Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire par la Méthode du Simplexe : Méthode en deux phases / Cas particuliers du Simplexe

Institut Supérieur des Sciences (HIS)

Plan

- Points clés du cours précédent
- Questions concernant le Simplexe
- Méthode en deux phases
- Cas particuliers du Simplexe
- Infaisabilité
- Non-bornitude
- Optima alternatifs
- Dégénérescence et cycle

Méthode du simplexe : Cas particuliers

- **Infaisabilité** : se produit lorsqu'il n'existe aucune solution faisable satisfaisant toutes les contraintes.
- **Non-bornitude** : se produit lorsque la fonction objectif peut être augmentée indéfiniment sans violer aucune contrainte.
- **Optima alternatifs** : se produit lorsqu'il existe plusieurs optima globaux ayant la même valeur de la fonction objectif.
- **Dégénérescence** : se produit lorsqu'une ou plusieurs variables de base deviennent nulles au cours du processus itératif.

Cas particuliers : Infaisabilité

- Région faisable vide.
- Peut être détectée à l'aide de la méthode en deux phases.
- La fonction objectif ($\sum R_i$) de la phase 1 ne peut pas être égale à 0.

$$
\begin{aligned}
\text{Maximiser } & z = 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.c. } & x_1 + x_2 \leq 2 \\
& 2x_1 - 2x_2 \geq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cas particuliers : Non-bornitude

- Les solutions non bornées permettent des augmentations arbitraires des variables sans violer les contraintes.
- La non-bornitude peut indiquer un modèle mal construit.

$$
\begin{aligned}
\text{Maximiser } & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.c. } & x_1 - x_2 \leq 10 \\
& 2x_1 \leq 40 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cas particuliers : Non-bornitude

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c. } x_1 - x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Détection de la non-bornitude

La méthode du simplexe indique une solution non bornée lorsque toutes les valeurs des ratios sont soit infinies, soit négatives, ce qui empêche l'identification d'une variable sortante.

Base	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
z	-2	-1	0	0	0	
S_1	1	-1	1	0	10	Négatif
S_2	2	0	0	1	40	Infini

Cas particuliers : Optima alternatifs

- Un problème de programmation linéaire peut admettre une infinité d'optima alternatifs lorsque la fonction objectif est parallèle à une contrainte.
- Tout point sur cette droite de contrainte est également optimal.
- Les optima alternatifs donnent différentes solutions avec la même valeur optimale.

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c. } & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cas particuliers : Optima alternatifs

$$
\begin{aligned}
\text{Maximiser } z &= 2x_1 + 4x_2 \\
\text{s.c. } x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Cas particuliers : Optima alternatifs

Base	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	-2	-4	0	0	0
S_1	1	2	1	0	5
S_2	1	1	0	1	4

- Variable entrante : x_2
- Variable sortante : S_1
- Ligne pivot $= \frac{1}{2}$ ligne pivot
- Mise à jour des autres lignes par pivot

Cas particuliers : Optima alternatifs

- Si une variable non basique a un coefficient nul, elle peut remplacer une variable basique sans modifier la valeur de la fonction objectif.

Base	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	0	0	2	0	10
x_2	0.5	1	0.5	0	2.5
S_2	0.5	0	-0.5	1	1.5

Cas particuliers : Dégénérescence

- Des égalités peuvent apparaître dans le test du ratio minimum.
- Cela conduit à une solution dégénérée.
- La dégénérescence peut entraîner un cycle infini du simplexe.

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.c. } x_1 + 4x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cas particuliers : Dégénérescence

Base	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
z	-3	-9	0	0	0	
S_1	1	4	1	0	8	2
S_2	1	2	0	1	4	2

Cas particuliers : Dégénérescence

Base	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	0	0	1.5	1.5	18
x_2	0	1	0.5	-0.5	2
x_1	1	0	-1	2	0

Interprétation de la dégénérescence

- La dégénérescence peut indiquer une contrainte redondante.
- Les variables de base changent sans quitter le sommet.
- La valeur de la fonction objectif reste constante.

