Delta 机器人运动学正解

Delta 机器人的世界（固定）坐标系原点建立在静平台的 O 点，X 轴和OA_1重合，Z 轴和静平台所在平面垂直，Y 轴方向根据右手定则。OA_i与 X 轴的夹角为$\alpha_i = (i-1) \times \frac{2}{3}\pi, i = 1,2,3$。机器人动坐标系原点建立在动平台 P 点，X'轴和PB_1重合，Z'轴与动平台所在平面垂直。

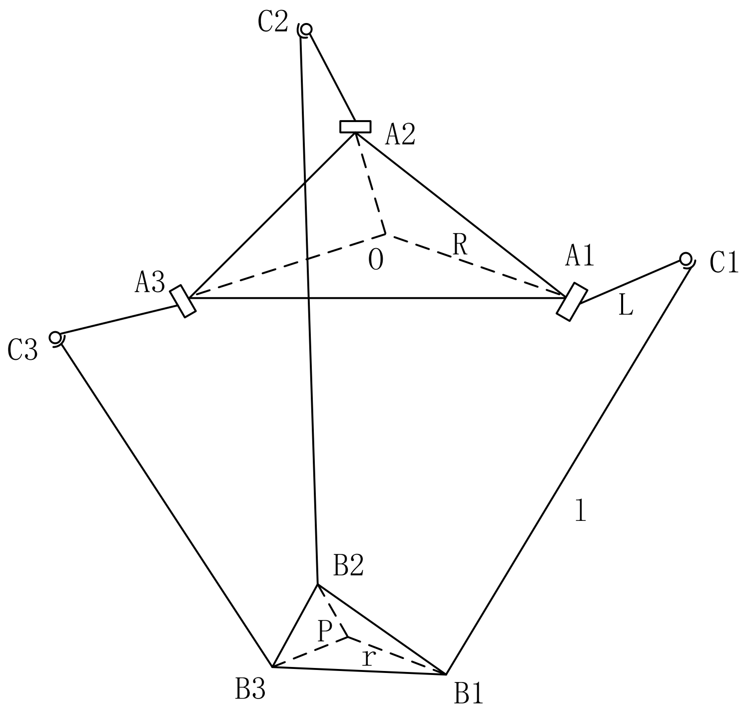

图 1 Delta 结构图

求解正解时，将每个支链沿PB_i移动 r 距离，使得C_i到达C_i'，并且B_i点和 P 点重合，由于三个主动臂的输入角度已知，可以求得C'_i点坐标。又三个从动臂等长，根据C_1', C_2', C_3', P形成的三菱锥可以求得 P 点坐标。过 P 点做 PE 垂直于C_1', C_2', C_3'所在平面。接着，过 E 点做 EF 垂直于$C_1'C_2'$。由于$PC_1' = PC_2' = PC_3'$，所以$EC_1' = EC_2' = EC_3'$，即 E 为$\Delta C_1'C_2'C_3'$的外接圆圆心，

