MECANIQUE DU POINT MATERIEL

- **CHAPITRE 1**

- Systèmes de coordonnées.
- Cinématique du point matériel (avec et sans changements de référentiels).

- **CHAPITRE 2**

- Loi fondamentale et théorèmes généraux de la dynamique du point matériel.

- **CHAPITRE 3**

- Travail et énergie.

- **CHAPITRE 4**

- Les mouvements à force centrale.

RAPPELS

I] PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS:

1) Définition:

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que:

- Sa direction est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- Son module vaut: $\left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \left| \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\text{angle}(\vec{u}, \vec{v})) \right|$ aire du

parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) **Propriétés.**

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est anticommutatif:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est distributif par rapport à l'addition:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

- Dans le cas où $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} // \vec{v}$.

** Une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe si:

$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ et $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

II] PRODUIT MIXTE :

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ exprimés dans

la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tels que:

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad ;$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

Le produit mixte de ces trois vecteurs s'écrit:

$$\vec{u} . (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .$$

$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$ = volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

- Le produit mixte est antisymétrique: la permutation de deux des vecteurs change son signe.

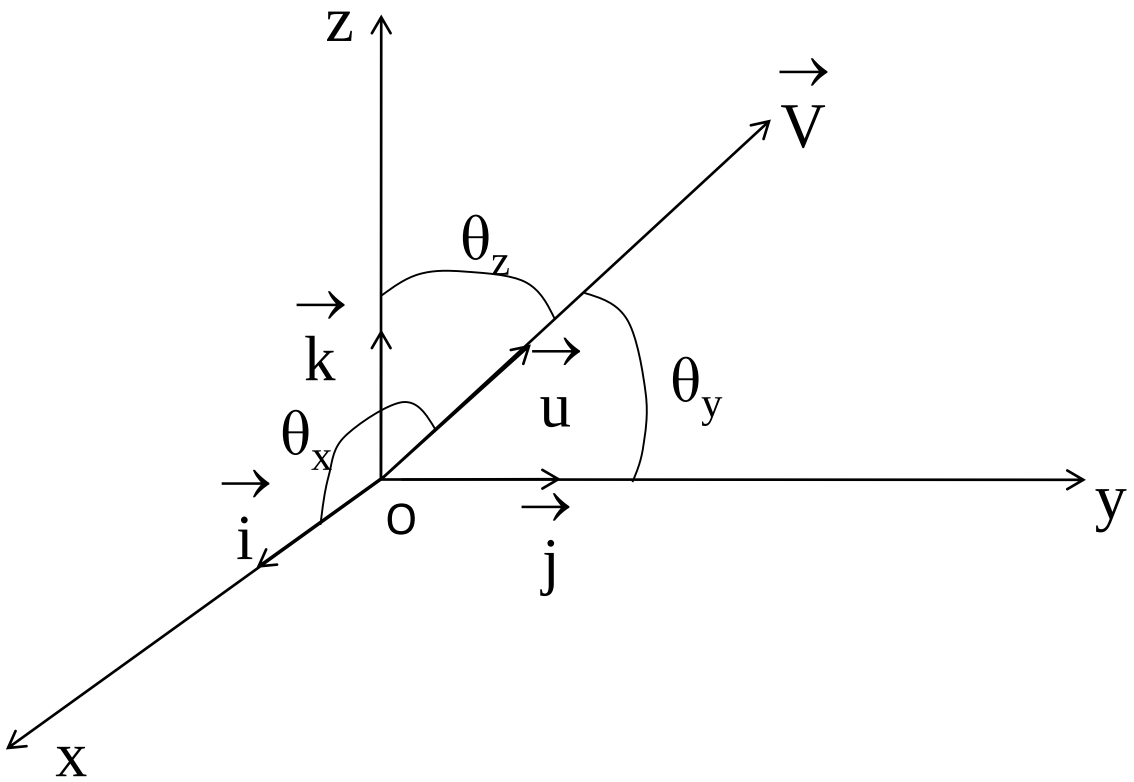
$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = -\vec{v}.(\vec{u} \wedge \vec{w})$$

- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire:

$$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v}.(\vec{w} \wedge \vec{u})$$

III) Cosinus directeurs d'un vecteur

Les cosinus directeurs d'un vecteur sont les cosinus des angles que fait ce vecteur avec chacun des axes d'un repère.



Soient $\vec{V} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}$; $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

et $\vec{u} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$; $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

$$\vec{u}\,.\,\vec{i} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{i}\right|\cos\theta_x = \alpha$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{j} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{j}\right|\cos\theta_y = \beta \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha = \cos\theta_x \\ \beta = \cos\theta_y \\ \gamma = \cos\theta_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{k} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{k}\right|\cos\theta_z = \gamma$$

Les cosinus directeurs de $\vec{V}$ sont les coordonnées de $\vec{u}$.

IV) CHAMP SCALAIRE:

Le champ scalaire est une application de IR^3 dans IR :

$$\begin{array}{ccc} IR^3 & \xrightarrow{f} & IR \\ (x,y,z) & & f(x,y,z) \end{array}$$

Calculer la dérivée partielle de f(x,y,z) par rapport à un paramètre c'est calculer la dérivée de cette fonction par rapport à ce paramètre en supposant les autres constants.

V) GRADIENT D'UN CHAMP SCALAIRE

Soit le vecteur $\vec{\nabla}$ appelé *« nabla »* défini par:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}} \quad ; \qquad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

C'est un vecteur.

VI) ROTATIONNEL D’UN CHAMP DE VECTEURS.

Soit $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ -\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}$$

c’est un vecteur.

VII) DIVERGENCE D'UN CHAMP DE VECTEURS.

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}_{\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}}$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

C'est un scalaire.

CHAPITRE 1

A) SYSTEMES DE COORDONNEES

- Suivant la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

- Soient $R_0(0, x_0 y_0 z_0)$ un repère direct orthonormé

de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et M la particule à repérer.

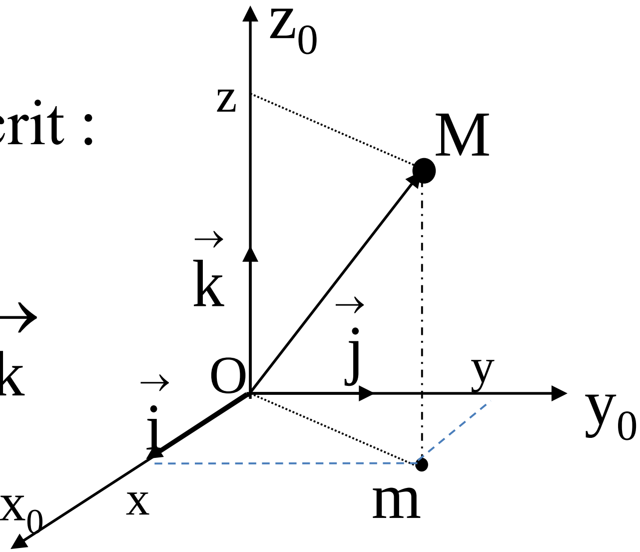
I] Système de coordonnées cartésiennes

Dans R_0, la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que :

x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

$$x = \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{Ox_0}} \overrightarrow{OM} \quad ; \quad y = \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{Oy_0}} \overrightarrow{OM} \quad ; \quad z = \mathrm{Proj}_{\overrightarrow{Oz_0}} \overrightarrow{OM} \ .$$

- Dans R_0, le vecteur position s’écrit :



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

- **Déplacement élémentaire**
- Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' est très voisin de M) s’écrit:

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$d\,\vec{i} = d\,\vec{j} = d\,\vec{k} = \vec{0}$$

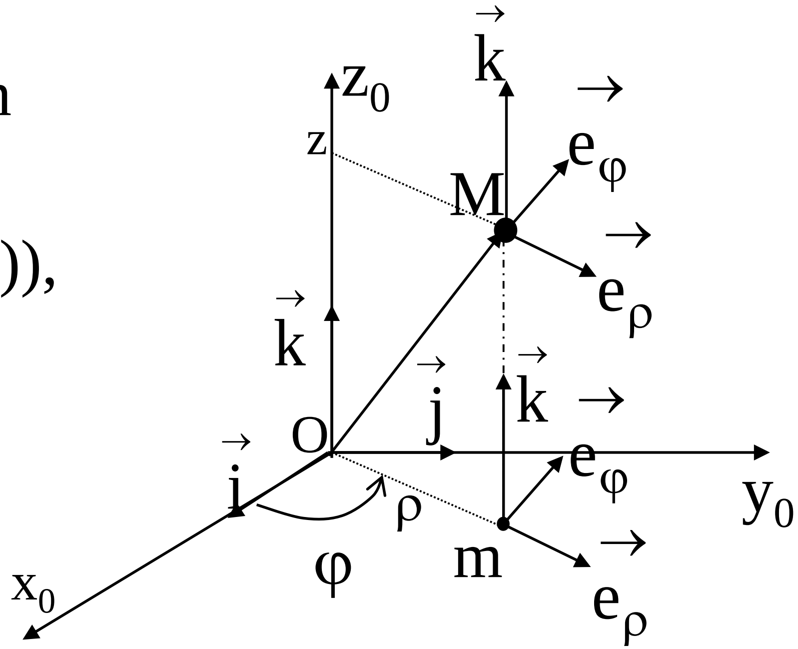
II] Systèmes de coordonnées cylindriques.

- Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution, il est intéressant d'utiliser les coordonnées cylindriques de ce point (ρ, φ, z) définies comme suit :

* $\rho = \left|\overrightarrow{Om}\right|$ (m est la projection du mobile M sur le plan (x_0Oy_0)),

* $\varphi = \text{angle}(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$

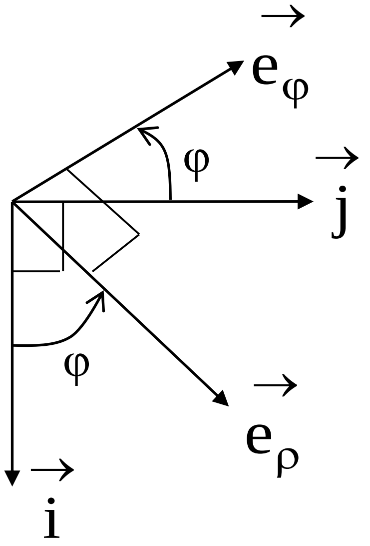
* z est la projection du vecteur position sur l'axe $\overrightarrow{Oz_0}$.



Une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est associée à ce système de coordonnées telle que :

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}\ ; \qquad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$ et $\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho$.



Quand le point M décrit tout l'espace,

les intervalles de variation de ρ , φ et z sont :

$$0 \le \rho < +\infty\ ; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ ; \quad -\infty < z < +\infty$$

Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$, le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$$

Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) est:

$$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = \overrightarrow{MM'} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} + dz\,\overrightarrow{k}$$

Cas particulier:

Si la trajectoire de M est plane, ce point peut être repéré par ses *coordonnées polaires* ρ et φ.

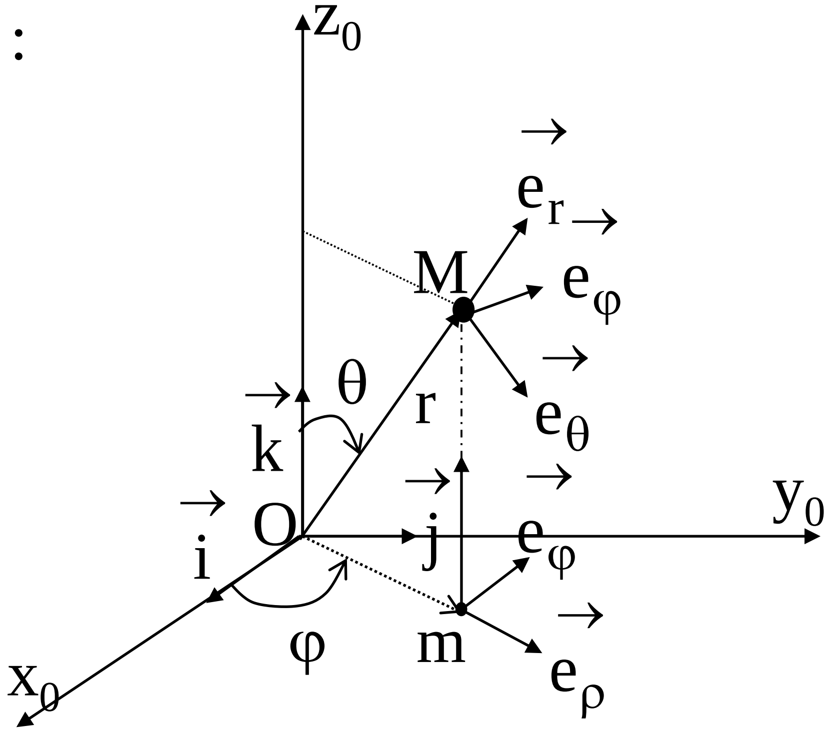
III] Système de coordonnées sphériques.

- Lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point O que l'on prend pour origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de la particule à étudier, telles que :

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$$

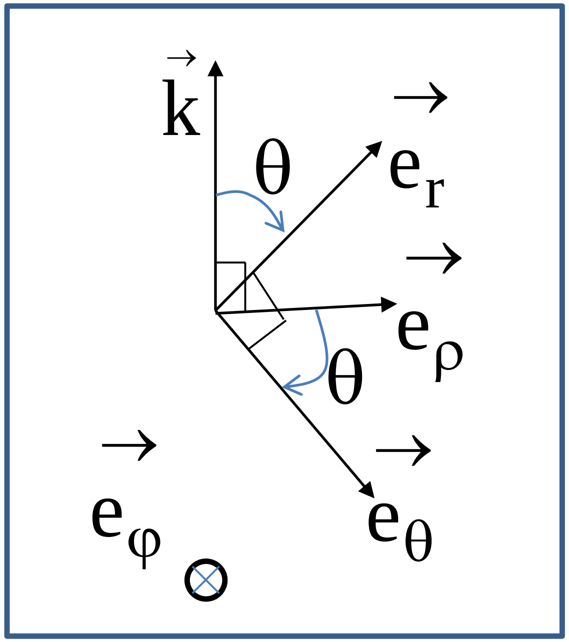
$$\theta = \text{angle}(\overrightarrow{Oz_0}, \overrightarrow{OM})$$

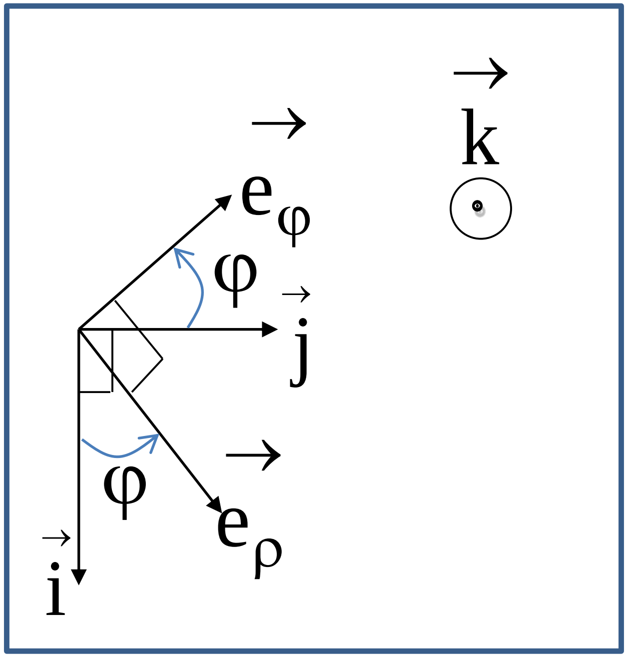
$$\varphi = \text{angle}(\overrightarrow{Ox_0}, \overrightarrow{Om})$$



- Quand M décrit tout l'espace: $0 \leq r < +\infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Une nouvelle base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ s'introduit :





où

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{j} + \cos\theta\,\overrightarrow{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{j} - \sin\theta\,\overrightarrow{k} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\,\overrightarrow{j}$$

- Dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$, le vecteur position s'écrit :

.

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$$

- <u>**Déplacement élémentaire :**</u>

Le déplacement élémentaire de la particule M en coordonnées sphériques est donné par:

$$d\,\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\,\vec{e_r}$$

$$\vec{e_r}(\theta,\varphi) \qquad \Rightarrow \qquad d\,\vec{e_r} = \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi}\,d\varphi$$

Nous avons: $$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$= \vec{e_\theta}$$

et

$$\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial\varphi} = \sin\theta(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = \sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

donc:

$$d\,\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + rd\theta\,\vec{e_\theta} + r(\sin\theta)d\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

B) CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL.

- L’objet de la cinématique est de décrire les mouvements d’une particule sans tenir compte des causes qui les produisent.
- La description du mouvement d’une particule met en œuvre trois vecteurs :

  - Le vecteur position.
  - Le vecteur vitesse.
  - Le vecteur accélération.

- Le corps mobile sera appelé ***point matériel***. On parle de point matériel lorsque les dimensions du mobile sont considérées négligeables dans les conditions du problème.
- En mécanique classique, la vitesse V du point M est négligeable par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide.

I) Vecteur vitesse :

a) Vecteur vitesse moyenne.

Le vecteur vitesse moyenne d'une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 est donnée par:

$$\vec{V}_m(M) = \frac{\vec{OM}(t_2) - \vec{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{OM}_2 - \vec{OM}_1}{t_2 - t_1}$$

b) Vitesse instantanée.

Le vecteur vitesse instantanée de la particule M par rapport à un repère orthonormé R(O,xyz) est :

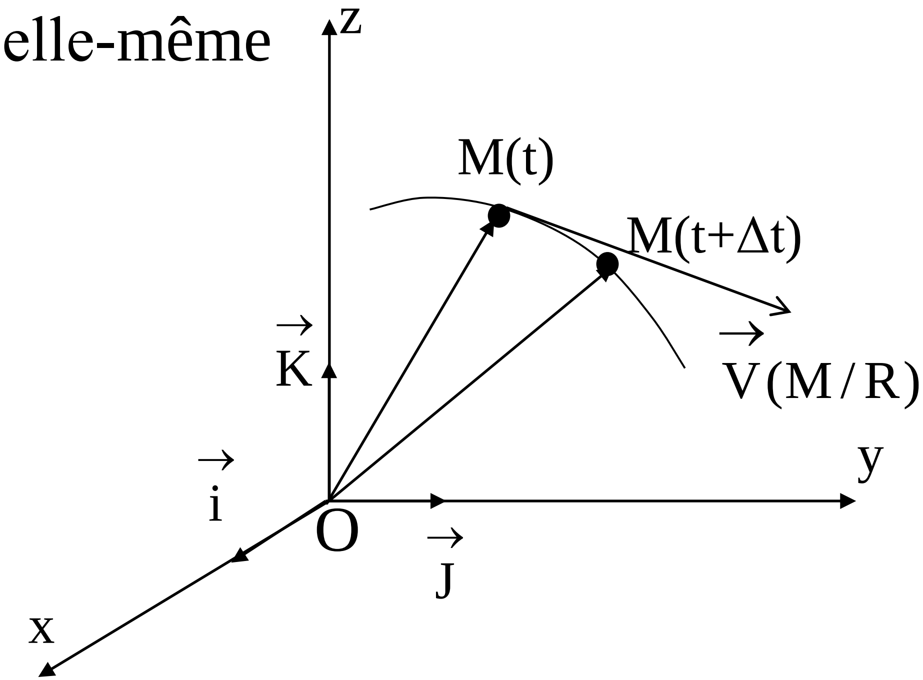
$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{OM}(t+\Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t}$$

Donc

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R$$

c) Vitesse algébrique:

Dans ce cas, c'est la trajectoire elle-même qui sert à repérer le mobile à l'aide de l'abscisse curviligne (ou *coordonnée intrinsèque*) s du point M.

