Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire par la Méthode du Simplexe

Institut Supérieur des Sciences (HIS)

Plan du cours

- Points essentiels du cours précédent
- Forme standard d'un PL
- Un algorithme naïf
- Variables de base et non de base
- Exemple prototype
- Les états des solutions
- Algorithme du simplexe
- Cas particuliers du simplexe
- Conclusion

Points essentiels du cours précédent

- Si une solution optimale existe pour un problème de programmation linéaire (PL), alors au moins un des sommets de la région réalisable est optimal.
- La région réalisable de tout PL est un ensemble convexe.

Forme standard d'un PL

Formulation générale

$$\text{Maximiser } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Forme standard d'un PL

Formulation générale

$$\text{Maximiser } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Question : Pourquoi utiliser cette forme standard ?

Pourquoi la forme standard ?

Parce qu'elle permet de résoudre un système d'équations linéaires !

Comment convertir en forme standard

- Introduire des variables d'écart (**slack**) ou d'excédent (**surplus**) non négatives ($S_i \geq 0$) pour transformer les inégalités en égalités :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + S_j = b_j,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i - S_j = b_j.$$

- Lorsqu'une variable d'écart, d'excédent ou d'origine est nulle, la contrainte correspondante est satisfaite avec égalité (contrainte **active**).

Gestion des variables non bornées

- Pour toute variable x_i non restreinte en signe, introduire deux variables artificielles non négatives :

$$x_i = S_i^+ - S_i^- \quad \text{avec } S_i^+, S_i^- \geq 0.$$

- Après la transformation, toutes les variables (x_i, S_i, etc.) deviennent non négatives.

Récapitulatif des règles de conversion

1. Contrainte $\leq$: ajouter une variable d'écart (**slack**).
2. Contrainte $\geq$: ajouter une variable d'excédent (**surplus**).
3. Variable non bornée : l'exprimer comme la différence de deux variables non négatives.

Objectif
Transformer toutes les contraintes en égalités avec des variables non négatives pour appliquer la méthode du Simplexe.

Des solutions réalisables aux solutions optimales

- Une fois sous forme standard, la région réalisable est définie par les solutions de base réalisables.
- L'algorithme du Simplexe explore systématiquement ces points extrêmes pour trouver le point optimal.

Comment convertir en forme standard

- Introduire des variables d'écart ou d'excédent non négatives ($S_i \geq 0$) afin de transformer les contraintes en égalités :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + S_j = b_j,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i - S_j = b_j.$$

- Si une variable d'écart, d'excédent ou d'origine est nulle, la contrainte correspondante est **active**.
- Pour une variable non bornée x_i, introduire deux variables artificielles non négatives :

$$x_i = S_i^+ - S_i^-, \quad S_i^+, S_i^- \geq 0.$$

Forme standard d'un PL – Rappel

Formulation

$$\text{Maximiser } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Forme standard d'un PL – Rappel

Formulation

$$\text{Maximiser } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m, \\ x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Mais ... il y a plus de variables que d'équations ($m \ll n$).

Forme standard d'un PL – Interprétation

On choisit m variables et on résout le système correspondant.

Résolution d'un PL : un algorithme naïf

- Générer tous les sommets réalisables :
  - Déterminer tous les points d'intersection entre les contraintes.
  - Vérifier la faisabilité de chacun.
- Utiliser la fonction objectif pour identifier le sommet optimal.

Résolution d'un PL : un algorithme naïf

- Générer tous les sommets réalisables :
  - Déterminer tous les points d'intersection entre les contraintes.
  - Vérifier la faisabilité de chacun.
- Utiliser la fonction objectif pour identifier le sommet optimal.

Problème
Combien de points d'intersection existe-t-il pour un PL comportant m contraintes et n variables ?

