Hierdie opdrag moet as 'n enkele PDF-lêer via SUNLearn ingehandig word voor die sperdatum hierbo. Laat inhandigings sal gepenaliseer word. Kommunikasie tussen studente rakende werksopdragte is streng verbode en plagiaat sal tot ernstige gevolge lei. Jou inhandiging moet 'n getekende verklaring bevat dat dit jou eie werk is. Raadpleeg die TW244 SUNLearn-blad vir verdere instruksies.

This assignment must be submitted as a single PDF file via SUNLearn before the due date above. Late submissions will be penalized. Communication between students regarding assignments is strictly prohibited and plagiarism will have severe consequences. Your submission should contain a signed declaration that it is your own work. See TW244 SUNLearn page for further instructions.

P1: Nie-lineêre demping [2 punte]

In P2b van RO04 het ons 'n voorbeeld van 'n veer-massa stelsel met nie-lineêre demping gesien. Beskou die algemene geval:

P1: Nonlinear damping [2 marks]

In P2b of CA04 we saw an example of a spring-mass system with nonlinear damping. Consider the general case:

$$x'' = -\frac{\beta}{m}x'|x'| - \frac{k}{m}x.$$

(a) Skryf die tweede-orde stelsel hierbo as 'n outonome stelsel in die vlak en vind al die kritieke punte.

(a) Write the second-order system above as a plane autonomous system and find all of its critical points.

(b) 'n Stelsel is *swaar gedemp* as (0,0) 'n stabiele nodus is en *lig gedemp* wanneeer (0,0) 'n stabiele spiraal is. Wys dat $(0,0)$ in die DV hierbo lig gedemp is vir alle $\beta > 0$.
(Wenk: $\frac{d}{dy}(y|y|) = 2|y|$.)

(b) A system is called *overdamped* when (0,0) is a stable node and *underdamped* when (0,0) is a stable spiral. Show that $(0,0)$ in DE above is necessarily underdamped for all $\beta > 0$.
(Hint: $\frac{d}{dy}(y|y|) = 2|y|$.)

P2: 'n Klein bietjie kompetisie het nog nooit iemand seergemaak nie

Beskou 'n Lotka–Volterra kompetisie model van die vorm:

P2: A little competition never hurt anyone

Consider a Lotka–Volterra competition model of the form:

$$x' = x(a - bx - cy),$$
$$y' = y(d - ey - fx).$$

(a) [2 punte] Nie-dimensionaliseer die stelsel deur karakteristieke lengtes $t = t_c\widehat{t}$, $x = x_c\widehat{x}$, en $y = y_c\widehat{y}$ in te stel, en toon aan dat dit in die volgende vorm geskryf kan word:

(a) [2 marks] By introducing characteristic lengths, $t = t_c\widehat{t}$, $x = x_c\widehat{x}$, and $y = y_c\widehat{y}$, nondimensionalise the system and show that it may be written in the form

$$\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{t}} = \widehat{x}(1 - \widehat{x} - \widehat{y}),$$
$$\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{t}} = \widehat{y}(D - E\widehat{y} - F\widehat{x}).$$

Gee die gevolglike karakteristieke lengtes (t_c, x_c, y_c) en die nuwe parameters $(D$–$F)$ in terme van die oorspronklike parameters $(a$–$f)$.

State clearly the resulting characteristic lengths (t_c, x_c, y_c), and new parameters $(D$–$F)$ in terms of the original parameters $(a$–$f)$.

(b) [2 punte] Beskou nou die spesifieke model

(b) [2 marks] Consider now the specific model

$$x' = x(1 - x - y),$$
$$y' = y(2 - y - 4x).$$

Vind en klassifiseer (waar moontlik) die kritieke punte van hierdie DV stelsel. Toon aan jou bewerkings en lewer kommentaar op die moontlikheid van naasbestaan van die twee spesies.

Locate and classify (where possible) critical points of this DE system. Show your working and comment on the potential for co-existence of the two species.

