) = P(\text{non-rejet de } H_0 | H_1 \text{ vraie})$
  $= P(\bar{X} < \bar{x}_c | H_1 \text{ vraie})$
- Préciser $H_1 : \mu = \mu_0 + \delta$
- $\beta = P(\bar{X} < \bar{x}_c | \mu = \mu_0 + \delta) = P(Z < (\bar{x}_c - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) | \mu = \mu_0 + \delta)$
- $= P(Z < \frac{\bar{x}_c - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- $= P(Z < z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}})$
- $-z_\beta = z_\alpha - \frac{\delta}{\sigma/\sqrt{n}}$
- $n = (z_\alpha + z_\beta)^2 \frac{\sigma^2}{\delta^2}$

Test sur une variance (1/2)

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2} | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2} | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2} | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2 < \frac{\chi^2_{\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)}\right) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution : $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2} | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2 < \frac{\chi^2_{\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)}\right) = 1 - \alpha$
   région critique

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2} | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2 < \frac{\chi^2_{\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)}\right) = 1 - \alpha$
   région critique : $X^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ et $X^2 > \chi^2_{\alpha/2}$

Test sur une variance (1/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < X^2 < \chi^2_{\alpha/2} | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2 < \frac{\chi^2_{\alpha/2}\sigma_0^2}{(n-1)}\right) = 1 - \alpha$
   région critique : $X^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}$ et $X^2 > \chi^2_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $s^2 < s^2_{c1} = \chi^2_{1-\alpha/2}\sigma_0^2/(n-1)$ ou $s^2 > s^2_{c2} = \chi^2_{\alpha/2}\sigma_0^2/(n-1)$

Test sur une variance (2/2)

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté (population normale)

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0|H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0|\sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha} < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha} < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha} < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2\right) = 1 - \alpha$

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha} < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2\right) = 1 - \alpha$
   région critique

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha} < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2\right) = 1 - \alpha$
   région critique : $X^2 < \chi^2_{1-\alpha}$

Test sur une variance (2/2)

1. $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $H_1 : \sigma < \sigma_0$ (test unilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : S ; distribution :
   $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, v.a. loi du χ^2 à $\nu = n-1$ degrés de liberté (population normale)
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P(\chi^2_{1-\alpha} < X^2 | \sigma = \sigma_0) = 1 - \alpha$
   $P\left(\chi^2_{1-\alpha} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - \alpha$
   $P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha}\sigma_0^2}{(n-1)} < S^2\right) = 1 - \alpha$
   région critique : $X^2 < \chi^2_{1-\alpha}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $s^2 < s_c^2 = \chi^2_{1-\alpha}\sigma_0^2/(n-1)$

Test sur une proportion

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution : $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P(\text{non-rejet de } H_0 | H_0 \text{ vraie}) = 1 - \alpha$
   $P(\text{non-rejet de } H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z < -z_{\alpha/2}$ et $Z > z_{\alpha/2}$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z < -z_{\alpha/2}$ et $Z > z_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $\hat{p} < \hat{p}_{c1} = \pi_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$ ou $\hat{p} > \hat{p}_{c1} = \pi_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P($non-rejet de $H_0|H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0|\pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z < -z_{\alpha/2}$ et $Z > z_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $\hat{p} < \hat{p}_{c1} = \pi_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$ ou $\hat{p} > \hat{p}_{c1} = \pi_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi > \pi_0$ (test unilatéral)

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. $P($non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie$) = 1 - \alpha$
   $P($non-rejet de $H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z < -z_{\alpha/2}$ et $Z > z_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $\hat{p} < \hat{p}_{c1} = \pi_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$ ou $\hat{p} > \hat{p}_{c1} = \pi_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi > \pi_0$ (test unilatéral)
   ...
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$

Test sur une proportion

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi \neq \pi_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\hat{P}$; distribution :
   $Z = (\hat{P} - \pi)/(\sqrt{\pi(1-\pi)}/\sqrt{n})$
4. P(non-rejet de $H_0 | H_0$ vraie) $= 1 - \alpha$
   P(non-rejet de $H_0 | \pi = \pi_0) = 1 - \alpha$
   $P(-z_{\alpha/2} < (\hat{P} - \pi_0)/(\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}/\sqrt{n}) < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
   région critique : $Z < -z_{\alpha/2}$ et $Z > z_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $\hat{p} < \hat{p}_{c1} = \pi_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$ ou $\hat{p} > \hat{p}_{c1} = \pi_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$

1. $H_0 : \pi = \pi_0$, $H_1 : \pi > \pi_0$ (test unilatéral)
   ...
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
   c.à.d. $\hat{p} > \hat{p}_c = \pi_0 + z_\alpha \frac{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}{\sqrt{n}}$

Récapitulatif : un échantillon

Statistiques d'un échantillon : moyenne

Paramètre θ	μ			
Population Écart-type σ	$\approx$ normale connu	— connu	$\approx$ normale inconnu	
Échantillon	—	$n > 30$	$n > 30$	$n < 30$
Statistique $\hat{\Theta}$	$\bar{X}$			
St. normalisée	$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$		$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$
Distribution	$N(0,1)$			Student (ν)
D.L.	—			$n-1$
Mesure $\hat{\theta}$	$\bar{x}$			

Statistiques d'un échantillon : proportion, variance

Paramètre θ	π	σ^2
Population	—	$\approx$ normale
Écart-type σ	—	—
Échantillon	$n > 30$ [1]	—
Statistique $\hat{\Theta}$	$\hat{P}$	S^2
St. normalisée	$Z = \frac{\hat{P}-\pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}}$	$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
Distribution	$N(0,1)$	khi-deux (ν)
D.L.	—	$n-1$
Mesure $\hat{\theta}$	$\hat{p}$	s^2

[1] En plus : $n\hat{p} \geq 5$, $n(1-\hat{p}) \geq 5$, ni $\hat{p} \approx 0$, ni $\hat{p} \approx 1$.

