ЗМІСТ

ВСТУП

Посібник "Теорія випадкових процесів" написано відповідно до програми з теорії випадкових процесів для студентів спеціальності "Економічна кібернетика". У курсі "Теорія випадкових процесів" викладаються фундаментальні відомості з кореляційної теорії випадкових процесів, з теорії марковських процесів, процесів Пуассона, необхідні для засвоєння математичного апарату моделювання реальних економічних об'єктів, кількісного аналізу динаміки економічних систем, формування математичної культури спеціаліста економічного напрямку.

Теорія випадкових процесів – основний математичний апарат, що використовується для вивчення стохастичних систем, які моделюють більшість видів господарської діяльності людини.

Практикум складається з розділів:

1. Основні поняття теорії випадкових процесів.
2. Перетворення випадкових процесів.
3. Однорідні ланцюги Маркова з дискретним часом.
4. Однорідні ланцюги Маркова з неперервним часом.
5. Стаціонарні випадкові функції.

У першому розділі дано означення випадкового процесу, наведені закони розподілу випадкових процесів, характеристики випадкових функцій, основні класи випадкових процесів.

У другому розділі вивчаються лінійні перетворення випадкових процесів: диференціювання, інтегрування стохастичного процесу, додавання стохастичних процесів, а також комплексні випадкові процеси.

Третій розділ присвячений однорідним ланцюгам Маркова з дискретним часом. У цьому розділі дано означення ланцюга Маркова, подана класифікація станів, наведені ймовірності багатокрокових переходів системи.

У четвертому розділі розглядаються окремі стохастичні процеси, які є залежними від неперервного параметра, вивчається найпростіший потік подій, наведено правило побудови рівнянь Колмогорова.

П'ятий розділ присвячений стаціонарним випадковим процесам. У цьому розділі дано означення стаціонарного випадкового процесу, розглядаються характеристики стаціонарної випадкової функції.

Усі розділи мають однакову структуру. Кожен із розділів містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, завдання для практичних занять та самостійного розв'язування, питання для самоперевірки.

Розв'язання типових прикладів проведено детально з посиланням на відповідні теореми і формули, виконанням проміжних обчислень. Виклад матеріалу здійснено без використання багатьох спеціальних понять математики, що робить посібник доступним для студентів, які володіють знаннями з математики в обсязі типової програми "Математика для економістів".

Рекомендована література допоможе читачеві поглибити та розширити власну поінформованість з питань, що його зацікавили.

Поєднання у посібнику належної повноти, обґрунтованості, доступності подання матеріалу дає можливість рекомендувати це видання студентам вищих навчальних закладів економічного профілю, які виявляють інтерес до застосування теорії випадкових процесів.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

1.1.1. Основні означення

Теорією випадкових процесів називається математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ у динаміці їх розвитку. Випадкові процеси описують багато фізичних, економічних та виробничих явищ. До них належать броунівський рух, коливання валютних курсів, курсів акцій, ціни на певний товар, банківські активи, кількість заявок на обслуговування в кожний момент часу в різних системах надання послуг. Взагалі *процесом* називається кожне явище, яке розвивається в часі. Наступні означення стохастичного (випадкового) процесу є еквівалентними.

Означення. Стохастичний процес – це процес, реалізація якого залежить від випадку і для якого визначена ймовірність того чи іншого його перебігу.

Означення. Випадковим (стохастичним) процесом називається множина випадкових величин, залежних від одного чи декількох змінних параметрів.

Таким чином, поняття стохастичного процесу узагальнює поняття випадкової величини. Випадковий процес формально є випадковою величиною $X = X(t)$, яка змінюється зі зміною невипадкового аргументу $t \in T$ (T – область визначення випадкового процесу).

Випадковий процес часто називають випадковою функцією. Змінну t нерідко інтерпретують як час.

Означення. Випадковою функцією $X = X(t)$ називають функцію невипадкового аргументу t, яка при кожному фіксованому значенні аргументу є випадковою величиною.

Означення. Перетином випадкового процесу називають випадкову величину, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції.

Приклад 1.1. Задана випадкова функція $X(t) = \left(t^3 + 1\right)U$, де U – випадкова величина. Знайти перетини випадкового процесу при $t_1 = 1$ та $t_2 = 2$.

Розв'язання

При $t_1 = 1$, отримаємо $X_1 = 2U$. Якщо $t_2 = 2$, то відповідна випадкова величина має вигляд $X_1 = 9U$.

Якщо аргумент t послідовно приймає всі значення з області визначення T випадкового процесу $X(t)$, то й усі відповідні випадкові змінні (перетини цього процесу) набудуть певних значень, внаслідок чого одержимо конкретну невипадкову функцію $x(t)$. Отримана таким чином функція $x(t)$ називається *реалізацією процесу* $X(t)$ або траєкторією, вибірковою функцією, а процес набуття аргументом t послідовно всіх значень з області визначення випадкової функції $X(t)$ – експериментом над цим випадковим процесом.

Означення. Реалізацією $x(t)$ (траєкторією) випадкової функції $X(t)$ називають конкретний вигляд, який може прийняти випадкова функція в процесі експерименту.

Приклад 1.2. Задана випадкова функція $X(t) = U \cdot \cos t$, де U – випадкова величина, яка при першому випробуванні набула значення $u_1 = 2$, а при другому випробуванні $u_2 = 5$. Знайти відповідні реалізації випадкової функції.

Розв'язання

Реалізаціями заданої випадкової функції є такі невипадкові функції: $x_1(t) = 2\cos t$ та $x_2(t) = 5\cos t$.

Сім'я реалізацій випадкового процесу – основний емпіричний матеріал, на підставі якого можна оцінити характеристики випадкового процесу. Сім'я реалізацій випадкового процесу аналогічна сукупності спостережуваних значень випадкової величини X, з тією різницею, що в цьому випадку спостерігаються не числові значення, а функції.

Приклад 1.3. Задано випадковий процес $X(t) = t \cdot U + 1$, де $t \in$ $\in [0; +\infty)$, U – випадкова величина, закон розподілу якої задано у вигляді таблиці:

U	–1	1
p	0,6	0,4

Знайти перетин випадкового процесу при $t = 2$. Знайти траєкторії даного процесу.

Розв'язання

Перетином випадкового процесу $X(t)$ при $t=2$ є випадкова величина $X(2)=2U+1$, закон розподілу якої має вигляд:

$X(2)$	–1	3
p	0,6	0,4

Траєкторіями даного процесу є функції $x_1(t)=t\cdot(-1)+1=1-t$ та $x_2(t)=t+1$.

1.1.2. Класифікація випадкових процесів

Випадкові процеси описують різноманітні системи, зокрема економічні та фінансові. Випадковий процес, який відбувається в системі S, полягає в тому, що з плином часу t система S у випадковий спосіб змінює свій стан. Якщо система S у момент t описується однією скалярною випадковою величиною X, то ми маємо справу із скалярним випадковим процесом $X(t)$. Якщо стан системи S у момент t описується декількома випадковими величинами $X_1, X_2, ..., X_k$, то ми маємо справу з векторним випадковим процесом $X(t)$.

У теорії випадкових процесів їх прийнято класифікувати залежно від структури множини станів системи та структури множини значень аргументу t. Таким чином, випадкові процеси поділяють на такі основні класи:

- процеси з дискретними станами і дискретним часом;
- процеси з дискретними станами і неперервним часом;
- процеси з неперервними станами і дискретним часом;
- процеси з неперервними станами і неперервним часом.

Означення. Випадковий процес $X(t)$ називається *процесом з дискретним часом,* якщо система, в якій він відбувається, може змінювати свої стани лише в моменти $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ дискретної множини часу. Область визначення такого процесу є дискретною множиною $\{t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$.

Означення. Випадковий процес $X(t)$ називається *процесом з неперервним часом*, якщо система, в якій він відбувається, може переходити зі стану в стан у будь-який момент часу t (при будь-якому значенні аргументу).

Означення. Випадковий процес $X(t)$ називається *процесом з неперервними станами*, якщо всі його перетини при будь-якому значенні аргументу t є неперервними випадковими величинами.

Множина значень кожної такої випадкової змінної є незчисленною.

Означення. Випадковий процес $X(t)$ називається *процесом з дискретними станами,* якщо кожен його перетин у будь-який момент часу t є дискретною випадковою величиною.

Множина станів системи скінченна або зчисленна.

Приклади випадкових процесів:

- технічний пристрій містить n елементів, які працюють незалежно один від одного і у процесі роботи можуть виходити з ладу. Випадковий процес $X(t)$ – кількість елементів, які можуть вийти з ладу до моменту часу t, є процесом із дискретними станами і неперервним часом;
- у певні моменти часу $t_1, t_2, \ldots t_n, ..$ вимірюється температура повітря в деякій місцевості. Послідовність значень цієї величини є випадковим процесом $X(t)$ із неперервними станами і дискретним часом;
- процес зміни напруги в електромережі являє собою випадковий процес із неперервними станами і неперервним часом.

Для різних типів випадкових процесів розроблені різні методи їх опису і вивчення.

1.1.3. Елементарні випадкові функції

Випадкові процеси зручно подавати у вигляді найпростіших елементарних функцій.

Означення. Елементарною випадковою функцією називається функція аргументу t, в якій залежність від t подається звичайною невипадковою функцією, яка як параметри містить одну або кілька звичайних, незалежних від t випадкових величин.

Приклад 1.4. Елементарна випадкова функція має вигляд:

$$Y(t) = X \cdot e^{-t},$$

де $t > 0$, X – неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $(-1;1)$.

Відповідна множина реалізацій $y_i(t)$ зображена на рис. 1.1.

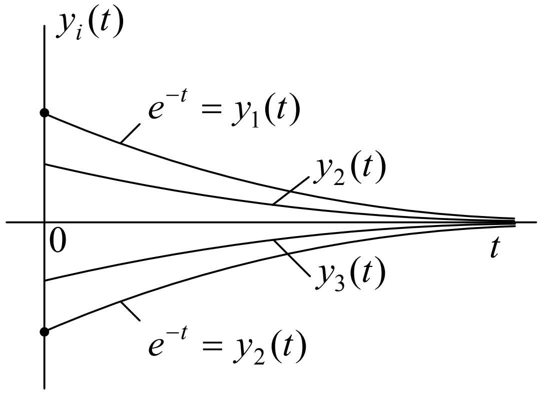


Рис. 1.1

Приклад 1.5. Елементарна випадкова функція має вигляд:

$$Y(t) = at + X,$$

де X – випадкова величина,
a – невипадкова величина.

Відповідна множина реалізацій $y_i(t)$ – сукупність прямих, паралельних прямій $y = at$, зображена на рис. 1.2. Реалізації відрізняються початковими координатами.

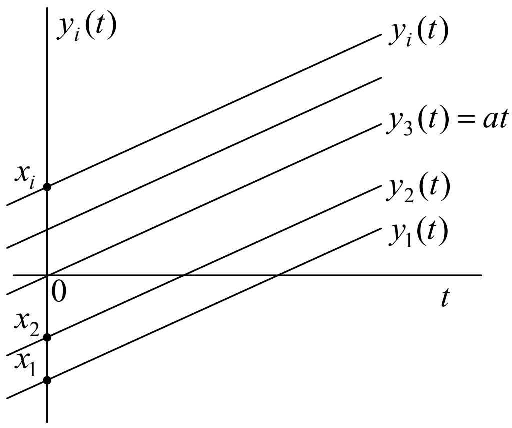


Рис. 1.2

1.1.4. Закони розподілу випадкових процесів

Оскільки випадковий процес при фіксованих значеннях аргументу є випадковою величиною, то для його опису використовують такі самі способи, що й для випадкових величин: функції розподілу ймовірностей, щільності розподілу, моментні та кореляційні функції.

Як відомо, універсальною характеристикою як дискретної, так і неперервної випадкової величини, є функція розподілу $F(x)$, яка задає ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, менше за x: $F(x) = P(X < x)$. Аналогічно розглядається поняття функції розподілу випадкового процесу.

Нехай задано випадковий процес $X(t)$. Перетин випадкового процесу при $t = t_1$ є випадковою величиною, що має закон розподілу

$$F(x, t_1) = P\left(X(t_1) < x\right). \tag{1.1}$$

Функцію $F\left(x, t_1\right)$ називають *одновимірним законом розподілу випадкового процесу* $X(t)$.

Якщо аргумент t_1 послідовно приймає всі значення з області визначення випадкового процесу, отримаємо однопараметричну сім'ю одновимірних законів розподілу $F_1(x;t)$. Однак функція $F_1(x;t)$ характеризує закон розподілу випадкової змінної $X(t)$ для довільного, але фіксованого значення аргументу, і тому не дає можливості з'ясувати питання про залежність чи незалежність випадкових величин (перетинів) при різних значеннях аргументу t_1.

Одновимірний закон розподілу достатньо повно характеризує процес у тому випадку, коли його значення при різних значеннях аргументу розглядаються ізольовано одне від одного.

Одновимірний закон розподілу може бути заданий також одновимірною щільністю розподілу: $f_1(x;t) = \dfrac{dF_1(x;t)}{dx}$.

Аналогічно з випадковою величиною: $F_1(x;t) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_1(u;t)du$.

Якщо значення випадкового процесу розглядаються сумісно, то необхідно розглядати сумісні закони розподілу цього процесу, підставивши декілька значень аргументу.

Візьмемо два фіксовані довільні значення t_1, t_2 аргументу t, отримаємо відповідно перетини $X(t_1)$, $X(t_2)$, що є випадковими величинами. Тоді сумісний закон розподілу матиме вигляд:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\left(X\left(t_1\right) < x_1, X(t_2) < x_2\right). \tag{1.2}$$

Двовимірна щільність розподілу визначається як похідна від функції розподілу: $f_2\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) = \dfrac{\partial^2 F\left(x_1, x_2, t_1, t_2\right)}{\partial x_1 \partial x_2}$.

Функція розподілу визначається інтегруванням щільності розподілу:

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f_2(u_1, u_2; t_1, t_2) du_1 du_2.$$

Двовимірна щільність розподілу задовольняє вимоги:

- $f_2\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) \geq 0;$
- $\int_{+\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) dx_1 dx_2 = 1;$

  $f\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) = f\left(x_2, x_1; t_2, t_1\right);$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x_1, x_2; t_1, t_2\right) dx_2 = f\left(x_1; t_1\right).$

Аналогічно, зафіксувавши три довільні значення t_1, t_2, t_3 аргументу t, отримаємо сумісний розподіл $F_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)$ випадкового вектора $\left(X(t_1), X(t_2), X(t_3)\right)$, компонентами якого є перетини випадкового процесу $X(t)$. Функція $F_3(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)$ називається *тривимірним законом розподілу* даного випадкового процесу $X(t)$.

Отже, *n-вимірним законом розподілу випадкового процесу* $X(t)$ називається закон розподілу сукупності його значень $X(t_1), X(t_2)$, $X(t_3), ..., X(t_n)$ при n довільно взятих значеннях аргументу $t = t_1, t_2, ... t_n$.

Ці функції зі збільшенням їх вимірності стають більш повними характеристиками відповідного випадкового процесу. Однак жоден закон скінченної розмірності не є повною характеристикою випадкового процесу. Для визначення повної характеристики випадкового процесу необхідно визначити всю послідовність його законів розподілу. Лише в деяких окремих випадках окремі закони розподілу повністю характеризують відповідний стохастичний процес. Більш того, оперувати функціями, які залежать від багатьох аргументів, дуже незручно. Тому, як правило, обмежуються лише двома перетинами, тобто розглядають двовимірну функцію розподілу. Зокрема, для марковських процесів

(процесів без післядії) вичерпною характеристикою є двовимірна функція розподілу. Для класу нормальних (гаусівських) випадкових процесів двовимірна функція розподілу також є вичерпною характеристикою.

Але найчастіше при дослідженні випадкових процесів використовують не закони розподілу, а основні характеристики випадкових процесів, які частково характеризують відповідний стохастичний процес.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається випадковим процесом?
2. Наведіть приклади випадкових процесів.
3. Що називається перетином випадкового процесу?
4. Що називається реалізацією випадкового процесу?
5. Який випадковий процес називається скалярним?
6. Який випадковий процес називається векторним?
7. Класифікація випадкових процесів за часом.
8. Класифікація випадкових процесів за станами.
9. Що називається елементарною випадковою функцією?
10. Функція розподілу випадкового процесу (одновимірна, двовимірна).

