

Voorbeeld.

Neem $f(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi x)$. We gaan deze functie evalueren op de punten

$$\vec{y} = (0, 1, 2, 3) \Rightarrow f(\vec{y}) = x := (0, 1, 0, -1).$$

Hiervan bepalen we vervolgens de DFT (Discrete Fouriertransformatie):

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N}, k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

waarbij N het aantal evaluatiepunten is, in ons geval 4.¹

We berekenen:

$$\begin{aligned} X_0 &= \sum x_n e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot n / 4} = \sum x_n \cdot 1 = \sum x_n = 0 \\ X_1 &= \sum x_n e^{-2\pi i \cdot 1 \cdot n / 4} = x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3 = -\frac{1}{2}i \\ X_2 &= \sum x_n e^{-2\pi i \cdot 2 \cdot n / 4} = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ X_3 &= \sum x_n e^{-2\pi i \cdot 3 \cdot n / 4} = x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3 = \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Blijkbaar geeft de Fouriertransformatie ons de volgende vector

$$X = (0, -\frac{1}{2}i, 0, \frac{1}{2}i)$$

De terugweg is nu te bewandelen volgens het algoritme van de iDFT (inverse Discrete Fouriertransformatie):

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2\pi i k n / N}, k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Deze laten we maar achterwege. Het is precies hetzelfde principe. Gebruik nu des noods het Lemma dat de iDFT van de DFT van x gelijk is aan x .

Hoe hadden we dit anders in kunnen zien? Onthoud: we willen f (op bepaalde punten) schrijven als som van complexe e -machten.

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(\frac{1}{2}\pi x) &= \frac{e^{i\frac{1}{2}\pi x} - e^{-i\frac{1}{2}\pi x}}{2i} = -\frac{1}{2}ie^{\frac{1}{2}i\pi x} + \frac{1}{2}ie^{-\frac{1}{2}i\pi x} \\ &= 0 + X_1 e^{\frac{1}{2}i\pi x} + 0 + X_3 e^{\frac{3}{2}i\pi x} = \sum_{k=0}^3 X_k e^{2\pi i k x / 4}, \end{aligned}$$

en dit is precies de Fouriertransformatie van f . Was dit een verrassing? Nee.

¹In het algemeen evalueer je de functie op precies de plaatsen $0, 1, \dots, N-1$.