Estimation / tests : un échantillon

Stat. norm.	Intervalle de confiance	Test d'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$		
		$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
Z	$-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $> z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_\alpha$	$z > z_\alpha$
T	$-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $> t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_\alpha$	$t > t_\alpha$
X^2	$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $> \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$	$\chi^2 > \chi^2_\alpha$
	mettre sous la forme : $\theta_L < \theta < \theta_H$	« entrer dans le monde de H_0 » : $\theta = \theta_0$, calculer z, t, χ^2 à partir des mesures ; décisions de *rejet* de H_0		

- Intervalle de confiance : niveau de confiance $1 - \alpha$
- Tests d'hypothèse : seuil de signification α
- Voir tableaux unifiés dans le document « Aide-mémoire ».

Intervalles et tests avec deux échantillons

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2}$

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \overset{\text{ind}}{=} \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2}$

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \stackrel{\text{ind}}{=} \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Distribution de la différence des moyennes (1/6) - rappel #98

- Conditions : σ_1, σ_2 connus et
  - populations normales $N(\mu_1, \sigma_1)$, $N(\mu_2, \sigma_2)$ ou
  - $n_1 > 30$ et $n_2 > 30$, ou
  - populations « presque » normales
- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2 ; moyennes $\bar{X}_1, \bar{X}_2$
  - $\boxed{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$: normale
  - $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$
  - $\sigma^2_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} \overset{\text{ind}}{=} \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0, 1)$

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0, 1)$
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ (test bilatéral)

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ (test bilatéral)
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z < -z_{\alpha/2}$ ou $z > z_{\alpha/2}$

Distribution de la différence des moyennes (2/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales ou grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : connus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

1. H_0 : $\mu_1 - \mu_2 = d_0$, H_1 : $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$ (test bilatéral)
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z < -z_{\alpha/2}$ ou $z > z_{\alpha/2}$
   $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_{c1} = d_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ ou
   $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_{c2} = d_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0, 1)$

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \rightarrow Z$ pour grands échantillons*

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \rightarrow Z$ pour grands échantillons*
- Intervalle de confiance

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \rightarrow Z$ pour grands échantillons*
- Intervalle de confiance :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow\approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \rightarrow Z$ pour grands échantillons*
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \to \approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \to Z$ pour grands échantillons*
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

  1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$ (test unilatéral)

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \rightarrow Z$ pour grands échantillons*
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$ (test unilatéral)
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$

Distribution de la différence des moyennes (3/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus
- $Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow \approx N(0,1)$
- *Équivalent de $T \rightarrow Z$ pour grands échantillons*
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0$ (test unilatéral)
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
   $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) > (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}}$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.
- Intervalle de confiance

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.
- Intervalle de confiance :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- Test d'hypothèse : . . .

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- Test d'hypothèse : ...
- À propos des conditions :

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- Test d'hypothèse : ...
- À propos des conditions :
  - $\sigma_1 \approx \sigma_2$ ou populations $\approx$ normales : OK

Distribution de la différence des moyennes (4/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus mais $\sigma_1 = \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_c^2}{n_1} + \frac{S_c^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \longrightarrow$ Student
- Variance commune : $S_c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- T : Student à $(n_1 + n_2 - 2)$ d.l.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- Test d'hypothèse : ...
- À propos des conditions :
  - $\sigma_1 \approx \sigma_2$ ou populations $\approx$ normales : OK
  - $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et normales : OK si $n_1 = n_2$

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow$ Student à ν d.l.

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \to$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \to$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.
- Intervalle de confiance

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \to$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.
- Intervalle de confiance :
  $$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$
- Test d'hypothèse

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \to$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$ (test unilatéral)

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $t < t_\alpha$

Distribution de la différence des moyennes (5/6)

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Populations normales et petits échantillons ($n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$)
- σ_1, σ_2 : inconnus et $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (à tester)
- $T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \to$ Student à ν d.l. ; $\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$
- Arrondir ν au nombre entier *inférieur*.
- Intervalle de confiance :
  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $t < t_\alpha$
     $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)_c = d_0 - t_\alpha\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu :
  $Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu : $Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \to N(0, 1)$
- Population normale et petits échantillons $(n < 30)$, σ_D inconnu

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu :
  $Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \to N(0, 1)$
- Population normale et petits échantillons $(n < 30)$, σ_D inconnu :
  $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{s_D / \sqrt{n}}$ à $(n - 1)$ d.l.

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu :
  $Z = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\sigma_D / \sqrt{n}} \to N(0,1)$
- Population normale et petits échantillons $(n < 30)$, σ_D inconnu :
  $T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{s_D / \sqrt{n}}$ à $(n-1)$ d.l.
- Intervalle de confiance

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu :
  $Z = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\sigma_D/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- Population normale et petits échantillons $(n < 30)$, σ_D inconnu :
  $T = \frac{\bar{D}-\mu_D}{s_D/\sqrt{n}}$ à $(n-1)$ d.l.
- Intervalle de confiance : $\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu : $Z = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\sigma_D/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- Population normale et petits échantillons $(n < 30)$, σ_D inconnu : $T = \frac{\bar{D}-\mu_D}{s_D/\sqrt{n}}$ à $(n-1)$ d.l.
- Intervalle de confiance : $\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$
- Test d'hypothèse : ...

Distribution de la différence des moyennes (6/6)

- Échantillons aléatoires et appariés de tailles $n_1 = n_2 = n$
- Appariés : « avant / après »
- Population : nouvelle v.a. $D = X_1 - X_2$ (μ_D, σ_D)
- Échantillon : calculer $d_i = x_{1i} - x_{2i}$; oublier X_1, X_2 !
- Population normale ou grands échantillons $(n > 30)$, σ_D connu :
  $Z = \frac{\bar{D}-\mu_D}{\sigma_D/\sqrt{n}} \to N(0,1)$
- Population normale et petits échantillons $(n < 30)$, σ_D inconnu :
  $T = \frac{\bar{D}-\mu_D}{s_D/\sqrt{n}}$ à $(n-1)$ d.l.
- Intervalle de confiance : $\bar{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_D}{\sqrt{n}}$
- Test d'hypothèse : ...
- Échantillons appariés : un seul nouvel échantillon !

