
UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

2022–2023
Filière SMI (S3)
Statistique Descriptive et Probabilités

Théorie des Probabilités et variables aléatoires

1 Théorie des Probabilités

1.1 Introduction

Les origines de la théorie des Probabilités remontent au 17^{ème} siècle en manipulant la notion du *hasard* en mathématique. L'élaboration axiomatique de la théorie des Probabilités a été établie par Kolmogorov (1933). La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude.

1.2 Expérience et événement aléatoires

Définition 1.1. *Une expérience est dite **aléatoire** lorsque ses résultats dépendent du **hasard**.*

Même si l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est connu, il est impossible de prédire avec certitude une issue.

Exemple 1.1. – *On sait d'avance, qu'en lançant un dé à six faces numérotées de 1 à 6, on ne peut pas **prédire** avec certitude le résultat.*

– Si on lance une pièce de monnaie, on ne sait pas avec certitude que le résultat est pile.

Définition 1.2. L'ensemble des résultats possible d'une *expérience aléatoire* est noté Ω et est appelé *ensemble¹ fondamental* ou *univers des possibles*.

Exemple 1.2. – Jet d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$

– Lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

On cite 3 types d'ensembles fondamentaux :

1. Ensemble fondamental *fini* : Lancer d'un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Ensemble fondamental *infini dénombrable* : Imaginons de manière abstraite un lancer d'une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention de pile P .

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \dots\}$$

3. Ensemble fondamental *infini non dénombrable* : Durée de vie d'une ampoule.

$$\Omega = [0, +\infty[$$

1. aussi appelé **espace**

Remarque 1.1. *On peut scinder les espaces fondamentaux en deux type :*

- 1. Discret : fini, infini dénombrable.*
- 2. Continu : infini et non dénombrable.*

Définition 1.3 (Événement, événement élémentaire). *1. On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω .*

- 2. On appelle **éventualité** ou **événement élémentaire** tout singleton de Ω et on le note par ω .*

Exemple 1.3. *Jet d'un dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$*

- 1. $\forall i, \{\omega_i\}$ est un événement élémentaire.*
- 2. $A = \{1, 2\}$ est un événement, formulé par la phrase : ”**Obtenir 1 ou 2**”.*

Remarque 1.2. *1. l'ensemble Ω est un événement lui même et est appelé **événement certain**.*

- 2. l'ensemble vide \emptyset est un événement et est appelé **événement impossible**.*

Exemple 1.4. — *Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré à six faces et noter le résultat obtenu. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Il s'agit d'un ensemble fini à six éléments.*

*Le nombre total des éléments de Ω (ou de n'importe quel ensemble) est appelé **cardinal**, on note*

$$Card(\Omega) = |\Omega| = \#(\Omega) = 6$$

$A = \text{"Obtenir un nombre pair"}$ est un événement et $A = \{2, 4, 6\}$ On a bien $A \subset \Omega$ et $Card(A) = 3$.

— *Une expérience aléatoire consiste à lancer une pièce de monnaie non truquée autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir F. L'ensemble fondamental est :*

$$\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, \dots, PP \dots PF, \dots\}$$

$A = \text{"Le nombre de lancers est compris entre 4 et 6"}$ est un événement et on a :

$$A = \{PPPF, PPPPF, PPPPPF\}$$

Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements (i.e. deux sous-ensembles de Ω), on a les opérations suivantes :

1. Le complémentaire de l'événement A dans Ω , noté \bar{A} , c'est l'**événement contraire** de A .
2. La réunion de A et B (noté $A \cup B$) est un événement. Il se réalise si, et seulement si, au moins l'un des événements A et B se réalise.
3. L'intersection de A et B (noté $A \cap B$) est un événement. Il se réalise si, et seulement si, les deux événements A et B se réalisent.
4. Lorsque $A \subset B$, si A est réalisé alors B est réalisé.
5. $B \setminus A = B \cap \bar{A}$.

