Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Факультет прикладної математики та інформаційних технологій
Кафедра комп’ютерних технологій

ЗВІТ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 1
з курсу «Комп’ютерні моделі динамічних процесів»
на тему «Ізольовані точки, їх типи. Фазовий портрет.»

Виконав:
студент гр. ПА-22-2
Овдієнко Андрій

Дніпро
2025

Зміст

1. Постановка задачі

Для наступної системи диференціальних рівнянь знайти всі ізолювані особливі точки, встановити їх тип і побудувати фазовий портрет за кількох початкових даних.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1(t)}{dt} = -{x_1}^3 + {x_1}^2 \\ \dfrac{x_2(t)}{dt} = x_1 - {x_2}^3 \end{cases}$$

2. Хід виконання

2.1 Визначити особливі точки даної системи

$$\begin{cases} \dfrac{x_1(t)}{dt} = -{x_1}^3 + {x_1}^2 \\ \dfrac{x_2(t)}{dt} = x_1 - {x_2}^3 \end{cases}$$

Прирівняємо праві частини до нуля.

$$\begin{cases} -{x_1}^3 + {x_1}^2 = 0; \\ x_1 - {x_2}^3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} {x_1}^2(-x_1 + 1) = 0; \\ x_1 = {x_2}^3; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} {x_1}^2 = 0; \\ x_1 = {x_2}^3; \end{cases} \\ \begin{cases} (-x_1 + 1) = 0; \\ x_1 = {x_2}^3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

Можливі дійсні рішення $(x_1; x_2)$: A(0; 0), B(1; 1).

2.2 Обчислення матриці Якобі початкової системи

Матриця Якобі має наступний вигляд.

$$J(x_1; x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{d(-{x_1}^3 + {x_1}^2)}{dx_1} & \dfrac{d(-{x_1}^3 + {x_1}^2)}{dx_2} \\ \dfrac{d(x_1 - {x_2}^3)}{dx_1} & \dfrac{d(x_1 - {x_2}^3)}{dx_2} \end{bmatrix}$$

$$J(x_1; x_2) = \begin{bmatrix} -3(x_1)^2 + 2x_1 & 0 \\ 1 & -3{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

2.3 Обчислення власних чисел матриці Якобі

Для особливої точки A(0;0) маємо наступну матрицю Якобі.

$$J(0; 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Власні значення цієї матриці можна знайти розв'язуючи характеристичне рівняння: $\det(J - \lambda E) = 0$.

$$\det(J(0;0) - \lambda E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)\cdot(-\lambda) - 1\cdot 0 = \lambda^2.$$

$$\lambda^2 = 0;$$

$$\lambda = 0;$$

Вузол нестійкий, ніколи.

Для особливої точки B(1;1) маємо наступну матрицю Якобі.

$$J(1;1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Власні значення цієї матриці можна знайти розв'язуючи характеристичне рівняння: $\det(J - \lambda E) = 0$.

$$\det(J(1;1) - \lambda E) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

$$\det(J(1;1) - \lambda E) = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)\cdot(-3-\lambda) - 1\cdot 0;$$

$$\det(J(1;1) - \lambda E) = 3 + \lambda + 3\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1;$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1; \\ \lambda_2 = -3. \end{array}\right.$$

Стійкий вузол.

2.4 Фазовий портрет

Для фазового портрета була використана програма maple, і задані певні початкові умови:

“

restart;

with(DEtools):

with(plots):

url1 := diff(x1(t), t) = -x1(t)^3+x1(t)^2;

url2 := diff(x2(t), t) = -x2(t)^3+x1(t);

Ics := [[x1(0) = 0, x2(0) = 3], [x1(0) = 0, x2(0) = -3], [x1(0) = -2.5, x2(0) = 0], [x1(0) = 2.5, x2(0) = 0], [x1(0) = 1, x2(0) = 1.5], [x1(0) = -1, x2(0) = -1.5], [x1(0) = 3, x2(0) = 3], [x1(0) = -2.5, x2(0) = 3], [x1(0) = 2.5, x2(0) = -3]];

phaseportrait([url1, url2], [x1(t), x2(t)], t = -1.5 .. 3, Ics, linecolor = black, colour = red, stepsize = 0.1e-2, x1 = -5 .. 5, x2 = -5 .. 5, arrows = medium, thickness = 3, size = [1000, 1000])

".

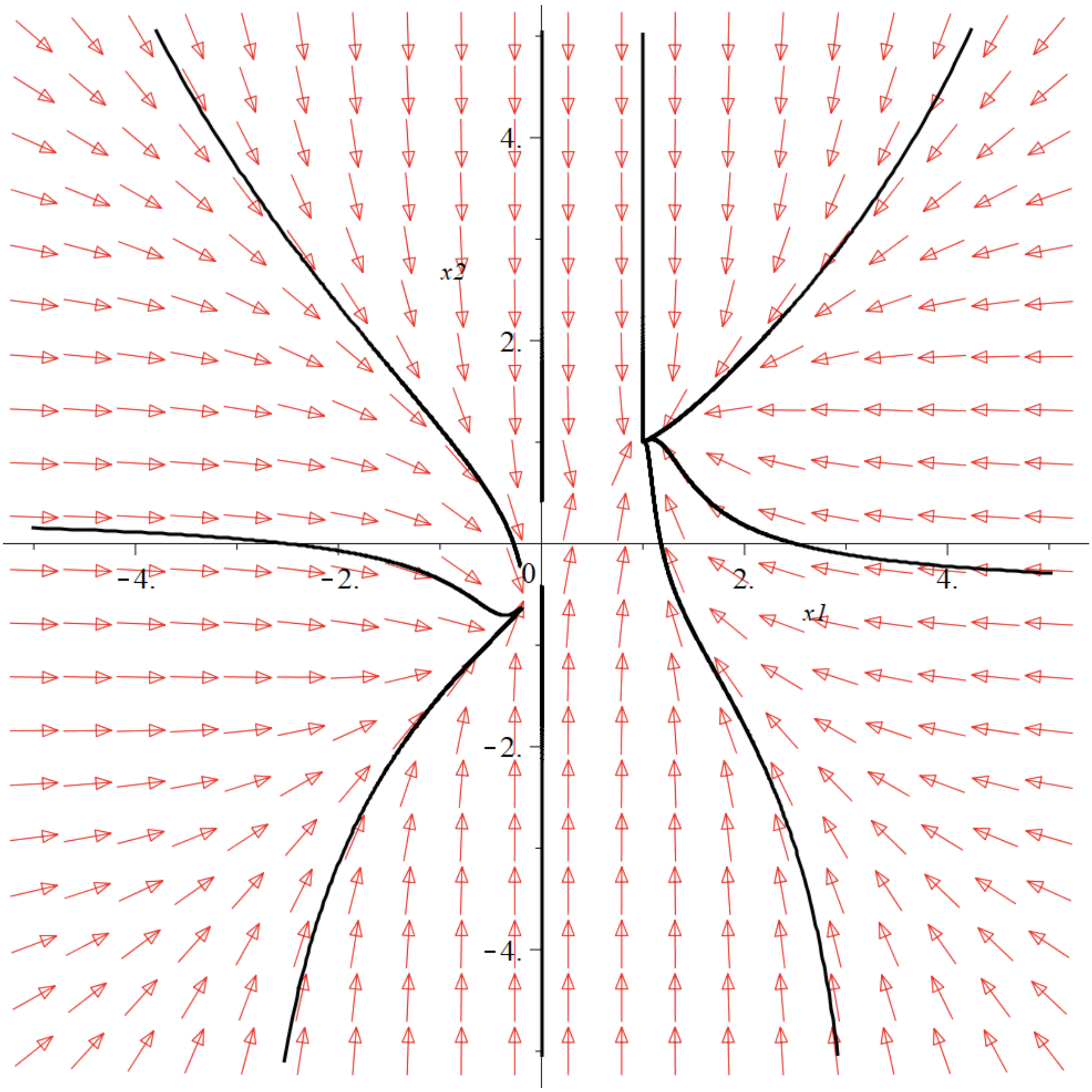

Рисунок 1 – Фазовий портрет.

3. Висновки

Для системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \frac{x_1(t)}{dt} = -{x_1}^3 + {x_1}^2 \\ \frac{x_2(t)}{dt} = x_1 - {x_2}^3 \end{cases}$ знайшли всі ізолювані особливі точки $(\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2) = \{(0;0);(1;1)\}$. Встановили тип: (0;0) - ніколи нестійка; (1;1) – стійкий вузол. Побудували фазовий портрет за кількох початкових даних.