自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

密 封 线

东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 概率论与数理统计 考试学期 21-22-3 得分______

适用专业 全校 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								
批阅人								

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$表示标准正态分布的分布函数，

$$\Phi(-1.65)=0.05;\Phi(-1.96)=0.025;\Phi(1)=0.8413;\Phi(2)=0.9772$$

$T_n\sim t(n)$ $P(T_{24}\geq 2.064)=0.025;P(T_{24}\geq 1.711)=0.05;$

$P(T_{25}\geq 2.060)=0.025;P(T_{25}\geq 1.708)=0.05;$

$K_n\sim\chi^2(n)$ $P(K_{24}\geq 39.36)=0.025;P(K_{24}\geq 12.40)=0.975;$

$P(K_{25}\geq 40.65)=0.025;P(K_{25}\geq 13.12)=0.975;$

一、选择题(每题 2’，共 10’)

1) 设A和B为两随机事件，且$A\subset B$，$P(B)>0$. 则下列说法正确的是 ( )

A) $P(A|B)>P(A)$； B) $P(A|B)\leq P(A)$；

C) $P(A|B)\geq P(A)$； D) $P(A|B)<P(A)$。

2) 随机变量X_1,X_2,X_3相互独立，且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$。则下列说法正确的是 ( )

A) $\frac{X_2^2+X_3^2}{X_1^2+X_2^2}\sim F(2,2)$； B) $\frac{\sqrt{2}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}}\sim t(2)$；

C) $X_1^2+X_2^2\sim\chi^2(2)$； D) $\frac{X_1}{\sigma^2}\sim N(0,\ 1)$。

3) 设$F(x)$和$G(x)$是两个分布函数，其相应的概率密度函数$f(x)$和 $g(x)$是连续函数，则必为概率密度的是 ( )

A) $f(x)g(x)$； B) $2f(\mathrm{x})G(x)$；

C) $2g(x)F(x)$； D) $f(\mathrm{x})G(x)+g(\mathrm{x})F(x)$。

4) 设总体 X 的均值为θ, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该总体的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值。

现需要检验$H_0:\theta=\theta_0$, $H_1:\theta<\theta_0$。若检验水平 $\alpha=0.1$ 和 $\alpha=0.05$ 时拒绝域分别为 $S_1=\{\bar{X}<a\}$ 和 $S_2=\{\bar{X}<b\}$。则以下结论正确的是 ( )

A) $a\leq b$； B) $a\geq b$；

C) $a=b$； D) 不能确定 a 和 b 的大小关系。

5) 设总体 X 服从指数分布 $e(2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ 是来自该总体的样本， $\bar{X}$, S^2分别表示样本均值和样本方差。下列结论中不正确的是 （　　）

A) $E\bar{X} = \frac{1}{2}$;　　　　B) $cov(\bar{X}, S^2)$=0；

C) $E(X_1X_2) = DX_1$;　　　　D) $ES^2 = \frac{1}{4}$ 。

二、填充题（每空格 2’，共 26’）

1) 设事件A 和 B 相互独立，事件 A 和 C 互不相容，且$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(BC) = \frac{1}{8}$，则$P(A \cup B \cup C) =$______。

2) 设某检测设备的测量误差服从均匀分布$U[-1,1]$。现用该设备测量了 4 件产品。则四次检测中恰好有一次检测误差超过 0.5 的概率是____________。

3) 设随机变量X服从泊松分布$P(2)$，则 $EX(X+4) =$__________。

4) 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(3,4)$，　则 $P(2X - Y > 2\sqrt{12} - 1)$=________。

5) 随机变量X 和 Y 的联合分布律为：$P(X=-1, Y=2) = 0.4$; $P(X=1, Y=2) = 0.2$; $P(X=-1, Y=3) = 0.3$; $P(X=1, Y=3) = 0.1$。 则$E\frac{X}{Y} =$___________。

6) 若随机变量X 和 Y 的相关系数为0.2，且$DX = 2$，$DY = 4$，则 $cov(X+Y, Y-2X) =$_________。

7) 设随机变量序列$\{X_n, n = 1,2, \ldots\}$独立同分布于二项分布$b(1, 0.3)$。则$\frac{1}{n}(X_1{}^5 + X_2{}^5 + \ldots + X_n{}^5) \xrightarrow{p}$______。

8) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$。

则$P(0.5 < X < 1.5) =$________。

9) 随机变量 X 的分布律为$P(X=-1) = 0.3$, $P(X=1) = 0.4$, $P(X=-2) = 0.3$。则其分布函数为_______________。

10) 随机变量 X 的概率密度为$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，则 $Y = -2X + 1$的密度函数为_______________。

11) 设X_1, X_2,独立同分布，都服从$N(0,4)$，则 $\frac{X_1}{|X_2|} \sim$_________。

12) 设某总体服从$N(\mu, 25)$，有来自该总体的容量为 100 的简单随机样本，样本均值为 150，基于该样本的 μ 的置信度为 0.9 的置信区间为________________。

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

姓名______　学号______

线　封　密

13) 设总体 X 的概率分布律为$P(X=1)=\theta, P(X=2)=1-2\theta, P(X=3)=\theta$，其中$\theta$是未知参数。若 1，3，2，1，2，3 是来自该总体的简单随机样本的观测值，则θ的矩估计值为________。

三、(15') 设随机变量$(X，Y)$ 的联合概率密度为

$$.f(x,y)=\begin{cases} a & -1<y<-x^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}。$$

求（1）常数a; (2) X 的边缘密度函数;（3）条件概率$P(-0.75<Y<-0.15|X=0.5)$。

四、(10') 设一盒子中有两个白球，三个红球。现在再往盒子中加入两个球（其中含白球数各种情况等可能），然后从盒子中任意取出一球。（1）求取出的球是白球的概率;（2）若已知取出的球为白球，求加入盒子中的两个球都是白球的概率。

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

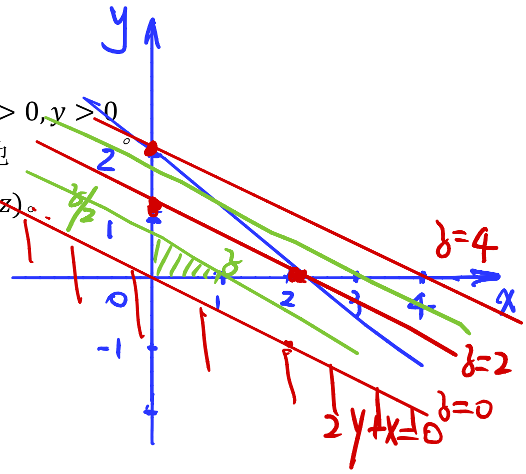
姓名________ 学号________

线 封 密

五、(10')设随机变量 X 和 Y 的联合密度为

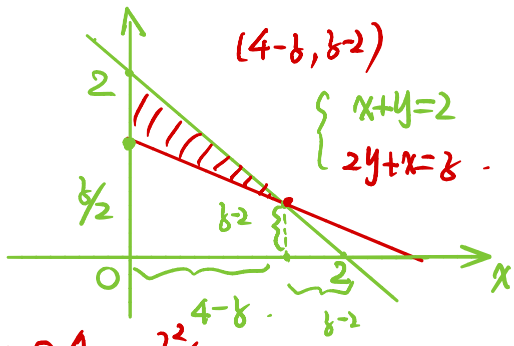
$$f(x,y)=\begin{cases}0.5 & x+y<2, x>0, y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

令$Z=2Y+X$。求随机变量 Z 的概率密度函数$f_Z(z)$。



$$F_Z(z)=P(2Y+X\le z)$$

$$=\begin{cases}0 & , z\le 0\\ z^2/8, & , 0<z\le 2\\ 1-\frac{1}{8}(4-z)^2 & 2<z\le 4\\ 1 & , z>4\end{cases}$$



$0<z\le 2$, $F_Z(z)=\iint_{D_z} f(x,y)\,dx\,dy=0.5A_D=z^2/8$.

