

# Тятя! Тятя! Нейросети заменили продавца!

Ппилиф Ульяновкин

[https://github.com/FUlyankin/neural\\_nets\\_prob](https://github.com/FUlyankin/neural_nets_prob)

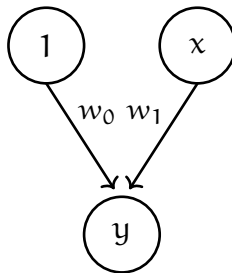
## Листочек 1: всего лишь функция

Ты всего лишь машина, только имитация жизни. Робот сочинит симфонию? Робот превратит кусок холста в шедевр искусства?

*Из фильма «Я, робот» (2004)*

## Упражнение 1 (от регрессии к нейросетке)

Однажды вечером, по пути с работы<sup>1</sup> Маша зашла в свою любимую кофейню на Тверской. Там, на стене, она обнаружила интересную картину:



Хозяин кофейни, Добродум, объяснил Маше, что это Покрас-Лампас нарисовал линейную регрессию, и её легко можно переписать в виде формулы:  $y_i = w_0 + w_1 \cdot x_i$ . Пока Добродум готовил кофе, Маша накидала у себя на бумажке новую картинку:

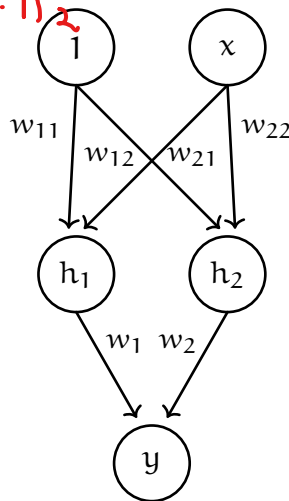
---

<sup>1</sup>она работает рисёрчером.

$$y = w_1 \cdot h_1 + w_2 \cdot h_2$$

$$h_1 = w_{11} + w_{12}x$$

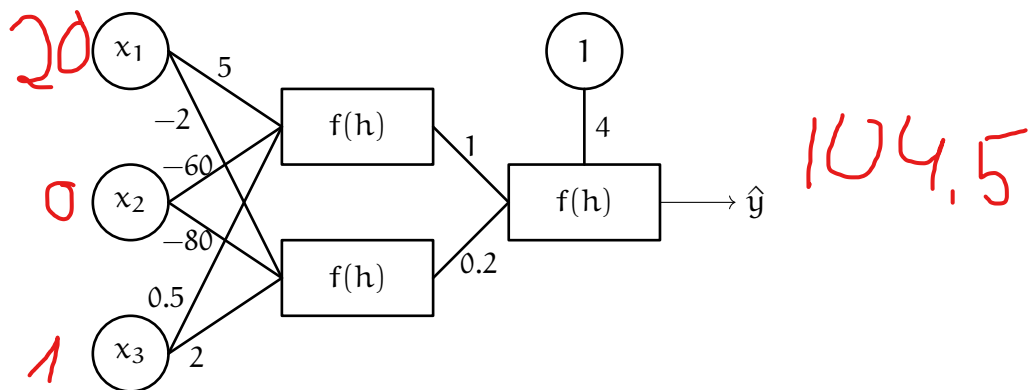
$$h_2 = w_{21} + w_{22}x$$



Как такая функция будет выглядеть в виде формулы? Правда ли, что  $y$  будет нелинейно зависеть от  $x$ ? Если нет, как это исправить и сделать зависимость нелинейной?

## Упражнение 2 (из картинки в формулу)

Добродум хочет понять, насколько сильно будет заполнена кофейня в следующие выходные. Для этого он обучил нейросетку. На вход она принимает три фактора: температуру за окном,  $x_1$ , факт наличия на Тверской митинга,  $x_2$  и пол баристы на смене,  $x_3$ . В качестве функции активации Добродум использует ReLU.



