Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №4
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Овечкин Данил
Александрович
группа: 5030102/80201

Проверил:
Баженов Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

1.1 Получение решения по теореме Зюзина

Выбрать ИСЛАУ 2x2. Построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части. Провести вычисления и привести иллюстрации:

- брусов итерационного процесса
- радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Для ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3,4] & [5,6] \\ [-1,1] & [-3,1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ [-1,2] \end{pmatrix} \tag{1}$$

построить итерационную схему субдифферернциального метода Ньютона. Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Сравнить результаты с решением ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3,4] & [5,6] \\ [-1,1] & [-3,1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3,4] \\ [-1,2] \end{pmatrix} \tag{2}$$

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$Cx = d, \quad C \in KR^{n\times n},\ d \in KR^n$$

правильная проекция матрицы C имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Итерационный процесс строится следующим образом

$$D = \mathrm{diag}\{c_{ii}\}_{i=1}^n \quad E = C \ominus D$$

$$Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$$

$$x^{k+1} = \mathrm{inv}\, D \cdot (d \ominus Ex^k),\ k = 0, 1, \ldots$$

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathcal{F}(x) = \mathrm{sti}(C \cdot \mathrm{sti}^{-1}(x)) - x + \mathrm{sti}(d)$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из KR^n в R^{2n}), D^{k-1} - какой-нибудь субградиент отображения $\mathcal{F}$ в точке x^{k-1}, τ - константа, в данной работе выбрана единицей.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

4 Результаты

4.1 Получение решения по теореме Зюзина

Возмём матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [4,5] & [2,3] \\ [-1,1] & [1,2] \end{pmatrix} \tag{3}$$

и вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [1,2] \\ [3,4] \end{pmatrix} \tag{4}$$

Тогда вектор правых частей будет:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [11,22] \\ [1,10] \end{pmatrix} \tag{5}$$

Тогда будем рассматривать ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [4,5] & [2,3] \\ [-1,1] & [1,2] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [10,22] \\ [1,10] \end{pmatrix} \tag{6}$$

В качестве начального приближения возьмём вектор

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} [-10,10] \\ [-10,10] \end{pmatrix} \tag{7}$$

Матрица **C** имеет диагональное преобладание, следовательно для ИСЛАУ 6 выполнена теорема Зюзина. После 68 итераций процесс остановится и выдаст результат:

$$x = \begin{pmatrix} [1.0, 2.0] \\ [3.0, 4.0] \end{pmatrix} \tag{8}$$

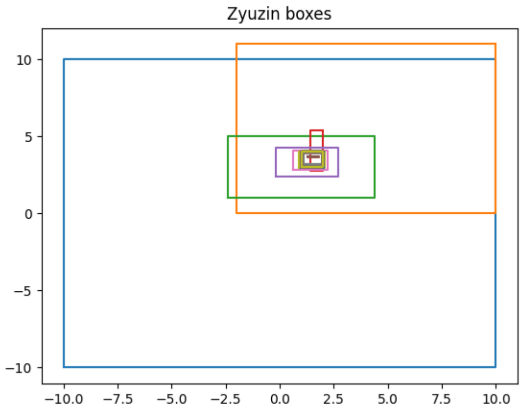

Рис. 1: Брусы при итерациях

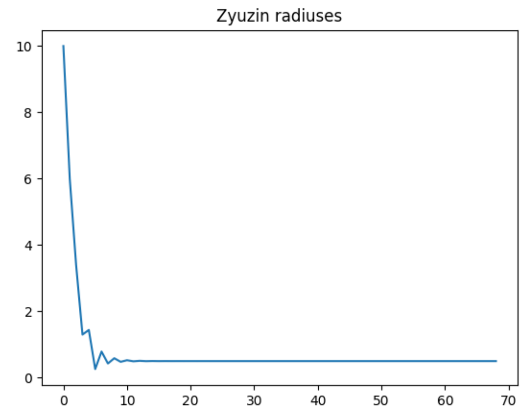

Рис. 2: Зависимость радиусов брусов от номера итерации

4.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Решим ИСЛАУ 1.
При $\tau = 1$ после 4 итераций процесс остановится и выдаст результат:

$$x = \begin{pmatrix} [0.0, 0.5] \\ [-0.5, 0.167] \end{pmatrix} \tag{9}$$

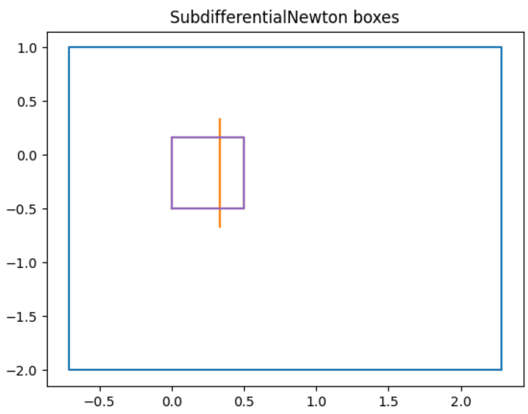

Рис. 3: Брусы при итерациях

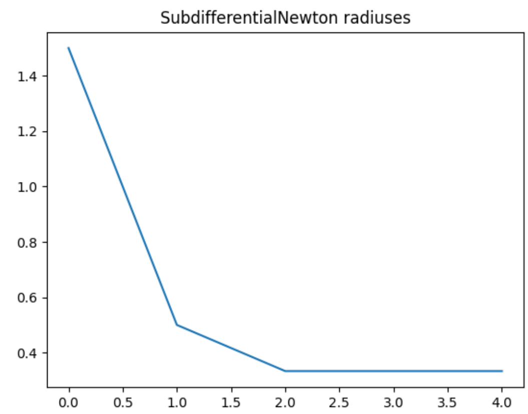

Рис. 4: Зависимость радиусов брусов от номера итерации

Решим ИСЛАУ 2.
Рассмотрим работу метода также, как и в предыдущем случае, при $\tau = 1$.

Примерно после 8 итерации процесс зациклится. Это можно увидеть на следующих графиках:

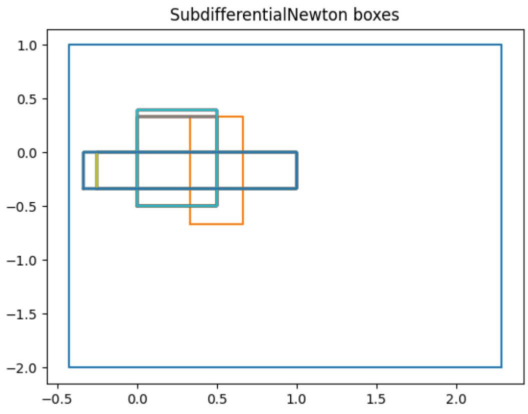

Рис. 5: Брусы при итерациях

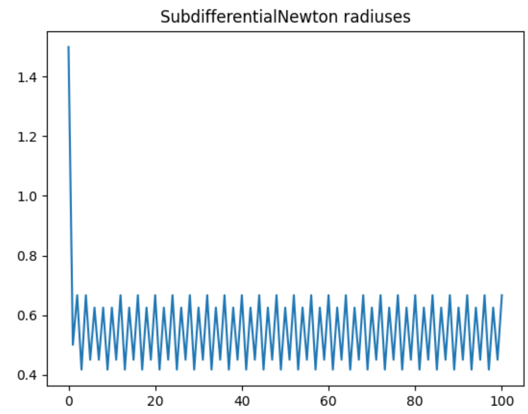

Рис. 6: Зависимость радиусов брусов от номера итерации

При $\tau = 0.1$ процесс тоже зацикливается.

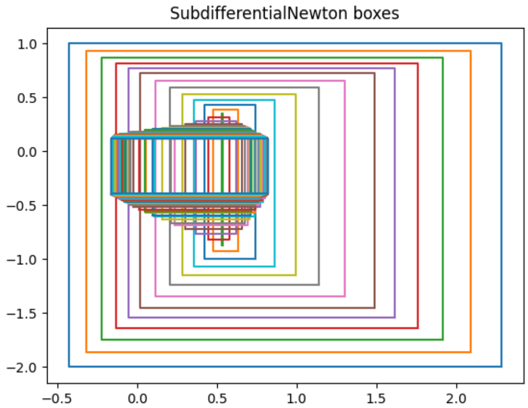

Рис. 7: Брусы при итерациях

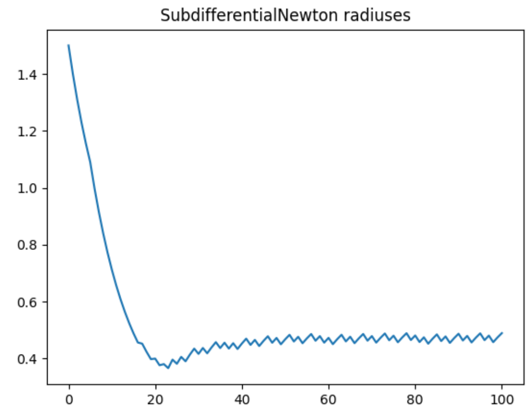

Рис. 8: Зависимость радиусов брусов от номера итерации

На графике 8 видно, что примерно с 24 итерации(где

$$x = \begin{pmatrix} [-0.0227, 0.7703] \\ [-0.5171, 0.163] \end{pmatrix} \tag{10}$$

радиус бруса с итерациями начинает расти. Такие брусы с каждой итерацией начинают покрывать большую площадь Ξ_{tol}, но ещё не является строгой внутренней оценкой допускового множества. Также изменения брусьев на каждой итерации происходят плавнее, чем при $\tau = 1$. Возможно при большем количестве итераций брусья будут покрывать максимально возможную часть Ξ_{tol}.

5 Обсуждение

1. Для выбранной матрицы и правой части процесс сошёлся и решение по теореме Зюзина было получено за 68 итераций

2. Хоть и субдифференциальных метод Ньютона сходится при меньшем числа итераций, но у него есть проблемы со сходимостью, что можно было заметит при решении ИСЛАУ 2.