Résolution d'un PL : un algorithme naïf (suite)

$$\text{Nombre de points d'intersection } = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Résolution d'un PL : un algorithme naïf (suite)

$$\text{Nombre de points d'intersection } = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Exemple

Pour $n = 30$ et $m = 10$:

$$\binom{30}{10} = 30\,045\,015!!!$$

Résolution d'un PL : un algorithme naïf (suite)

$$\text{Nombre de points d'intersection } = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Exemple
Pour $n = 30$ et $m = 10$:

$$\binom{30}{10} = 30\,045\,015!!!$$

Conclusion : cette approche devient rapidement impraticable.

Variables de base et non de base

- Une **solution de base** est obtenue en fixant $(n - m)$ variables à 0 et en résolvant le système pour les m variables restantes.
- Les variables restantes sont les **variables de base**.
- Les variables fixées à zéro sont les **variables non de base**.
- Une **solution de base réalisable (SBR)** est une solution de base qui satisfait toutes les contraintes.

Idée clé
Tout sommet de la région réalisable d'un PL correspond à une solution de base réalisable.

Représentation générale d'une solution de base

$$x_1 = b_1 + \sum_{i=m+1}^{n} a_{1i} x_i$$

$$\vdots$$

$$x_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_{mi} x_i$$

Variables non de base
Fixées à 0

Variables de base
Fixées à leurs valeurs b_i

Basic Variables **Nonbasic Variables**

$$x_1 = b_1 + \sum_{i=m+1}^{n} a_{1i}x_i$$

$$\vdots$$

$$x_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_{mi}x_i$$

Basic Variables **Nonbasic Variables**

$$x_1 = b_1 + \sum_{i=m+1}^{n} a_{1i} x_i$$

$$\vdots$$

$$x_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_{mi} x_i$$

Assign to 0

Basic Variables **Nonbasic Variables**

Assign to b's

$$x_1 = b_1 + \sum_{i=m+1}^{n} a_{1i} x_i$$

$$\vdots$$

$$x_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_{mi} x_i$$

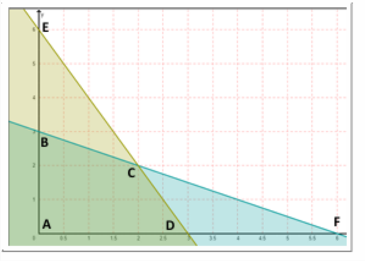
Assign to 0

Exemple : Solutions de base réalisables (SBR)

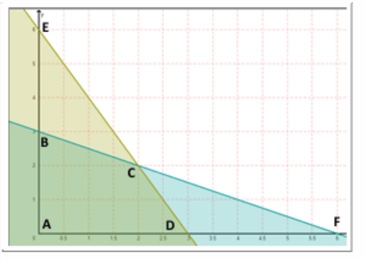
Problème :

$$\text{Maximiser } z = x + y$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} x + 2y \leq 6, \\ 2x + y \leq 6, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$



Solutions de base réalisables (suite)



Les points A, B, C, D représentent les sommets de la région réalisable.

Exemple : Solutions de base réalisables (SBR)

Problème :

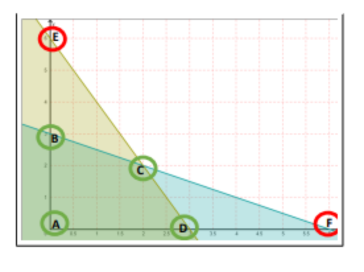
$$\text{Maximiser } z = x + y$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} x + 2y + S_1 = 6, \\ 2x + y + S_2 = 6, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Variables : $\{x, y, S_1, S_2\}$
- Nombre de variables : $n = 4$
- Nombre de contraintes : $m = 2$
- Nombre de solutions de base :

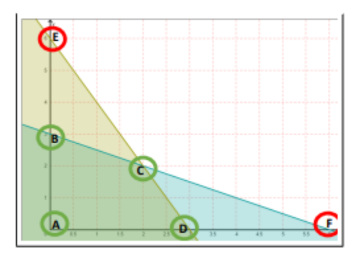
$$\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6 \text{ solutions de base.}$$

Exemple : Solutions de base réalisables (suite)