- В эти выходные за барной<sup>2</sup> стойкой стоит Агнесса. Митинга не предвидится, температура будет в районе 20 градусов. Спрогнозируйте, сколько человек придёт в кофейню к Добродуму?
- На самом деле каждая нейросеть — это просто-напросто какая-то нелинейная функция. Запишите нейросеть Добродума в виде функции.

$$y = 4 + f_1(h) + 0.2 f_2(h) = 104.5$$

$$f_1 = 5x_1 + -60x_2 + 0.5x_3 = 100 + 0.5 = 100.5$$

$$f_2 = -2x_1 + -80x_2 + 2x_3 = -40 + 1 = -39$$

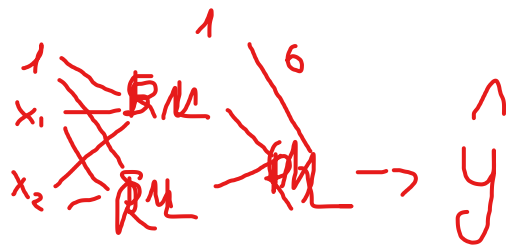
<sup>2</sup>барной... конечно, кофейня у него...

### Упражнение 3 (из формулы в картинку)

Маша написала на бумажке функцию:

$$y = \max(0, 4 \cdot \max(0, 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1) + 2 \cdot \max(0, 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 7) + 6)$$

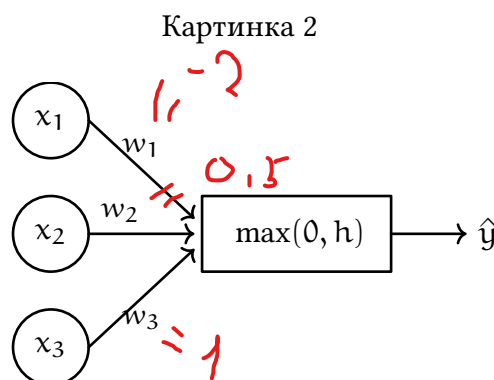
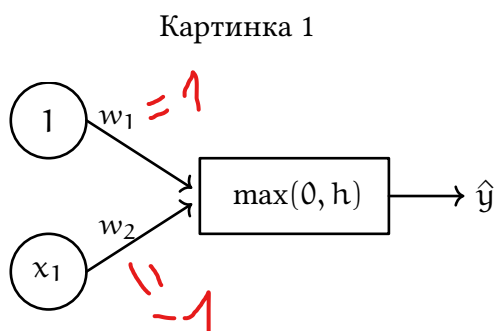
Теперь она хочет, чтобы кто-нибудь из её адептов нарисовал её в виде нейросетки. Нарисуйте.



### Упражнение 4 (армия регрессий)

Парни очень любят Машу,<sup>3</sup> а Маша с недавних пор любит собирать персептроны и думать по вечерам об их весах и функциях активации. Сегодня она решила разобрать свои залежи из персептронов и как следует упорядочить их.

- а. В ящике стола Маша нашла персептрон с картинки 1. Маша хочет подобрать веса так, чтобы он реализовывал логическое отрицание, то есть превращал  $x_1 = 0$  в  $y = 1$ , а  $x_1 = 1$  в  $y = 0$ .



- б. В тумбочке, среди носков, Маша нашла персептрон, с картинки 2, Маша хочет подобрать такие веса  $w_i$ , чтобы персептрон превращал  $x$  из таблички в соответствующие  $y$ :

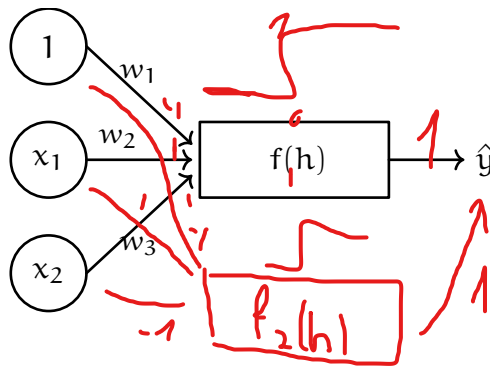
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	1	2	0.5
1	-1	1	0

- в. Оказывается, что в ванной всё это время валялась куча персептронов с картинки 3 с неизвестной функцией активации.

