I. Définition de l'intérêt

1. Définition de l'intérêt

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent.
C'est le prix à payer par l'emprunteur au prêteur, pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent pendant une période de temps.
Trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt:

- la somme prêtée,
- la durée du prêt,
- et le taux auquel cette somme est prêtée.

Il y a deux types d'intérêt: l'intérêt simple et l'intérêt composé. Dans le cas où l'intérêt périodique est constamment calculé sur le capital initialement emprunté, sans égard à tout intérêt accumulé, on parle alors d'intérêt simple. Si on ajoute périodiquement l'intérêt couru au capital, on dit alors que l'intérêt est composé

2. Justification de l'intérêt

Plusieurs raisons ont été avancées pour justifier l'existence et l'utilisation de l'intérêt, parmi lesquelles on peut citer :
La privation de consommation: Lorsqu'une personne (le prêteur) prête une somme d'argent à une autre (l'emprunteur), elle se prive d'une consommation immédiate. II est ainsi normal qu'elle reçoive en contrepartie une rémunération de la part de l'emprunteur pour se dédommager de cette privation provisoire.
La prise en compte du risque: Une personne qui prête de l'argent, le fait pour une durée étalée dans le temps. Elle court, dès lors, un risque inhérent au futur. La réalisation de ce risque résulte au moins des éléments suivants :

- L'insolvabilité de l'emprunteur : dans le cas où l'emprunteur se trouve incapable de rembourser sa dette, lorsque celle-ci vient à échéance, le prêteur risque de perdre l'argent qu'il a déjà prêté. II est alors normal qu'il exige une rémunération pour couvrir le risque encouru.
- L'inflation : entre la date de prêt et la date de remboursement, la valeur du prêt peut diminuer à la suite d'une érosion monétaire connue également sous le nom d'inflation. Le prêteur peut donc exiger une rémunération pour compenser cet effet.

II. Intérêt simple

1. Principe et champ d'application

L'intérêt simple se calcule toujours sur le principal. II ne s'ajoute pas au capital pour porter lui même intérêt. L'intérêt simple est proportionnel au capital prêté ou emprunté. II est d'autant plus élevé que le montant prêté ou emprunté est important et que l'argent est prêté ou emprunté pour longtemps. II est versé en une seule fois au début de l'opération, c'est à dire lors de la remise du prêt, ou à la fin de l'opération c'est à dire lors du remboursement.
L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an).

2. Calcul pratique

Soit,

C : le montant du capital prêté ou emprunté en dinar (valeur nominale)
t: le taux d'intérêt annuel (en pourcentage)
n : la durée de placement (en année)
I : le montant de l'intérêt à calculer en dinar
V : la valeur acquise par le capital en dinar (valeur future)
On a :

$$I = \frac{C.t.n}{100}$$

Et $V = C + I = C + \frac{C.t.n}{100}$

$$V = C\left(1 + \frac{t.n}{100}\right)$$

Remarques :

- Si la durée du placement est exprimée en mois, on aura:

$I = C.\frac{t}{100}.\frac{n}{12}$ $I = \frac{C.t.n}{1200}$ et $V = C\left(1 + \frac{t.n}{1200}\right)$

- Si la durée du placement est exprimée en jours, on aura:

$I = C.\frac{t}{100}.\frac{n}{360}$ $I = \frac{C.t.n}{36000}$ et $V = C\left(1 + \frac{t.n}{36000}\right)$

- Pour une durée de placement exprimée en jours, l'usage fait que l'intérêt est calculé sur la base de l'année financière ou commerciale comptant 360 jours et non pas l'année civile comptant 365 jours ou 366 jours.
  L'exception est faite pour les comptes à terme et les bons de caisse dont l'intérêt servi est calculé sur la base de l'année civile, c'est à dire 365 jours.
  Par ailleurs, il faut aussi signaler que lorsque la durée est exprimée en jours, les mois sont comptés à leur nombre exact de jours, et on ne tient compte que de l'une des deux dates extrêmes.

Exemple:

Une somme de 15000 dinars est placée sur un compte du 25 mai au 10 septembre au taux simple de 6 %

1/ Calculer le montant de l'intérêt produit à l'échéance.
2/ Calculer la valeur acquise par ce capital.
3/ Chercher la date de remboursement pour un intérêt produit égal à 350 dinars.

Solution :

1/ On a : $I = \frac{C.t.n}{360000}$, C = 15000, t = 6, calculons alors le nombre de jours de placement.
C = 10000, t = 7, Calculons alors le nombre de jours de placement.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mai} = 6\\ \text{Juin}= 30\\ \text{Juillet}= 31\\ \text{Août} = 31\\ \text{Septembre} = 10\end{array}\right\} \text{108 jours}$$

$$I = \frac{15000.6.108}{36000} = 270$$

2/ La valeur acquise par ce capital est égale à V,
V = C + I= 15000 + 270= 15270 dinars
3/ date de remboursement correspondant à un intérêt de 350.

$I = \frac{C.t.n}{36000}$ donc $n = \frac{36000.I}{C.t} \Rightarrow n = \frac{36000.350}{15000.6} = 140$ jours

Avril = 6
Juin= 30
Juillet= 31
Août = 31 140 jours $\Rightarrow$ date de remboursement = 12 Octobre.
Septembre = 31
Octobre = 12

3. Taux moyens d'une série de placements simultanés

C'est le taux de placement unique (T_m) de plusieurs capitaux (C_1, C_2, C_3…..C_J), pendant des durées différentes (n_1, n_2, n_3 …..n_J) et à des taux différents (t_1, t_2, t_3 …..t_J)
Soit J opérations de placement simultanées à intérêt simple de sommes C_j, aux taux t_j, sur n_j jours.

Opération de placement	1	2	……………………..	J
Capital	C_1	C_2		C_J
Taux	t_1	t_2		t_J
Durée	n_1	n_2		n_J

Le taux moyen de cette série de placement est un taux unique T_m qui, appliqué à cette même série, permet d'obtenir le même intérêt total.
L'intérêt total de cette série est égal à :

$$I = \frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + ... + \frac{C_J.t_J.n_J}{36000}$$

D'après la définition, le taux moyen de placement sera calculé par la résolution de l'égalité suivante :

$$\frac{C_1.t_1.n_1}{36000} + \frac{C_2.t_2.n_2}{36000} + ... + \frac{C_J.t_J.n_J}{36000} = \frac{C_1.T_m.n_1}{36000} + \frac{C_2.T_m.n_2}{36000} + ... + \frac{C_J.T_m.n_J}{36000}$$

$$\sum_{i=1}^{J} C_i.t_i.n_i = T_m.\sum_{i=1}^{J} C_i.n_i$$

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{J} C_i.t_i.n_i}{\sum_{i=1}^{J} C_i.n_i}$$

<u>Exemple</u>
Calculer le taux moyen de placement des capitaux suivants :
3000 dinars placés à 3% pendant 30 jours, 4000 dinars placés à 5% pendant 40 jours et 5000 dinars placés à 6% pendant 50 jours.

<u>Solution</u> :

$$T_m = \frac{3000.\ 3.\ 30 + 4000.\ 5.\ 40 + 5000.\ 6.\ 50}{3000.30 + 4000.40 + 5000.50} = 5{,}14\%$$

4. Terme échu, terme à échoir, taux effectif

Selon les modalités du contrat de prêt ou de placement, les intérêts peuvent être versés en début ou en fin de période :

- Lorsque les intérêts sont payés en fin de période (à l'échéance), on dit qu'ils sont post-comptés ou terme échu.

