Analyse de sensibilité algébrique

Institut Supérieur des Sciences (HIS)

Introduction

Objectif : Étudier comment la solution optimale change lorsque l'on modifie :

- Les coefficients de la fonction objectif
- Les ressources (seconds membres)
- Les coefficients technologiques (matrice A)

Introduction

Objectif : Étudier comment la solution optimale change lorsque l'on modifie :

- Les coefficients de la fonction objectif
- Les ressources (seconds membres)
- Les coefficients technologiques (matrice A)

Avantage : On peut éviter de refaire tout le simplexe à chaque modification.

Exemple de base (primal)

Considérons le PL :

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ajouter des variables d'écart s_1, s_2 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \end{cases}$$

Solution initiale (simplexe) : base (s_1, s_2)

Tableau initial du simplexe

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	1	2	1	0	8
s_2	2	1	0	1	8
z	-3	-5	0	0	0

Tableau initial du simplexe

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
s_1	1	2	1	0	8
s_2	2	1	0	1	8
z	-3	-5	0	0	0

Critère de pivot : choisir x_2 (coefficient le plus négatif dans z).

Pivot : x_2 entre, s_1 sort

Ratio test :

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{8}{1} = 8$$

Pivot : x_2 entre, s_1 sort

Ratio test :

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{8}{1} = 8$$

$4 < 8 \Rightarrow s_1$ sort.

Pivot : x_2 entre, s_1 sort

Ratio test :

$$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{8}{2} = 4, \quad \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{8}{1} = 8$$

$4 < 8 \Rightarrow s_1$ sort.

Nouvelle base : (x_2, s_2)

Tableau après premier pivot

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	0.5	1	0.5	0	4
s_2	1.5	0	-0.5	1	4
z	-0.5	0	2.5	0	20

Solution optimale trouvée après deuxième pivot :

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	b
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{64}{3}$

Solution optimale :

$$x_1 = \frac{8}{3}, \quad x_2 = \frac{8}{3}, \quad z = \frac{64}{3}$$

Analyse de sensibilité : augmentation de b_1

Supposons que l'on augmente b_1 de 1 : $b_1' = 9$

Analyse de sensibilité : augmentation de b_1

Supposons que l'on augmente b_1 de 1 : $b_1' = 9$

On vérifie faisabilité avec $x_B = B^{-1}b$:

$$\mathbf{x}_B' = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \frac{8}{3} + (\frac{-1}{3}) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Analyse de sensibilité : augmentation de b_1

Supposons que l'on augmente b_1 de 1 : $b_1' = 9$

On vérifie faisabilité avec $x_B = B^{-1}b$:

$$\mathbf{x}_B' = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \frac{8}{3} + (\frac{-1}{3}) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Tout reste positif Base reste optimale

Impact sur z
z augmente : $\Delta z = y_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Analyse de sensibilité : diminution de b_2

Supposons que b_2 diminue de 2 : $b_2' = 6$

Analyse de sensibilité : diminution de b_2

Supposons que b_2 diminue de 2 : $b'_2 = 6$

Nouvelle solution de base :

$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{-1}{3} \cdot -2 \\ \frac{8}{3} + (\frac{2}{3}) \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Analyse de sensibilité : diminution de b_2

Supposons que b_2 diminue de 2 : $b_2' = 6$

Nouvelle solution de base :

$$\mathbf{x}_B' = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{-1}{3} \cdot -2 \\ \frac{8}{3} + (\frac{2}{3}) \cdot -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Base toujours faisable, z modifié :

$$z' = z + y_2 \cdot \Delta b_2 = \frac{64}{3} + \frac{7}{3} \cdot (-2) = \frac{50}{3}$$

Conclusion
Variation locale de b_i => impact direct via variables duales

Exemple simple : PL

Problème :

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

Contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Variables d'écart : s_1, s_2

Tableau final du simplexe

Après pivot, tableau final :

Base	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
x_2	0	1	1	-1	2
x_1	1	0	0	1	2
Z	0	0	2	1	10

- Solution optimale : $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $Z = 10$
- Base : x_1, x_2, Non-base : s_1, s_2

Étudier une variation de c_1 dans Z

Supposons qu'on augmente c_1 de $2 \to 3$.