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \to \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \to \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \rightarrow \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :

  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \longrightarrow \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \rightarrow \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \to \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
     $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \longrightarrow \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
     $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

     Si $d_0 = 0$, $\pi_1 = \pi_2$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \longrightarrow N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \longrightarrow \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
     $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$
     Si $d_0 = 0$, $\pi_1 = \pi_2$: remplacer $\pi_j \longrightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1+n_2}$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \to \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :

1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)

5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
   $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$
   Si $d_0 = 0$, $\pi_1 = \pi_2$: remplacer $\pi_j \to \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1+n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \to \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
     $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$
     Si $d_0 = 0$, $\pi_1 = \pi_2$: remplacer $\pi_j \to \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1+n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$
     Si $d_0 \neq 0$

Distribution de la différence des proportions

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Grands échantillons ($n_1 > 30$, $n_2 > 30$)
- Proportions : $\hat{P}_i = N(\pi_i, \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}/\sqrt{n_i})$
- $Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$
- Intervalle de confiance : $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}} < \pi_1 - \pi_2 <$ $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$; remplacer $\pi_i(1-\pi_i) \to \hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$
- Test d'hypothèse :
  1. $H_0 : \pi_1 - \pi_2 = d_0$ $(\pi_1 = \pi_2 + d_0)$, $H_1 : \pi_1 - \pi_2 > d_0$ (test unilatéral)
  5. Règle de décision : rejeter H_0 si $z > z_\alpha$
     $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > (\hat{p}_1 - \hat{p}_2)_c = d_0 + z_\alpha\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$
     Si $d_0 = 0$, $\pi_1 = \pi_2$: remplacer $\pi_j \to \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}+\sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}}{n_1+n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1+n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$
     Si $d_0 \neq 0$: remplacer $\pi_j \to \hat{p}_j$

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i - 1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec ν_1 et ν_2 d.l.

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $F \geq 0$

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $F \geq 0$
- $P(F > f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$ (définition de $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$)

Distribution du rapport des variances (1/2) - rappel #99

- Échantillons aléatoires et indépendants de tailles n_1, n_2
- Provenant de populations normales de variances σ_1^2, σ_2^2
- Variances des échantillons : S_1^2, S_2^2
- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{V_1/\nu_1}{V_2/\nu_2}$
- $V_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$: v.a. indépendantes, loi du χ^2 à $\nu_i = n_i - 1$ d.l.
- F : loi de Fisher (1924) - Snedecor (1934) avec ν_1 et ν_2 d.l.
- $F \geq 0$
- $P(F > f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha$ (définition de $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$)
- $f_\alpha(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(\nu_2,\nu_1)}$ (propriété de la loi F)

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$)

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse H_0 : $\sigma_1 = \sigma_2$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse H_0 : $\sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1, \nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1, \nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si
  - $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha/2}$ ou $f > f_{\alpha/2}$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse H_0 : $\sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si
  - H_1 : $\sigma_1 \neq \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha/2}$ ou $f > f_{\alpha/2}$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$ ou $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha/2}$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse H_0 : $\sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si
  - H_1 : $\sigma_1 \neq \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha/2}$ ou $f > f_{\alpha/2}$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$ ou $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha/2}$
  - H_1 : $\sigma_1 > \sigma_2$

    $f > f_\alpha$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si
  - $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha/2}$ ou $f > f_{\alpha/2}$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$ ou $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha/2}$
  - $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$

    $f > f_\alpha$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 > f_\alpha$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si
  - $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha/2}$ ou $f > f_{\alpha/2}$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$ ou $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha/2}$
  - $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$

    $f > f_\alpha$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 > f_\alpha$
  - $H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha}$

Distribution du rapport des variances (2/2)

- $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$
- Intervalle de confiance (niveau de confiance $1-\alpha$) :
  - $f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2) < f < f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)$
  - $\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{1-\alpha/2}(\nu_1,\nu_2)}$
- Test d'hypothèse H_0 : $\sigma_1 = \sigma_2$
- Règle de décision : rejeter H_0 si
  - H_1 : $\sigma_1 \neq \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha/2}$ ou $f > f_{\alpha/2}$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$ ou $s_1^2/s_2^2 > f_{\alpha/2}$
  - H_1 : $\sigma_1 > \sigma_2$

    $f > f_\alpha$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 > f_\alpha$
  - H_1 : $\sigma_1 < \sigma_2$

    $f < f_{1-\alpha}$ c-à-d $s_1^2/s_2^2 < f_{1-\alpha/2}$

Récapitulatif : deux échantillons

Statistiques de deux (grands) échantillons : moyenne

Paramètre θ	$\mu_2 - \mu_1$		
Populations	$\approx$ normales	—	$\approx$ normales
Écart-types σ_1, σ_2	connus	connus	inconnus
Échantillons	—	$n_1 > 30$ et $n_2 > 30$	$n_1 > 30$ et $n_2 > 30$
Statistique $\hat{\Theta}$	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$		
St. normalisée	$Z = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$		$Z = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$
Distribution	$N(0, 1)$		
Degrés de liberté	—		
Mesure $\hat{\theta}$	$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$		

Statistiques de deux (petits) échantillons : moyenne

Paramètre θ	$\mu_2 - \mu_1$	
Populations	$\approx$ normales	
Écart-types σ_1, σ_2	inc., $\sigma_1 = \sigma_2$ ou $n_1 = n_2$	inc., $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et $n_1 \neq n_2$
Échantillons	$n_1 < 30$ ou $n_2 < 30$	
Statistique $\hat{\Theta}$	$\bar{X}_2 - \bar{X}_1$	
St. normalisée	$T = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$T = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$
Distribution	Student (ν)	
Degrés de liberté	$n_1 + n_2 - 2$	ν^*
Mesure $\hat{\theta}$	$\bar{x}_2 - \bar{x}_1$	
Rappels	S_c : diapo #128	ν^* : diapo #129

Statistiques de deux échantillons : proportion, variance

Paramètre θ	$\pi_2 - \pi_1$	σ_1^2/σ_2^2
Populations	—	$\approx$ normales
Écart-types σ_1, σ_2	—	—
Échantillons	$n_1 > 30$ et $n_2 > 30$ [2]	—
Statistique $\hat{\Theta}$	$\hat{P}_2 - \hat{P}_1$	F
St. normalisée	$Z = \frac{(\hat{P}_2 - \hat{P}_1) - (\pi_2 - \pi_1)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$	$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$
Distribution	$N(0,1)$	Fischer (ν_1, ν_2)
Degrés de liberté	—	$n_1 - 1, n_2 - 1$
Mesure $\hat{\theta}$	$\hat{p}_2 - \hat{p}_1$	s_1^2/s_2^2

[2] En plus : $n_i \hat{p}_i \geq 5$, $n_i(1 - \hat{p}_i) \geq 5$, ni $\hat{p}_i \approx 0$, ni $\hat{p}_i \approx 1$ $(i = 1, 2)$.

