Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Овечкин Данил
Александрович
группа: 5030102/80201

Проверил:
Баженов Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

1.1 Внешнее оценивание множества решений в $\mathbb{IR}$. Линейный случай

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где a, b - положительыне числа, c, k - положительыне интервалы
Оценить внешнее множество решений ИСЛАУ методом Кравчика и:

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решения
- Проиллюстрировать положение брусов при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы рабочих брусов
- Проиллюстрировать расстояние от центров брусов при итерациях до конечной точки алгоритма

1.2 Внешнее оценивание множества решений в $\mathbb{IR}$. Нелинейный случай

Дана нелинейная система уравнений

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ \frac{x_1}{x_2} = k \end{cases} \tag{2}$$

где a, b - положительные числа, c, k - положительные интервалы
Оценить внешнее множество решений методом Кравчика и:

- Проиллюстрировать положение брусов при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы рабочих брусов
- Проиллюстрировать расстояние от центров брусов при итерациях до конечной точки алгоритма

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Под внешним множеством решений понимается объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}} = \{x \in R^n | \exists a \in a,\ \exists b \in b :\ F(a, x) = b\} \tag{3}$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика - итерационный процесс уточнения двусторонней границы решений системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$F(x) = 0, x \in X \subset IR^n \tag{4}$$

Заданной на брусе X

Отображение

$$\mathcal{K}(X, \overline{x}) = \overline{x} - \Lambda \cdot F(\overline{x}) - (I - \Lambda \cdot L) \cdot (x - \overline{x}) \tag{5}$$

называется оператором Кравчика на X, относительно точки $\overline{x}$, где Λ - вещественная nxn матрица, L - интервальная матрица Липшица отображения F на брусе X. Если $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$, то существует единственная неподвижная точка, являющаяся решением рассматриваемой системы уравнений

Метод Кравчика заключается в построении последовательности $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле:

$$X^{k+1} = X^k \cap \mathcal{K}(X^k, \overline{x}^k) \tag{6}$$

2.3 Выбор начального приближения

Для каждой системы уравнений эмпирически выбирают свой начальный брус, предобуславливатель Λ и матрицу L

В случае ИСЛАУ итерационный процесс выглядит следующим образом

$$x^{k+1} \leftarrow \big(\Lambda \cdot b + (I - \Lambda \cdot A) \cdot x^k\big) \cap x^k,\ k = 0, 1, ... \tag{7}$$

где A - матрица, b - вектор правой части

Обычно берут

$$\Lambda = (midA)^{-1} \tag{8}$$

а начальную внешнюю оценку множества решений находят каким-либо из способов оценки

Например, если

$$\eta = ||I - \Lambda \cdot A||_\infty < 1 \tag{9}$$

Можно взять начальным приближением брус

$$x^0 = \begin{pmatrix} [-\theta,\ \theta] \\ \cdots \\ [-\theta,\ \theta] \end{pmatrix} \tag{10}$$

где

$$\theta = \frac{||\Lambda \cdot b||_\infty}{1 - \eta} \tag{11}$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

4 Результаты

4.1 Линейный случай

Рассмотрим ИСЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 = [2; 4] \\ 1 \cdot x_1 - [1; 2] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

4.1.1 Начальное приближение

Проверим, что $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$

$$|I - \Lambda A| \approx \begin{pmatrix} 0 & 0.2857 \\ 0 & 0.1429 \end{pmatrix}$$

$$\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.1429 < 1$$

Итерационный процесс сходящийся
Проверим выполнение неравенства (9)

$$\eta = ||I - \Lambda \cdot A||_\infty = 0.2857 < 1$$

Неравенство выполняется, можем воспользоваться приближением (10)

$$\theta = \frac{||\Lambda \cdot b||_\infty}{1 - \eta} = 2.4 \Rightarrow X^0 = \begin{pmatrix} [-2.4,\ 2.4] \\ [-2.4,\ 2.4] \end{pmatrix}$$

