Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по лабораторной работе №1
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Овечкин Данил
Александрович
группа: 5030102/80201

Проверил:
Баженов Александр
Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

1 Постановка задачи

1.1 Постановка задачи для матрицы линейной регрессии

Во многих задачах возникает ситуация, в которой нужно выяснить неособенность матрицы. Одной из таких задач является задача в общей регрессионной постановке

$$y = X\beta \tag{1}$$

Пусть число уравнений $m = 2$ и погрешность входных данных неизвестна. Пусть матрица средних значений иммеет вид

$$midX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Рассмотреть интервальную матрицу

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

И определить при каком ε она содержит особенные точечные матрицы

1.2 Постановка задачи для матриц задач томографии

Рассмотреть интервальную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{4}$$

И определить, при каком радиусе она содержит особенную матрицу

1.3 Глобальная оптимизация

Для функции Beale

$$f(x, y) = (1.5 - x + xy)^2 + (2.25 - x + xy^2)^2 + (2.625 - x + xy^3)^2 \tag{5}$$

имеющей один глобальный экстремум
и функции Holder table

$$f(x, y) = -|\sin x \cos y \exp(|1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\pi})| \tag{6}$$

имеющей четыре глобальных
провести поиск глобальных экстремумов, с помощью интервального алгоритма и визуализировать его работу

2 Теория

2.1 Основная теорема интервальной арифметики

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - рациональная функция вещественных аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$ и для нее определен результат $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ подстановки вместо аргументов интервалов их изменения $X_1, X_2, ..., X_n \in IR$ и выполнения над ними действий по правилам интервальной арифметики

Тогда $\{f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\} \subseteq F(X_1, X_2, ..., X_n)$

Интервальная матрица $\mathbf{A}$ - особенная, если $\exists A \in \mathbf{A} : \det(A) = 0$, иначе - неособенная

2.2 Критерий Баумана

Интервальная матрица A неособенна тогда и только тогда, когда определители всех ее крайних матриц имеют одинаковый знак, т.е.

$$(\det A')(\det A'') > 0 \tag{7}$$

для любых $A', A'' \in vertA$

2.3 Признак Румпа

Если для интервальной матрицы $\mathbf{A} \in R^{nxn}$ имеет место

$$\sigma_{max}(rad\mathbf{A}) \leq \sigma_{min}(mid\mathbf{A}) \tag{8}$$

Тогда $\mathbf{A}$ неособенна

2.4 Глобальная оптимизация

В алгоритме глобальной оптимизации имеется рабочий список рассматриваемых брусьев, для каждого из которых вычислено целевое значение функции (в интервальном смысле). На каждой итерации метод выбирает из этого списка брус, на котором нижняя оценка значения функции наименьшая. Этот брус удаляется из списка, после чего туда добавляются два новых, которые получились из исходного путем дробления его самой длинной компоненты пополам (от нижней границы до середины и от середины до верхней границы). На этих брусьях вычисляется интервальная оценка целевой функции, выполняется переход на новую итерацию

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python и Matlab.

4 Результаты

4.1 Задача линейной регрессии

Для того, чтобы точечная матрица была особенной, достаточно линейной зависимости ее строк. Для исходной матрицы (3) это выполнимо при $\varepsilon \geq 0.05$. Пусть $\varepsilon = 0.05$, тогда нам нужно проверить, что при нём найдется особенная точечная матрица:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05] & 1 \\ [1.05, 1.15] & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{X},\ \det(X) = 0$$

4.1.1 Критерий Баумана

Используем критерий Баумана

Посчитаем определители крайних матриц. получим

$$-0.1 \tag{9a}$$
$$2\varepsilon - 0.1 \tag{9b}$$
$$-2\varepsilon - 0.1 \tag{9c}$$
$$-0.1 \tag{9d}$$
$$\tag{9e}$$

Найдем значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, соответственно при всех остальных значениях ε матрица будет особенной.