ВПРАВИ

1. Задана випадкова функція $X(t)=\left(t+2\right)U,$ де U – випадкова величина. Знайти перетини випадкового процесу при $t_1=2$ та $t_2=3$.
2. Задана випадкова функція $X(t)=U\cdot\sin 2t,$ де U – випадкова величина. Знайти перетини $X(t)$, що відповідають фіксованим значенням аргументу: $t_1=\dfrac{\pi}{6},\ t_2=\dfrac{\pi}{2}.$
3. Задана випадкова функція $X(t)=U\cdot e^{t-1}$, де U – випадкова величина. Знайти перетини $X(t)$, що відповідають фіксованим значенням аргументу: $t_1=2$, $t_2=1$.
4. Задана випадкова функція $X(t)=t^3\cdot U,$ де U – випадкова величина. Знайти реалізації функції $x(t)$ в двох випробуваннях, при яких величина U набула значень: $u_1=1,\ u_2=5.$
5. Задана випадкова функція $X(t)=\left(t^2-1\right)U,$ де U – випадкова величина, можливі значення якої належать інтервалу $\left(0;8\right).$ Знайти відповідні реалізації випадкової функції при двох випробуваннях,

якщо при першому випробуванні випадкова величина набула значення $u_1 = 2,$ а при другому – набула значення $u_2 = 3{,}5.$

6. Задано випадковий процес $X(t) = t^2 \cdot U - 1,$ де $t \in [0; +\infty),$ U – випадкова величина, закон розподілу якої задано у вигляді таблиці:

U	3	3
p	0,3	p_2

Знайти перетин випадкового процесу при $t = 1$. Побудувати траєкторії даного процесу.

7. Задано випадковий процес $X(t),$ $t \in [0; +\infty)$:

$$X(t) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } t < Y, \\ 2, \text{ якщо } t \geq Y, \end{cases}$$

де Y – додатна випадкова величина, розподілена за показниковим законом

$$f_y(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 0, \\ e^{-x}, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти перетин випадкового процесу $X(t)$ при $t = 1.$ Побудувати реалізацію даного процесу, якщо в результаті випробування випадкова величина Y набула значення $y = 2.$

8. Елементарна випадкова функція має вигляд $Y(t) = e^{-tX}$, де $t > 0,$ X – випадкова величина, яка набуває лише додатних значень. Побудувати множину реалізацій заданого випадкового процесу $Y(t).$
9. Елементарна випадкова функція має вигляд $Y(t) = X \cdot t + a,$ де X – випадкова величина, a – невипадкова величина. Побудувати множину реалізацій випадкового процесу $Y(t).$
10. Елементарна випадкова функція має вигляд $Y(t) = X \cdot \cos at,$ де X – випадкова величина, a – невипадкова величина. Побудувати множину реалізацій випадкового процесу $Y(t).$
11. Елементарна випадкова функція має вигляд $Y(t) = \cos Ut,$ де U – випадкова величина, яка набуває лише додатних значень. Побудувати множину реалізацій заданого випадкового процесу $Y(t).$
12. Знайти одновимірний закон розподілу елементарної випадкової функції $Y(t) = U \cdot t + a,$ де U – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $m_u,$ $\sigma_u.$

1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

У теорії ймовірностей при вивченні випадкових величин важливе значення мали їх числові характеристики: математичне сподівання, дисперсія, коваріація, початкові та центральні моменти різних порядків. Аналогічний апарат використовується в теорії випадкових функцій.

Кореляційною теорією випадкових функцій називають теорію, яка базується на дослідженні моментів першого та другого порядків. Цієї теорії достатньо для розв'язання багатьох практичних задач.

На відміну від числових характеристик випадкових величин, які є числами, характеристики (моменти) випадкових функцій є невипадковими функціями. Основними характеристиками випадкових функцій є: математичне сподівання (початковий момент першого порядку), дисперсія (центральний момент другого порядку), кореляційна функція (кореляційний момент).

1.2.1. Математичне сподівання випадкового процесу

Означення. Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $m_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перетину:

$$m_x(t) = M\left(X(t)\right).$$

Властивості математичного сподівання

Використовуючи властивості математичного сподівання випадкової величини, можна отримати властивості математичного сподівання випадкової функції:

- математичне сподівання невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює самій невипадковій функції:

$$M\left(\varphi(t)\right) = \varphi(t);$$

- невипадковий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M\left(\varphi(t)X(t)\right) = \varphi(t)M\left(X(t)\right) = \varphi(t)m_x(t);$$

- математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань:

$$M\left(X(t)+Y(t)\right) = m_x(t) + m_y(t);$$

- якщо при всіх значеннях аргументу t перетини випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ є незалежними випадковими величинами, то математичне сподівання добутку цих процесів дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left(X(t)\cdot Y(t)\right)=m_x(t)\cdot m_y(t).$$

При цьому перетини кожного з процесів $X(t)$ та $Y(t)$, чи одного з них, можуть бути залежними випадковими величинами.

Як наслідок, з наведених властивостей маємо:

$$M\left(X(t)+\varphi(t)\right)=M\left(X(t)\right)+M\left(\varphi(t)\right)=m_x(t)+\varphi(t),$$

де $X(t)$ – випадкова функція, $\varphi(t)$ – невипадкова функція.

Приклад 1.6. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $X(t)=U\cdot\cos 2t$, де U – випадкова величина, $M(U)=5$.

Розв'язання

Оскільки невипадковий множник можна виносити за знак математичного сподівання, отримаємо:

$$m_x(t)=M\left(X(t)\right)=M\left(U\cdot\cos 2t\right)=\cos 2t\cdot M\left(U\right)=5\cos 2t.$$

Таким чином, $m_x(t)=5\cos 2t$.

Математичне сподівання випадкового процесу повністю визначається його одновимірним законом розподілу. Наприклад, якщо перетини випадкового процесу $X(t)$ при кожному значенні аргументу t є дискретними випадковими величинами (з розподілом, залежним від цього аргументу),

$X(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	...	$x_i(t)$	...
$p(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	...	$p_i(t)$	...

то

$$m_x(t)=\sum_{i=1} x_i(t)\cdot p_i(t). \tag{1.3}$$

Часто значення перетинів випадкового процесу не залежать від аргументу t, від t залежать лише їх ймовірності, тобто закон розподілу має вигляд:

$X(t)$	x_1	x_2	...	x_i	...
$p(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	...	$p_i(t)$	...

У цьому випадку $m_x(t)=\sum\limits_{i=1} x_i \cdot p_i(t)$.

Якщо перетин випадкового процесу $X(t)$ при заданому значенні t є неперервною випадковою величиною, щільність якої $f(x;t)$, то його математичне сподівання обчислюють за формулою:

$$m_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;t)\,dx. \tag{1.4}$$

Найчастіше на практиці для оцінки математичного сподівання використовують наближене значення, яке знаходять за дослідними даними.

1.2.2. Дисперсія випадкового процесу

Означення. Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається невід'ємна невипадкова функція $D_x(t)$, яка при кожному фіксованому значенні аргументу t дорівнює дисперсії відповідного перетину цього процесу: $D_x(t)=D\big(X(t)\big)$.

Отже, дисперсія випадкового процесу є невипадковою функцією. Вона характеризує ступінь розсіяння можливих реалізацій цього процесу навколо математичного сподівання.

Властивості дисперсії

Використовуючи властивості дисперсії випадкової величини, можна отримати властивості дисперсії випадкової функції:

- дисперсія невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює нулю:

$$D\big(\varphi(t)\big)=0;$$

- дисперсія суми випадкової функції $X(t)$ і невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює дисперсії випадкової функції :

$$D\big(X(t)+\varphi(t)\big)=D_x(t);$$

- невипадковий множник $\varphi(t)$ можна виносити за знак дисперсії у квадраті:

$$D\big(\varphi(t)X(t)\big)=\varphi^2(t)D_x(t);$$

- якщо при всіх значеннях аргументу t перетини випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ є незалежними випадковими величинами, то дисперсія суми цих процесів дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D\big(X(t)+Y(t)\big)=D_x(t)+D_y(t).$$

При цьому перетини кожного з процесів $X(t)$ та $Y(t)$, чи одного з них, можуть бути залежними випадковими величинами.

Приклад 1.7. Знайти дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot (t+1)$, де U – випадкова величина, $D(U) = 4$.

Розв'язання

Оскільки невипадковий множник можна виносити за знак дисперсії в квадраті, отримаємо:

$$D_x(t) = D(X(t)) = D\big(U \cdot (t+1)\big) = (t+1)^2 \cdot D(U) = 4(t+1)^2.$$

Таким чином, $D_x(t) = 4(t+1)^2$.

Дисперсія випадкового процесу повністю визначається його одновимірним законом розподілу.

Якщо перетин $X(t)$ – дискретна випадкова величина, закон розподілу якої має вигляд:

$X(t)$	x_1	x_2	...	x_i	...
$p(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	...	$p_i(t)$	...

то дисперсія випадкового процесу обчислюється за формулами:

$$D_x(t) = \sum_{i=1} \big(x_i - m_x(t)\big)^2 \cdot p_i(t) = \sum_{i=1} x_i^2 \cdot p_i(t) - m_x^2(t). \qquad (1.5)$$

Якщо перетин випадкового процесу $X(t)$ при заданому значенні t є неперервною випадковою величиною, щільність якої $f(x;t)$, то дисперсію обчислюють за формулами:

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - m_x(t)\big)^2 \cdot f(x;t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x;t)\,dx - m_x^2(t). \qquad (1.6)$$

Означення. Середнім квадратичним відхиленням випадкового процесу (флуктуацією, стандартом процесу) називають арифметичний корінь із дисперсії випадкового процесу:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

1.2.3. Кореляційна функція випадкового процесу

Як відомо, випадковий процес є сукупністю випадкових величин, пов'язаних між собою спільним параметром – аргументом цього процесу. Випадкові величини можуть бути залежними або незалежними, різним може бути вигляд і ступінь залежності між ними. Математичне сподівання $m_x(t)$ та дисперсія $D_x(t)$ випадкового процесу не містять інформації про внутрішню структуру самого процесу. Для характеристики структури випадкового процесу використовують спеціальну характеристику – кореляційну функцію, яка характеризує ступінь залежності між перетинами випадкового процесу, що відповідають різним значенням його аргументу.

Означення. Центрованим випадковим процесом називається різниця між випадковим процесом і його математичним сподіванням:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

Означення. Кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $K_x(t_1, t_2)$, яка при кожній парі значень t_1 і t_2 аргументу t є кореляційним моментом відповідних перетинів цього процесу, тобто

$$K_x(t_1, t_2) = M\left(\left(X(t_1) - m_x(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_x(t_2)\right)\right) = M\left(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right).$$

Зауважимо, що кореляційна функція випадкового процесу повністю визначається його двовимірним законом розподілу.

Оскільки ступінь залежності перетинів $X(t_1)$ і $X(t_2)$ при зміні значень аргументу t значною мірою характеризується кореляційною функцією, а величини $X(t_1)$ і $X(t_2)$ є перетинами одного випадкового процесу, то кореляційну функцію $K_x(t_1, t_2)$ іноді називають *автокореляційною.*

Приклад 1.8. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $X(t) = U\sin 2t,$ де U – випадкова величина, $M(U) = 2,\ D(U) = 3.$

Розв'язання

За означенням

$$K_x(t_1, t_2) = M\left(\left(X(t_1) - m_x(t_1)\right)\left(X(t_2) - m_x(t_2)\right)\right) = M\left(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right).$$

Отже,

$$m_x(t) = M\left(U\sin 2t\right) = \sin 2t \cdot M(U) = 2\sin 2t,$$

$$\overset{\circ}{X}(t) = U\sin 2t - 2\sin 2t = \sin 2t \cdot (U - 2).$$

Тоді

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\sin 2t_1\cdot\left(U-2\right)\cdot\sin 2t_2\cdot\left(U-2\right)\right]=\sin 2t_1\cdot\sin 2t_2\cdot M(U-2)^2=$$

$$=\sin 2t_1\cdot\sin 2t_2\cdot D(U)=3\sin 2t_1\cdot\sin 2t_2.$$

Таким чином, $K_x(t_1,t_2)=3\sin 2t_1\cdot\sin 2t_2$.

Властивості кореляційної функції

- кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів, тобто не змінюється при перестановці аргументів:

$$K_x\left(t_1,t_2\right)=K_x\left(t_2,t_1\right).$$

- кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ при рівності аргументів є дисперсією цього процесу, тобто якщо $t_1=t_2=t$, то

$$K_x\left(t,t\right)=D_x\left(t\right).$$

- кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ не змінюється при додаванні невипадкової функції, тобто якщо $Y\left(t\right)=X\left(t\right)+\varphi\left(t\right)$, де $\varphi(t)$ – невипадкова функція, то

$$K_y\left(t_1,t_2\right)=K_x\left(t_1,t_2\right).$$

- при множенні випадкового процесу $X(t)$ на невипадковий множник $\varphi(t)$ його кореляційна функція множиться на вираз $\varphi\left(t_1\right)\cdot\varphi\left(t_2\right)$, тобто якщо $Y\left(t\right)=X\left(t\right)\cdot\varphi\left(t\right)$, то

$$K_y\left(t_1,t_2\right)=K_x\left(t_1,t_2\right)\cdot\varphi\left(t_1\right)\cdot\varphi\left(t_2\right).$$

- модуль кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$ не є більшим середнього геометричного дисперсій відповідних перетинів цього процесу:

$$\left|K_x\left(t_1,t_2\right)\right|\le\sqrt{D_x\left(t_1\right)\cdot D_x\left(t_2\right)}.$$

1.2.4. Нормована кореляційна функція випадкового процесу

Як відомо з теорії ймовірностей, при кореляційному та регресійному аналізі важливу роль відіграє коефіцієнт кореляції

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma\left(x\right)\cdot\sigma\left(y\right)}.$$

У теорії випадкових процесів аналогом цієї характеристики є нормована кореляційна функція.

Означення. Нормованою кореляційною функцією $r_x(t_1, t_2)$ випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція двох аргументів t_1, t_2, яка при кожній фіксованій парі їх значень дорівнює коефіцієнту кореляції відповідних перетинів

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}.$$

Враховуючи, що

$$\sigma_x(t_1) = \sqrt{D_x(t_1)} = \sqrt{K_x(t_1, t_1)},\ \sigma_x(t_2) = \sqrt{D_x(t_2)} = \sqrt{K_x(t_2, t_2)},$$

отримаємо:

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)} \cdot \sqrt{K_x(t_2, t_2)}}.$$

Приклад 1.9. Знайти нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = 8\cos(t_2 - t_1)$.

Розв'язання
За означенням

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)} \cdot \sqrt{K_x(t_2, t_2)}}.$$

За умовою $K_x(t_1, t_2) = 8\cos(t_2 - t_1)$, тоді

$$K_x(t_1, t_1) = 8\cos(t_1 - t_1) = 8,\ K_x(t_2, t_2) = 8\cos(t_2 - t_2) = 8.$$

Отже,

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{8\cos(t_2 - t_1)}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \cos(t_2 - t_1).$$

Таким чином, $r_x(t_1, t_2) = \cos(t_2 - t_1)$.

Властивості нормованої кореляційної функції

Властивості нормованої кореляційної функції аналогічні властивостям кореляційної функції.

- нормована кореляційна функція симетрична відносно своїх аргументів:

$$r_x(t_1, t_2) = r_x(t_2, t_1).$$

- модуль нормованої кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$ не перевищує одиниці:

$$\left| r_x\left(t_1, t_2\right) \right| \leq 1.$$

- при рівності аргументів модуль нормованої кореляційної функції випадкового процесу $X(t)$ дорівнює 1:

$$\left| r_x\left(t, t\right) \right| = 1.$$

1.2.5. Взаємна кореляційна функція двох стохастичних процесів

На практиці, при реалізації певних умов, відбуваються одночасно два або більше випадкових процеси. Природно, вони можуть взаємодіяти між собою, бути залежними один від одного.

Розглянемо два випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$. Залежність цих випадкових процесів оцінюють на основі залежностей їх перетинів. Сутність залежності визначається за допомогою спеціальної характеристики – взаємної кореляційної функції, яка є узагальненням кореляційного моменту двох випадкових величин.

Нехай $X(t_1)$ та $Y(t_2)$ є перетинами випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ при відповідних значеннях аргументу $t = t_1, t = t_2$.

Означення. Взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ називається невипадкова функція $R_{xy}(t_1, t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 і t_2, значення якої є кореляційним моментом відповідних перетинів цих випадкових процесів, тобто

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\left(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2) \right).$$

Означення. Корельованими називаються два стохастичні процеси, взаємна кореляційна функція яких тотожно не дорівнює 0:

$$R_{xy}(t_1, t_2) \neq 0.$$

Означення. Некорельованими називаються два стохастичні процеси, взаємна кореляційна функція яких тотожно дорівнює 0:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = 0.$$

Приклад 1.10. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)$:

$$X(t) = tU,\ Y(t) = (t^2+1)U,\ D(U) = 2.$$

Розв'язання

За означенням $R_{xy}(t_1, t_2) = M\left(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right)$.