4.1.2 Результаты метода Кравчика

В результате алгоритма Кравчика получим следующие брусы

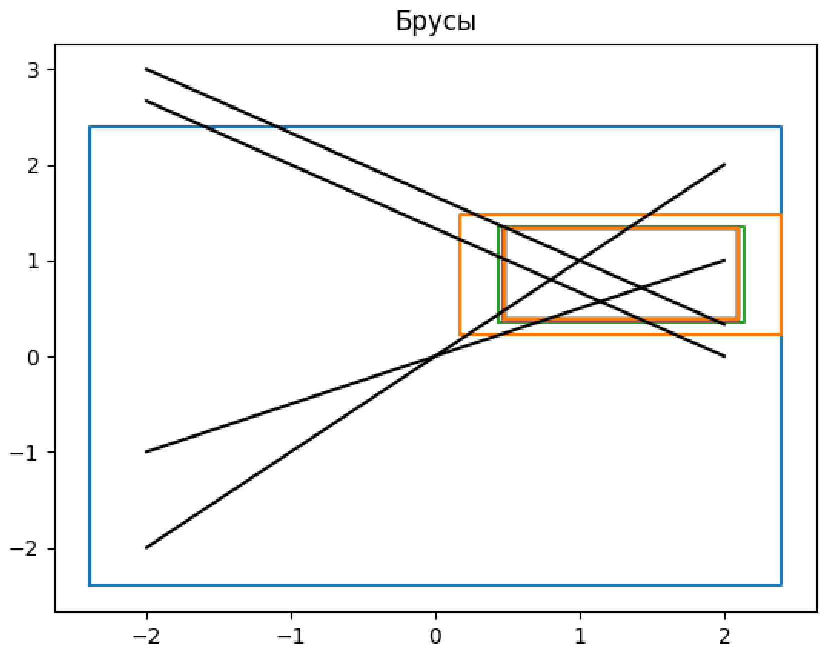

Рис. 1: Брусы при итерации

Построим графики радиусов брусов и сходимости алгоритма

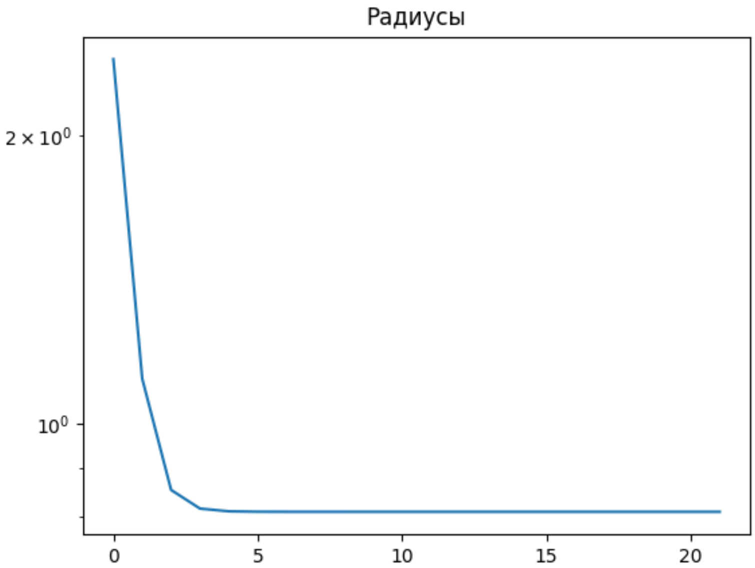

Рис. 2: Радиусы брусов

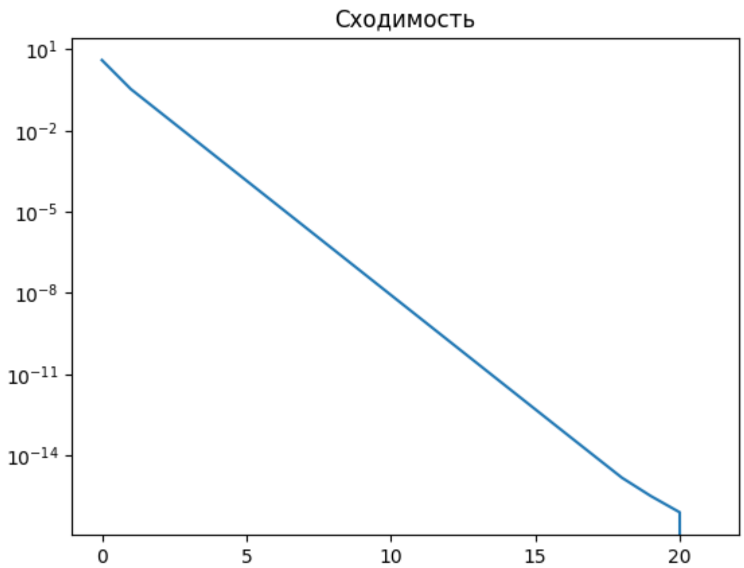

Рис. 3: Сходимость алгоритмов

4.2 Нелинейный случай

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4; 5] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1; 2] \end{cases} \tag{13}$$

