Résolution des Problèmes de Programmation Linéaire par la Méthode du Simplexe : Méthode en deux phases / Cas particuliers du Simplexe

Institut Supérieur des Sciences (HIS)

Plan

- Points clés du cours précédent
- Questions concernant le Simplexe
- Méthode en deux phases
- Cas particuliers du Simplexe
- Infaisabilité
- Non-bornitude
- Optima alternatifs
- Dégénérescence et cycle

Points clés du cours précédent

- Le Simplexe est un algorithme efficace pour trouver les solutions optimales des PL en explorant les sommets de la région réalisable.
- Il passe itérativement d'une solution de base réalisable (SBR) à une autre meilleure jusqu'à atteindre la solution optimale.
- En détectant la SBR optimale, la méthode du simplexe fournit les valeurs optimales des variables de décision et de la fonction objectif.

Questions concernant le Simplexe

- Comment choisir une solution de base réalisable initiale si l'origine n'est pas une SBR ?
- Quels sont les cas particuliers pouvant survenir lors de l'utilisation du Simplexe ?
- Le Simplexe se termine-t-il toujours pour tout PL ?

Solution de départ artificielle

- Les PL dont toutes les contraintes sont de la forme « $\leq$ » avec second membre positif peuvent être démarrés avec une solution de base constituée uniquement de variables d'écart.
- On choisit les variables d'écart comme variables de base pour construire une SBR initiale.

$$S_1 = b_1 + \sum_{i=m+1}^{n} a_{1i}x_i, \quad S_m = b_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_{mi}x_i$$

Solution de départ artificielle

- Si le PL contient des contraintes du type « $\geq$ » ou « $=$ », cette solution de départ n'est pas possible.
- Pour ces PL dits « mal formés », on introduit des variables artificielles pour trouver une SBR initiale.

$$\text{Maximiser } 3x + 9y$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 5x - y \geq 3 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Méthode en deux phases

$$\text{Maximiser } c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Méthode en deux phases — Phase 1

$$\text{Minimiser } R_1 + R_2 + \cdots + R_m$$

Sous les contraintes :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + R_i = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

- Le problème est faisable si la valeur de l'objectif atteint 0.
- Tous les R_i deviennent nuls.
- On obtient alors une SBR sans variables artificielles.

Exemple : Forme standard (Phase 1)

$$\text{Maximiser } z = 3x + 9y$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x + y + S_1 = 3 \\ 5x - y - S_2 = 3 \\ y - S_3 = 1 \end{cases}$$

Exemple : Méthode en deux phases (Phase 1)

$$\text{Minimiser } z = R_2 + R_3$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} x + y + S_1 = 3 \\ 5x - y - S_2 + R_2 = 3 \\ y - S_3 + R_3 = 1 \end{cases}$$

- Variables de base initiales : $\{S_1, R_2, R_3\}$.
- On doit éliminer les variables de base de la fonction objectif avant de commencer le Simplexe.

Exemple : Méthode en deux phases (Phase 1) – Tableau initial

Tableau initial (variables de base : $\{S1, R2, R3\}$)

Base	x	y	$S1$	$S2$	$S3$	$R2$	$R3$	RHS
z	0	0	0	0	0	-1	-1	0
$S1$	1	1	1	0	0	0	0	3
$R2$	5	-1	0	-1	0	1	0	3
$R3$	0	1	0	0	-1	0	1	1

Phase 1 – Mise à jour de la ligne z

Après avoir retiré les variables de base artificielles de la fonction objectif :
(on effectue $\text{Row}(z) \leftarrow \text{Row}(z) + \text{Row}(R2) + \text{Row}(R3)$)

Base	x	y	$S1$	$S2$	$S3$	$R2$	$R3$	RHS
z	5	0	0	-1	-1	0	0	4
$S1$	1	1	1	0	0	0	0	3
$R2$	5	-1	0	-1	0	1	0	3
$R3$	0	1	0	0	-1	0	1	1

Phase 1 – Itération 1 du Simplexe

Variable entrante : x **Variable sortante :** R_2 **Ratio test :** $\frac{3}{5}$ (minimum positif)