Exemple 1.5. On jette un dé cubique et on note la face obtenue. Alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On a alors les exemples d'événements suivants :

- $A = \text{"Obtenir un nombre pair"}$. Alors, $A = \{2, 4, 6\}$.
- $B = \text{"Obtenir un nombre } \geq 4 \text{"}$. Alors, $B = \{4, 5, 6\}$.
- $A \cap B = \text{"Obtenir un nombre pair, **et** } \geq 4 \text{"}$. Alors $A \cap B = \{4, 6\}$.
- $A \cup B = \text{"Obtenir un nombre pair, **ou** } \geq 4 \text{"}$. Alors, $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.
- $C = \text{"Obtenir un nombre } \geq 10 \text{"}$. Alors, $C = \emptyset$. C'est un **événement impossible**.
- $D = \text{"Obtenir un nombre } \leq 8 \text{"}$. Alors $D = \Omega$. C'est un **événement certain**.
- $E = \text{"Obtenir un nombre impaire"}$. Alors, $E = \{1, 3, 5\} = \overline{A}$.
- $F = \text{"Obtenir un nombre } > 4 \text{"}$. Alors, $F = \{5, 6\}$. Tous les éléments de F sont dans B . On écrit $F \subset B$.
- $A \cap E = \emptyset$. Les événements A et E sont dits **incompatibles**.
- $B \setminus E = B \cap \overline{E} = B \cap A = \{4, 6\}$

Définition 1.4. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événement A et B sont **incompatibles** ou **disjoints**.

Exemple 1.6. Jet d'un dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les événements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$ sont **"disjoints"**.

1.3 Bases axiomatiques des probabilités

Dans de nombreuses situations les événements d'intérêt ne constituent qu'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. Ce sous-ensemble doit posséder certaines propriétés qui garantissent les opérations sur les événements.

1.3.1 Tribu et espace probabilisable

Définition 1.5 (Tribu). Soient Ω un ensemble non vide et \mathcal{F} un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$. On dit que \mathcal{F} est une **tribu** (ou σ -algère) de Ω si

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. \mathcal{F} est stable par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$,
3. \mathcal{F} est stable pour une réunion dénombrable : $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F}, \quad \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

On remarque que si \mathcal{F} est une **tribu**, alors elle est stable pour une intersection dénombrable : $\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$.

Exemple 1.7. – $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu.

– $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ est appelée tribu **triviale**.

– $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est appelée tribu de **Bernoulli** (ou tribu engendrée par A).

– Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}(\Omega) = \{I : I \subset \Omega \text{ est un intervalle}\}$, alors la tribu engendrée par $\mathcal{I}(\Omega)$, notée \mathcal{B}_Ω , est appelée **tribu borelienne** de Ω .

Définition 1.6 (Espace probabilisable). Soient Ω un ensemble non vide et \mathcal{F} une tribu de Ω . Le couple (Ω, \mathcal{F}) est appelé **espace probabilisable** (ou mesurable).

1.3.2 Espace probabilisé

Définition 1.7 (Probabilité). Soit (Ω, \mathcal{F}) un **espace probabilisable**. On dit qu'une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ est une **probabilité** si elle vérifie les axiomes suivantes :

1. (normalisation) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. (σ -additivité) $\forall (A_n)_n \subset \mathcal{F}$ et $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

Exemple 1.8. Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un espace fondamental à n éléments ($\text{card}(\Omega) = n$). Prenons $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{P} : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A) := \frac{\text{card}(A)}{n}\end{aligned}$$

est une probabilité et est appelée **probabilité uniforme**.

Définition 1.8 (Espace probabilisé). Soient (Ω, \mathcal{F}) un **espace probabilisable** et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ une **probabilité**, alors le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé** (ou mesuré).

Propriétés 1.1. Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$:

1. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,
2. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
3. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
4. si $B \subset A$, on note $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, On a

$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B),$$

5. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante (resp. décroissante) dans \mathcal{F} , alors :
 $\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$ (resp. $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$).

Remarque 1.3. – $\mathbb{P}(A) = 0 \not\Rightarrow A = \emptyset$;

– $\mathbb{P}(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$.