$\forall \varepsilon$ верно $9a$. Значит остальные определители тоже должны быть меньше 0. Так как $\varepsilon \geq 0$, то $\varepsilon \leq 0.05$. Следовательно, матрица $\mathbf{X}$ особенна $\forall \varepsilon \geq 0.05$

4.1.2 Признак Румпа

Воспользуемся признаком Румпа

$$\operatorname{rad} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\operatorname{mid} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\sigma_{max}(\operatorname{rad} \mathbf{A}) = \varepsilon\sqrt{2} \tag{12}$$

$$\sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\mathbf{X}) = 0.0488 \tag{13}$$

Из этого делаем вывод, что при $\varepsilon\sqrt{2} < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0345$ матрица $\mathbf{X}$ не будет особенной.

4.2 Задача томографии

4.2.1 Критерий Баумана

Используем критерий Баумана

Вычислим ε, при котором матрица будет неособенной. Тогда при остальных ε матрица будет особенной.

Посчитаем определители всех крайних матриц и выпишем только те, которые не повторяются:

$$-0.1(1-\varepsilon) \tag{14a}$$
$$-0.1(1+\varepsilon) \tag{14b}$$
$$4.1\varepsilon - 0.1 \tag{14c}$$
$$-4.1\varepsilon - 0.1 \tag{14d}$$
$$(1-\varepsilon)(2\varepsilon - 0.1) \tag{14e}$$
$$(1-\varepsilon)(-2\varepsilon - 0.1) \tag{14f}$$
$$(1+\varepsilon)(2\varepsilon - 0.1) \tag{14g}$$
$$(1+\varepsilon)(-2\varepsilon - 0.1) \tag{14h}$$
$$2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{14i}$$
$$2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{14j}$$

Так как $\varepsilon \geq 0$, то из (14b) получаем, что определители всех крайних матриц должны быть отрицательными.

Запишем ограничения на ε, полученные из (14)

$$\varepsilon < 1 \tag{15a}$$
$$\varepsilon < \frac{1}{20} \tag{15b}$$
$$\varepsilon < 1.09 \tag{15c}$$
$$\varepsilon < \frac{1}{40} \tag{15d}$$
$$\varepsilon < 0.0456 \tag{15e}$$

Из этих неравенств следует, что матрица $\mathbf{A}$ является неособенной при $\varepsilon \in [0, \frac{1}{41})$, а особенной матрица является при $\varepsilon \geq \frac{1}{41}$

При $\varepsilon = \frac{1}{41}$ получаем следующее:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] & \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] \\ \left[1\frac{31}{410}, 1\frac{51}{410}\right] & \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{42}{41} & \frac{40}{41} \\ 1\frac{31}{410} & \frac{42}{41} \end{pmatrix} \in \mathbf{A}, \quad \det(A) = 0 \tag{17}$$

4.2.2 Признак Румпа

Для признака Румпа найдем $rad\mathbf{A}$ и $mid\mathbf{A}$

$$rad\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$mid\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\sigma_{min}(mid\mathbf{A}) = 0.048744 \tag{20}$$

$$\sigma_{max}(rad\mathbf{A}) = 2\varepsilon \tag{21}$$

Таким образом матрица $\mathbf{A}$ является неособенной при

$$\varepsilon \leq 0.024377 \tag{22}$$

А особенной при

$$\varepsilon \geq 0.024377. \tag{23}$$

Критерий Баумана дал аналогичный результат.