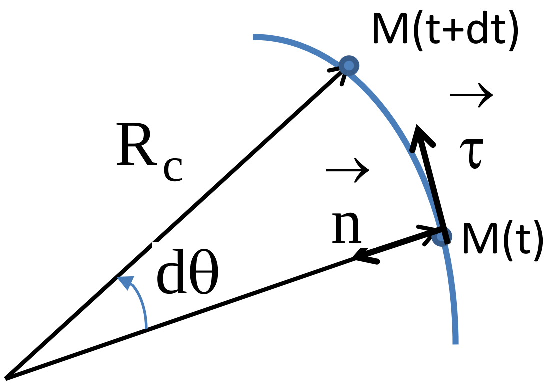


$$\Delta s = \text{arc}\,(M(t)M(t+\Delta t)).$$

- Le vecteur vitesse est porté par le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire.
- La vitesse algébrique de M est : $v = \frac{ds}{dt}$
- Le vecteur vitesse instantanée peut donc s'écrire: $\vec{v}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$

II) <u>Vecteur accélération.</u>

La dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse donne le vecteur accélération, qui s'écrit comme suit :



$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Or $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}$,

et $\dfrac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$ désigne le vecteur normal dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire du point M.

Par ailleurs, nous avons, $\Delta s = R_c \Delta\theta$

et $ds = R_c d\theta$

Donc $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{R_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R_c}$.

Par conséquent, $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{v}{R_c}\vec{n}$

Le vecteur accélération instantanée du point M s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R_c}\vec{n} = \gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n} = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$$

* La direction définie par le vecteur $\vec{n}$ est la normale principale en M à la trajectoire.

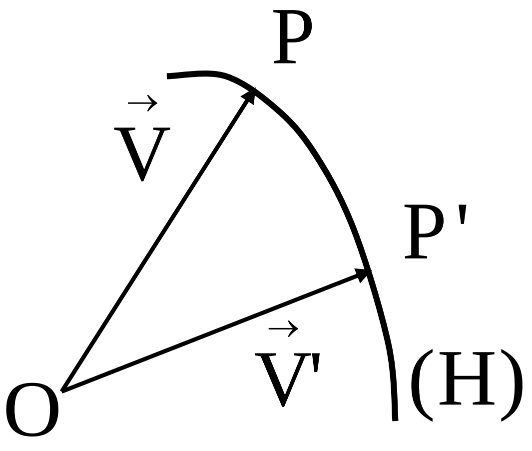
* Le vecteur unitaire $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$ est appelé vecteur de la binormale.

Le repère $(M; \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ est le repère de ***Frenet-Serret.***

Hodographe du mouvement.

- **Définition :**
- L'hodographe d'un mouvement (noté (H)) est l'ensemble des points P tels que :

A tout instant, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{V}(M/R)$; où O désigne le pôle de (H).



a) Composantes des vecteurs vitesse et accélération.

i) Coordonnées cartésiennes (x,y,z)

Soit un référentiel R(O,xyz) fixe muni d'une base orthonormée

$(\vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\vec{k}\,)\,.$

- Le vecteur position est : $\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
- Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

- Les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont fixes dans le repère R, donc :

$$\left.\frac{d\,\vec{i}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\,\vec{j}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\,\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$$

- L'accélération instantanée du point M s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

ii) <u>Coordonnées cylindriques</u> :

- Le vecteur position est: $\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{e_\rho} + z \overrightarrow{k}$.

- Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + dz \overrightarrow{k}$$

- Le vecteur vitesse est alors :

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

ou bien

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{k}$$

- Le vecteur accélération est:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}(M/R)\right|_R$$

$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right|_R + \ddot{z}\,\vec{k}$$

qui peut encore s'écrire:

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{k}$$

Remarque:

Dans le cas d'un mouvement plan, nous avons z = 0 et le vecteur accélération s'écrit alors:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 & \text{composante radiale} \\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} & \text{composante orthoradiale} \end{cases}_{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi}$$

iii) Coordonnées sphériques (r,θ,φ)

La base associée à ce système de coordonnées est: $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

* Le vecteur position est $\vec{OM} = r\,\vec{e}_r$ et le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{OM} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r(\sin\theta)d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

* Le vecteur vitesse est alors:

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right|_R = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r(\sin\theta)\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Ou

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r(\sin\theta)\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Le vecteur accélération est:

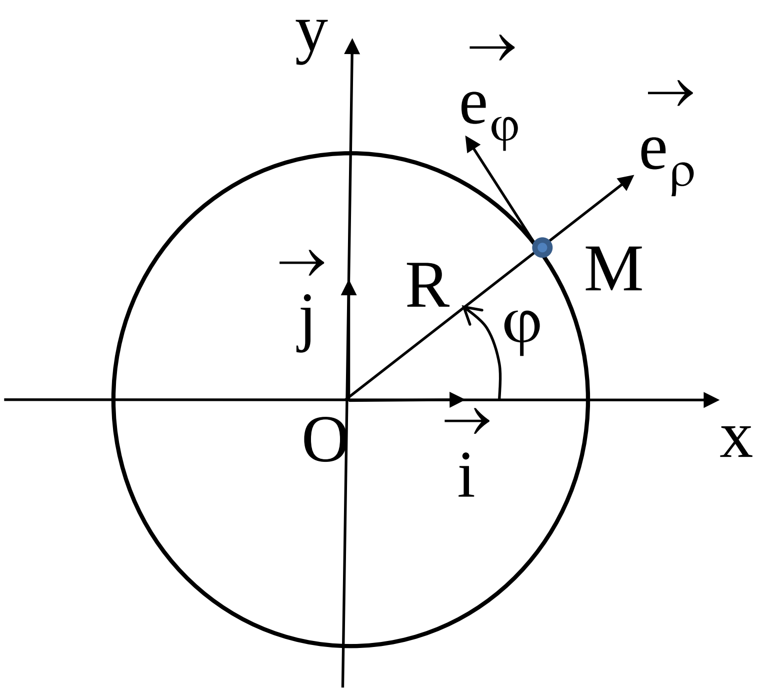
$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\ \sin^2\theta)\vec{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\ \sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta$$

$$+ (2\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\cos\theta + r\,\ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$$

b) Exemple de mouvements particuliers.

1) Mouvement circulaire.

Dans ce cas, le mobile se déplace sur un cercle (C) de rayon R et de centre O. Ce cercle est situé dans le plan (xOy). Il est alors préférable d'utiliser les coordonnées polaires (ρ,φ) du mobile M.



En coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho = R\,\vec{e}_\rho$$

- le vecteur vitesse du point M est: $\vec{V}(M/R) = R\dot{\varphi}\vec{e}_{\varphi}$

- Le vecteur accélération est donné par :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_{\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_{\varphi}$$

$$= -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_{\rho} + R\ddot{\varphi}\vec{e}_{\varphi}$$

Dans le cas où le mouvement circulaire est uniforme, nous avons:

$$\varphi = \omega t \qquad \text{et} \qquad \dot{\varphi} = \omega = \text{vitesse angulaire de M.}$$

- le vecteur vitesse de M devient alors:

$$\vec{V}(M/R) = R\omega\vec{e}_{\varphi}$$

- Le vecteur accélération se réduit à:

$$\vec{\gamma}(M/R) = -R\omega^2 \vec{e_\rho}$$

- L'accélération du point M est alors normale à sa trajectoire (l'accélération tangentielle est nulle car le module du vecteur vitesse est constant).
- En coordonnées intrinsèques, $\text{arc}(M_0M) = \Delta s = R\varphi(t)$,

d'où ,
$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = R\dot{\varphi}\vec{\tau}$$

et l'accélération est:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n} = R\ddot{\varphi}\,\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\,\vec{n}$$

et

$$\vec{\gamma}(M/R) = \gamma_t\,\vec{e}_\varphi - \gamma_n\,\vec{e}_\rho$$

donc

$$\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi \qquad \text{et} \qquad \vec{n} = -\vec{e}_\rho$$

Remarque: Le vecteur vitesse peut aussi s'écrire:

$$\vec{V}(M/R) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \omega\,\vec{k} \wedge R\vec{e}_\rho = R\omega\vec{e}_\varphi = R\omega\,\vec{\tau}$$

2) Mouvement à accélération centrale:

Un mouvement à accélération centrale est un mouvement dont l'accélération de la particule M, $\vec{\gamma}(M/R)$, est parallèle au vecteur position $\vec{OM}$ à tout instant t.

Il en découle: $$\vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \vec{0}$$

Par ailleurs:
$$\vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \frac{d[\vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R)]}{dt} = \vec{0}$$

D'où $$\vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R) = \vec{C}$$

$\vec{C}$ est un vecteur constant en module, en sens et en direction.

$\vec{C}$ est alors perpendiculaire au plan formé par $\vec{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$.

Le vecteur position $\vec{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent donc au plan perpendiculaire au vecteur constant

$\vec{C}$ quelque soit l'instant t considéré.

