

Programmation Linéaire

Semaine 2 — Formulation générale d'un problème linéaire / Méthode graphique (cas à deux variables)

Institut Supérieur des Sciences (HIS)

I. Qu'est-ce que la programmation linéaire ?

- La programmation linéaire est une technique de modélisation mathématique qui permet d'analyser et de résoudre des problèmes d'optimisation appelés **programmes linéaires**. Ces derniers consistent à optimiser (maximiser ou minimiser) une **fonction objectif** (appelée aussi *fonction de coût* ou *fonction économique*) linéaire de n **variables de décision** soumises à un ensemble de **contraintes** formulées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires exprimées avec les n variables de décision.
- Elle traite de manière générale d'un problème d'allocation de ressources limitées parmi des activités concurrentes et ce d'une façon optimale.
- Elle emploie un modèle mathématique qui décrit le problème réel.
- L'adjectif *linéaire* indique que toutes les fonctions mathématiques de ce modèle sont linéaires tandis que le terme *programmation* signifie essentiellement planification.

I.1. Hypothèses

Un programme linéaire (PL) est un modèle d'optimisation avec contraintes vérifiant les conditions suivantes :

- ❶ Les variables de décision doivent être continues (i.e. $x_i \in \mathbb{R}$) ; elles peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle restreint.
- ❷ La fonction objectif doit être une fonction linéaire.
- ❸ Les côtés gauches des contraintes doivent être des expressions linéaires.

Ainsi, un PL s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Maximiser (ou Minimiser)} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sous contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

1.2. Énoncé d'un problème d'optimisation

Une entreprise fabrique deux produits **A** et **B**, en utilisant une machine m et deux matières premières p et q . On dispose chaque jour de 8 heures de m , de 10 kg de p et de 36 kg de q . On suppose que :

- la production d'une unité de **A** nécessite 2 kg de p et 9 kg de q , et utilise la machine m durant 1 heure ;
- la production d'une unité de **B** nécessite 2 kg de p et 4 kg de q , et utilise la machine m durant 2 heures ;
- les profits réalisés sont de 50 DA par unité de **A** et 60 DA par unité de **B**.

L'objectif que poursuit l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces deux produits en utilisant au mieux ses ressources.

Le tableau suivant résume les données afférentes à ce problème de production :

	A	B	Disponible
m	1 h	2 h	8 h
p	2 kg	2 kg	10 kg
q	9 kg	4 kg	36 kg
Profit Unitaire	50 DA	60 DA	

I.3. Construction d'un modèle linéaire

Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu ? Il suffit de connaître la quantité du produit **A** et la quantité du produit **B** à fabriquer quotidiennement, n'est-ce pas ?

Agissons comme si ces quantités étaient connues et désignons-les par :

x_1 = la quantité du produit A à produire

x_2 = la quantité du produit B à produire

Les variables x_1 et x_2 sont dites **variables de décision**.

Quel profit l'entreprise retirera-t-elle de la vente de ces deux produits ? Il s'agit d'additionner les bénéfices à tirer de chacun des deux produits : Pour le produit **A**, elle réalise 50 DA par unité et en fabrique x_1 unités ; cette production lui rapporte donc un profit de $(50x_1)$ DA.

De même, la quantité x_2 du produit **B** lui permet de faire un profit de $(60x_2)$ DA.

Le profit total des deux produits s'élève donc à :

$$(50x_1 + 60x_2) \text{ DA}$$

Nous dénoterons ce profit total par z et laisserons implicite l'unité monétaire :

$$z = 50x_1 + 60x_2$$

Nous cherchons évidemment à rendre z aussi grand que possible en donnant à x_1 et x_2 des valeurs appropriées.

I.3.1 Fonction objectif

La grandeur z est une fonction qui, à chaque plan de production (une quantité de A, une quantité de B), associe le nombre de dirhams que l'entreprise retirera comme profit si elle adoptait ce plan. Cette fonction z , qui traduit l'objectif de notre problème, s'appelle **fonction objectif** ou **fonction économique**.