4.3 Глобальная оптимизация

4.3.1 Функция Holder table

Для функции Holder table

$$f(x,y) = -|\sin x \cos y \exp(|1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\pi})| \tag{24}$$

построим ее график и обозначим глобальные минимумы

$$min = \begin{cases} f(8.05502, 9.66459) = -19.2085 \\ f(-8.05502, 9.66459) = -19.2085 \\ f(8.05502, -9.66459) = -19.2085 \\ f(-8.05502, -9.66459) = -19.2085 \end{cases}$$

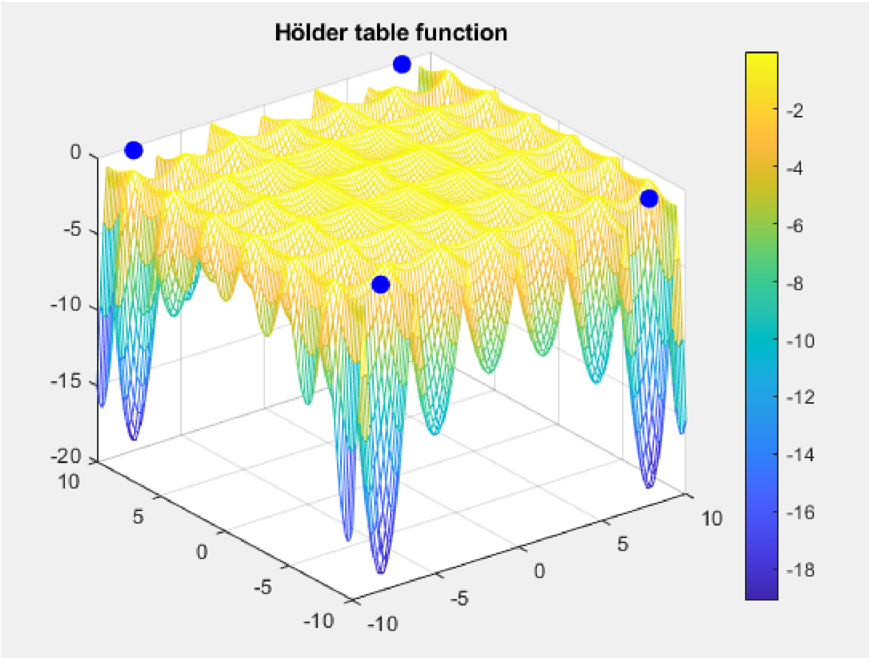

Рис. 1: График функции Holder table (24)

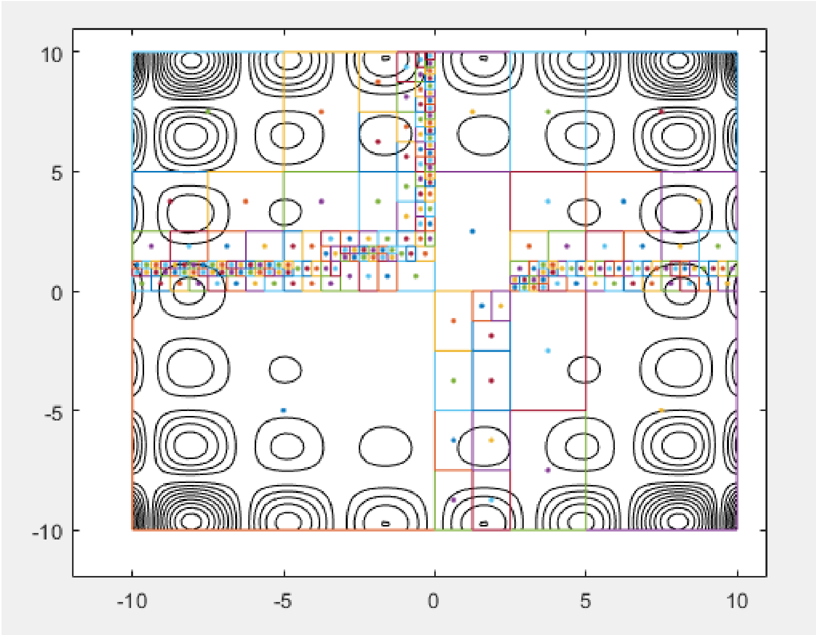

Рис. 2: Визуализация алгорита для функции Holder table (24)