- **Solutions de base** : A, B, C, D, E, F
- **Solutions de base réalisables (SBR)** : A, B, C, D

Exemple : Solutions de base réalisables (suite)



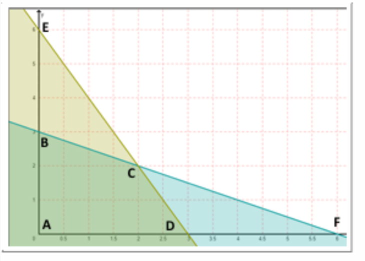
- **Solutions de base** : A, B, C, D, E, F
- **Solutions de base réalisables (SBR)** : A, B, C, D

Question : Comment déterminer ces SBR ?

Exemple : SBR (S1, S2) — Cas A

$$\text{Maximiser } z = x + y$$

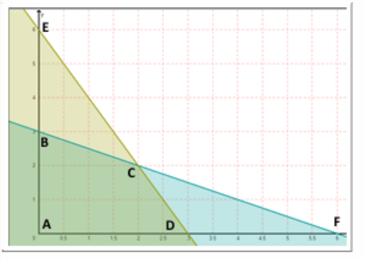
$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} S_1 = 6 - x - 2y, \\ S_2 = 6 - 2x - y, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$



Exemple : SBR (y, S2) — Cas B

$$\text{Maximiser } z = 3 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}S_1$$

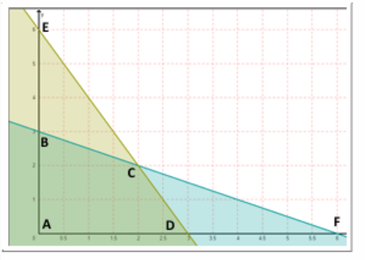
$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} y = 3 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}S_1, \\ S_2 = 3 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}S_1, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$



Exemple : SBR (x, y) — Cas C

$$\text{Maximiser } z = 4 - \frac{1}{3}S_1 - \frac{1}{3}S_2$$

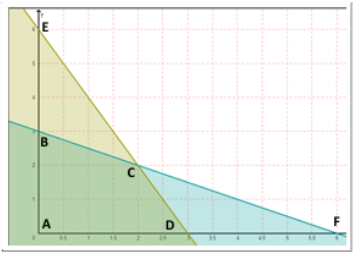
$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2, \\ y = 2 - \frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_2, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$



Exemple : SBR (x, S1) — Cas D

$$\text{Maximiser } z = 3 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}S_2$$

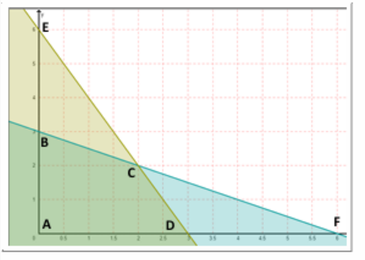
$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}S_2, \\ S_1 = 3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}S_2, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$



Exemple : Solution non réalisable (y, S1) — Cas E

$$\text{Maximiser } z = 6 - x - S_2$$

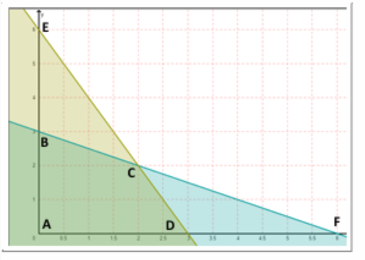
$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} y = 6 - 2x - S_2, \\ S_1 = -6 + 3x + 2S_2, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$



Exemple : Solution non réalisable (x, S2) — Cas F

$$\text{Maximiser } z = 6 - y - S_1$$

$$\text{sous les contraintes } \begin{cases} x = 6 - 2y - S_1, \\ S_2 = -6 - 3y + 2S_1, \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0. \end{cases}$$