Et, comme nous cherchons à rendre z aussi grand que possible, nous écrivons :

$$\text{Maximiser } z \text{ où } z = 50x_1 + 60x_2$$

ce que généralement l'on convient d'abrégé comme suit :

$$\text{Max } z = 50x_1 + 60x_2$$

I.3.II. Contraintes

S'il ne s'agissait pour l'entreprise que de maximiser z , il suffirait de laisser augmenter x_1 ou x_2 pour que z prenne une valeur aussi grande qu'elle le souhaite. Mais s'attendre à de tels profits s'apparente plus au rêve qu'à la situation de notre entreprise. Il y a bien sûr des empêchements naturels, appelés **contraintes**, qui freinent le rêve d'un profit infini. Prenons en considération tour à tour chacune des contraintes.

Contrainte relative à la machine m

Le temps d'utilisation de la machine m pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 8 heures disponibles :

$$1x_1 + 2x_2 \leq 8$$

Temps d'utilisation de la machine

Or, ce temps utilisé est la somme des heures consacrées à chacun des types de produits.

Pour le produit A, le temps nécessaire à la fabrication de la quantité x_1 se calcule ainsi :

$$1 \text{ heure/unité de A} \times x_1 \text{ (unités de A)} = x_1 \text{ heures}$$

Pour le produit B, on procède de façon analogue :

$$2 \text{ heures/unité de B} \times x_2 \text{ (unités de B)} = 2x_2 \text{ heures}$$

La contrainte relative à la machine m s'écrit donc :

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

On emploie le signe « \leq », et non « $=$ », car il n'est pas obligatoire que toutes les heures disponibles soient utilisées pour la fabrication des produits A et B, bien qu'il ne soit pas interdit qu'elles le soient.

En s'inspirant de la contrainte relative à la machine, ces contraintes s'écrivent tout naturellement :

$$2x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (p)$$

$$9x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (q)$$

Contraintes de positivité

Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables) :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modèle linéaire complet

Le modèle formulé sous forme d'un programme linéaire se résume ainsi :

$$\text{Max } z = 50x_1 + 60x_2$$

sujet à :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

I.4. Les différentes formes d'écriture d'un programme linéaire

I.4.1 Forme générale

Le modèle mathématique général représentant un programme linéaire est décrit ainsi :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser (ou Minimiser)} & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{Sujet à} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i, & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} 0, & j = 1, \dots, n \end{array} \right. \end{array}$$

où les constantes c_j , a_{ij} et b_i sont des nombres réels.

Signification des éléments du modèle

Les éléments de ce modèle ont la signification suivante :

- z : la valeur de la fonction objective.
- x_j : les variables de décision (inconnues à déterminer).
- c_j : les coefficients des variables de la fonction objective.
- a_{ij} : les coefficients des variables des contraintes fonctionnelles.
- b_i : les seconds membres des contraintes (quantités de ressources disponibles).

- La notation $\begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix}$ signifie que chaque contrainte possède l'un des trois signes mentionnés.
- Il y a m contraintes fonctionnelles, n variables de décision et donc n contraintes de signe.

L'optimisation de ce modèle consiste à déterminer les valeurs des variables de décision qui maximisent (ou minimisent) la fonction objective, tout en respectant les contraintes fonctionnelles et les contraintes de signe.

I.4.2 Forme canonique

Maximisation

$$\text{Maximiser } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujet à :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \forall j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

I.4.3 Forme canonique

Minimisation

$$\text{Minimiser } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sujet à :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & \forall i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0, & \forall j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

- La **forme canonique** est utilisée en **théorie de dualité** et pour la **résolution graphique**.
- Dans la théorie mathématique de l'optimisation, la **dualité** ou le **principe de dualité** est le principe selon lequel les problèmes d'optimisation peuvent être considérés sous l'un ou l'autre de deux points de vue, le **problème primal** ou le **problème dual**. Si le primal est un problème de minimisation alors le dual est un problème de maximisation (et vice versa).