Estimation / tests : deux échantillons

Stat. norm.	Intervalle de confiance	Test d'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$		
		$H_1 : \theta \neq \theta_0$	$H_1 : \theta < \theta_0$	$H_1 : \theta > \theta_0$
Z	$-z_{\frac{\alpha}{2}} < z < z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $> z_{\frac{\alpha}{2}}$	$z < -z_\alpha$	$z > z_\alpha$
T	$-t_{\frac{\alpha}{2}} < t < t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_{\frac{\alpha}{2}}$ ou $> t_{\frac{\alpha}{2}}$	$t < -t_\alpha$	$t > t_\alpha$
F	$f_{1-\frac{\alpha}{2}} < f < f_{\frac{\alpha}{2}}$	$f < f_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $f > f_{\frac{\alpha}{2}}$	$f < f_{1-\alpha}$	$f > f_\alpha$
	mettre sous la forme : $\theta_L < \theta < \theta_H$	« entrer dans le monde de H_0 » : $\theta = \theta_0$, calculer z, t, χ^2 à partir des mesures ; décisions de *rejet* de H_0		

- Intervalle de confiance : niveau de confiance $1 - \alpha$
- Tests d'hypothèse : seuil de signification α
- Voir tableaux unifiés dans le document « Aide-mémoire ».

Tests : au délà du seuil de signification

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$
  - Valeurs critiques dépendent de α

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$
  - Valeurs critiques dépendent de α
- Alternative

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$
  - Valeurs critiques dépendent de α
- Alternative
  - Calculer α_p (p-value) telle que $\hat{\theta} = \hat{\theta}_c$

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$
  - Valeurs critiques dépendent de α
- Alternative
  - Calculer α_p (p-value) telle que $\hat{\theta} = \hat{\theta}_c$
  - α_p : rejeter H_0 de façon marginale

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$
  - Valeurs critiques dépendent de α
- Alternative
  - Calculer α_p (p-value) telle que $\hat{\theta} = \hat{\theta}_c$
  - α_p : rejeter H_0 de façon marginale
- P-value (seuil descriptif) : la plus petite valeur de $\alpha = P(\text{rejeter} H_0 | H_0 \text{ vraie})$ qui conduirait au rejet de H_0

Seuil descriptif (p-value)

- Test statistique : « 2. Choisir le seuil de signification α »
- « Typiquement 1% ou 5% »
- Comment choisir ?
- Comment décider ?
- *Pourquoi* choisir α ?
- Tests classiques :
  - Mesurer $\hat{\theta}$; comparer $\hat{\theta}$ aux valeurs critiques $\hat{\theta}_c$
  - Valeurs critiques dépendent de α
- Alternative
  - Calculer α_p (p-value) telle que $\hat{\theta} = \hat{\theta}_c$
  - α_p : rejeter H_0 de façon marginale
- P-value (seuil descriptif) : la plus petite valeur de $\alpha = P(\text{rejeter} H_0 | H_0 \text{ vraie})$ qui conduirait au rejet de H_0
- La probabilité de se retrouver « au moins aussi loin » de la H_0 – dans le sens de la H_1 – que l'échantillon examiné, si H_0 est vraie.

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution :

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution : $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution : $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$
4. Région critique : $T < -t_{\alpha/2}$ et $T > t_{\alpha/2}$

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution : $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$
4. Région critique : $T < -t_{\alpha/2}$ et $T > t_{\alpha/2}$
5. Règle de décision :
   rejeter H_0 si $t < -t_{\alpha/2}$ ou $> t_{\alpha/2}$

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution : $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$
4. Région critique : $T < -t_{\alpha/2}$ et $T > t_{\alpha/2}$
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $t < -t_{\alpha/2}$ ou $> t_{\alpha/2}$
6. Prélever un échantillon et faire les calculs

Seuil descriptif (p-value) : exemple (1/3)

- Test sur la moyenne, petit échantillon, population normale, σ inconnu

1. $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral)
2. α à définir
3. Statistique à utiliser : $\bar{X}$; distribution : $T = (\bar{X} - \mu)/(S/\sqrt{n})$
4. Région critique : $T < -t_{\alpha/2}$ et $T > t_{\alpha/2}$
5. Règle de décision : rejeter H_0 si $t < -t_{\alpha/2}$ ou $> t_{\alpha/2}$
6. Prélever un échantillon et faire les calculs
7. Décider

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$
   ```
   x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
   ```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$

```
x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
> x
[1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$

```
x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
> x
[1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
> mean(x)
[1] 0.1232073
```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$

```
x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
> x
[1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
> mean(x)
[1] 0.1232073
> sd(x)
[1] 1.337359
```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$

```
x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
> x
[1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
> mean(x)
[1] 0.1232073
> sd(x)
[1] 1.337359
```

   $\mu_0 = 0$, calculer t :

```
> t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
> t
[1] 0.2060029
```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$

```
x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
> x
[1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
> mean(x)
[1] 0.1232073
> sd(x)
[1] 1.337359
```

   $\mu_0 = 0$, calculer t :

```
> t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
> t
[1] 0.2060029
```

   $\alpha = 0.05$, calculer $t_c = t_{\alpha/2}$:

```
> qt(0.025, df=4, lower.tail=F)
[1] 2.776445
```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$
   ```
   x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
   > x
   [1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
   > mean(x)
   [1] 0.1232073
   > sd(x)
   [1] 1.337359
   ```
   $\mu_0 = 0$, calculer t :
   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```
   $\alpha = 0.05$, calculer $t_c = t_{\alpha/2}$:
   ```
   > qt(0.025, df=4, lower.tail=F)
   [1] 2.776445
   ```
7. Décider

Seuil descriptif (p-value) : exemple (2/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   Population $N(0.5, 1)$, $n = 5$
   ```
   x <- rnorm(5, mean=0.5, sd=1)
   > x
   [1] 0.4303745 -1.2195277 -0.3570756 2.2734783 -0.5112132
   > mean(x)
   [1] 0.1232073
   > sd(x)
   [1] 1.337359
   ```
   $\mu_0 = 0$, calculer t :
   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```
   $\alpha = 0.05$, calculer $t_c = t_{\alpha/2}$:
   ```
   > qt(0.025, df=4, lower.tail=F)
   [1] 2.776445
   ```
7. Décider : $-t_{\alpha/2} < t < t_{\alpha/2}$, on ne peut pas rejeter $H_0 : \mu = \mu_0 = 0$

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

   $\mu_0 = 0$, calculer t :

```
> t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
> t
[1] 0.2060029
```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   $\mu_0 = 0$, calculer t :
   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```
   Quelle est la valeur de α qui donne $t = t_c = t_{\alpha/2}$?

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

   $\mu_0 = 0$, calculer t :

   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```

   Quelle est la valeur de α qui donne $t = t_c = t_{\alpha/2}$?

   ```
   > pt(t, df=4, lower.tail=F)
   [1] 0.4234244
   ```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   $\mu_0 = 0$, calculer t :
   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```
   Quelle est la valeur de α qui donne $t = t_c = t_{\alpha/2}$?
   ```
   > pt(t, df=4, lower.tail=F)
   [1] 0.4234244
   ```
   p-value$/2 =$ 0.4234244, p-value $= 0.8468488$
7. Décider

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

   $\mu_0 = 0$, calculer t :

   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```

   Quelle est la valeur de α qui donne $t = t_c = t_{\alpha/2}$?

   ```
   > pt(t, df=4, lower.tail=F)
   [1] 0.4234244
   ```

   p-value$/2 =$ 0.4234244, p-value $= 0.8468488$

7. Décider : échantillon très probable si H_0 est vraie

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs
   $\mu_0 = 0$, calculer t :
   ```
   > t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
   > t
   [1] 0.2060029
   ```
   Quelle est la valeur de α qui donne $t = t_c = t_{\alpha/2}$?
   ```
   > pt(t, df=4, lower.tail=F)
   [1] 0.4234244
   ```
   p-value$/2 =$ 0.4234244, p-value $= 0.8468488$
7. Décider : échantillon très probable si H_0 est vraie

- T-test avec R :
  ```
  > t.test(x, mean=0, alternative = c("two.sided"))
  ```

Seuil descriptif (p-value) : exemple (3/3)

6. Prélever un échantillon et faire les calculs

   $\mu_0 = 0$, calculer t :

```
> t = ( mean(x) - 0 ) / ( sd(x) / sqrt(5) )
> t
[1] 0.2060029
```

   Quelle est la valeur de α qui donne $t = t_c = t_{\alpha/2}$?

```
> pt(t, df=4, lower.tail=F)
[1] 0.4234244
```

   p-value$/2 =$ 0.4234244, p-value $= 0.8468488$

7. Décider : échantillon très probable si H_0 est vraie

- T-test avec R :

```
> t.test(x, mean=0, alternative = c("two.sided"))
One Sample t-test
data : x
t = 0.206, df = 4, p-value = 0.8468
alternative hypothesis : true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval :
-1.537343 1.783758
```

Test du χ^2

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
-

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}}$$

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}}$$
- Loi du χ^2 à ν degrés de liberté ; si $o_i = e_i$, $\chi^2 = 0$, sinon $\chi^2 > 0$

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}}$$
- Loi du χ^2 à ν degrés de liberté ; si $o_i = e_i$, $\chi^2 = 0$, sinon $\chi^2 > 0$
- Calculer χ^2 à partir de o_i, e_i ; obtenir $\alpha = P(X^2 > \chi^2)$, la p-value

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}}$$
- Loi du χ^2 à ν degrés de liberté ; si $o_i = e_i$, $\chi^2 = 0$, sinon $\chi^2 > 0$
- Calculer χ^2 à partir de o_i, e_i ; obtenir $\alpha = P(X^2 > \chi^2)$, la p-value
- $\boxed{\nu = k - 1 - (\text{nombre de paramètres estimés utilisés dans le calcul de } e_i)}$

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}}$$
- Loi du χ^2 à ν degrés de liberté ; si $o_i = e_i$, $\chi^2 = 0$, sinon $\chi^2 > 0$
- Calculer χ^2 à partir de o_i, e_i ; obtenir $\alpha = P(X^2 > \chi^2)$, la p-value
- $\boxed{\nu = k - 1 - (\text{nombre de paramètres estimés utilisés dans le calcul de } e_i)}$
- Condition : $e_i \geq 5$ au moins pour 80% des classes ; $e_i > 0$ pour les autres

Définition – cadre général

Comparer, à l'issue d'une expérience aléatoire, des fréquences expérimentales aux fréquences prévues par la théorie (Pearson, 1900).

- k : nombre de fréquences à comparer (nombre de classes)
- o_i : fréquences Observées (obtenues expérimentalement)
- e_i : fréquences « Espérées » (théoriques, à calculer)
- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}}$$
- Loi du χ^2 à ν degrés de liberté ; si $o_i = e_i$, $\chi^2 = 0$, sinon $\chi^2 > 0$
- Calculer χ^2 à partir de o_i, e_i ; obtenir $\alpha = P(X^2 > \chi^2)$, la p-value
- $\boxed{\nu = k - 1 - (\text{nombre de paramètres estimés utilisés dans le calcul de } e_i)}$
- Condition : $e_i \geq 5$ au moins pour 80% des classes ; $e_i > 0$ pour les autres
- Applications : test d'adéquation, d'indépendance, d'homogénéité, de proportions

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- Calculer $\chi^2 = 14.624$

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- Calculer $\chi^2 = 14.624$
- $\nu = 6 - 1 - 0 = 5$

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- Calculer $\chi^2 = 14.624$
- $\nu = 6 - 1 - 0 = 5$
- p-value : $P(X^2 > 14.624) =$
  `pchisq( 14.624, df=5, lower.tail=FALSE )` $= 0.01210$

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- Calculer $\chi^2 = 14.624$
- $\nu = 6 - 1 - 0 = 5$
- p-value : $P(X^2 > 14.624) =$
  `pchisq( 14.624, df=5, lower.tail=FALSE )` $= 0.01210$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- Calculer $\chi^2 = 14.624$
- $\nu = 6 - 1 - 0 = 5$
- p-value : $P(X^2 > 14.624) =$ `pchisq( 14.624, df=5, lower.tail=FALSE )` $= 0.01210$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%
- Commande R :