Résumé : Cas particuliers du simplexe

- Infaisabilité
- Non-bornitude
- Optima alternatifs
- Dégénérescence et cyclage

La dégénérescence peut provoquer le cyclage

- Le **cyclage** se produit lorsque l'algorithme du simplexe boucle entre plusieurs solutions sans atteindre la solution optimale, à cause de la dégénérescence.
- Cela peut conduire à une boucle infinie de l'algorithme du simplexe.
- Pour éviter le cyclage, des règles anti-cyclage, comme la **règle de Bland**, peuvent être appliquées afin d'éviter de revisiter la même solution et d'améliorer l'efficacité de l'algorithme.
- S'il existe plusieurs ratios minimaux, on choisit comme variable entrante la variable x_j ayant l'indice le plus petit.

Exemple de cyclage

$$\begin{aligned}
\text{Maximiser} \quad & z = 2.3x_1 + 2.15x_2 - 13.55x_3 - 0.4x_4 \\
\text{s.c.} \quad & 0.4x_1 + 0.2x_2 - 1.4x_3 - 0.2x_4 \leq 0 \\
& -7.8x_1 - 1.4x_2 + 7.8x_3 + 0.4x_4 \leq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Exemple de cyclage : Tableau initial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0	0	0
x_5	0.4	0.2	-1.4	-0.2	1	0	0
x_6	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0	1	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple de cyclage

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	-1	5.5	-0.75	5.75	0	0
x_1	1	0.5	-3.5	-0.5	2.5	0	0
x_6	0	2.5	-19.5	-3.5	19.5	1	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple de cyclage

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0
x_1	1	0	0.4	0.2	-1.4	-0.2	0
x_2	0	1	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple de cyclage

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	5.75	0	0	-1	5.5	-0.75	0
x_3	2.5	0	1	0.5	-3.5	-0.5	0
x_6	19.5	1	0	2.5	-19.5	-3.5	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple de cyclage

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	13.55	0.4	0	0	-2.3	-2.15	0
x_3	-1.4	-0.2	1	0	0.4	0.2	0
x_4	7.8	0.4	0	1	-7.8	-1.4	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$.

Exemple de cyclage

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	5.5	-0.75	5.75	0	0	-1	0
x_5	-3.5	-0.5	2.5	0	1	0.5	0
x_4	-19.5	-3.5	19.5	1	0	2.5	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, \ldots, 0)$.

Retour à l'état initial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0	0	0
x_5	0.4	0.2	-1.4	-0.2	1	0	0
x_4	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0	1	0

Le simplexe est revenu à son état initial.

Cyclage infini

Le simplexe va continuer à cycler indéfiniment entre ces états sans atteindre la solution optimale.

Analyse de sensibilité

- L'analyse de sensibilité (ou analyse post-optimale) étudie comment la solution optimale est affectée par des variations dans des intervalles donnés :
  - variations du second membre (RHS),
  - variations des coefficients de la fonction objectif.
- Les décideurs évoluent dans des environnements dynamiques avec des estimations imprécises.
- L'analyse de sensibilité permet de répondre à des questions de type « que se passe-t-il si ? »

Analyse de sensibilité graphique

On distingue deux cas :

1. Sensibilité de la solution optimale aux variations des ressources disponibles (second membre des contraintes).
2. Sensibilité de la solution optimale aux variations du profit unitaire ou du coût unitaire (coefficients de la fonction objectif).

Variation du second membre

- L'entreprise JOBCO fabrique deux produits sur deux machines.
- Les temps de traitement et les revenus unitaires sont :
  - Produit 1 : 2 h sur la machine 1, 1 h sur la machine 2, revenu 30$ par unité.
  - Produit 2 : 1 h sur la machine 1, 3 h sur la machine 2, revenu 20$ par unité.
- Le temps total disponible sur chaque machine est de 8 heures par jour.
- x_1 et x_2 représentent les quantités journalières produites.