Par conséquent, tout ***mouvement à accélération centrale*** **est** ***un mouvement plan***.

Pour étudier le mouvement du point M, il est alors préférable d'utiliser ses coordonnées polaires (ρ, φ) .

Nous rappelons que dans le cas général d'un mouvement plan, les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent, respectivement, comme suit:

$$\vec{OM} = \rho \vec{e_\rho}$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi}$$

Puisque l'accélération du point M est centrale (parallèle au vecteur position), elle doit s'écrire:

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e_\rho}$$

et donc sa composante orthoradiale est nulle: $\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}=0$

qui peut s'écrire: $$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\dot{\varphi})}{dt}=0$$

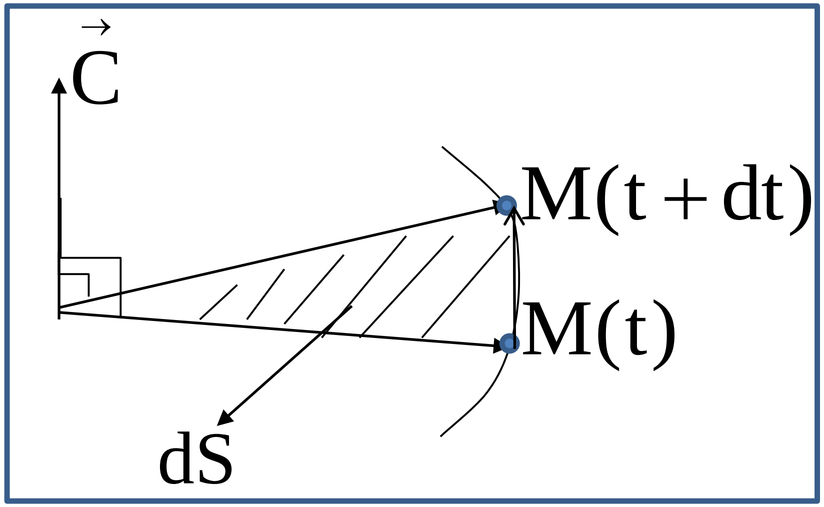
d'où $$\rho^2\dot{\varphi}=Cte$$

Finalement, $$\rho^2\dot{\varphi}=C=\left|\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{V}(M/R)\right|$$

est appelée constante des aires.

Loi des aires:

- Calculons l'aire balayée, par unité de temps, par le rayon vecteur $\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho}$



- Nous avons: $\vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$ et $dS = \frac{1}{2}\left|\vec{OM} \wedge \vec{MM'}\right|$,

avec M' (ou M(t+dt)) très voisin de M(t),

donc $$dS = \left|\rho\,\vec{e_\rho} \wedge (d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho d\varphi\,\vec{e_\varphi})\right| = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$$

et $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$, d'où $dS = \frac{C}{2} dt$

Par ailleurs, $\int_0^s dS = \frac{C}{2} \int_0^t dt$

- Ceci donne: $S = \frac{C}{2} t$ (2ème loi de Kepler.)

où $\frac{C}{2}$ est la vitesse aréolaire (cm²/s).

Formules de BINET:

a) Cas de la vitesse:

Dans le cas d'un mouvement à accélération centrale, le carré du module du vecteur vitesse est: $V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2$

Nous avons: $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$.

En posant $u = \frac{1}{\rho}$, nous aurons: $du = -\frac{d\rho}{\rho^2}$ et $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi}$.

Ce qui donne $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$.

D'autre part, $C = \rho^2 \dot{\varphi}$ peut s'écrire $\dot{\varphi} = Cu^2$.

et $$V^2=\left[-\left(\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\right)\right]^2 C^2u^4+\frac{1}{u^2}C^2u^4$$

La première formule de BINET s'écrit: $$V^2=C^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]$$

Cette formule permet de déterminer l'équation polaire ρ = ρ(φ) ou bien u = u(φ) connaissant la vitesse du point M et inversement.

b) <u>Cas de l'accélération :</u>

La deuxième formule de BINET permet de déterminer l'accélération de la particule étudiée si l'on connaît l'équation polaire et inversement.

Le mouvement du point M étant à accélération centrale, on a:

$$\vec{\gamma}(M/R)=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho$$

dont la valeur algébrique est : $\gamma = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$

Nous avons : $\ddot{\rho} = \dfrac{d\dot{\rho}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d}{d\varphi}(-C\dfrac{du}{d\varphi})Cu^2 = -Cu^2\dfrac{d^2u}{d\varphi^2}$

et

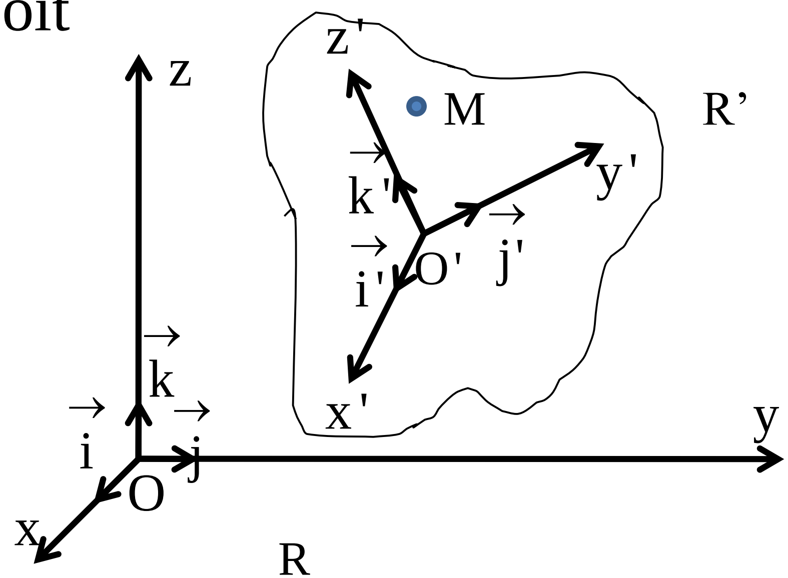
$$\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{u}C^2u^4 = C^2u^3$$

La deuxième formule de BINET s'écrit alors: $\gamma = -C^2u^2\left[\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]$

Cette formule permet de déterminer l'équation polaire $\rho = \rho(\varphi)$ ou bien $u = u(\varphi)$ connaissant l'accélération du point M et inversement.

CHANGEMENTS DE REFERENTIELS

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R, appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère R', dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier. Soient,



- R(O,xyz) un repère absolu (repère fixe).
- R'(O',x'y'z') un repère relatif (repère mobile par rapport à R).

R’ peut être animé d’un mouvement de translation et/ou de rotation par rapport à R.

La rotation de R’ par rapport à R se fait avec une vitesse angulaire telle que :

- Dans le repère R, $\left.\dfrac{d\,\vec{i'}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{i'}$;

$$\left.\frac{d\,\vec{j'}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{j'} \quad ; \quad \left.\frac{d\,\vec{k'}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{k'}$$

et $$\left.\frac{d\,\vec{i}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\,\vec{j}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\,\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}$$

1) Dérivation en repère mobile.

- Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque. Dans le repère R, ce vecteur s'écrit:

$$\vec{A} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

- Dans le repère R', le vecteur $\vec{A}$ s'écrit,

$$\vec{A} = x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = \dot{x}'\,\vec{i'} + x'\left.\frac{d\vec{i'}}{dt}\right|_R + \dot{y}'\,\vec{j'} + y'\left.\frac{d\vec{j'}}{dt}\right|_R + \dot{z}'\,\vec{k'} + z'\left.\frac{d\vec{k'}}{dt}\right|_R$$

- qui peut s'écrire aussi,

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \dot{x}'\,\vec{i'} + \dot{y}'\,\vec{j'} + \dot{z}'\,\vec{k'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'})$$

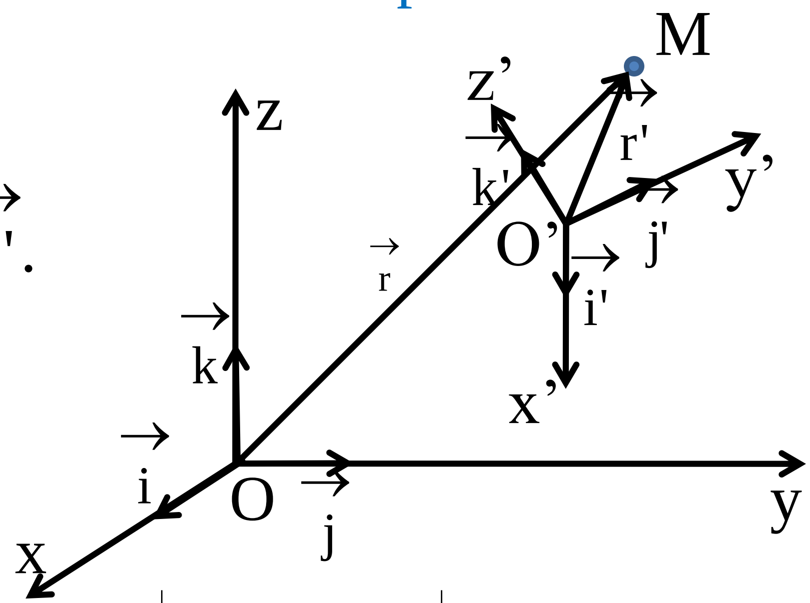
ou

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{A}$$

2) Composition des vitesses

Soient R(O,xyz) un repère absolu et $R'(O',x'y'z')$ un repère relatif.

Les vecteurs positions de la particule M dans les repères R et R' sont, respectivement : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et $\overrightarrow{O'M} = \vec{r}'$.