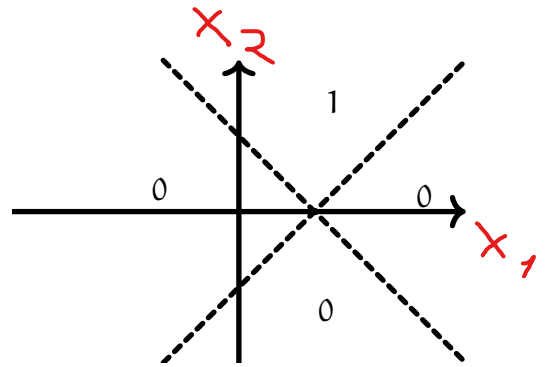
<sup>3</sup>когда у тебя есть лёрнинг, они так и лезут



Картинка 3



Картинка 4



Маша провела на плоскости две прямые:  $x_1 + x_2 = 1$  и  $x_1 - x_2 = 1$ . Она хочет собрать из персептронов нейросетку, которая будет классифицировать объекты с плоскости так, как показано на картинке 4. В качестве функции возьмите единичную ступеньку (Функцию Хевисайда)

$$f(h) = \begin{cases} 1, h > 0 \\ 0, h \leq 0. \end{cases}$$

### Упражнение 5 (логические функции)

Маша вчера поссорилась с Пашей. Он сказал, что у неё нет логики. Чтобы доказать Паше обратное, Маша нашла теорему, которая говорит о том, что с помощью нейросетки можно аппроксимировать почти любую функцию, и теперь собирается заняться аппроксимацией логических функций. Для начала она взяла самые простые, заданные следующими таблицами истинности:

$x_1$	$x_2$	$x_1 \cap x_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$x_1$	$x_2$	$x_1 \cup x_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$x_1$	$x_2$	$x_1 \text{ XoR } x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Первые два столбика идут на вход, третий получается на выходе. Первая операция — логическое «и», вторая — «или». Операция из третьей таблицы называется «исключающим или», (XoR). Если внимательно приглядеться, то можно заметить, что XoR — это то же самое что и  $[x_1 \neq x_2]^4$ .

<sup>4</sup>Тут квадратные скобки обозначают индикатор. Он выдаёт 1, если внутри него стоит правда и 0, если ложь. Такая запись называется скобкой Айверсона. Попробуйте записать через неё единичную ступеньку Хевисайда.

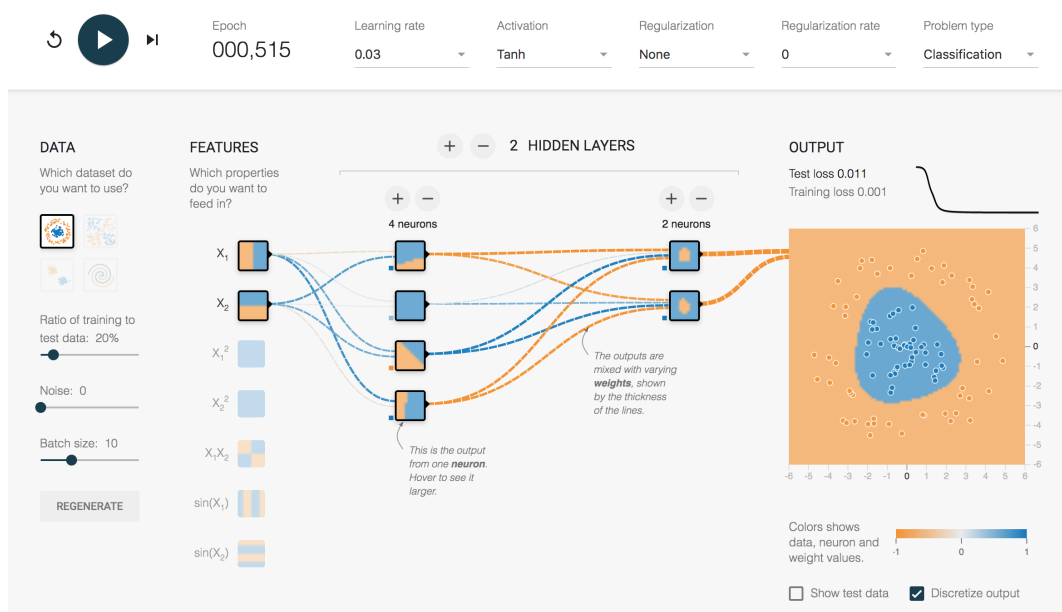
## Упражнение 6 (ещё немного про XoR)

