$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ 表示标准正态分布的分布函数，

$\Phi(-1.65)=0.05;\Phi(-1.96)=0.025;\Phi(1)=0.8413;\Phi(2)=0.9772$

$T_n \sim t(n)\quad P(T_{24}\geq 2.064)=0.025;P(T_{24}\geq 1.711)=0.05;$

$P(T_{25}\geq 2.060)=0.025;P(T_{25}\geq 1.708)=0.05;$

$K_n \sim \chi^2(n)\quad P(K_{24}\geq 39.36)=0.025;P(K_{24}\geq 12.40)=0.975;$

$P(K_{25}\geq 40.65)=0.025;P(K_{25}\geq 13.12)=0.975;$

一、选择题(每题 2’，共 10’)

1) 设 A,B 为两随机事件，且 $P(A)>0, P(B|A)=1$，则下列结果

正确的是 （ D）

(A) $A\subset B$ (B) $B\subset A$

(C) $A\text{-}B=\phi$ (D) $P(A-B)=0$。

2) 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-(x-a)^2} & x>a \\ 0 & x\leq a \end{cases}.$$

则对任意的 b>0,概率 $P(a<X<a+b)$ 的值 (A)

A）与 a 无关，随 b 的增大而增大； B）与 a 无关，随 b 的增大而减小；

C）与 b 无关，随 a 的增大而增大 D）与 b 无关，随 a 的增大而减小。

3) 设随机变量 X 与 Y，都服从正态分布 N(0,2),且相关系数为 r.则 以下说法

正确是 (D)

(A) 当 r=0 时，(X,Y）服从二维正态； (B) （X，Y）服从二维正态；

(C) 当 r=0 时，X 和 Y 相互独立； (D) 以上都不对。

4) 设 X，Y，Z 相互独立，且均服从泊松分布 P(2)。令 T=(X+Y+Z)/3;则

ET^2的值为 (D)

（A）2 （B）2/3

（C）4/3 （D）14/3。

5) 对正态总体的数学期望 b 进行假设检验，如果在显著水平 0.05 下接受 H0:b=b0，那

么在显著水平 0.01 下，下列结论中正确的是　　　　　　　　　　　（ A ）

（A）必须接受 H0；　（B）可能接受 H0，也可能拒绝 H0；

（C）必拒绝 H0；　　（D）不接受 H0，也不拒绝 H0。

二、填充题（每空格 2’，共 26’）

1) 设事件 A 和 B 相互独立，设 P(A)=x; P(B)=0.2，P(AUB)=0.8，则 $x=$ _3/4_____。

2) 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 80/81，则该射手的命中率为_____2/3____________。

3) 设随机变量 X 服从泊松分布，方差为 4，$EX(X-1)=$ __16_____。

4) 随机变量 X，Y 相互独立， X~N(1,2)，Y~N(0,2)，则 P(X-Y<3)=_0.8413_______。

5) 随机变量 X，Y 的联合分布律为：P(X=-1,Y=-1)=0.2; P(X=-1,Y=1)=0.3; P(X=1,Y=-1)=0.4; P(X=1,Y=1)=0.1。 则 EXY=___-0.4__________。

6) 若随机变量 X,Y 满足，DX=DY=2，相关系数 r=0.3,则 D(X-Y)=___2.8_____。

7) 设随机变量序列{Xn,n=1,2,…}独立同于 f(x),

$f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其它\end{cases}$。　则 $\frac{1}{n}({X_1}^2+{X_2}^2+\ldots+{X_n}^2)\xrightarrow{p}$ __1/2____。

8) 设总体 X 服从正态分布 $N(-1,1)$，$X_1,X_2,\ldots,X_{10}$ 是来此该总体的样本，$\bar{X}$ 表示样本均值， 则 $\sum_{i=1}^{10}(X_i+1)^2$ 服从_$\chi^2(10)$_分布（标明自由度）。

9) 随机变量 X 的分布律为 P(X= 1)=0.4，P(X=3)=0.6, 则其分布函数为__

$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.4, & 1\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$。

10) 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(x+1), & -1<x<0\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 Y=-2X+1 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3-y}{2}, & 1<y<3\\ 0, & 其他\end{cases}$。

11) 设 $\boldsymbol{X_1,X_2,X_3,X_4}$ 是来自正态总体 N(0,4) 的简单随机样本，若 $c(X_1+X_2)^2/X_3^2\sim F(1,1)$，则常数 $\boldsymbol{c}=$ __1/2__。

12) 设某总体服从 $N(m,4)$，有来自该总体的容量为 16 的简单随机样本，其样本均值为 2, 且 m 置信区间为[1.02,2.98], 则该置信区间的置信度为__0.95____。

13) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2b}e^{-|x|/b}, -\infty<x<+\infty, (b>0)$ 为未知参数。若 -2, -1, 4，3， 2 是来自该总体的简单随机样本的观测值，则 b 的矩估计值为 $\underline{\frac{\sqrt{85}}{5}}$。

三、(15') 设随机变量（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} axy, & 0<x<1, x<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求（1）常数 a; (2)Y 的边缘密度函数;（3）条件概率 P(X<0.5|Y=0.4)。

$$f(x,y)=\begin{cases} axy, & 0<x<1, x<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解:（1）$1=a\int_0^1 xdx\int_x^1 ydy=\frac{a}{2}\int_0^1 x(1-x^2)dx=\frac{a}{8}, \therefore a=8$

（2）Y 的支撑为（0，1）

当 $y\in(0,1)$ 时，$f_Y(y)=\int_0^y f(x,y)dx=\int_0^y 8xydx=4y^3$

当 $y\notin(0,1)$ 时，$f_Y(y)=0$

（3）$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$.

$$P(X<0.5|Y=0.4)=\int_0^{\min\{0.5,0.4\}} f_{X|Y}(x|0.4)dx=\int_0^{0.4}\frac{2x}{0.4^2}dx=1$$

四、(10') 设某高校库存现有灯管 60%购自甲厂家；30%购自乙厂家；10%购自丙厂家。已知甲厂家产品的次品率为 5%；乙厂家产品的次品率为 10%；丙厂家产的次品率为 15%。现随机的从仓库抽取一支灯管。 (1)求抽出灯管为合格品的概率； (2)若已知抽到灯管是合格品，求该灯管是丙厂家生产的概率。.