On peut écrire, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

La vitesse absolue du point M est alors,

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

$$\vec{v}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

La vitesse relative du point M est : $\vec{v}(M/R') = \vec{v}_r(M) = \left.\dfrac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}$

La vitesse d'entraînement de M s'écrit :

$$\vec{v}_e(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{R} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}$$

La vitesse d'entraînement de M est la vitesse absolu du point (imaginaire) qui coïncide avec M à l'instant t et supposé fixe dans le repère R'.

Remarque: On peut aussi noter la vitesse d'entraînement de M comme suit,

$$\vec{v}_e(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{R} \quad (\text{M fixe dans R}')$$

Nous aurons donc, $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$

3) **Composition des accélérations.**

- L'accélération absolue du point M est,

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}(M) = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right|_R$$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \left.\frac{d(\vec{v}_r(M)+\vec{v}_e(M))}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_R + \frac{d}{dt}\left[\left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M}\right]$$

$$\left.\frac{d\vec{v}_r(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{v}_r(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{v}_r(M)$$

$$\left.\frac{d}{dt}(\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{O'M})\right|_R = \frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt}\wedge\vec{O'M} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_R$$

- Par conséquent l'accélération absolue s'écrit,

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + 2\,\vec{\omega}(R'/R) \wedge \vec{v}_r(M) + \left.\frac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R$$

$$+ \frac{d\,\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}(R'/R) \wedge (\vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})$$

où
$$\vec{\gamma}_e(M) = \left.\frac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d\,\vec{\omega}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$+ \vec{\omega}(R'/R) \wedge (\vec{\omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})$$

désigne l'accélération ***d'entraînement,*** et $2\,\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{v}_r(M)=\vec{\gamma}_c(M)$ est l'accélération **de Coriolis** ou **complémentaire.**

Nous écrivons alors: $\vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)+\vec{\gamma}_e(M)+\vec{\gamma}_c(M)$

Cas particuliers :

Quand le repère R' est en translation par rapport à R: $\vec{\omega}(R'/R)=\vec{0}$.

Par conséquent, $\vec{v}_a(M)=\vec{v}_r(M)+\vec{v}_a(O')$

et $\vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)+\vec{\gamma}_a(O')$

Si, en plus, R' est en translation uniforme par rapport à R:

$\vec{v}_a(O')=\vec{cte}$ et $\vec{\gamma}_a(M)=\vec{\gamma}_r(M)$

CHAPITRE 2

- **DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL :**
  LOI FONDAMENTALE ET THEOREMES GENERAUX.
- La dynamique est l’étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ces causes sont les interactions entre particules et sont représentées par les forces.

I) Loi fondamentale de la dynamique.

1) Principe d’inertie.

Lorsqu’un point matériel en mouvement n’est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne uniforme. C’est la première loi de Newton.

2) Loi fondamentale de la dynamique.

L'accélération d'un point matériel M en mouvement est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui et inversement proportionnelle à sa masse :

C'est la deuxième loi de Newton. $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}\,(M)$

3) Axes de la mécanique.

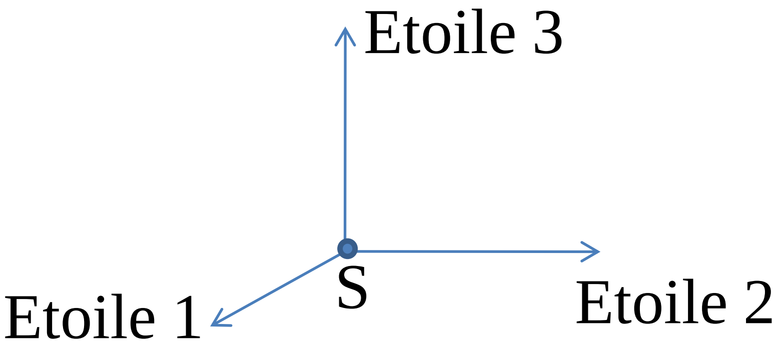
Nous avons vu au chapitre précédent,

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique ne s'écrira pas de la même manière dans R et dans R'.

Nous nous basons alors sur un résultat de mécanique céleste qui suppose que le principe fondamental de la dynamique est valable dans un système de référence appelé référentiel de Copernic. Ce référentiel est noté $R_c(S,X_cY_cZ_c)$.

Le repère $R_c(S,X_cY_cZ_c)$ a pour origine le centre du soleil. Ses trois axes sont dirigés suivant 3 étoiles supposées fixes.



Remarque :

- Si l'on étudie le mouvement du point M par rapport au repère R' en translation uniforme par rapport au repère de Copernic, la loi fondamentale de la dynamique sera aussi valable dans R'.

En effet, $$\vec{\gamma}(M/R_c) = \vec{\gamma}(M/R').$$

Car $$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0}\,.$$

Définition :

Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic portera le nom de ***repère galiléen***.

4) Dynamique terrestre.

Repère géocentrique.

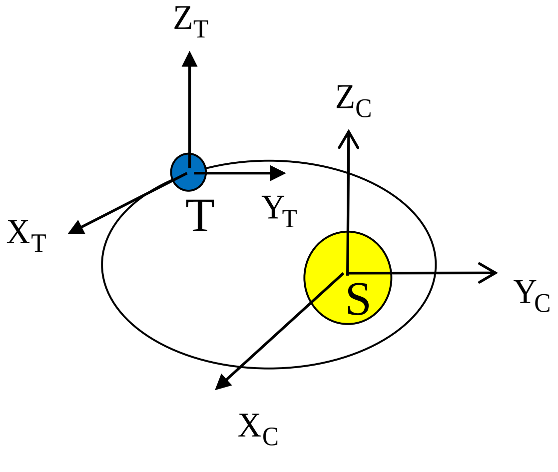
- Soient: $R_c(S,X_cY_cZ_c)$ le repère de Copernic et $R_T(T,X_TY_TZ_T)$ le repère géocentrique.

- $R_T(T,X_TY_TZ_T)$ est un repère orthonormé dont l'origine T est le centre de la terre et les axes $\overrightarrow{TX}_T$, $\overrightarrow{TY}_T$

et $\overrightarrow{TZ}_T$ sont respectivement parallèles

aux axes $\overrightarrow{SX}_c$, $\overrightarrow{SY}_c$ et $\overrightarrow{SZ}_c$

du repère de Copernic.



- La terre tourne autour du soleil en une année. C'est le mouvement orbital elliptique.
- La durée τ des expériences sur terre est très faible devant la période du mouvement orbital elliptique ($\tau \ll$ 365 jours+6H).

  Par conséquent, on suppose que le mouvement de la terre autour du soleil est rectiligne uniforme au cours d'une expérience donnée.

Le référentiel R_T est donc considéré comme référentiel galiléen.

On peut alors écrire:

$$\vec{\gamma}(M/R_T) = \vec{\gamma}(M/R_c).$$

On définit aussi le repère R_L appelé référentiel du Laboratoire dont l'origine est un point L à la surface de la terre, de latitude λ

et dont l'axe $\overrightarrow{LZ_L}$ est perpendiculaire à la surface du sol terrestre.

- R_L est en mouvement de rotation par rapport au repère R_T . C'est le mouvement de rotation de la terre sur elle-même.

  R_L est un repère non galiléen.

5) Loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

- Soient R un référentiel galiléen et R' un référentiel non galiléen. R' est mobile par rapport à R.

R est le référentiel absolu. R' est le référentiel relatif.

- On désigne par $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération du point M dans le repère R et par $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération du même point dans le repère R'.

La loi de composition des accélérations donne:

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

Le principe fondamental de la dynamique dans R s'écrit:

$$m\,\vec{\gamma}(M/R) = m\vec{\gamma}_a(M) = \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}_r(M) + m\vec{\gamma}_e(M) + m\vec{\gamma}_c(M)$$

où m est la masse du point M et $\sum \vec{F}_{ext}$ désigne la résultante de toutes les forces extérieures appliquées à M.

- Dans le repère R', le principe fondamental de la dynamique est,

$$m\vec{\gamma_r}(M) = m\vec{\gamma_a}(M) - m\vec{\gamma_e}(M) - m\vec{\gamma_c}(M) = \sum \vec{F_{ext}} + \vec{F_e} + \vec{F_c}$$

où

- $\vec{F_e}$ est la force d'inertie d'entraînement,
- $\vec{F_c}$ est la force d'inertie de Coriolis ou complémentaire.
- Dans le référentiel non galiléen, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit de la même façon que dans le repère galiléen à condition de tenir compte des forces d'inertie $\vec{F_e}$ et $\vec{F_c}$.

6) Classification des forces.

a) Forces réelles (ou extérieures):

Les forces réelles sont de deux types,

- ***Forces à distance:***

Exemple : - Force d'attraction universelle.

- Force électrostatique.

- ***Forces de contact:***

Exemple: - Force de frottement.

- Force élastique (cas d'un ressort).

b) Forces d'inertie (ou intérieures):

C'est la résistance que manifestent les corps au mouvement. Cette résistance est due à leur masse. Se sont:

- La force d'inertie d'entraînement: $\vec{F_e} = -m\vec{\gamma_e}$

- La force d'inertie de Coriolis: $\vec{F_c} = -m\vec{\gamma_c}$

Les forces $\vec{F_e}$ et $\vec{F_c}$ n'apparaissent que dans les repères non galiléens.

II) Quantité de mouvement et moment cinétique.