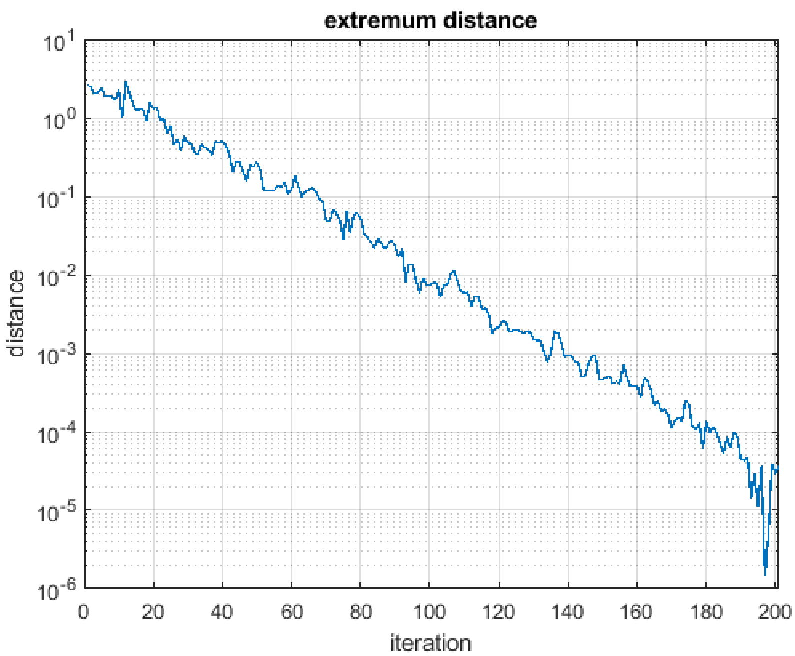

Рис. 3: Расстояние до точки экстремума для функции Holder table (24)

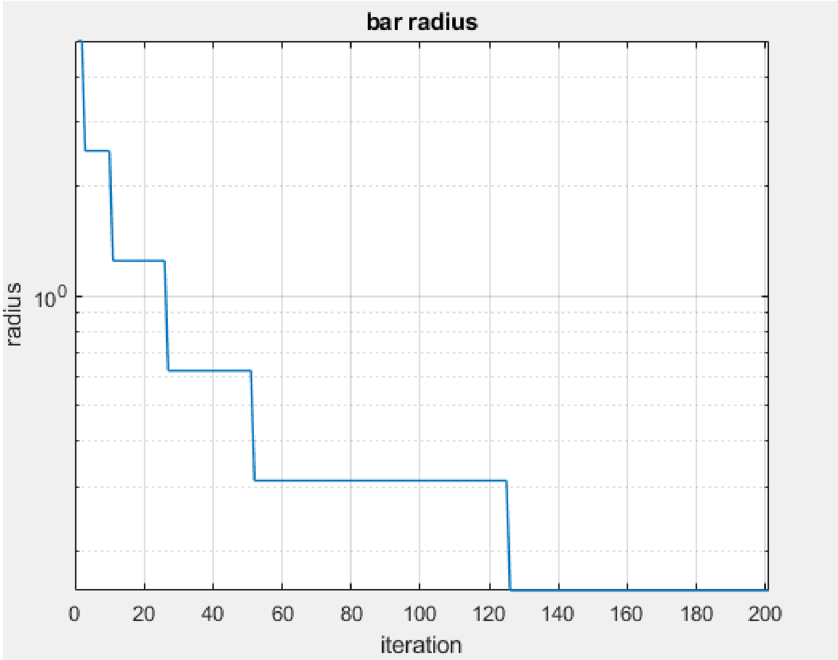

Рис. 4: Радиусы рабочих брусов для функции Holder table (24)

