

一、

1、实数集 R 上运算 \bullet 定义如下，其中同时满足交换律和结合律的运算是 ()。

A、 $a \bullet b = |a + b|$ B、 $a \bullet b = a + b - ab$ C、 $a \bullet b = b$ D、 $a \bullet b = 3a + b$

2、下面哪个偏序集合构成有界格 (D 为整除关系)? ()

A、 $\langle N, \leq \rangle$

B、 $\langle Z, \geq \rangle$

C、 $\langle \{2, 3, 4, 6, 12\}, D \rangle$

D、 $\langle P(\{a, b, c\}), \subseteq \rangle$

3、设 $\langle L, \leq \rangle$ 是一条链，其中 $|L| \geq 3$ ，则 $\langle L, \leq \rangle$ 一定 ()

A、不是格

B、是有补格

C、是分配格

D、是布尔格

4、设 $A = \{a, b, c\}$ ， $P(A)$ 是 A 的幂集合，则代数系统 $\langle P(A), \cap \rangle$ 是 ()。

A、半群，不是独异点

B、独异点，不是群

C、群

D、格

5、令 $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ，下面运算 $*$ 关于 A 不封闭的是 ()。

A、 $x * y = \max\{x, y\}$

B、 $x * y = \min\{x, y\}$

C、 $x * y = \gcd\{x, y\}$ //最大公约数

D、 $x * y = \text{lcm}\{x, y\}$ //最小公倍数

二、设 $E = \{a, b, c, d\}$ ， $S_1 = \{a, b\}$ ， $S_2 = \{c, d\}$ ， $B = \{\emptyset, S_1, S_2, E\}$ ，判断 $\langle B, \cap, \cup \rangle$ 是什么类型的代数系统并说明原因。

三、设 $S = \{1, 2, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ ， D 是 S 上的整除关系。求证：

1. D 是一个偏序关系

2. 画出关系 D 的哈斯图，说明 $\langle S, D \rangle$ 是格。

3. D 是分配格么? 为什么?

4. 求集合 $\{2, 4, 6, 12, 18\}$ 的下界, 最大下界, 最小元; 上界, 最小上界, 最大元。

四、设 $\langle G, * \rangle$ 是一个群, $x \in G$, 定义: $aob = a * x * b$, $\forall a, b \in G$ 。

证明: $\langle G, o \rangle$ 也是一个群。

五、设 $\langle G, * \rangle$ 为交换群, $\langle A, * \rangle$ 和 $\langle B, * \rangle$ 是其子群,

设 $AB = \{ a * b \mid a \in A, b \in B \}$, 证明 $\langle AB, * \rangle$ 也是 $\langle G, * \rangle$ 的子群。

六、设 B 是布尔代数, $\forall a, b, c \in B$, 若 $a \leq c$, 证明 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ 。

七、设 $\langle L, \leq \rangle$ 为一个格, 证明对于任意的 $a, b, c \in L$, 有

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ 成立, 则 $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ 也成立。

八、设 n 为一正整数, 记 $D_n = \{x \mid x \text{ 是 } n \text{ 的正因子}\}$, 若 D 为 D_n 上的整除关系, 显然 $\langle D_n, D \rangle$ 是一个格。现有 D_4, D_9 , 在笛卡尔积 $D_4 \times D_9$ 上定义二元关系 R 为: 对于 $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in D_4 \times D_9$, $\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in R$ 当且仅当 aDc 且 bDd 。试对 $\langle D_4 \times D_9, R \rangle$ 画出对应的哈斯图, 并判断该代数系统的类型。