Pivot : $a_{R_2,x} = 5$

Étapes du pivot :

- Normalisation de la ligne pivot : $R_2 \leftarrow R_2/5$
- Élimination de la colonne x dans les autres lignes :

$$\begin{cases} z \leftarrow z - 5 \times R_2 \\ S_1 \leftarrow S_1 - 1 \times R_2 \\ R_3 \text{ inchangée} \end{cases}$$

Tableau après pivot :

Base	x	y	S_1	S_2	S_3	R_2	R_3	RHS
z	0	1	0	0	-1	-1	0	1
S_1	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
R_3	0	1	0	0	-1	0	1	1

Nouvelles variables de base : $\{\, S_1,\ x,\ R_3 \,\}$.

Phase 1 – Itération 2

Variable entrante : y **Variable sortante :** R_3 **Ratio test :**

$$\frac{\text{RHS}}{\text{colonne } y} = \begin{cases} \text{S1 : } \dfrac{12/5}{6/5} = 2, \\ \text{x : } \dfrac{3/5}{-1/5} \text{ (negatif, ignoré)}, \\ \text{R3 : } \dfrac{1}{1} = 1 \quad (\text{minimum} \Rightarrow R_3 \text{ sort}) \end{cases}$$

Pivot : coefficient sur la ligne R_3 et la colonne $y = 1$.

Opérations de pivot :

1. Normaliser la ligne pivot ($R_3 \leftarrow R_3/1$) — déjà normalisée.
2. Éliminer la colonne y dans les autres lignes :

$$\begin{cases} z \leftarrow z - 1 \times R_3, \\ S_1 \leftarrow S_1 - \frac{6}{5} \times R_3, \\ x \leftarrow x - (-\frac{1}{5}) \times R_3 \text{ (équival. } x \leftarrow x + \frac{1}{5} R_3). \end{cases}$$

Phase 1 – Tableau final (après pivot y/R_3)

Tableau final de la Phase 1 (variables de base : $\{S_1,\ x,\ y\}$)

Base	x	y	S_1	S_2	S_3	R_2	R_3	RHS
z	0	0	0	0	0	-1	-1	0
S_1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
x	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
y	0	1	0	0	-1	0	1	1

Remarque : la phase 1 est terminée car R_2 et R_3 ne sont plus dans la base (elles sont non-basics $\rightarrow$ donc valent 0) et la valeur de l'objectif de phase 1 est 0. Nous pouvons donc passer à la **Phase 2**.

Début de la Phase 2 (initialisation)

Principe : on conserve le tableau final de la phase 1 (base et expressions des variables de base) mais on rétablit la fonction objectif d'origine

$$\text{Maximiser } z = 3x + 9y.$$

Soit les coûts de base (pour l'objectif d'origine) :

$$c_{S_1} = 0, \quad c_x = 3, \quad c_y = 9.$$

On calcule la nouvelle ligne de z (coûts réduits) :

$$r_j = c_j - \sum_{i \in B} c_i \, a_{ij}, \quad \text{et } z_0 = \sum_{i \in B} c_i \cdot \mathrm{RHS}_i.$$

En appliquant cela au tableau final de la phase 1 on obtient :

Nouvelle ligne z :

	x	y	S_1	S_2	S_3	RHS
z	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{48}{5}$	$\frac{57}{5}$

Tableau d'initialisation de la Phase 2 (même base, ligne z mise à jour) :

Base	x	y	S_1	S_2	S_3	RHS
z	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{48}{5}$	$\frac{57}{5}$
S_1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
x	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
y	0	1	0	0	-1	1

Interprétation rapide :

- La valeur courante de l'objectif d'origine vaut $z_0 = \dfrac{57}{5} = 11{,}4$.
- Les coefficients dans la ligne z sont les coûts réduits vis-à-vis de la base actuelle.
- La Phase 2 peut maintenant démarrer à partir de ce tableau pour améliorer (si possible) la valeur de z.