Маша заметила, что на XoR ушло очень много персептронов. Она поняла, что первые два персептрона пытаются построить для третьего нелинейные признаки, которых нейросетке не хватает. Она решила самостоятельно добавить персептрону вход  $x_3 = x_1 \cdot x_2$  и реализовать XoR одним персептроном. Можно ли это сделать?

## Упражнение 7 (избыток)

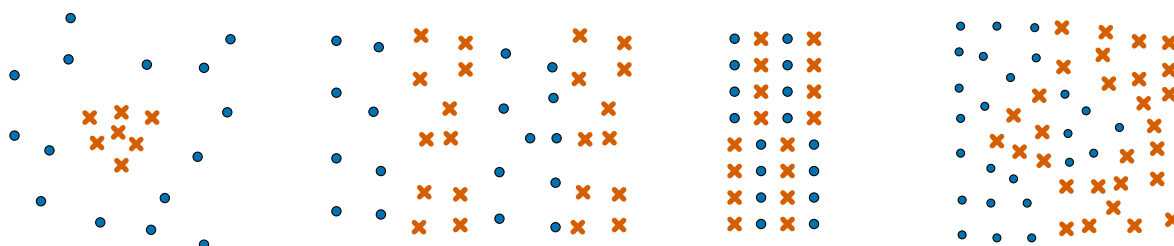
На сайте <http://playground.tensorflow.org> Маша стала играть с простенькими нейросетками и обучила для решения задачи классификации трёхслойного монстра.

Голубым цветом обозначен первый класс, рыжим второй. Внутри каждого нейрона визуализирована та разделяющая поверхность, которую он выстраивает. Так, первый слой ищет разделяющую линию. Второй слой пытается из этих линий выстроить более сложные фигуры и так далее. Чем ярче связь между нейронами, тем больше весовой коэффициент, относящейся к ней. Синие связи — положительные, рыжие — отрицательные. Чем тусклее связь, тем он ближе к нулю. Маша заметила, что с её архитектурой что-то не так. Какие у неё проблемы?



## Упражнение 8 (минималочка)

Шестилетняя сестрёнка ворвалась в квартиру Маши и разрисовала ей все обои:



Маша по жизни оптимистка. Поэтому она увидела не дополнительные траты на ремонт, а четыре задачи классификации. И теперь в её голове вопрос: сколько минимально нейронов нужно, чтобы эти задачи решить?

## Упражнение 9 (универсальный регрессор)

Маша доказала Паше, что у неё всё в полном порядке с логикой. Теперь она собирается доказать ему, что с помощью нейронной сетки можно приблизить любую непрерывную функцию от одного аргумента  $f(x)$  со сколь угодно большой точностью<sup>5</sup>.

**Hint:** Вспомните, что любую непрерывную функцию можно приблизить с помощью кусочно-линейной функции (ступеньки). Осознайте как с помощью пары нейронов можно описать такую ступеньку. Соедините все ступеньки в сумму с помощью выходного нейрона.

## Упражнение 10 (число параметров)

Та, кому принадлежит машин лёрнинг собирается обучить полносвязную нейронную сеть для решения задачи регрессии. На вход в ней идёт 12 переменных, в сетке есть 3 скрытых слоя. В первом слое 300 нейронов, во втором 200, в третьем 100. Сколько параметров предстоит оценить Маше?

---

<sup>5</sup><http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap4.html>