Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №3
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Овечкин Данил
Александрович
группа: 5030102/80201

Проверил:
Баженов Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ 3x2

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ x_1 - k \cdot x_2 = 0 \\ d \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = e \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d, e - положительные интервалы, k - положительное число такие, что система 1 несовместна. Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимума распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы
- Оценок вариабельности решения
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ в целом
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ построчно

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\} \tag{2}$$

$$x \in \Xi_{\mathrm{tol}} \Leftrightarrow \mathrm{Tol}(x) \ge 0$$

$\mathrm{Tol}(x)$ - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на R^n. Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допускового множества решений ИСЛАУ. Если $\max\limits_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x) \ge 0$, то допусковое множество не пусто. В противном случае $\Xi_{\mathrm{tol}} =$. Обратные утверждения также верны.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i-й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b. В данной работе используются значение $\nu_i = 1 \; \forall i = \overline{1, 3}$. Подобрав K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max\limits_{x \in R^n} \operatorname{Tol}(x) \geq 0$, получим разрешимую систему с непустым допусковым множеством.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$ где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, K - общий коэффициент сужения A, E состоит из $[-e_{ij}, e_{ij}]$. При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках IR.

При выполнении задания достижения разрешимости рекомендуется выполнять корректировку пропорционально координатам точки, в которой достигается максимум распознающего функционала.

При выполнении задания управления положением максимума распознающего функционала в случае коррекции матрицы в целом N - единичная матрица, в случае построчной - $N = \operatorname{diag}\{\nu_i\}$.

2.4 Оценки вариабельности решения

Для оценки вариабельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\operatorname{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \operatorname{cond} A \cdot ||\operatorname{argmax} \operatorname{Tol}(x)|| \frac{\max\limits_{x \in R^n} \operatorname{Tol}(x)}{||b||}$$

$$\operatorname{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \operatorname{cond} A \cdot \max_{x \in R^n} \operatorname{Tol}(x)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

4 Результаты

Рассмотрим ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [0.5, 1.5] \cdot x_1 + [1.5, 3.5] \cdot x_2 = [3, 7] \\ x_1 - 3 \cdot x_2 = 0 \\ [-0.5, 0.5] \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = [-1, 1] \end{cases} \tag{3}$$

Проверим несовместность системы 3:
$armgax = [2.5714, 0.9523], maxtol = -0.2857 < 0$. Следовательно система не совместна.

4.1 Коррекция правой части

Так как в правой части ИСЛАУ 3 имеется нуль, то нужено использовать распонающий функционал 2.1. При коррекции правой части получается следующий вектор:

$$b' = ([2.7143, 7.2857], [-0.2857, 0.2857], [-1.2857, 1.2857])\hat{}T$$

Система $\mathbf{A}x = \mathbf{b'}$ совместна, так как $argmax = (2.5714, 0.9524)$ и $maxtol = 1.7 \cdot 10^{-8}$. При этом оценки вариабельности имеют вид:
$ive = 1.74 \cdot 10^{-8}$ и $rve = 4.72 \cdot 10^{-8}$

4.2 Коррекция матрицы

На каждой итерации будем уменьшать радиусы интервалов матрицы в 2 раза до тех пор, пока максимальное значение распознающего функционала не станет положительным или близким к нулю. Матрица после сужения элементов имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} [0.991.00] & [2.498, 2.5] \\ 1 & -3 \\ [-0.001, 0.001] & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Система $A' \cdot x = b$ совместна, так как $argmax = (1.6378, 0.5459)$ и $maxtol = -4.056 \cdot 10^{-12}$. При этом оценки вариабельности имееют вид:
$ive = -2.75 \cdot 10^{-12}$ и $rve = -1.13 \cdot 10^{-11}$

4.3 Управление аргументом решения ИСЛАУ

4.3.1 Управление положением решения за счёт радиусов элементов матрицы в целом

На каждой итерации для каждой строки уменьшаем интервал в 2 раза

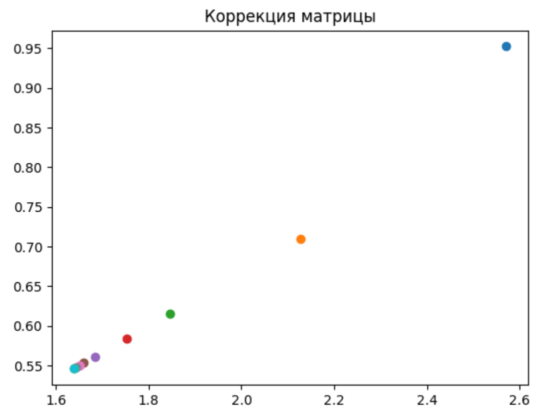

Рис. 1: Положение решения за счёт радиусов элементов матрицы в целом

4.3.2 Управление положением решения за счёт радиусов элементов матрицы построчно

На каждой итерации для каждой строки уменьшаем интервал в 2 раза

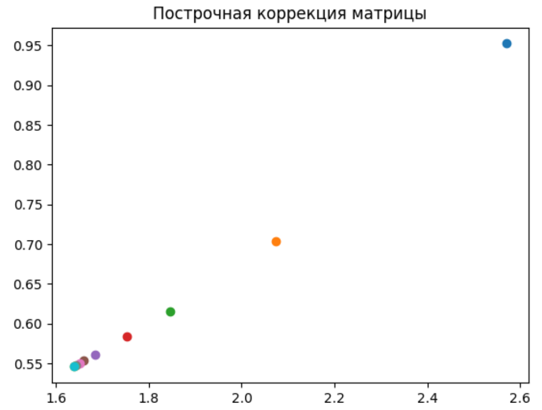

Рис. 2: Положение решения за счёт радиусов элементов матрицы для первой строки

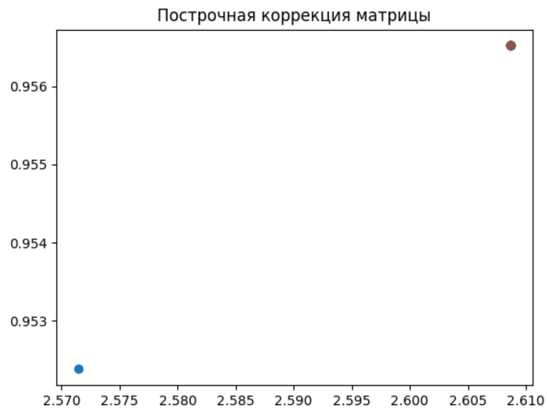

Рис. 3: Положение решения за счёт радиусов элементов матрицы для третьей строки

5 Обсуждение

1. Оценки вариабельности ive и rve меньше при коррекции матрицы
2. При изменении правой части точка максимума распознающего функционала не меняется, а при изменении матрицы значение максимума изменяется
3. Все значения максимумов лежат на одной прямой, которая соответсвует второму уравнению системы 3

4. По графикам (2) и (3) можно сделать вывод, что для системы 3 наибольший вклад в изменение точки максимума распознающего функционала вносит первое уравнение