

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт  
Кафедра «Прикладная математика»

**Отчёт**  
**по лабораторной работе №2**  
**по дисциплине**  
**«Интервальный анализ»**

Выполнил студент:  
Овечкин Данил  
Александрович  
группа: 5030102/80201

Проверил:  
Баженов Александр  
Николаевич

Санкт-Петербург  
2022 г.

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Внешнее оценивание множества решений в $IR$ . Линейный случай

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $a, b$  - положительные числа,  $c, k$  - положительные интервалы

Оценить внешнее множество решений ИСЛАУ методом Кравчика и:

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решения
- Проиллюстрировать положение брусков при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы рабочих брусков
- Проиллюстрировать расстояние от центров брусков при итерациях до конечной точки алгоритма

## 1.2 Внешнее оценивание множества решений в $IR$ . Нелинейный случай

Дана нелинейная система уравнений

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ \frac{x_1}{x_2} = k \end{cases} \quad (2)$$

где  $a, b$  - положительные числа,  $c, k$  - положительные интервалы

Оценить внешнее множество решений методом Кравчика и:

- Проиллюстрировать положение брусков при итерациях
- Проиллюстрировать радиусы рабочих брусков
- Проиллюстрировать расстояние от центров брусков при итерациях до конечной точки алгоритма

## 2 Теория

### 2.1 Внешнее множество решений

Под внешним множеством решений понимается объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем  $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}} = \{x \in R^n | \exists a \in a, \exists b \in b : F(a, x) = b\} \quad (3)$$

### 2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика - итерационный процесс уточнения двусторонней границы решений системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными

$$F(x) = 0, x \in X \subset IR^n \quad (4)$$

Заданной на брус  $X$

Отображение

$$\mathcal{K}(X, \bar{x}) = \bar{x} - \Lambda \cdot F(\bar{x}) - (I - \Lambda \cdot L) \cdot (x - \bar{x}) \quad (5)$$

называется оператором Кравчика на  $X$ , относительно точки  $\bar{x}$ , где  $\Lambda$  - вещественная  $n \times n$  матрица,  $L$  - интервальная матрица Липшица отображения  $F$  на брус  $X$ . Если  $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$ , то существует единственная неподвижная точка, являющаяся решением рассматриваемой системы уравнений

Метод Кравчика заключается в построении последовательности  $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$  по формуле:

$$X^{k+1} = X^k \cap \mathcal{K}(X^k, \bar{x}^k) \quad (6)$$

### 2.3 Выбор начального приближения

Для каждой системы уравнений эмпирически выбирают свой начальный брус, предобуславливатель  $\Lambda$  и матрицу  $L$

В случае ИСЛАУ итерационный процесс выглядит следующим образом

$$x^{k+1} \leftarrow (\Lambda \cdot b + (I - \Lambda \cdot A) \cdot x^k) \cap x^k, k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

где  $A$  - матрица,  $b$  - вектор правой части

Обычно берут

$$\Lambda = (mid A)^{-1} \quad (8)$$

а начальную внешнюю оценку множества решений находят каким-либо из способов оценки

Например, если

$$\eta = \|I - \Lambda \cdot A\|_{\infty} < 1 \quad (9)$$

Можно взять начальным приближением брус

$$x^0 = \begin{pmatrix} [-\theta, \theta] \\ \dots \\ [-\theta, \theta] \end{pmatrix} \quad (10)$$

где

$$\theta = \frac{\|\Lambda \cdot b\|_{\infty}}{1 - \eta} \quad (11)$$

### 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

## 4 Результаты

### 4.1 Линейный случай

Рассмотрим ИСЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 = [2; 4] \\ 1 \cdot x_1 - [1; 2] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

#### 4.1.1 Начальное приближение

Проверим, что  $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$

$$|I - \Lambda A| \approx \begin{pmatrix} 0 & 0.2857 \\ 0 & 0.1429 \end{pmatrix}$$

$$\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.1429 < 1$$

Итерационный процесс сходящийся

Проверим выполнение неравенства (9)

$$\eta = \|I - \Lambda \cdot A\|_{\infty} = 0.2857 < 1$$

Неравенство выполняется, можем воспользоваться приближением (10)

$$\theta = \frac{\|\Lambda \cdot b\|_{\infty}}{1 - \eta} = 2.4 \Rightarrow X^0 = \begin{pmatrix} [-2.4, 2.4] \\ [-2.4, 2.4] \end{pmatrix}$$