Itération : variable entrante S_3, variable sortante S_1

Tableau de départ (Phase 2) :

Base	x	y	S_1	S_2	S_3	RHS
z	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{48}{5}$	$\frac{57}{5}$
S_1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
x	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
y	0	1	0	0	-1	1

Choix de la variable entrante (règle donnée) : on prend la colonne la plus négative de la ligne $z \Rightarrow S_3$ (coefficient $-\frac{48}{5}$).

Test des ratios (RHS / coefficient colonne $S_3 > 0$) :

$$\begin{aligned}
&\text{S1 :} && \frac{6/5}{6/5} = 1 \quad \text{(positif)} \\
&\text{x :} && \frac{4/5}{-1/5} \text{ (negatif, ignoré)} \\
&\text{y :} && \frac{1}{-1} \text{ (negatif, ignoré)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **Ratio minimal = 1 sur la ligne S_1** $\Rightarrow \boxed{\text{sortante } S_1}$.

Pivot : élément pivot $a_{S_1,S_3} = \frac{6}{5}$.

Opérations :

1. Normaliser la ligne pivot : $S_1 \leftarrow S_1/(6/5)$.
2. Éliminer la colonne S_3 dans les autres lignes (add multiples de la nouvelle ligne pivot).

Tableau après pivot : S_3 entre, S_1 sort

Après pivot (ligne S_1 normalisée et éliminations) on obtient :

Base	x	y	S_1	S_2	S_3	RHS
z	0	0	8	1	0	21
S_3	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	1
x	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	1
y	0	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	2

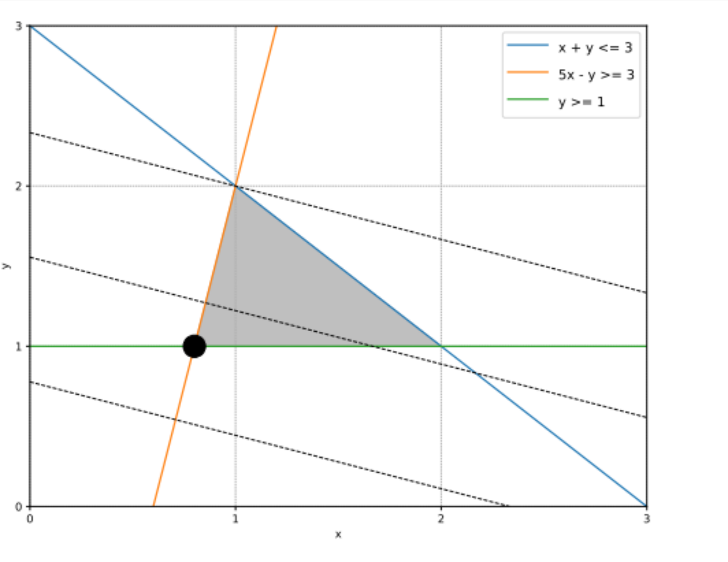
Interprétation :

- Nouvelle base : $\{S_3,\ x,\ y\}$.
- Solution courante : $S_3 = 1,\ x = 1,\ y = 2$ (les variables non-bases S_1, S_2 valent 0).
- Valeur de l'objectif (vérification) : $z = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 21$.

L'optimalité est atteints car $c_i \geq 0, \forall i$

La solution optimale est donc : $x = 1, y = 2$ et $z = 21$.

Représentation graphique



Simplexe : Cas particuliers

- **Infaisabilité** : se produit lorsqu'il n'existe aucune solution réalisable satisfaisant toutes les contraintes.
- **Non-borné** : se produit lorsque la fonction objectif peut être augmentée indéfiniment sans violer aucune contrainte.
- **Optima alternatifs** : se produit lorsque plusieurs optima globaux avec la même valeur objective existent.
- **Dégénérescence** : se produit lorsqu'une ou plusieurs variables basiques deviennent nulles pendant le processus d'itération.

