Dualité et algorithme du simplexe dual

Institut Supérieur des Sciences (HIS)

Objectifs du cours

- Comprendre la notion de dualité en programmation linéaire
- Construire le problème dual d'un problème primal
- Connaître les théorèmes fondamentaux de la dualité
- Comprendre et appliquer le simplexe dual

Rappels sur la programmation linéaire

Problème de programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire (PL) s'écrit :

$$(P) \quad \max \ z = c^T x$$

sous contraintes :

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

- x : variables de décision
- A : matrice des contraintes
- b : ressources disponibles
- c : coefficients de la fonction objectif

Notion de dualité

Principe de la dualité

- À tout problème primal est associé un problème dual
- Le dual fournit des bornes sur le primal
- Les deux problèmes ont la même valeur optimale (si elle existe)

Construction du problème dual

Forme standard du primal

$$
(P) \quad \begin{array}{rl} \max & c^T x \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}
$$

Problème dual associé

$$(D) \quad \begin{array}{rl} \min & b^T y \\ \text{s.c.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Correspondance Primal – Dual

Primal	Dual
Maximisation	Minimisation
Variables x_j	Contraintes j
Contraintes i	Variables y_i
b	Fonction objectif

Exemple 1 : Construction du dual

Considérons le problème primal :

$$(P) \quad \begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemple 1 : Construction du dual

Considérons le problème primal :

$$
(P) \quad
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Le problème dual associé est :

$$
(D) \quad
\begin{aligned}
\min \quad & 4y_1 + 5y_2 \\
\text{s.c.} \quad & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1 + y_2 \geq 2 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple 2 : Primal de minimisation

Considérons :

$$
(P) \quad \begin{array}{rl}
\min & 6x_1 + 8x_2 \\
\text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& x_1 + 4x_2 \geq 16 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Exemple 2 : Primal de minimisation

Considérons :

$$(P) \quad \begin{array}{rl} \min & 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Le dual est :

$$(D) \quad \begin{array}{rl} \max & 12y_1 + 16y_2 \\ \text{s.c.} & 3y_1 + y_2 \leq 6 \\ & 2y_1 + 4y_2 \leq 8 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 3 : Interprétation économique

- Chaque variable duale y_i représente un **prix d'ombre**
- y_i mesure la valeur marginale de la ressource i
- Si une contrainte n'est pas saturée, alors $y_i = 0$

Exemple 3 : Interprétation économique

- Chaque variable duale y_i représente un **prix d'ombre**
- y_i mesure la valeur marginale de la ressource i
- Si une contrainte n'est pas saturée, alors $y_i = 0$

$$y_i(b_i - A_i x) = 0$$

Conclusion
Le dual permet d'analyser la sensibilité des solutions optimales.

Théorèmes de la dualité

Dualité faible

Pour toute solution réalisable x du primal et y du dual :

$$c^T x \leq b^T y$$

- Toute solution duale donne une borne
- Permet de vérifier des solutions

Dualité forte

Théorème
Si le primal admet une solution optimale finie, alors le dual aussi et :

$$z_P^* = z_D^*$$

Conditions de complémentarité

À l'optimalité :

$$y_i(b_i - A_i x) = 0$$

$$x_j((A^T y)_j - c_j) = 0$$

- Base théorique du simplexe dual
- Outil de vérification de l'optimalité

Exemple 4 : Dualité faible

Soient :

$$x = (1,1) \quad \text{solution réalisable du primal}$$

$$y = (1,1) \quad \text{solution réalisable du dual}$$

Exemple 4 : Dualité faible

Soient :

$$x = (1, 1) \quad \text{solution réalisable du primal}$$

$$y = (1, 1) \quad \text{solution réalisable du dual}$$

Calcul :

$$c^T x = 3(1) + 2(1) = 5$$

$$b^T y = 4(1) + 5(1) = 9$$

Exemple 4 : Dualité faible

Soient :

$$x = (1,1) \quad \text{solution réalisable du primal}$$

$$y = (1,1) \quad \text{solution réalisable du dual}$$

Calcul :

$$c^T x = 3(1) + 2(1) = 5$$

$$b^T y = 4(1) + 5(1) = 9$$

$$c^T x \leq b^T y$$

Conclusion
La dualité faible est vérifiée.

Exemple 5 : Dualité forte

Supposons :

$$x^* = (1, 3), \quad y^* = (1, 1)$$

Exemple 5 : Dualité forte

Supposons :

$$x^* = (1, 3), \quad y^* = (1, 1)$$

Valeurs optimales :

$$z_P^* = 3(1) + 2(3) = 9$$

$$z_D^* = 4(1) + 5(1) = 9$$

Exemple 5 : Dualité forte

Supposons :

$$x^* = (1, 3), \quad y^* = (1, 1)$$

Valeurs optimales :

$$z_P^* = 3(1) + 2(3) = 9$$

$$z_D^* = 4(1) + 5(1) = 9$$

Conclusion

$$z_P^* = z_D^*$$

La dualité forte est vérifiée.

Simplexe dual

Rappel : Simplexe primal

- Nécessite une solution initiale réalisable
- Améliore progressivement la fonction objectif
- Peut être difficile à initialiser

Idée du simplexe dual

- Maintient l'optimalité duale
- Corrige la non-faisabilité primale
- Alternative puissante au simplexe primal

Conditions d'application

- Coûts réduits ≥ 0 (dualement réalisable)
- Au moins un second membre négatif

Algorithme du simplexe dual

Étape 1 : variable sortante

- Choisir la ligne avec le second membre le plus négatif

Étape 2 : variable entrante

Pour la ligne i sélectionnée :

$$\min \left\{ \frac{c_j}{a_{ij}} \mid a_{ij} < 0 \right\}$$

Étape 3 : pivot

- Effectuer le pivot
- Mettre à jour le tableau

Critère d'arrêt

- Tous les seconds membres ≥ 0
- Solution optimale atteinte

Exemple sur le simplexe dual

Problème à résoudre

Considérons le tableau du simplexe suivant :

Base	x_1	x_2	s_1	b
s_1	-1	-2	1	-4
s_2	-2	-1	0	-3
z	0	0	0	0

Problème à résoudre

Considérons le tableau du simplexe suivant :

Base	x_1	x_2	s_1	b
s_1	-1	-2	1	-4
s_2	-2	-1	0	-3
z	0	0	0	0

- Coûts réduits ≥ 0 : dualement réalisable
- Seconds membres négatifs : non faisable primalement

Étape 1 : Choix de la variable sortante

- On choisit la ligne avec le second membre le plus négatif
- Ici :

$$b_{s_1} = -4, \quad b_{s_2} = -3$$

Étape 1 : Choix de la variable sortante

- On choisit la ligne avec le second membre le plus négatif
- Ici :

$$b_{s_1} = -4, \quad b_{s_2} = -3$$

Variable sortante
La variable s_1 sort de la base.

Étape 2 : Choix de la variable entrante

Pour la ligne s_1, on considère les coefficients négatifs :

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -2$$

Étape 2 : Choix de la variable entrante

Pour la ligne s_1, on considère les coefficients négatifs :

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -2$$

Le critère du simplexe dual est :

$$\min \left\{ \frac{c_j}{a_{ij}} \mid a_{ij} < 0 \right\}$$

Étape 2 : Choix de la variable entrante

Pour la ligne s_1, on considère les coefficients négatifs :

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -2$$

Le critère du simplexe dual est :

$$\min \left\{ \frac{c_j}{a_{ij}} \mid a_{ij} < 0 \right\}$$

Ici :

$$\frac{0}{-1} = 0, \quad \frac{0}{-2} = 0$$

Étape 2 : Choix de la variable entrante

Pour la ligne s_1, on considère les coefficients négatifs :

$$a_{11} = -1, \quad a_{12} = -2$$

Le critère du simplexe dual est :

$$\min \left\{ \frac{c_j}{a_{ij}} \mid a_{ij} < 0 \right\}$$

Ici :

$$\frac{0}{-1} = 0, \quad \frac{0}{-2} = 0$$

Choix
On choisit x_1 comme variable entrante.

Étape 3 : Pivot

- Élément pivot : $a_{11} = -1$
- On normalise la ligne pivot
- On élimine x_1 des autres lignes

Tableau après pivot

Après pivot, on obtient :

Base	x_1	x_2	s_1	b
x_1	1	2	-1	4
s_2	0	3	-2	5
z	0	0	0	0

Tableau après pivot

Après pivot, on obtient :

Base	x_1	x_2	s_1	b
x_1	1	2	-1	4
s_2	0	3	-2	5
z	0	0	0	0

- Tous les seconds membres sont positifs
- Faisabilité primale rétablie

Étape 4 : Condition d'arrêt

- Tous les seconds membres $b \geq 0$
- Coûts réduits ≥ 0

Étape 4 : Condition d'arrêt

- Tous les seconds membres $b \geq 0$
- Coûts réduits ≥ 0

Conclusion
La solution est optimale (primal et dual).

Solution optimale

- $x_1 = 4$, $x_2 = 0$
- Valeur optimale :

$$z^* = 0$$

Solution optimale

- $x_1 = 4$, $x_2 = 0$
- Valeur optimale :

$$z^* = 0$$

Remarque pédagogique
Le simplexe dual permet d'atteindre l'optimalité sans solution initiale réalisable.

Exemple Simplexe dual – coûts réduits positifs

Base	x_1	x_2	b
s_1	-2	-1	-6
s_2	-1	-3	-5
z	5	3	0

Exemple Simplexe dual – coûts réduits positifs

Base	x_1	x_2	b
s_1	-2	-1	-6
s_2	-1	-3	-5
z	5	3	0

- Coûts réduits : $\bar{c}_1 = 5 > 0$, $\bar{c}_2 = 3 > 0$
- Seconds membres négatifs $\rightarrow$ non faisable primalement
- Conditions du simplexe dual satisfaites

Choix de la variable sortante

$$b_{s_1} = -6, \quad b_{s_2} = -5$$

Choix de la variable sortante

$$b_{s_1} = -6, \quad b_{s_2} = -5$$

Variable sortante
s_1 sort de la base (le plus négatif).

Choix de la variable entrante

Ligne s_1 :

$$\frac{5}{-2} = -2.5, \quad \frac{3}{-1} = -3$$

Choix de la variable entrante

Ligne s_1 :

$$\frac{5}{-2} = -2.5, \quad \frac{3}{-1} = -3$$

Choix
x_2 entre (minimum).

Comparaison

Simplexe primal vs dual

Simplexe primal	Simplexe dual
Faisabilité primale	Faisabilité duale
Améliore l'objectif	Rétablit la faisabilité
Classique	Très utilisé en pratique

Conclusion

Points clés à retenir

- Tout PL possède un dual
- Dualité faible et forte
- Complémentarité = optimalité
- Simplexe dual très efficace

Merci pour votre attention

Questions ?