Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Дисциплина Моделирование

Тема Марковские цепи

Студент Игнатьев А.И.

Группа ИУ7-73Б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Рудаков И.В.

Москва.
2020 г.

Условие

Для сложной системы S, имеющей не более 10 состояний, определить среднее время нахождения системы в предельных состояниях, т.е. при установившемся режиме работы.

Теоретические сведения

Случайный процесс называется марковским, если он обладает следующим свойством: для каждого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от ее состояния в настоящем $(t = t_0)$ и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. В марковском случайном процессе его будущее развитие зависит только от настоящего состояния и не зависит от предыстории процесса.

Уравнения Колмогорова для марковского процесса:

$$F = (P'(t), P(t), \lambda) = 0$$

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i. Для любого момента времени сумма всех вероятностей равна единице.

Для решения поставленной задачи требуется построить систему уравнений по следующим принципам: В левой части уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько состояний связано с данным состоянием. Если система переходит из данного состояния в другое, соответствующий член имеет знак -, если из другого состояния в данное, то знак +. Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода (интенсивности), соответствующей переходу, и вероятности того состояния, из которого происходит переход.

Для процесса, имеющего четыре состояния, система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_0}{dt} = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 + \lambda_{30}p_3 - (\lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{03})p_0 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{03}p_0 + \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 \end{cases}$$

Для получения предельных вероятностей нужно левые части уравнений приравнять к нулю. Кроме того, к системе требуется добавить условие нормировки $\sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1$.

Результаты работы

На рис. 1, 2, 3 представлены результаты расчета среднего времени нахождения системы в предельных состояниях.

Состояния	1	2	3
1	0.0	0.27259	0.53405
2	0.63612	0.0	0.9949
3	0.58573	0.7923	0.0

Состояния	Предельные вероятности	Время
1	0.42917	4.8211
2	0.23491	4.3662
3	0.33592	0.0545

Рисунок 1. Система с тремя состояниями

Состояния	1	2	3	4	5	6
1	0.0	0.6402	0.201	0.39489	0.00315	0.96174
2	0.79884	0.0	0.50898	0.89452	0.21019	0.74253
3	0.8452	0.83252	0.0	0.45407	0.65126	0.00647
4	0.64431	0.25456	0.34127	0.0	0.24498	0.54699
5	0.79239	0.94099	0.77795	0.82682	0.0	0.93629
6	0.65842	0.51059	0.22816	0.27564	0.79227	0.0

Состояния	Предельные вероятности	Время
1	0.24743	2.0567
2	0.15255	1.9322
3	0.10885	2.3514
4	0.19963	0.8042
5	0.07571	1.4887
6	0.21582	2.5412

Рисунок 2. Система с шестью состояниями

Состояния	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0	0.74785	0.32557	0.96331	0.06603	0.7619	0.13345	0.01048	0.89655	0.09981
2	0.38302	0.0	0.31963	0.86662	0.51102	0.96329	0.75592	0.10722	0.57365	0.63636
3	0.02748	0.98666	0.0	0.58011	0.73684	0.48691	0.01426	0.43755	0.11164	0.83364
4	0.76107	0.02798	0.74101	0.0	0.71771	0.33359	0.3304	0.42827	0.32277	0.08781
5	0.81862	0.07618	0.29106	0.01378	0.0	0.56159	0.24887	0.13701	0.57098	0.22321
6	0.09487	0.5608	0.14086	0.86928	0.87114	0.0	0.66798	0.31036	0.67929	0.32272
7	0.20065	0.37932	0.44058	0.95981	0.4931	0.71179	0.0	0.20712	0.29312	0.48458
8	0.94112	0.82663	0.99462	0.98856	0.56127	0.48097	0.15964	0.0	0.74488	0.40151
9	0.87852	0.93538	0.97427	0.37729	0.70656	0.53769	0.50325	0.19835	0.0	0.55742
10	0.96551	0.07505	0.68589	0.84154	0.81442	0.30433	0.64811	0.76193	0.86222	0.0

Состояния	Предельные вероятности	Время
1	0.12027	1.4512
2	0.08258	1.3045
3	0.10414	0.0805
4	0.14565	0.5746
5	0.16989	1.7706
6	0.11216	0.9641
7	0.07978	1.3891
8	0.04157	1.2559
9	0.08659	0.7028
10	0.05737	1.2696

Рисунок 3. Система с десятью состояниями

Выводы

В данной работе был смоделирован марковский процесс, найдены вероятности нахождения системы в предельных состояниях и среднее время нахождения системы в предельных состояниях.