- Le passage de la forme de type I vers le type II est effectué comme suit :
 - La maximisation d'une fonction objective est équivalente à minimiser la fonction objective opposée et à multiplier par -1 la valeur de la fonction-objectif trouvée par la minimisation, i.e.,

$$\text{Maximiser}(z) = -\text{Minimiser}(-z)$$

- Chaque **contrainte fonctionnelle** de sens \leq est convertie en contrainte de sens \geq en multipliant par -1 ces deux membres.

Exemple de Conversion (Type I \rightarrow Type II)

PL en Forme Canonique Type I

Maximiser $z = 50x_1 - 20x_2 - 5x_3$

Sujet à :

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 15$$

$$-2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



PL en Forme Canonique Type II

—Minimiser $z = -50x_1 + 20x_2 + 5x_3$

Sujet à :

$$-x_1 - x_2 + x_3 \geq -15$$

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Équivalence Minimisation/Maximisation

- La **minimisation** d'une fonction objective est équivalente à **maximiser** la fonction objective opposée et à multiplier par -1 la valeur de la fonction-objectif trouvée par la maximisation, i.e.,

$$\text{Minimiser}(z) = -\text{Maximiser}(-z)$$

- Chaque **contrainte fonctionnelle** de sens \leq est convertie en contrainte de sens \geq en multipliant par -1 ces deux membres.

Exemple de Conversion (Type II \rightarrow Type I)

PL en Forme Canonique Type II

Minimiser $z = x_1 - x_2 - x_3$

Sujet à :

$$5x_1 + x_2 + x_3 \geq 30$$

$$0.5x_1 - x_2 - x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$



PL en Forme Canonique Type I

—Maximiser $z = -x_1 + x_2 + x_3$

Sujet à :

$$-5x_1 - x_2 - x_3 \leq -30$$

$$-0.5x_1 + x_2 + x_3 \leq -5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4.4. Passage de la forme générale à la forme canonique i

- Le passage d'un PL de forme générale en un PL sous forme canonique est effectué en respectant les règles suivantes :

* **Pour le type I :**

- Les contraintes fonctionnelles de sens \geq sont ramenées à la forme \leq en multipliant par -1 les deux membres de la contrainte ;
- Les contraintes fonctionnelles qui sont des égalités sont transformées en inégalités de sens \leq par dédoublement de ces contraintes en appliquant la formule d'équivalence suivante :

4.4. Passage de la forme générale à la forme canonique ii

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \end{cases} \iff \begin{cases} -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \end{cases}$$

* Pour le type II :

- Les contraintes fonctionnelles de sens \leq sont ramenées à la forme \geq en multipliant par -1 les deux membres de la contrainte ;
- Les contraintes fonctionnelles qui sont des égalités sont transformées en inégalités de sens \geq par dédoublement de ces contraintes en appliquant la formule d'équivalence suivante :

4.4. Passage de la forme générale à la forme canonique iii

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq -b_i \end{cases}$$

- 1 Toute variable x_j négative ou nulle, i.e. $x_j \leq 0$, sera remplacée par une variable x_j^+ tel que $x_j = -x_j^+$;
- 2 Toute variable x_j qui n'est soumise à aucune condition de signe ($x_j \in \mathbb{R}$) sera remplacée par deux variables non négative x_j^+ et x_j^- tel que $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec $x_j^+, x_j^- \geq 0$.