La valeur de remboursement de l'emprunt sera le montant du principal auquel on ajoute le montant des intérêts à payer

$$V=C.\left(1+\frac{t.n}{36000}\right).$$

- Lorsque les intérêts sont payés en début de période, on dit qu'ils sont précomptés ou terme à échoir. Dans ce cas le prêteur peut prélever l'intérêt au moment de la transaction. Ils sont calculés sur le nominal, qui constitue la somme finale C et retranchés du nominal l'intérêt pour déterminer la somme initiale ou la mise à disposition.

Etant donné un nominal égal à C, on aura alors C' = C – I, où C' désigne la somme initiale.

5. Taux effectif

C'est le taux réel du placement. Il est différent au taux affiché dans le cas d'intérêts précomptés.

Quand les intérêts sont payables d'avance, le taux d'intérêt effectif est celui appliqué au capital effectivement prêté ou emprunté C' pour donner le montant de l'intérêt produit. En désignant par T, le taux effectif, on aura alors :

$$\frac{C.t.n}{36000}=\frac{C'.T.n}{36000}$$

or $C' = C - I = C - \frac{C.t.n}{36000}$

donc $\frac{C.t.n}{36000}=\frac{\left(C-\frac{c.t.n}{36000}\right)T.n}{36000}$

$$t=T.\left(1-\frac{t.n}{36000}\right)$$

donc $T=\frac{t}{1-\frac{t.n}{36000}}$

<u>Exemple</u>

Une personne place à intérêts simples précomptés la somme de 3000 dinars pour une durée de 6 mois au taux de 10%. Quel est le taux effectif de placement ?

Réponse :

$$T=\frac{t}{1-\frac{t.n}{36000}} \Rightarrow T=\frac{10}{1-\frac{10.6}{1200}}=10,526\%$$

III. Application a quelques instruments de placement de crédit

1. Le compte d'épargne

C'est un compte nominatif sur lequel sont servis des intérêts. II est mis à la disposition des clients par les différentes banques commerciales du pays et sous différentes formes: le livret d'épargne, le plan épargne études, le plan épargne résidence etc.

Une personne physique ne peut avoir qu'un seul compte d'épargne par banque. Le compte d'épargne peut recevoir des versements en espèces ou par chèque et des virements (opérations de crédit) et subir des retraits en espèces ou par virements (opérations de débit). Le montant minimum de chaque opération de crédit ou de débit est fixé à 10 dinars.

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes, sont dits équivalents lorsqu'ils produisent la même valeur acquise quand ils sont appliqués au même capital.

Les intérêts servis sur les comptes d'épargne sont calculés selon le principe de l'intérêt simple sur la base d'un taux appelé le Taux de Rendement de l'Epargne (TRE) indexé au taux du marché monétaire (TMM):

TRE=TMM - 2°/

Avec TMM = Taux moyen du marché monétaire

$$TMM = \frac{\text{total des TM de chaque jour de la période considérée}}{n}$$

Et tels que

TM = le taux du jour du marché monétaire ou le taux de la veille pour les jours chômés.

n = le nombre de jours de la période considérée y compris les jours chômés

Le TRE est généralement fourni aux banques par la banque centrale. Pour un mois quelconque, on emploi le TRE du mois précédent.

De point de vue fonctionnement (Circulaire B.C.T. N'2003-10, du 15 septembre 2003), la principale caractéristique des comptes d'épargne est que **les crédits ne portent intérêts qu'à compter du septième jour ouvrable suivant le jour (j) de dépôt.**

En ce qui concerne les débits, ils sont réputés être effectifs le septième jour ouvrable précédant le jour (j) de retrait.

Outre les intérêts, une prime dite de fidélité est servie sur les fonds restés stables au taux de :

- 0,5% pour les fonds restés stables pendant une durée égale ou supérieure à une année et inférieure à 2 ans.
- 1 % pour les fonds restés stables pendant une durée égale ou supérieure à 2 ans.

Les intérêts relatifs au compte d'épargne sont décomptés et capitalisés à chaque arrêté trimestriel pour leur net d'impôt, c'est à dire après une retenue à la source égale à 20 %.

II faut également remarquer que le calcul du taux équivalent s'avère nécessaire lorsqu'il y a une différence entre la période de capitalisation (trimestre) et l'horizon pour lequel le taux d'intérêt est défini (année). Ce passage logique par le taux équivalent est parfois ignoré sur le plan pratique. Certaines banques appliquent en effet, la méthode du taux proportionnel.

Exemple

Le 28 Avril 2006 Mr X a ouvert un compte d'épargne à la STB. Le même jour, il en a déposé une somme égale à 1200 dinars.

De cette date jusqu'à la fin de l'année, Mr X a effectué les opérations suivantes :

- le 10 Avril versement 50 D
- le 17 Mai retrait 100 D
- le 01 Juin versement 250 D
- le 18 Juillet versement 150 D
- le 24 Août retrait 150 D

Les taux d'intérêt monétaire mensuels (TMM) sont :

- Mars 3 %
- Avril 3 %
- Mai 3,125 %
- Juin 3,125 %
- Juillet 3,125 %
- Août 3,125 %

Déterminer la valeur acquise nette au **30/9/2006**.

Réponse :

Décompte des intérêts sur livret d'épargne.

Date d'opération	Versement	Retrait	Solde	Date de valeur	Nbre de jours	Taux d'Intérêt Mensuel	Intérêt
28/4	1200	-	1200	5/5 (+7j ouvrables)	5j	3%	0,51
17/5	-	100	1100	10/5 (-7j ouvrables)	7j	3%	0,641
10/5	50	-	1150	17/5	22j=15j 7j	3% 3,125%	2,136
1/6	100	-	1250	8/6	22j	3,125%	2,387
30/6	4,531 [2]	-	1254,531	30/6 (fin du 2ème trimestre)	26j=1j 25j	3,125%	2,831
18/7	150	-	1404,531	26/7	22j	3,125%	2,682
24/8	-	50	1354,531	17/8	44j	3,125%	5,173
30/9	8,548	-	1363,079	30/9 (fin du 3ème trimestre)			

2. L'escompte

L'escompte est une opération de crédit par laquelle la banque transforme une créance, matérialisée par un effet de commerce, en liquidité au profit de son client, avant son échéance et contre remise de l'effet. La banque crédite ainsi le compte de l'entreprise du montant de l'effet escompté diminué des agios. On distingue l'escompte commercial de l'escompte rationnel.

Soit un fournisseur qui dispose le 2 novembre, suite à une vente à crédit, d'un effet de commerce tiré sur l'un de ses clients et échu le 31décembre. Ce fournisseur, et suite à une erreur prévisionnelle au niveau de sa trésorerie, se trouve en difficultés financières. Pour s'en sortir, il peut négocier, c'est-à-dire vendre avant l'échéance, l'effet en question. Si la banque accepte l'effet, elle doit mettre à la disposition du fournisseur l'équivalent en espèce. Il est évident que la somme mise à la disposition du fournisseur, appelée valeur actuelle, est inférieure à celle figurant sur l'effet, appelée valeur nominale. La différence appelée Agio, constitue la contre partie du service offert par le banquier. Cet agio comprend en particulier :

- L'escompte qui constitue l'intérêt, calculé sur la base de la valeur nominale (escompte commercial) ou sur la base de la valeur actuelle (escompte rationnel), pour le nombre de jours séparant la date de négociation de la date d'échéance.
- Les divers commissions : commission d'endossement, commission d'acceptation, commissions indépendantes du temps, commissions fixes,..
- La taxe sur valeur ajoutée. En Tunisie, le taux étant d 18%.

a) L'escompte commercial

C'est l'intérêt simple calculé à un taux indiqué par le banquier sur une somme égale à la valeur nominale de l'effet et une durée allant du jour de la négociation jusqu'au jour de l'échéance; c'est la méthode appliquée en pratique.