4.3.2 Функция Beale

Для функции Бута

$$f(x, y) = (1.5 - x + xy)^2 + (2.25 - x + xy^2)^2 + (2.625 - x + xy^3)^2 \tag{25}$$

также построим ее график и обозначим глобальный минимум

$$min = f(3, 0.5) = 0 \tag{26}$$

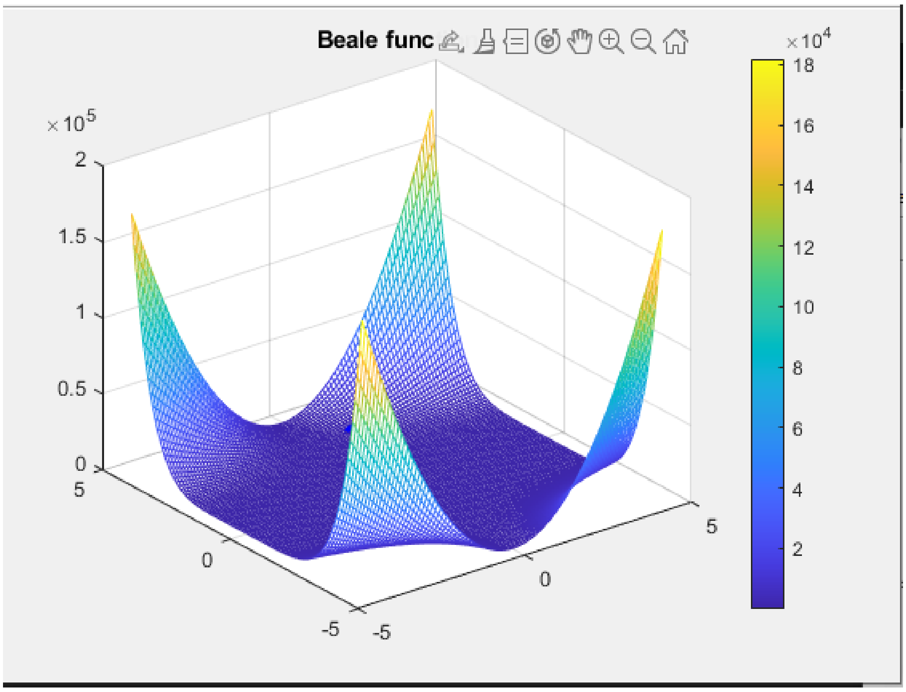

Рис. 5: График функции Beale (25)

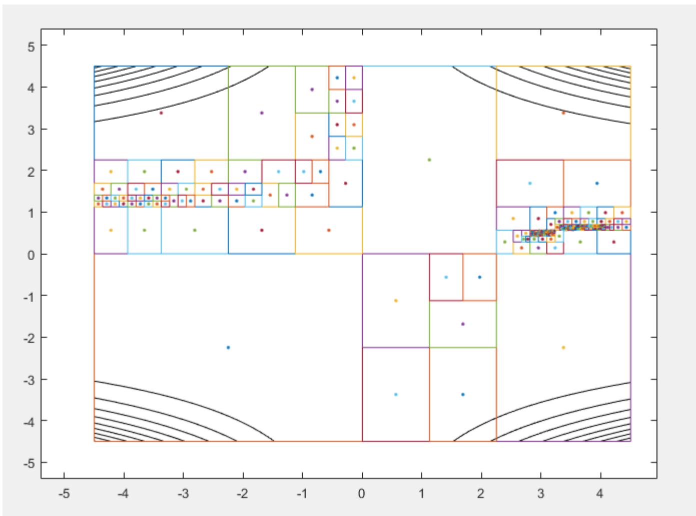

Рис. 6: Визуализация алгорита для функции Beale(25)