1) Définition:

Soit un point matériel M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}(M)$

dans un repère R(O,xyz) quelconque:

- La quantité de mouvement de M dans le repère R est:

$$\vec{P}(M) = m\vec{V}(M)$$

Le moment cinétique de M par rapport au point fixe O est:

$$\vec{\sigma}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{P}(M) = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v}(M)$$

- Le moment cinétique du point M par rapport à une droite (D), passant par O et de vecteur unitaire $\vec{u}$, est donnée par le scalaire,

$$M_D(\vec{P}) = \vec{\sigma}_O(M).\vec{u}$$

2) Théorème.

$$\left.\frac{d\,\vec{P}(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(m\,\vec{V}(M))}{dt}\right|_R = m\left.\frac{d\,\vec{V}(M)}{dt}\right|_R = m\,\vec{\gamma}(M)$$

Donc
$$\left.\frac{d\overrightarrow{P}(M)}{dt}\right|_R = m\,\overrightarrow{\gamma}(M/R) = \sum \overrightarrow{F}_{ext}$$

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement n'est autre que la résultante des forces extérieures appliquées à la particule M (le repère R est supposé galiléen).

Dans le cas où R n'est pas galiléen:
$$\left.\frac{d\overrightarrow{P}(M)}{dt}\right|_R = m\,\overrightarrow{\gamma}(M/R) = \sum \overrightarrow{F}_{ext} + \overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_c$$

III) Quantité d'accélération, moment dynamique, théorème du moment cinétique.

1) Définition du vecteur quantité d'accélération.

On appel quantité d'accélération, $\vec{\Gamma}(M/R)$, du point M par rapport à un repère R, le produit de sa masse m par son vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$:

$$\vec{\Gamma}(M/R) = m\,\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\,\vec{P}(M/R)}{dt}\right|_R$$

2) Moment dynamique du point M par rapport au point fixe O.

Le moment dynamique, $\vec{\delta}_0(M/R)$, d'une particule M par rapport à un fixe O, dans un repère R, est par définition:

$$\vec{\delta}_0(M/R) = \vec{OM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R)$$

3) Théorème du moment cinétique.

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R))}{dt}\right|_R = \vec{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R)$$

Donc:

$$\vec{\delta}_0(M/R) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt}\right|_R = \vec{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{OM} \wedge \Sigma\vec{F}$$

Le moment dynamique d'une particule M, en un point fixe O, dans un repère galiléen R est égal au moment, en ce point, de la résultante de toutes les forces appliquées à M.

CHAPITRE III
TRAVAIL ET ENERGIE

I) Puissance et travail d'une force.

La puissance instantanée d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces qui agissent sur M par la vitesse de ce point:

$$P = \sum \vec{F}.\vec{V}(M) \quad \text{[Watts].}$$

Le travail élémentaire fourni par un point matériel se déplaçant d'une quantité finie $d\vec{OM}$, est donné par:

$$dW = \sum \vec{F}.d\vec{OM}$$

Comme $$\vec{V}(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

nous écrivons: $$dW = \sum \vec{F}.\vec{V}(M)dt = Pdt$$

II) Forces conservatives: Energie potentielle.

Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle E_p. Donc cette force peut s'écrire: $$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$$

L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près: $$\overrightarrow{grad}(cte) = \vec{0}$$

Pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que : $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

Travail d'une force conservative

- Soit $\vec{F}$ une force conservative. Son travail étant: $dW = \vec{F}.d\vec{OM}$

Cette force étant conservative, elle peut donc s'écrire:

$$\vec{F} = -\vec{grad}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

Nous avons:

$$d\vec{OM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

- Le travail d'une force conservative pour déplacer un point matériel est égal à la diminution de son énergie potentielle.

$$dW = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = -dE_p$$

IV) Energie cinétique.

1) Définition:

L'énergie cinétique d'une particule M de masse m et de vecteur

Vitesse $\vec{V}(M)$ est le scalaire défini par:

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2$$

2) Théorème:

- Le travail de la résultante, $\sum \vec{F}$, de toutes les forces (conservatives et non conservatives) appliquées à un point matériel M, dans un référentiel quelconque R, entre la position initiale A et la position finale B, est égale à la variation de son énergie cinétique entre A et B.

Démonstration:

Le travail de la résultante des forces, $\sum \vec{F}$, quand la particule

se déplace de la position A à la position B, est : $dW = \sum \vec{F}.d\vec{OM}$

- Nous avons: $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V}(M/R).dt$

$$dW = m\,\overrightarrow{\gamma}(M/R).d\overrightarrow{OM} = m\left.\frac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt}\right|_R .\overrightarrow{V}(M/R)dt$$

$$= m\overrightarrow{V}(M/R)d\overrightarrow{V}(M/R) = \frac{1}{2}d(m\overrightarrow{V}^2(M/R)) = dE_c$$

D’où:

$$W_{A\to B} = E_c(B/R) - E_c(A/R)$$

V) ENERGIE MECANIQUE.

1) Définition

On appelle énergie mécanique (ou énergie totale) $E_m(M/R)$ d'une particule M dans le repère R, la somme de ses énergies Cinétique $E_c(M/R)$ et de son énergie potentielle $E_p(M/R)$.

$$E_m(M/R) = E_c(M/R) + E_p(M/R)$$

Cas d'un système conservatif.

Définition :

Une particule M constitue un système conservatif si les seules forces, appliquées à cette particule, qui travaillent au cours du mouvement, dérivent d'un potentiel.

Dans ce cas : $dW = -dE_p$

D'autre part : $dW = dE_c$

Donc $dE_c = -dE_p$ qui s'écrit aussi $d(E_c + E_p) = dE_m = 0$

Par conséquent : $E_m = cte$

L'énergie mécanique $E_m(M/R)$, d'un système conservatif, reste constante au cours du mouvement et conserve sa valeur initiale.

V) Stabilité d'un équilibre.

Soit un référentiel R(O,xyz), et soit un point matériel M soumis à des forces conservatives dont la résultante est $\vec{F}$:

Nous avons : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \quad .$$

Si le point M est à l'équilibre , $\vec{F} = \vec{0}$ et par conséquent:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

L’énergie potentielle est donc extrêmale (minimale ou maximale).

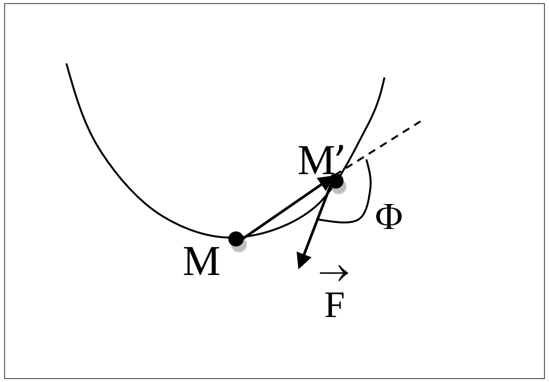
On dit que l’équilibre est stable quand le point M est soumis à une force de rappel qui le ramène à sa position d’équilibre.

Dans le cas contraire, l’équilibre est instable.

a) **Equilibre stable (E_p minimale) :**

On suppose que la particule M occupe une position d’équilibre et la position M’ est très voisine de celle de M.

On a , $E_p(M') > E_p(M)$: $dE_p > 0$.



Hors équilibre, $\vec{F} \neq \vec{0}$ et le travail dû au déplacement de M à M'
est donné par : $$dW = \vec{F}.d\vec{M} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{M}\right| \cos\Phi = -dE_p < 0$$

$\vec{F}$ est alors une force de rappel : elle ramène le point M à sa

position d'équilibre. L'angle Φ entre $\vec{F}$ et $d\vec{M}$ est supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

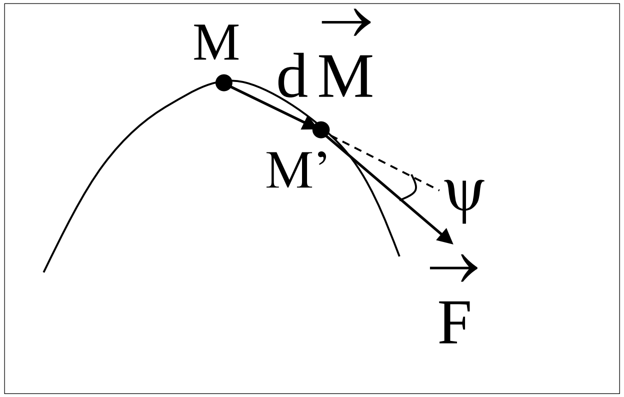
b) Equilibre instable (E_p maximale):

Dans ce cas:

$$E_p(M') < E_p(M) \quad : \qquad dE_p < 0$$

Le travail dû au déplacement
de M à M' est donné par :

$$dW = \vec{F}.d\vec{M} = -dE_p > 0$$



La force $\vec{F}$ tend à éloigner le point M de sa position d'équilibre.

L'angle ψ entre $\vec{F}$ et $d\vec{M}$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

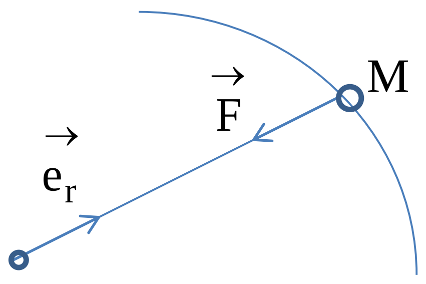
CHAPITRE IV
MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE

I] Définition:

Une force est centrale si sa ligne d'action passe constamment par un point O appelé pôle.

$$\vec{OM} = r.\vec{e_r}$$

$$\vec{F} = F.\vec{e_r} \quad \text{(force radiale).}$$



Donc $\quad \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

Exemple:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e_r}$$ (force d'interaction gravitationnelle

entre deux masses m et M distantes de r.)

II] PROPROETES DES MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE

1) $\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_O(M/R)\right] = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

Donc $\vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = \vec{OM}_0 \wedge m\vec{V}_0(M/R) = m\vec{C}$

M_0 est la position initiale du point M.