```
obs.vec = c(1037, 937, 1055, 1034, 929, 1008)
```

Test d'adéquation (ou d'ajustement)

H_0 : les données expérimentales ont été obtenues à partir d'une population suivant la loi $p_X(x)$ (p.ex., normale, uniforme, etc).

- Example : données sur plusieurs lancers d'un dé (données simulées. . .)
-

Face	1	2	3	4	5	6	Total N
Fréquence (o_i)	1037	937	1055	1034	929	1008	6000

- H_0 : le dé est bien équilibré ; $p_i = 1/6$, $\boxed{e_i = p_i N} = 1000$
- Conditions : OK (sinon grouper des classes voisines)
- Calculer $\chi^2 = 14.624$
- $\nu = 6 - 1 - 0 = 5$
- p-value : $P(X^2 > 14.624) =$
  `pchisq( 14.624, df=5, lower.tail=FALSE )` $= 0.01210$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%
- Commande R :

```
obs.vec = c(1037, 937, 1055, 1034, 929, 1008)
chisq.test( obs.vec, p = rep( 1/6, times=6 ) )
```

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l \,;\, j = 1, \ldots, c)$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\; j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon

- $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \rightarrow \frac{e_{ij}}{n}$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \to \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n}$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \; (i = 1, \ldots, l\,;\; j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \to \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \frac{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}{n}$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \longrightarrow \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \frac{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}{n} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \ (i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \rightarrow \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \frac{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}{n} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Degrés de liberté $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l-1) + (c-1)]$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $$\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \to \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \frac{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}{n} \to \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$$
- Degrés de liberté $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l-1) + (c-1)] = \boxed{(l-1)(c-1)}$

Test d'indépendance / tableau de contingence

On mesure, sur chaque individu d'un échantillon aléatoire de taille n, deux caractères X et Y, à l et c modalités, respectivement.

H_0 : les deux caractères X et Y sont indépendants.

- Example : le tabac et les jeunes, INPES, baromètre santé 2000 (tr. #18)

Sexe \ Fumeur	Oui	Non	Total
Homme	340 (310)	314 (344)	654
Femme	289 (319)	384 (354)	673
Total	629	698	**1327**

- H_0 : X et Y sont indépendants ; $\pi_{ij} = \pi_i \pi_j$ $(i = 1, \ldots, l\,;\ j = 1, \ldots, c)$
- On *estime* π_i et π_j à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $$\pi_{ij} = \pi_i \pi_j \rightarrow \frac{e_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \frac{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}{n} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$$
- Degrés de liberté $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l-1) + (c-1)] = \boxed{(l-1)(c-1)}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter la taille de l'échantillon !)

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 10.5256$

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 10.5256$
- $\nu = (2-1)(2-1) = 1$

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 10.5256$
- $\nu = (2-1)(2-1) = 1$
- p-value : $P(X^2 > 10.5256) =$ `pchisq( 10.5256, df=1, lower.tail=FALSE )` $= 0.00118$

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 10.5256$
- $\nu = (2-1)(2-1) = 1$
- p-value : $P(X^2 > 10.5256) =$
  `pchisq( 10.5256, df=1, lower.tail=FALSE )` $= 0.00118$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 1%

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 10.5256$
- $\nu = (2-1)(2-1) = 1$
- p-value : $P(X^2 > 10.5256) =$
  `pchisq( 10.5256, df=1, lower.tail=FALSE )` $= 0.00118$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 1%
- Commande R :
  `tableau.cont = rbind( c(340, 314), c(289, 384) )`

Test d'indépendance : correction de Yates

- Si $\nu = 1$ (tableau 2×2) utiliser :

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 10.5256$
- $\nu = (2-1)(2-1) = 1$
- p-value : $P(X^2 > 10.5256) =$
  `pchisq( 10.5256, df=1, lower.tail=FALSE )` $= 0.00118$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 1%
- Commande R :

