

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №4
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Овечкин Данил
Александрович
группа: 5030102/80201

Проверил:
Баженов Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

1.1 Получение решения по теореме Зюзина

Выбрать ИСЛАУ 2х2. Построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части. Провести вычисления и привести иллюстрации:

- брусков итерационного процесса
- радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Для ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (1)$$

построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона. Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусков итерационного процесса
- Сравнить результаты с решением ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (2)$$

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$Cx = d, \quad C \in KR^{n \times n}, \quad d \in KR^n$$

правильная проекция матрицы C имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Итерационный процесс строится следующим образом

$$D = \text{diag}\{c_{ii}\}_{i=1}^n \quad E = C \ominus D$$

$$Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$$

$$x^{k+1} = \text{inv } D \cdot (d \ominus Ex^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathcal{F}(x) = \text{sti}(C \cdot \text{sti}^{-1}(x)) - x + \text{sti}(d)$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из KR^n в R^{2n}), D^{k-1} - какой-нибудь субградиент отображения \mathcal{F} в точке x^{k-1} , τ - константа, в данной работе выбрана единицей.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

4 Результаты

4.1 Получение решения по теореме Зюзина

Возьмём матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [4, 5] & [2, 3] \\ [-1, 1] & [1, 2] \end{pmatrix} \quad (3)$$

и вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [1, 2] \\ [3, 4] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Тогда вектор правых частей будет:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [11, 22] \\ [1, 10] \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тогда будем рассматривать ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [4, 5] & [2, 3] \\ [-1, 1] & [1, 2] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [10, 22] \\ [1, 10] \end{pmatrix} \quad (6)$$

В качестве начального приближения возьмём вектор

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} [-10, 10] \\ [-10, 10] \end{pmatrix} \quad (7)$$

Матрица \mathbf{C} имеет диагональное преобладание, следовательно для ИСЛАУ 6 выполнена теорема Зюзина. После 68 итераций процесс остановится и выдаст результат:

$$x = \begin{pmatrix} [1.0, 2.0] \\ [3.0, 4.0] \end{pmatrix} \quad (8)$$

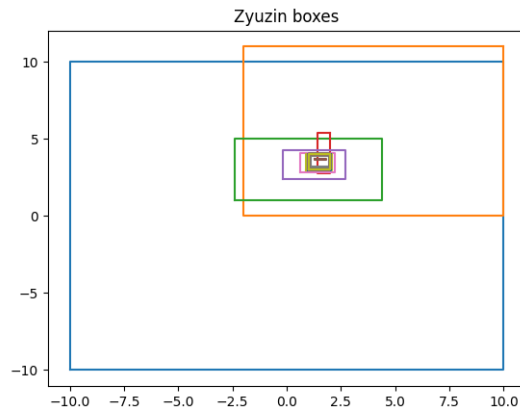


Рис. 1: Брусы при итерациях

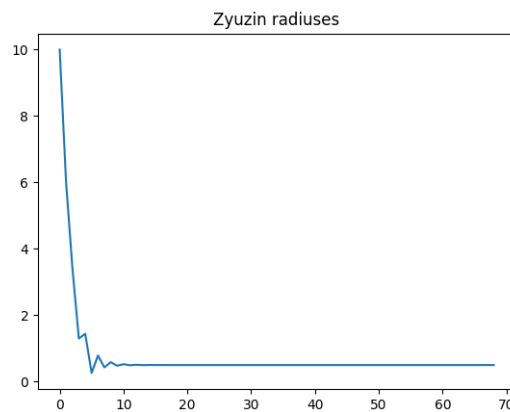


Рис. 2: Зависимость радиусов брусков от номера итерации

4.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Решим ИСЛАУ 1.

При $\tau = 1$ после 4 итераций процесс остановится и выдаст результат:

$$x = \begin{pmatrix} [0.0, 0.5] \\ [-0.5, 0.167] \end{pmatrix} \quad (9)$$

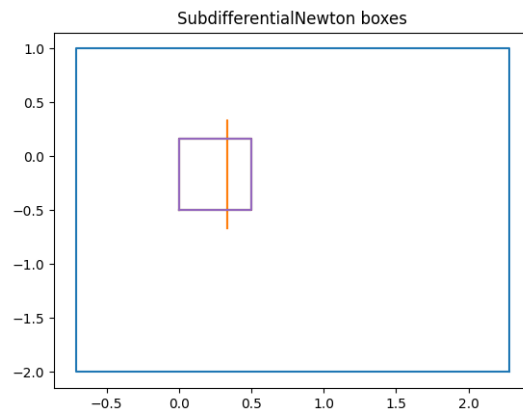


Рис. 3: Брусы при итерациях

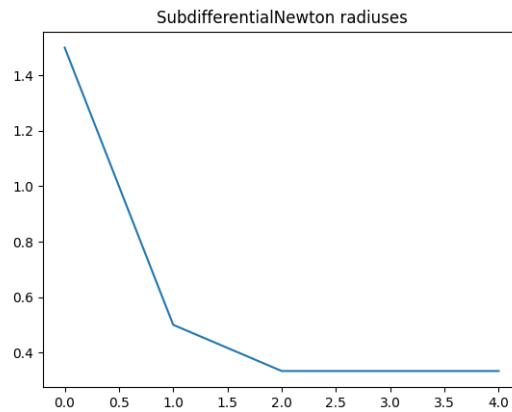


Рис. 4: Зависимость радиусов брусков от номера итерации

Решим ИСЛАУ 2.

При $\tau = 0.1$ процесс заиклиивается.

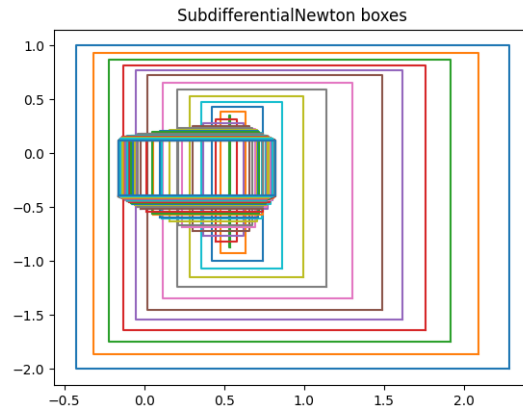


Рис. 5: Брусы при итерациях

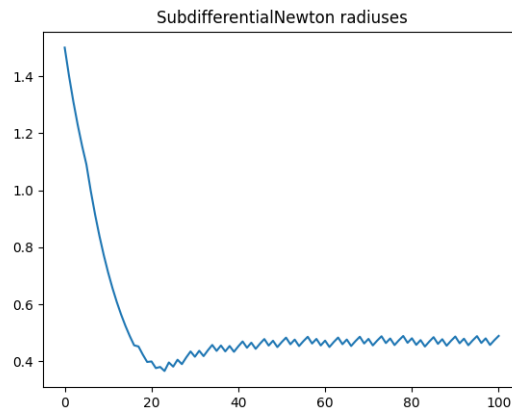


Рис. 6: Зависимость радиусов брусков от номера итерации

Были проведены исследования для разных τ , но процесс всегда заикливался.

5 Обсуждение

1. Для выбранной матрицы и правой части процесс сошёлся и решение по теореме Зюзина было получено за 68 итераций
2. Хотя и субдифференциальный метод Ньютона сходится при меньшем числе итераций, но у него есть проблемы со сходимостью, что можно было заметить при решении ИСЛАУ 2.