

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики

А. Є. Шевельова

**Методичні вказівки до лабораторних робіт
за дисципліною
«Методи оптимізації та дослідження операцій»**

Дніпро
Ліра
2018

УДК 519.8

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. О. А. Дісковський
канд. фіз.-мат. наук, доц. Т. А. Зайцева

Шевельова А. Є. Методичні вказівки до лабораторних робіт за дисципліною «Методи оптимізації та дослідження операцій» / А. Є. Шевельова – Д.: Ліра, 2018. – 32 с.

Методичні вказівки призначені для засвоєння курсу лекцій та виконання студентами лабораторних робіт з дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій». Лабораторні роботи розглядають основні методи мінімізації функції однієї змінної і безумовної та умовної оптимізації функцій багатьох змінних.

Для студентів, які навчаються за напрямами «Прикладна математика», «Системний аналіз», денної, прискореної та заочної форм навчання.

Рекомендовано до друку вченовою радою факультету прикладної математики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара 30.05.2018 р., протокол №11.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. Лабораторна робота № 1. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОДНОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	4
2. Лабораторна робота №2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	14
3. Лабораторна робота №3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	26
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	31

ВСТУП

Теорія оптимізації застосовується в багатьох розділах прикладної математики та системного аналізу, широко використовується при побудові чисельних методів розв'язання екстремальних задач та якісному дослідженні математичних моделей. Розробка нових чисельних методів оптимізації та дослідження і теоретичне обґрунтування існуючих методів відображає ту важливу роль, яку відіграють екстремальні задачі в різноманітних проблемах прикладного характеру.

Метою лабораторних робіт, що розглядаються, є знайомство з чисельними методами безумовної та умової оптимізації. Виконання лабораторної роботи полягає у вивченні теорії метода, що розглядається; побудові ітераційного процесу; оцінці точності обчислення отриманого оптимального розв'язку; розробки програми, яка реалізує метод.

Під час співбесіди студент повинний виявити знання мети роботи, теоретичного матеріалу, методу виконання кожного етапу роботи, по змісту основних розділів розробленого звіту з демонстрацією результатів на конкретних прикладах.

Студент повинний вміти правильно аналізувати отримані результати і пояснити сутність отриманих результатів. Для самоперевірки при підготовці до виконання і здачі роботи студент повинний відповісти на контрольні питання, приведені наприкінці опису відповідної лабораторної роботи.

Лабораторна робота № 1

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОДНОВИМІРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета: Познайомитись практично з ітераційними методами розв'язання задач одновимірної оптимізації.

Постановка задачі

Знайти мінімум строго квазіопуклої функції $f(x)$ на множині $X = \{x : a \leq x \leq b\}$ із заданою точністю ε методами ділення навпіл, золотого перетину, Фібоначчі.

$$f(x) \rightarrow \min, x \in [a, b]. \quad (1.1)$$

Теоретичні відомості

Нехай X – непорожня опукла множина простору E^n . Функція $f(x)$ називається *квазіопуклою* функцією на множині X , якщо для всіх $y, z \in X$ виконується нерівність

$$f(\lambda y + (1-\lambda)z) \leq \max\{f(y), f(z)\} \text{ при будь-якому } \lambda \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

Функція $f(x)$ називається *строго квазіопуклою* функцією на множині X , якщо нерівність (1.2) виконується як строга при $y \neq z$ та $\lambda \in (0, 1)$.

Строго квазіопуклі функції є такими, що для них будь-який локальний мінімум на опуклій множині є глобальним.

Метод ділення відрізку навпіл (метод дихотомії)

На відрізку $[a_1, b_1] = [a, b]$ вибирають дві точки

$$\lambda_1 = \frac{a_1 + b_1 - \delta}{2}, \mu_1 = \frac{a_1 + b_1 + \delta}{2},$$

де δ – стала, $0 < \delta < b - a$. Точки λ_1 та μ_1 розташовані симетрично на відрізку $[a, b]$ відносно його середини та при малих значеннях δ поділяють його майже навпіл – цим і пояснюється назва методу.

Далі обчислюють та порівнюють значення цільової функції $f(\lambda_1)$ та $f(\mu_1)$. Якщо $f(\lambda_1) \leq f(\mu_1)$, то покладають $a_2 = a_1$, $b_2 = \mu_1$. Якщо ж $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$, то покладають $a_2 = \lambda_1$, $b_2 = b_1$. У результаті отримують відрізок $[a_2, b_2]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a, b]$ і має довжину

$$b_2 - a_2 = \frac{b - a - \delta}{2^1} + \delta.$$

Нехай відрізок $[a_k, b_k]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a, b]$ уже відомий і має довжину

$$b_k - a_k = \frac{b-a-\delta}{2^{k-1}} + \delta, \quad k \geq 2.$$

Тоді виберемо точки

$$\lambda_k = \frac{a_k + b_k - \delta}{2}, \quad \mu_k = \frac{a_k + b_k + \delta}{2} = a_k + b_k - \lambda_k, \quad (1.3)$$

і обчислимо значення цільової функції $f(\lambda_k)$ та $f(\mu_k)$. Якщо $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$, то покладаємо $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$. Якщо ж $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то покладаємо $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$. Довжина отриманого відрізку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ дорівнює

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b-a-\delta}{2^k} + \delta. \quad (1.4)$$

Відрізок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Критерієм закінчення ітераційного процесу є виконання нерівності

$$b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon, \quad (1.5)$$

де ε – задана точність, $\varepsilon > \delta$.

Кількість ітерацій оцінюється так:

$$k > \log_2 \frac{b-a-\delta}{\varepsilon - \delta}.$$

Так як кожне ділення навпіл потребує двох обчислень значення цільової функції, то для досягнення точності $b_{k+1} - a_{k+1} < \varepsilon$ потрібно всього $n = 2k > 2 \log_2 \frac{b-a-\delta}{\varepsilon - \delta}$ обчислень значень цільової функції.

Коли відрізок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ вже визначений, то за точку мінімуму x_* можна взяти точку $\bar{x}_n = \lambda_k$ при $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ і $\bar{x}_n = \mu_k$ при $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, а значення $f(\bar{x}_n)$ може служити наближенням для $f(x_*)$. При такому виборі наближення до точки мінімуму буде допущена похибка

$$|x_* - \bar{x}_n| \leq \max\{b_{k+1} - \bar{x}_n, \bar{x}_n - a_{k+1}\} = \frac{b-a-\delta}{2^k}. \quad (1.6)$$

Якщо не потрібно обчислювати значення цільової функції в точці \bar{x}_n , то замість \bar{x}_n можна взяти точку $\bar{y}_n = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$ з меншою похибкою

$$|x_* - \bar{y}_n| \leq \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{2} = \frac{b-a-\delta}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{2}. \quad (1.7)$$

Метод золотого перетину

Золотим перетином відрізка називають його ділення на дві частини так, щоб відношення довжини всього відрізка до довжини більшої частини дорівнювало відношенню довжини більшої частини до довжини меншої. Безпосередньо можна перевірити, що золотий перетин відрізка $[a, b]$ роблять дві точки, які симетрично розташовані відносно його середини:

$$\lambda_1 = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a), \mu_1 = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a). \quad (1.8)$$

Має місце така чудова властивість: точка λ_1 , у свою чергу, робить золотий перетин відрізка $[a, \mu_1]$, а точка μ_1 – золотий перетин відрізка $[\lambda_1, b]$.

На кожному кроці методу золотого перетину, починаючи з другого кроку, обчислюється лише одне значення цільової функції $f(x)$, тому що одна з точок золотого перетину на попередньому кроці здійснює золотий перетин проміжку на наступному кроці.

Покладемо $a_1 = a$, $b_1 = b$. На відрізку $[a_1, b_1]$ візьмемо точки λ_1 та μ_1 за формулами (1.8) та обчислимо значення цільової функції $f(\lambda_1)$ та $f(\mu_1)$.

Якщо $f(\lambda_1) \leq f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2 = a_1$, $b_2 = \mu_1$, $\mu_2 = \lambda_1$, $\bar{x}_2 = \lambda_1$.

Обчислимо також точку $\lambda_2 = a_2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_2 - a_2)$ і $f(\lambda_2)$.

Якщо ж $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2 = \lambda_1$, $b_2 = b_1$, $\lambda_2 = \mu_1$, $\bar{x}_2 = \mu_1$.

Обчислимо також точку $\mu_2 = a_2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_2 - a_2)$ і $f(\mu_2)$.

У результаті отримаємо відрізок $[a_2, b_2]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a, b]$ і має довжину

$$b_2 - a_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b - a).$$

Точка \bar{x}_2 є наближенним значенням точки мінімуму x_* , наближене оптимальне значення цільової функції $f(\bar{x}_2) = \min \{f(\lambda_1), f(\mu_1)\}$.

Нехай вже знайдено відрізок $[a_n, b_n]$, $n > 1$, який має довжину

$$b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n-1} (b - a)$$

і містить точку мінімуму x_* функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Якщо $f(\lambda_n) \leq f(\mu_n)$, то

$$a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \mu_n, \mu_{n+1} = \lambda_n, \lambda_{n+1} = a_{n+1} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_{n+1} - a_{n+1}).$$

Якщо ж $f(\lambda_n) > f(\mu_n)$, то

$$a_{n+1} = \lambda_n, b_{n+1} = b_n, \lambda_{n+1} = \mu_n, \mu_{n+1} = a_{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{n+1} - a_{n+1}).$$

Довжина отриманого відрізка $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ дорівнює

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n (b - a). \quad (1.9)$$

Ітераційний процес продовжуємо до тих пір, поки не буде виконана нерівність $b_{n+1} - a_{n+1} < \varepsilon$, де ε – задана точність. За наближений розв'язок приймається або точка \bar{x}_n з похибкою

$$|x_* - \bar{x}_n| \leq \max \{ b_{n+1} - \bar{x}_n, \bar{x}_n - a_{n+1} \} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{n+1} (b-a), \quad (1.10)$$

або (якщо не потрібно обчислювати значення цільової функції в точці \bar{x}_n) точка $\bar{y}_n = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ з похибкою

$$|x_* - \bar{y}_n| \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \frac{(b-a)}{2}. \quad (1.11)$$

Метод Фібоначчі

Подібно до методу золотого перетину метод Фібоначчі потребує двох обчислень цільової функції на першій ітерації, а на кожній наступній ітерації тільки по одному обчисленню значення цільової функції. Але, на відміну від методів ділення відрізка навпіл та методу золотого перетину, метод Фібоначчі потребує попереднього завдання числа n обчислень значень цільової функції.