#### 4.1.2 Результаты метода Кравчика

В результате алгоритма Кравчика получим следующие брусы

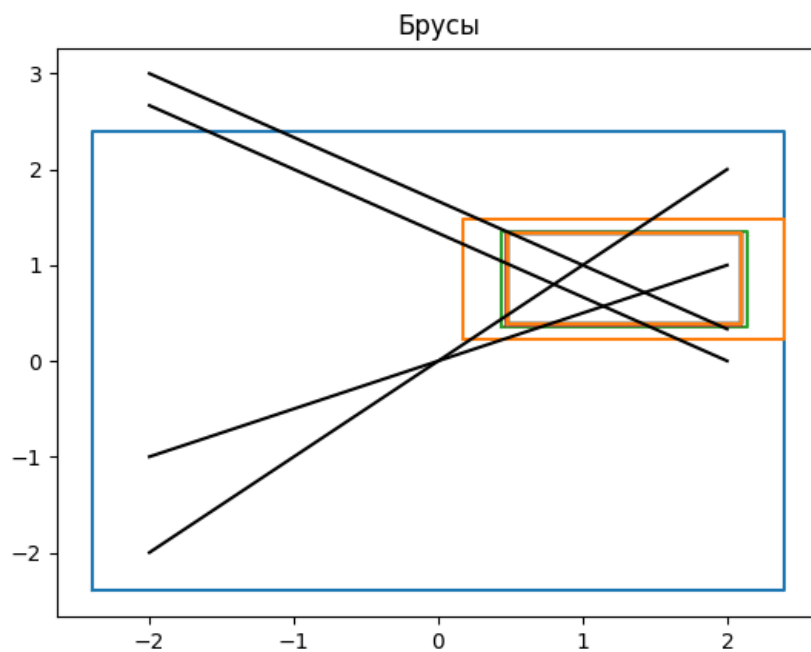


Рис. 1: Брусы при итерации

Построим графики радиусов брусов и сходимости алгоритма

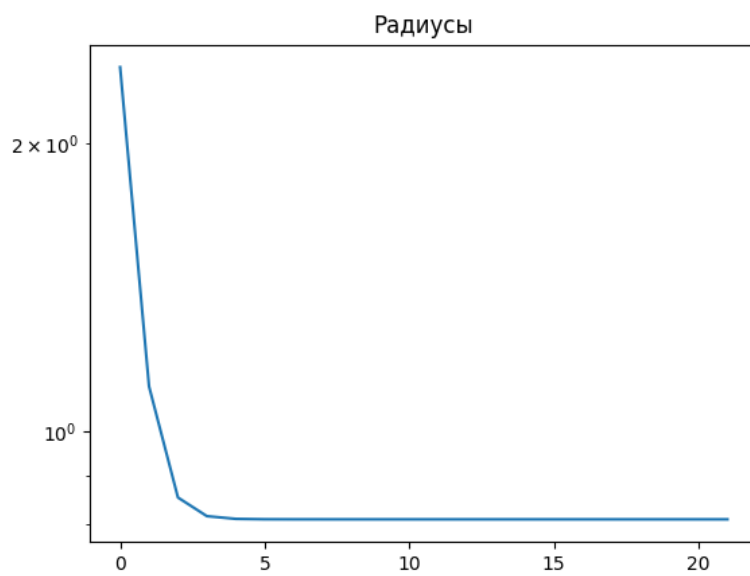


Рис. 2: Радиусы брусов

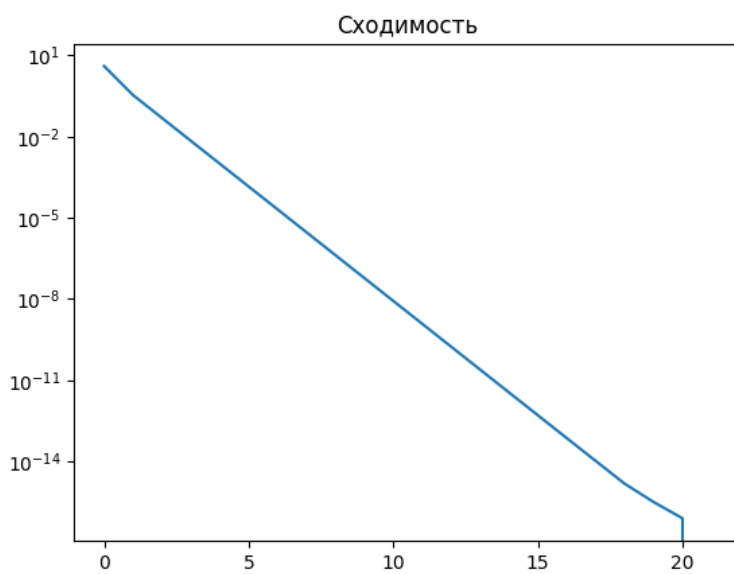


Рис. 3: Сходимость алгоритмов

## 4.2 Нелинейный случай

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4; 5] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1; 2] \end{cases} \quad (13)$$