Знайдемо математичні сподівання випадкових процесів:

$$m_x(t) = M\left(tU\right) = tM(U),$$
$$m_y(t) = M\left(\left(t^2+1\right)U\right) = \left(t^2+1\right)M(U).$$

Тоді центровані функції матимуть вигляд:

$$\overset{\circ}{X}\left(t\right) = tU - tM\left(U\right) = t\left(U - M\left(U\right)\right),$$
$$\overset{\circ}{Y}\left(t\right) = \left(t^2+1\right)U - \left(t^2+1\right)M\left(U\right) = \left(t^2+1\right)\left(U - M\left(U\right)\right).$$

Знайдемо взаємну кореляційну функцію:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\left(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right) = M\left[t_1\left(U - M\left(U\right)\right)\cdot\left(t_2{}^2+1\right)\left(U - M\left(U\right)\right)\right] =$$
$$= t_1\left(t_2{}^2+1\right)M\left(U - M\left(U\right)\right)^2 = t_1\left(t_2{}^2+1\right)D\left(U\right) = 2t_1\left(t_2{}^2+1\right).$$

Таким чином, $R_{xy}(t_1, t_2) = 2t_1\left(t_2{}^2+1\right)$.

Враховуючи означення взаємної кореляційної функції та властивості випадкового процесу, можна одержати основні властивості цієї невипадкової функції.

Властивості взаємної кореляційної функції

- взаємна кореляційна функція не змінюється, якщо в ній поміняти місцями аргументи і випадкові процеси:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1).$$

- взаємна кореляційна функція не змінюється при додаванні невипадкових функцій до випадкових процесів:

$$R_{x_1y_1}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2),$$

де

$$X_1(t) = X(t) + \varphi(t),$$
$$Y_1(t) = Y(t) + \psi(t),$$

$\varphi(t), \psi(t)$ – невипадкові функції.

- при множенні випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ на невипадкові функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ їх взаємна кореляційна функція множиться на добуток цих невипадкових функцій при відповідних значеннях аргументів, тобто якщо $X_1(t) = X(t)\cdot\varphi(t),\ Y_1(t) = Y(t)\cdot\psi(t),$ то

$$R_{x_1y_1}(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)R_{xy}(t_1, t_2).$$

- модуль взаємної кореляційної функції двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$ задовольняє нерівність: $\left|R_{xy}(t_1, t_2)\right| \le \sqrt{D_x(t_1)\cdot D_y(t_2)}.$

1.2.6. Нормована взаємна кореляційна функція двох стохастичних процесів

Разом із взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів для оцінки ступеня залежності їх можливих перетинів використовують також характеристику – нормовану взаємну кореляційну функцію.

Означення. Нормованою взаємною кореляційною функцією двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$ називають невипадкову функцію двох незалежних аргументів t_1 і t_2, яка визначається за формулою:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)}\sqrt{K_y(t_2, t_2)}} = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)\cdot D_y(t_2)}}.$$

Нормована взаємна кореляційна функція має такі самі властивості, що й взаємна кореляційна функція, окрім однієї: модуль нормованої взаємної кореляційної функції не перевищує одиниці:

$$\left|\rho_{xy}(t_1, t_2)\right| \le 1.$$

Приклад 1.11. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t) = \sin^2 t\cdot U$ і $Y(t) = (t+1)U$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U) = 1,\ t > 0.$

Розв'язання

За означенням $\rho_{xy}(t_1, t_2) = \dfrac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)}\sqrt{K_y(t_2, t_2)}}.$

Знайдемо математичні сподівання випадкових процесів:

$$m_x(t) = M\left(t\cdot U\right) = t\cdot M(U),$$

$$m_y(t) = M\left(\left(t^2+1\right)\cdot U\right) = \left(t^2+1\right)\cdot M(U).$$

Тоді центровані функції матимуть вигляд:

$$\overset{\circ}{X}(t)=\sin^2 t\cdot U-\sin^2 t\cdot M(U)=\sin^2 t\cdot\big(U-M(U)\big).$$

$$\overset{\circ}{Y}(t)=(t+1)U-(t+1)\cdot M(U)=(t+1)\cdot\big(U-M(U)\big).$$

Знайдемо кореляційні функції:

$$K_x(t_1,t_1)=M\left(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_1)\right)=\sin^2 t_1\cdot\sin^2 t_1\cdot M\big(U-M(U)\big)^2=$$

$$=\sin^4 t_1\cdot D(U)=\sin^4 t_1,$$

$$K_y(t_2,t_2)=M\left(\overset{\circ}{Y}(t_2)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right)=(t_2+1)\cdot(t_2+1)\cdot M\big(U-M(U)\big)^2=$$

$$=(t_2+1)\cdot(t_2+1)\cdot D(U)=(t_2+1)^2,$$

взаємну кореляційну функцію:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left(\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right)=M\Big[\sin^2 t_1\cdot\big(U-M(U)\big)\cdot(t_2+1)\cdot\big(U-M(U)\big)\Big]=$$

$$=\sin^2 t_1\cdot(t_2+1)M\big(U-M(U)\big)^2=\sin^2 t_1\cdot(t_2+1)D(U)=\sin^2 t_1\cdot(t_2+1).$$

Таким чином, нормована взаємна кореляційна функція матиме вигляд:

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{\sin^2 t_1\cdot(t_2+1)}{\sqrt{\sin^4 t_1}\cdot\sqrt{(t_2+1)^2}}=1.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$?
2. Основні властивості математичного сподівання.
3. Що називається дисперсією випадкового процесу $X(t)$?
4. Основні властивості дисперсії випадкового процесу.
5. Що називається середнім квадратичним відхиленням випадкового процесу $X(t)$?
6. Що називається центрованим випадковим процесом?
7. Чому дорівнює математичне сподівання центрованого випадкового процесу?

8. Що називається кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$?
9. Основні властивості кореляційної функції випадкового процесу.
10. Що називається нормованою кореляційною функцією випадкового процесу $X(t)$?
11. Основні властивості нормованої кореляційної функції випадкового процесу.
12. Що називається взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$?
13. Основні властивості взаємної кореляційної функції двох випадкових процесів.
14. Які стохастичні процеси називаються корельованими?
15. Які стохастичні процеси називаються некорельованими?
16. Що називається нормованою взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$?

ВПРАВИ

1. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $X(t) = U \cdot e^t$, де U – випадкова величина з відомим $M(U) = 5$.
2. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $X(t) = Ut^2 + 3t - 1$, де U – випадкова величина, $M(U) = 2$.
3. Довести, що невипадковий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(X(t) \cdot \varphi(x)) = \varphi(x) \cdot m_x(t)$.
4. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $X(t) = U \sin t + V \cos t$, де U, V – випадкові величини, $M(U) = M(V) = 3$.
5. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $X(t) = U \cdot \sin^2 t$, де U – випадкова величина з відомим $M(U) = 7$.
6. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $X(t) = U \cdot \left(2t + \operatorname{tg} t\right)^3$, де U – випадкова величина, $M(U) = 1$.
7. Знайти дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \cos 2t$, де U – випадкова величина, $D(U) = 3$.
8. Знайти дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \left(t + \cos t\right)^2$, де U – випадкова величина, $D(U) = 2$.
9. Довести, що математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків.
10. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію, дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \operatorname{ctg} 2t$, де U – випадкова величина з відомими $M(U)$ та $D(U)$: $M(U) = 2, D(U) = 3$.

11. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію, дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \varphi(t)$, де U – випадкова величина з відомими $M(U)$ та $D(U)$: $\varphi(t) = t - 1$, $M(U) = 1, D(U) = 3$.
12. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію, дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \varphi(t)$, де U – випадкова величина з відомими $M(U)$ та $D(U)$: $\varphi(t) = \cos^3 t$, $M(U) = 3, D(U) = 5$.
13. Математичне сподівання та кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ дорівнюють $m_x(t)$ та $K_x(t_1, t_2)$. Знайти математичне сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t) = X(t)\mathrm{ctg}t - t^3$, якщо $m_x(t) = t^3$, $K_x(t_1, t_2) = t_1^2 \sin t_2$.
14. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію, дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \varphi(t)$, де U – випадкова величина з відомими $M(U)$ та $D(U)$: $\varphi(t) = \left(t - \sin t\right)^2$, $M(U) = 2, D(U) = 3$.
15. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію, дисперсію випадкового процесу $X(t) = U \cdot \varphi(t)$, де U – випадкова величина з відомими $M(U)$ та $D(U)$: $\varphi(t) = \left(t^2 + 1\right)^3$, $M(U) = 2, D(U) = 4$.
16. Довести, що при додаванні до випадкової функції $X(t)$ невипадкової функції $\varphi(x)$ кореляційна функція не змінюється, тобто якщо $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то $K_y\left(t_1, t_2\right) = K_x\left(t_1, t_2\right)$.
17. Математичне сподівання та кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ дорівнюють $m_x(t)$ та $K_x(t_1, t_2)$. Знайти математичне сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t) = t^3 X(t) + 2t$,, якщо $m_x(t) = t^3 + 1$, $K_x(t_1, t_2) = (t_1 + 1)(t_2^2 - 1)$.
18. Математичне сподівання та кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ дорівнюють $m_x(t)$ та $K_x(t_1, t_2)$. Знайти математичне сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t) = X(t)\sin t + \cos t$, якщо $m_x(t) = \sin 2t$, $K_x(t_1, t_2) = \sin t_1 \cos t_2$.
19. Математичне сподівання та кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ дорівнюють $m_x(t)$ та $K_x(t_1, t_2)$. Знайти математичне сподівання і кореляційну функцію випадкового процесу $Y(t) = (t+1)^2 X(t) - 3t^3$: $m_x(t) = (t+1)^2$, $K_x(t_1, t_2) = (t_1 - 2)^2 (t_2 + 3)$.
20. Нехай $X(t)$ – випадкова функція, $\varphi(t)$ – невипадкова функція. Довести: якщо $Y(t) = X(t) \cdot \varphi(t)$, то $D_y(t) = \varphi^2(t) \cdot D_x(t)$.

21. Нехай $X(t)$ – випадкова функція, $\varphi(t)$ – невипадкова функція. Довести: якщо $Y(t)=X(t)\cdot\varphi(t)$, то $K_y\left(t_1,t_2\right)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\cdot K_x\left(t_1,t_2\right)$.
22. Довести, що кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ дорівнює кореляційній функції центрованої випадкової функції $\overset{\circ}{X}(t)=$ $=X(t)-m_x(t)$.
23. Кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$ дорівнює $K_x(t_1,t_2)$. Знайти кореляційні функції випадкових процесів: а) $Y\left(t\right)=X\left(t\right)+t$; б) $Y\left(t\right)=X\left(t\right)\cdot\left(t+1\right)$; в) $Y\left(t\right)=4\cdot X\left(t\right)$.
24. Дисперсія випадкового процесу $X(t)$ дорівнює $D_x\left(t\right)$. Знайти дисперсії випадкових процесів: а) $Y\left(t\right)=X\left(t\right)+t$; б) $Y\left(t\right)=X\left(t\right)+e^t$; в) $Y\left(t\right)=t\cdot X\left(t\right)$.
25. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)$: $X(t)=tU$, $Y(t)=(t+1)U$, $D(U)=2$.
26. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)$: $X(t)=(t-1)U$, $Y(t)=t^2U$, $D(U)=3$.
27. Знайти взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)$: $X(t)=\sin^2 tU$, $Y(t)=(t+1)U$, $D(U)=1$.
28. Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=t_1t_2\cdot e^{-|t_2-t_1|}$ випадкової функції $X(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.
29. Довести, що взаємна кореляційна функція випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$ дорівнює взаємній кореляційній функції центрованих функцій $\overset{\circ}{X}(t)$ та $\overset{\circ}{Y}(t)$.
30. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)=\cos^2 t\cdot U$ і $Y(t)=(t+2)U$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)=2$.
31. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)=t\cdot U$ і $Y(t)=(t+1)U$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)=10$.
32. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X(t)=(t-1)U$ і $Y(t)=t^2U$, де U – випадкова величина з дисперсією $D(U)=3$.

33. Елементарна випадкова функція $Y(t)$ має вигляд: $Y(t)=e^{-X\cdot t}$, $t>0$, де X – випадкова величина, розподілена за показниковим законом: $f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda>0$, $x>0$. Знайти характеристики елементарної випадкової функції: $m_y\left(t\right)$, $D_y\left(t\right)$, $\sigma_y\left(t\right)$, $K_y\left(t_1,t_2\right)$, $r_y\left(t_1,t_2\right)$.
34. Елементарна випадкова функція $Y(t)$ має вигляд: $Y(t)=aX+t$, $t>0$, де X – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами m і σ; a – невипадкова величина. Знайти характеристики елементарної випадкової функції: $m_y\left(t\right)$, $D_y\left(t\right)$, $\sigma_y\left(t\right)$, $K_y\left(t_1,t_2\right)$, $r_y\left(t_1,t_2\right)$.
35. Знайти математичне сподівання $m_x\left(t\right)$, кореляційну функцію $K_x\left(t_1,t_2\right)$ та дисперсію $D_x\left(t\right)$ випадкового процесу $X(t)=t^2\cdot U+$ $+V\cdot\cos t-\sin t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, U – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $a=3$, $\sigma=1$; V – випадкова величина, розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda=2$.
36. Знайти математичне сподівання $m_x\left(t\right)$, кореляційну функцію $K_x\left(t_1,t_2\right)$ та дисперсію $D_x\left(t\right)$ випадкового процесу $X(t)=t\cdot U-$ $-3e^{-3t}\cdot V+\cos t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, U – випадкова величина, розподілена рівномірно на відрізку $\left[0;6\right]$; V – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda=1$.
37. Знайти математичне сподівання $m_x\left(t\right)$, кореляційну функцію $K_x\left(t_1,t_2\right)$ та дисперсію $D_x\left(t\right)$ випадкового процесу $X(t)=5+$ $+U\sin t-V\cdot t^2$, де U, V – некорельовані випадкові величини, U – випадкова величина, розподілена за біноміальним законом з параметрами $n=10$, $p=0{,}1$; V – розподілена за нормальним законом з параметрами $a=3$, $\sigma=0{,}3$.

2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

Як відомо, стохастичний процес $X(t)$ можна трактувати або як сукупність реалізацій $x(t)$, або як сукупність випадкових величин, залежних від параметра. Нехай на кожну випадкову величину постійно впливає один і той самий фактор за одним і тим самим правилом A. У результаті отримаємо іншу параметризовану сукупність випадкових змінних, тобто інший випадковий процес $Y(t)$. У цьому випадку зазначають, що випадковий процес $Y(t)$ є результатом перетворення за законом A випадкового процесу $X(t)$ і позначають: $Y(t)=A[X(t)]$.

Закон перетворення A реалізує деякий конкретний пристрій S. Тому формально можна вважати, що випадковий процес $X(t)$ поступає у систему S, де за допомогою оператора A відбувається його перетворення у випадковий процес $Y(t)$.

Характеристики вихідного (перетвореного) процесу $Y(t)$ можна визначити безпосередньо. Однак іноді виникає задача непрямого дослідження процесу, зокрема знаходження характеристик випадкових функцій не безпосередньо, а через характеристики вхідного процесу $X(t)$.

2.1. ДОДАВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Означення. Сумою випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ називається такий випадковий процес $Z(t)$, всі перетини якого при кожному значенні аргументу t з області визначення є сумою перетинів цих процесів при тому ж значенні аргументу t:

$$Z(t)=X(t)+Y(t).$$

Нехай відомі математичні сподівання $m_x(t)$, $m_y(t)$, кореляційні функції $K_x(t_1,t_2)$, $K_y(t_1,t_2)$ випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$, а також взаємна кореляційна функція цих процесів $R_{xy}(t_1,t_2)$. Математичне сподівання, кореляційну функцію суми процесів $X(t)$ та $Y(t)$ знаходять, використовуючи наступні теореми.