Définition : L'escompte commercial est l'intérêt simple généré par la négociation d'un effet de commerce, calculé sur la base de sa valeur nominale.

Soit,
V : la valeur nominale de l'effet, c'est la valeur de l'effet à son échéance
t : taux d'escompte

1 **(1200.5.3/36000)**
2 **Le 30/6, versement trimestriel des intérêts net de la retenue à la source (0,5+0,641+2,136+2,387).80%=4,531**

n : durée de l'escompte, c'est le nombre de jours séparant la date de négociation de l'effet de sa date d'échéance.
e : l'escompte commercial
a : la valeur actuelle commerciale

on a : $e = \frac{V.t.n}{36000}$

La valeur actuelle « a » est la différence entre la valeur nominale et l'escompte, soit la somme effectivement reçu par l'entreprise lors de la négociation de l'effet.

$$a = V - e$$

Exemple :

Soit un effet de commerce de valeur nominale 3500 dinars, d'échéance le 15/6/N et escompté le 13/3/N à un taux de 8%. On vous demande de calculer l'escompte correspondant.

Réponse :

Nombre de jours 18+30+31+15=94 jours

On a $e = \frac{V.t.n}{36000} = \frac{3500.8.94}{36000} = 73{,}111$

Calcul de la valeur actuelle (a) en fonction de la valeur nominale (V)

a= V - e

$$a = V - \frac{V.t.n}{36000} \Rightarrow a = V\left(1 - \frac{t.n}{36000}\right)$$

Calcul de l'escompte (e) et de la valeur actuelle (a) en fonction du diviseur (D)

Si on note par D = diviseur = $\frac{36000}{t}$

On aura $e = \frac{V.n}{D}$

$a = V - e \Rightarrow a = V - \frac{V.n}{D}$

$\Rightarrow a = \frac{V(D-n)}{D}$

b) L'escompte rationnel

C'est l'intérêt calculé sur la somme effectivement prêtée par la banque : la valeur actuelle rationnelle. Cette valeur augmentée des intérêts, calculés en fonction de cette valeur et du nombre de jours couru de la négociation à l'échéance de l'effet, devient égale à la valeur nominale.

Définition : L'escompte rationnel est l'intérêt simple engendré par la négociation d'un effet de commerce, mais calculé sur la base de la valeur actuelle.

Soit,

e' : escompte rationnel
a' : valeur actuelle rationnelle
V : valeur nominale de l'effet
t : taux d'escompte
n : durée de l'escompte

$$e' = \frac{V.n}{D+n}$$

c) Date d'équivalence

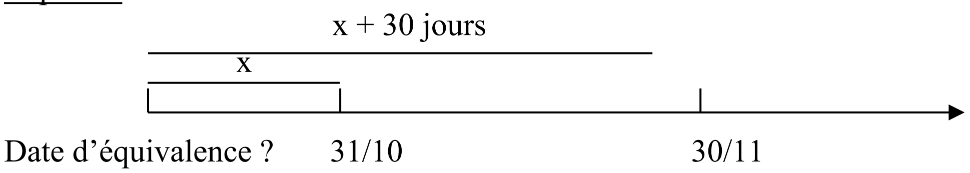
C'est la date à laquelle deux ou plusieurs effets ont la même valeur actuelle commerciale. Soit deux effets de sommes différentes et d'échéances différentes escomptés au même taux. On dit que ces deux effets sont équivalents à une date déterminée, lorsque à cette date les deux effets ont la même valeur actuelle commerciale.

Echéance

Exemple:
Soit,
- E 1 : effet de commerce de valeur nominale 9840 dinars à échéance 31 octobre.
- E 2 : effet de commerce de valeur nominale 9900 dinars à échéance 30 Novembre.

Ils sont négociés au taux de 7,2 %.
Déterminer la date d'équivalence des deux effets.

Réponse :



a1=a2
A la date d'équivalence cherchée, les valeurs actuelles commerciales des deux effets sont égales.
Désignant par x le nombre de jours qui sépare la date d'équivalence de l'échéance du premier effet (31/10). Donc, x + 30 constitue le nombre de jours qui sépare la date d'équivalence de l'échéance du deuxième effet (30/11).

On sait que : $a = V - \frac{V.t.n}{36000}$

A la date d'équivalence on a1=a2 $\Rightarrow V_1 - \frac{V_1.t.x}{36000} = V_2 - \frac{V_2.t.(x+30)}{36000}$

$$\Rightarrow V_1 - \frac{V_1.t.x}{36000} = V_2 - \left[\frac{V_2.t.x}{36000} + \frac{V_2.t.30}{36000}\right]$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 + V_2.\frac{t.30}{36000} = \frac{t.x}{36000}(V_1 - V_2)$$

On aura donc: $9840 - \frac{9840.7{,}2.x}{36000} = 9900 - \frac{9900.7{,}2.(x+30)}{36000}$ $\Rightarrow$ $\underline{x = 50 \text{ jours}}$

La date d'équivalence cherchée se situe 50 jours avant le 31 octobre soit au 11 Septembre.

Remarques:

- La date d'équivalence de deux effets, dans le cas ou elle existe, est antérieure à la date d'échéance la plus proche.

- La date d'équivalence doit être postérieure aux dates à partir desquelles les deux effets ont été créés.
- Deux effets ne peuvent être équivalents qu'à une seule date.

d) Renouvellement d'un effet

L'effet de remplacement à une échéance plus lointaine que l'effet à remplacer et la même valeur actuelle commerciale.

Soit un effet principal de valeur nominale V_1 d'échéance E_1. on propose de le remplacer par un autre effet de valeur nominale V_2 et d'échéance E_2 tel que $E_2 > E_1$. Le taux d'intérêt est égal à t.

On désigne par n_1 la date qui sépare la date de remplacement de la date d'échéance E_1 et n_2 la date qui sépare la date de remplacement de la date d'échéance E_2, alors $n_2=n_1+m$

On sait que l'effet de remplacement devrait avoir la même valeur actuelle que l'ancien effet c'est à dire $a_1 = a_2$

<u>Deux cas sont possibles :</u>

- L'échéance de l'effet de remplacement E_2 étant fixée, donc n_2 connu. On doit alors chercher la valeur nominale V_2 de l'effet de remplacement :

$$a_1=a_2 \Rightarrow \frac{V_1(D-n_1)}{D}=\frac{V_2(D-n_2)}{D}$$

$$V_1(D-n_1)=V_2(D-n_2)$$

Donc $$V_2=\frac{V_1(D-n_1)}{(D-n_2)}=\frac{V_1(D-n_1)}{D-(n_1+m)}$$

- La valeur de l'effet de remplacement V_2 étant connu, on doit donc chercher l'échéance E_2 et par conséquent n_2.

V1 (D – n1) = V2 (D – n2)

V1.D – V1.n1 = V2.D – V2.n2

D (V2 – V1) + V1.n1 = V2.n2

$$n_2=\frac{D.(V_2-V_1)+V_1.n_1}{V_2} \quad \text{et} \quad m=\frac{(D-n_1).(V_2-V_1)}{V_2}$$

e) Echéance moyenne de deux ou plusieurs effets

On appelle échéance moyenne, la date à laquelle plusieurs effets à échéances différentes, escomptés au même taux, peuvent être remplacés par un seul effet, qui leur soit équivalent et dont sa valeur nominal est égale à la somme des valeurs nominales des effets à remplacés.