1.3.3 Événements équiprobables

Pour certaines expériences, l'ensemble fondamental est fini ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$) et les événements élémentaires ont la même probabilité : $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \dots = \mathbb{P}(\omega_n) = p = 1/n$ (on dira aussi que les ω_i sont **équiprobables**).

Soit A un événement de Ω , alors on peut écrire : $A = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$, avec $d \leq n$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^d \{\omega_i\}\right) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \dots + \mathbb{P}(\{\omega_d\}) = \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

Par conséquent, **il suffit de connaître le cardinal** d'un événement pour calculer sa probabilité. Pour se faire, on utilise généralement le **Dénombrement** (Arrangements, Permutations, Combinaisons, ..., (voir chapitre 2)).

Dans le cas d'équiprobabilité on aura $\mathbb{P}(A) = \frac{d}{n}$.

Remarque 1.4. *Ce cas particulier de l'équiprobabilité est appelé loi discrète uniforme (voir Chapitre 4).*

Exemple 1.9. *Considérons le lancé de deux dés équilibrés, alors*

$$\Omega = \{\omega_1 = (1, 1), \omega_2 = (1, 2), \dots, \omega_{36} = (6, 6)\}$$

et $\text{Card}(\Omega) = 36$

Puisque les dés sont équilibrés ; alors $\mathbb{P}(\omega_1) = \dots = \mathbb{P}(\omega_{36}) = \frac{1}{36}$

Considérons l'événement A "obtenir au moins un nombre pair."

$\text{Card}(A) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\text{"les deux nombres sont impaires"}) = 36 - 6 = 27$

Par la suite

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Exemple 1.10 (Contre exemple d'événements non-équiprobables).

On tire successivement et sans remise 2 boules d'une urne contenant 2 boules vertes (V) et 3 boules rouges (R). On s'intéresse à la couleur des boules tirées.

Soit l'événement A "les deux boules tirées ont la même couleur", alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(VV) + \mathbb{P}(RR) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

alors que si on résonne comme dans le cas d'équiprobabilité on obtient

$$\Omega = \{\omega_1 = VV, \omega_2 = RV, \omega_3 = VR, \omega_4 = RR\} \text{ et } \text{Card}(\Omega) = 4$$

et

$$\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(A)$$

Ainsi dans le cas de non équiprobabilité, si $A = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ alors la connaissance du cardinal de A **ne suffit pas** de calculer sa probabilité $\mathbb{P}(A)$. La seule façon qui permet d'obtenir $\mathbb{P}(A)$ est la formule

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \dots \mathbb{P}(\{\omega_d\})$$

et ceci **exige la donnée de** $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ pour tout i . C'est ce qu'on appellera **loi de probabilité** (voir Chapitre 4)

Remarque 1.5. A partir de n'importe quel **vecteur** $(\omega_1, \dots, \omega_n)'$, on peut construire une probabilité à une constante multiplicative près.

En effet, si on pose $p_i = \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^n \omega_j}$ alors $\sum_{j=1}^n \omega'_j = 1$.

Par exemple, à partir du vecteur $(3, 2, 4, 1)'$, le vecteur $\left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{1}{10}\right)'$ définit une probabilité sur Ω .

Remarque 1.6 (Ω infini dénombrable). Dans ce cas $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ et $\text{Card}(\Omega) = +\infty$, on n'a pas d'équiprobabilité ($\sum_{i=1}^{+\infty} p = p \times (+\infty) \neq 1, \forall p \in [0, 1]$)

Il existe une **suite** (p_1, p_2, \dots) à partir de laquelle on ne peut pas définir une probabilité sur Ω à une constante multiplicative près. Par exemple, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. On dit que la **série diverge**.

Cependant, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, Dans ce cas, la **série converge** et le vecteur $\left(\frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{1^2}, \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{2^2}, \dots\right)'$ définit une probabilité sur Ω .

Il existe plusieurs lois de probabilité prédéfinies, on parle de lois usuelles, par exemple loi géométrique, loi de Poisson, ... (voir Chapitre 4).