Résumé des résultats

V non de base	V de base	Solution	Faisable ?	Objectif
x, y	S_1, S_2	(0, 0)	Oui (A)	0
x, S_1	y, S_2	(0, 3)	Oui (B)	3
S_1, S_2	x, y	(2, 2)	Oui (C)	4 (optimum)
y, S_2	x, S_1	(3, 0)	Oui (D)	3
x, S_2	y, S_1	(0, 6)	Non (E)	–
y, S_1	x, S_2	(6, 0)	Non (F)	–

État 1 : Solution de base réalisable

Maximiser $z = 3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}s_1$

sous contraintes :

$$\begin{cases} y = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}s_1 \\ S_2 = 3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}s_1 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

État 2 : Solution non réalisable

Maximiser $z = 6 - x - s_2$

sous contraintes :

$$\begin{cases} y = 6 - 2x - S_2 \\ S_1 = -6 + 3x + 2S_2 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

État 3 : Solution de base réalisable optimale

Maximiser $z = 4 - \frac{1}{3}S_1 - \frac{1}{3}S_2$

sous contraintes :

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2 \\ y = 2 - \frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_2 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Algorithme du Simplexe (forme générale)

Maximiser $\quad z = b_0 + \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i$

sous contraintes :

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + \sum_{i=m+1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ x_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_{mi} x_i \end{cases}$$

- Convertir le problème en forme standard.
- Tant que la solution de base réalisable n'est pas optimale :
  - Passer à une nouvelle solution de base réalisable.
- Afficher la solution optimale.

Algorithme du Simplexe — Détails opérationnels

- Tant qu'il existe un $C_i > 0$:
  - Choisir une variable non basique avec un coefficient positif (variable **entrante**).
  - Introduire cette variable dans la base en remplaçant une variable basique (variable **sortante**).
  - Effectuer l'élimination de Gauss.
- Afficher la solution optimale.

Algorithme du Simplexe — Pseudo-code

1. Initialiser une base réalisable et la solution correspondante.
2. Tant que la fonction objectif contient des coefficients positifs :
   1. Choisir une variable non basique à coefficient positif (**variable entrante**).
   2. Déterminer la variable sortante à l'aide du **test du rapport minimal**.
   3. Mettre à jour la base en remplaçant la variable sortante.
   4. Recalculer la solution de base réalisable.
3. Fin tant que.
4. Afficher la solution optimale.

Test du rapport minimal

Maximiser $z = x + y$

sous contraintes :

$$\begin{cases} S_1 = 6 - x - 2y \\ S_2 = 6 - 2x - y \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Comment choisir la variable sortante ?

- Nous devons maintenir la faisabilité de la solution.

Les différents états de solution

- **État 1 :** Solution de base réalisable initiale.
- **État 2 :** Solution non réalisable — nécessite pivotage.
- **État 3 :** Solution optimale atteinte.

Le passage d'un état à un autre se fait par pivotage, selon les règles du simplexe.

Test du rapport minimal

Maximiser $\quad z = x + y$

sous contraintes :

$$\begin{cases} S_1 = 6 - x - 2y \\ S_2 = 6 - 2x - y \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Choix de la variable sortante :

$$\text{Ratio} = \frac{b_i}{-a_i} \quad (a_i \leq 0)$$

- x est la variable **entrante** (ou y peut aussi être choisie).
- S_2 est la variable **sortante**.
- Ratios :

$$\text{Ratio}(S_1) = \frac{6}{1} = 6, \quad \text{Ratio}(S_2) = \frac{6}{2} = 3$$

- Seules les contraintes ayant des coefficients négatifs ($a_i \leq 0$) pour la variable entrante sont considérées, de sorte que le ratio est toujours positif.