Теорема 2.1. Математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків, тобто

якщо $$Z(t) = X(t) + Y(t),$$
то $$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t).$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} M\left(X_i(t)\right).$$

Зауваження. Математичне сподівання суми випадкової функції $X(t)$ та випадкової величини Y дорівнює сумі їх математичних сподівань, тобто
якщо

$$Z(t) = X(t) + Y,$$

то

$$m_z(t) = m_x(t) + M(Y).$$

Зауваження. Центрована сума стохастичних процесів дорівнює сумі центрованих випадкових процесів – доданків, тобто
якщо

$$Z(t) = X(t) + Y(t),$$

то

$$\overset{\circ}{Z}(t) = \overset{\circ}{X}(t) + \overset{\circ}{Y}(t).$$

Теорема 2.2. Кореляційна функція суми двох корельованих випадкових процесів дорівнює сумі кореляційних функцій доданків та їх взаємних кореляційних функцій, тобто

якщо

$$Z(t) = X(t) + Y(t),$$

то

$$K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{xy}(t_2, t_1).$$

Методом математичної індукції можна довести, що для будь-якого $n \geq 2$ кореляційна функція суми попарно корельованих випадкових процесів $X_i(t)$ дорівнює сумі їх кореляційних функцій та сумі всіх можливих взаємних кореляційних функцій пар цих стохастичних процесів, тобто

$$K_z\left(t_1, t_2\right) = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}\left(t_1, t_2\right) + \sum_{i \neq j} R_{x_i y_j}\left(t_1, t_2\right).$$

Зауваження. Кореляційна функція суми двох некорельованих випадкових процесів дорівнює сумі їх кореляційних функцій, тобто якщо

$$Z\left(t\right) = X\left(t\right) + Y\left(t\right),$$

то

$$K_z\left(t_1, t_2\right) = K_x\left(t_1, t_2\right) + K_y\left(t_1, t_2\right).$$

Зауваження. Дисперсія суми двох некорельованих випадкових функцій дорівнює сумі дисперсій: $D_{x+y}\left(t\right) = D_x\left(t\right) + D_y\left(t\right)$.

Приклад 2.1. Задано два випадкових процеси: $X(t) = tU$ та $Y(t) = = t^2 V$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U) = M(V) = 1$, $D(U) = 0{,}2$, $D(V) = 3$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію суми $Z\left(t\right) = X\left(t\right) + Y\left(t\right)$.

Розв'язання

За теоремою 2.1, $m_z\left(t\right) = m_x\left(t\right) + m_y\left(t\right)$. Отже,

$$m_z\left(t\right) = M\left(tU\right) + M\left(t^2 V\right) = tM\left(U\right) + t^2 M\left(V\right) = t + t^2.$$

Знайдемо кореляційну функцію суми $Z\left(t\right)$. З'ясуємо питання про корельованість випадкових функцій $X\left(t\right)$ та $Y\left(t\right)$. Знайдемо взаємну кореляційну функцію випадкових процесів $X\left(t\right)$ і $Y\left(t\right)$.

Враховуючи, що $R_{xy}(t_1, t_2) = M\left(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)\right)$, маємо:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X - m_x\left(t\right) = tU - t = t\left(U - 1\right),$$

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y - m_y\left(t\right) = t^2 V - t^2 = t^2\left(V - 1\right),$$

тоді $R_{xy}(t_1, t_2) = M\left(t^3 \cdot \left(U - 1\right)\left(V - 1\right)\right) = t^3 M\left(\left(U - 1\right)\left(V - 1\right)\right) = 0$, оскільки U і V – некорельовані випадкові величини, тобто їх кореляційний момент дорівнює 0.

Таким чином, випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$ некорельовані, отже, $K_z\left(t_1, t_2\right) = K_x\left(t_1, t_2\right) + K_y\left(t_1, t_2\right)$.

Знайдемо кореляційні функції випадкових процесів:

$$K_x(t_1,t_2) = M\left[t_1(U-1)\cdot t_2(U-1)\right] = t_1 t_2 M(U-1)^2 = t_1 t_2 D(U) = 0{,}2 t_1 t_2,$$

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[t_1^2(V-1)\cdot t_2^2(V-1)\right] = t_1^2 t_2^2 M(V-1)^2 = t_1^2 t_2^2 D(V) = 3 t_1^2 t_2^2.$$

Отже, $K_z\left(t_1, t_2\right) = 0{,}2 t_1 t_2 + 3 t_1^2 t_2^2$. Оскільки $D_z\left(t\right) = K_z\left(t, t\right)$, отримаємо $D_z\left(t\right) = 0{,}2t^2 + 3t^4$.

2.2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СТОХАСТИЧНОГО ПРОЦЕСУ

Усі операції математичного аналізу ґрунтуються на поняттях збіжності і границі. З теорії ймовірностей відомо, що про збіжність випадкових величин можна говорити лише в імовірнісному сенсі. Для вивчення випадкових функцій необхідно ввести поняття *середньоквадратичної збіжності*.

Означення. Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \dots X_n$ називається збіжною в середньому квадратичному до випадкової величини X, якщо математичне сподівання квадрата різниці $X_n - X$ наближається до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} M\left(X_n - X\right)^2 = 0.$$

Випадкова величина X називається *границею в середньому квадратичному* послідовності випадкових змінних X_n і записується таким чином:

$$X = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, X_n.$$

Зауважимо, що зі збіжності в середньому квадратичному випливає збіжність за ймовірністю, обернене твердження неправильне.

Означення. Випадкова функція $X(t)$ називається диференційовною в середньому квадратичному, якщо існує така випадкова функція $X'(t)$, до якої в середньому квадратичному збігається при всіх значеннях $t \in T$ випадкова функція $\dfrac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \neq 0$, тобто

$$\lim_{\Delta t \to 0} M\left(\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t} - X'(t)\right)^2 = 0.$$

Випадкова функція $X'(t)$ називається *середньоквадратичною похідною* випадкової функції $X(t)$.

Таким чином, *похідною випадкової функції* $X(t)$ називають середньоквадратичну границю відношення приросту функції до приросту аргументу Δt за умови, що $\Delta t \to 0$:

$$X'(t) = \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}. \tag{2.1}$$

Похідна $X'(t)$ стохастичного процесу $X(t)$ є стохастичним процесом. Якщо він є диференційованим, то його похідна називається другою похідною випадкового процесу $X(t)$:

$$X''(t) = \frac{d}{dt}\left(X'(t)\right) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2} \text{ і т.д.}$$

Нехай відомі математичне сподівання $m_x(t)$ та кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$ стохастичного процесу $X(t)$. Знайдемо математичне сподівання та кореляційну функцію похідної цього процесу. Зауважимо, що розглядаються диференційовні в середньому квадратичному випадкові функції.

Теорема 2.3. Математичне сподівання похідної $X'(t) = \dot{x}$ випадкового процесу $X(t)$ дорівнює похідній від математичного сподівання цього процесу, тобто $m_{\dot{x}}(t) = m'_x(t)$.

Зауваження. Математичне сподівання похідної n-го порядку дорівнює похідній n-го порядку від математичного сподівання випадкової функції.

Приклад 2.2. Відомо, що математичне сподівання випадкової функції $X(t)$: $m_x(t) = t^2 \sin 2t$. Знайти математичне сподівання похідної $X'(t)$.

Розв'язання

Оскільки $m_{\dot{x}}(t) = m'_x(t)$, отримаємо:

$$m_{\dot{x}}(t) = \left(t^2 \sin 2t\right)' = \left(t^2\right)' \sin 2t + t^2 \cdot \left(\sin 2t\right)' =$$
$$= 2t \sin 2t + 2t^2 \cos 2t = 2t\left(\sin 2t + t \cos 2t\right).$$

Таким чином, $m_{\dot{x}}(t) = 2t\left(\sin 2t + t\cos 2t\right)$.

Теорема 2.4. Кореляційна функція похідної від випадкової функції $X(t)$ дорівнює змішаній частинній похідній другого порядку від її кореляційної функції: $K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \dfrac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$.

Приклад 2.3. Відома кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1, t_2) = \sin\left(t_1^2 - t_2\right)$. Знайти кореляційну функцію похідної $X'(t)$.

Розв'язання

Оскільки $K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = \dfrac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$, отримаємо:

$$\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} = 2t_1 \cdot \cos\left(t_1^2 - t_2\right), \quad \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = 2t_1 \cdot \sin\left(t_1^2 - t_2\right).$$

Таким чином, $K_{\dot{x}}(t_1, t_2) = 2t_1 \cdot \sin\left(t_1^2 - t_2\right)$.

Теорема 2.5. Взаємна кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ та її похідної $X'(t)$ дорівнює частинній похідній від кореляційної функції за відповідним аргументом:

$$R_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

$$R_{\dot{x}x}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1}.$$

Приклад 2.4. Відома кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1, t_2) = 2t_1 \cdot e^{t_1 + 3t_2}$. Знайти взаємну кореляційну функцію $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)$.

Розв'язання

Оскільки $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\dfrac{\partial K_x\left(t_1,t_2\right)}{\partial t_2}$, виконавши диференціювання за змінною t_2, отримаємо:

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\left(2t_1\cdot e^{t_1+3t_2}\right)'_{t_2}=2t_1\cdot e^{t_1+3t_2}\cdot\left(t_1+3t_2\right)'_{t_2}=6t_1\left(t_1+3t_2\right)e^{t_1+3t_2}.$$

Таким чином, $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=6t_1\left(t_1+3t_2\right)e^{t_1+3t_2}$.

2.3. ІНТЕГРУВАННЯ СТОХАСТИЧНОГО ПРОЦЕСУ

Нехай випадковий процес $X(t)$ перетворюється інтегруванням у випадковий процес $Y(t)$, тобто $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$. Оскільки операція інтегрування застосовується до випадкового процесу, то традиційне поняття інтеграла не може бути застосованим. На практиці зазвичай стохастичний процес вважають інтегровним, якщо інтегровними є всі його реалізації. При визначенні інтеграла від випадкового процесу використовують поняття *границі в середньому квадратичному.*

Означення. Випадковий процес $X(t)$ називається інтегрованим на проміжку $[0;t]$, якщо існує такий стохастичний процес $Y(t)$, що

$$\lim_{\Delta\tau_i\to 0} M\left[\left(\sum_i X\left(\tau_k\right)\cdot\Delta\tau_i-Y\left(t\right)\right)^2\right]=0,$$

незалежно від розбиття точками $\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_n$ проміжку $[0;t]$ на частини $\Delta\tau_i=\tau_i-\tau_{i-1}$.

Випадковий процес $Y(t)$ називається *інтегралом на проміжку* $[0;t]$ *від випадкового процесу* $X(t)$ і позначається $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$.

Таким чином, інтеграл від випадкової функції є границею в середньому квадратичному відповідної інтегральної суми:

$$\int\limits_0^t X(\tau)d\tau=\underset{\max\Delta\tau_i\to 0}{l.i.m.}\sum_i X\left(\tau_k\right)\cdot\Delta\tau_i. \tag{2.2}$$

Нехай відомі математичне сподівання $m_x(t)$ та кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$ випадкової $X(t)$. Знайдемо математичне сподівання та кореляційну функцію інтеграла від цієї випадкової функції.

Теорема 2.6. Математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau$ від випадкової функції $X(t)$ дорівнює інтегралу від її математичного сподівання, тобто $m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau.$

Приклад 2.5. Відомо математичне сподівання випадкової функції $X(t)$: $m_x(t) = 2t^2 + 3$. Знайти математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau.$

Розв'язання

Оскільки $m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)d\tau$, отримаємо:

$$m_y(t) = \int_0^t \left(2\tau^2 + 3\right)d\tau = \left(\frac{2\tau^3}{3} + 3\tau\right)\Bigg|_0^t = \frac{2}{3}t^3 + 3t.$$

Таким чином, $m_y(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t.$

Теорема 2.7. Кореляційна функція інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau$ від випадкової функції $X(t)$ дорівнює подвійному інтегралу від її кореляційної функції, тобто

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Приклад 2.6. Відома кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1, t_2) = t_1^2 \cdot e^{-3t_2}$. Знайти кореляційну функцію інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau.$

Розв'язання

Оскільки $K_y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} K_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$, отримаємо:

$$K_y(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} \tau_1^2 \cdot e^{3\tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{1}{3} \int\limits_0^{t_1} \left(e^{3\tau_2} \Big|_0^{t_2} \right) \cdot \tau_1^2 d\tau_1 = \frac{1}{3}\left(e^{3t_2} - 1\right) \int\limits_0^{t_1} \tau_1^2 d\tau_1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{3t_2} - 1\right) \cdot \frac{\tau_1^3}{3}\Bigg|_0^{t_1} = \frac{t_1^3}{9} \cdot \left(e^{3t_2} - 1\right).$$

Таким чином, $K_y(t_1, t_2) = \frac{t_1^3}{9}\left(e^{3t_2} - 1\right)$.

Теорема 2.8. Взаємна кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ та інтеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(\tau) d\tau$ дорівнює інтегралу від кореляційної функції випадкової функції $X(t)$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} K_x(t_1, \tau) d\tau;$$

$$R_{yx}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_1} K_x(\tau, t_2) d\tau.$$

Приклад 2.7. Відома кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1, t_2) = 3t_1 t_2^2$. Знайти взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(t_1, t_2)$ випадкової функції $X(t)$ та інтеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(\tau) d\tau$.

Розв'язання

Оскільки $R_{xy}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} K_x(t_1, \tau) d\tau$, виконавши інтегрування, отримаємо:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int\limits_0^{t_2} 3t_1 \tau^2 d\tau = 3t_1 \cdot \left(\frac{\tau^3}{3}\Bigg|_0^{t_2} \right) = t_1 \cdot t_2^3.$$

Таким чином, $R_{xy}(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2^3$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається сумою двох випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$?
2. Чому дорівнює математичне сподівання суми двох випадкових функцій?
3. Чому дорівнює кореляційна функція суми двох корельованих випадкових процесів?
4. Чому дорівнює кореляційна функція суми двох некорельованих випадкових процесів?
5. Що називається похідною від випадкової функції $X(t)$?
6. Чому дорівнює математичне сподівання похідної випадкового процесу?
7. Чому дорівнює кореляційна функція похідної від випадкової функції?
8. Чому дорівнює взаємна кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ та її похідної $X'(t)$?
9. Що називається інтегралом від випадкової функції $X(t)$?
10. Чому дорівнює математичне сподівання інтеграла від випадкової функції $X(t)$?
11. Чому дорівнює кореляційна функція інтеграла від випадкової функції ?
12. Чому дорівнює взаємна кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ та інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(\tau)d\tau$?

ВПРАВИ

1. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкової функції $X(t)=V\cos t-U\sin t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, з відомими математичними сподіваннями та дисперсіями: $M(U)=1$, $M(V)=8$, $D(U)=D(V)=4$.
2. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкової функції $Y(t)=U\cos 3t+V\sin 3t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U)=1, M(V)=7$, $D(U)=D(V)=3$.
3. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкової функції $X(t)=t^2+U\sin t+V\cos t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U)=M(V)=0, D(U)=D(V)=10$.
4. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкової функції $X(t)=U\cos 2t+V\sin t+t$, де U,V – некорельовані випадкові величини, $M(U)=1, M(V)=2, D(U)=3, D(V)=4$.

5. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію і дисперсію випадкової функції $X(t) = Vt + Ut^2$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U) = 4, M(V) = 7,\ D(U) = 0{,}1,\ D(V) = 3$.
6. Задано математичні сподівання та кореляційні функції некорельованих випадкових функцій $X(t)$ та $Y(t)$: $m_x(t) = 3t + 2,\ m_y(t) = t - 1;$ $K_x(t_1, t_2) = 2t_1t_2,\ K_y(t_1, t_2) = e^{-(t_2 - t_1)^2}$. Знайти математичне сподівання та кореляційну функцію випадкової функції $Z(t) = X(t) + Y(t)$.
7. Задано кореляційні та взаємно кореляційні функції випадкових функцій $X(t),\ Y(t),\ Z(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $U(t) = X(t) + Y(t) + Z(t)$, якщо задані випадкові функції: а) попарно корельовані; б) попарно некорельовані;
8. Задано випадкові функції $X(t) = (t-1)U$ та $Y(t) = t^2U$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U) = 2,\ M(V) = 3,\ D(U) = 4,$ $D(V) = 5$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію суми $Z(t) = X(t) + Y(t)$.
9. Задано випадкові функції $X(t) = V\cos t + U\sin t,\ \ Y(t) = U\cos 3t +$ $+ V\sin 3t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U) = 0,$ $M(V) = 0,\ D(U) = D(V) = 6$. Знайти нормовану взаємну кореляційну функцію $\rho_{xy}(t_1, t_2)$.
10. Знайти кореляційну функцію $K_z(t_1, t_2)$ та дисперсію $D_z(t)$ випадкового процесу $Z(t) = X(t)\cdot\sin t - Y(t)\cdot(t^2 + 1) + e^t$, якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – некорельовані випадкові процеси, $K_x(t_1, t_2) = \dfrac{1}{1 + |t_2 - t_1|},\ K_y(t_1, t_2) =$ $= t_1t_2 + 1$.
11. Знайти кореляційну функцію $K_z(t_1, t_2)$ та дисперсію $D_z(t)$ випадкового процесу $Z(t) = X(t)\cdot\cos 3t - Y(t)\cdot(t + 3) + \sin t$, якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – некорельовані випадкові процеси, $K_x(t_1, t_2) = K_y(t_1, t_2) = e^{-|t_2 - t_1|}$.
12. Знайти кореляційну функцію $K_z(t_1, t_2)$ та дисперсію $D_z(t)$ випадкового процесу $Z(t) = X(t)\cdot\sin t - 2tY(t) - e^t$, якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – некорельовані випадкові процеси, $K_x(t_1, t_2) = 4e^{-2(t_2 - t_1)^2},\ K_y(t_1, t_2) =$ $= \cos(t_2 - t_1)$.