Exemple 1 : Passage de la forme générale à la forme canonique I

PL en Forme Générale

Maximiser $z = x_1 - x_2 - x_3$

Sujet à :

$$5x_1 + x_2 + x_3 \geq 30$$

$$4x_1 - x_2 - x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$



PL en Forme Canonique Type I

Maximiser $z = x_1 + x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-)$

Sujet à :

$$-5x_1 + x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-) \leq -30$$

$$4x_1 + x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-) \leq 5$$

$$-4x_1 - x_2^+ + (x_3^+ - x_3^-) \leq -5$$

$$x_1 + -x_2^+ - (x_3^+ - x_3^-) \leq 10$$

$$x_1, x_2^+, x_3^+, x_3^- \geq 0$$

Exemple 2 : Passage de la forme générale à la forme canonique II

PL en Forme Générale

Minimiser $z = 7x_1 + x_2 + 10x_3$

Sujet à :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 255$$

$$25x_1 - x_2 + x_3 \geq 100$$

$$x_1 \leq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \in \mathbb{R}$$



PL en Forme Canonique Type II

Minimiser $z = -7x_1^+ + x_2 + 10(x_3^+ - x_3^-)$

Sujet à :

$$x_1^+ - x_2 - (x_3^+ - x_3^-) \geq -200$$

$$-5x_1^+ - 3x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \geq 255$$

$$5x_1^+ + 3x_2 - (x_3^+ - x_3^-) \geq -255$$

$$-25x_1^+ - x_2 + (x_3^+ - x_3^-) \geq 100$$

$$x_1^+, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0$$

II. Les étapes de la modélisation d'un problème d'optimisation sous forme d'un programme linéaire

La formulation du modèle est l'aspect le plus important et le plus difficile de la résolution d'un problème d'optimisation réel. Résoudre un modèle qui ne représente pas précisément le problème réel est inutile. Donc, il est impérativement nécessaire de bien analyser et comprendre préalablement la situation (problème) d'optimisation et de s'assurer qu'elle se prête à l'utilisation de la programmation linéaire comme modèle d'optimisation.

Il n'existe pas de méthode simple pour formuler un problème d'optimisation sous forme de programmes linéaires. Néanmoins, cette tâche peut être simplifiée en suivant les étapes suivantes :

1. Identifier et définir les variables de décision pour le problème

Définissez les variables de manière complète et précise. Toutes les unités de mesure doivent être indiquées explicitement, y compris les unités de temps si nécessaire. Par exemple, si les variables représentent les quantités d'un produit fabriqué, elles doivent être définies en termes de tonnes par heure, d'unités par jour, de barils par mois ou d'autres unités appropriées.

2. Définir la fonction objectif

Déterminer le critère d'évaluation des solutions alternatives. La fonction objectif sera normalement la somme de termes constitués d'une variable multipliée par un coefficient (paramètre) approprié. Par exemple, les coefficients peuvent être le bénéfice par unité de production, la distance parcourue par unité transportée ou le coût par personne embauchée.

3. Identifier et exprimer mathématiquement toutes les contraintes pertinentes

Il est souvent plus facile d'exprimer chaque contrainte en mots avant de la mettre sous forme mathématique. La contrainte écrite est décomposée en ses composants fondamentaux. Il faut ensuite substituer les coefficients numériques et les noms de variables appropriés aux termes écrits. Une erreur courante consiste à utiliser des variables qui n'ont pas été définies dans le problème, ce qui n'est pas valable.

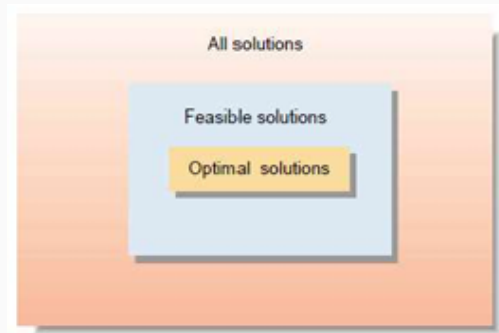
Cette erreur est souvent due au fait que l'on ne définit pas précisément les variables d'origine. Le processus de formulation est itératif, et il faut parfois définir des variables supplémentaires ou redéfinir les variables existantes. Par exemple, si l'une des variables est la production totale de l'entreprise et que cinq autres variables représentent la production des cinq usines de l'entreprise, il doit exister une constante qui oblige la production totale à être égale à la somme de la production des usines.