Remarque 1.7 (Ω infini non dénombrable). Dans ce cas Ω est un intervalle de \mathbb{R} . Les écritures $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ et $A = \{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ ne

sont pas correctes, et la formule $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) + \dots \mathbb{P}(\{\omega_d\})$ n'a pas de sens.

Si $A = [a, b]$, alors $\mathbb{P}(A) = \int_a^b f(x)dx$, on calculera la probabilité à l'aide de fonction continue f appelée densité de probabilité (voir chapitre 5).

1.4 Probabilité conditionnelle

Dans cette section, on va étudier le calculs des probabilités avec disposition d'information supplémentaire concernant le résultat de l'expérience. On parle alors de **probabilités conditionnelles**.

On considère maintenant un événement A , il est intuitif que l'utilisation de l'information ' B est réalisée' (c'est à dire $\mathbb{P}(B) > 0$) peut changer le calcul de la probabilité de A .

Définition 1.9. *La probabilité de A , sachant B , notée $\mathbb{P}(A/B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ est appelée **probabilité conditionnelle**, elle est définie :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.\end{aligned}$$

Remarque 1.8. *L'application \mathbb{P}_B est une probabilité sur \mathcal{F} et vérifie toutes les propriétés d'une probabilité.*

Théorème 1.1 (Théorème des probabilités composées ou règle de la multiplication).

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B).$$

En voici une généralisation

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_m/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}) \times \mathbb{P}(A_{m-1}/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) \\ \times \dots \times \mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_1).$$

Exemple 1.11. *Un parc contient 100 voitures réparties selon le confort et la vitesse de la manière suivante :*

	<i>Rapide</i>	<i>Non rapide</i>	<i>Total</i>
<i>Confortable</i>	40	10	50
<i>Non confortable</i>	20	30	50
<i>Total</i>	60	40	100

Quelle est la probabilité de choisir une voiture confortable sachant qu'elle est rapide ?

Il s'agit du calcul des probabilités avec disposition d'information supplémentaire concernant le résultat de l'expérience.

Soient les événements A = "voiture rapide" et B = "voiture confortable".

La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

On a $\mathbb{P}(A) = \frac{60}{100}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{40}{100}$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(B/A) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Définition 1.10 (Système complet/Partition). *On dit que les événements A_1, \dots, A_k forment une partition de Ω , si*

- (i) $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$,
- (ii) $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$.

Théorème 1.2 (Formule de probabilité totale). *Soit A_1, \dots, A_k un système complet d'événements. Alors*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(B/A_j).$$

Théorème 1.3 (Formule de Bayes). *Soit A_1, \dots, A_k un système complet d'événements. Soit E un événement de probabilité non nulle. Alors*

$$\mathbb{P}(A_j/E) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap E)}{\mathbb{P}(E)} = \frac{\mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(E/A_j)}{\sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(E/A_i)}.$$

Proposition 1.1. *Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B/A)}{\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B/A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}(B/\bar{A})}.$$

Exemple 1.12. Une urne contient 5 boules noires et 3 boules blanches ($U[5N, 3B]$). Quelle est la probabilité d'extraire 2 boules blanches en 2 tirages (Tirage sans remise) ?

On note par B_1 , l'événement : "obtenir une boule blanche au premier tirage" et B_2 l'événement : "obtenir une boule blanche au deuxième tirage".

La probabilité cherchée est $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$ et vaut $\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2/B_1)$.

Or $\mathbb{P}(B_1) = 3/8$ et $\mathbb{P}(B_2/B_1) = 2/7$ car lorsqu'une boule blanche est sortie au premier tirage, il ne reste plus que 7 boules au total, dont 2 seulement sont blanches. On conclut que $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$.

Exemple 1.13. Dans un match de Football le score est de 1 à 1 entre les deux équipes A et B. Avant 10 secondes du sifflet final, l'équipe A obtient un penalty. On sait que l'un des trois joueurs J1, J2 ou J3 peut tirer ce penalty avec les probabilités 0.7 pour J1 et 0.2 pour J2. On sait aussi que J1 a une probabilité de succès de 0.95 et que cette probabilité est de 0.8 pour J2 et de 0.7 pour J3.