- Vérification de l'optimalité :
  - Z row coefficients pour les non-base : $s_1 = 2$, $s_2 = 1$
  - Condition pour maximisation : tous 0
- Ici : $2 > 0$ et $1 > 0 \to$ la base n'est plus optimale $\to$ pivot nécessaire
- Si changement plus petit respectait les coefficients $0 \to$ base reste optimale

Calcul du nouveau Z si base reste optimale :

$$Z_{\text{new}} = Z_{\text{old}} + \Delta c_1 \cdot x_1 + \Delta c_2 \cdot x_2$$

Méthode du tableau pour étudier l'optimalité

1. **Résoudre le PL avec le simplexe** : obtenir le tableau final
2. **Identifier base et non-base** : base = solution actuelle, non-base = variables à vérifier
3. **Modifier le coefficient dans Z** : augmenter/diminuer c_i
4. **Vérifier l'optimalité** :
   - Pour maximisation : tous les coefficients Z des non-base 0 $\rightarrow$ base reste optimale
   - Si un coefficient $> 0 \rightarrow$ pivot nécessaire
5. **Calculer le nouveau Z si base optimale** :
   $Z_{\text{new}} = Z_{\text{old}} + \sum \Delta c_i \cdot x_i^{\text{basic}}$

Résumé pédagogique

- L'analyse de sensibilité se fait à partir du tableau du simplexe
- Les variations locales de b utilisent les **variables duales** (y_i)
- Les variations de c_j utilisent les **coûts réduits** ($\bar{c}_j$)
- Les variations de A peuvent nécessiter un recalcul complet
- On distingue :
  - Augmentation de ressource   effet positif sur z
  - Diminution de ressource   effet négatif sur z
  - Augmentation d'un coût   possibilité d'entrée dans la base

Conclusion

- L'analyse de sensibilité permet de prévoir l'impact des changements
- On peut agir sans relancer le simplexe complet
- Outil essentiel pour les décisions en optimisation linéaire

Rang d'optimalité et rang de faisabilité

Objectif : déterminer l'intervalle dans lequel on peut modifier un paramètre sans changer la base optimale.

- **Rang d'optimalité** : variation maximale d'un coefficient objectif c_j pour que la base reste optimale.
- **Rang de faisabilité** : variation maximale d'un second membre b_i pour que la base reste faisable.

Rang d'optimalité et rang de faisabilité

Objectif : déterminer l'intervalle dans lequel on peut modifier un paramètre sans changer la base optimale.

- **Rang d'optimalité** : variation maximale d'un coefficient objectif c_j pour que la base reste optimale.
- **Rang de faisabilité** : variation maximale d'un second membre b_i pour que la base reste faisable.

Idée : Utiliser le tableau du simplexe pour calculer ces intervalles.

Rang de faisabilité : théorie

Soit $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ la solution de base.

- On modifie b_i : $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{e}_i$
- Nouvelle solution :

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \Delta B^{-1}\mathbf{e}_i$$

- Base reste faisable si $\mathbf{x}'_B \geq 0$

Rang de faisabilité : théorie

Soit $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ la solution de base.

- On modifie b_i : $\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{e}_i$
- Nouvelle solution :
$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \Delta B^{-1}\mathbf{e}_i$$
- Base reste faisable si $\mathbf{x}'_B \geq 0$

Calcul du rang de faisabilité

$$\Delta_{\text{min}} = \max\{-x_{B_k}/(B^{-1}\mathbf{e}_i)_k \mid (B^{-1}\mathbf{e}_i)_k < 0\}$$

$$\Delta_{\text{max}} = \min\{-x_{B_k}/(B^{-1}\mathbf{e}_i)_k \mid (B^{-1}\mathbf{e}_i)_k > 0\}$$

Exemple : rang de faisabilité

Tableau final du simplexe : solution de base (x_2, s_2)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple : rang de faisabilité