(c) [2 punte] Gebruik `pplane` om die fasediagram van die stelsel te teken en verifieer jou bevindinge uit (b).

(c) [2 marks] Use `pplane` to draw the phase diagram of the system and verify your findings from (b).

$$x' = x(1 - x - y),$$
$$y' = y(2 - y - 4x).$$

(d) [2 bonus punte] Beskou weer die meer algemene model

(d) [2 bonus marks] Consider again the more general model

$$x' = x(1 - x - y),$$
$$y' = y(D - Ey - Fx),$$

met $D, E, F > 0$.. Toon aan dat $E > D > F$ 'n nodige en voldoende voorwaarde vir stabiele naasbestaan is.

with $D, E, F > 0$. Show that $E > D > F$ is a necessary and sufficient condition for stable co-existence.

P3: Die modellering van liefdesdinamika. Dr Pietro Landi van US Toegepaste Wiskunde het in sy onlangse CoE-MaSS-seminaar beskryf hoe ons differensiaalvergelykings kan gebruik om 'liefdesdinamika' te modelleer. Hy het hierdie idees op 'n paar bekende paartjies in die letterkunde toegepas. As jy die seminaar gemis het, kan jy dit hier vind:

P3: Modelling love dynamics. In his recent CoE-MaSS seminar, Dr Pietro Landi from SU Applied Mathematics described how we might use differential equations to model 'love dynamics', and applied these ideas to some famous couples in literature. If you didn't see the seminar, you can find it here:

https://www.youtube.com/watch?v=3o-7TaWUBgI

Dr Landi het spesifiek modelle van die volgende vorm voorgestel:

In particular, Dr Landi proposed models of the form

$$\frac{dx_1}{dt} = -F_1(x_1, x_2) + G_1(x_1, x_2) + H_1(x_1, x_2, A_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -F_2(x_1, x_2) + G_2(x_1, x_2) + H_2(x_1, x_2, A_1),$$

waar $x_1(t)$ die gevoelens van persoon 1 teenoor persoon 2 oor tyd meet, en $x_2(t)$ die gevoelens van persoon 2 teenoor persoon 1. Ons beskou die spesieke model

where $x_1(t)$ measures the feelings of person 1 towards person 2 over time, and $x_2(t)$ the feelings of person 2 towards person 1. We consider the specific model

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2/\sqrt{1+x_2^2} + A_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + 2x_1/\sqrt{1+x_1^2} + A_1.$$

In elke DV verteenwoordig die eerste term die verval van gevoelens met verloop van tyd (onthou die vergelyking vir eksponensiële verval), die tweede term verteenwoordig reaksies op die gevoelens van die ander (as iemand van ons hou/nie hou nie, is ons geneig om die voorbeeld te volg), en die laaste term is die aanloklikheid (of aantreklikheid) van die ander persoon.

In each DE, the first term represents the decay of feelings over time (recall the equation for exponential decay), the second term represents reactions to the feelings of the other (if someone likes/dislikes us, we tend to follow suit), and the final term accounts for the appeal (or attractiveness) of the other person.

(a) [2 punte] Kom ons pas ons model toe op een van die bekendste literêre paartjies; Romeo en Juliet. As jy nie vertroud is met die verhaal nie: Romeo en Juliet ontmoet die eerste keer by 'n gemaskerde bal, en weet dus nie wie die ander een is nie (hulle besef ook nie dat die een 'n aantreklike Hollywood-akteur is nie), so hulle aanloklikheid is $A_1 = A_2 = 0$. Vind en klassifiseer die kritieke punte van die DV stelsel in hierdie geval. Maak 'n skets van die fasediagram en bevestig jou bevindinge m.b.v. `pplane`. Kom tot die gevolgtrekking dat as hulle begin met ten minste die kleinste positiewe gevoelens teenoor mekaar, staan Romeo en Juliet 'n kans op 'n suksesvolle verhouding (d.w.s., bereik 'n ewewigsposisie met om positiewe gevoelens teenoor mekaar te hê).