- a) Quelle est la probabilité que le match finisse sur le score de 2 à 1 en faveur de l'équipe A ?
- b) Le match est terminé sur le score de 2 à 1 en faveur de l'équipe A.

Quelle la probabilité que le penalty ait été tiré par J1 ?

c) Le match est terminé sur le score de 1 à 1. Quelle la probabilité que le penalty ait été tiré par J3 ?

$\Omega = \{J1, J2, J3\}$. On note VA l'événement "l'équipe A gagne 2 à 1".

a) On cherche à calculer $\mathbb{P}(VA)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(VA) &= \mathbb{P}(VA/J1)\mathbb{P}(J1) + \mathbb{P}(VA/J2)\mathbb{P}(J2) + \mathbb{P}(VA/J3)\mathbb{P}(J3) \\ &= 0.7 \times 0.95 + 0.2 \times 0.8 + 0.1 \times 0.7 \\ &= 0.665 + 0.16 + 0.07 \\ &= 0.895\end{aligned}$$

b) On cherche à calculer $\mathbb{P}(J1/VA)$.

D'après le Théorème de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J1/VA) &= \frac{\mathbb{P}(VA/J1)\mathbb{P}(J1)}{\mathbb{P}(VA)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.7}{0.895} \\ &= \frac{0.665}{0.895} \\ &= 0.743\end{aligned}$$

c) On cherche à calculer $\mathbb{P}(J3/\overline{VA})$.

D'après le Théorème de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(J3/\overline{VA}) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{VA}/J3)\mathbb{P}(J3)}{\mathbb{P}(\overline{VA})} \\ &= \frac{0.3 \times 0.1}{0.105} \\ &= \frac{0.035}{0.105} \\ &= 0.2\end{aligned}$$

Exemple 1.14. *Considérons deux urnes $U_1[10N, 2B]$ et $U_2[5N, 3B]$; Quelle*

est la probabilité d'extraire 1 boule blanche ? sachant que la probabilité de tirer une boule de l'urne U_1 est égale à celle de l'urne U_2 et vaut $1/2$.

On note par B l'événement : "obtenir une boule blanche" , U_1 : "le tirage est effectué de l'urne 1" et U_2 : "le tirage est effectué de l'urne 2".

1.5 Événements indépendants

Intuitivement, deux événement A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucun effet sur la réalisation de l'autre

Définition 1.11. *On dit que l'événement A est indépendant de l'événement B si*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A).$$

Comme conséquence de la définition, l'événement A est indépendant de l'événement B si, et seulement si, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

On a aussi : $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$.

Définition 1.12. *Une famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n événements d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite indépendante si pour toute partie I de $\{1, 2, \dots, n\}$*

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple 1.15. Reprenons l'exemple 1.12 en considérant que le tirage est avec remise.

Exemple 1.16. Jetons un dé équilibré et considérons les événements :

- A : "Le résultat est impair",
- B : "Le résultat est au moins égal à 5".

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{1, 3, 5\}, \mathbb{P}(A) = 1/2$$

$$B = \{5, 6\}, \mathbb{P}(B) = 1/3$$

$$A \cap B = \{5\}, \mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$$

alors, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ et donc A et B sont indépendants.

Exemple 1.17 (L'indépendance n'est pas transitive). Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, telle que :

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1/10 \text{ et } \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = 4/10.$$

Considérons les événements :

- $A = \{\omega_1, \omega_2\}$,

– $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ et

– $C = \{\omega_3, \omega_4\}$.

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\omega_2) = 1/10 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ et donc A et B sont indépendants.

$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\omega_3) = 4/10 = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$ et donc B et C sont indépendants.

$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C)$ et donc A et C ne sont pas indépendants.

Proposition 1.2. *Si A et B sont indépendants alors,*

(a) A et \overline{B} sont indépendants.

(b) \overline{A} et B sont indépendants.

(c) \overline{A} et \overline{B} sont indépendants.

Preuve.

(a) D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$.

Donc $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$

C'est à dire $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$

Ou encore $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$

Donc $\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$

Finalement $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})$

Ce qui est la définition de l'indépendance entre \overline{A} et B .