```
tableau.cont = rbind( c(340, 314), c(289, 384) )
chisq.test( tableau.cont, correct=TRUE )
```

Test d'homogénéité

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à l modalités.

Test d'homogénéité

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à l modalités.

H_0 : la proportion d'individus appartenant à la i-ème modalité $(i = 1, \ldots, l)$, reste la même pour toutes les populations (les populations sont *homogènes* par rapport au caractère étudié).

Test d'homogénéité

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à l modalités.

H_0 : la proportion d'individus appartenant à la i-ème modalité $(i = 1, \ldots, l)$, reste la même pour toutes les populations (les populations sont *homogènes* par rapport au caractère étudié).

- Example : notes (fictives) échantillonnées dans trois parcours

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32	15	8	55
$6 \leq x < 12$	123	60	43	226
$12 \leq x \leq 20$	145	125	149	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

Test d'homogénéité

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à l modalités.

H_0 : la proportion d'individus appartenant à la i-ème modalité $(i = 1, \ldots, l)$, reste la même pour toutes les populations (les populations sont *homogènes* par rapport au caractère étudié).

- Example : notes (fictives) échantillonnées dans trois parcours

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32	15	8	55
$6 \leq x < 12$	123	60	43	226
$12 \leq x \leq 20$	145	125	149	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ; $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i$ $(i = 1, \ldots, l)$

Test d'homogénéité

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à l modalités.

H_0 : la proportion d'individus appartenant à la i-ème modalité $(i = 1, \ldots, l)$, reste la même pour toutes les populations (les populations sont *homogènes* par rapport au caractère étudié).

- Example : notes (fictives) échantillonnées dans trois parcours

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32	15	8	55
$6 \leq x < 12$	123	60	43	226
$12 \leq x \leq 20$	145	125	149	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ; $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i$ $(i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \ (i = 1, \ldots, l)$

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \le x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \le x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \le x \le 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \; (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \ (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i$

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ; $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \; (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \rightarrow \frac{e_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n}$

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \ (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \rightarrow \frac{e_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \underbrace{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}_{n_j}}$

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \ (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $$\pi_{ij} = \pi_i \rightarrow \frac{e_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \underbrace{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}_{n_j}}$$
- Degrés de liberté $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l-1) + (c-1)] = \boxed{(l-1)(c-1)}$

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \ (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $\pi_{ij} = \pi_i \rightarrow \frac{e_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \underbrace{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}_{n_j}}$
- Degrés de liberté $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l-1) + (c-1)] = \boxed{(l-1)(c-1)}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter la taille de l'échantillon !)

Test d'homogénéité

Note \ Parcours	I	II	III	Total
$0 \leq x < 6$	32 (23.57)	15 (15.71)	8 (15.71)	55
$6 \leq x < 12$	123 (96.86)	60 (64.57)	43 (64.57)	226
$12 \leq x \leq 20$	145 (179.57)	125 (119.71)	149 (119.71)	419
Total (n_j)	**300**	**200**	**200**	**700**

- H_0 : proportion de chaque modalité constante ;
  $\pi_{i1} = \pi_{i2} = \ldots = \pi_{ic} = \pi_i \ (i = 1, \ldots, l)$
- On *estime* π_i à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- $$\pi_{ij} = \pi_i \rightarrow \frac{e_{ij}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{ij}}{n} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \underbrace{\sum_{i=1}^{l} o_{ij}}_{n_j}}$$
- Degrés de liberté $\nu = (lc - 1) - 1 - [(l-1) + (c-1)] = \boxed{(l-1)(c-1)}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter la taille de l'échantillon !)
- Même formule que le test d'indépendance !

Test d'homogénéité

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$

Test d'homogénéité

- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$

- Calculer $\chi^2 = 35.4729$

Test d'homogénéité

- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$
- Calculer $\chi^2 = 35.4729$
- $\nu = (3-1)(3-1) = 4$

Test d'homogénéité

- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$
- Calculer $\chi^2 = 35.4729$
- $\nu = (3-1)(3-1) = 4$
- p-value : $P(X^2 > 35.4729) =$
  `pchisq( 35.4729, df=4, lower.tail=FALSE )` $= 3.714 \cdot 10^{-7}$

Test d'homogénéité

- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$
- Calculer $\chi^2 = 35.4729$
- $\nu = (3-1)(3-1) = 4$
- p-value : $P(X^2 > 35.4729) =$
  `pchisq( 35.4729, df=4, lower.tail=FALSE )` $= 3.714 \cdot 10^{-7}$
- On peut rejeter H_0 pratiquement à n'importe quel seuil de signification !

Test d’homogénéité

- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$
- Calculer $\chi^2 = 35.4729$
- $\nu = (3-1)(3-1) = 4$
- p-value : $P(X^2 > 35.4729) =$ `pchisq( 35.4729, df=4, lower.tail=FALSE )` $= 3.714 \cdot 10^{-7}$
- On peut rejeter H_0 pratiquement à n’importe quel seuil de signification !
- Commande R :

```
tableau = cbind(c(32, 123, 145), c(15, 60, 125), c(8, 43, 149))
```

Test d'homogénéité

- $$\boxed{\chi^2 = \sum_{i,k} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}}$$
- Calculer $\chi^2 = 35.4729$
- $\nu = (3-1)(3-1) = 4$
- p-value : $P(X^2 > 35.4729) =$ `pchisq( 35.4729, df=4, lower.tail=FALSE )` $= 3.714 \cdot 10^{-7}$
- On peut rejeter H_0 pratiquement à n'importe quel seuil de signification !
- Commande R :

```
tableau = cbind(c(32, 123, 145), c(15, 60, 125), c(8, 43, 149))
chisq.test( tableau )
```

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j ($j = 1, \ldots, c$). On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j ($j = 1, \ldots, c$). On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_c = \pi$

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_c = \pi$
- On *estime* π à partir des fréquences marginales de l'échantillon

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j $(j = 1, \ldots, c)$. On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_c = \pi$
- On *estime* π à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- « Oui » : $\pi_j = \pi$

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j ($j = 1, \ldots, c$). On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_c = \pi$
- On *estime* π à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- « Oui » : $\pi_j = \pi \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{1j}}{n}$

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j ($j = 1, \ldots, c$). On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_c = \pi$
- On *estime* π à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- « Oui » : $\pi_j = \pi \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{1j}}{n}$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - \pi$

Test de proportions

À partir de c populations, on obtient c échantillons aléatoires et indépendants, de taille n_j ($j = 1, \ldots, c$). On mesure sur chaque individu le même caractère X, à 2 modalités (« oui » / « non »).

H_0 : la proportion de « oui » reste la même pour toutes les populations (cas spécial du test d'homogénéité, $l = 2$).

- Example : nombre de pièces défectueuses et moment de production
-

Pièces\ Créneau	Matin	Après-midi	Nuit	Total
Défectueuses (« O »)	45 (56.97)	55 (56.67)	70 (56.37)	170
Normales (« N »)	905 (893.03)	890 (888.33)	870 (883.63)	2665
Total (n_j)	**950**	**945**	**940**	**2835**

- $H_0 : \pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_c = \pi$
- On *estime* π à partir des fréquences marginales de l'échantillon
- « Oui » : $\pi_j = \pi \to \frac{e_{1j}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{1j}}{n}$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - \pi \to \frac{e_{2j}}{n_j} = \frac{\sum_{j=1}^{c} o_{2j}}{n}$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij}$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \longrightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$
- $\nu = (3-1) = 2$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$
- $\nu = (3-1) = 2$
- p-value : $P(X^2 > 6.2339) =$ `pchisq( 6.2339, df=2, lower.tail=FALSE )` $= 0.04429$

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$
- $\nu = (3-1) = 2$
- p-value : $P(X^2 > 6.2339) =$ `pchisq( 6.2339, df=2, lower.tail=FALSE )` $= 0.04429$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$
- $\nu = (3-1) = 2$
- p-value : $P(X^2 > 6.2339) =$
  `pchisq( 6.2339, df=2, lower.tail=FALSE )` $= 0.04429$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%
- Commande R :

