Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №5
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Овечкин Данил
Александрович
группа: 5030102/80201

Проверил:
Баженов Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

Для линейной задачи построения регрессии $\mathbf{y} = X\beta$ необходимо задать набор значений x и y с некоторыми ошибками измерений по отклику. Необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- построить интервальное множество решений β, сделать точечные оценки параметров.
- построить коридор совместных зависимостей.
- задать набор предсказания внутри и вне x, построить набор значений выходной переменной y.

2 Теория

2.1 Решение задачи регрессии с интервальным откликом

Решением задачи восстановления зависимости можно считать любое (в данном случае линейное) решение, проходящее через все исходные брусы.

2.2 Информационное множество

Интервальное множество решений β, которое необходимо построить и оценить в задании 1, называется информационным множеством.

2.3 Коридор совместных зависимостей

Коридором совместных зависимостей называется множество, образованное всеми решениями с параметрами из информационного множества.

2.4 Предсказание значений

Предсказание осуществляется посредством построения сечения коридора совместных зависимостей в указанных точках. Соотношение прогнозных и исходных интервалов в исходных точках измерений является одним из показателей качества построенной модели.

2.5 Точечная оценка параметров регрессии

Пусть модель задаётся в классе линейных функций $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x$. Чтобый найти точечные оценки параметров регрессии, нужно поставить задачу линейно оптимизации и решить её:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \to min \quad (1)$$

$$mid\, y_i - w_i \cdot rad\, y_i \le X\beta \le mid\, y_i + w_i \cdot rad\, y_i \quad (2)$$

$$w_i \ge 0, i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$w, \beta - ? \quad (4)$$

где m - числа входных значений, X - матрица линейной регресиии, w - вектор весов

Также существуют и другие варианты оценки параметров регресии:

- Середина наибольшей диагонали информационного множества:

$$\beta = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad (5)$$

где b_1 и b_2 - вершины информационного множества, находящиеся на максимальном расстоянии друго от друга.

- Центр тяжести информационного множества:

$$\beta = mean\, V \quad (6)$$

где V - множество вершин информационного множества

3 Р. Неализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

4 Результаты

Рассмотрим модель $y = k \cdot x + b$, для которой:

$$k = 2 \quad (7)$$

$$b = 3 \quad (8)$$

$$x = (0.0, 2.0, \dots, 19.0) \quad (9)$$

График такой модели выглядит следующим образом:

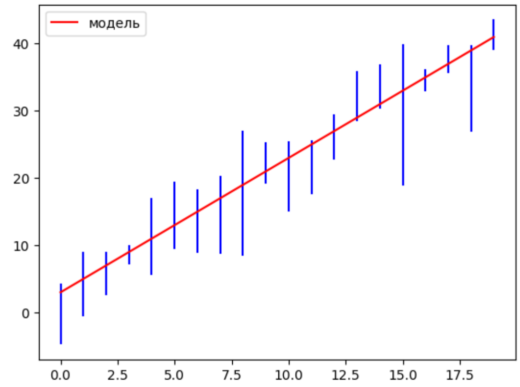

Рис. 1: Построенная модель

Информационное множество и точечные оценки будут выглядеть следующим образом:

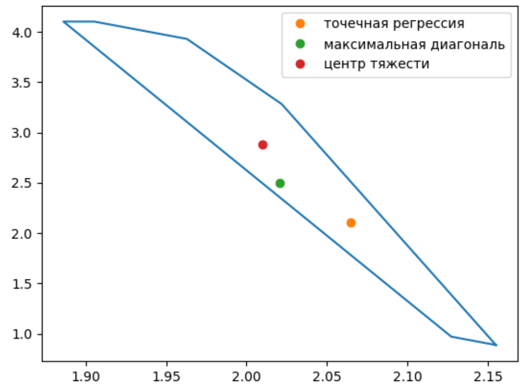

Рис. 2: Информационное множество и оценки параметров

Построенное информационное множество содержить исходные значения параметров $\beta_0 = 3$ и $\beta_1 = 2$. Лучшая точечная оценка параметров зависимости дал центр тяжести.