### 4.2.1 Начальное приближение

В качестве начального приближения будем использовать брус

$$x^0 = \begin{pmatrix} [0.25, 4] \\ [0.25, 4] \end{pmatrix}$$

и

$$\Lambda = (midJ)^{-1}, \quad L = J, \quad \text{где } J - \text{якобиан}$$

### 4.2.2 Результаты метода Кравчика

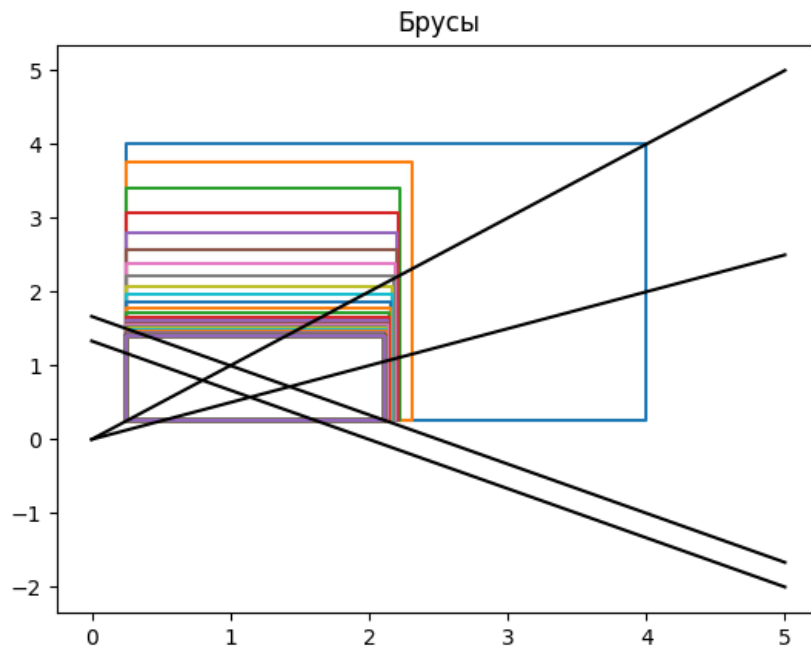


Рис. 4: Брусы при итерации



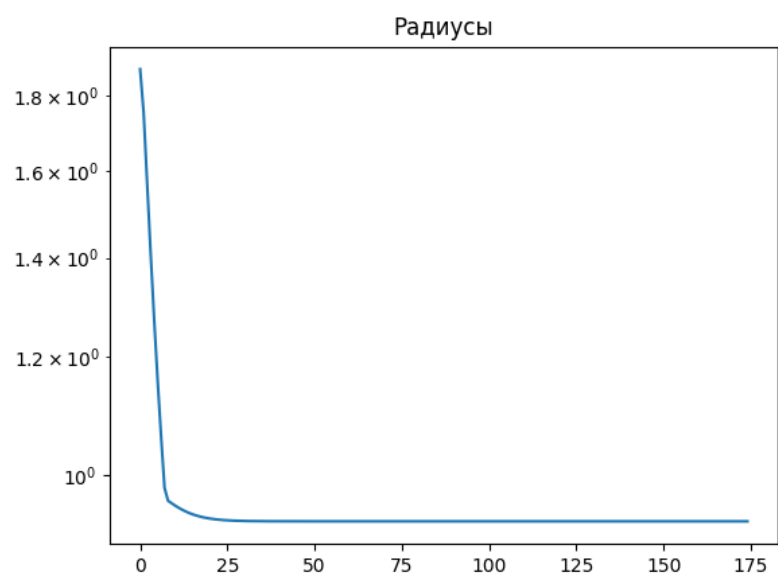


Рис. 5: Радиусы брусков

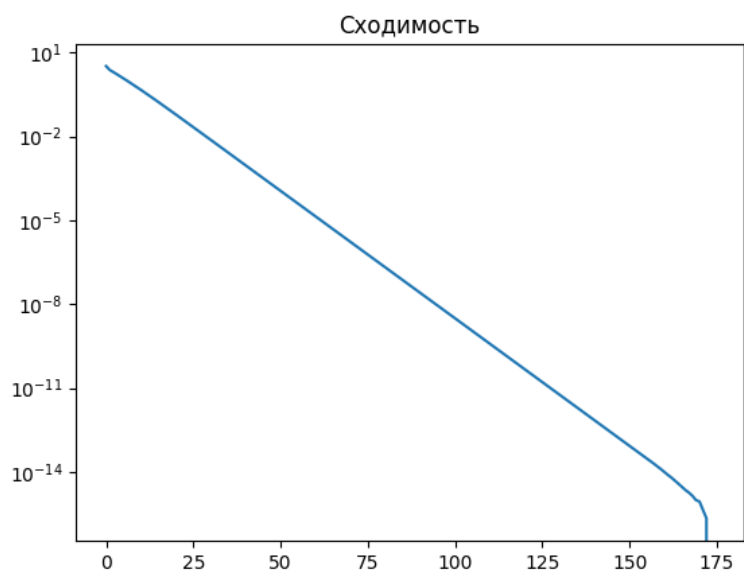


Рис. 6: Сходимость алгоритмов

## 5 Обсуждение

1. По графикам (1) и (2) видно, что метод Кравчика для линейной задачи показала быструю сходимость. Примерно за 4 итерации показал хороший результат
2. В нелинейной постановке по графикам (4) и (5) видно, что методу нужно намного больше итераций для достижения хорошего результата, чем для линейной задачи
3. На графике (4) видно, как брус приближается только с двух сторон, и никак не улучшает нижнюю оценку по каждой из координат
4. Также на графиках (5) и (6) можно увидеть, что на каждой итерации заметно уменьшается радиус бруса и происходит смещение его центра