13. Знайти математичне сподівання $m_z(t)$, кореляційну функцію $K_z(t_1,t_2)$, дисперсію $D_z(t)$, нормовану кореляційну функцію $r_z(t_1,t_2)$ випадкового процесу $Z(t)=t^2+t^2X(t)\cdot\sin t-e^tY(t)$, якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – центровані випадкові процеси з відомими кореляційними функціями $K_x(t_1,t_2)=e^{-t_1-t_2}$, $K_y(t_1,t_2)=16e^{-t_1-t_2}$ та взаємною кореляційною функцією $R_{xy}(t_1,t_2)=4e^{-t_1-t_2}$.
14. Знайти математичне сподівання $m_z(t)$, кореляційну функцію $K_z(t_1,t_2)$, дисперсію $D_z(t)$, нормовану кореляційну функцію $r_z(t_1,t_2)$ випадкового процесу $Z(t)=t^2+X(t)\cdot\sin\omega t-tY(t)$, якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – центровані випадкові процеси з відомими кореляційними функціями $K_x(t_1,t_2)=9\cos t_1\cos t_2$, $K_y(t_1,t_2)=25\cos t_1\cos t_2$ та взаємною кореляційною функцією $R_{xy}(t_1,t_2)=15\cos t_1\cos t_2$.
15. Знайти математичне сподівання $m_z(t)$, кореляційну функцію $K_z(t_1,t_2)$, дисперсію $D_z(t)$, нормовану кореляційну функцію $r_z(t_1,t_2)$ випадкового процесу $Z(t)=t^2+X(t)\cdot e^{-2t}-\cos 4t\cdot Y(t)$, якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – центровані випадкові процеси з відомими кореляційними функціями $K_x(t_1,t_2)=t_1^2t_2^2$, $K_y(t_1,t_2)=16t_1^2t_2^2$ та взаємною кореляційною функцією $R_{xy}(t_1,t_2)=14t_1^2t_2^2$.
16. Задано математичне сподівання $m_x(t)=t^2-1$ випадкової функції $X(t)$. Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t)=t^2\times$ $\times X'(t)+2t^3$.
17. Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=e^{-(t_1-t_2)^2}$ випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію її похідної.
18. Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=e^{-(t_1-t_2)^2}$ випадкової функції $X(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції: а) $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$; б) $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$.
19. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $Y(t)=(t-2)X'(t)+t$, якщо $m_x(t)=t^3$.
20. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $Y(t)=$ $=(t^2+1)X'(t)-e^t$, якщо $m_x(t)=t^2$.

21. Знайти математичне сподівання випадкового процесу $Y(t) = (t-1)X'(t) + 2t$, якщо $m_x(t) = t^2 + t - 1$.
22. Знайти математичне сподівання $m_y(t)$, кореляційну функцію $K_y(t_1, t_2)$, дисперсію $D_y(t)$, нормовану кореляційну функцію $r_y(t_1, t_2)$ випадкового процесу $Y(t) = X'(t)$, якщо $X(t) = t^2 - U \cdot e^{-3t}$, де U – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 2$, $\sigma = 0,7$.
23. Знайти математичне сподівання $m_y(t)$, кореляційну функцію $K_y(t_1, t_2)$, дисперсію $D_y(t)$, нормовану кореляційну функцію $r_y(t_1, t_2)$ випадкового процесу $Y(t) = X'(t)$, якщо $X(t) = -U \cdot t^2 - \sin t$, де U – випадкова величина, розподілена за біноміальним законом з параметрами $n = 10$, $p = 0,5$.
24. Знайти математичне сподівання $m_y(t)$, кореляційну функцію $K_y(t_1, t_2)$, дисперсію $D_y(t)$, нормовану кореляційну функцію $r_y(t_1, t_2)$ випадкового процесу $Y(t) = X'(t)$, якщо $X(t) = U\cos 3t - t$, де U – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[-3; 1]$.
25. Знайти взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(t_1, t_2)$ і нормовану взаємну кореляційну функцію $\rho_{xy}(t_1, t_2)$ випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t) = X'(t)$, якщо $X(t) = U\sin t + t$, де U – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 1$, $\sigma = 2$.
26. Знайти взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(t_1, t_2)$ і нормовану взаємну кореляційну функцію $\rho_{xy}(t_1, t_2)$ випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t) = X'(t)$, якщо $X(t) = Ut^3 - \sin t$, де U – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 2$.
27. На вхід диференціальної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками: $m_x(t) = t^2 \sin 2t$, $K_x(t_1, t_2) = 3e^{-2(t_1 - t_2)^2}$. Необхідно знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.

28. На вхід диференціальної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками: $m_x(t) = 5^{\sqrt{1-t^2}} \cdot \cos^2 t$, $K_x(t_1, t_2) = \ln^3(t_1^2 - \sqrt{t_2})$. Необхідно знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.
29. На вхід диференціальної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками: $m_x(t) = \sin^2 t \cdot \cos t$, $K_x(t_1, t_2) = \operatorname{arctg}\left(t_1^2 - 2t_2\right)$. Необхідно знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.
30. На вхід диференціальної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками: $m_x(t) = \ln\sin t$, $K_x(t_1, t_2) = \sin^2\left(3t_1^2 - 2t_1 + 4t_2\right)$. Необхідно знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.
31. Задана випадкова функція $X(t) = U\cos^2 t$, де U – випадкова величина, $M(U) = 2$. Знайти математичне сподівання випадкової функції $Y(t) = \left(t^2 + 1\right)\int_0^t X(\tau)d\tau$.
32. Задана кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = \cos\omega t_1 \cos\omega t_2$ випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію та дисперсію інтеграла
$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau.$$
33. Задана випадкова функція $X(t) = Ue^{3t}\cos 2t$, де U – випадкова величина, $M(U) = 3$, $D(U) = 1$. Знайти математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(\tau)d\tau$.
34. На вхід інтегральної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками:
$$m_x(t) = t^2 \sin t,\ K_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_1(9 - 3t_2)}\ln t_1.$$
Знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, $D_y(t)$.

35. На вхід інтегральної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками:
$m_x(t)=\dfrac{t}{9-3t^2}$, $K_x(t_1,t_2)=\ln(t_1+2)\cdot e^{3t_2}$. Знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y\left(t_1,t_2\right)$, $D_y(t)$.
36. На вхід інтегральної системи подається випадкова функція $X(t)$ з відомими характеристиками:
$$m_x(t)=\left(t+1\right)\cdot\sin t,\quad K_x(t_1,t_2)=t_1\cdot\frac{t_2}{t_2^{\,2}-5}.$$
Знайти характеристики випадкової функції $Y(t)$ на виході системи: $m_y(t)$, $K_y\left(t_1,t_2\right)$, $D_y(t)$.
37. Задана кореляційна функція $K_x\left(t_1,t_2\right)=t_1t_2^2$ випадкової функції $X(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції $R_{xy}(t_1,t_2)$, $R_{yx}(t_1,t_2)$ випадкових функцій $X(t)$ і $Y\left(t\right)=\int\limits_0^t X\left(\tau\right)d\tau$.
38. Знайти взаємні кореляційні функції випадкових функцій $X(t)$ і $Y\left(t\right)=\int\limits_0^t X\left(\tau\right)d\tau$, якщо відома кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: а) $K_x\left(t_1,t_2\right)=2t_1t_2+1$; б) $K_x\left(t_1,t_2\right)=2t_1t_2+1$; в) $K_x\left(t_1,t_2\right)=$ $=t_1t_2e^{t_1+t_2}$.
39. Знайти математичне сподівання $m_z(t)$, кореляційну функцію $K_z\left(t_1,t_2\right)$, дисперсію $D_z(t)$, взаємні кореляційні функції випадкових процесів $X(t)$ і $Z(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$, якщо $X\left(t\right)=U\cos 6t$, де U – випадкова величина, розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda=0{,}2$.
40. Знайти математичне сподівання $m_z(t)$, кореляційну функцію $K_z\left(t_1,t_2\right)$, дисперсію $D_z(t)$, взаємні кореляційні функції випадкових процесів $X(t)$ і $Z(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$, якщо $X\left(t\right)=Ue^{-3t}$, де U – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda=2$.

3. ОДНОРІДНІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

3.1. ОПИС І ЗОБРАЖЕННЯ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

За останні десятиріччя найширшого використання на практиці набув окремий клас випадкових процесів – *марковські випадкові процеси.* Марковські випадкові процеси, як математичний апарат дослідження, використовуються у багатьох галузях науки, зокрема в економіці, екології, соціології, техніці.

Означення. Випадковий процес, який відбувається у будь-якій фізичній системі, називається *марковським (процесом без післядії)*, якщо для будь-якого моменту часу t_0 ймовірнісні характеристики процесу в майбутньому залежать лише від його стану в даний момент t_0 і не залежать від того, коли і як система S набула цього стану.

Іншими словами, для *марковського випадкового процесу* його майбутнє залежить від його минулого лише через теперішнє.

Приклад. Система S – лічильник у таксі. Стан системи у момент t характеризується кількістю кілометрів, пройдених автомобілем до даного моменту. Нехай у момент t_0 лічильник показує S_0. Ймовірність того, що в момент $t > t_0$ лічильник показуватиме ту чи іншу кількість кілометрів (відповідну кількість грошей) S_1, залежить від S_0, але не залежить від того, як змінювалися показники лічильника до моменту t_0.

Нехай досліджується деяка система S, яка в кожний фіксований момент часу $t = t_i$ може перебувати в одному з несумісних станів $s_1, s_2, \ldots, s_n$, причому перехід цієї системи з одного стану s_i в інший s_j може відбуватися в моменти часу $t = t_1,\ t_2, ...,\ t_k, ...$.

Для такого процесу моменти $t_1, t_2, \ldots, t_k, ...$ розглядають як послідовні кроки процесу, а як аргумент, від якого залежить процес, розглядається не час, а номер кроку: $1, 2, \ldots k, \ldots$. Таким чином, випадковий процес характеризується послідовністю станів

$$S(0), S(1), \ldots, S(k), \ldots, \tag{3.1}$$

де $S(0)$ – початковий стан системи (перед першим кроком);

$S(1)$ – стан системи після першого кроку;

...

$S(k)$ – стан системи після k-го кроку;

...

Подія $S(k)=s_i$ – після k-го кроку система знаходиться у стані s_i, де $i=1, 2, \ldots n$ є випадковою подією, тому послідовність станів (3.1) можна розглядати як послідовність випадкових подій. Початковий стан $S(0)$ може бути заданий заздалегідь, а може бути і випадковим. Події послідовності $S(0), S(1), \ldots, S(k), \ldots$ утворюють ланцюг Маркова.

Означення. Випадковий процес, що відбувається в системі S, називається *ланцюгом Маркова*, якщо виконується умова: для будь-якого фіксованого моменту часу (будь-якого кроку k_0) умовні ймовірності станів системи при $k>k_0$ (у майбутньому) залежать лише від стану системи при $k=k_0$ (в теперішньому) і не залежать від того, коли і як система S набула цього стану.

Означення. Випадковий процес Маркова з дискретними станами і дискретним часом називають *ланцюгом Маркова.*

Однією з основних задач дослідження ланцюга Маркова є знаходження ймовірностей перебування системи S у стані s_i на будь-якому кроці k, тобто $p_i(k)=P\left[S(k)=s_i\right]$, де $i=1, 2, \ldots, n$, $k=0, 1, \ldots$

Для знаходження цих ймовірностей необхідно знати початковий розподіл ймовірностей, тобто ймовірності перебування системи у різних станах при $t_0=0$:

$$p_1(0), p_2(0), \ldots, p_i(0), \ldots, p_n(0),$$

а також умовні ймовірності безпосереднього переходу системи S зі стану s_i у стан s_j на k-му кроці – $p_{ij}(k)$:

$$p_{ij}(k)=P\left[S(k)=s_j / S(k-1)=s_i\right],\ i, j=1, 2, \ldots, n.$$

Умовні ймовірності переходу $p_{ij}(k)$ називають *перехідними ймовірностями марковського ланцюга.*

Ймовірність $p_{ii}(k)$ – ймовірність того, що на k-му кроці система залишиться у стані s_i.

Ймовірності $p_i(0)$ запишемо у вигляді вектора

$$p = \left(p_1(0), p_2(0), ..., p_i(0), ..., p_n(0)\right), \tag{3.2}$$

де $p_i(0) \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1.$

Зокрема, якщо відомо, що в початковий момент система перебуває у стані s_i, то $p_i(0) = 1$, звідки:

$$p_1(0) = p_2(0) = ... = p_{i-1}(0) = p_{i+1}(0) = ... = p_n(0) = 0.$$

Перехідні ймовірності $p_{ij}(k)$ можна записати у вигляді квадратної матриці:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & p_{13}(k) & ... & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & p_{23}(k) & ... & p_{2n}(k) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & p_{n3}(k) & ... & p_{nn}(k) \end{pmatrix},\ k = 1, 2, ..., \tag{3.3}$$

де $p_{ij}(k) \geq 0.$

Оскільки випадкові події – перехід системи з фіксованого стану s_i до будь-якого можливого стану s_j, утворюють повну групу подій, то

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1.$$

Означення. Ланцюг Маркова називається *однорідним*, якщо умовна ймовірність $p_{ij}(k)$ переходу системи зі стану s_i у стан s_j не залежить від кроку k, тобто $p_{ij}(k) = p_{ij} = \text{const}.$

Надалі будемо розглядати однорідні ланцюги Маркова. Матриця перехідних ймовірностей для однорідних ланцюгів Маркова подається у вигляді

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

де $p_{ij} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$

Матриці (3.3), (3.4) називають матрицями *однокрокового переходу.*

Ланцюг Маркова вважається заданим, якщо задано початковий розподіл ймовірностей і матрицю перехідних ймовірностей.

Означення. Вектор з невід'ємними координатами, сума яких дорівнює одиниці, називається стохастичним.

Означення. Квадратна матриця з невід'ємними елементами, сума яких у кожному рядку дорівнює одиниці, називається стохастичною.

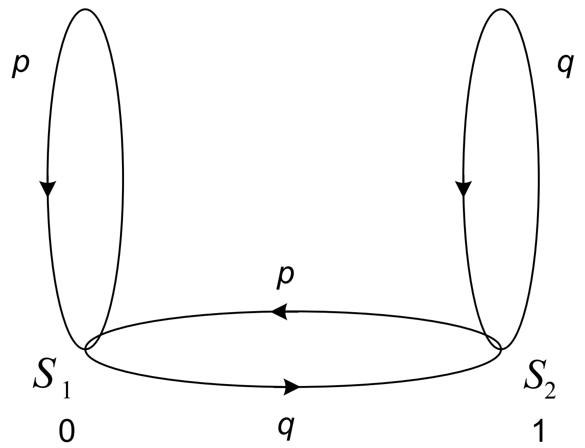
Таким чином, ланцюг Маркова вважається заданим, якщо задані стохастичний вектор (3.2) та стохастична матриця (3.4).

Для наочності стани марковських ланцюгів та ймовірності переходу системи з одного стану в інший зручно подавати *ймовірнісними графами*. У загальному випадку графи зображаються *вершинами*, які розміщуються на площині в певному порядку, і лініями, що сполучають вершини, – так званими *ребрами*. Вершина графа інформує про стан, в якому може перебувати система, а ребро графа, що сполучає дві вершини, вказує на той стан, в який може перейти система з певною ймовірністю.

Приклад 3.1. Деяка фізична система S у початковий момент часу перебуває у стані s_1, а в кожен наступний момент часу вона може перебувати в одному з двох станів s_1 і s_2, причому, якщо вона перебуває у стані s_1, то через одиницю часу вона з ймовірністю p залишається в ньому, а з ймовірністю $q = 1 - p$ переходить у стан s_2; якщо вона перебуває в стані s_2, то через одиницю часу вона з ймовірністю q залишається в ньому, а з ймовірністю p переходить у стан s_1. Зобразити цей ланцюг Маркова таблично та графічно.

Розв'язання

З умови задачі випливає, що стохастичний вектор цього ланцюга Маркова – $p = (1;0)$, а стохастична матриця – $P = \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}$. Отже, згідно з алгоритмом побудови ймовірнісного графа, отримаємо:



3.2. ЙМОВІРНІСТЬ ПЕРЕХОДУ СИСТЕМИ ІЗ СТАНУ В СТАН ЗА n КРОКІВ

Розглянемо задачу: за відомими перехідними ймовірностями p_{ij} знайти ймовірності переходу системи S зі стану s_i у стан s_j за n кроків.

Позначимо ймовірність переходу зі стану s_i у стан s_j за n кроків через $p_{ij}^{(n)}$. При $n = 1$ ймовірність $p_{ij}^{(1)}$ є елементом стохастичної матриці P ланцюга Маркова, а сукупність цих ймовірностей для всіх можливих i та j утворює стохастичну матрицю цього ланцюга.

При $n = 2$ ймовірність переходу $s_i \to s_j$ за два кроки $p_{ij}^{(2)}$ обчислюється за формулою:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^{n} p_{im} \cdot p_{mj}. \qquad (3.5)$$

Для всіх можливих i та j отримаємо матрицю:

$$\left\| p_{ij}^{(2)} \right\| = P^2. \qquad (3.6)$$

Можна довести, що $p_{ij}^{(n)}$ є елементом стохастичної матриці P^n. Зокрема,

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{m=1}^{n} p_{im} \cdot p_{mj}^{(n)}, \; n = 1, 2, \; \ldots \qquad (3.7)$$

та

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n)}, \; k, n = 1, 2, \ldots \qquad (3.8)$$

Рівність (3.8) є *основною тотожністю ланцюгів Маркова*. Формула (3.8) є формулою повної ймовірності і показує, що матриця $\left\| p_{ij}^{(m+n)} \right\|$ ймовірностей переходу за $m+n$ кроків є добутком матриці ймовірностей переходу за m кроків на матрицю ймовірностей переходу за n кроків, тобто

$$\left\| p_{ij}^{(m+n)} \right\| = P^{m+n}.$$

Зауважимо, що матриця $\left\| p_{ij}^{(m+n)} \right\|$ є стохастичною матрицею, отже, всі натуральні степені стохастичної матриці є стохастичними матрицями.

Приклад 3.2. Знайти матрицю ймовірностей переходу зі стану в стан ланцюга Маркова за 2 та 3 кроки, якщо його стохастична матриця P має вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки $\left\| p_{ij}^{(2)} \right\| = P^2$, $\left\| p_{ij}^{(3)} \right\| = P^3$, виконавши множення матриць, отримаємо:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \; P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3. КЛАСИФІКАЦІЯ СТАНІВ

Стани $s_1, s_2, \ldots$ системи ланцюга Маркова мають різне функціональне навантаження, що і визначає їх класифікацію.

Означення. Стан s_j називається *досяжним зі стану* s_i, якщо існує таке ціле невід'ємне число n, що з ймовірністю, відмінною від нуля, система може перейти зі стану s_i у стан s_j за n кроків, тобто $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Означення не виключає і випадок $s_j = s_i$.

Означення. Множина станів C називається *замкненою*, якщо ніякий стан зовні C не є досяжним з ніякого стану, що входить у C.

Множина станів C буде замкненою тоді і тільки тоді, коли $p_{ij} = 0$ при всіх значеннях i та j таких, що s_i належить C, а s_j не належить C.

Таким чином, якщо в матриці ймовірностей переходу за n кроків P^n $(n = 1, 2, \ldots)$ викреслити всі рядки і стовпці, що відповідають станам, які не входять у замкнену множину C, то дістанемо нову стохастичну матрицю. Ланцюг Маркова з цією стохастичною матрицею можна вивчати незалежно від інших станів, що не входять у замкнену множину C. Отже, на кожній замкненій множині станів однозначно визначається деякий ланцюг Маркова.

Означення. Ланцюг Маркова називається *незвідним*, якщо в ньому немає ніяких замкнених множин станів, крім множини всіх станів.

Підсумовуючи отримані результати, можна одержати *критерій незвідності:* ланцюг Маркова є незвідним тоді і тільки тоді, коли довільний його стан досяжний з довільного іншого стану.

Означення. Стан ланцюга Маркова називається *поглинальним,* якщо замкнена множина станів у ньому складається лише з одного цього стану.

Іншими словами, поглинальним станом ланцюга Маркова є стан, потрапляючи в який процес у ньому залишається. Стан s_i є поглинальним тоді і тільки тоді, коли $p_{ii} = 1$. З поглинального стану недосяжний ніякий інший стан.

Означення. Стан s_i ланцюга Маркова називається *зворотним,* якщо система, яка в початковий момент часу перебувала в цьому стані, обов'язково повернеться коли-небудь у цей же стан s_i.

Таким чином, якщо стан s_i зворотний, то

$$u_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{ii}^{(n)} = 1, \tag{3.9}$$

де $u_{ii}^{(n)}$ – ймовірність першого повернення системи в стан s_i у n-й момент часу, якщо і в початковий момент система там перебувала.

Нехай $\tau_1^{(ii)}$ – час першого повернення системи в стан s_i, якщо і в початковий момент часу вона перебувала в ньому. Узагальнена випадкова змінна $\tau_1^{(ii)}$ може набувати значень $1, 2, ..., \infty$, відповідно з ймовірностями $u_{ii}^{(1)}, u_{ii}^{(2)}, \ldots, 1-u_{ii}$.

Означення. Стан s_i ланцюга Маркова називається *незворотним,* якщо $u_{ii} < 1$.

Таким чином, якщо стан s_i *незворотний*, то ймовірність того, що система ніколи не повернеться в цей стан, дорівнює $1-u_{ii} > 0$.

Означення. Стан s_i ланцюга Маркова називається *періодичним,* якщо перше повернення в цей стан може відбутися лише за кількість моментів часу, яка кратна деякому фіксованому натуральному числу T, яке більше за одиницю.

Отже, число T набуває значень 1, 2, ... Найменше число T, що задовольняє умову $u_{ii}^{(\neq nT)} = 0$, називається *періодом стану* s_i.

Приклад 3.3. Ланцюг Маркова зі станами s_1, s_2, s_3 має таку матрицю перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити період стану s_1.

Розв'язання

Схему переходів зі стану s_1 в інші стани даного ланцюга Маркова описує перший рядок матриці P. Отже, зі стану s_1 можливий перехід лише в стан s_2, який обов'язково відбудеться, оскільки ймовірність цього переходу дорівнює одиниці.

Схему переходів зі стану s_2 в інші стани даного ланцюга Маркова описує другий рядок матриці P. Отже, зі стану s_2 можливий перехід лише в стан s_3, який обов'язково відбудеться, оскільки ймовірність цього переходу дорівнює одиниці.

Аналогічно зі стану s_3 можливий перехід лише у стан s_1, який також обов'язково відбудеться. Таким чином, у даному ланцюзі Маркова зі стану s_1 можливі переходи $s_1 \to s_2 \to s_3 \to s_1$. Отже, стан s_1 має період $T = 3$.

3.4. ЙМОВІРНІСТЬ ПЕРЕБУВАННЯ СИСТЕМИ В ЗАДАНОМУ СТАНІ НА n-МУ КРОЦІ

Нехай ланцюг Маркова заданий стохастичним вектором p та стохастичною матрицею P. Позначимо через $p_k^{(n)}$ ймовірність того, що ланцюг Маркова через n кроків буде знаходитись у стані s_k. Всі такі ймовірності запишемо у вигляді вектора

$$p(n) = \left(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}\right). \tag{3.10}$$

Зрозуміло, що $p_i^{(0)} = p_i(0)$, де $p_i(0)$ – ймовірність перебування системи в стані s_i при $t_0 = 0$. Таким чином, $p(0) = p$.

Знайдемо ймовірність перебування системи в заданому стані на 1-му кроці. Зрозуміло, що перейти у стан s_k за один крок система може з будь-якого початкового стану s_i, в якому вона перебувала з ймовірністю $p_i(0)$:

$$\begin{gathered} s_1 \to s_k \\ s_2 \to s_k \\ \ldots \\ s_i \to s_k \\ \ldots \\ s_n \to s_k \end{gathered}$$

Тоді за формулою повної ймовірності маємо

$$p_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i(0) \cdot p_{ik}.$$

Сума одержана за правилом скалярного добутку стохастичного вектора p на i-й стовпець стохастичної матриці P. Для всіх можливих значень i отримаємо вектор $p(1)$. Правило побудови елементів $p_i^{(1)}$ вказує, що вектор ймовірностей перебування системи в заданому стані на 1-му кроці дорівнює добуткові стохастичного вектора на стохастичну матрицю, тобто

$$p(1) = p \cdot P. \tag{3.11}$$

Зауважимо, що вектор $p(1)$ є стохастичним.

Аналогічно можна показати, що

$$p(2) = p(1) \cdot P = p \cdot P^2. \tag{3.12}$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$p(n+1) = p(n) \cdot P = p \cdot P^{n+1}. \tag{3.13}$$

Приклад 3.4. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором $p = (1, 0, 0, 0)$ і стохастичною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти ймовірності його перебування в різних станах на 1-му, 2-му, та 3-му кроках.

Розв'язання

За формулою (3.11) знайдемо ймовірності перебування ланцюга Маркова на 1-му кроці:

$$p(1) = (1, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 1).$$

Аналогічно за формулою (3.12) отримаємо:

$$p(2)=p(1)\cdot P=(0,0,0,1)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\p&q&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=(0,0,1,0).$$

Тоді

$$p(3)=p(2)\cdot P=(0,0,1,0)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&1\\p&q&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=(p,q,0,0).$$

3.5. ЙМОВІРНІСТЬ ПЕРЕБУВАННЯ СИСТЕМИ В ЗАДАНОМУ СТАНІ В ДАЛЕКОМУ МАЙБУТНЬОМУ

Якщо ланцюг Маркова функціонує нескінченно довго, то за певних умов у системі може встановитися стаціонарний режим, при якому система продовжує блукання за станами, але ймовірності цих станів не змінюються (не залежать від номера кроку). Такі ймовірності називаються *граничними (фінальними)* ймовірностями ланцюга Маркова. Граничні ймовірності можна тлумачити як середній час перебування системи в даному стані.

Нехай ланцюг Маркова ергодичний та існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} p_k^{(n)} = p_{\bullet k}$, які не залежать від початкових умов. Позначимо вектор граничних ймовірностей $p_{\bullet}=(p_{\bullet 1},p_{\bullet 2},\ldots,p_{\bullet k},\ldots)$. Необхідно знайти компоненти цього вектора.

Розглянемо співвідношення $p(n+1)=p(n)\cdot P.$ Перейдемо до границі за умови: $n\to\infty.$ Враховуючи, що для стаціонарного режиму ланцюга Маркова ймовірність перебування системи в заданому стані на $n+1$-му кроці дорівнює ймовірності перебування системи в заданому стані на n-му кроці, тобто $p_j(n+1)=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(n)\cdot p_{ij}=p_j$, де p_j не залежить від n, отримаємо:

$$p_{\bullet}=p_{\bullet}\cdot P,$$
$$p_{\bullet}\cdot I=p_{\bullet}\cdot P,$$

де I – одинична матриця.

Отже,

$$p_{\bullet} \cdot (P - I) = 0.$$

Матриця $D = P - I$ називається *динамічною матрицею.*

Таким чином, розв'язок поставленої задачі, якщо він існує, є розв'язком *динамічної системи рівнянь:*

$$\begin{cases} p_{\bullet} \cdot D = 0 \\ \sum\limits_{i=1} p_{\bullet i} = 1 \end{cases}. \tag{3.14}$$

Він називається *стаціонарним режимом* ланцюга Маркова.

Запишемо систему (3.14) в координатній формі:

$$(p_{\bullet 1}, p_{\bullet 2}, \ldots, p_{\bullet k}, \ldots) \cdot \begin{pmatrix} p_{11} - 1 & p_{12} & \ldots \\ p_{21} & p_{22} - 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = (0, 0, \ldots),$$

тобто

$$\begin{cases} (p_{11} - 1) \cdot p_{\bullet 1} + p_{21} \cdot p_{\bullet 2} + p_{31} \cdot p_{\bullet 3} + \ldots = 0, \\ p_{21} \cdot p_{\bullet 1} + (p_{22} - 1) \cdot p_{\bullet 2} + p_{32} \cdot p_{\bullet 3} + \ldots = 0, \\ \qquad \ldots \\ p_{\bullet 1} + p_{\bullet 2} + p_{\bullet 3} + \ldots = 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Зауважимо, що обернені значення розв'язків системи рівнянь (3.15) визначають середні значення часів перших повернень системи у відповідні стани, тобто дорівнюють величинам $M\left(\tau_1^{(11)}\right)$, $M\left(\tau_1^{(22)}\right)$, ...

Приклад 3.5. Знайти стаціонарний режим для ланцюга Маркова зі стохастичною матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

У даному випадку система (3.14) має вигляд:

$$\left(p_{\bullet 1}, p_{\bullet 2}, p_{\bullet 3}, p_{\bullet 4}\right)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ p & q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \left(0, 0, 0, 0\right),$$

звідки

$$\begin{cases} -p_{\bullet 1} + p\cdot p_{\bullet 3} = 0, \\ -p_{\bullet 2} + q\cdot p_{\bullet 3} = 0, \\ p_{\bullet 1} + p_{\bullet 2} - p_{\bullet 4} = 0, \\ p_{\bullet 1} + p_{\bullet 2} + p_{\bullet 3} + p_{\bullet 4} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи алгебраїчну систему рівнянь, отримаємо:

$$p = \left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Означення марковського випадкового процесу.
2. Означення ланцюга Маркова.
3. Імовірнісна матриця переходів та її властивості.
4. Який ланцюг Маркова називається однорідним?
5. Що називають однокроковою матрицею переходу системи?
6. Що називається стохастичним вектором?
7. Що називається стохастичною матрицею?
8. Як визначаються ймовірності переходу системи зі стану в стан за n кроків?
9. Який стан називається досяжним зі стану s_j?
10. Яка множина станів називається замкненою?
11. Що називають незвідним ланцюгом Маркова?
12. Критерій незвідності ланцюга Маркова.
13. Що називається зворотним станом ланцюга Маркова?
14. Що називається періодичним станом ланцюга Маркова?
15. Ймовірність перебування системи в заданому стані на n-му кроці.
16. Ймовірність перебування системи в заданому стані в далекому майбутньому.
17. Динамічна матриця.
18. Стаціонарний режим ланцюга Маркова.

ВПРАВИ

1. Визначити a, b, c так, щоб була стохастичною матриця

$$P=\begin{pmatrix} 0,4 & b & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & c \\ a & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

2. Матриця перехідних ймовірностей ланцюга Маркова має вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти кількість станів; побудувати граф, що відповідає матриці P.

3. Ланцюг Маркова з двома станами має таку матрицю перехідних ймовірностей $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Чи є два стани ланцюга Маркова періодичними? Якщо так, то який період цих станів?
4. Ланцюг Маркова з трьома станами має таку матрицю перехідних ймовірностей $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Чи є всі три стани ланцюга Маркова періодичними? Якщо так, то який період цих станів?
5. Розглянувши схему Бернуллі як частковий випадок ланцюга Маркова, знайти початковий розподіл, матрицю перехідних ймовірностей, побудувати граф ланцюга Маркова.
6. Здійснено серію кидань монети, в кожному з яких ймовірність появи герба постійна і дорівнює p. Стан процесу після n переходів визначимо як різницю між числом "випадань" і числом "невипадань" герба. Знайти матрицю перехідних ймовірностей цього ланцюга Маркова.
7. У двох урнах розміщено N червоних і N білих кульок так, що в кожній з них є по N кульок. Станом системи є кількість білих кульок у першій урні. Знайти матрицю перехідних ймовірностей цього ланцюга Маркова.
8. Побудувати граф станів випадкового процесу: пристрій S утворено з двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може

вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом заздалегідь невідомого проміжку часу.

9. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором і стохастичною матрицею

$$p\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right),\ P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати граф ланцюга. Знайти вектор ймовірностей перебування системи у різних станах на першому та другому кроках.