```
oui.non = rbind(c(45, 55, 70), c(905, 890, 870))
```

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \rightarrow \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$
- $\nu = (3-1) = 2$
- p-value : $P(X^2 > 6.2339) =$ `pchisq( 6.2339, df=2, lower.tail=FALSE )` $= 0.04429$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%
- Commande R :

```
oui.non = rbind(c(45, 55, 70), c(905, 890, 870))
chisq.test( oui.non )
```

Test de proportions

- $e_{ij} = \frac{n_j}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \to \boxed{e_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{c} o_{ij} \sum_{i=1}^{l} o_{ij}}$
- Même formule que le test d'indépendance / d'homogénéité !
- Degrés de liberté $\boxed{\nu = (2-1)(c-1) = c-1}$
- Conditions : OK (sinon ? augmenter les tailles des échantillons !)
- Calculer $\chi^2 = 6.2339$
- $\nu = (3-1) = 2$
- p-value : $P(X^2 > 6.2339) =$ `pchisq( 6.2339, df=2, lower.tail=FALSE )` $= 0.04429$
- On peut rejeter H_0 au seuil de signification 5%
- Commande R :

```
oui.non = rbind(c(45, 55, 70), c(905, 890, 870))
chisq.test( oui.non )
```

ou, pour plus d'informations :

```
oui = c( 45, 55, 70) ; essais = c( 950, 945, 940)
prop.test( oui, essais )
```

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \to \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \to \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \to \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \to \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \to \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté
- Example précédent avec :
  $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.08$ $(\neq 170/2835 \approx 0.06)$

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté
- Example précédent avec :
  $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.08$ $(\neq 170/2835 \approx 0.06)$
- Calculer $\chi^2 = 0.5836$

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté
- Example précédent avec : $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.08$ $(\neq 170/2835 \approx 0.06)$
- Calculer $\chi^2 = 0.5836$
- $\nu = 3$

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté
- Example précédent avec :
  $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.08$ $(\neq 170/2835 \approx 0.06)$
- Calculer $\chi^2 = 0.5836$
- $\nu = 3$
- p-value : $P(X^2 > 0.5836) = 0.9002$

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \to \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \to \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté
- Example précédent avec :
  $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.08$ $(\neq 170/2835 \approx 0.06)$
- Calculer $\chi^2 = 0.5836$
- $\nu = 3$
- p-value : $P(X^2 > 0.5836) = 0.9002$
- On ne peut pas rejeter H_0

Test de proportions sans estimation de paramètres

Même contexte qu'avant : c populations, c échantillons, caractère X à deux modalités.

H_0 : les proportions de « oui », $\pi_1, \ldots, \pi_c$, sont égales à $p_1, \ldots, p_c$ (pas d'estimation de paramètres).

- « Oui » : $\pi_j = p_j \rightarrow \frac{e_{1j}}{n_j} = p_j$
- « Non » : $1 - \pi_j = 1 - p_j \rightarrow \frac{e_{2j}}{n_j} = 1 - p_j$
- $\boxed{\nu = c}$: on ne perd aucun degré de liberté
- Example précédent avec :
  $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.06$, $p_3 = 0.08$ $(\neq 170/2835 \approx 0.06)$
- Calculer $\chi^2 = 0.5836$
- $\nu = 3$
- p-value : $P(X^2 > 0.5836) = 0.9002$
- On ne peut pas rejeter H_0
- Commande R :
  ```
  prop.test( oui, essais, p=c(0.05, 0.06, 0.08) )
  ```

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

Test d’adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d’une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$
Vérifier les conditions sinon regrouper les classes

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$
Vérifier les conditions sinon regrouper les classes

3b. Ou répartir en $(M+1)$ classes équiprobables : $e_j = n/(M+1)$

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$
Vérifier les conditions sinon regrouper les classes

3b. Ou répartir en $(M+1)$ classes équiprobables : $e_j = n/(M+1)$

4. Calculer χ^2 (on perd deux d.l. avec l'estimation de μ et σ !)

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

  1. Répartir les données en classes (histogramme)
  2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

  3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
  Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$
  Vérifier les conditions sinon regrouper les classes

  3b. Ou répartir en $(M + 1)$ classes équiprobables : $e_j = n/(M + 1)$

  4. Calculer χ^2 (on perd deux d.l. avec l'estimation de μ et σ !)

- Procédure spécifique : test de Shapiro–Wilk

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$
Vérifier les conditions sinon regrouper les classes

3b. Ou répartir en $(M+1)$ classes équiprobables : $e_j = n/(M+1)$

4. Calculer χ^2 (on perd deux d.l. avec l'estimation de μ et σ !)

- Procédure spécifique : test de Shapiro–Wilk
- Commande R :

```
data = rnorm(100, mean=10, sd=2) % un exemple...
```

Test d'adéquation à la loi normale (Shapiro–Wilk)

H_0 : les données expérimentales (échantillon de taille n) ont été obtenues à partir d'une population normale.

- Procédure « classique » : test du χ^2 (cf. TD 5)

1. Répartir les données en classes (histogramme)
2. Estimer μ et σ avec `qqnorm`

3a. Calculer les probabilités théoriques p_j des classes
Calculer les fréquences théoriques $e_j = p_j n$
Vérifier les conditions sinon regrouper les classes

3b. Ou répartir en $(M+1)$ classes équiprobables : $e_j = n/(M+1)$

4. Calculer χ^2 (on perd deux d.l. avec l'estimation de μ et σ !)

- Procédure spécifique : test de Shapiro–Wilk
- Commande R :

```
data = rnorm(100, mean=10, sd=2) % un exemple...
shapiro.test( data )
```

- Une grande p-value permet de ne pas rejetter l'hypothèse de normalité