Cas particuliers : Infaisabilité

- Région réalisable vide.
- Peut être détectée en utilisant la *méthode en deux phases*.
- La fonction objectif en Phase 1 (somme des variables artificielles $\sum R_i$) ne peut pas être égale à 0.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

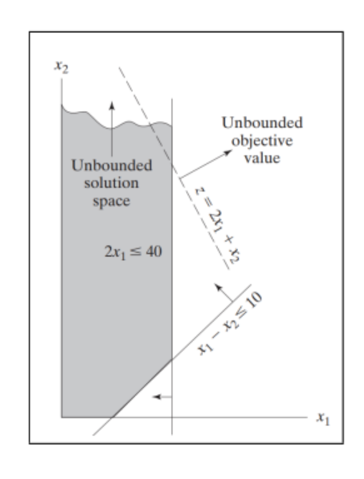
Cas particuliers : Non-borné

- Les solutions non-bornées permettent des augmentations arbitraires des variables sans violer les contraintes.
- Le non-borné peut indiquer un modèle mal construit.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 - x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 \leq 40 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cas particuliers : Non-borné (suite)



Détection du non-borné

La méthode du simplexe signale une solution non-bornée lorsque toutes les valeurs des ratios sont soit infinies soit négatives : il n'y a alors pas de variable sortante admissible.

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	ratio
z	-2	-1	0	0	0	-
S_1	1	-1	1	0	10	(Négatif)
S_2	2	0	0	1	40	(Infini)

Cas particuliers : Optima alternatifs

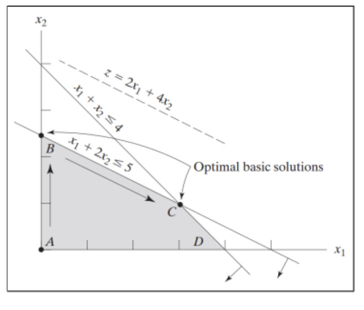
- Un problème de PL peut avoir des optima alternatifs lorsque la fonction objectif est parallèle à une contrainte.
- Tout point sur cette contrainte est également optimal.
- Les optima alternatifs fournissent différentes combinaisons de variables avec la même valeur optimale.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Optima alternatifs — exemple graphique / rappel

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Optima alternatifs — Itération du simplexe

Tableau initial :

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	-2	-4	0	0	0
S_1	1	2	1	0	5
S_2	1	1	0	1	4

- Variable entrante : x_2.
- Variable sortante : S_1.
- Pivot : ligne 1 (pivot row $=$ 1).
- Opérations :
  - multiplier la ligne pivot par $\frac{1}{2}$ (si on normalise)
  - Row(z) $=$ Row(z) $+$ 4 $\times$ Pivot row.
  - Row(S2) $=$ Row(S2) $-$ Pivot row.

Optima alternatifs — Remplacement de variables

- Si une variable non-basique a un coefficient nul dans la ligne z, elle peut être échangée avec une variable basique (dont la RHS est strictement positive) sans changer la valeur de la fonction objectif.
- Ex. : si l'on échange x_1 et x_2 quand x_2 a une RHS de 2,5, la valeur de la fonction objectif reste 10.
- Après l'échange : x_1 devient basique avec valeur 5 ; x_2 devient non-basique avec valeur 0.

Tableau illustratif après opérations :

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	0	0	2	0	10
x_2	0.5	1	0.5	0	2.5
S_2	0.5	0	-0.5	1	1.5

Cas particuliers : Dégénérescence

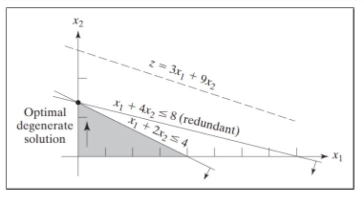
- La condition de faisabilité du simplexe peut conduire à des égalités pour le ratio minimum.
- Des égalités peuvent être brisées arbitrairement, mais la solution dégénérée peut apparaître à l'itération suivante.
- La dégénérescence peut causer un cycle (non-terminaison).

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Maximiser } & z = 3x_1 + 9x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dégénérescence — Rappel de l'exemple

$$\text{Max } z = 3x_1 + 9x_2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Dégénérescence — Ties dans le ratio minimum

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
z	-3	-9	0	0	0	
S_1	1	4	1	0	8	2
S_2	1	2	0	1	4	2

Ici, les ratios minimaux sont égaux (2 et 2) — choix arbitraire pour la variable sortante peut induire dégénérescence.