(a) [2 marks] Let us apply our model to one of the most famous literary couples; Romeo and Juliet. If you are unfamiliar with the story, Romeo and Juliet first meet at a masked ball, and so do not know who the other is (nor can they tell that the other is an attractive Hollywood actor), so we will set their appeals $A_1 = A_2 = 0$. Locate and classify the critical points of the DE system in this case. Make a sketch of the phase diagram and confirm your findings by using `pplane`. Conclude that if they start with at least the smallest of positive feelings towards each other, then Romeo and Juliet will have a chance of a succesful relationship (i.e., reach an equilibrium position with having positive feelings for the other).

(b) [2 punte] Ons vind later uit dat Romeo en Juliet deel is van twee vyandige families, die Montagues en die Capulets, wat hulle verhouding dus verbode maak. Kom ons inkorporeer dit in ons model deur die aanloklikheid van elk te verminder, m.a.w., $A_1 = A_2 = -1$. Toon aan dat hulle verhouding in hierdie geval gedoem is om te misluk. (Doen dit deur die kritieke punte van die DV te vind en te analiseer). Dit is nie nodig om die fasediagram hier te skets nie.

(b) [2 marks] We later find that Romeo and Juliet are members of two rival families, the Montagues and the Capulets, making their relationship forbidden. Let us incorporate that in our model by reducing the appeal of each, i.e., $A_1 = A_2 = -1$. Show that in this instance their relationship is doomed to fail. (Do so by finding and analysing the critical points of the DE. It is not necessary to sketch the phase diagram here.)

(c) [1 mark] Ondanks die volgehoue weerstand van hul families, trou Romeo en Juliet in die geheim. Toon aan dat as dit hul aanloklikheid kon verhoog tot 'n waarde van bv. $A_1 = A_2 = -1/3$, dan kan hulle steeds geluk vind indien hul aanvanklike gevoelens teenoor mekaar sterk genoeg is, al het beide negatiewe aanloklikheid. Hier is dit voldoende om dit aan te toon deur slegs die fasevlak met `pplane` te stip en die resultaat te interpreteer.

(c) [1 mark] Despite the continued resistance from their families, Romeo and Juliet marry in secret. Show that if this was able to increase their appeal to a value of say $A_1 = A_2 = -1/3$, then if their initial feelings for each other are strong enough, that they may still find happiness, even though both have negative appeal. Here it suffices to show this just by plotting the phase plane with `pplane` an interpreting the result.

(d) [Super opsioneel] In die veld van dinamiese stelsels word bifurkasie-diagramme gebruik om die bestendige toestande van 'n stelsel uit te beeld soos 'n spesifieke parameter aangepas word. Laat $A_1 = A_2 = A$ en bereken die stabiele kritieke punte van die stelsel hierbo vir 'n reeks van A waardes in die interval [-1,1] en stip dan die x en y waardes as 'n funksie van A.

(d) [Super optional] In the field of dynamical systems, bifurcation diagrams are used to depict the steady states of a system as a certain parameter is varied. Let $A_1 = A_2 = A$ and compute the stable critical points of the system above for a range of A values in the interval [-1,1] and then plot the x and y values as a function of A.

P4: Fase-vlak metode. [Optional] Gebruik die fase-vlak metode om aan te toon dat oplossings vir die nie-lineêre tweede-orde differensiaalvergelyking

P4: Phase plane method. [Optional] Use the phase-plane method to show that solutions to the nonlinear second-order differential equation

$$x'' = -2x\sqrt{(x')^2 + 1}$$

wat $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$ bevredig, periodies is.
(Wenk: $\frac{d}{dy}\sqrt{y^2+1} = y/\sqrt{y^2+1}$.)

that satisfy $x(0) = x_0$, $x'(0) = 0$ are periodic.
(Hint: $\frac{d}{dy}\sqrt{y^2+1} = y/\sqrt{y^2+1}$.)