II.1. Solution réalisable et solution optimale

Définitions

- **Une solution (Solution)** pour un programme linéaire est un ensemble quelconque de valeurs numériques pour les variables de décision. Ces valeurs ne doivent pas nécessairement être les meilleures, ni même satisfaire les contraintes ou avoir un sens.
- **Une solution réalisable (Feasible solution)** est une solution qui satisfait à toutes les contraintes.
- **L'ensemble réalisable (Feasible set)** ou la région réalisable est l'ensemble de toutes les solutions réalisables.

- **Une solution optimale (Optimal solution)** est la solution réalisable qui produit la meilleure valeur possible de la fonction objectif. La figure 7.2 illustre les relations entre ces types de solutions.
- **La solution d'un PL** dépend de la région des solutions réalisables (vide, bornée ou non bornée) et le type d'optimisation (maximisation ou minimisation), la solution optimale du programme linéaire correspondant soit unique, multiple, infinie ou pas de solution.



Le nombre de solutions réalisables d'un PL est soit **0**, soit **1**, soit une **infinité**. Il en va de même du nombre de solutions optimales d'un PL qui est soit 0, soit 1, soit une infinité. Donc, un PL peut se trouver dans une des trois situations mutuellement exclusives :

- Il n'a aucune solution réalisable. Par exemple, le PL suivant n'en a pas :

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z = x_1 + 4x_2 \\ \text{Sujet à:} \\ x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

puisque l'on ne peut avoir $0 \leq x_1 + x_2 = -2$.

Il n'a pas de solution optimale car la fonction objectif n'est pas majorée sur R . Par exemple, le PL :

$$\begin{array}{l} \text{Max } Z = x_1 \\ \text{Sujet à:} \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

possède une famille infinie de solutions réalisables $(\alpha + 2, \alpha)$ pour $\alpha \geq 0$, mais la valeur de la fonction objectif $x_1 = \alpha + 2$ n'a pas de majorant car elle tend vers l'infini en faisant tendre α vers l'infini.

Il a une (ou des) solution(s) optimale(s). Par exemple :

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2 +$$

Sujet à:

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Il est facile de voir que la solution optimale est $x_1^* = 2, x_2^* = 0$.

III. La résolution Graphique des Problèmes Linéaires

Il existe diverses techniques de résolution parmi lesquelles la méthode graphique (géométrique) se montre à l'évidence la plus rapide et la plus simple mais aussi la plus limitée, car dès lors que le nombre de variables de décision ou de contraintes dépasse 2, elle devient impraticable. C'est pourquoi divers chercheurs se sont efforcés de mettre au point une méthode de calcul algorithmique qui permet de détecter la solution optimale (si elle existe) quel que soit le nombre des variables et des contraintes.

La compréhension des principes de résolution graphique est une aide précieuse pour, en amont, analyser et formaliser le problème et pour, en aval, interpréter et exploiter la solution obtenue. Également, la démarche algorithmique présente en elle même un intérêt formateur non négligeable.

1. Exemple de représentation graphique d'un PL

Pour illustrer la géométrie des programmes linéaires et indiquer comment les problèmes à deux variables peuvent être résolus graphiquement, considérons le PL suivant :

Maximiser $= 0.65M + 0.45Y$

Sujet à:

$$2M + 3Y \leq 400\,000$$

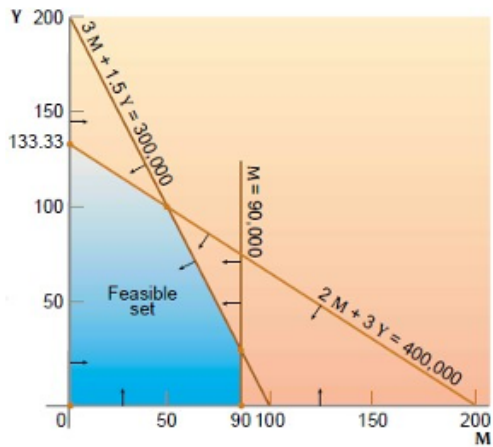
$$3M + 1.5Y \leq 300\,000$$

$$M \leq 90\,000$$

$$M, Y \geq 0$$

où **M** et **Y** représente, respectivement, la quantité produite et vendue par mois du produit X et produit Y.