Відомо, що числа *Фібоначчі* визначаються співвідношеннями

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n=1,2,3,\dots; \quad F_1 = F_2 = 1. \quad (1.12)$$

Нехай задано число $n \geq 2$. Метод Фібоначчі починається з вибору двох точок

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_n}{F_{n+2}} (b-a), \quad \mu_1 = a_1 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} (b-a),$$

симетричних відносно середини відрізка $[a_1, b_1] = [a, b]$.

Якщо $f(\lambda_1) \leq f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2 = a_1$, $b_2 = \mu_1$, $\mu_2 = \lambda_1$, $\bar{x}_2 = \lambda_1$.

Обчислимо також точку $\lambda_2 = a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+2}} (b-a)$ і $f(\lambda_2)$.

Якщо ж $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2 = \lambda_1$, $b_2 = b_1$, $\lambda_2 = \mu_1$, $\bar{x}_2 = \mu_1$.

Обчислимо також точку $\mu_2 = a_2 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+2}} (b-a)$ і $f(\mu_2)$.

У результаті отримаємо відрізок $[a_2, b_2]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a, b]$ і має довжину

$$b_2 - a_2 = b - \lambda_1 = \mu_1 - a = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} (b-a).$$

Нехай знайдено відрізок $[a_k, b_k]$ довжини

$$b_k - a_k = \frac{F_{n-k+3}}{F_{n+2}} (b-a).$$

Якщо $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$, то $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$,

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n+2}}(b-a).$$

Якщо $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$,

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n+2}}(b-a).$$

Довжина отриманого відрізка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ дорівнює

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{F_{n-k+2}}{F_{n+2}}(b-a). \quad (1.13)$$

Ітераційний процес продовжується доки не буде вичерпано задану кількість ітерацій n .

Нехай $k = n$. Тоді процес закінчуємо і отримуємо

$$\lambda_n = a_n + \frac{b-a}{F_{n+2}}, \quad \mu_n = a_n + \frac{b-a}{F_{n+2}},$$

на відрізку $[a_n, b_n]$ наближений розв'язок – точка \bar{x}_n співпадає з $\lambda_n = \mu_n$:

$$\bar{x}_n = a_n + \frac{b-a}{F_{n+2}}, \quad b_n - a_n = \frac{2(b-a)}{F_{n+2}} \quad (1.14)$$

і має місце така оцінка похибки

$$|x_* - \bar{x}_n| \leq \frac{b-a}{F_{n+2}}, \quad (1.15)$$

Рекомендації до чисельної реалізації методу Фібоначчі. Найчастіше відомі довжина відрізка $b-a$, на якому розшукується точка мінімуму і точність обчислення $\varepsilon > 0$. Кількість ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності, дорівнює найменшому з чисел n , яке задовільняє нерівності

$$\frac{b-a}{F_{n+2}} \leq \varepsilon \leq \frac{b-a}{F_{n+1}},$$

або

$$F_{n+1} \leq \frac{b-a}{\varepsilon} \leq F_{n+2}. \quad (1.16)$$

Приклади чисельної реалізації

1. Знайти мінімум функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ на відрізку $[-2; 2,5]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом ділення навпіл (дихотомії).

Відзначимо, що цільова функція $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ є строго квазіопуклою на заданому проміжку $[-2; 2,5]$, а точка мінімуму дорівнює $x_* = 1,32472$, $f(x_*) = -4,72903$. Графік функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ на $[-2; 2,5]$ має вигляд (рис. 1.1):

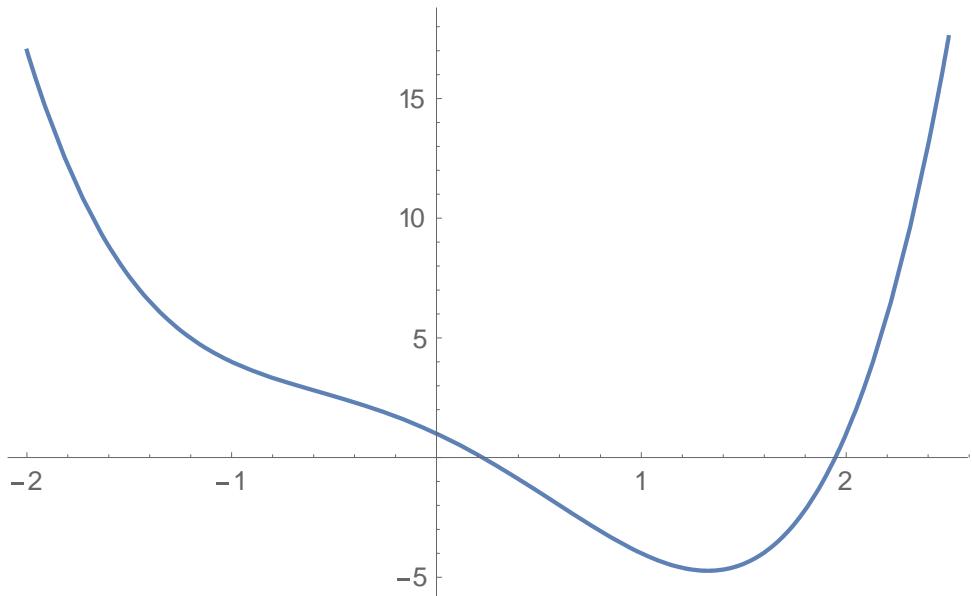


Рис. 1.1

Для заданої функції результати обчислень наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Номер ітерації k	λ_k $f(\lambda_k)$	μ_k $f(\mu_k)$	a_{k+1} $f(a_{k+1})$	b_{k+1} $f(b_{k+1})$	\bar{x}_n $f(\bar{x}_n)$
1	0.24995 -0.120847	0.25005 -0.121341	0,24995 -0.120847	2,5 17.5625	0,25005 -0,121341
2	1.37493 -4.70685	1.37503 -4.70676	0,24995 -0.120847	1.37503 -4.70676	1.37503 -4.70676
3	0,812438 -3,13419	0,812538 -3,1347	0,812438 -3,13419	1.37503 -4.70676	0,812538 -3,1347
4	1,09368 -4,33625	1,09378 -4,33657	1,09368 -4,33625	1.37503 -4.70676	1,09378 -4,33657
5	1,2343 -4,66316	1,2344 -4,6633	1,2343 -4,66316	1.37503 -4.70676	1,2344 -4,6633
6	1,30461 -4,72563	1,30471 -4,72566	1,30461 -4,72563	1.37503 -4.70676	1,30471 -4,72566
7	1,33977 -4,72708	1,33987 -4,72705	1,30461 -4,72563	1,33987 -4,72705	1,33977 -4,72708
8	1,32219 -4,72898	1,32229 -4,72898	1,32219 -4,72898	1,33987 -4,72705	1,32219 -4,72898
9	1,33098 -4,7287	1,33108 -4,72868	1,32219 -4,72898	1,33108 -4,72868	1,33098 -4,7287
10	1,32659 -4,729	1,32669 -4,729	1,32219 -4,72898	1,32669 -4,729	1,32659 -4,729
11	1,32439 -4,72903	1,32449 -4,72903	1,32439 -4,72903	1,32669 -4,729	1,32449 -4,72903
12	1,32549 -4,72903	1,32559 -4,72903	1,32439 -4,72903	1,32559 -4,72903	1,32549 -4,72903
13	1,32494 -4,72903	1,32504 -4,72903	1,32439 -4,72903	1,32504 -4,72903	1,32494 -4,72903

Наблизеним значенням мінімуму функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ на проміжку $[-2; 2,5]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ за методом дихотомії є точка $\bar{x}_n = 1,32494$, $f(\bar{x}_n) = -4,72903$ при 26 обчисленнях значень цільової функції.

За наблизене значення мінімуму також можна взяти точку $\bar{y}_n = (a_{k+1} + b_{k+1}) / 2 = (1,32439 + 1,32504) / 2 = 1,324715$.