(b) La même preuve.

(c) La même preuve.

2 Variables Aléatoires

2.1 Introduction

Dans une expérience aléatoire, on s'intéresse à une *donnée numérique* résultat de cette expérience. Par exemple, lors de lancé de deux dés, on s'intéresse à la somme des résultats trouvés (et non pas au détail du déroulement du lancement). Donc une ***variable aléatoire (va)*** est une application qui à tout résultat du hasard associe une certaine quantité numérique.

La notion des variables aléatoires est très utile en calcul des probabilités et en statistique. Elle permet de travailler sur \mathbb{R} . Les variables aléatoires sont des objets centraux en théorie des probabilités. Elles jouent le même rôle que les *fonctions* en *analyse*.

2.2 Définition

Définition 2.1. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable. On appelle *variable aléatoire réelle* sur Ω tout application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

On note $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$.

$\{X \in I\}$ et $\{X \leq x\}$ sont des événements.

Remarque 2.1. *L'ensemble Ω étant fini, pour toute fonction X définie sur Ω , l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est lui aussi fini, de cardinal inférieur ou égal à celui de Ω .*

Exemple 2.1. *On jette une pièce de monnaie deux fois, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. Soit la variable aléatoire désignant "le nombre de pile obtenu".*

$X \in \{0, 1, 2\}$ ($X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$) et

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(FF) = 1/4.$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(FP, PF) = 2/4.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(PP) = 1/4.$$

Exemple 2.2. *On lance deux dés équilibrés. Montrer que la variable X définie par X : "Somme des points obtenus" est une variable aléatoire.*

C'est à dire, il faut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$$X \in \{2, 3, \dots, 12\}$$

– Si $x < 2$ alors $\{X \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$.

– Si $x > 12$ alors $\{X \leq x\} = \Omega \in \mathcal{F}$.

– Si $2 \leq x \leq 12$ alors $\{X \leq x\} = \cup_{i \leq x} (X = i) \in \mathcal{F}$.

Proposition 2.1. Soient X et Y deux variables aléatoires, $k \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $X + Y$ est une variable aléatoire ;
2. $X - Y$ est une variable aléatoire ;
3. XY est une variable aléatoire ;
4. kX est une variable aléatoire ;
5. X^n est une variable aléatoire ;
6. de plus, si X ne s'annule jamais, $1/X$ est une variable aléatoire.

Exemple 2.3. Soit A une partie de \mathcal{F} , la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire.

Remarque 2.2. *On peut scinder les variables aléatoires en deux types :*

- ▷ *variables aléatoires discrètes ;*
- ▷ *variables aléatoires continues.*

2.3 Fonction de répartition

Définition 2.2. *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'application*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

s'appelle la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

On pose

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Proposition 2.2. *La fonction de répartition F est une fonction croissante et continue à droite et on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.*

Exemple 2.4. *Jet d'une pièce de monnaie équilibrée. $\Omega = \{P, F\}$ et $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = 1/2$*