解：$A_1=\{\text{甲厂出品}\}, A_2=\{\text{乙厂出品}\}$，$A_3=\{\text{丙厂出品}\}, B=\{\text{产品为合格品}\}$

因为 $A_i\cap A_j=\Phi, \bigcup_{i=1}^{3}A_i=\Omega$, 所以 A_1, A_2, A_3 构成样本空间的一个划分。

（1） 根 据 全 概 率 公 式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.6\times0.95+0.3\times0.9+0.1\times0.85\approx0.57+0.27+0.085=0.925$$

（2） 根据贝叶斯公式，$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.085}{0.925}\approx0.0919$

五、(10')设随机变量 X 和 Y 相互独立,都服从指数分布；其中，X~e(1), Y~e(2)。令 Z=X+Y，求随机变量 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$。

解：

解法一:分布函数法：

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=2e^{-(x+2y)},F(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z).$

$z\leqslant 0,F(z)=0;z>0,F(z)=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2e^{-(x+2y)}dy=1-2e^{-z}+e^{-2z}.$

$$f(z)=[F(z)]'=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}), & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$$

解法二：密度函数（卷积）法：

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases},f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

当$z\leqslant 0$时，$f_z(z)=0$

当$z>0$时，因为X,Y独立，且$Z=X+Y$,所以根据卷积公式 $f_Z(z)=f_X*f_Y(z)$

由$\begin{cases}x>0\\ z-x>0\\ z>0\end{cases}$,解得，$0<x<z$

$$f_Z(z)=f_X*f_Y(z)=\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z 2e^{-(2z-x)}dx=2(e^{-z}-e^{-2z})$$

六、(9') 甲乙两家小型音乐厅竞争 100 名听众。设每位听众随机选择这两家音乐厅，并且听众的选择是相互独立的。问甲应该至少设有多少个座位，才能使得观众因无座位而离去的概率小于 2.5%。（要求：使用中心极限定理近似计算）

解：记$X_i=\begin{cases}1, & 第i名观众选择甲\\ 0, & 第i名观众选择乙\end{cases}$，则$X_i\sim B(1,p),p=0.5,n=100\gg 1.$

因为$X_1\cdots X_n$独立同分布，所以$\sum_{i=1}^n X_i\sim B(n,p).$ $E\overline{X}=EX=p,D\overline{X}=\frac{DX}{n}=\frac{pq}{n}$

假设至少需要设 N 个座位，则根据 Laplace 中心极限定理,$\overline{X}\sim N\left(p,\frac{pq}{n}\right)$

$$2.5\%>P\left(n\overline{X}>N\right)=P\left(\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}>\frac{\frac{N}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{N}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right),$$

$$\frac{\frac{N}{n}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\geqslant u_{0.025}$$

$\mathrm{N}\geqslant \mathrm{np}+\mathrm{u}_{0.025}\sqrt{\mathrm{npq}}=100\times 0.5+1.96\times\sqrt{100\times 0.5\times 0.5}=59.8$

至少需要设 60 个座位。

七、(10')设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)} & x\ge\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases},(\theta>0)$$

其中θ为未知参数。$X_1,\ldots X_n$ 为来自该总体的样本。(1)求参数θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$；(2)$\hat{\theta}$是否是θ的无偏估计量，说明理由。.

解：(1)构造似然函数

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}=2^n e^{-2n\left(\overline{X}-\theta\right)},\theta\leqslant\min\{x_i\}$,

对数似然函数$\ln L(\theta)=n\ln 2-2n\left(\overline{X}-\theta\right)$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0$ ，解得$\hat{\theta}=\min\{X_i\}$。

（2）因为

$$f_N(x)=n[1-F(x,\theta)]^{n-1}f(x,\theta)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)} & x\geqslant\theta\\ 0 & x<\theta\end{cases},$$

$E\hat{\theta}=E\min\{X_i\}=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\int_{0}^{+\infty}\left(\dfrac{t}{2n}+\theta\right)e^{-t}dt=\dfrac{1}{2n}+\theta\neq\theta$

$\lim\limits_{n\to+\infty}E\hat{\theta}=\theta.$

所以$\hat{\theta}$不是无偏估计，而是渐近无偏估计。

八、 (10')设总体 X 服从正态分布 N（u,σ^2), u 和σ^2未知。 现有来自该总体样本容量为 25 的样本, 其样本均值为 15，样本标准差为 3。 （1）试检验 H_0: u=16, v.s. H_1: u ≠16.(检验水平$\alpha=0.05$)，(2)求σ^2的置信度为 95%的置信区间。

（1）$n=25,\overline{X}=15,S=3,\alpha=0.05,\mu_0=16$

$H_0:\mu=16\leftrightarrow H_1:\mu\neq16$

检验检验μ，σ^2未知，构造检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t\left(n-1\right)$

拒绝域$S=\left\{|T|>t_{\alpha/2}(n-1)=2.064\right\}$

$T=\dfrac{15-16}{3/\sqrt{25}}=-1.66667\notin S$,所以接受H_0

(2)求σ^2，μ未知，构造枢轴量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

置信区间为

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}=39.36,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}=12.4,$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)=(5.4878,17.4194)$$