Supposons que nous construisions un système de coordonnées avec M mesuré sur l'axe horizontal et Y mesuré sur l'axe vertical, comme le montre la figure suivante. Chaque point du plan M, Y correspond à une combinaison de produits ou à un plan de production. Les valeurs des coordonnées de chaque point représentent des valeurs concevables, mais pas nécessairement physiquement possibles, pour les variables. De plus, chaque combinaison possible de produits est représentée par un point dans le plan M, Y . La meilleure solution est le point qui rend la fonction objectif aussi grande que possible tout en satisfaisant toutes les contraintes.

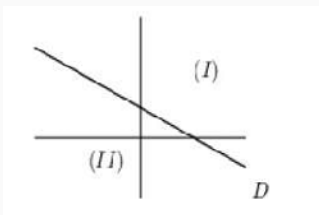


2. Régionnement du plan

Le régionnement du plan revient à étudier le signe de $ax + by + c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si on considère la droite D dont une équation est $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, cette droite partage le plan en deux demi-plans (I) et (II) de frontière D :

- Pour tout point $M(x, y)$ situé sur D , on a $ax + by + c = 0$.
- Pour tous les points $M(x, y)$ situés dans le demi-plan (I), $ax + by + c > 0$ (respectivement < 0) alors tous les points $N(x, y)$ situés dans le demi-plan (II) vérifient $ax + by + c < 0$ (respectivement > 0).



Définition 4 : Point extrême

On appelle **point extrême**, tout point $x \in E$ (ensemble convexe) s'il ne peut être exprimé comme combinaison linéaire de deux autres points de E , autrement dit s'il n'existe pas de couple $(x_1, x_2) \in E$ tel que :

$$x = \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 \quad \text{pour tout } \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1.$$

L'optimum d'une fonction linéaire $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est atteint en au moins un point extrême (sommet). S'il est atteint en deux points x_1 et x_2 , alors tous les points du segment $[x_1, x_2]$ sont optimaux.

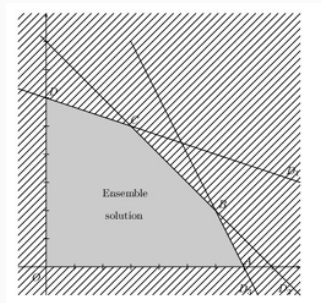
Résolution de systèmes d'inéquations : Exemples **Exemple 1** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14. \end{cases}$$

Soient les droites d'équations respectives :

$$D_1 : x_1 + 3x_2 = 18, \quad D_2 : x_1 + x_2 = 8, \quad D_3 : 2x_1 + x_2 = 14.$$

L'ensemble solution est un polyèdre convexe limité par la ligne polygonale *OABCD*.



III.1. Résolution graphique d'un programme linéaire (PL)

8.5. Résolution graphique d'un PL

Dans cette section, nous présentons une technique de résolution de programme linéaire à deux variables x_1 et x_2 . Dans ce cas, on peut utiliser une représentation graphique du programme linéaire. Cette représentation graphique est utile pour acquérir une compréhension intuitive des principes de base de la programmation linéaire.

La formulation canonique d'un programme linéaire à deux variables peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Max } Z = a_0x_1 + b_0x_2 \\ a_{11}x_1 + b_{11}x_2 \leq c_1 \\ a_{21}x_1 + b_{21}x_2 \leq c_2 \\ \vdots \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Min } Z = a_0x_1 + b_0x_2 \\ a_{11}x_1 + b_{11}x_2 \geq c_1 \\ a_{21}x_1 + b_{21}x_2 \geq c_2 \\ \vdots \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