Si on désire remplacer les effets de valeurs nominales V_1, V_2, …, V_n et d'échéances respectives E_1, E_2, …,E_n. La valeur nominale de l'effet unique est V tel que :

$$V=V_1+V_2+\ldots+V_n$$

A une date donnée, la valeur actuelle de l'effet de remplacement est égale à la somme des valeurs actuelles des différents effets.

Le problème consiste à chercher le nombre de jours permettant de déterminer l'échéance de l'effet unique équivalent.

Le montant de l'effet unique estimé à remplacer les effets donnés est déterminé d'avance.

$$V=V_1+V_2+\ldots+V_n=\sum_{i=1}^{n}V_i$$

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$V-\frac{V.t.n}{36000}=V_1-\frac{V_1.t.n_1}{36000}+V_2-\frac{V_2.t.n_2}{36000}+...+V_n-\frac{V_n.t.n_n}{36000}$$

$$V-\frac{V.t.n}{36000}=[V_1+V_2+...+V_n]-(\frac{V_1.t.n_1}{36000}+\frac{V_2.t.n_2}{36000}+...+\frac{V_n.t.n_n}{36000})$$

or $V=V_1+V_2+\ldots+V_n=\frac{V_1.n_1+V_2.n_2...+V_n.n_n}{V_1+V_2+...+V_n}$

$V.n=V_1.n_1+V_2.n_2+\ldots+V_n.V_n$

Donc $n=\frac{\sum(V_i.n_i)}{\sum V_i}$

$a=\sum a_i \Rightarrow \frac{V.(D-n)}{D}=\frac{\sum V_i(D-n_i)}{D}$

$V.D-V.n=\sum V_i(D-n_i) \Rightarrow$ or $V=\sum V_i$,

on simplifiant par $\sum V_i$ et par $\frac{1}{D}$, nous aurons :

Donc $n=\frac{\sum(V_i.n_i)}{\sum V_i}$

Exemple:

Le 17/10, un client, qui doit à son fournisseur les trios effets suivants: (i) 1000 à échéance le 11/11, (ii) 1500 à échéance le 1/12 et 2000 à échéance le 16/12, suggère à son fournisseur le remplacement de ces effets par un effet unique dont la valeur nominale serait de 4493,448. Qu'elle sera l'échéance moyenne de ces trois effets si le taux d'escompte est de 7,2% ?

Réponse :

On $n=\frac{\sum V_i.n_i}{\sum V_i}$

$\frac{1000.25+1500.45+2000.60}{1000+1500+2000}=47$ jours $\Rightarrow$ L'échéance correspond alors au 3/12.

3. Pratique de l'escompte commercial

L'escompte d'effets commerciaux génère l'élaboration d'un bordereau d'escompte par le banquier à remettre à l'entreprise. Ce bordereau est une description détaillée des effets présentés à l'escompte. Il permet de déterminer le montant des agios à payer suite à l'opération d'escompte et le net escompte mis à la disposition de l'entreprise.

a) Calcul des agios

L'agio est la retenue totale effectuée par le banquier. Il comprend l'escompte commercial, les commissions et la Taxe sur la Valeur Ajoutée (TVA) sur le montant des commissions.

- **L'escompte**

Généralement la banque retient des jours de banque sur l'effet escompté qui seront (généralement) ajoutée à la durée de l'escompte de l'effet.
Il est à noter que le nombre de jours d'agios correspond au nombre de jours qui sépare la date d'escompte de la date d'échéance une seule borne incluse majorée des jours de banque (n_B). Ces derniers varient en fonction de la nature de l'effet selon qu'il est domicilié ou non, place

ou déplacé. Le nombre de jours d'agios sans tenir compte des jours de banque doit être compris entre 10 jours et 90 jours pour que l'effet soit escompté. Les intérêts se calculent donc selon la formule suivante :

$$e = \frac{V.t.(n + n_B)}{36000}$$

- **Les commissions**

On distingue deux types de commissions ;

- **<u>les commissions dépendants du temps</u>** et aussi de la valeur nominale de l'effet. Par exemple, on site la commission d'endossement. Ce type de commission se calcule de la même manière que l'escompte.
- **<u>Les commissions indépendants du temps</u>** :

$\Rightarrow$ Commission égale à un montant fixe (commission fixe) qui peut être prélevé par effet ou par bordereaux. Elle varie selon que l'effet est domicilié ou non (c à d même banque), place ou déplacé c à d même région).

	Entreprise	**Client**
Effet place domicilié	**STB Gabès**	**STB Gabès**
Effet place non domicilié	**STB Gabès**	**BIAT Gabès**
Effet déplacé domicilié	**STB Gabès**	**STB Sfax**
Effet déplacé non domicilié	**STB Gabès**	**BIAT Sfax**

$\Rightarrow$ Commissions variables ou proportionnelles à la valeur nominale de l'effet seulement.

- **TVA sur commissions**

La TVA est calculée uniquement sur les commissions retenues par le banquier.
Donc :

$$\text{Agios} = \sum \text{escomptes} + \sum \text{commissions} + \text{TVA/commussions}$$

b) **Bordereau d'escompte**

Les effets remis à l'escompte chez la banque sont présentés, endossés à l'aide de ce banquier. En échange des effets, la banque remet un bordereau d'escompte c'est-à-dire un relevé comportant le détail des effets admis à l'escompte et le décompte des agios perçus par la banque.
Le montant net du bordereau est égal à la différence entre la somme des valeurs nominales des effets escomptés et les agios.

$$\text{Montant net} = \sum \text{Valeurs niminales} - \text{Agios}$$

Le bordereau d'escompte peut être présenté comme suit :

Banque : Société :							
N° de l'effet	Banque domiciliataire	Valeur nominale	Echéance	Jours d'agios	Escompte	Commission fixe	TVA/Com
Total							
Agios							
Montant net							

Exemple :

Le 25/04/2006, le financier de la société XYZ remet à l'escompte à la BIAT-Gabès centre ville les effets suivants :

N° de l'effet	Valeur nominale	Lieu de paiement	Echéance	Banque domiciliatrice
1	810	Tunis	14/05	B.I.A.T
2	954	Gabès	23/06	S.T.B
3	936	Gabès	19/05	B.I.A.T
4	1800	Sfax	03/07	B.N.A

Conditions d'escompte :
Taux d'escompte= 10%
- 1 jours de banque
- commission fixe effet place domicilié 0,5 TND
- commission fixe effet place non domicilié 1,2 TND
- commission fixe effet déplacé domicilié 1 TND
- commission fixe effet déplacé non domicilié 1,8 TND

Travail à faire : Etablir le bordereau d'escompte et déterminer le net à porter au compte du client

Banque :	**B.I.A.T Gabès centre ville**						
Société :	**XYZ**			**Gabès le 25/04**			
N° de l'effet	**Lieu de paiement**	**Valeur nominale**	**Echéa-nce**	**Jours d'agios**	**Escompte**	**Commission fixe**	**TVA/Com**
1	B.I.A.T-Tunis	810	14/05	5+14+1=20j	4,5	1	0,18
2	S.T.B-Gabès	954	23/06	5+31+23+1=60j	15,9	1,2	0,216
3	B.I.A.T-Gabès	936	19/05	5+19+1=25j	6,5	0,5	0,09
4	B.N.A-Sfax	1800	03/07	5+31+30+3+1=70 j	35	1,8	0,324
Total		4500			61,9	4,5	0,81
Agios		61,5+4,5+0,81=67,21					
Montant net		4432,79=4500-67,21					

c) Taux réel de l'escompte (pour l'entreprise)