Dégénérescence — Exemple de tableau dégénéré

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	Ratio
z	-0.75	0	2.25	0	18	
x_2	0.25	1	0.25	0	2	8
S_2	0.5	0	-0.5	1	0	0

On observe ici une variable basique (S_2) avec RHS $= 0$ — caractéristique d'une solution dégénérée.

Dégénérescence — Après pivot (valeur objective inchangée)

Basic	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
z	0	0	1.5	1.5	18
x_2	0	1	0.5	-0.5	2
x_1	1	0	-1	2	0

La valeur de la fonction objectif peut rester constante malgré le changement de base — signe d'un déplacement entre sommets sans gain.

Interprétation de la dégénérescence

- La présence de dégénérescence suggère l'existence possible d'une contrainte superflue.
- On peut permuter les variables basiques sans quitter un sommet du polytope.
- Lorsqu'on traite la dégénérescence, on peut avoir l'impression de se déplacer d'un coin à un autre tout en conservant la valeur objective.

La dégénérescence peut provoquer des cycles

- Le cycle se produit lorsque l'algorithme du simplexe tourne en boucle entre plusieurs solutions sans atteindre l'optimum, à cause de la dégénérescence.
- Cela peut entraîner une itération infinie.
- Pour prévenir le cycle, appliquer des règles anti-cyclage comme la règle de Bland.
- **Règle de Bland** : si plusieurs ratios sont minimaux, choisir comme variable entrante celle d'indice le plus petit.

Résumé — Cas spéciaux du simplexe

- **Infaisabilité** : la région réalisable est vide — détectable via la méthode en deux phases.
- **Non-borné** : la fonction objectif peut augmenter indéfiniment — absence de variable sortante admissible.
- **Optima alternatifs** : la droite objectif parallèle à une contrainte entraîne une infinité d'optima le long d'un segment.
- **Dégénérescence et cyclage** : nécessité d'utiliser des règles anti-cyclage (ex. Bland) pour assurer la terminaison.

Exemple de cyclage

$$
\begin{aligned}
\text{Maximiser } & z = 2.3x_1 + 2.15x_2 - 13.55x_3 - 0.4x_4 \\
\text{s.t. } & 0.4x_1 + 0.2x_2 - 1.4x_3 - 0.2x_4 \leq 0 \\
& -7.8x_1 - 1.4x_2 + 7.8x_3 + 0.4x_4 \leq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Exemple de cyclage — Tableau initial

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0	0	0
x_5	0.4	0.2	-1.4	-0.2	1	0	0
x_6	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0	1	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Exemple de cyclage — Étape suivante

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	-1	5.5	-0.75	5.75	0	0
x_1	1	0.5	-3.5	-0.5	2.5	0	0
x_6	0	2.5	-19.5	-3.5	19.5	1	0

Nous sommes toujours à l'origine $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Exemple de cyclage — Itération suivante

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0
x_1	1	0	0.4	0.2	-1.4	-0.2	0
x_2	0	1	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0

Nous sommes à l'origine $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Exemple de cyclage — Tableau suivant

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	5.75	0	0	-1	5.5	-0.75	0
x_3	2.5	0	1	0.5	-3.5	-0.5	0
x_6	19.5	1	0	2.5	-19.5	-3.5	0

Toujours à l'origine $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Exemple de cyclage — Tableau suivant

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	13.55	0.4	0	0	-2.3	-2.15	0
x_3	-1.4	-0.2	1	0	0.4	0.2	0
x_4	7.8	0.4	0	1	-7.8	-1.4	0

Toujours à l'origine $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Exemple de cyclage — Tableau final

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0	0	0
x_5	0.4	0.2	-1.4	-0.2	1	0	0
x_4	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0	1	0

Le simplexe est revenu à son état d'origine.

Exemple de cyclage — Bouclage continu

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	-2.3	-2.15	13.55	0.4	0	0	0
x_5	0.4	0.2	-1.4	-0.2	1	0	0
x_4	-7.8	-1.4	7.8	0.4	0	1	0

L'algorithme du simplexe va continuer à cycler entre ces états indéfiniment.