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 30x_1 + 20x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Changements du second membre (RHS)

- JOBCO fabrique deux produits sur deux machines.
- Les temps de traitement et les revenus unitaires sont :
  - Produit 1 : 2 h sur la machine 1, 1 h sur la machine 2, 30$ par unité.
  - Produit 2 : 1 h sur la machine 1, 3 h sur la machine 2, 20$ par unité.
- Le temps total disponible par jour pour chaque machine est de 8 h.
- x_1 et x_2 représentent le nombre quotidien d'unités produites.

$$\max z = 30x_1 + 20x_2$$

s.c.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Changements du second membre (RHS)

- Augmenter la capacité de la machine 1 de 8 à 9 heures déplace la solution optimale vers le point G.
- Taux de variation du revenu :

$$\frac{z_G - z_C}{9 - 8}$$

- $\frac{142-128}{1} = 14$ $/heure
- Le point G doit rester entre B et F.
- Le prix dual de la capacité de la machine 2 est de 2 $/heure.

Prix duaux

- Le prix dual est le taux de variation de la fonction objectif par unité de variation d'une ressource.
- Les termes « prix dual » ou « prix de l'ombre » sont standards en programmation linéaire.
- Le prix dual de 14 $/heure reste valide tant que la contrainte de la machine 1 se déplace parallèlement entre B et F.
- Ce prix n'est valide que dans l'intervalle de faisabilité :

$$2{,}67 \leq \text{capacité machine } 1 \leq 16$$

- En dehors de cet intervalle, le prix dual change.

Questions sur les changements du RHS

- **Question 1 :** Si JOBCO peut augmenter la capacité des deux machines, laquelle doit être prioritaire ?
- **Réponse :** La machine 1, car chaque heure supplémentaire génère 14 $ contre seulement 2 $ pour la machine 2.
- **Question 2 :** Augmenter les capacités coûte 10 $/heure par machine. Est-ce rentable ?
- **Réponse :** Seule la machine 1 est rentable :

$$14 - 10 = 4 \text{ \$} \quad \text{contre} \quad 2 - 10 = -8 \text{ \$}$$

Questions sur les changements du RHS

- **Question 3 :** Si la capacité de la machine 1 passe de 8 à 13 h, quel est l'impact ?
- **Réponse :** L'augmentation est dans l'intervalle de faisabilité :

$$14(13 - 8) = 70 \text{ \$}$$

  Le revenu passe de 128 \$ à 198 \$.
- **Question 4 :** Et si la capacité passe à 20 h ?
- **Réponse :** Cette valeur est hors de l'intervalle de faisabilité, une nouvelle analyse est nécessaire.

Changement des coefficients de la fonction objectif

- Maximiser :

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

- Étudier l'effet des variations de c_1 et c_2.
- Les changements des coefficients modifient la pente des droites d'iso-profit.
- La solution optimale en C reste valable si la pente reste entre BF et DE.
- Intervalle d'optimalité :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

Questions sur les coefficients objectifs

- **Question 1 :** Si $c_1 = 35$ et $c_2 = 25$, l'optimum change-t-il ?
- **Réponse :** Non, car :

$$\frac{35}{25} = 1{,}4 \in \left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

- **Question 2 :** Si $c_2 = 20$, quel est l'intervalle de c_1 ?
- **Réponse :**

$$20 \times \frac{1}{3} \leq c_1 \leq 2 \times 20$$

Conclusion

- La méthode en deux phases permet de trouver une solution réalisable initiale pour le Simplex.
- Le Simplex présente des cas particuliers : dégénérescence, non-bornitude, infaisabilité.
- Le cyclage peut apparaître en cas de dégénérescence et doit être contrôlé.
- L'analyse de sensibilité graphique est un outil efficace pour étudier l'impact des paramètres en dimension 2.