Le taux réel de l'escompte est le taux de revient de l'opération d'escompte (Tr) pour l'entreprise. Il correspond au taux d'escompte réellement supporté par l'entreprise en tenant compte du montant réel mis à la disposition de l'entreprise et la durée d'utilisation des fonds. Il permet à l'entreprise de décider d'escompter ou non en cas de déficit de trésorerie. En cas d'escompte, la détermination de ce taux aide l'entreprise à décider auprès de quelle banque a-t-elle intérêt à escompter ses effets. L'entreprise optera dans les deux cas pour l'alternative dont le taux de revient est le plus faible, en fonction des possibilités d'escompte offertes par chaque banque.

$$T_r = \frac{36000.(Agios.TTC)}{\bar{\text{n}}.(\text{V - Agios.TTC})}$$

avec $\bar{\text{n}}$ égale à l'échéance moyenne des effets escomptés.

d. Taux de placement de l'opération d'escompte (pour la banque)

Etant donné que la banque ne fait que collecter la TVA pour le compte de l état, le calcul de son taux de placement doit exclure cette TVA. La formule devient :

$$Tp = \frac{36000.(Agios.HT)}{\overline{\text{n}}.(\text{V - Agios.HT})}$$

II. Les opérations financières à moyen et long terme

1. Capitalisation et actualisation

a) Principe

D'après ce qui précède, le taux d'intérêt apparaît comme étant le taux de transformation de l'argent dans le temps. Cette relation entre temps et taux d'intérêt signifie que deux sommes d'argent ne sont équivalentes que si elles sont égales à la même date.
Dès lors, pour pouvoir comparer deux ou des sommes disponibles à différentes dates le passage par les techniques de calcul actuariel (capitalisation et actualisation) devient nécessaire.

b) L'actualisation

L'actualisation est une technique qui consiste à faire reculer dans le temps une valeur future pour calculer sa valeur présente appelée *Valeur Actuelle*.
La valeur actuelle $\mathbf{C_0}$ d'une somme d'argent $\mathbf{C_1}$ disponible dans une année et placée au taux t, est donnée par la formule suivante:

$$\mathbf{C_0 = C_1 (1 + t)^{-1}}$$

Dès lors, la valeur actuelle $\mathbf{C_0}$ d'une somme d'argent $\mathbf{C_n}$ disponible dans n années d'intervalle et placée au taux t est égale à:

$$\mathbf{C_0 = C_n (1 + t)^{-n}}$$

t_0 ←		→ t_n
Valeur actuelle	Actualisation	Valeur future
$C_0 = ?$		C_n
$C_0 = C_n (1+t)^{-n}$		

c) La capitalisation

Contrairement à l'actualisation, la capitalisation consiste à faire avancer dans le temps une valeur présente pour calculer sa valeur future appelée aussi *Valeur Acquise*.
La valeur acquise C_1 d'une somme d'argent présente C_0 capitalisée au taux t pendant une année est égale à:

$$\mathbf{C_1 = C_0 (1 + t)}$$

Dès lors, la valeur future $\mathbf{C_n}$ d'une somme d'argent présente $\mathbf{C_0}$ disponible après n années et placée au taux t est égale à:

$$\mathbf{C_n = C_0 (1 + t)^n}$$

$\mathbf{t_0}$	→	$\mathbf{t_n}$
Valeur actuelle	**Capitalisation**	**Valeur future**
$\mathbf{C_0}$		**Cn = ?**
		$\mathbf{C_n = C_0 (1+t)^n}$

2. L'intérêt Composé

a) Principe et champ d'application

Un capital est dit « placé à intérêts composés », lorsqu'à la fin de chaque période de placement, les intérêts simples produits sont ajoutés au capital pour constituer un nouveau capital qui produira à son tour des intérêts au cours de la période suivante.

La caractéristique des placements à intérêts composés est que les intérêts produits à la fin d'une période génèrent eux-mêmes des intérêts. **C'est la notion de capitalisation des intérêts**.

L'intérêt dû pour une période est toujours supérieur à celui de la période précédente.

Donc :

- *le capital de base varie à chaque période*
- *le montant d'intérêt varie à chaque période*
- *s'il s'agit d'un placement, l'intérêt s'ajoute au capital. S'il s'agit d'un emprunt, l'intérêt est retranché du capital.*

On parle alors d'une capitalisation des intérêts.

Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an.

b) Calcul pratique

Soit,

C_0 : le capital initialement placé au début d'une période

i : le taux d'intérêt périodique pour une durée d'un an

n : nombre de périodes de placement

C_n : Valeur acquise par le capital C_0 au bout de n périodes de placement

Le tableau qui suit présente la méthode de calcul des intérêts et de valeur acquise à la fin de chaque année

:Période	Capital au début de la période	L'intérêt de La période	Capital obtenu à la fin de la période (valeur acquise)
1	C_0	$C_0 . i$	$C_1=C_0 + C_0.i = C_0 (1+ i)$
2	$C_0.(1+ i)$	$C_0 (1+ i) i$	$C_2=C_0 (1+ i) + C_0 (1+ i).i = C_0 (1+ i)^2$
3	$C_0 (1+ i)^2$	$C_0 (1+ i)^2 i$	$C_3=C_0 (1+ i)^2 + C_0 (1+ i)^2.i = C_0 (1+ i)^3$
:			
n-1	$C_0 (1+ i)^{n-2}$	$C_0 (1+ i)^{n-2} i$	$C_{n-1}=C_0 (1+ i)^{n-2} + C_0 (1+ i)^{n-2}.i = C_0 (1+ i)^{n-1}$
N	$C_0 (1+ i)^{n-1}$	$C_0 (1+ i)^{n-1} i$	$C_n=C_0 (1+ i)^{n-1} + C_0 (1+ i)^{n-1}.i = C_0 (1+ i)^n$

La valeur acquise par le capital C_0 à la fin de n périodes au taux i est donc donnée par la formule suivante : $\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n}$

Remarques:

- La formule $\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n}$ n'est applicable que si le taux d'intérêt i et la durée n sont homogènes, c'est à dire exprimés dans la même unité de temps que la période de capitalisation .

Si par exemple, il est convenu entre le prêteur et l'emprunteur que les intérêts doivent être capitalisés à la fin de chaque mois, la formule ne sera applicable que si le taux d'intérêt est mensuel (**$i_m=i_a/12$**)et que la durée de placement est exprimée en mois.

- On obtient l'intérêt composé global (total) en faisant la différence entre la valeur acquise et le capital initial :

$$I_n=C_n - C_0 = C_0 (1 + i)^n - C_0$$

$$I_n=C_0 [(1 + i)^n - 1]$$

- La valeur actuelle est obtenue par :

$$C_0=C_n (1 + i)^{-n}$$

- La durée de placement n ;

$$(1 + i)^n = C_n /C_0 \text{ ou } (1 + i)^{-n} = C_0 /C_n$$

$$\log (1+i)=\log(C_n /C_0) \Rightarrow n \log (1+i)=\log C_n - \log C_0$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$$

- Le taux de placement i:

$$\log(1+i) = \frac{\log C_n - \log C_0}{n} = x \Rightarrow 1+i = e^x \Rightarrow i = e^x - 1$$

Exemple 1:

Une somme de 10000 dinars est placée pendant 5 ans au taux annuel de 10%.

1/ Quelle somme obtient-on à l'issue de ce placement ?

2/ Si au bout de cette période de placement on souhaite obtenir 20000 dinars, quelle somme doit-on placer aujourd'hui ?

3/ Si la somme placée aujourd'hui est de 10000 dinars, après combien de temps disposera-t-on d'une somme égale à 23580 dinars ?

4/ Si au bout de 5 ans la valeur acquise du placement est de 17821 dinars à quel taux le placement a été effectué ?

Réponse :

1/ Valeur acquise :

$\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n}$

$C_5 = 10000 (1 + 0,1)^5 = 16105,100$ dinars

2/ Valeur actuelle correspondante à une valeur acquise de 20000 dinars.

$\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n \Rightarrow C_0 = C_n (1 + i)^{-n}}$

$C_0 = 20000 (1 + 0,1)^{-5} = 12418,426$ dinars.

3/ Durée de placement

On log (a.b)=log(a)+log(b)

Log(a/b)=log (a)-log (b)

Log (a^n)=n log (a)

$\mathbf{Log\ X=Y \Rightarrow X = e^Y}$

$\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n}$

$\Rightarrow \mathbf{\log C_n = \log C_0 + n. \log(1+i)} \Rightarrow n = \dfrac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}$

$n = \dfrac{\log 23580 - \log 10000}{\log(1+0,1)} \Rightarrow$ **n= 9 ans**

4/ Taux de placement

$\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^n} \Rightarrow (1+i)^n = \dfrac{C_n}{C_0} \Rightarrow i = \left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \Rightarrow i = \left(\dfrac{17821}{10000}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$ **= 0,1225**

i = 12,25%

où :

$\mathbf{i = e^x - 1} \quad i = e^{\frac{\log C_n - \log C_0}{n}} - 1$

$\Rightarrow i = e^{\frac{\log 17821 - \log 10000}{5}} - 1$ **=12,25%**

c) Taux proportionnel et taux équivalent

Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en taux annuels.
Lorsque le taux i est donné pour une période d'une année (taux annuel), et lorsque la période de capitalisation (ou d'actualisation) est un divisible entier de l'année (le semestre, le trimestre ou le mois), on doit disposer d'un taux propre à la période retenue.
Pour cela, on dispose de deux genres de taux : le taux proportionnel ou le taux équivalent.

- **Taux proportionnel**

Soit,
i : taux annuel
p : le nombre de périodes dans l'année
i_p : taux proportionnel par période

Si la période retenue dans le calcul des intérêts est une fraction de l'année. , et s'il existe p périodes dans l'année, le taux proportionnel de la période retenue est $\frac{i}{p}$ et le facteur de capitalisation serait de $(1+\frac{i}{p})^{np}$, où n représente le nombre d'année.

On a alors $i_p = \frac{i}{p}$ et $C_n = C_0(1+\frac{i}{p})^{np}$

- Pour une capitalisation semestriel, p=2 et $\mathbf{i_s}$ = taux semestriel $i_s = \frac{i}{2}$
- Pour une capitalisation trimestriel, p=4 et $\mathbf{i_t}$ = taux trimestriel $i_t = \frac{i}{4}$
- Pour une capitalisation mensuel, p=12 et $\mathbf{i_m}$ = taux mensuel $i_m = \frac{i}{12}$

Deux taux correspondants à des périodes différentes sont dits proportionnels, lorsque leur rapport est égal au rapport inverse de leurs périodes de capitalisation respectives. Le taux proportionnel est obtenu en divisant le taux annuel (i) par la périodicité de capitalisation (p).

- **Taux équivalent**

Soit,
i : taux annuel équivalent
p : nombre de périodes de l'année
i_p : taux équivalent par période

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes, sont dits équivalents lorsqu'ils produisent la même valeur acquise du même capital placé pendant la même durée.
Le taux équivalent est un taux fractionnel de celui propre à une année et qui permet d'obtenir le même résultat quelque soit la période retenue.
S'il existe p sous périodes dans l'année, on a alors:

$(1+i_p) = (1+i)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$ ou $i_p = \sqrt[p]{(1+i)} - 1$

et $C_n = C_0(1+i_p)^{np}$

<u>Démonstration :</u>

$\mathbf{C_0(1+i)=C_0(1+i_p)^p \Rightarrow (1+i)=(1+i_p)^p}$

$\Rightarrow 1+i_p = \sqrt[p]{(1+i)}$ $\Rightarrow i_p = \sqrt[p]{(1+i)} - 1$ $\Rightarrow i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$

Ainsi si:

i_s = taux semestriel équivalent, alors $i_s = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1$ ou $i_s = \sqrt[2]{(1+i)} - 1$

i_t = taux trimestriel équivalent, alors $i_t = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$ ou $i_t = \sqrt[4]{(1+i)} - 1$

i_m = taux mensuel équivalent, alors $i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1$ ou $i_m = \sqrt[12]{(1+i)} - 1$

Exemple:
Calculer le taux semestriel proportionnel et le taux semestriel équivalent pour i = 9 %.

Taux semestriel proportionnel = $i_s = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045 = 4{,}5\%$

Taux semestriel équivalent = $i_s = (1+0{,}09)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0{,}044 = 4{,}4\%$

- **Calcul de la valeur acquise dans le cas d'une période de placement non entière**

Lorsque la période de placement est fractionnaire, deux solutions sont envisagées pour résoudre le problème :

Méthode 1 : Cette méthode implique l'utilisation de la formule générale $C_n = C_0\ (1 + i)^n$ pour le nombre entier de périodes et l'utilisation de l'intérêt simple pour la fraction de période.

Exemple:

Calculer la valeur acquise d'un capital de 1000 dinars placé à intérêts composés au taux de 8,5% pendant une durée de 4 ans et 3 mois.

$C_{4\ ans\ 3\ mois}$= C_4 + (C_4*t*3)/1200 telque t=i*100

$C_{4\ ans}$= 1000(1,085)^4=1385,858

$C_{4\ ans\ 3\ mois}$= 1385,858 + (1385,858*8,5*3)/1200=**1415,307**

Méthode 2 : consiste à utiliser le taux équivalent.

Exemple:
Supposons le même exemple précédent
On a

$C_4 = C_0\ (1 + i)^4$ et $i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1$

$C_{4\ ans\ 3\ mois} = C_4\ (1+i_m)^3$
$= C_4\ (1+((1+i)^{1/12}-1))^3$
$= C_4\ (1+i)^{3/12}$
$= C_0\ (1+i)^4\,(1+i)^{3/12}$
$= C_0\ (1+i)^{4+3/12}$

$C_{4\ ans\ 3\ mois}$= 1000 (1,085)$^{4+3/12}$ = 1414,413.

3. Les annuités

1) Définition

On désigne par annuités une suite de versements effectués à intervalles de temps égaux. Cette suite de règlements constitue une rente pour celui qui en bénéficie.
L'intervalle de temps peut être l'année, le semestre, le trimestre ou le mois. On parle respectivement d'annuités, de semestrialités, de trimestrialités et de mensualités.
Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles.
L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.
Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables. Nous ne traitons dans ce cours que les annuités constantes.

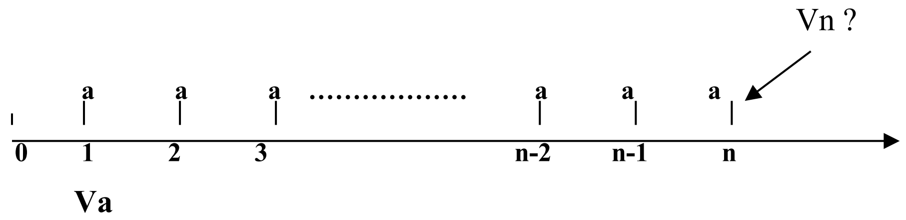
Le versement d'annuités peut s'effectuer dans un double but :

- Soit en vue de constituer un capital = annuités de placement ou de capitalisation.
- Soit en vue de rembourser une dette = annuités de remboursement ou de capitalisation.

Une suite d'annuités est définie par :
a = annuités de remboursement ou d'amortissement, n = nombre de versements, i = le taux d'intérêt de la période, la date du premier versement et la date du deuxième versement.

2) Valeur acquise d'une suite d'annuités constantes

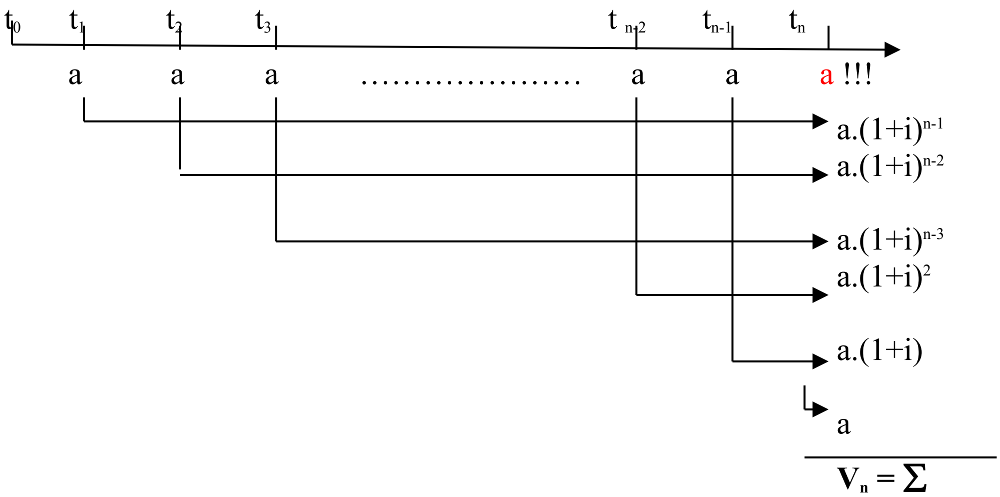
La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement.
Dans le cadre des annuités constantes, nous avons :



On a : $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a$

- **Valeur acquise à la date du dernier versement : V_n**

On appelle valeur acquise (V_n) d'une suite de n annuités constantes la somme des valeurs acquises (capitalisées) des différentes annuités à la date du dernier versement (fin nième période)



Si on note par:

V_n : la valeur acquise de la suite des annuités

a : l'annuité constante

n : le nombre d'annuités

i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a, alors :

$$V_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-3} + ... + a(1+i)^2 + a(1+i) + a$$

$$= a[1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemple 1:

Calculer la valeur acquise d'une suite de quinze annuités annuelles de 500 TND chacune. Le taux de capitalisation étant de 6%.

Réponse :

$$V_{15} = 500\frac{(1+0,06)^n - 1}{0,06} = 11637,985$$

Exemple 2:

Une personne souhaite disposer dans 7 ans de 5000 TND. Combien doit-elle verser par an pour obtenir cette somme au taux 8%.

Réponse :

Soit a le montant annuel constant à verser.

On a $V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\Rightarrow a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 5000\frac{0{,}08}{(1+0{,}089)^7 - 1}$ =560,362

Exemple 3:

Déterminer la date du dernier versement annuel constant de 1500 TND permettant d'accumuler 10000 TND, le taux de capitalisation étant de 12%.

Réponse:

On a : $V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \mathbf{(1+i)^n =} \frac{V_n . i}{a} + 1$

$\Rightarrow \log\ [\mathbf{(1+i)^n}] = \mathbf{log}\left[\frac{V_n . i}{a} + 1\right] \Rightarrow n \log\ \mathbf{(1+i)} = \mathbf{log}\left[\frac{V_n . i}{a} + 1\right]$

$\Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{V_n . i}{a} + 1\right)}{\log(1+i)}$

$n = \frac{\log\left(\frac{10000.0{,}12}{1500} + 1\right)}{\log(1+0{,}12)}$ = 5,1865 ans = 5 ans, 2 mois et 7 jours.

Exemple 4:

Déterminer le taux de capitalisation pour 5 annuités constantes de 1500 TND qu'on doit verser pour accumuler un capital de 10000 TND.

Réponse :

On a $V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{V_n}{a}$ et on détermine i par tâtonnement.

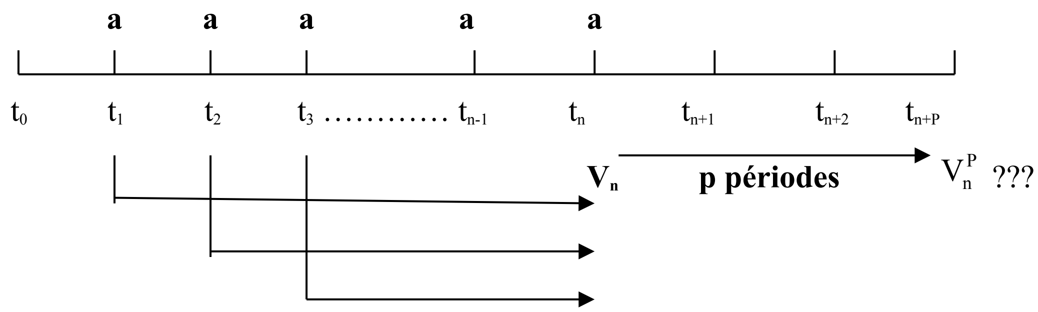
$\frac{(1+i)^5 - 1}{i} = \frac{10000}{1500} = 6{,}66667$

i=14% $\rightarrow$ 6,61010

i= ? $\rightarrow$ 6,66667 $\Rightarrow \frac{14\% - i}{14\% - 15\%} = \frac{6{,}61010 - 6{,}66667}{6{,}66667 - 6{,}74238}$ $\Rightarrow$ **<u>i=14,427%</u>**

i=15% $\rightarrow$ 6,74238

- **Valeur acquise après P périodes du dernier versement**



Soit V_n^P la valeur acquise d'une suite d'annuités constantes p périodes après le dernier versement.

$V_n^P = V_n\,(1+i)^P$ $\Rightarrow$ Le capital constitué après n versements va rester au compte P périodes. Il va générer des intérêts.

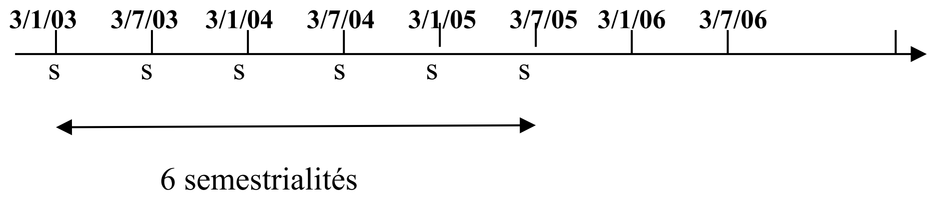
$$V_n^p = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^p$$

Exemple :

Le 3/01/2003, une personne s'est engagée à verser 6 semestrialités de 5000 TND chacune sur un compte d'épargne rémunéré au taux annuel à intérêts composés de 12,36%.

Travail à faire : Déterminer la valeur acquise par ces placements le jour du dernier versement et à la date du 3/7/2006.

Réponse :



On a i_a=12,36% : il faut chercher tout d'abord le taux semestriel équivalent

$(1+i_s)^2=(1+i_a) \Rightarrow (1+i_s) =(1+i_a)^{1/2}$

$\Rightarrow i_a = (1+i_a)^{1/2} -1 \Rightarrow i_a = (1,1236)^{1/2} -1 = 6\%$

$\mathbf{V_{3/7/05}}$: valeur acquise suite au versement de la 6ème annuité

$$\mathbf{V_{3/7/05}} = 5000\frac{(1,06)^6 - 1}{0,06} = 34876,59$$

$\mathbf{V_{3/7/06}}$: valeur acquise à la date du **3/7/06**

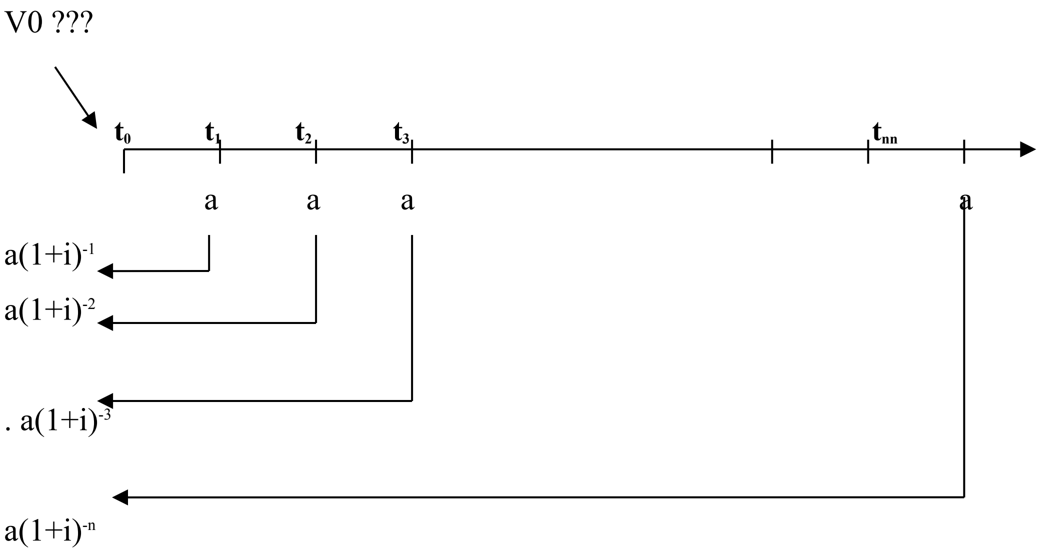
$\mathbf{V_{3/7/06}} = \mathbf{V_{3/7/05}\,(1+i)^2} =$ 34876,59 $(1,06)^2$= 39187,336

3) Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes, la somme des valeurs actuelles (**V_0**) des différents versements.

- **Valeur actuelle à la date du premier versement**

C'est la somme des valeurs actuelles (**V_0**) des différents versements évalués à la date du premier versement.



V_0 = somme des valeurs actuelles à t=0

Si on note par:

V_0 = la valeur actuelle de la suite des annuités

a = l'annuité constante

n = le nombre d'annuités

i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:
V0 = a(1+i)-1 + a(1+i)-2 + …..+ a(1+i)-n+1 + a(1+i)-n
V0 = a [(1+i)-1 + (1+i)-2 + …..+ (1+i)-n+1 + (1+i)-n]
V0 = a (1+i)-1 [1+ (1+i)-1 + …..+ (1+i)-n+2 + (1+i)-n+1]
On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i)-1 et comprenant n termes. La formule devient :

$$V0 = a \, (1+i)^{-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$V0 = a \, \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

NB: La valeur actuelle (**V_0**) peut être exprimée en fonction de la valeur acquise (**V_n**)

On a $\mathbf{V_n=V_0\,(1+i)^n} \Rightarrow \mathbf{V_0=V_n\,(1+i)^{-n}}$

Exemple:

Le directeur financier de la société alpha, va rembourser l'achat du nouvel équipement effectué 1/1/2006, par une suite de 12 annuités constantes de 1500 TND. Le premier versement aura lieu le 1/1/2007. Le taux d'intérêt est de 9%.

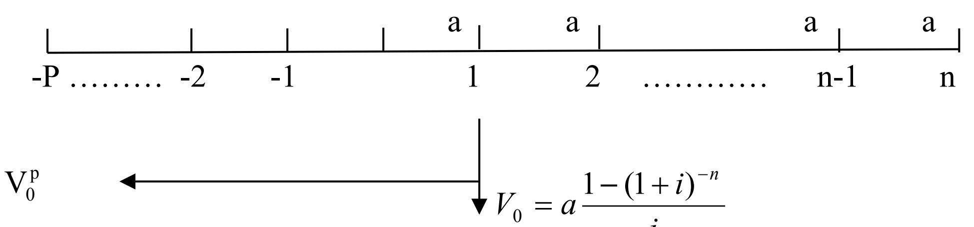
1. Calculer la valeur actuelle à la date du 1/1/2007
2. Calculer la valeur actuelle à la date du 1/1/2006

Réponse :

1. $$V_0 = 1500\frac{1-(1+0{,}09)^{-12}}{0{,}09}(1{,}09) = 11707{,}785$$

2. $$V_0 = 1500\frac{1-(1+0{,}09)^{-12}}{0{,}09}(1.09)\,(1.09)^{-1} = 10741{,}0879.$$

- **Valeur actuelle valorisée P périodes avant le premier versement**



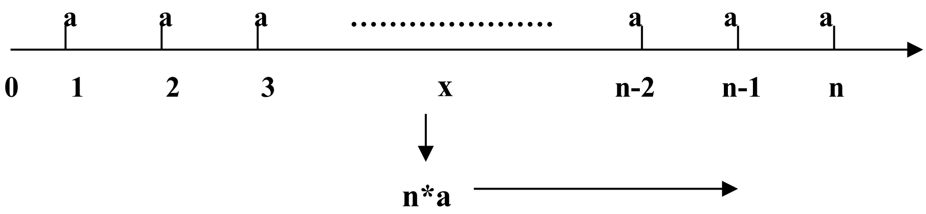
$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Date du premier versement

$$V_0^p = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-p}$$

3) Echéance moyenne d'une suite d'annuités constantes

Considérons **n** annuités constantes, le calcul de l'échéance moyenne consiste à trouver la date d'échéance d'une annuité unique équivalente, à cette date, à la somme des valeurs de la suite d'annuités (**n*a**).



On remplace une suite de n annuités par une seule annuité ayant pour montant **n*a.**

Le calcul de l'échéance moyenne peut être réalisé à partir de $\mathbf{V_n}$ ou de $\mathbf{V_0}$.

- **A partir de la valeur acquise :**

$$a\frac{(1+i)^n-1}{i}=na(1+i)^{n-x}$$

$$\Rightarrow (1+i)^{n-x}=\frac{(1+i)^n-1}{ni}$$

- **A partir de la valeur actuelle :**

$$a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=na(1+i)^{-x}$$

$$\Rightarrow (1+i)^{-x}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{ni}$$

$$\Rightarrow (1+i)^{x}=\frac{ni}{1-(1+i)^{-n}}$$

Exemple :

L'entreprise « x » doit une somme d'argent qui devient être remboursée par une suite de 10 annuités constantes de 150 TND chacune. Elle propose à son créancier s'acquitter de sa dette par un seul versement de 1000 TND. Si le premier versement devrait être effectué 15 octobre 2006, à quelle date devrait s'effectuer le versement unique. Sachant que le taux annuel appliqué est de 10%.

Réponse :

$$150\frac{1-(1{,}1)^{-10}}{0{,}1}=1000(1{,}1)^{-x} \quad \Rightarrow (1{,}1)^x=\frac{1000.0{,}1}{150.(1-1{,}1)^{-10}}=1{,}0849693$$

x= $\dfrac{\log(1{,}0849693)}{\log(1{,}1)}$ = 0,8556= 10 mois et 8 jours. **Date = 23 août 2007**