4.2.1 Начальное приближение

В качестве начального приближения будем использовать брус

$$x^0 = \begin{pmatrix} [0.25,\ 4] \\ [0.25,\ 4] \end{pmatrix}$$

и

$$\Lambda = (midJ)^{-1},\ L = J, \text{ где } J - \text{якобиан}$$

4.2.2 Результаты метода Кравчика

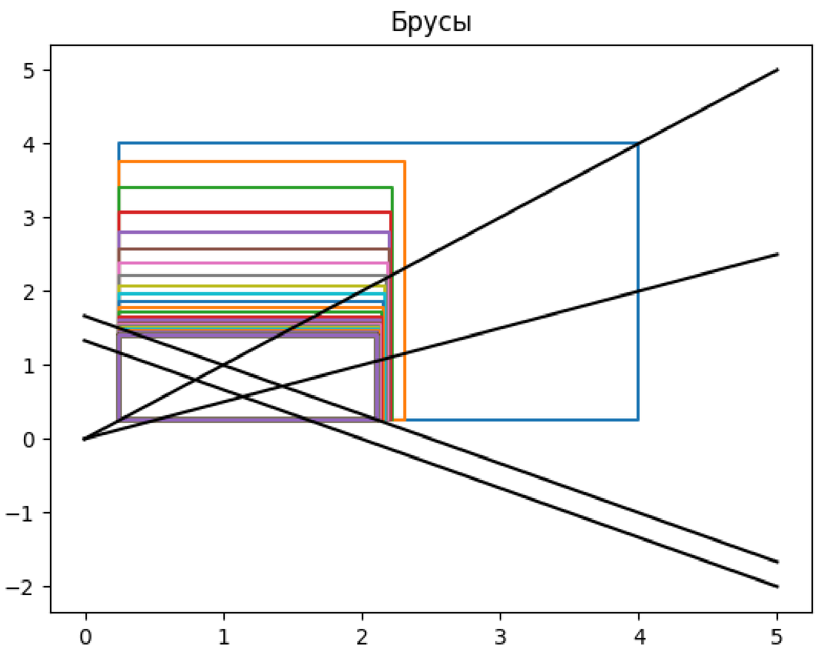

Рис. 4: Брусы при итерации

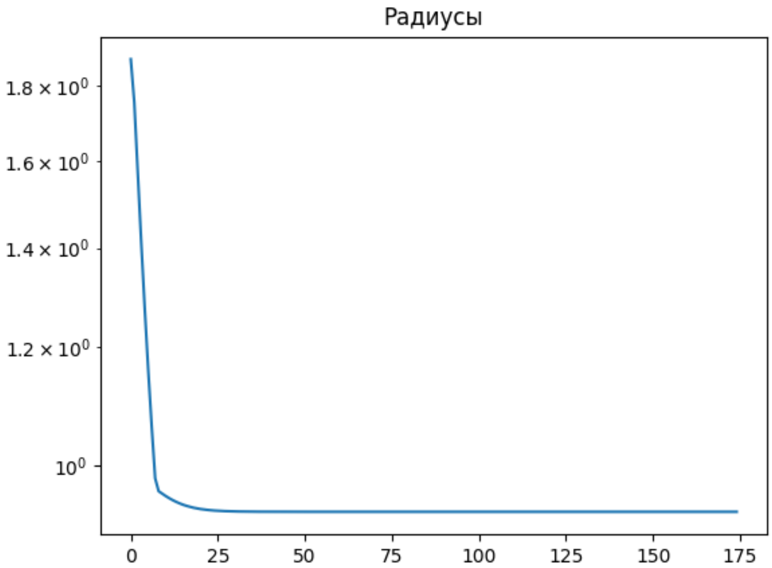

Рис. 5: Радиусы брусов

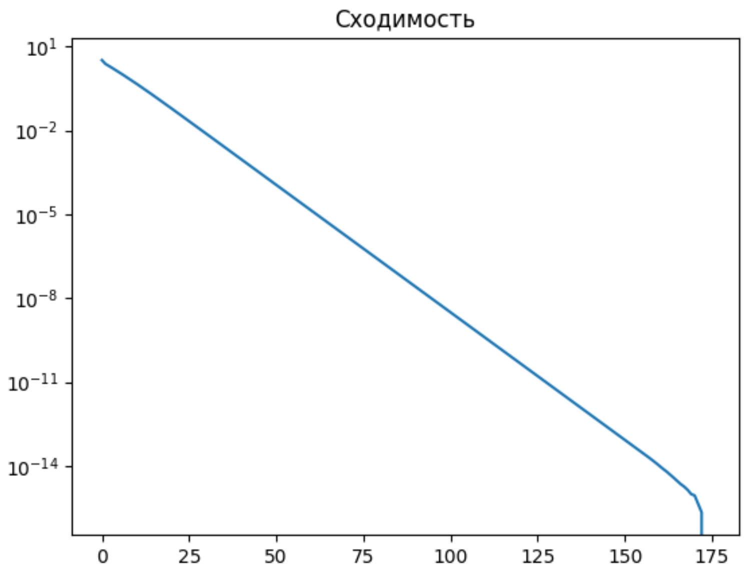

Рис. 6: Сходимость алгоритмов

5 Обсуждение

1. По графикам (1) и (2) видно, что метод Кравчика для линейной задачи показала быструю сходимость. Примерно за 4 итарции показал хороший результат

2. В нелинейной постановке по графикам (4) и (5) видно, что методу нужно намного больше итераций для достижения хорошего результата, чем для линейной задачи

3. На графике (4) видно, как брус приближается только с двух сторон, и никак не улучшает нижнюю оценку по каждой из координат

4. Также на графиках (5) и (6) можно увидеть, что на первых итерациях заметно уменьшается радиус бруса и происходит смещение его центра