Tableau final du simplexe : solution de base (x_2, s_2)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut augmenter b_1 de Δ :

$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 0.5\Delta \\ 4 - 0.5\Delta \end{pmatrix}$$

Exemple : rang de faisabilité

Tableau final du simplexe : solution de base (x_2, s_2)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut augmenter b_1 de Δ :

$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 0.5\Delta \\ 4 - 0.5\Delta \end{pmatrix}$$

Condition faisabilité :

$$4 + 0.5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -8$$

$$4 - 0.5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 8$$

Exemple : rang de faisabilité

Tableau final du simplexe : solution de base (x_2, s_2)

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut augmenter b_1 de Δ :

$$\mathbf{x}'_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 0.5\Delta \\ 4 - 0.5\Delta \end{pmatrix}$$

Condition faisabilité :

$$4 + 0.5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -8$$

$$4 - 0.5\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 8$$

Rang de faisabilité :
$\Delta \in [-8, 8]$

Rang d'optimalité : théorie

Pour un coefficient objectif c_j :

- On modifie c_j : $c'_j = c_j + \Delta$
- Coûts réduits : $\bar{c}'_N = \bar{c}_N - \Delta(B^{-1}A_j)_N$
- La base reste optimale tant que :

$$\bar{c}'_N \leq 0 \quad \text{(maximisation)}$$

Rang d'optimalité : théorie

Pour un coefficient objectif c_j :

- On modifie c_j : $c'_j = c_j + \Delta$
- Coûts réduits : $\bar{c}'_N = \bar{c}_N - \Delta(B^{-1}A_j)_N$
- La base reste optimale tant que :

$$\bar{c}'_N \leq 0 \quad \text{(maximisation)}$$

Rang d'optimalité

$$\Delta_{\min} = \max\{\Delta \mid \bar{c}'_N \leq 0 \text{ pour toutes les variables hors base}\}$$

$$\Delta_{\max} = \min\{\Delta \mid \bar{c}'_N \leq 0 \text{ pour toutes les variables hors base}\}$$

Exemple : rang d'optimalité

Solution optimale actuelle : $x_B = (x_2, s_2)$

Coûts réduits hors base : $\bar{c}_1 = -0.5$

Supposons $B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

Exemple : rang d'optimalité

Solution optimale actuelle : $x_B = (x_2, s_2)$

Coûts réduits hors base : $\bar{c}_1 = -0.5$

Supposons $B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

$$\bar{c}_1' = \bar{c}_1 - \Delta(B^{-1}A_1)_1 = -0.5 - 0.5\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1$$

$$\bar{c}_1' = \bar{c}_1 - \Delta(B^{-1}A_1)_2 = -0.5 - (-0.5)\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq -1$$

Exemple : rang d'optimalité

Solution optimale actuelle : $x_B = (x_2, s_2)$

Coûts réduits hors base : $\bar{c}_1 = -0.5$

Supposons $B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

$$\bar{c}_1' = \bar{c}_1 - \Delta(B^{-1}A_1)_1 = -0.5 - 0.5\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1$$

$$\bar{c}_1' = \bar{c}_1 - \Delta(B^{-1}A_1)_2 = -0.5 - (-0.5)\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq -1$$

Rang d'optimalité :
$\Delta \in [-1, -1]$ (intervalle exact pour lequel la base reste optimale)

Résumé : Rang de faisabilité vs Rang d'optimalité

- **Rang de faisabilité :** variation maximale des ressources b_i sans rendre la base non faisable
- **Rang d'optimalité :** variation maximale d'un coefficient c_j sans changer la base optimale
- Les deux se calculent directement à partir du tableau du simplexe
- Permettent de prendre des décisions sur la stabilité de la solution

Conclusion

- L'analyse de sensibilité basée sur le simplexe est très pratique
- Rang de faisabilité et rang d'optimalité donnent des intervalles sûrs pour les variations
- Ces concepts sont essentiels pour la prise de décision dans des environnements variables
- La dualité et les coûts réduits restent au cœur de l'analyse