- Si $\vec{C} = \vec{0}$; $\vec{V}(M/R) // \vec{OM}$, le mouvement du mobile est rectiligne.
- Si $\vec{C} \neq \vec{0}$; $\vec{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$ sont perpendiculaires à $\vec{C}$.

La trajectoire de M est donc plane. Celle-ci appartient au plan formé

par $\vec{OM}_0$ et $\vec{V}(M_0/R)$.

2) Les mouvements à forces centrales vérifient la loi des aires: supposant que la trajectoire de M appartient au plan (xOy) d'un repère R(O,xyz),

$$\left.\begin{aligned}\vec{OM} &= r.\vec{e_r}\\ \vec{V}(M) &= \dot{r}.\vec{e_r} + r\dot{\varphi}.\vec{e_\varphi}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}&\vec{\sigma_o}(M/R) = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{k} = m\vec{C}\\ &C = r^2\dot{\varphi} = \text{cte des aires.}\end{aligned}\right.$$

3) Energie cinétique d'une particule M soumise à une force centrale:

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$ ***(1ère Formule de Binet)*** $(u = \frac{1}{r})$

4) Si la résultante des forces qui s'exercent sur M est centrale:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R) = -mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]\vec{e_r}$$ ***(2ème Formule de Binet)***

III) Champ newtonien.

Soit un axe $\overrightarrow{Ox}$ de référence pris dans le plan de la trajectoire.

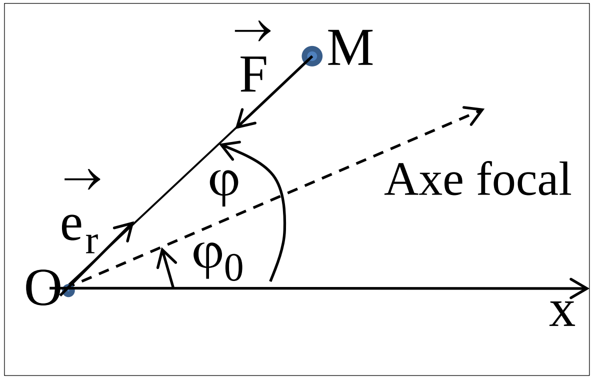
Repérons la position du point M par ses coordonnées polaires (r, φ).

Un champ newtonien est un champ de forces telles que:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r} = -k\frac{\overrightarrow{r}}{r^3} \quad ; \quad k \text{ est une constante.}$$

Si $k > 0$, la force est attractive.

Si $k < 0$, la force est répulsive.



La force $\vec{F}$ est centrale, donc: $\vec{F} = -mC^2u^2\left[\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]\vec{e_r}$

et $\vec{F} = -\dfrac{k}{r^2}\vec{e_r} = -k\,u^2\vec{e_r}\,.$

Donc $$-mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] = -ku^2$$

La solution u=0 (r infini) ne présente aucun intérêt.

Il reste alors: $\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \dfrac{k}{mC^2}$ c'est une équation différentielle

du 2ème ordre linéaire à coefficients et second membre constants.

La solution générale de cette équation est:

$$u(\varphi) = u_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{mC^2}$$

$u_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ =solution de l’équation sans second membre (E.S.S.M).

$$\frac{k}{mC^2} = \text{solution particulière.}$$

Les constantes u_0 et φ_0 sont à déterminer à l’aide des conditions initiales.

En posant:

$$P = \frac{mC^2}{|k|} = \frac{\sigma_0{}^2}{m|k|} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{k}{mC^2} = \frac{\varepsilon}{P} = \frac{mk}{\sigma_0{}^2}$$

$$e = Pu_0\,, \quad (\varepsilon = +1 \ \text{ si } \ k > 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = -1 \ \text{ si } \ k < 0)$$

l’équation de la trajectoire de M peut s’écrire :

$$u(\varphi) = \frac{e}{P}\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\varepsilon}{P} \qquad \text{ou} \qquad r(\varphi) = \frac{P}{\varepsilon + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

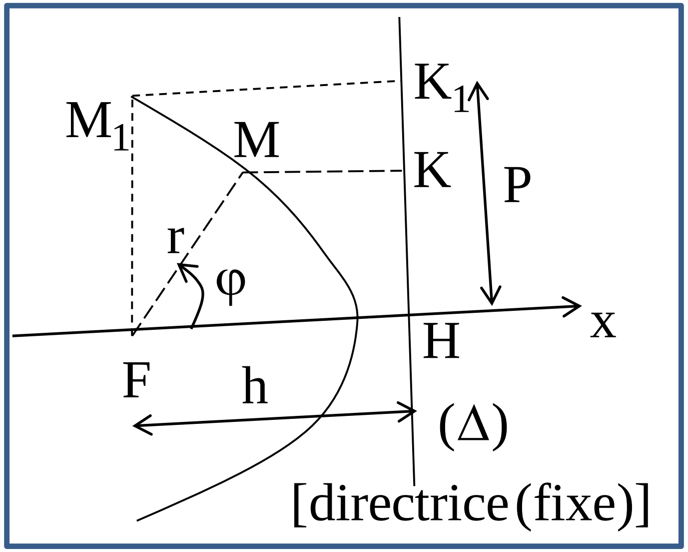
C'est l'équation en coordonnées polaires d'une conique de paramètre P et d'excentricité e, dont l'axe focal fait un angle φ_0 avec l'axe polaire et dont l'un des foyers est le point O.

Dans la suite de ce chapitre, nous prendrons $\varphi_0 = 0$ et $\varepsilon = +1$ qui correspond au cas des forces attractives agissant sur les planètes et les satellites :

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

Recherche de l'équation de la conique par la méthode géométrique:

$$e = \frac{MF}{MK}$$ est une caractéristique de la conique.



Nous avons:

$$MK = \frac{MF}{e} = \frac{r}{e} = h - r\cos\varphi \quad ;$$

or $$\frac{P}{h} = e \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P}{e}$$

Donc $$\frac{r}{e} = \frac{P}{e} - r\cos\varphi$$

Par conséquent:

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

1) Classification de la trajectoire de M en fonction de son excentricité e.

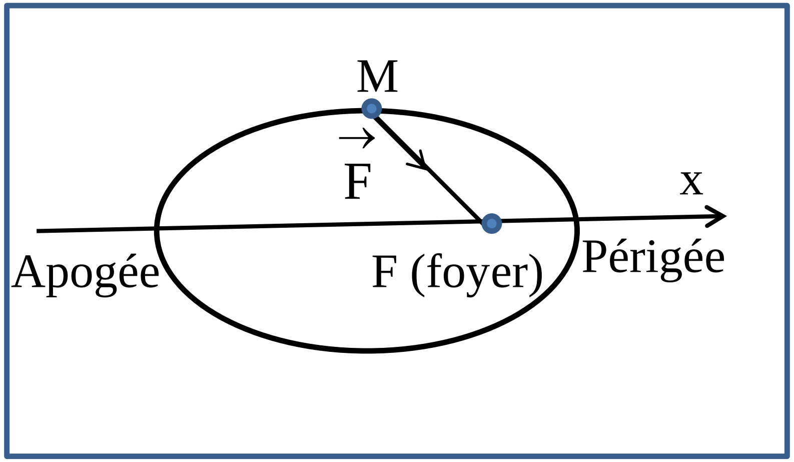
a) $e = 0, \ r(\varphi) = P = cte$; la trajectoire de M est un cercle de centre O et de rayon $R = P = \dfrac{mC^2}{k}$.

b) $0 < e < 1;$ la trajectoire de M est une ellipse.

Dans le cas d'une orbite autour de la terre:

- Le périgée = point le plus rapproché de la terre:

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad r_p = \frac{P}{1+e} = r_{min}$$

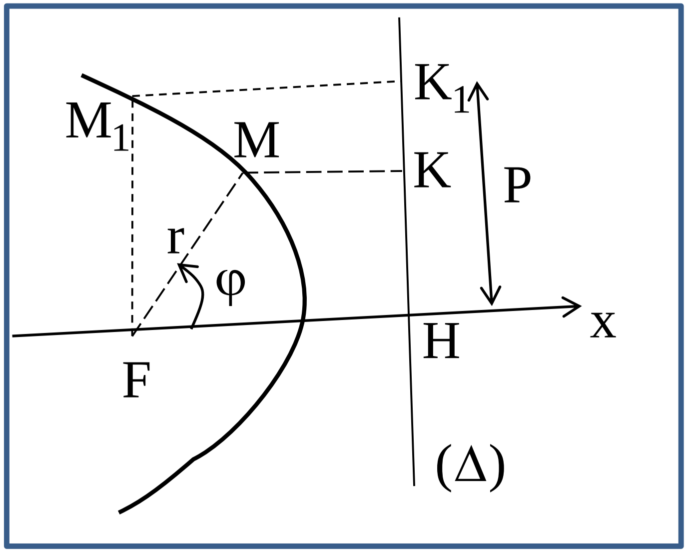


- L'apogée = point le plus éloigné de la terre:

$$\varphi = \pi \quad \text{et} \quad r_A = \frac{P}{1-e} = r_{max}$$

c) e =1 , la trajectoire de M est une parabole.