2. Знайти мінімум функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ на відрізку $[-2; 2,5]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ золотого перетину. Для заданої функції результати обчислень наведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Номер ітерації k	λ_k $f(\lambda_k)$	μ_k $f(\mu_k)$	a_{k+1} $f(a_{k+1})$	b_{k+1} $f(b_{k+1})$	\bar{x}_n $f(\bar{x}_n)$
1	-0,281153 1,97277	0,781153 -2,97267	-0,281153 1,97277	2,5 17,5625	0,781153 -2,97267
2	0,781153 -2,97267	1,43769 -4,61236	0,781153 -2,97267	2,5 17,5625	1,43769 -4,61236
3	1,43769 -4,61236	1,84346 -1,6218	0,781153 -2,97267	1,84346 -1,6218	1,43769 -4,61236
4	1,18692 -4,58057	1,43769 -4,61236	1,18692 -4,58057	1,84346 -1,6218	1,43769 -4,61236
5	1,43769 -4,61236	1,59268 -4,00948	1,43769 -4,61236	1,84346 -1,6218	1,59268 -4,00948
6	1,34191 -4,72648	1,43769 -4,61236	1,18692 -4,58057	1,43769 -4,61236	1,34191 -4,72648
7	1,28271 -4,71437	1,34191 -4,72648	1,28271 -4,71437	1,43769 -4,61236	1,34191 -4,72648
8	1,34191 -4,72648	1,37849 -4,70353	1,28271 -4,71437	1,37849 -4,70353	1,34191 -4,72648
9	1,31929 -4,72878	1,34191 -4,72648	1,28271 -4,71437	1,34191 -4,72648	1,31929 -4,72878
10	1,30532 -4,72586	1,31929 -4,72878	1,30532 -4,72586	1,34191 -4,72648	1,31929 -4,72878
11	1,31929 -4,72878	1,32793 -4,72894	1,31929 -4,72878	1,34191 -4,72648	1,32793 -4,72894
12	1,32793 -4,72894	1,33327 -4,7284	1,31929 -4,72878	1,33327 -4,7284	1,32793 -4,72894
13	1,32463 -4,72903	1,32793 -4,72894	1,31929 -4,72878	1,32793 -4,72894	1,32463 -4,72903
14	1,32259 -4,72899	1,32463 -4,72903	1,32259 -4,72899	1,32793 -4,72894	1,32463 -4,72903
15	1,32463 -4,72903	1,32589 -4,72902	1,32259 -4,72899	1,32589 -4,72902	1,32463 -4,72903
16	1,32385 -4,72903	1,32463 -4,72903	1,32385 -4,72903	1,32589 -4,72902	1,32463 -4,72903
17	1,32463 -4,72903	1,32511 -4,72903	1,32385 -4,72903	1,32511 -4,72903	1,32463 -4,72903
18	1,32433 -4,72903	1,32463 -4,72903	1,32433 -4,72903	1,32511 -4,72903	1,32463 -4,72903

Наблизеним значенням мінімуму функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ на проміжку $[-2; 2,5]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ за методом золотого перетину є точка $\bar{x}_n = 1,32463$, $f(\bar{x}_n) = -4,72903$. Було виконано 19 обчислень значень цільової функції.

За наблизене значення мінімуму також можна взяти точку $\bar{y}_n = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} = \frac{1,32433 + 1,32511}{2} = 1,324715$.

3. Знайдемо наблизене значення точки мінімуму функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом Фібоначчі. В цьому методі заздалегідь потрібно задати кількість ітерацій n .

Числа Фібоначчі обчислюються за рекурентною формулою:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Наведемо перші 20 чисел Фібоначчі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

Знайдемо число n , яке задовольняє умову

$$F_{n+1} < \frac{b-a}{\varepsilon} \leq F_{n+2}.$$

Для цього прикладу $\frac{b-a}{\varepsilon} = 4500$ і $F_{19} < 4500 \leq F_{20}$. Отже, $n = 18$.

Для заданої функції результати обчислень наведені в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Номер ітерації k	λ_k $f(\lambda_k)$	μ_k $f(\mu_k)$	a_{k+1} $f(a_{k+1})$	b_{k+1} $f(b_{k+1})$	\bar{x}_n $f(\bar{x}_n)$
1	-0,281153 1,97277	0,781153 -2,97267	-0,281153 1,97277	2,5 17,5625	0,781153 -2,97267
2	0,781153 -2,97267	1,43769 -4,61236	0,781153 -2,97267	2,5 17,5625	1,43769 -4,61236
3	1,43769 -4,61236	1,84346 -1,6218	0,781153 -2,97267	1,84346 -1,6218	1,43769 -4,61236
4	1,18692 -4,58058	1,43769 -4,61236	1,18692 -4,58058	1,84346 -1,6218	1,43769 -4,61236
5	1,43769 -4,61236	1,59268 -4,00947	1,18692 -4,58058	1,59268 -4,00947	1,43769 -4,61236
6	1,34191 -4,72648	1,43769 -4,61236	1,18692 -4,58058	1,43769 -4,61236	1,34191 -4,72648
7	1,28271 -4,71437	1,34191 -4,72648	1,28271 -4,71437	1,43769 -4,61236	1,34191 -4,72648
8	1,34191 -4,72648	1,37849 -4,70354	1,28271 -4,71437	1,37849 -4,70354	1,34191 -4,72648
9	1,31929 -4,72878	1,34191 -4,72648	1,28271 -4,71437	1,34191 -4,72648	1,31929 -4,72878
10	1,30532 -4,72586	1,31929 -4,72878	1,30532 -4,72586	1,34191 -4,72648	1,31929 -4,72878

Продовження таблиці 1.3

Номер ітерації k	λ_k $f(\lambda_k)$	μ_k $f(\mu_k)$	a_{k+1} $f(a_{k+1})$	b_{k+1} $f(b_{k+1})$	\bar{x}_n $f(\bar{x}_n)$
11	1,31929 -4,72878	1,32794 -4,72894	1,31929 -4,72878	1,34191 -4,72648	1,32794 -4,72894
12	1,32794 -4,72894	1,33326 -4,72841	1,31929 -4,72878	1,33326 -4,72841	1,32794 -4,72894
13	1,32461 -4,72903	1,32794 -4,72894	1,31929 -4,72878	1,32794 -4,72894	1,32461 -4,72903
14	1,32262 -4,72899	1,32461 -4,72903	1,32262 -4,72899	1,32794 -4,72894	1,32461 -4,72903
15	1,32461 -4,72903	1,32594 -4,72902	1,32262 -4,72899	1,32594 -4,72902	1,32461 -4,72903
16	1,32395 -4,72903	1,32461 -4,72903	1,32395 -4,72903	1,32594 -4,72902	1,32461 -4,72903
17	1,32461 -4,72903	1,32528 -4,72903	1,32395 -4,72903	1,32528 -4,72903	1,32461 -4,72903
18	1,32461 -4,72903	1,32461 -4,72903	1,32395 -4,72903	1,32461 -4,72903	1,32461 -4,72903

Наблизеним значенням мінімуму функції $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x + 1$ на проміжку $[-2; 2,5]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ за методом Фібоначчі є точка $\bar{x}_n = 1,32461$, $f(\bar{x}_n) = -4,72903$. Було виконано 19 обчислень значень цільової функції.

4. Знайти мінімум функції $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 2x + 4$ на відрізку $[-2; 2]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$ методами одновимірної оптимізації.

Задана функція не є строго квазіопуклою (рис. 1.2.). Ця функція на відрізку $[-2; 2]$ має глобальний мінімум $x_{\text{глоб}}^* = 1,29923$, $f(x_{\text{глоб}}^*) = -1,05571$ та локальний мінімум $x_{\text{лок}}^* = -0,936247$, $f(x_{\text{лок}}^*) = -0,0619886$.

Розглянуті методи є методами пошуку локального мінімуму і умова, що для строго квазіопуклої функції локальний мінімум є глобальним, є істотною. Для наведеної функції при заданих параметрах, а саме: $x \in [-2; 2]$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-3}$, усі три методи збігаються до локального мінімуму (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Метод	Наближене значення мінімуму, значення цільової функції, кількість ітерацій
Метод дихотомії	$\bar{x}_n = -0,929955$, $f(\bar{x}_n) = -0,0614219$, $n = 10$
Метод золотого перетину	$\bar{x}_n = -0,935128$, $f(\bar{x}_n) = -0,0619706$, $n = 14$
Метод Фібоначчі	$\bar{x}_n = -0,937705$, $f(\bar{x}_n) = -0,0619579$, $n = 13$

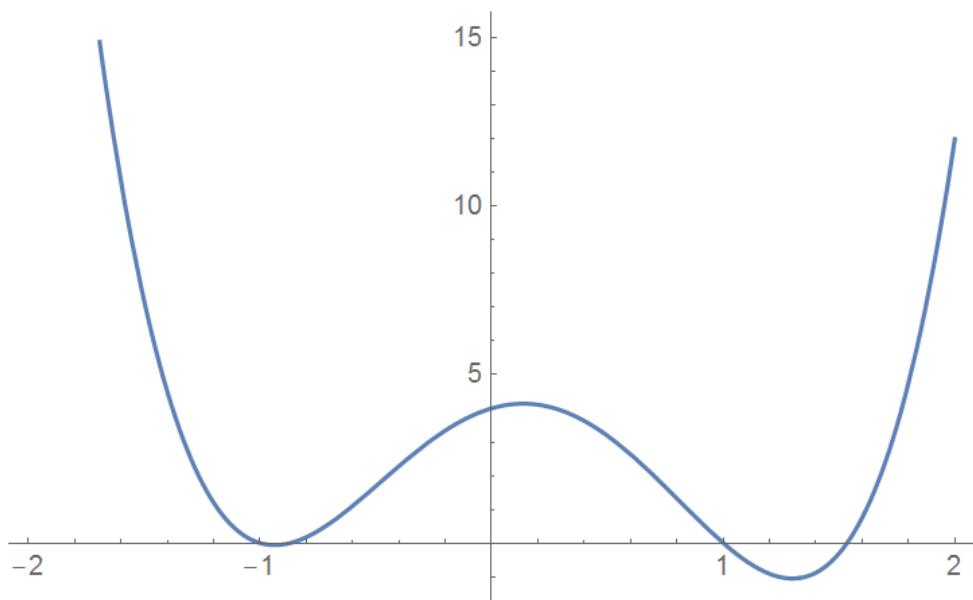


Рис. 1.2

Контрольні запитання

1. Означення глобального і локального мінімумів функції.
2. Що таке стаціонарна точка?
3. Необхідні умови оптимальності.
4. Достатні умови оптимальності.
5. Означення квазіопуклої, строго квазіопуклої, опуклої функцій. Навести графічну ілюстрацію.
6. Основна властивість строго квазіопуклої функції.
7. Загальна ідея методів одновимірної оптимізації.
8. Формули оцінки похибки наближеного розв'язку методу дихотомії.
9. Формули оцінки похибки наближеного розв'язку методу золотого перетину.
10. Формула оцінки похибки наближеного розв'язку методу Фібоначчі.
11. Порівняйте методи ділення інтервалу навпіл, золотого перетину та Фібоначчі, використовуючи в якості показників ефективності характеристику відносного зменшення вихідного інтервалу та кількість обчислень значення функції, необхідне для досягнення заданої точності.

Лабораторна робота №2

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета: Познайомитись практично з ітераційними методами розв'язання задач безумовної оптимізації.

Постановка задачі

Розв'язати задачу безумовної оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in E^n. \quad (2.1)$$

1. Знайти точку мінімуму функції $f(x)$ класичним методом.
2. Зробити кілька кроків (не менше двох) методом найшвидшого спуску з розв'язанням задачі одновимірної оптимізації класичним методом.
3. Розробити програму знаходження оптимального розв'язку задачі безумовної оптимізації градієнтним методом з дробленням кроку. Застосувати її для знаходження оптимального розв'язку для заданих індивідуальним варіантом функцій із заданою точністю ε .
4. Розробити програму знаходження оптимального розв'язку задачі безумовної оптимізації методом Ньютона. Застосувати її для знаходження оптимального розв'язку для заданих індивідуальним варіантом функцій із заданою точністю ε .
5. Виконати геометричну інтерпретацію отриманих результатів за трьома методами. Для цього побудувати на площині лінії рівня, траекторії наближення до точки мінімуму.

Теоретичні відомості

Загальна схема ітераційних методів для розв'язання задачі безумовної мінімізації має вигляд

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

де $p^{(k)}$ – напрямок спадання функції $f(x)$ (напрямок спуску) в точці $x^{(k)}$, α_k – параметр, який регулює довжину кроку вздовж $p^{(k)}$.

Методи монотонного спуску

$$f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}) \quad (2.3)$$

називають *релаксаційними* методами. Відповідна послідовність $\{x^{(k)}\}_0^\infty$ називається також релаксаційною. Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці $x^{(k)} \in E^n$, то релаксаційність методу (2.1) забезпечується тоді, коли напрямок $p^{(k)}$ складає нетупий кут з напрямком градієнта $f'(x^{(k)})$, тобто

$$(f'(x^{(k)}), p^{(k)}) \geq 0.$$

Основна властивість градієнту. Нехай $f(x)$ диференційовна в точці $x^{(k)}$ і $f'(x^{(k)}) \neq 0$. Напрямок найшвидшого зростання функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$ співпадає з напрямком градієнта $f'(x^{(k)})$ у цій точці, а напрямок найшвидшого спадання – з напрямком антиградієнта $(-f'(x^{(k)}))$.

Критерії закінчення ітераційного процесу (2.2)

На практиці часто використовуються такі умови закінчення розрахунків:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon_1, \quad (2.4)$$

$$|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| \leq \varepsilon_2, \quad (2.5)$$

$$\|f'(x^{(k+1)})\| \leq \varepsilon_3. \quad (2.6)$$

До початку обчислень вибирається одна з умов (2.4)-(2.6) і відповідне їй мале довільне число $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, 3}$. Обчислення закінчуються після $(k+1)$ -го кроку, якщо вперше виявляється виконаною обрана умова зупинки. На практиці також використовуються критерії, які складаються в одночасному виконанні двох з умов (2.4)-(2.6) або всіх трьох.

Градієнтні методи

Постановка задачі і умова застосування градієнтних методів:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in E^n, \quad f(x) \in C^1(E^n). \quad (2.7)$$

У градієнтних методах за напрямок спуску $p^{(k)}$ з точки $x^{(k)}$ вибирається антиградієнт функції $f(x)$ у точці $x^{(k)}$, тобто

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k f'(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

або в координатній формі

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \alpha_k \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Різні способи вибору величини α_k ($\alpha_k > 0$) у методі (2.8) визначають різні варіанти градієнтних методів.

1. Метод найшвидшого спуску

На промені $\left\{ x \in E^n : x = x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)}), \alpha \geq 0 \right\}$, який направлений за антиградієнтом з точки $x^{(k)}$, введемо функцію $g_k(\alpha) = f(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)}))$, $\alpha \geq 0$ і визначимо α_k з умови

$$g_k(\alpha_k) = \min_{\alpha \geq 0} g_k(\alpha), \quad \alpha_k > 0. \quad (2.9)$$

Метод (2.8), (2.9), в якому кроковий множник α_k вибирається з умови мінімізації функції $f(x)$ вздовж напрямку антиградієнта, носить назву методу найшвидшого спуску.

2. Градієнтний метод з дробленням кроку

Вибираються певні константи $\beta > 0$, $0 < \lambda < 1$ (часто $\lambda = \frac{1}{2}$). Для коефіцієнта $\alpha = \beta$ перевіряється умова монотонності

$$f\left(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})\right) < f(x^{(k)}). \quad (2.10)$$

Якщо (2.10) виконана, то покладають $\alpha_k = \alpha$. Якщо ні, то проводиться дроблення кроку, тобто приймається $\alpha = \lambda \cdot \beta$, і знову перевіряється виконання умови (2.10). Процес дроблення продовжується доти, поки умова (2.10) не виявиться виконаною. Цей процес не може бути нескінченим, так як $(-f'(x^{(k)}))$ – напрямок спадання. Перше α , для якого умова (2.10) виявиться виконаною, приймається за α_k .

3. Градієнтний метод з адаптивним вибором кроку

Виберемо α_k з умови:

$$f\left(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})\right) - f(x^{(k)}) \leq -\varepsilon \alpha_k \|f'(x^{(k)})\|^2, \quad (2.11)$$

де $0 < \varepsilon < 1$ – довільна стала (однакова на всіх ітераціях), яка називається параметром методу. Якщо ε дуже мале, то метод може збігатися повільно, а якщо ε дуже велике, то ускладняється вибір методу α_k з умови (2.11). Наведемо алгоритм вибору α_k на k -ї ітерації:

- 1) вибираємо деяке довільне α (однакове на всіх ітераціях) і визначаємо точку $x = x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})$,
- 2) обчислимо $f(x) = f\left(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})\right)$,
- 3) перевіримо нерівність (2.11) при $\alpha_k = \alpha$,
- 4) якщо нерівність (2.11) виконано, то значення α вибираємо за α_k і переходимо до наступної ітерації. У протилежному випадку проводимо дроблення α (помножуючи його на довільне число $0 < \lambda < 1$) поки нерівність (2.11) не буде виконаною. Тоді переходимо до наступної ітерації.

Відзначимо, що з виконання нерівності (2.11) випливає виконання нерівності (2.10). Цей градієнтний метод найбільш часто використовується на практиці.

Збіжність градієнтних методів

Розглянуті варіанти градієнтних методів за своїми властивостями близькі один до одного. Вони можуть використовуватися для мінімізації

функцій, які належать одному класу функцій, при цьому швидкість збіжності (в тих випадках, коли її вдається оцінити) приблизно однакова.

Тому сформулюємо теореми про збіжність тільки для методу найшвидшого спуску, який визначається формулами (2.8), (2.9).

Теорема 1. Нехай

- 1) функція $f(x)$ диференційовна на E^n ;
- 2) функція $f(x)$ обмежена знизу на E^n , тобто $\inf f(x) = f_* > -\infty$;
- 3) її градієнт задовольняє умову Ліпшица:

$$\|f'(\bar{x}) - f'(\bar{z})\| \leq L \|\bar{x} - \bar{z}\|, \text{ для } \forall \bar{x}, \bar{z} \in E^n, \quad (2.12)$$

де L – константа Ліпшица.

Тоді для послідовності $\{x^{(k)}\}_0^\infty$, яку отримано за формулами (2.8), (2.9),

має місце $\|f'(x^{(k)})\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ для будь-якої початкової точки $x^{(0)}$.

- 4) Якщо при цьому множина $M(x^{(0)}) = \{x \in E^n : f(x) \leq f(x^{(0)})\}$ – обмежена, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, S_*) = 0,$$

де $S_* = \{x \in M(x^{(0)}) : f'(x) = 0\}$ – множина стаціонарних точок функції $f(x)$ на $M(x^{(0)})$, $\rho(x^{(k)}, S_*)$ – відстань від точки $x^{(k)}$ до множини S_* стаціонарних точок функції $f(x)$.

У випадку виконання умов теореми 1 метод найшвидшого спуску забезпечує тільки збіжність до множини стаціонарних точок S_* , але при таких умовах неможливо оцінити швидкість збіжності і стверджувати збіжність до множини точок мінімуму X_* .

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми 1 і, окрім того, функція $f(x)$ опукла на E^n , тоді для послідовності $\{x^{(k)}\}_0^\infty$, яку отримано за формулами (2.8)–(2.9), мають місце такі твердження:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f_*$, тобто послідовність $\{x^{(k)}\}_0^\infty$ є мінімізуючою,
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^{(k)}, X_*) = 0$, послідовність $\{x^{(k)}\}_0^\infty$ збігається до множини точок мінімуму X_* ,
- 3) справедлива така оцінка за функцією:

$$0 \leq f(x^{(k)}) - f(x_*) \leq 4D^2 L \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

де $D = \sup_{x, x' \in M(x^{(0)})} \|x - x'\|$ – діаметр множини $M(x^{(0)})$.

У теоремі 2 оцінюється швидкість збіжності за функцією. Оцінка швидкості збіжності за змінною можлива лише при більш жорстких припущеннях відносно властивостей функції $f(x)$.

Теорема 3. Нехай $f(x)$ – двічі неперервно-диференційовна функція, її матриця других частинних похідних $f''(x)$ задовольняє умову:

$$m \|z\|^2 \leq (f''(x) z, z) \leq M \|z\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \forall x, z \in E^n. \quad (2.14)$$

Тоді послідовність $\{x^{(k)}\}_0^\infty$, яку отримано за формулами (2.8)-(2.9), збігається до точки мінімуму зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником $q = (M - m) / (M + m)$ (з лінійною швидкістю), тобто при достатньо великих k виконується нерівність

$$\|x^{(k+1)} - x_*\| \leq \frac{M - m}{M + m} \|x^{(k)} - x_*\|. \quad (2.15)$$

Функція $f(x)$, яка задовольняє умові (2.14), називається *сильно опуклою*.

Геометричний зміст градієнтних методів

1. У точці $x^{(k+1)}$, яка визначається за формулами (2.8)-(2.9), градієнт $f'(x^{(k+1)})$ є ортогональним ліній рівня $\Gamma^{(k+1)} = \{x \in E^n : f(x) = f(x^{(k+1)})\}$.
2. Для методу найшвидшого спуску напрямки спуску $(-f'(x^{(k)}))$ та $(-f'(x^{(k+1)}))$ на двох послідовних ітераціях взаємно ортогональні.
3. Градієнтний метод (відмінний від методу найшвидшого спуску) генерує послідовність точок $\{x^{(k)}\}_0^\infty$, які утворюють зигзагоподібну траєкторію $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$.

Метод Ньютона

Постановка задачі і умова застосування методу Ньютона:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in E^n, \quad f(x) \in C^2(E^n). \quad (2.16)$$

Метод Ньютона є методом другого порядку, тобто використовує обчислення других похідних функції $f(x)$, яка мінімізується.

У методі Ньютона послідовність $\{x^{(k)}\}_0^\infty$ генерується виходячи з квадратичної апроксимації цільової функції.

Ітераційна формула методу Ньютона має вигляд:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [f''(x^{(k)})]^{-1} f'(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Теорема про збіжність методу Ньютона. Нехай

1. Функція $f(x)$ є двічі неперервно-диференційовна на E^n .

2. Функція $f(x)$ є сильно опуклою на E^n :

$$m \|z\|^2 \leq (f''(x) z, z) \leq M \|z\|^2, \quad 0 < m \leq M, \quad \forall x, z \in E^n.$$

3. Матриця других похідних (матриця Гессе) задовольняє умові Ліпшиця:

$$\|f''(x) - f''(z)\| \leq L \|x - z\|, \text{ для } \forall x, z \in E^n, \quad L > 0.$$

4. Початкове наближення $x^{(0)}$ таке, що

$$\|f'(x^{(0)})\| \leq \frac{8M^2}{L} \text{ або } \|f'(x^{(0)})\| = \frac{8M^2 q}{L}, \text{ де } q \in (0, 1). \quad (2.18)$$

Тоді послідовність (2.17) збігається до точки мінімуму з квадратичною швидкістю і має місце така оцінка:

$$\|x^{(k)} - x_*\| \leq \frac{4M}{L} q^{2^k}, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (2.19)$$

Збіжність методу Ньютона доведено лише для достатньо близького до точки мінімуму початкового наближення $x^{(0)}$. Для розташованих далеко від точки мінімуму початкових наближень метод може розбігатися. При цьому умову (2.18), яка гарантує збіжність методу для даного початкового наближення, на практиці важко перевірити у силу того, що константи M і L , як правило, невідомі.

Залежність збіжності методу від початкового наближення є недоліком методу Ньютона. Ще одним недоліком є висока трудомісткість, яка обумовлена необхідністю обчислення і обертання на кожному кроці матриці Гессе.

У зв'язку з названими вище обставинами застосування класичного методу Ньютона далеко не завжди призводить до успіху. Модифікації його направлені на те, щоб зберігаючи основну перевагу методу Ньютона – швидку збіжність – зменшити трудомісткість та ослабити вимоги до вибору початкового наближення.

Модифікація методу Ньютона (метод Ньютона з регулюванням кроку)

Розглянемо метод

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k \left[f''(x^{(k)}) \right]^{-1} f'(x^{(k)}), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.20)$$

який називається методом Ньютона з регулюванням кроку. При $\alpha_k = 1$ він співпадає з класичним методом Ньютона.

Вибір коефіцієнтів α_k в (2.20) здійснюється аналогічно градієнтним методам.

Наприклад, адаптивний спосіб визначення α_k . Виберемо α_k з умови:

$$f\left(x^{(k)} - \alpha_k \left[f''(x^{(k)}) \right]^{-1} f'(x^{(k)})\right) - f(x^{(k)}) \leq \varepsilon \alpha_k \left(f'(x^{(k)}), p^{(k)} \right), \quad (2.21)$$

де $0 < \varepsilon < 1$ – довільна стала (однакова на всіх ітераціях), яка називається параметром методу.

Знаходження α_k з умови мінімізації цільової функції уздовж заданого напрямку $p^{(k)}$:

$$f\left(x^{(k)} - \alpha_k \left[f''(x^{(k)}) \right]^{-1} f'(x^{(k)})\right) = \min_{\alpha \geq 0} f\left(x^{(k)} - \alpha \left[f''(x^{(k)}) \right]^{-1} f'(x^{(k)})\right). \quad (2.22)$$

Можна показати, що вказані варіанти методу (2.20) збігаються для будь якого початкового наближення $x^{(0)} \in E^n$. При цьому швидкість збіжності буде або надлінійною, або квадратичною залежно від вимог, яким буде задовольняти цільова функція $f(x)$.

Зменшити трудомісткість методу можна, якщо обчислювати матрицю Гессе не на кожному кроці, як це робиться в (2.20), а один раз через кожні s кроків. Підбираючи емпіричним шляхом s , іноді вдається отримати за допомогою цього методу непогані результати. Однак, істотного зменшення трудомісткості методу Ньютона цей прийом не дає.

Приклади чисельної реалізації

1. Розглянемо задачу мінімізації квадратичної функції

$$f(x) = 7x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 10x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in E^2.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі є точка $x_* = (-1.00, 1.00)$, $f(x_*) = -5$. Лінії рівня цієї функції наведено на рис. 2.1.

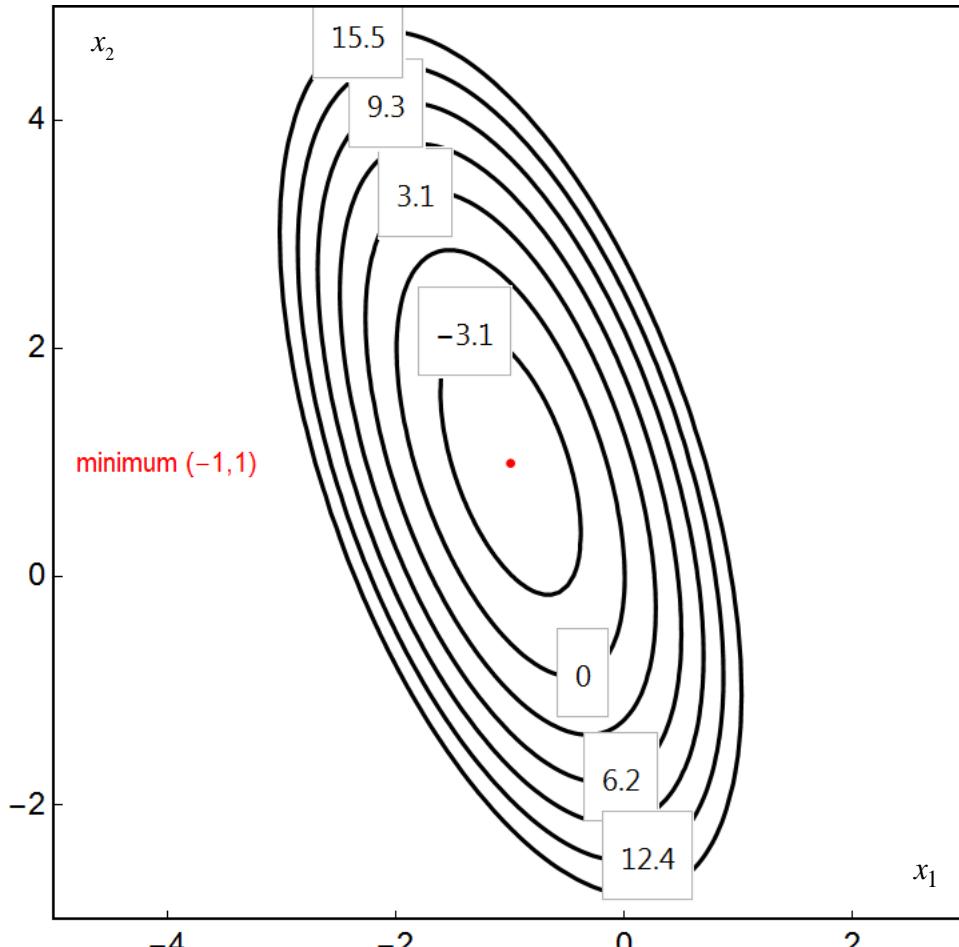


Рис. 2.1

Знайдемо точку мінімуму функції $f(x)$ класичним методом. Градієнт цієї функції має вигляд:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 14x_1 + 4x_2 + 10 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

За необхідної умови мінімуму маємо:

$$\begin{cases} 14x_1 + 4x_2 + 10 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Будуємо матрицю других похідних (гесіан):

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Кутові мінори $M_1 = 14 > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 40 > 0$. Отже, гесіан є додатно визначений, тобто точка $x^* = (-1, 1)$ є точкою мінімуму і $f(x^*) = -5$.

2. Знайдемо два перші наближення до точки мінімуму функції $f(x)$ за методом найшвидшого градієнтного спуску.

Нехай $x^{(0)} = (0, 0)^T$ – початкова точка, $f(x^{(0)}) = 0$. Як початкову можна брати будь-яку точку простору E^2 .

Для визначення крокового множника α_k побудуємо функцію $g(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha f'(x^{(k)})\right)$, мінімум якої при $\alpha \geq 0$ необхідно визначити. Ця функція є функцією однієї змінної, таким чином, для знаходження мінімуму можна використати класичний метод або, при програмній реалізації, один з методів одновимірної оптимізації.

Перша ітерація. Обчислимо

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 f'(x^{(0)}),$$

де α_0 – шуканий кроковий множник, $f'(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тоді отримаємо

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10\alpha_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для визначення α_0 побудуємо функцію $g(\alpha_0) = f\left(x^{(0)} - \alpha_0 f'(x^{(0)})\right)$ і знайдемо мінімум цієї функції, тобто

$$g(\alpha_0) = 7 \cdot 100\alpha_0^2 + 4 \cdot (-10\alpha_0) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 10 \cdot (-10\alpha_0) = 700\alpha_0^2 - 100\alpha_0 \rightarrow \min,$$

$$\alpha_0 \geq 0.$$

Знайдемо розв'язок одновимірної задачі оптимізації класичним методом.

$$g'(\alpha_0) = 0 : 1400\alpha_0 - 100 = 0, \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{14}.$$

Таким чином, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(x^{(1)}) = -25/7 \approx -3,57$. Умова монотонності виконується, так як $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

Перевіримо критерій завершення ітераційного процесу, тобто умову $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, де ε – задана точність. Нехай $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \sqrt{\left(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right)^2} = \sqrt{(5/7 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 5/7 > \varepsilon.$$

Друга ітерація. Обчислимо наступну точку $x^{(2)}$:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -20/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 20\alpha_1/7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } g(\alpha_1) = f\left(x^{(1)} - \alpha_1 f'(x^{(1)})\right) = \frac{800}{49}\alpha_1^2 - \frac{400}{49}\alpha_1 - \frac{25}{7} \rightarrow \min, \quad \alpha_1 \geq 0,$$

$$\text{звідки отримаємо } g'(\alpha_1) = \frac{1600}{49}\alpha_1 - \frac{400}{49} = 0 \text{ і } \alpha_1 = \frac{1}{4}.$$

Тоді $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$. $f(x^{(2)}) = -225/49 \approx -4,59$. Умова монотонності виконується, так як $f(x^{(2)}) < f(x^{(1)})$.

Перевіримо критерій завершення ітераційного процесу. Наприклад, умову $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, де ε – задана точність. Нехай $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \sqrt{\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right)^2 + \left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right)^2} = 5/7 > \varepsilon.$$

Наближене значення мінімуму за дві ітерації $x^* = x^{(2)} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$, $f(x^*) \approx -4,59$.

3. Знайдемо наближення до точки мінімуму функції $f(x)$ за градієнтним методом з дробленням кроку. Результати чисельного експерименту наведено у табл. 2.1 при початковому наближенні $x^{(0)} = (0, 0)^T$, $f(x^{(0)}) = 0$, $\alpha_0 = 0,1$. Ітераційна процедура була зупинена при виконанні умови $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-2}$).

Таблиця 2.1

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$-f'(x^{(k)})$	$\ x^{(k+1)} - x^{(k)}\ $
1	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	-3	$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
2	$\begin{pmatrix} -0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$	-4,12	$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$	0,5657
3	$\begin{pmatrix} -0,92 \\ 0,48 \end{pmatrix}$	-4,58	$\begin{pmatrix} 3,2 \\ -0,8 \end{pmatrix}$	0,3299
4	$\begin{pmatrix} -0,824 \\ 0,656 \end{pmatrix}$	-4,789	$\begin{pmatrix} -0,96 \\ -1,76 \end{pmatrix}$	0,2005
5	$\begin{pmatrix} -0,9328 \\ 0,7232 \end{pmatrix}$	-4,8896	$\begin{pmatrix} 1,088 \\ -0,672 \end{pmatrix}$	0,1279
6	$\begin{pmatrix} -0,91616 \\ 0,80704 \end{pmatrix}$	-4,94104	$\begin{pmatrix} -0,1664 \\ -0,8384 \end{pmatrix}$	0,0855
7	$\begin{pmatrix} -0,956352 \\ 0,850688 \end{pmatrix}$	-4,96814	$\begin{pmatrix} 0,40192 \\ -0,43648 \end{pmatrix}$	0,0593
8	$\begin{pmatrix} -0,957734 \\ 0,892954 \end{pmatrix}$	-4,98267	$\begin{pmatrix} 0,013824 \\ -0,422656 \end{pmatrix}$	0,0423
9	$\begin{pmatrix} -0,974088 \\ 0,918866 \end{pmatrix}$	-4,99054	$\begin{pmatrix} 0,163533 \\ -0,259123 \end{pmatrix}$	0,0306
10	$\begin{pmatrix} -0,977911 \\ 0,940955 \end{pmatrix}$	-4,99483	$\begin{pmatrix} 0,0382362 \\ -0,220887 \end{pmatrix}$	0,0224
11	$\begin{pmatrix} -0,985217 \\ 0,955737 \end{pmatrix}$	-4,99717	$\begin{pmatrix} 0,0730604 \\ -0,147827 \end{pmatrix}$	0,0165
12	$\begin{pmatrix} -0,988208 \\ 0,967529 \end{pmatrix}$	-4,99845	$\begin{pmatrix} 0,0299065 \\ -0,11792 \end{pmatrix}$	0,0122
13	$\begin{pmatrix} -0,991729 \\ 0,975801 \end{pmatrix}$	-4,99915	$\begin{pmatrix} 0,0352054 \\ -0,0827147 \end{pmatrix}$	0,009

4. Розв'яжемо задачу методом Ньютона. Матриця других похідних для квадратичної функції є постійною і для заданої функції має вигляд:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обернена до матриці Гессе $f''(x)$ матриця є

$$[f''(x)]^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

За початкове наближення візьмемо точку $x^{(0)} = (0,0)^T$, $f(x^{(0)}) = 0$. За ітераційною формулою (2.17) для першого наближення маємо:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \left[f''(x^{(0)}) \right]^{-1} f'(x^{(0)}),$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, $x_* = x^{(1)}$ – точка мінімуму. Тобто, для квадратичної функції, матриця других похідних $f''(x)$ якої є додатно визначеною, метод Ньютона збігається за одну ітерацію до точного значення мінімуму.

Перші дві ітерації градієнтних методів та метод Ньютона проілюстровані графічно (рис. 2.2).

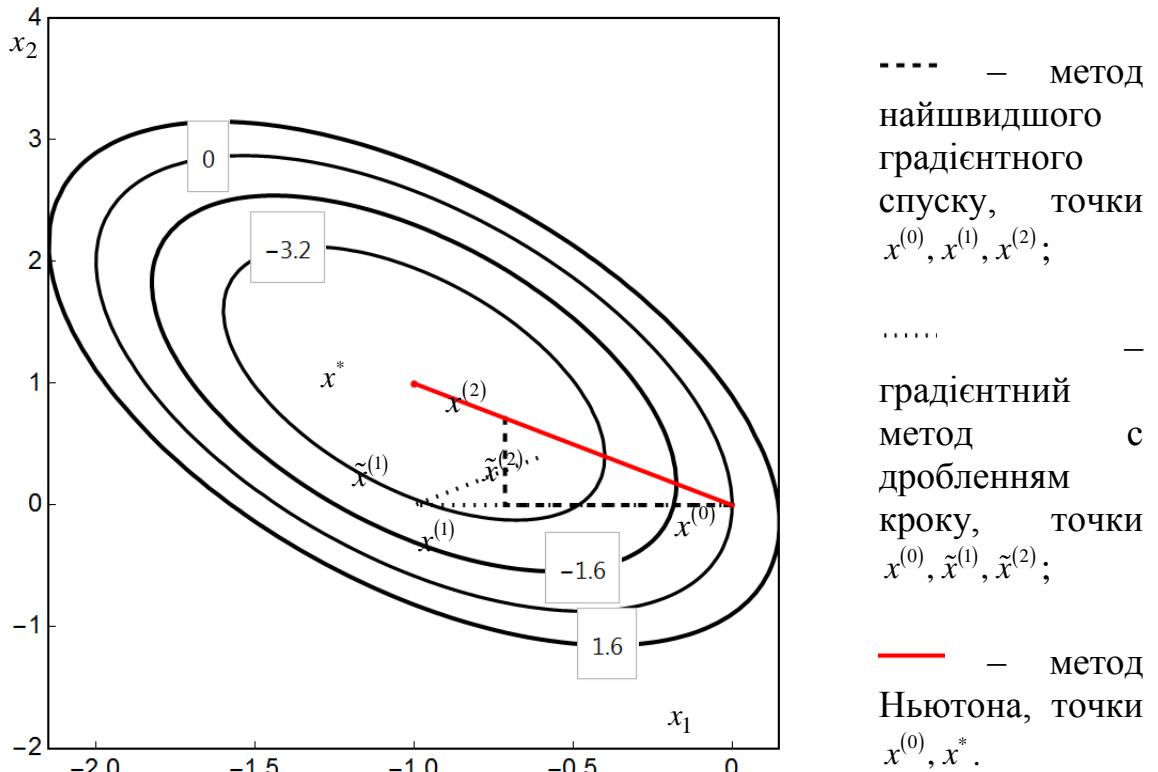


Рис. 2.2

5. Розглянемо функцію $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, яка називається функцією Розенброка (Rosenbrock).

Функція Розенброка – невипукла функція, яка використовується для оцінки продуктивності алгоритмів оптимізації, була запропонована Х. Розенброком в 1960 році. Ця функція має надзвичайно пологий вигнутий яр, що сильно ускладнює пошук. Завдяки "неприємним" для методів пошуку екстремуму особливостям функція Розенброка часто використовується для випробування збіжності різних алгоритмів і для їх порівняння.

Функція Розенброка має декілька локальних мінімумів, але тільки один глобальний мінімум, який знаходиться в точці $x_* = (1, 1)$, $f(x_*) = 0$.

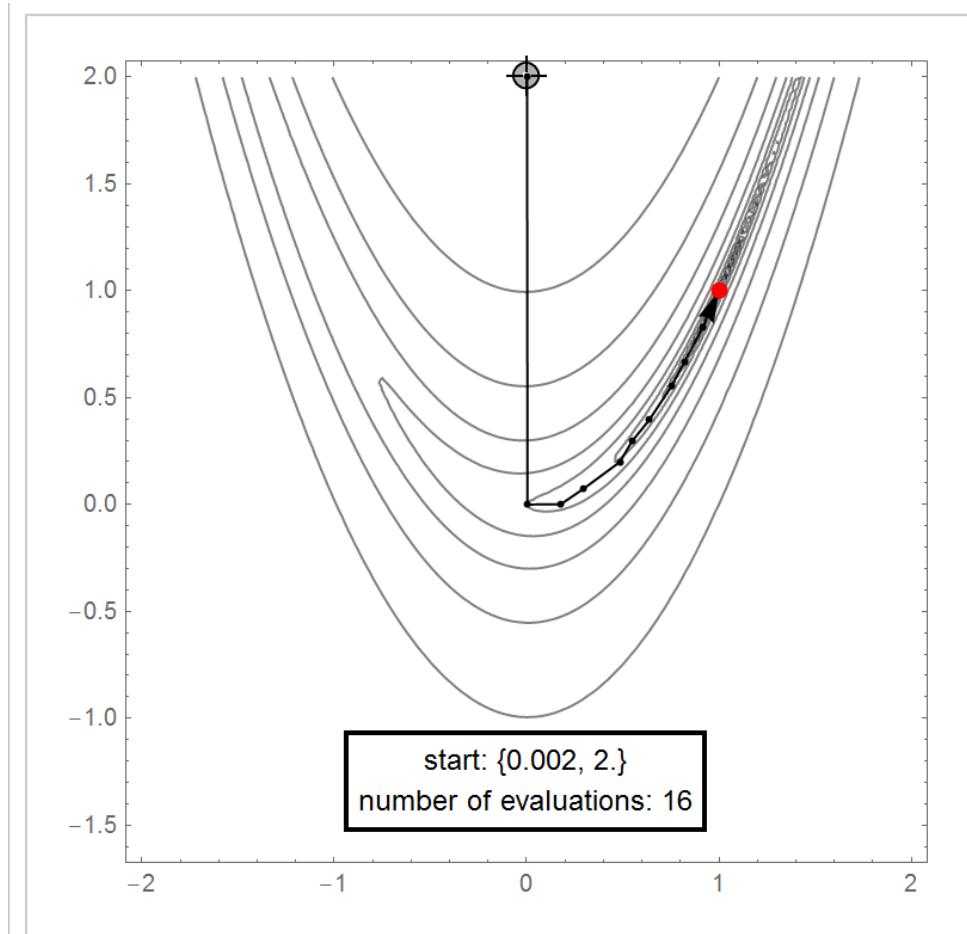


Рис. 2.3.

Рис. 2.3 ілюструє збіжність методу Ньютона з початкової точки $x^{(0)} = (0,002, 2)$ за 16 ітерацій.

Контрольні запитання

1. Класифікація методів безумовної мінімізації функцій багатьох змінних.
2. Що таке градієнт та антиградієнт функцій?
3. Основна властивість градієнту(антиградієнту).
4. В чому полягає суть градієнтних методів пошуку оптимуму?
5. Чим градієнтний метод з дробленням кроку відрізняється від методу найшвидшого спуску?
6. До методів якого порядку відноситься метод Ньютона мінімізації функцій багатьох змінних?
7. Дайте визначення матриці Гессе.
8. У яких випадках послідовність, яку побудовано за методом Ньютона, може розбігатися?
9. Критерій порівняння та порівняльна характеристика градієнтних методів багатовимірної оптимізації.

Лабораторна робота №3

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Мета: Познайомитись практично з ітераційними методами розв'язання задач умовної оптимізації.

Постановка задачі

Розв'язати задачу умовної оптимізації:

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (3.1)$$

1. Розробити програму знаходження оптимального розв'язку задачі умовної оптимізації методом умовного градієнту для функцій $f(x)$ при заданій точності ε . Застосувати її для знаходження оптимального розв'язку для заданих індивідуальним варіантом функцій і допустимих областей.
2. Виконати геометричну інтерпретацію отриманих результатів.

Метод умовного градієнта

Метод умовного градієнта є методом лінійної апроксимації (лінеаризації) цільової функції.

Розглянемо задачу

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subset E^n, \quad (3.2)$$

де X – опукла, замкнена, обмежена множина в E^n , $f(x) \in C^1(X)$.

Ітераційна формула методу умовного градієнта має вигляд:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k h^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

де $h^{(k)}$ – напрямок спуску цільової функції $f(x)$ у точці $x^{(k)}$, α_k – параметр, який регулює довжину кроку вздовж $h^{(k)}$.

Для вибору $h^{(k)}$ на k -тій ітерації розв'язується задача мінімізації на множині X лінійної апроксимації цільової функції $f(x)$ в точці $x^{(k)}$, тобто такої функції:

$$\left(f'(x^{(k)}), x - x^{(k)} \right) \rightarrow \min, \quad x \in X. \quad (3.4)$$

Нехай $\bar{x}^{(k)}$ – оптимальний розв'язок задачі (3.4), а $f_k(\bar{x}^{(k)}) = \left(f'(x^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)} \right)$ – оптимальне значення цільової функції задачі (3.4). За теоремою Вейерштраса розв'язок $\bar{x}^{(k)}$ задачі (3.4) завжди існує. Якщо задача (3.4) має декілька оптимальних розв'язків, то обирається один з них.

Враховуючи, що $x^{(k)} \in X$, маємо

$$\min_x f_k(x) = f_k(\bar{x}^{(k)}) \leq f_k(x^{(k)}) = 0.$$

Тому можливі лише два випадки: $f_k(\bar{x}^{(k)}) = 0$ або $f_k(\bar{x}^{(k)}) < 0$.

Якщо $f_k(\bar{x}^{(k)}) = 0$, то $(f'(\bar{x}^{(k)}), \bar{x}^{(k)} - x^{(k)}) \geq f_k(\bar{x}^{(k)}) = 0$ для будь-яких $x \in X$, тобто точка $x^{(k)}$ – стаціонарна точка задачі (3.2). Робота алгоритму завершується, точку $x^{(k)}$ необхідно дослідити на оптимальність. Якщо функція $f(x)$ – опукла функція на множині X , то точка $x^{(k)}$ – розв’язок задачі (3.2).

Нехай тепер $f_k(\bar{x}^{(k)}) < 0$. У цьому випадку $\bar{x}^{(k)} \neq x^{(k)}$. Тоді у формулі (3.3) покладемо $h^{(k)} = \bar{x}^{(k)} - x^{(k)}$ і тоді ітераційна формула (3.2) запишеться у вигляді

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k (\bar{x}^{(k)} - x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

Вектор $h^{(k)}$ прийнято називати *умовним антиградієнтом* цільової функції $f(x)$ у точці $x^{(k)}$.

Так як множина допустимих розв’язків X є опуклою, то для будь-якого α_k з відрізка $[0, 1]$ точка $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k (\bar{x}^{(k)} - x^{(k)}) \in X$.

Способи вибору крокового множника α_k

1. Визначимо α_k з умови:

$$\begin{aligned} g_k(\alpha_k) &= \min_{0 \leq \alpha \leq 1} g_k(\alpha), \\ g_k(\alpha) &= f\left(x^{(k)} + \alpha h^{(k)}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. Адаптивний (автоматичний) вибір крокового множника. Параметр α_k вибирається за правилом дроблення до тих пір, доки не виконається нерівність

$$f\left(x^{(k)} + \alpha_k (\bar{x}^{(k)} - x^{(k)})\right) - f(x^{(k)}) \leq \delta \alpha_k f_k(\bar{x}^{(k)}),$$

де δ – параметр методу, $0 < \delta < 1$.

3. Дроблення кроку. Виберемо $\alpha_k = 1$ і перевіримо виконання умови монотонності $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$, а потім при необхідності дробимо кроковий множник $\alpha_k = \lambda \alpha_k$, $\lambda \in (0, 1)$ доки не буде виконана умова монотонності.
4. Параметр α_k виберемо апріорно:

$$0 < \alpha_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty.$$

Наприклад, за α_k можна узяти $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$.

Умови збіжності методу умовного градієнта

Теорема. Нехай X – замкнена, обмежена, опукла множина в E^n , $f(x) \in C^1(X)$, причому її градієнт задовільняє умову Ліпшиця

$$\|f'(x) - f'(z)\| \leq L \|x - z\|, \text{ для } \forall x, z \in X.$$

Тоді будь-яка гранична точка x_* послідовності $\left\{x^{(k)}\right\}_0^\infty$, що визначається умовами (3.5)-(3.6), є стаціонарною в задачі (3.2), тобто

$$(f'(x_*), x - x_*) \geq 0 \text{ для } \forall x \in X.$$

Якщо при цьому цільова функція $f(x)$ опукла на множині X , то x_* – оптимальний розв'язок задачі (3.2) і $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f_*$, де $f_* = \min_{x \in X} f(x)$.

Критерій завершення ітераційного процесу:

$$\begin{aligned} \left| f_k(\bar{x}^{(k)}) \right| &\leq \varepsilon, \\ \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Приклад чисельної реалізації

Розглянемо задачу

$$f(x) = 7x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 10x_1 \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 7, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 5, \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 15. \end{aligned}$$

Градієнт цільової функції дорівнює $f'(x) = (14x_1 + 4x_2 + 10, 4x_1 + 4x_2)^T$. Ліній рівня та допустиму область наведено на рис. 3.1.

Розв'яжемо цю задачу методом умовного градієнта, взявши за початкову точку вершину допустимої області $x^{(0)} = (5, 5)^T$, $f(x^{(0)}) = 375$. Нехай $\varepsilon = 10^{-3}$.

Ітерація 1. Пошук напряму. У початковій точці $x^{(0)} = (5, 5)^T$ маємо $f'(x^{(0)}) = (100; 40)^T$. Задача для знаходження напряму $h^{(0)}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= (f'(x^{(0)}), x - x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix} = 100x_1 + 40x_2 - 700 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 &\geq 7, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 5, \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 15. \end{aligned}$$

Сформульована задача є задачею лінійного програмування і може бути розв'язана симплекс–методом. Оптимальний розв'язок цієї задачі є точка $\bar{x}^{(0)} = (2, 1)^T$, $f_0(\bar{x}^{(0)}) = -460$. Так як $f_0(\bar{x}^{(0)}) < 0$, обчислюємо вектор

$$h^{(0)} = \bar{x}^{(0)} - x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = (-3, -4)^T.$$

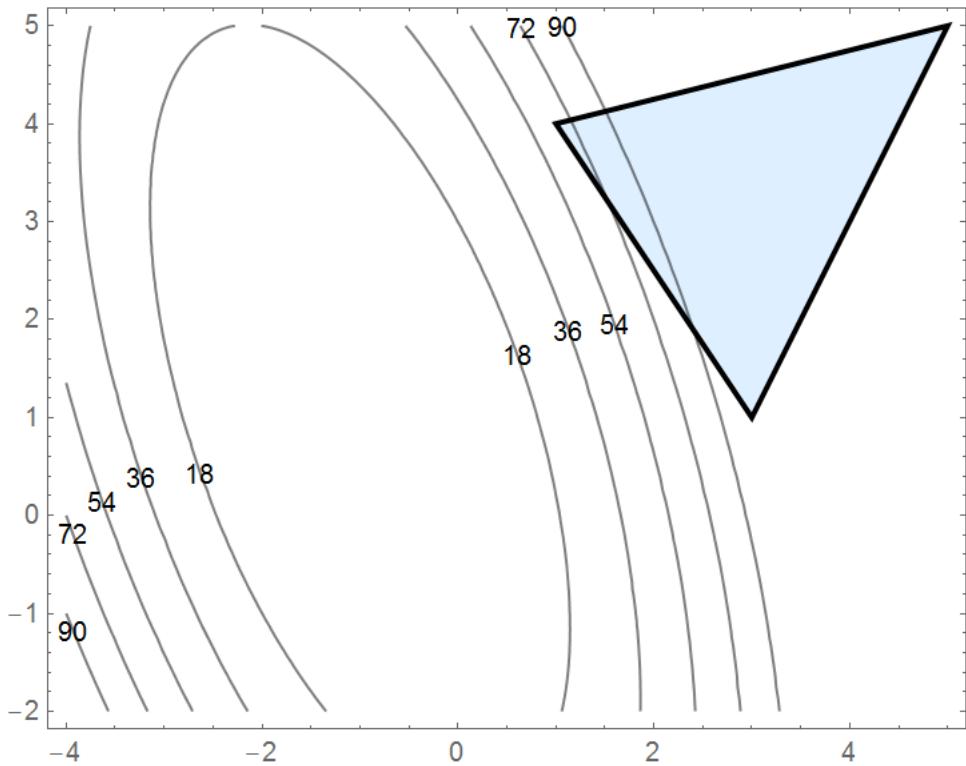


Рис. 3.1.

Лінійний пошук. Будь-яка точка $x^{(1)}$, яку знайдено з точки $x^{(0)}$ у напряму $h^{(0)}$, може бути представлена у вигляді $x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha h^{(0)}$, де $0 \leq \alpha \leq 1$.

Тобто маємо $x^{(1)} = (5, 5)^T + \alpha(-3, -4)^T = (5 - 3\alpha, 5 - 4\alpha)^T$, а відповідне її значення цільової функції дорівнює $f(x^{(0)} + \alpha h^{(0)}) = 143\alpha^2 - 460\alpha + 375$.

Значення α_0 знаходиться з розв'язання такої задачі одновимірної оптимізації:

$$143\alpha^2 - 460\alpha + 375 \rightarrow \min, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Оптимальний розв'язок дорівнює $\alpha_0 = 1$.

Отже, $x^{(1)} = (2, 1)^T$, $f(x^{(1)}) = 58$.

Перевіримо критерій закінчення ітераційного процесу:

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = 5 > \varepsilon$. Критерій не виконується.

Ітерація 2. Пошук напряму. У точці $x^{(1)} = (2, 1)^T$ маємо $f'(x^{(1)}) = (42, 12)^T$. Для знаходження напряму $h^{(1)}$ розв'яжемо таку задачу:

$$f_1(x) = 42x_1 + 12x_2 - 96 \rightarrow \min,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 5,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 15.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі є точка $\bar{x}^{(1)} = (1, 4)^T$, $f_1(\bar{x}^{(1)}) = -6$. Так як $f_1(\bar{x}^{(1)}) < 0$, обчислюємо вектор $h^{(1)} = \bar{x}^{(1)} - x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 3)^T$.

Лінійний пошук. Значення кроку α_1 отримаємо мінімізацією функції $f(x^{(1)} + \alpha h^{(1)}) = 13\alpha^2 - 6\alpha + 58$ за умови $0 \leq \alpha \leq 1$. Оптимальний розв'язок дорівнює $\alpha_1 = \frac{3}{13}$.

Отже, $x^{(2)} = \left(\frac{23}{13}, \frac{22}{13} \right)^T \approx (1,7692; 1,6923)^T$, $f(x^{(2)}) = \frac{745}{13} \approx 57,3077$.

Перевіримо критерій закінчення ітераційного процесу:
 $\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \sqrt{\left(\frac{23}{13} - 2 \right)^2 + \left(\frac{22}{13} - 2 \right)^2} = 0,532544 > \varepsilon$. Критерій не виконується.

Ітерація 3. Пошук напряму. У точці $x^{(2)} = \left(\frac{23}{13}, \frac{22}{13} \right)^T$ маємо $f'(x^{(2)}) = \left(\frac{540}{13}, \frac{180}{13} \right)^T$. Задача для знаходження напряму $h^{(2)}$ має вигляд:

$$f_2(x) = \frac{10}{13}(54x_1 + 18x_2 - 126) \rightarrow \min,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7,$$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 5,$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 15.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі є будь-яка точка відрізку, який з'єднує вершини $(2, 1)^T$ та $(1, 4)^T$. Нехай $\bar{x}^{(2)} = (2, 1)^T$, $f_2(\bar{x}^{(2)}) = 0$. Так як $f_2(\bar{x}^{(2)}) = 0$, то ітераційний процес завершено і точка $x^{(2)} = \left(\frac{23}{13}, \frac{22}{13} \right)^T \approx (1,7692; 1,6923)^T$ є оптимальний розв'язок вихідної задачі.

Контрольні запитання

1. Ідея методу умовного градієнта.
2. Які правила вибору крокового множника використовують в методі умовного градієнта?
3. Які правила використовують для завершення роботи за методом умовного градієнта?
4. Умови застосування методу умовного градієнта.
5. За яких умов послідовні наближення за методом умовного градієнта збігаються до розв'язку задачі умовної мінімізації?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
2. Аоки М. Введение в методы оптимизации / М. Аоки. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
3. Ашманов С. А. Линейное программирование / С. А. Ашманов. – М.: Наука, 1981. – 340 с.
4. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
5. Бейко И. В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И. В. Бейко, Б. Н. Бублик, П. Н. Зинько–Киев: Вища школа, 1983. – 512 с.
6. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: МГУ, 1974. – 374 с.
7. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
8. Жалдак М. І. Основи теорії та методов оптимізації: Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
9. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник / Ю. П. Зайченко. – К., Видавничий дом «Слово», 2000. – 816 с.
10. Зайченко О. Ю. Дослідження операцій. Збірник задач / О. Ю. Зайченко, Ю. П. Зайченко. – К.: Видавничий дом «Слово», 2007. – 472 с.
11. Капустин В. Ф. Практические занятия по курсу математического программирования / В. Ф. Капустин. – Ленинград, изд-во Ленинградского университета, 1976. – 192 с.
12. Кісельова О. М. Чисельні методи оптимізації. Навч. посібник / О. М. Кісельова, А. Є. Шевельова. – Д.: Вид-во ДНУ, 2008. – 212 с.
13. Ляшенко И. Н. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова, Н. З. Шор. – Киев: Вища школа, 1975. – 372 с.
14. Мину М. Математическое программирование / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
15. Моисеев Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
16. Наконечний С. І. Математичне програмування: Навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
17. Попов Ю. Д. Методи оптимізації / Ю. Д. Попов, В. І. Тюптя, В. І. Шевченко. – К.: Ел.вид КНУ, 2003. – 215 с.
18. Пшеничный Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
19. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – М., 1986. – 328 с.
20. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 536 с.

Навчальне видання

Алла Євгенівна Шевельова

Методичні вказівки до лабораторних робіт
за дисципліною
«Методи оптимізації та дослідження операцій»

Підписано до друку 15.06.18. Формат 60×84/16. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. 3,7. Обл.-вид. арк. 3,3. Ум. фарбовідб. 3,7. Тираж 30 прим. Зам. №

Видавництво «Ліра», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49038.
ДК №6042 від 26.02.2018 р.