Test du rapport minimal — Nouvelles variables de base

Maximiser $z = x + y$

sous contraintes :

$$\begin{cases} S_1 = 6 - x - 2y \\ S_2 = 6 - 2x - y \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ancienne solution de base (BFS) :

- Variables basiques : $\{S_1, S_2\}$
- Variables non basiques : $\{x, y\}$

Nouvelle solution de base (BFS) :

- Variables basiques : $\{x, S_1\}$
- Variables non basiques : $\{y, S_2\}$

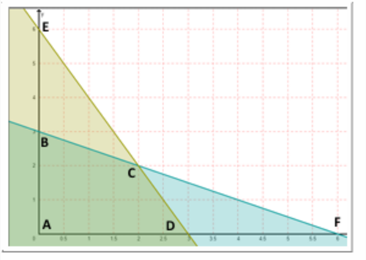
Exemple : BFS (S1, S2) — Point A

Maximiser $z = x + y$

sous contraintes :

$$\begin{cases} S_1 = 6 - x - 2y \\ S_2 = 6 - 2x - y \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

BFS correspondant au point A.



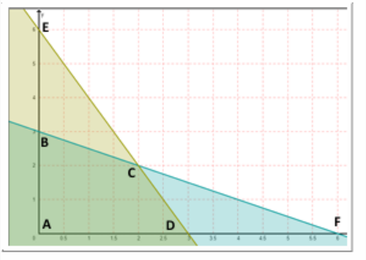
Exemple : BFS (x, S1) — A $\rightarrow$ D

Maximiser $z = 3 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}S_2$

sous contraintes :

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}S_2 \\ S_1 = 3 - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}S_2 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Transition de A vers D dans le plan des solutions.

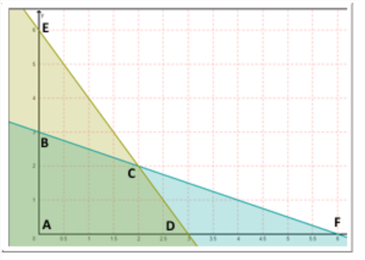


Exemple : BFS (x, y) — A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C

Maximiser $z = 4 - \frac{1}{3}S_1 - \frac{1}{3}S_2$

sous contraintes :

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2 \\ y = 2 - \frac{2}{3}S_1 + \frac{1}{3}S_2 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$



Solution optimale atteinte au point C.

Méthode du tableau du Simplexe

Maximiser $\quad z = -(-x - y)$

sous contraintes :

$$\begin{cases} S_1 + x + 2y = 6 \\ S_2 + 2x + y = 6 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau initial du simplexe :

Base	z	x	y	S_1	S_2	b
1	-1	-1	0	0	0	
S_1	0	1	2	1	0	6
S_2	0	2	1	0	1	6

Le tableau doit être mis à jour pour tenir compte des signes (test d'optimalité, choix des variables, test du rapport minimal).

Méthode du tableau du Simplexe — Première itération

Base	z	x	y	S_1	S_2	b	Ratio
1	-1	-1	0	0	0	0	
S_1	0	1	2	1	0	6	$\frac{6}{1} = 6$
S_2	0	2	1	0	1	6	$\frac{6}{2} = 3$

Variable entrante : x

Variable sortante : S_2

Méthode du tableau du Simplexe — Deuxième itération

Base	z	x	y	S_1	S_2	b
1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	3
S_1	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	3
x	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

Variable entrante : y
Variable sortante : S_1

Méthode du tableau du Simplexe — Troisième itération

Base	z	x	y	S_1	S_2	b
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
y	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2

Tous les coefficients de la fonction objectif sont positifs. Solution de base réalisable optimale atteinte.

Cas particuliers du simplexe

- **Non borné (Unboundedness)** : la fonction objectif peut être augmentée indéfiniment sans violer les contraintes.
- **Non réalisable (Infeasibility)** : aucune solution ne satisfait simultanément toutes les contraintes.
- **Dégénérescence (Degeneracy)** : une ou plusieurs variables basiques deviennent nulles pendant le processus d'itération.

Conclusion

- La **méthode du simplexe** est un algorithme efficace pour trouver la solution optimale des problèmes de programmation linéaire.
- Elle progresse itérativement d'une solution de base réalisable (BFS) vers une meilleure voisine jusqu'à atteindre la solution optimale.
- La détection de la BFS optimale permet de déterminer les valeurs optimales des variables de décision et de la fonction objectif.