III.1.1. Construction de la région réalisable

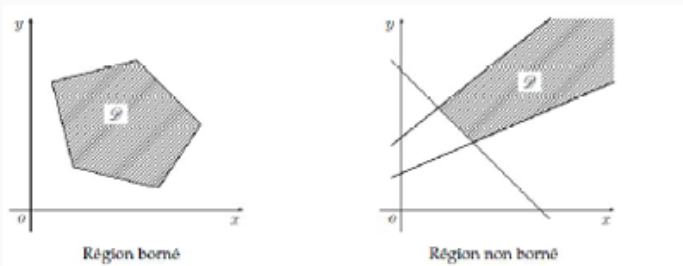
8.6. La construction de la région réalisable

Chacune des équations $a_i x_1 + b_i x_2 = c_i$ définit une droite qui partage le plan en deux demi-plans P_1 et P_2 d'équations :

$$\begin{cases} (P_1) : a_i x_1 + b_i x_2 \geq c_i, \\ (P_2) : a_i x_1 + b_i x_2 \leq c_i. \end{cases}$$

L'intersection des demi-plans définissant les contraintes du programme linéaire constitue l'**ensemble réalisable**, souvent représenté graphiquement sous forme d'un **polygone convexe**.

Chaque contrainte détermine l'un des deux demi-plans (P1) ou (P2) que l'on trouvera en vérifiant si un point particulier (l'origine $(0; 0)$ par exemple) est contenu dedans ou non. L'intersection de tous les demi-plans correspondant aux contraintes constitue l'ensemble des points réalisables : ce sont les solutions communes à toutes les contraintes. Cet ensemble correspond à une région D du plan et est souvent appelée région réalisable. Cette région est parfois vide ou non bornée.



La recherche d'une solution optimale

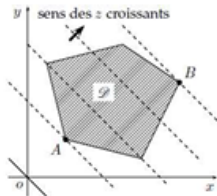
Nous venons de construire la région réalisable d'un programme linéaire à deux variables. Cet ensemble contient un nombre infini de solutions réalisables. Il reste à repérer, parmi ces solutions réalisables, celle(s) qui donne(nt) à z la meilleure valeur.

En fixant à z une valeur p choisie arbitrairement, on obtient la droite :

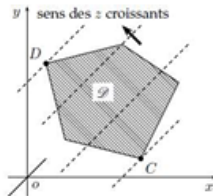
$$(D_p) \quad a_0x_1 + b_0x_2 = p$$

Cette droite est appelée **droite d'iso-valeur** de la fonction z . Elle représente les points du plan qui donnent à z la valeur p .

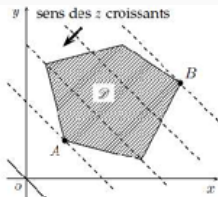
Sens de la maximisation selon les signes de a_0 et b_0



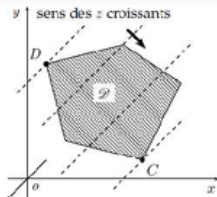
Cas $b_0 > 0$ et $a_0 > 0$



Cas $b_0 > 0$ et $a_0 < 0$



Cas $b_0 < 0$ et $a_0 > 0$



Cas $b_0 < 0$ et $a_0 < 0$

III.1.2. Méthode graphique — Étapes de résolution

Généralement, il y a quatre étapes à suivre pour résoudre un programme linéaire en utilisant la **méthode graphique** :

- ➊ **Représenter graphiquement les droites** (équations provenant des inéquations), c'est-à-dire tracer les contraintes (fonctionnelles et de non-négativité) et déterminer le demi-plan fermé satisfaisant chaque contrainte.
- ➋ **Déterminer la région des solutions réalisables** (région de faisabilité) : c'est l'intersection entre tous les demi-plans satisfaisant les différentes contraintes.
- ➌ **Tracer le vecteur de coûts** $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ de la fonction objective.
- ➍ **Remplacer successivement les coordonnées** de chaque point de la région dans la fonction objective afin de rechercher la (ou les) solution(s) optimale(s) (si elle existe).