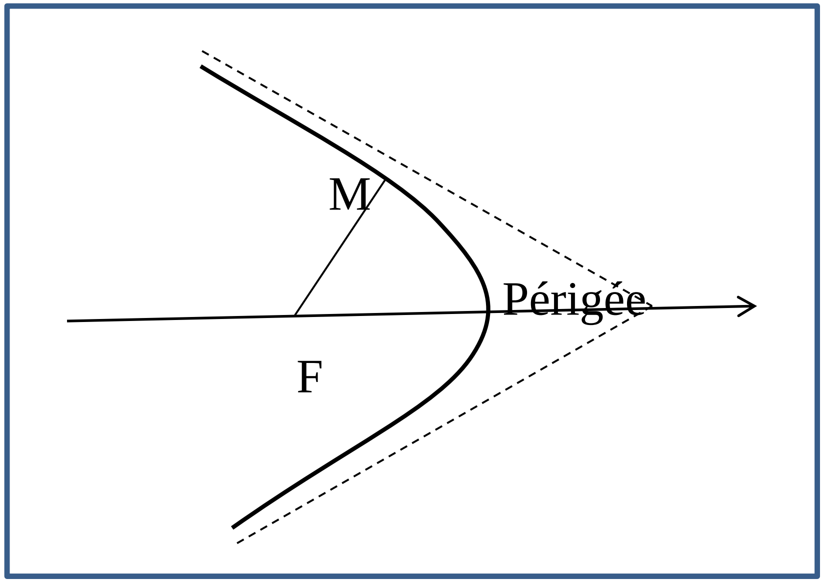
$$r = \frac{P}{1+\cos\varphi}$$



Si $\varphi = 0$, $r_p = \dfrac{P}{2}$; $e = \dfrac{FM}{MK} = 1$

Si $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $P = r = FM_1$.

d) e > 1 , la trajectoire de M est une hyperbole. Dans un tel cas, seule une branche pourrait être parcourue car le mobile ne pourrait passer d'une manière continue d'une branche à l'autre.



2) **Classification de la nature de la trajectoire du point M en fonction de l'énergie mécanique de M.**

Soit une particule M, de masse m, soumise de la part de l'origine

O d'un référentiel galiléen R_0 à une force attractive: $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e_r}$

Cette force $\vec{F}$ est conservative. Elle peut donc s'écrire:

Dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$:
$$\begin{cases} -\dfrac{k}{r^2} = -\dfrac{\partial E_P(r)}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_P(r)}{\partial \varphi} \end{cases} \qquad (1)$$

L’équation (1) donne: $E_P(r) = -\dfrac{k}{r} + cte$. la constante est nulle si $E_P(\infty) = 0$ ·

L’énergie cinétique est déduite de la 1ère formule de Binet:

$$E_c(M) = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} mC^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] \text{ avec } u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{P}$$

* L’énergie cinétique du mobile s’écrit alors:

$$E_c(M) = \frac{1}{2} mC^2 \left[\frac{e^2}{P^2} \sin^2\varphi + \frac{(1 + e\cos\varphi)^2}{P^2} \right]$$

$$= \frac{k}{2P} (e^2 + 1 + 2e\cos\varphi)$$

car $\quad \dfrac{mC^2}{P} = k$

* L'énergie potentielle du point M est:

$$E_p(M) = -\frac{k}{r} = -ku = -\frac{k}{P}(1 + e\cos\varphi)$$

* L'énergie mécanique de M se réduit à: $\quad E_m(M) = \dfrac{k}{2P}(e^2 - 1)$

Cette expression montre que l'énergie mécanique est constante et garde sa valeur initiale: $\quad E_m(M) = \dfrac{1}{2}mV_0^2 - \dfrac{k}{r_0}$.

Les conditions initiales, $\quad \vec{r}_0 \quad$ et $\quad \vec{V}_0 \quad$ déterminent l'énergie mécanique de M et son moment cinétique :

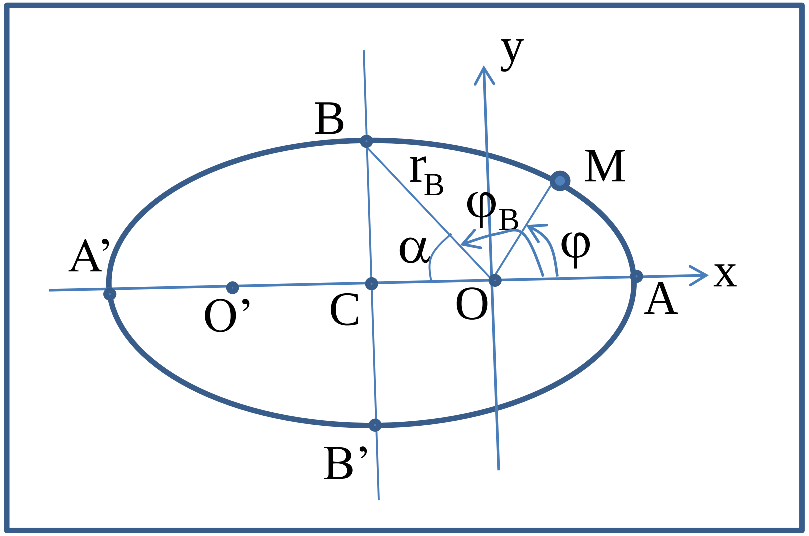
$$\vec{\sigma}_0(M) = \vec{r}_0 \wedge m\vec{V}_0$$

La nature de la trajectoire de la particule M dépendra donc de la valeur de son énergie mécanique.

- $e = 0$, $E_m = -\dfrac{k}{2P} < 0$, la trajectoire de M est ***un cercle***.
- $0 < e < 1$, $-\dfrac{k}{2P} < E_m < 0$, la trajectoire de M est ***une ellipse*.**
- $e = 1$, $E_m = 0$, la trajectoire de M est ***une parabole*.**
- $e > 1$, $E_m > 0$, la trajectoire de M est ***une hyperbole*.**

3) Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.

On pose:
$$\begin{cases} a = CA = A'C \\ b = CB = B'C \\ c = OC = O'C \end{cases}$$



Nous avons:
$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}$$

- Si $\varphi = 0$, $r = r_{min} = \dfrac{P}{1+e}$.
- Si $\varphi = \pi$, $r = r_{max} = \dfrac{P}{1-e}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ r_{min} + r_{max} = \dfrac{P}{1+e} + \dfrac{P}{1-e} = 2a \text{, d'où } P = a(1-e^2) \\ \bullet\ r_{max} - r_{min} = \dfrac{P}{1-e} - \dfrac{P}{1+e} = 2c \text{, donc } P = \dfrac{c}{e}(1-e^2) \end{array}\right\} \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

- Si $\varphi = \varphi_B$, $$r_B = \frac{P}{1+e\cos\varphi_B} = \frac{P}{1-e\cos\alpha} = \frac{P}{1-\frac{c}{a}.\frac{c}{r_B}}$$

D'où:

$$P = r_B - \frac{c^2}{a} \quad \Rightarrow r_B = P + \frac{c^2}{a} = a(1-e^2) + ae^2 = a \quad \Rightarrow \quad r_B = a.$$

- Dans le triangle rectangle OCB, nous avons : $a^2 = b^2 + c^2$

- Finalement, nous avons :

$$\frac{b^2}{a} = a - \frac{c^2}{a} = a(1-\frac{c^2}{a^2}) = a(1-e^2) = P \quad \Rightarrow \quad P = \frac{b^2}{a}$$

IV) TROISIEME LOI DE KEPLER

On considère une particule M soumise à une force attractive et dont l'énergie mécanique est telle que: $-\frac{k}{2p} < E_m < 0$

La trajectoire de M est elliptique.

1ère loi de Kepler: Le mouvement de M est périodique de période T.

2ème loi de Kepler: dans le cas d'un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux:

$$S = \frac{C}{2} t + S_0$$

La vitesse aréolaire de M est: $A = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}C = \frac{\Delta S}{T} = \frac{\pi ab}{T}$

D'où: $A^2 = \left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2 = \frac{C^2}{4}$, avec $\Delta S = S - S_0$

a = demi-grand axe de l'ellipse.   b = demi-petit axe de l'ellipse.

Nous avons: $P = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow A^2 = \frac{P}{4}\frac{k}{m} = \left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2$

En plus: $P = \frac{b^2}{a}$

Par conséquent: $T^2 = \left(\frac{4m\pi^2}{k}\right)a^3$ c'est ***la 3ème loi de Kepler.***

Le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse.

V) SATELLITES ARTIFICIELS.

Vitesse de libération:

Soit un engin spatial de masse m telle que son énergie mécanique E_m est:

$$E_m = \frac{1}{2}mV_0^2 + \left(-\frac{GM_t m}{r_0}\right)$$

M_t est la masse de la terre.

r_0 est la distance entre la terre et l'engin.

$$E_m = -\frac{k}{2P}(1-e^2) \quad \text{ou} \quad k = GM_t m$$

* $E_m < 0$, la trajectoire de M est circulaire $(e = 0)$ ou ellptique $(0 < e < 1)$.
* $E_m > 0$, la trajectoire de M est hyperbolique $(e > 1)$.

- Si $E_m = 0$, la trajectoire de M est parabolique $(e = 1)$ $\Rightarrow$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM_t}{r_0}} = V_\ell$$ c'est la vitesse de libération de l'engin spatial.

Cette vitesse de libération dépend de l'altitude et du rayon de la planète.

- Pour $V_0 \geq V\ell$, la trajectoire de M est parabolique ou hyperbolique. L'engin s'éloigne indéfiniment de la planète.

- Pour $0 < V_0 < V\ell$, la trajectoire de l'engin est fermée. L'orbite est soit circulaire ou elliptique.

VI) SATELLITE GEOSTATIONNAIRE.

* Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît fixe pour un observateur terrestre. Il a donc la même vitesse de rotation que celle de la terre.

* Le satellite géostationnaire se déplace sur une orbite équatoriale.

P.D.F pour une orbite circulaire:

$$F = m\gamma \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{GM_t}{r_0^2} = m\frac{V_0^2}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}} = \frac{V_\ell}{\sqrt{2}}$$, nous avons bien $V_0 < V_\ell$