$2<z\le 4$

六、(9') 设一本书共 100 页，每一页错别字的个数服从泊松分布$P(0.2)$。求这本书中错别字的总数不超过 25 个的概率。(用中心极限定理进行近似计算，并可使用标准正态分布的分布函数$\Phi(x)$表示相关概率)。

$X_i \sim P(0.2)$. $EX_i=0.2$. $DX_i=0.2$

$$X_1+X_2+\cdots+X_{100}\ \dot\sim\ N(100\times 0.2,\ 100\times 0.2)=N(20,20)$$

$$P(X_1+\cdots+X_{100}\le 25)=P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{100}-20}{\sqrt{20}}\le\frac{25-20}{\sqrt{20}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)$$

七、(10’) 设总体$X\sim N(\mu,2)$, $Y\sim N(2\mu,4)$，X,Y 相互独立。现有来自这两个总体容量分别为 m 和 n 的简单随机样本$X_1,\dots,X_m$ 以及$Y_1,\dots,Y_n$。(1)求参数μ的最大似然估计量 $\hat{\mu}$。(2) $\hat{\mu}$ 是否是 μ 的无偏估计量，说明理由。

$$L(\mu)=f_{X_1}(x_1,\mu)\,f_{X_2}(x_2,\mu)\cdots f_{X_m}(x_m,\mu)\,f_{Y_1}(y_1,\mu)\cdots f_{Y_n}(y_n,\mu)$$

$$=\frac{1}{(2\pi^{1/2})^m}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2}{4}}\cdot\frac{1}{(2^{3/2}\pi^{1/2})^n}e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j-2\mu)^2}{8}}$$

$$\ln L(\mu)=\ln\frac{1}{(2\pi^{1/2})^m}\cdot\frac{1}{(2^{3/2}\pi^{1/2})^n}-\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2}{4}-\frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j-2\mu)^2}{8}$$

$$0=\frac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(y_j-2\mu)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{j=1}^{n}y_j\right)-\left(\frac{m}{2}+n\right)\mu=0$$

$$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{j=1}^{n}y_j}{m+2n}=\frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+2n},\quad E\hat{\mu}=\frac{m}{m+2n}E\bar{X}+\frac{n}{m+2n}E\bar{Y}=\frac{m\mu}{m+2n}+\frac{n\cdot 2\mu}{m+2n}=\mu.$$

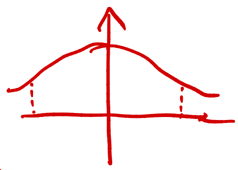
$\hat{\mu}$是μ的无偏估计.

八、(10’) 设总体 X 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知。现有来自该总体样本容量为 25 的样本，其样本均值为 50 $\bar{X}$ 样本标准差为 3 S（1）试检验$H_0{:}\,\mu=48\ v.s.\ H_1{:}\,\mu\neq 48$ (检验水平$\alpha=0.05$)；(2)求σ^2的置信度为 95%的置信区间。

(1) $H_0{:}\,\mu=48 \longleftrightarrow H_1{:}\,\mu\neq 48$.

H_0成立. $X\sim N(48,\sigma^2)$

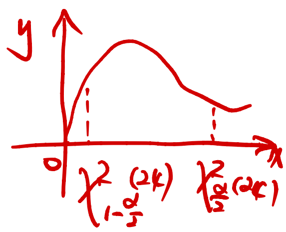
$$\frac{\bar{X}-48}{S_n}\sqrt{n}\sim t(n-1)$$



拒绝域S: $\left|\frac{5(\bar{X}-48)}{S_n}\right|>t_{0.025}(24)=2.064$

$\bar{X}=50$, $S_n=3$. $\frac{5\times 2}{3}>2.064$. $(\bar{x},S_n)\in S$. 拒绝原假设

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, $\frac{24S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(24)$



$1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$.

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(24)<\frac{24S^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(24)\right)=1-\alpha=0.95$$

$\chi^2_{0.025}(24)$

$\chi^2_{0.975}(24)$

$$\sigma^2\ \left[\frac{24S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(24)},\ \frac{24S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(24)}\right]$$

39.36　12.4