Теперь с помощью полученных параметров β_0 и β_1 для всех оценок построим графики функций и убедимся в том, что они приближены к исходной модели:

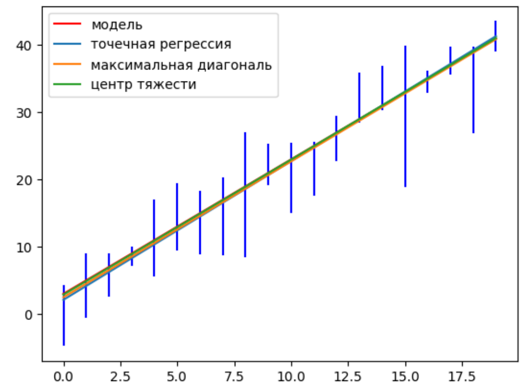

Рис. 3: Графики функций модели и с оцененными параметрами

С помощью этого графика мы убедились, что оценки близки к исходной модели.

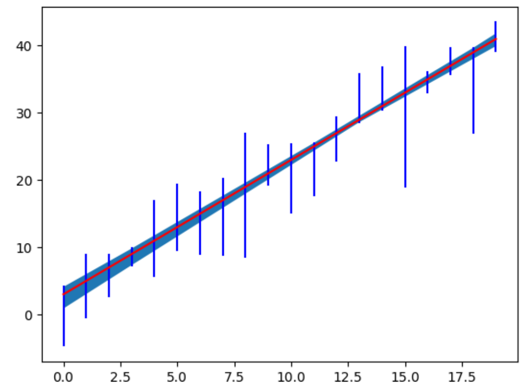

Рис. 4: Коридор совместных зависимостей

Множество граничных измерений выборки

$$X_{boundary} = \{0, 3, 11, 13, 14, 18\}$$

так как ни одна из границ остальных интервалов не касается коридора совместных зависимостей.

Построенный коридор содержит исходную модель. В начале выборки он шире всего, ближе к середине он сужается, а дальше опять расширяется, давая большую неопределённость.

Теперь зададим набор предсказаний внутри и вне x и построим набор значений выходной переменной y.
Возьмем набор внутри x: $x_1 = (2.0, 3.0, \dots, 11)$
А снаружи x: $x_2 = (30.0, 31.0, \dots, 39.0)$

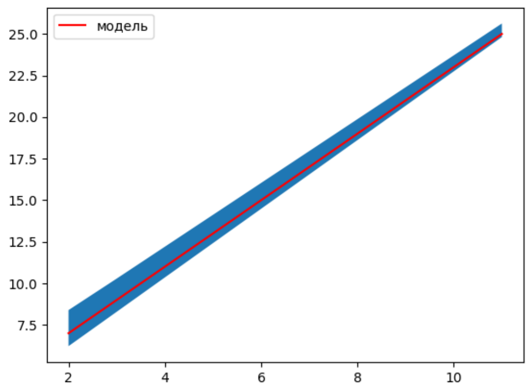

Рис. 5: Значения выходной переменной y для набора x_1

Видно, что для набора внутри x коридор сначается расширяется, а ближе к концу выборки уже сужается, но модель в таком предсказании всё же содержится. Аналогичное можно наблюдать и для выборки x_2 снаружи x, но для неё коридор шире, а значи и большая неопределённость выходных значений y.

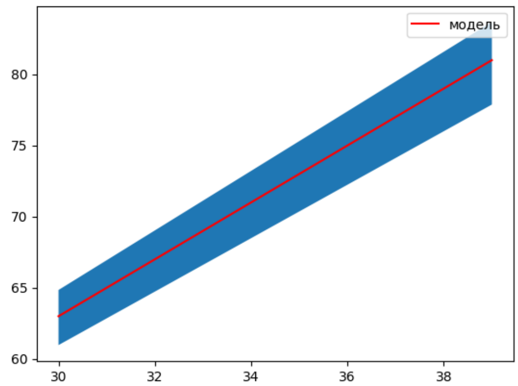

Рис. 6: Значения выходной переменнйо y для набора x_2