10. Дано ланцюг Маркова

$$p=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;0\right);\ P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю ймовірностей переходу за два, три кроки, стаціонарний розподіл.

11. Дано ланцюг Маркова

$$p=(0,7;0,2;0,1);\ P=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл за станами після двох кроків, стаціонарний розподіл.

12. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором і стохастичною матрицею

$$p(1;0;0;0);\ P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати граф ланцюга. Знайти вектор ймовірностей перебування системи у різних станах на першому та другому, третьому кроці та в далекому майбутньому.

13. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором і стохастичною матрицею

$$p\left(1/2;0;0;1/2\right);\ P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p_{\bullet}$.

14. Знайти матрицю ймовірностей переходу зі стану в стан ланцюга Маркова за 2, 3, 4, 5, ... кроки, якщо його стохастична матриця P має вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15. Матриця ймовірностей переходу ланцюга Маркова має вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Розподіл за станами в момент $t=0$ визначається вектором (0,7; 0,2; 0,1). Знайти:

а) розподіл за станами після двох кроків;

б) ймовірність того, що в моменти $t=0,1,2,3$ станами цього ланцюга будуть відповідно стани s_1, s_3, s_3, s_2.

16. Дано ланцюг Маркова

$$p=\left(0{,}5;\,0{,}2;\,0{,}3\right);\ P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) розподіл за станами після двох кроків;

б) ймовірність того, що в моменти $t=0,1,2,3$ станами цього ланцюга будуть відповідно стани s_1, s_3, s_2, s_2.

17. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором і стохастичною матрицею

$$p\left(1/4;1/2;0;1/4\right),\ P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) розподіл за станами після двох кроків;

б) ймовірність того, що в моменти $t=0,1,2,3$ станами цього ланцюга будуть відповідно стани s_1, s_2, s_4, s_4.

18. У ланцюзі Маркова з двома станами початковим станом є перший стан. Знайти ймовірності ланцюгів (1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 1), (1, 2, 2), якщо відома матриця перехідних ймовірностей:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

19. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором і стохастичною матрицею

$$p=\left(\frac{1}{3};\alpha\right),\ P=\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \beta \\ \gamma & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Знайти імовірності подій (1, 2, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 2).

20. Для ланцюга Маркова, який задано в задачі 19, знайти ймовірність того, що ланцюг завдовжки 3 починається та завершується 1.

21. Для ланцюга Маркова, який задано в задачі 19, знайти ймовірність того, що в ланцюгу завдовжки 4 всі стани однакові.

22. Знайти стаціонарний розподіл ланцюга Маркова зі стохастичною матрицею

$$P=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

23. Знайти стаціонарний розподіл ланцюга Маркова зі стохастичною матрицею

$$\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & ... \\ q & 0 & p & 0 & ... \\ q & 0 & 0 & p & ... \\ q & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

24. Довести, що всі стохастичні матриці типу

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

де $0<\alpha<1$, мають однаковий стаціонарний розподіл.

25. Знайти, якщо існує, стаціонарний розподіл ланцюга Маркова

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

26. Знайти, якщо існує, стаціонарний розподіл ланцюга Маркова

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

27. Задано ланцюг Маркова

$$p=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right);\ P=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл за станами після двох кроків, стаціонарний розподіл.

28. Ланцюг Маркова задано стохастичним вектором і стохастичною матрицею

$$p(1;0;0;0),\ P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ p & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Знайти стаціонарний розподіл.

29. Поведінка ринку цінних паперів виявляє таку тенденцію: операції, в яких ціни зростають, змінюються операціями, в яких ціни знижуються. Спостереження показали, що умовна ймовірність зростання цін після попереднього періоду їх зниження дорівнює 0,65, а умовна ймовірність зниження цін після попереднього періоду їх зростання дорівнює 0,6. Визначити відповідні стани, побудувати їх розмічений граф, знайти матрицю перехідних ймовірностей і граничні ймовірності станів.
30. Кожний з двох банків A і B може перебувати в одному з двох станів, які характеризуються процентними ставками за вкладами, які встановлюються на початку кожного кварталу і зберігаються незмінними до початку нового кварталу: стан s_1 – процентна ставка $5\,\%$, стан s_2 – процентна ставка $6\,\%$. Ймовірності переходів банків A і B зі стану в стан не залежать від часу t і задаються відповідними матрицями:

$$P_A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}7\\ 0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix} \text{ і } P_B=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}1 & 0{,}9\end{pmatrix}.$$

Побудувати розмічені графи банків A і B. Чи існують фінальні ймовірності станів банку? Якщо так, то визначити їх. В який банк вигідніше робити вклади?

4. ОДНОРІДНІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

У попередньому розділі аналізувалися випадкові процеси зі скінченною чи зчисленною множиною станів $s_1, s_2, \dots s_n$, які залежать від дискретного параметра. У них зміни можуть відбуватися лише у фіксований момент часу $t = 0, 1, \dots$, причому стан системи залежить лише від того, в якому стані вона перебуває тепер, і не залежить від динаміки переходів зі стану в стан у попередні моменти часу, а також від того, яким способом система потрапила в теперішній стан.

У цьому розділі розглядаються окремі стохастичні процеси, які є залежними від неперервного параметра. У системах, в яких відбуваються такі процеси, переходи зі стану в стан можливі в будь-які моменти часу. Указані процеси часто зустрічаються в природі і є предметом вивчення страхової справи, дослідження операцій тощо.

4.1. НАЙПРОСТІШИЙ ПОТІК ПОДІЙ

Означення. Потоком подій називається послідовність подій, які настають одна за одною у випадкові моменти часу.

Означення. Інтенсивністю потоку λ називається середнє число подій, які відбуваються за одиницю часу.

Інтенсивність потоку може бути як сталою, так і змінною, залежною від часу. Зокрема, потік машин (день, ніч).

Миттєва інтенсивність потоку $\lambda(t)$ визначається як границя відношення середнього числа подій, які відбулися за проміжок часу $(t; t + \Delta t)$, до довжини інтервалу Δt, за умови, що $\Delta t \to 0$.

Середнє число подій, що відбуваються на інтервалі $(t_0; t_0 + \Delta t))$, визначається за формулою $a(t_0, \Delta t) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \lambda(t)dt.$ Якщо потік стаціонарний, то $a = \lambda t.$

Означення. Потік подій називається регулярним, якщо події настають одна за одною, через рівні проміжки часу.

На практиці найчастіше зустрічаються нерегулярні потоки з випадковими інтервалами.

Серед властивостей, які мають потоки подій, виділяють властивості: *стаціонарності, відсутності післядії, ординарності.*

Означення. Потік називається стаціонарним, якщо його ймовірнісні характеристики не залежать від часу.

Потік називається *стаціонарним*, якщо ймовірність появи k подій на будь-якому проміжку часу залежить лише від числа k та від тривалості проміжку часу t, але не залежить від положення проміжку на вісі Ot.

Означення. Потік називається потоком без післядії, якщо для будь-яких проміжків часу t_1 і t_2 число подій, які потрапили на один з них, не залежить від того, скільки подій потрапило на інший.

Фактично відсутність післядії у потоці означає, що події, які утворюють потік, є незалежними одна від одної.

Означення. Потік називається ординарним, якщо за нескінченно малий проміжок часу може з'явитися не більше ніж одна подія.

Фактично ординарність означає, що події у потоці з'являються по одній, а не парами та групами. Зокрема, потік поїздів – ординарний, а потік вагонів – неординарний.

Означення. Найпростішим називається потік, який має властивості стаціонарності, відсутності післядії та ординарності.

Означення. Пуассонівським називається ординарний потік з відсутністю післядії.

Таким чином, найпростіший потік є частинним випадком пуассонівського потоку (стаціонарний пуассонівський потік).

На практиці достатньо важко встановити, чи має потік перелічені властивості. Якщо потік є сумою великої кількості незалежних стаціонарних потоків, вплив кожного з них на сумарний потік є дуже малим, то сумарний потік, за умови його ординарності, близький до найпростішого.

Якщо потік подій найпростіший, то ймовірність того, що за проміжок часу t подія A відбудеться m раз, визначається формулою Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \tag{4.1}$$

де λ – інтенсивність потоку.

Ця формула відображає всі властивості найпростішого потоку, а отже, є його математичною моделлю.

Приклад 4.1. Середня кількість заявок, які надходять до комбінату побутового обслуговування за 1 год., дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 4 год. надійде: 3 заявки; менш як 3 заявки; не менш як 3 заявки.

Розв'язання

Нехай подія A – поява однієї заявки. Потік заявок є найпростішим, тому для розв'язування задачі застосуємо формулу (4.1), де $\lambda = 2$, $t = 4$, $m = 3$, $m < 3$, $m \geq 3$. Таким чином, маємо:

1. $P_4(3) = \dfrac{(2 \cdot 4)^3}{3!} e^{-8} \approx 0{,}0286.$

2. $P_4(m<3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = \dfrac{8^0}{0!} \cdot e^{-8} + \dfrac{8^1}{1!} \cdot e^{-8} + \dfrac{8^2}{2!} \cdot e^{-8} \approx$

$\approx 0{,}0003 + 0{,}0027 + 0{,}0107 = 0{,}0137.$

3. $P_4(m_3 \geq 6) = 1 - P_4(m<3) = 1 - 0{,}0137 = 0{,}9863.$

4.2. РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА. ГРАНИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ СТАНІВ

Означення. Імовірністю і-го стану називається ймовірність $p_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ того, що в момент t система перебуватиме у стані s_i, де $i = 1, 2, ..., n.$

Очевидно, що для будь-якого моменту t сума ймовірностей станів дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1. \tag{4.2}$$

Правило побудови рівнянь Колмогорова. У лівій частині кожного з рівнянь має бути похідна ймовірності i-го стану. У правій частині – сума добутків імовірностей усіх станів (з яких відбувається перехід у даний стан) на інтенсивності відповідних потоків подій мінус сумарна інтенсивність усіх потоків, що виводять систему із даного i-го стану, помножена на ймовірність цього стану.

Приклад 4.2. Пристрій S утворено із двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого негайно починається ремонт вузла, який триває протягом заздалегідь невідомого проміжку часу. Побудувати граф станів такого випадкового процесу. Скласти відповідну систему рівнянь Колмогорова.

Розв'язання

Можливі стани системи: s_0 – обидва вузли справні; s_1 – перший вузол ремонтується, а другий – справний; s_2 – другий вузол ремонтується, а перший – справний; s_3 – обидва вузли ремонтуються. Відповідний граф системи показано на рис. 4.1.

Система диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів набуває такого вигляду:

$$p_0' = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0,$$
$$p_1' = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1,$$
$$p_2' = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2,$$
$$p_3' = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3.$$

У вказаній системі незалежних рівнянь на одне менше від загальної кількості рівнянь. Тому для розв'язування системи необхідно додати рівняння (4.2) при $n = 3$.

Особливість розв'язання диференціальних рівнянь взагалі полягає в тому, що потрібно задавати так звані початкові умови, в даному разі – імовірності станів системи в початковий момент $t = 0$. Отже, відповідну систему маємо розв'язувати за умовою, що в початковий момент обидва вузли справні і система перебувала у стані s_0, тобто за початкових умов $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = 0$.

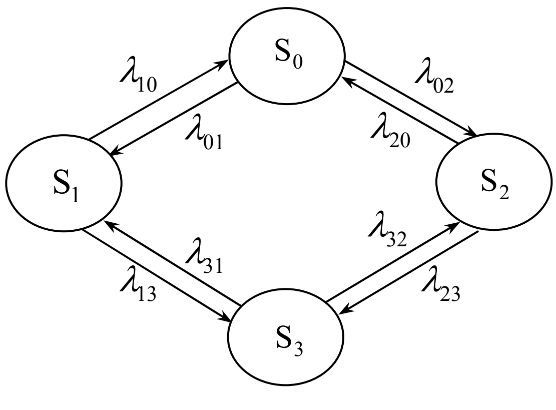


Рис. 4.1

Рівняння Колмогорова дають змогу знаходити всі ймовірності станів як *функції часу*. Особливий інтерес становлять імовірності системи $p_i(t)$ $(i = 1,...,n)$ у *граничному стаціонарному режимі*, тобто при $t \to \infty$, які називаються *граничними ймовірностями станів*.

Як відомо з теорії випадкових процесів, якщо кількість станів системи скінченна і з кожного з них можна перейти в будь-який інший стан, то *граничні ймовірності існують*.

Гранична ймовірність стану s_i має такий зміст: вона показує середню відносну тривалість перебування системи в цьому стані. Зокрема, якщо гранична ймовірність стану s_0 становить $p_0 = 0,5$, то це означає, що в середньому половину часу система перебуває у стані s_0.

Приклад 4.3. Знайти граничні ймовірності для системи S, граф станів якої наведено на рис. 4.1, якщо $\lambda_{01} = 1,\ \lambda_{02} = 2,\ \lambda_{10} = 2,\ \lambda_{13} = 2,$ $\lambda_{20} = 3,\ \lambda_{23} = 1,\ \lambda_{31} = 3,\ \lambda_{32} = 2.$

Розв'язання

Система рівнянь Колмогорова, яка описує стаціонарний режим для заданої системи S, матиме вигляд:

$$\begin{cases} 3p_0 = 2p_1 + 3p_2; \\ 4p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 4p_2 = 2p_0 + 2p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, отримаємо $p_0 = 0{,}4,\ p_1 = 0{,}2,\ p_2 = $ $= 0{,}27,\ p_3 = 0{,}13.$ Отже, у граничному стаціонарному режимі система S у середньому 40 % часу перебуватиме у стані s_0, 20 % – у стані s_1, 27 % – у стані s_2, 13 % – у стані s_3.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається потоком подій?
2. Що називається інтенсивністю потоку подій?
3. Який потік називається стаціонарним?
4. Який потік називається ординарним?
5. Який потік називається потоком без післядії?
6. Який потік називається найпростішим?
7. Який потік називається пуассонівським?
8. Що є математичною моделлю найпростішого потоку?
9. Назвіть правило побудови рівнянь Колмогорова.
10. Що називають граничними ймовірностями станів?

ВПРАВИ

1. Довести, що формулу Пуассона, яка визначає ймовірність появи k подій за час t: $P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}$, можна розглядати як математичну модель найпростішого потоку подій.
2. Довести, що для найпростішого потоку подій виконується умова:

$$\lim_{t\to 0}\frac{P(k\geq 1)}{P(k=1)}=1.$$

3. Середня кількість літаків, які прибувають до аеропорту протягом однієї хвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини до аеропорту прибуде: 4 літаки; менш як 4 літаки; не менш як 4 літаки. Потік прибуття літаків вважається найпростішим.
4. Середня кількість викликів, що поступають протягом однієї хвилини до оператора мобільного зв'язку, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за три хвилини надійде: три виклики; не менше трьох викликів.
5. На АТС надходить найпростіший потік подій з інтенсивністю $\lambda = 1{,}2$ викликів за хвилину. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: не надійде жодного виклику; надійде рівно 1 виклик; надійде хоча б один виклик.
6. Потік товарних потягів, які надходять до вузла сортування, вважають пуассонівським з інтенсивністю 6 потягів за 3 год. Знайти ймовірності того, що за 1,5 год. до вузла надійде: а) один товарний потяг; б) хоча б один такий потяг. Визначити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості товарних потягів, які надійдуть до вузла сортування протягом однієї доби.
7. Середня кількість обривів ниток на ткацькому верстаті за хвилину становить 3. Знайти ймовірність того, що за 3 хв. буде: а) 5 обривів ниток; б) менш як 5 обривів ниток; в) не менш як 5 обривів ниток. Потік подій вважається найпростішим.
8. У години "пік" через пропускний автомат станції метро за 1 с проходить у середньому один пасажир. Потік пасажирів вважають найпростішим. Яка ймовірність того, що за 5 с через пропускний автомат станції метро пройдуть: а) 4 пасажири; б) від одного до п'яти пасажирів?
9. Автомобілі, що рухаються по шосе в одному напрямку, утворюють найпростіший потік із параметром $\lambda = 3c^{-1}$ (тобто через умовну лінію, яка проведена перпендикулярно до шосе в певному місці, у середньому проїжджають 3 автомобілі за 1 с). Обчислити ймовірність

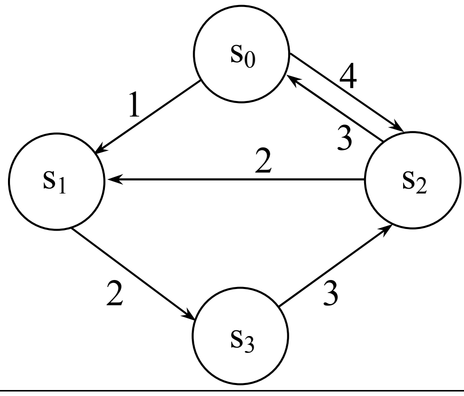
того, що за 2 с через умовну лінію проїде: а) 4 автомобілі; б) не більш як 4.