III.1.3. Cas possibles de la région réalisable

Trois situations peuvent résulter de l'intersection des demi-plans :

- ❶ L'intersection donne un domaine où la fonction objective est majorée sur cet ensemble \rightarrow le PL admet une **solution optimale** (qui est un sommet du polyèdre).
- ❷ Le domaine n'est pas vide mais la fonction objective **n'est pas majorée** sur ce domaine \rightarrow le maximum de Z est **infini**.
- ❸ Le domaine est **vide** $\Rightarrow \emptyset$ et le PL **n'a pas de solutions**.

Exemple 1 — Méthode graphique

Soit le programme linéaire suivant, qu'on interprète comme le calcul des quantités à produire x_1 et x_2 de deux produits pour maximiser un profit z :

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- On représente dans un plan (x_1, x_2) l'ensemble des solutions réalisables.
- On travaille dans le premier quadrant selon les contraintes de positivité $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$.

Tracé des droites de contraintes

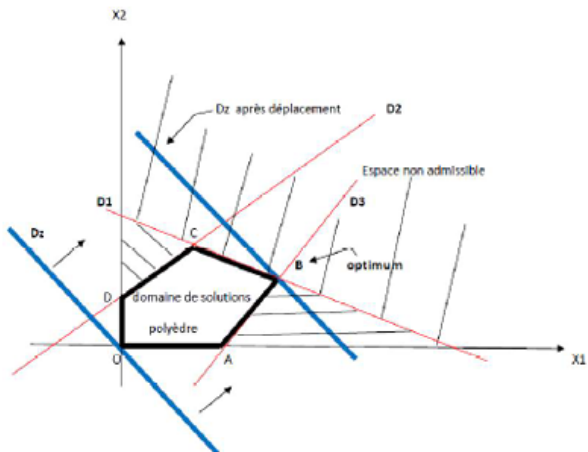
On trace les droites relatives aux contraintes :

$$D_1 : x_1 + 3x_2 = 6 \quad (\text{points } (6, 0) \text{ et } (0, 2))$$

$$D_2 : -x_1 + x_2 = 1 \quad (\text{points } (-1, 0) \text{ et } (0, 1))$$

$$D_3 : 2x_1 - x_2 = 1 \quad (\text{points } (0, -1) \text{ et } (2, 3))$$

- Chaque droite délimite un demi-plan où la contrainte est vérifiée.
- L'intersection de ces demi-plans forme la **région réalisable**.



Détermination de l'optimum

1^{er} Méthode : Énumération complète des sommets

Table 1 : Sommets du polyèdre de solutions

Sommets du polyèdre	Coordonnées	Valeur de la fonction objective Z
O	$(0,0)$	0
A	$(2,0)$	2
B est le point de $D1 \cap D3$	$(18/7, 8/7)$	$34/7 \approx 4.85$
C est le point de $D1 \cap D2$	$(3/4, 7/4)$	$17/4 \approx 4.25$
D	$(0,1)$	2

Donc l'optimum est le sommet **B** (point extrême) dans lequel la fonction Z est maximale et est égale à **4.85**.

2^{ème} Méthode

Pour gagner du temps par rapport à la première méthode on choisit parmi les solutions admissibles une solution qui soit optimale, on procède comme suit :

- On commence par tracer la droite D_Z relative à la fonction objective Z au point initial O pour lequel $Z = 0$:
 - $Z = x_1 + 2x_2 = 0 \implies x_2 = -1/2 x_1$.
 - On choisit 2 points pour tracer $D_Z(0)$, par exemple $(0, 0)$ et $(1, -1/2)$.
- On déplace la droite D_Z parallèle à elle-même tant que l'intersection de la droite avec le polyèdre de solution n'est pas vide. Le déplacement s'arrête lorsque la droite n'a plus qu'un seul point de contact (ou une arête de contact) avec ce polyèdre.
- On calcule les coordonnées de ce point ainsi que la valeur de la fonction objective dans ce point (voir figure).