EC_i'为外接圆半径。F 为$C_1'C_2'$的中点。

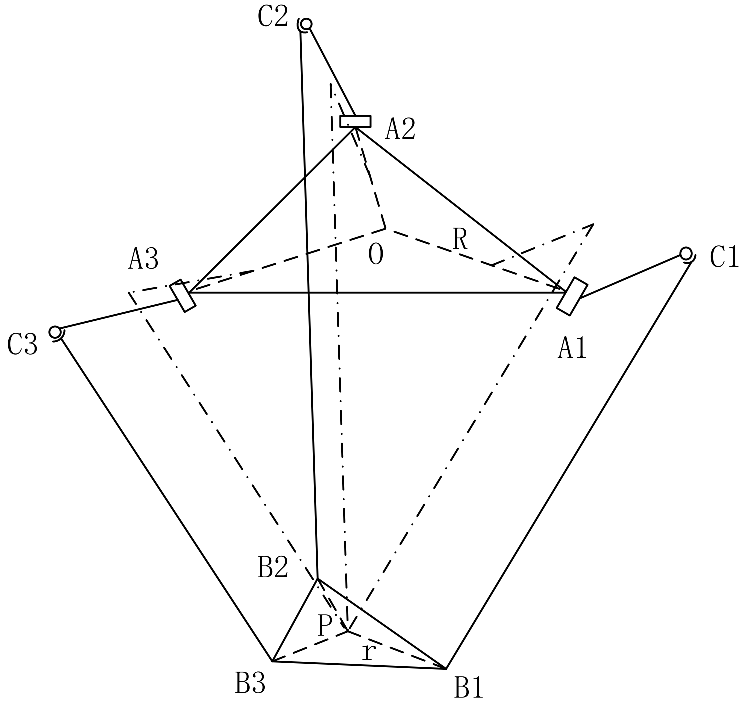

图 2 Delta 结构图

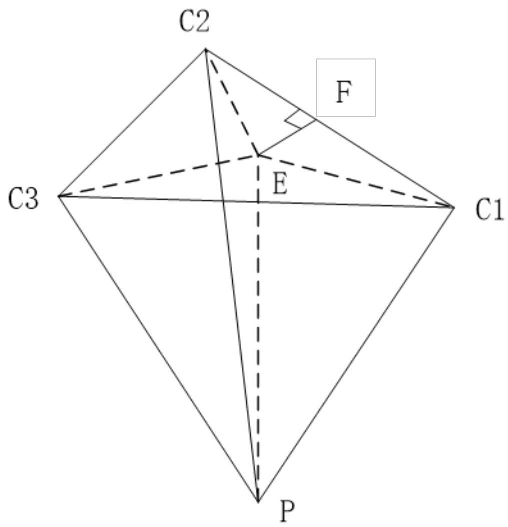

图 3 Delta 简图

首先，求得C_i'在世界坐标系中的位置

$$C_i' = \begin{bmatrix} (R - r + L\cos\theta_i)\cos(\alpha_i) \\ (R - r + L\cos\theta_i)\sin(\alpha_i) \\ -L\sin\theta_i \end{bmatrix}, i = 1,2,3$$

其次，根据海伦公式，可以求出外接圆半径

$$|\mathrm{EC'_i}| = \frac{|\mathrm{C'_1C'_2}| \cdot |\mathrm{C'_2C'_3}| \cdot |\mathrm{C'_3C'_1}|}{4\sqrt{p(p - |\mathrm{C'_1C'_2}|) \cdot (p - |\mathrm{C'_2C'_3}|) \cdot (p - |\mathrm{C'_3C'_1}|)}}$$

其中$p = (|\mathrm{C'_1C'_2}| + |\mathrm{C'_2C'_3}| + |\mathrm{C'_3C'_1}|)/2$。

接着，求出 F 点坐标

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C'_1} + \mathrm{C'_2}}{2}$$

FE 的方向向量和长度分别为：

$$\mathrm{n_{FE}} = \frac{\mathrm{C'_2C'_3} \times \mathrm{C'_3C'_1} \times \mathrm{C'_1C'_2}}{|\mathrm{C'_2C'_3} \times \mathrm{C'_3C'_1} \times \mathrm{C'_1C'_2}|}$$

$$|\mathrm{FE}| = \sqrt{|\mathrm{EC'_i}|^2 - \frac{|\mathrm{C'_1C'_2}|^2}{4}}$$

可以得到 E 点坐标

$$\mathrm{E} = |\mathrm{FE}| \cdot \mathrm{n_{FE}} + \mathrm{F}$$

EP 的方向向量和长度分别为：

$$\mathrm{n_{EP}} = \frac{-\mathrm{C'_1C'_2} \times \mathrm{C'_2C'_3}}{|\mathrm{C'_1C'_2} \times \mathrm{C'_2C'_3}|}$$

$$|\mathrm{EP}| = \sqrt{\mathrm{l}^2 - |\mathrm{EC'_i}|^2}$$

可以得到 P 点坐标为：

$$\mathrm{P} = |\mathrm{EP}| \cdot \mathrm{n_{EP}} + \mathrm{E}$$

这样就得到了 delta 机器人的正解。