概率统计 21-22-3(A)标准答案及评分标准

一、选择题

1)C　2) B　3)D　4) B,　5) B

二、填空题

1)9/16=0.5625;

2)27/64=0.422

3) 14

4)0.0228

5)-1/6

6) -0.4$\sqrt{2}$

7) 0.3

8) 7/8=0.875

9) $F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ 0.3 & -2\le x<-1\\ 0.6 & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

10) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1-y}{2}\right) & 1-\pi<y<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

11) t(1)

12) [149.175, 150.825]

13) $\frac{1}{3}=0.33$

三、

$$(1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1\,;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

$$a\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{-y}}dydx=1\,;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

$$a=\frac{3}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1'$$

$$(2)f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

当 0<|x|<1 时$f_X(x)=\int_{-1}^{-x^2}ady=\frac{3}{4}(1-x^2)\ldots\ldots\ldots 2'$

当| x| ≥ 1 时$f_X(x)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1'$

$$(3)f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{1-x^2} & -1<y<-x^2\\ 0 & 其它\end{cases}\quad(|x|<1)\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

$$f_{Y|X}(y|0.5)=\begin{cases}\frac{4}{3} & -1<y<-0.25\\ 0 & 其它\end{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

$$P(-0.75<Y<-0.15|X=0.5)=\int_{-0.75}^{-0.15}f_{Y|X}(y|0.5)dy=\int_{-0.75}^{-0.25}\frac{4}{3}dy=\frac{2}{3}\ldots\ldots\ldots 1'$$

四、A_i表示事件：加入的两个球中有i 个白球；B 表示事件：抽到白球. 则

$$P(A_i)=\frac{1}{3};i=0,1,2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$$

$$P(B|A_i)=\frac{2+i}{7};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$$

$$(1)P(B)=P(\mathrm{A}_0)P(B|A_0)+P(\mathrm{A}_1)P(B|A_1)+P(\mathrm{A}_2)P(B|A_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2'$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)=\frac{3}{7}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2'$$

(2)

$$P(\mathrm{A}_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2).}{P(B)}\ldots\ldots\ldots.2'$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{4}{9}\approx 0.444\ldots\ldots\ldots\ldots.2'$$

五、 Z的分布函数$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+2y\le z}f(x,y)dxdy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2'$$

当$z<0$ 时，$F_Z(z)=0$； $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$

当$0\le z\le 2$ 时，$F_Z(z)=\iint_{x+2y\le z}f(x,y)dxdy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$

$$=0.5\int_0^{\frac{z}{2}}\int_0^{z-2y}dxdy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$$

$$=\frac{z^2}{8}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$$

当$2<z\le 4$时

$$F_Z(z)=\iint_{x+2y\le z}f(x,y)dxdy=1-P(X+2Y>z)$$

$$=1-\frac{1}{8}(4-z)^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2'$$

当 z>4 时，$F_Z(z)=1\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$

Z的概率密度为

$$f_Z(z)=[F_Z(z)]'=\begin{cases}\frac{z}{4} & 0<z\le 2\\ \frac{1}{4}(4-z) & 2<z<4\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1'$$

六、X_i表示第i 页错别字的个数，$i=1,2,\ldots,100.$

$X_i \sim P(0.2)$; $\mu = EX_i = 0.2; \sigma^2 = DX_i = 0.2; \mathrm{n} = 100$..................4

所求概率为:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 25\right) \approx \Phi\left(\frac{25-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4'$$

$=\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{20}}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$..........................1'

七、记$f_X(x,\mu)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4}}; f_Y(y,\mu)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2\mu)^2}{8}}$

(1) *似然函数为：*$L(\mu)=\prod_{i=1}^{m} f_X(X_i,\mu)\prod_{j=1}^{n} f_Y(Y_j,\mu)$ ....1'

$$=Ce^{-\sum_{i=1}^{m}\frac{(X_i-\mu)^2}{4}-\sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-2\mu)^2}{8}}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

其中C是与参数μ 无关的常数。

对数似然：$=\log L(\mu)=logC-\sum_{i=1}^{m}\frac{(X_i-\mu)^2}{4}-\sum_{j=1}^{n}\frac{(Y_j-2\mu)^2}{8}$...........1'

对对数似然求导数并令导数等于 0：

$l(\mu)'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-2\mu)=0$..............*1'*

解得：$\hat{\mu}=\frac{m\bar{X}+n\bar{Y}}{m+2n}$；其中$\bar{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i$；$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j$。........1'

(2) $E\hat{\mu}=E\frac{m\bar{X}+n\bar{Y}}{m+2n}=\frac{mE\bar{X}+nE\bar{Y}}{m+2n}$.....................*1'*

$E\bar{X}=\mu; E\bar{Y}=2\mu;$ ....*1'*

所以，$E\hat{\mu}=\frac{m\mu+n\times 2\mu}{m+2n}=\mu.$ ....1'

故, $\hat{\mu}$是μ 的无偏估计量。 ....1'

八、(1) $n=25, \alpha=0.05,$

检验统计量$T=\dfrac{\bar{X}-48}{S_n}\sqrt{n}|H_0 \sim t(n-1)$

拒绝域：$D=\{|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\{|T|>2.064\}$..................................4'

$\bar{x}=50, s_n=3$

T 的观测值：$T=\frac{50-48}{3}\sqrt{25}=3.33$

$|3.33|>2.064,$......................................1'

所以，拒绝原假设。$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1'$

(2) σ^2*的置信度为*95%*的置信区间为：* $\left[\dfrac{(n-1)S_n^2}{\chi_{0.025}^2(24)},\dfrac{(n-1)S_n^2}{\chi_{0.975}^2(24)}\right]\ldots\ldots 2'$

$=[\dfrac{24\times 9}{39.36},\dfrac{24\times 9}{12.4}]=[5.488,\ 17.419]$..2'