Analyse 2

Prs. Z. ABDELALI et A. ZOGLAT

Dép. de Maths

FSR

SMIA :S2

Programme

I Techniques de Calculs

CH1- Techniques d'Intégration

CH2- Intégrale généralisée

CH3- Équations différentielles

II Fondements Théoriques

CH4- Intégrale de Riemann

CHAPITRE 1

Techniques d'Intégration

Contenu du Chapitre

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

$F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si

$$F \text{ est dérivable et } F'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in I$$

Exemple

1.
   - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
   - Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f
   - Et $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f
2.
   - Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$
   - $G : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g
   - Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g

Proposition

Si F est une primitive de f sur un intervalle de $\mathbb{R}$ alors toute primitive de f s'écrit

$$G = F + c \quad \text{où } c \in \mathbb{R}$$

Démonstration.

- Si $G(x) = F(x) + c$ alors $G'(x) = F'(x)$, donc $G'(x) = f(x)$ ainsi G est bien une primitive de f
- Si G est une primitive quelconque de f alors

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

donc $G - F$ est une fonction constante. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G - F)(x) = c$. Ainsi $G(x) = F(x) + c$

$\square$

Notations

Une primitive d'une fonction f est désignée par $\int f(t)\, dt$.

- Autres notations : $\int f(x)\, dx$, $\int f$
- Si F est une primitive de f alors $F = \int f(t)\, dt + c$, où c est une constante.
- $\int f(t)\, dt$ est une fonction.
- $\int_a^b f(t)\, dt$ est le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Proposition

Soient F une primitive de f et G une primitive de g et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $F + G$ est une primitive de $f + g$
- λF est une primitive de λf

$$\boxed{\int \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int f(t)\, dt + \mu \int g(t)\, dt}$$

Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x \, dx = e^x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ sur $]0, +\infty[$
$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + c \quad$ sur $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c \qquad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \qquad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{argsh} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{argch} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \qquad \text{sur } x \in]1, +\infty[$$

Théorème de la moyenne

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration.

On admet que, si g et h sont deux fonctions telles que

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) \leq h(x) \text{ alors } \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b h(t)\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $\displaystyle\min_{x\in[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \max_{x\in[a,b]} f(x)$, et

comme f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure. □

Théorème Fondamental (Admis)

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f possède une primitive unique

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui s'annule en a et définie par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\, dt}$$

. Donc F est dérivable et $F'(x) = f(x)$

Ainsi pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)}$$

Notations

- $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$

- $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a

- Si F est de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\boxed{\displaystyle\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)}$

Exemple

1. $f(x) = e^x, \quad F(x) = e^x, \quad \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$
2. $g(x) = x^2, \quad G(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
3. $\int_a^x \cos t \,\mathrm{d}t = \left[\sin t\right]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$
4. Si f est impaire alors ses primitives sont paires, et $\int_{-a}^a f(t) \,\mathrm{d}t = 0$.

Techniques d'intégration

- Intégration par parties
- Changement de variable

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$

$$\boxed{\int_a^b u(x)\, v'(x)\; dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\; dx}$$

Notation

- $\left[F\right]_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\left[F\right]$ désigne la fonction $F + c$, où c est une constante.
- $\displaystyle\int u(x)v'(x)\; dx = \left[uv\right] - \int u'(x)v(x)\; dx$.

Démonstration.

Il suffit d'intégrer les termes de l'égalité : $(uv)' = u'v + uv'$ □

Exemple

Calcul de $\int_0^1 xe^x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x \, dx &= \int_0^1 u(x)v'(x) \, dx \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx \\
&= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx & \quad u = x \quad u' = 1 \\
&= \left(1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0\right) - \left[e^x\right]_0^1 & \quad v' = e^x \quad v = e^x \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exemple

Calcul de $\int_1^e x \ln x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^e x \ln x \, dx &= \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v \\
&= \left[\ln x \cdot \tfrac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2} \, dx \\
&= \left(\ln e \tfrac{e^2}{2} - \ln 1 \tfrac{1^2}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\int_1^e x \, dx \\
&= \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{e^2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \quad v = \frac{x^2}{2}$

Exemple

Calcul de $\int \arcsin x \; dx$

On pose $u = \arcsin x$, $v' = 1$ (donc $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v = x$), d'où :

$$\int 1 \cdot \arcsin x \; dx = \left[x \arcsin x\right] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \; dx}$$

$$= \left[x \arcsin x\right] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Changement de variable

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

$$\boxed{\forall a, b \in J;\ \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \quad = \quad \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt}$$

$$x = \varphi(t) \implies \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \implies dx = \varphi'(t)\, dt$$

$$\implies f(x)\, dx = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

$$\implies \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

Exemple

$$F = \int \tan t \; dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \; dt$$

- Forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$), primitive est $\ln |u|$ Donc
$$F = \int -\frac{u'}{u} = -\left[\, \ln |u| \right] = -\ln |u| + c = -\ln |\cos t| + c$$
- Changement de variable $x = \varphi(t) = \cos t$, $dx = -\sin t \; dt$

$$F = \int \tan t \; dt = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \; dt$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t)) \; dt = -\int f(x) \; dx$$
$$= -\int \frac{1}{x} \; dx = -\ln |x| + c \; = -\ln |\cos t| + c$$

Exemple

$$\text{Calcul de } \int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$$

- Changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$
- Alors $du = \varphi'(x)\, dx = -2x\, dx$
- Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$
- Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$

$$\int_0^{1/2} \frac{x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int_1^{3/4} \frac{-\frac{1}{2}\, du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-2u^{-1/2}\right]_1^{3/4} = \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$$

Exemple

$$\text{Calcul de } \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$$

- Changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t \quad 1 - x^2 = \cos^2 t$
- $dx = \cos t \; dt$
- $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$
- Pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t \; dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t \; dt}{(\cos^2 t)^{3/2}}$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \big[\tan t\big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice

1. Calculer les intégrales à l'aide d'intégrations par parties :
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin t \; dt$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t \; dt$, puis par récurrence $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^n \sin t \; dt$.
2. Déterminer les primitives à l'aide d'intégrations par parties :
$\displaystyle\int t \operatorname{sh} t \; dt$, $\displaystyle\int t^2 \operatorname{sh} t \; dt$, puis par récurrence $\displaystyle\int t^n \operatorname{sh} t \; dt$.
3. Calculer les intégrales à l'aide de changements de variable :
$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \; dt$; $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} \; dt$ (pour ce dernier poser deux changements de variables : $u = \cos t$, puis $v = 1 - u$).
4. Déterminer les primitives suivantes à l'aide de changements de variable : $\displaystyle\int \operatorname{th} t \; dt$ où $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $\displaystyle\int e^{\sqrt{t}} \; dt$.

Fractions rationnelle du type : $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$

Premier cas : $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

$$\int f(x)\, dx = A \ln |x - x_1| + B \ln |x - x_2| + c$$

Deuxième cas : $ax^2 + bx + c$ a une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x - x_0)^2} = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}$$

$$\int f(x)\, dx = -\frac{A}{x - x_0} + B \ln |x - x_0| + c$$

Troisième cas : $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle

Exemple

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$$

1. Faire apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

2. On intègre en $\ln |u|$

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\, dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln \left|2x^2+x+1\right| + c$$

Exemple(suite)

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x^2+x+1}$$

3. Écrire $\frac{1}{2x^2+x+1}$ sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$)

$$\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}$$

On pose $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})$ (et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}} dx$)

$$\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \int \frac{8}{7} \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1} = \frac{8}{7} \int \frac{du}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan u + c = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c$$

4. $\displaystyle\int f(x)\, dx = \frac{1}{4} \ln\left(2x^2+x+1\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right) + c$

Intégration des éléments simples

Une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose comme somme d'un polynôme et d'éléments simples $\dfrac{C}{(x-x_0)^k}$ ou $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$

1. Intégration de l'élément simple $\dfrac{C}{(x-x_0)^k}$
   - Si $k=1$ alors $\displaystyle\int \frac{C\,dx}{x-x_0} = C\ln|x-x_0| + c$
   - Si $k \geq 2$,
     $$\int \frac{C\,dx}{(x-x_0)^k} = C\int (x-x_0)^{-k}\,dx = \frac{C}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + c$$
2. Intégration de l'élément simple
   $$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} = C\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + D\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Intégration des éléments simples

3. $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}\,dx = \frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1} + c = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1} + c$
4. Si $k=1$, $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$ et du type $\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c$
5. Si $k \geq 2$, $\displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$ et du type $I_k = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^k}$.
Une **IPP** permet de passer de I_{k-1} à I_k.

Exemple : Calcul de $I_2 = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2}$

Intégration par parties à partir de $I_1 = \displaystyle\int \frac{du}{u^2+1}$

$f = \dfrac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$ (avec $f' = -\dfrac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \tfrac{du}{u^2+1} = \left[\tfrac{u}{u^2+1}\right] + \int \tfrac{2u^2\,du}{(u^2+1)^2} = \left[\tfrac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \tfrac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \left[\tfrac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \tfrac{du}{u^2+1} - 2\int \tfrac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\tfrac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2 \end{aligned}$$

D'où $I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2}\dfrac{u}{u^2+1} + c$. Mais $I_1 = \arctan u$ donc,

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \tfrac{1}{2}\arctan u + \tfrac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c$$

Intégrales de la forme $\int \sin^m(x)\cos^n(x)\ \mathrm{d}x$

1- Cas où $n = 2k+1$.

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x \ \mathrm{d}x &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x \mathrm{d}x \\ &= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x \mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=0}^{k} \mathtt{C}_j^k \ (-1)^j \ \int \sin^{m+2j} \cos x \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$

Exemple : $\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x - \int \sin^4 x \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + \text{ Cste}
\end{aligned}$$

Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$

Cas où $m = 2k + 1$

$$
\begin{aligned}
\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^m \sin^{2k} x \sin x \mathrm{d}x \\
&= \int \cos^n (1 - \cos^2 x)^k \sin x \mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathtt{C}_k^j \, (-1)^j \int \cos^{n+2j} \sin x \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$

Exemple :

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x &= \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \int \cos^4 x \sin x \, \mathrm{d}x - 2\int \cos^6 x \sin x \, \mathrm{d}x + \int \cos^8 x \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{-1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + \text{ Cste}
\end{aligned}$$

Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x \, \mathrm{d}x$

Intégrales de la forme $\int \sin^{2k} \cos^{2l} x \, \mathrm{d}x$

3- Si $m = 2k$ et $n = 2l$, alors on utilise les identités suivantes :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

et éventuellement l'identité $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$.

Intégrales de la forme $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Exemple : $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx - \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 x \, dx \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\
&= \frac{2x + \sin 2x}{4} - \frac{x + \sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \left[x + \frac{\sin 4x}{4} \right] = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + \text{ Cste}
\end{aligned}$$

Intégrales du type $\displaystyle\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\, dx$

Les règles de Bioche

On pose $\boxed{\omega(x) = f(x)\, dx}$, d'où :

$$\omega(-x) = -f(-x)\, dx,$$

$$\omega(\pi + x) = f(\pi + x)\, dx \text{ et}$$

$$\omega(\pi - x) = -f(\pi - x)\, dx.$$

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors poser $u = \cos x$
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors poser $u = \sin x$
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors poser $u = \tan x$

Exemple

Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x \; dx}{2 - \cos^2 x}$

Posons $\omega(x) = \dfrac{\cos x \; dx}{2 - \cos^2 x}$. On a alors

$$\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x) \; d(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{(-\cos x) \; (-dx)}{2 - \cos^2 x} = \omega(x)$$

Le changement de variable $u = \sin x \qquad \Longrightarrow \qquad du = \cos x \; dx$

$$\int \frac{\cos x \; dx}{2 - \cos^2 x} = \int \frac{\cos x \; dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{du}{1 + u^2} = \left[\arctan u\right]$$
$$= \arctan(\sin x) + c$$

Le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}}$$

Exemple

La fonction $x \mapsto \tan\frac{x}{2}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[-1, 0]$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} = \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t}$$

$$= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\big(1-\frac{1}{2}\big) = 1$$

Intégrales en $f(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})$

On essaie le changement de variable : $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Exemple :

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

Intégrales en $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Le terme $\sqrt{ax^2+bx+c}$, après la transformation qui consiste à compléter le carré, peut prendre l'une des trois formes suivantes :

$\bullet \sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $\bullet \sqrt{x^2 - \alpha^2}$, ou $\bullet \sqrt{x^2 + \alpha^2}$

nn

- Pour $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ on essaie le changement de variable $x = \alpha \sin\theta$.
- Pour $\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ on essaie le changement de variable $x = \alpha \operatorname{ch}\theta$.
- Pour $\sqrt{x^2 + \alpha^2}$ on essaie le changement de variable $x = \alpha \operatorname{sh}\theta$.

On rappelle que :

$\operatorname{ch}\theta = (\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta})/2$, $\operatorname{sh}\theta = (\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta})/2$, et que $\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$

Exemples

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x,$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x,.$
- $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,\mathrm{d}x,$

Exercices

1. Calculer les primitives $\displaystyle\int \frac{4x+5}{x^2+x-2}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{6-x}{x^2-4x+4}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{2x-4}{(x-2)^2+1}\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx$.
2. Calculer les primitives $\displaystyle I_k = \int \frac{dx}{(x-1)^k}$ pour tout $k \geq 1$. Idem avec $\displaystyle J_k = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^k}$.
3. Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
4. Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.