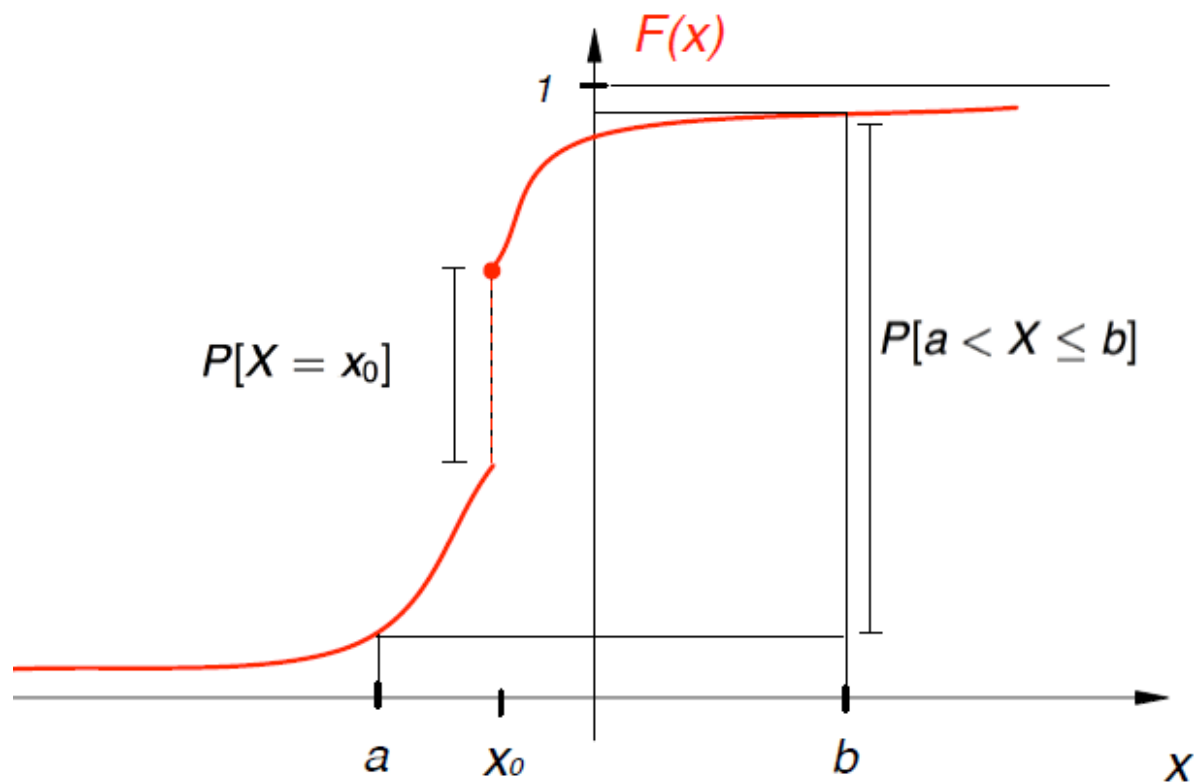


FIGURE 1 – Fonction de répartition d'une v.a. X et lecture des probabilités.

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = P \\ 0 & \text{si } \omega = F \end{cases} ,$$

alors,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

Théorème 2.1. $\forall a < b \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

En prenant la limite pour b à l'infini, on obtient

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - F(a).$$

Démonstration. On a $] - \infty, b] =] - \infty, a] \cup]a, b]$, donc $\mathbb{P}(X \in] - \infty, b]) = \mathbb{P}(X \in] - \infty, a]) + \mathbb{P}(X \in]a, b])$

□

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.

Exemple 2.5. *On lance une pièce de monnaie. Si on obtient pile on gagne 50DH, si face on perd 10DH.*

Considérons la variable aléatoire : " Gain réalisé après une partie"
 $X \in \{-10, 50\}$.

$$\begin{cases} \text{si} & x < -10 : & F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \\ \text{si} & -10 \leq x < 50 : & F_X(x) = 1/2 \\ \text{si} & x \geq 50 & F_X(x) = 1 \end{cases},$$

Tracer la fonction de répartition de cet exemple.

Exemple 2.6. *Une urne contient 2 boules blanches et 10 boules noires. Un certain jeu permet de gagner 50DH si on en tire une boule blanche et de perdre 20Dh si on en tire une boule noire. On tire successivement deux boules de l'urne, on considère la variable aléatoire : "Gain réalisé après deux tirages".*

Tracer la fonction de répartition de cet exemple.

Définition 2.3 (Indépendance). *Deux variables aléatoires X et Y définies sur (Ω, \mathcal{F}) sont indépendantes si et seulement si pour tous réels t et t'*

$$\mathbb{P}([X \leq t] \cap [Y \leq t']) = \mathbb{P}(X \leq t) \times \mathbb{P}(Y \leq t').$$

La fonction de répartition permet de définir le quantile d'ordre α .

Définition 2.4. *Soit $\alpha \in [0, 1]$ fixé. Le quantile d'ordre α de la distribution de X est le nombre*

$$x_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}.$$

S'il existe un unique nombre c tel que $F(c) = \alpha$, alors $x_\alpha = c$. Mais la définition ci-dessus permet de définir x_α même dans les cas où il n'y a pas de tel c .

Terminologie

- ▷ $x_{1/2}$ est la médiane,
- ▷ $x_{1/4}$ et $x_{3/4}$ sont les 1^{er} et 3^{ème} quartiles,
- ▷ $x_{i/10}$, $i = 1, 2, \dots, 9$, sont les déciles,
- ▷ $x_{i/100}$, $i = 1, 2, \dots, 99$, sont les percentiles.

3 Exercices corrigés

Exercice

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8 telle que :

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4).$$

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X .
3. S'agit-il de l'équiprobabilité ? Pourquoi ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 5)$, $\mathbb{P}(X + 4 \leq 7)$ et $\mathbb{P}(X \neq 2)$.
5. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X .

Corrigé

1. $X(\Omega) = \{2; 4; 6; 8\}$.
2. On pose $a = \mathbb{P}(X = 2)$; $b = \mathbb{P}(X = 4)$; $c = \mathbb{P}(X = 6)$; $d = \mathbb{P}(X = 8)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4) \Rightarrow a = b \\ \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = b \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = b \\ c = 1 - a - b - d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{6} \\ d = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{6} \end{cases}$$

3. Non il ne s'agit pas d'équiprobabilité car $\mathbb{P}(X = 2) \neq \mathbb{P}(X = 8)$

4. $P(X \geq 5) = P(X = 6) + P(X = 8) = c + d = \frac{2}{3},$

$$\mathbb{P}(X + 4 \leq 7) = \mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 2) = a = \frac{1}{6},$$

$$\mathbb{P}(X \neq 2) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = b + c + d = \frac{5}{6}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 2$ alors $F(x) = 0$

Si $2 \leq x < 4$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}$

Si $4 \leq x < 6$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{6}$

Si $6 \leq x < 8$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) = \frac{3}{6}$

Si $x \geq 8$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = 1$

Exercice

On lance deux dés équilibrés et on considère le jeu suivant :

- Si la somme des deux chiffres obtenus est supérieure ou égale à 10 alors on gagne $6dh$,
- Si la différence entre les deux chiffres obtenus est nulle alors on gagne $4dh$,
- Si la somme des deux chiffres obtenus est inférieure à ou égale à 4 alors on perd $2dh$,
- Sinon, on perd $4dh$,

Soit X la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) obtenu.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X .
3. Quelle est la probabilité de gagner plus de $5dh$.
4. Quelle est la probabilité de perdre plus de $3dh$.
5. Quelle est la probabilité de gagner.

6. Quelle est la probabilité de perdre.
7. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X .

Corrigé

1. $X(\Omega) = \{-4, -2, 4, 6\}$ avec $\Omega = \{(1, 1); (1, 2); \dots; (6, 5); (6, 6)\}$ et $Card(\Omega) = 36$.

2. ("somme ≥ 10 " \Rightarrow) $\{(4, 6); (6, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 5); (6, 6)\}$
 donc $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{Card\{\text{"somme} \geq 10\}}{Card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

("difference est nulle") $= \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$
 donc $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{Card\{\text{somme nulle}\}}{Card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

("somme ≤ 4 " \Rightarrow) $\{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (3, 1)\}$
 donc $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{Card\{\text{"somme} \leq 4\}}{Card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$\mathbb{P}(X = -4) = 1 - [\mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6)] = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

X	-4	-2	4	6
$\mathbb{P}(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$3. \mathbb{P}(X \geq 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}$$

$$4. \mathbb{P}(X \leq -3) = P(X = -4) = \frac{1}{2}$$

$$5. \mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$6. \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = -4) + \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$7. \begin{aligned} F(x) &= 0 & ; & & x < -4 \\ F(x) &= \frac{1}{2} & ; & & -4 \leq x < -2 \\ F(x) &= \frac{4}{6} & ; & & -2 \leq x < 4 \end{aligned}$$

$$F(x) = \frac{5}{6} \quad ; \quad 4 \leq x < 6$$

$$F(x) = 1 \quad ; \quad x \geq 6$$