10. У середньому до авіакаси звертаються з приводу придбання квитків 60 осіб за 1 год. Враховуючи, що такі особи утворюють найпростіший потік, обчислити ймовірність того, що за 3 хв. до каси підійде: а) 3 пасажири; б) не більш як 3.
11. На АТС надходить найпростіший потік подій з інтенсивністю $\lambda = 1{,}4$ викликів за хвилину. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: не надійде жодного виклику; надійде рівно 1 виклик; надійде хоча б два виклики.
12. Інтервал часу T між подіями в ординарному потоці має щільність

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, t > t_0 \\ 0, \qquad t < t_0. \end{cases}$$

Інтервали між подіями незалежні. Побудувати графік щільності розподілу. Чи є вказаний потік найпростішим? Чи є вказаний потік потоком Пальма? Знайти інтенсивність потоку.

13. Знайти прибуток від експлуатації у стаціонарному режимі системи S, коли відомо, що за одиницю часу справна робота першого та другого вузлів приносить дохід, який становить відповідно 10 і 6 ум. од., а їх ремонт потребує витрат, що становлять відповідно 4 і 2 ум. од. Оцінити економічну ефективність зменшення вдвічі середньої тривалості ремонту кожного з цих вузлів, якщо в такому разі доведеться вдвічі збільшити витрати на ремонт.
14. Час безвідмовної роботи верстата-автомата є випадковою величиною, яка має експоненціальний закон розподілу ймовірностей із параметром λ, що дорівнює середній кількості відказів за одиницю часу. Відомо, що верстат-автомат уже пропрацював без відказів протягом часу τ. Знайти щільність імовірностей $f(t)$ часу T, протягом якого верстат-автомат пропрацює до найближчого відказу.
15. Знайти граничні ймовірності для системи S, граф якої зображено на рисунку:



5. СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ

5.1. СТАЦІОНАРНІ ТА НЕСТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Важливою особливістю випадкової функції є залежність властивостей такої функції від початку відліку часу. Відповідно до цього розглядають *стаціонарні та нестаціонарні випадкові процеси*.

Для стаціонарних випадкових функцій всі багатовимірні закони розподілу залежать тільки від взаємного розміщення моментів часу $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$, а не від самих значень цих величин.

Означення. Випадковий процес називається стаціонарним випадковим процесом, якщо його характеристики не змінюються зі зміною його аргументу, тобто однакові у всіх перетинах процесів $X(t)$ і $X(t+t_0)$, де t_0 – будь-яке фіксоване число.

Отже, у стаціонарному процесі функції щільності ймовірностей не змінюються при заміні аргументу t на $t+t_0$, тобто:

$$f(x_1, x_2, ... x_n; t_1, t_2, ... t_n) = f(x_1, x_2, ... x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, ... t_n + t_0), \quad (5.1)$$

де $n = 1, 2, ..., \ -\infty < t_0 < +\infty.$

Областю визначення такого процесу може бути або один з інтервалів $(-\infty; +\infty)$, $[0; +\infty)$, або множина всіх цілих чи додатних чисел.

Стаціонарний випадковий процес можна аналізувати, починаючи з будь-якого моменту часу, оскільки він знаходиться, по суті, в стані ймовірної рівноваги.

Обчислюючи математичне сподівання і кореляційну функцію стаціонарної функції $X(t)$, дістанемо:

$$m_x(t) = \text{const}, \ m_x(t) = \text{const}, \ K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1). \quad (5.2)$$

Умови (5.2) є необхідними, але недостатніми для стаціонарності функції. Вони можуть виконуватись, а умова (5.1) порушуватися, починаючи з деякого значення n, і тоді процес буде нестаціонарним. Враховуючи те, що часто обмежуються застосуванням кореляційної теорії випадкових процесів, поняття *стаціонарності* розширили, використовуючи умови (5.2) як означення стаціонарності функції. Таке означення стаціонарності, яке вперше запропонував А. В. Хінчин, має назву *стаціонарності у широкому розумінні*.

Означення. Випадковий процес називається стаціонарним у вузькому розумінні, якщо всі n-вимірні функції розподілу ймовірностей однакові при будь-якому t_0 і всіх $t_1, t_2, \dots t_n$ з області його визначення, тобто:

$$F_n(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n) = F_n(x_1, x_2, \dots x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots t_n + t_0),$$

де $n = 1, 2, \dots$

Аналогічна рівність виконується і для функції щільності ймовірностей, а також для моментних і кореляційних функцій.

Означення. Випадковий процес називається стаціонарним у широкому розумінні, якщо його математичне сподівання $m_x(t)$ не залежить від часу, а кореляційна функція залежить лише від різниці аргументів $t_2 - t_1$:

$$m_x(t) = \text{const}, \ K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1).$$

Таким чином, математичне сподівання та кореляційна функція інваріантні відносно зміни аргументу.

Зауважимо, що випадкові процеси стаціонарні у вузькому розумінні, завжди стаціонарні у широкому розумінні. Зворотне твердження в загальному випадку неправильне.

Прикладом стаціонарних процесів є величина струму, напруги в побутовій електромережі, ритм серця людини при постійному навантаженні та емоціях та ін.

Стаціонарні процеси є частковим випадком більш широкого класу – нестаціонарних процесів. Якщо будь-яка зі щільностей розподілу змінюється при зміні початку відліку часу, то випадковий процес називається *нестаціонарним.* У цьому випадку хоча б одна з моментних характеристик залежить від часу.

Серед стаціонарних випадкових функцій можна виділити клас функцій, динаміку яких можна проаналізувати, дослідивши лише одну типову реалізацію процесу. Такі випадкові процеси називають *ергодичними.*

Означення. Стаціонарний випадковий процес називається ергодичним, якщо його характеристики, знайдені усередненням множини реалізацій, співпадають з відповідними характеристиками, знайденими усередненням за часом однієї реалізації $x(t)$, яка досліджувалася на інтервалі $(0; T)$, де $T \to \infty$.

Зокрема, за оцінку математичного сподівання ергодичного стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ приймається середнє за часом значення реалізації на інтервалі $(0;T)$:

$$m_x^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\,.$$

Слід зазначити, що умова ергодичності виконується лише для стаціонарного процесу, тому ергодичні процеси є також стаціонарними.

Всі нестаціонарні процеси є неергодичними, але неергодичними можуть також бути і стаціонарні випадкові процеси.

5.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦІОНАРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ФУНКЦІЇ

Означення. Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо її математичне сподівання $m_x(t)$ є сталим при будь-яких значеннях t, а кореляційна функція залежить лише від різниці аргументів $t_2 - t_1$:

$$m_x(t) = \text{const},\ \ K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1).$$

Таким чином,

- кореляційна функція стаціонарної функції залежить лише від одного аргументу $\tau = t_2 - t_1$:

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau);$$

- дисперсія стаціонарної випадкової функції є сталою при будь-яких значеннях аргументу t і дорівнює значенню кореляційної функції при $\tau = 0$:

$$D_x(t) = k_x(0).$$

Властивості кореляційної функції стаціонарної функції

- кореляційна функція стаціонарної функції парна, тобто:

$$k_x(-\tau) = k_x(\tau).$$

- абсолютна величина кореляційної функції стаціонарної функції не перевищує її значення в початку координат:

$$\left|k_x(\tau)\right| \le k_x(0).$$

Означення. Нормованою кореляційною функцією $\rho_x(\tau)$ стаціонарної функції називають невипадкову функцію аргументу τ, яка визначається за формулою:

$$\rho_x(\tau)=\frac{k_x(\tau)}{k_x(0)}.$$

Модуль нормованої кореляційної функції не перевищує одиниці:

$$\left|\rho_x(\tau)\right|\le 1.$$

Означення. Стаціонарно зв'язаними називають дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$, взаємна кореляційна функція яких залежить лише від різниці аргументів $\tau=t_2-t_1$: $R_{xy}=r(\tau)$.

Кореляційна функція похідної $X'(t)=\dot{x}$ диференційовної стаціонарної випадкової функції $X(t)$ визначається за формулою:

$$k_{\dot{x}}(\tau)=-k_x''(t).$$

Кореляційна функція інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)\,d\tau$ від стаціонарної випадкової функції $X(t)$ визначається за формулою:

$$K_y(t_1,t_2)=\int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)k_x(\tau)d\tau-\int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau+\int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)k_x(\tau)d\tau.$$

Дисперсія інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$ від стаціонарної випадкової функції $X(t)$ визначається за формулою:

$$K_y(t_1,t_2)=2\int\limits_0^t(t-\tau)k_x(\tau)d\tau.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається стаціонарним випадковим процесом?
2. Чому дорівнює математичне сподівання та кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу?
3. Який випадковий процес називається стаціонарним у вузькому розумінні?
4. Який випадковий процес називається стаціонарним у широкому розумінні?

5. Який стаціонарний процес називається ергодичним?
6. Властивості кореляційної функції стаціонарної функції.
7. Що називається нормованою кореляційною функцією стаціонарної функції?
8. Які функції називаються стаціонарно зв'язаними?
9. Як визначається кореляційна функція похідної стаціонарної випадкової функції $X(t)$?
10. Як визначається кореляційна функція інтеграла від стаціонарної випадкової функції $X(t)$?

ВПРАВИ

1. Перевірити, чи є стаціонарною функція $X(t)=t^3U$, де U – випадкова величина, якщо а) $M(U)\neq 0$; б) $M(U)=0$.
2. Перевірити, чи є стаціонарною функція $X(t)=\sin(t+\varphi)$, де φ – випадкова величина, рівномірно розподілена в інтервалі $(0;2\pi)$.
3. Задана випадкова функція $X(t)=t+U\sin t+V\cos t$, де U,V – випадкові величини, $M(U)=M(V)=0$, $M(UV)=0$, $D(U)=D(V)=8$. Довести, що $X(t)$ – нестаціонарна функція, $\overset{\circ}{X}(t)$ – стаціонарна функція.
4. Задана випадкова функція $X(t)=t^2+U\sin 2t+V\cos 2t$, де U,V – випадкові величини, $M(U)=M(V)=0$, $M(UV)=0$, $D(U)=D(V)=$ $=10$. Довести, що $X(t)$ – нестаціонарна функція.
5. Чи є стаціонарною випадкова функція $X(t)=U\sin t-V\cos t$, де U,V – некорельовані випадкові величини, $M(U)=M(V)=0$, $D(U)=D(V)=D$.
6. Задана випадкова функція $X(t)=t^2+U\sin 2t+V\cos 2t$, де U,V – випадкові величини, $M(U)=M(V)=0, M(UV)=0$, $D(U)=$ $=D(V)=5$. Довести, що $\overset{\circ}{X}(t)$ – стаціонарна функція.
7. Довести, що випадковий процес $X(t)=(U+2)\cos 2t-V\sin 2t$, де U,V – некорельовані випадкові величини, U – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $a=-2$, $\sigma=2$, а V – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з параметрами $a=-2\sqrt{3}$, $\sigma=2\sqrt{3}$, є стаціонарним у широкому розумінні. Перевірити властивість ергодичності для математичного сподівання.

8. Довести, що випадковий процес $X(t)=(U-4)\cos 8t - V\sin 8t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, U – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 4$, V – нормально розподілена випадкова величина, розподілена з параметрами $a=0$, $\sigma = 2$, є стаціонарним у широкому розумінні.
9. Довести, що випадковий процес $X(t)=U\cos 6t-(V-4)\sin 6t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, U – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[-2; 2]$, V – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[2; 6]$, є стаціонарним у широкому розумінні. Перевірити властивість ергодичності для математичного сподівання.
10. Довести, що кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парною.
11. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=3e^{-2\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=5X(t)$.
12. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=2e^{-\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.
13. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=D_x e^{-|\tau|}\cdot(1+|\tau|)$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти нормовану кореляційну функцію.
14. Відома кореляційна функція $k_x(\tau)$стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Довести, що якщо $Y(\tau)=aX(\tau)$, то $k_y(\tau)=a^2k_x(\tau)$.
15. Довести, що дисперсія стаціонарної випадкової функції визначається за формулою: $D_x(t)=k_x(0)$.
16. Довести, що абсолютна величина кореляційної функції стаціонарної функції не перевищує її значення в початку координат, тобто $|k_x(\tau)|\le k_x(0)$.
17. Задано дві стаціонарні випадкові функції $X(t)=\cos(2t+\varphi)$ і $Y(t)= =\sin(2t+\varphi)$, де φ – випадкова величина, розподілена рівномірно в інтервалі $(0; 2\pi)$. Довести, що задані функції стаціонарно зв'язані.
18. Задано випадкові функції $X(t)=V\cos t-U\sin t$, $Y(t)=U\cos t+ +V\sin t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U)= =M(V)=0$, $D(U)=D(V)=5$. Довести, що функції стаціонарні та стаціонарно зв'язані.

19. Задано випадкові функції $X(t) = U\cos t + V\sin t$, $Y(t) = U\cos 2t + V\sin 2t$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U) = M(V) = 0$, $D(U) = D(V) = 3$. Чи є вказані функції стаціонарно зв'язаними?
20. Довести, що взаємні кореляційні функції двох стаціонарно зв'язаних випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$ задовольняють умову: $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(\tau)$.
21. Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = 2e^{-0,5\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію і дисперсію похідної $X'(t) = \dot{x}$.
22. Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = e^{-\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкової функції $X(t)$ та її похідної $X'(t) = \dot{x}$.
23. Довести, що кореляційна функція похідної $X'(t) = \dot{x}$ диференційовної стаціонарної випадкової функції $X(t)$ визначається за формулою: $k_{\dot{x}}(\tau) = -k''_x(t)$.
24. Довести, що похідні будь-якого порядку, якщо вони існують, від стаціонарної випадкової функції є також стаціонарними функціями.
25. Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = e^{-|\tau|^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію інтеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(t)dt$.
26. Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = 5\left(1 - \sin 3\tau^2\right) \cdot e^{-2\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію, дисперсію похідної $X'(t)$, взаємну кореляційну функцію $k_{x\dot{x}}(\tau)$.
27. Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = \dfrac{8\cos 4\tau}{2 + 6\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію, дисперсію похідної $X'(t)$.
28. Задана кореляційна функція $k_x(\tau) = 5 + 6\cos\tau\cos 3\tau$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію, дисперсію похідної $X'(t)$.

29. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=8\cos 4\tau$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію та дисперсію інтеграла від випадкового процесу $X(t)$.
30. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=\dfrac{10}{1+4\tau^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію та дисперсію інтеграла від випадкового процесу $X(t)$.
31. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=32\cos^2 2\tau$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію та дисперсію інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(t)dt.$
32. Довести, що випадковий процес $X(t)=U\sin(\omega t)+V\cos(\omega t)$, де U, V – некорельовані випадкові величини, $M(U)=M(V)=0$, $D(U)=D(V)=D$ є стаціонарним випадковим процесом. Знайти кореляційну функцію цього процесу.
33. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти взаємні кореляційні функції випадкової функції $X(t)$ та її другої похідної.
34. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=$ $=X(t)+X'(t)$.
35. Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=e^{-t^2}$ стаціонарної випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційну функцію випадкової функції $Y(t)=X(t)+X'(t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М. : Академия, 2003. – 488 с. – ISBN 5-7695-1054-4.
2. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5-06-005820-8.
3. Волощенко, А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст] : навч.-метод. посібник / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладов. – К. : КНЕУ, 2005. – 256 с. – ISBN 966–574–459–3.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с. – ISBN 5-06-003465-8.
5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с. – ISBN 5-06-003464-Х.
6. Жлуктенко, В. І. Стохастичні моделі в економіці [Текст] : монографія / В. І. Жлуктенко, А. В. Бєгун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с. – ISBN 966-574-744-4.
7. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології [Текст] : навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2002. – 226 с. – ISBN 966-574-346-5.
8. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики [Текст] : навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2005. – 351 с. – ISBN 966-574-855-6.
9. Сеньо, П. С. Випадкові процеси [Текст] : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с. – ISBN 966-96414-7-0.

Навчальне видання

Коломієць Світлана Володимирівна

ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Практикум

Редагування *Г. М. Нужненко*
Технічне редагування *І. О. Кругляк*
Комп'ютерна верстка *Н. А. Височанська*