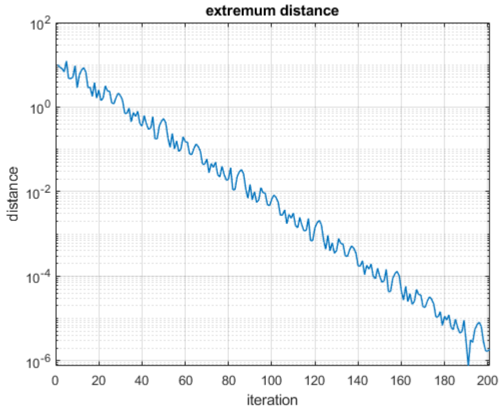

Рис. 7: Расстояние до точки экстремума для функции Beale (25)

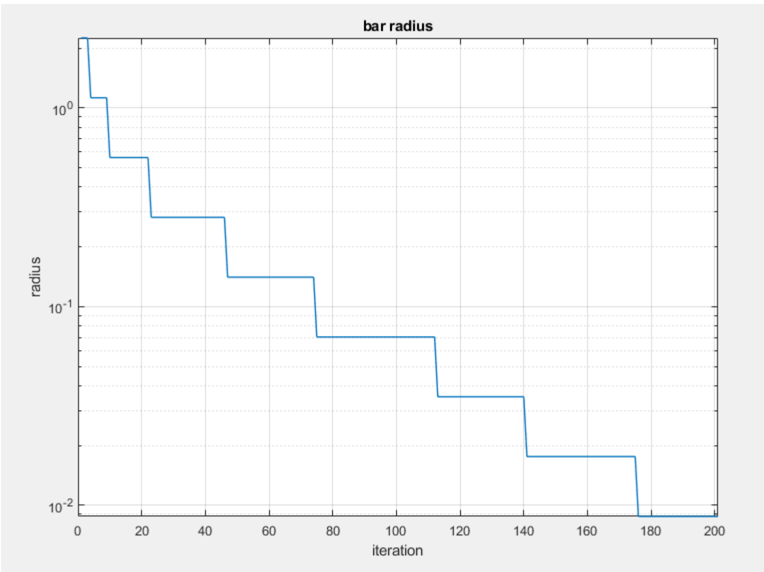

Рис. 8: Радиусы рабочих брусов для функции Beale (25)

5 Обсуждение

1. Что в задачах линейной регресии, что в задачах полиномиальной регрессии мы рассматриваем матрицы $\mathbf{X}_n \in IR^{n \times n}$. При переходе от задач линейной регрессии к задачам полиномиальной, увеличивается параметр n. При этом при достаточной близости $mid\mathbf{X}_n$ друг к другу и высокой неопределенности значений входных паременных матрица может стать неопределенной

2. При переходе от задачи (1.1) к задаче (1.2) были введены дополнительные интервальные величины. Например, было две пары точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Составим регрессионую матрицу X_1 из x_1, x_2 для линейной регрессии. Найдем ε при котором пересечение интервалов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ непустое, то есть найдем общую точку x. Добавим $n-2$ точек пар точек и составим матрицу X_2 из $x_1, ..., x_n$ для многочлена $n-1$ порядка. По основной теореме интервальной арифметики (2.1) - результать операции над точечным представлением интервала принадлежит результату операции над интервальным представлением. x^n будет принадлежать также и $\mathbf{x}_1^n$ и $\mathbf{x}_2^n$. В интервальной матрице будет содержаться точечная особая, по первым двум строкам, и интервальная матрица будет особая. Следовательно, характер оценки ε не будет зависеть от добавляемых пар точек. Оценка ε будет не увеличиваться

   По результатам проделанной работы можно видеть, что матрицу $\mathbf{A}$ (4) проще сделать особенной, нежели $\mathbf{X}$ (3), за счет уменьшения значения ε при котором матрица является неособенной

3. На основе графиков можно сказать, метод нахождения глобального экстремума показал монотонное убывание радиусов брусов и довольно точные положения экстремумов, для обеих функций точность около 10^{-5}

Список литературы

[1] Test functions for optimization, URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization`