5.1.4. Метод дихотомии

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R} f(x)$.

Стратегия поиска

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и требуемая точность. Алгоритм опирается на анализ значений функции в двух точках (см. рис. 5.2). Для их нахождения текущий интервал неопределенности делится пополам и в обе стороны от середины откладывается по $\frac{\varepsilon}{2}$, где ε - малое положительное число. Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$, $\varepsilon > 0$ - малое число, $l > 0$ - точность.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $y_k = \frac{a_k + b_k - \varepsilon}{2}$, $f(y_k)$, $z_k = \frac{a_k + b_k + \varepsilon}{2}$, $f(z_k)$.

Шаг 4. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

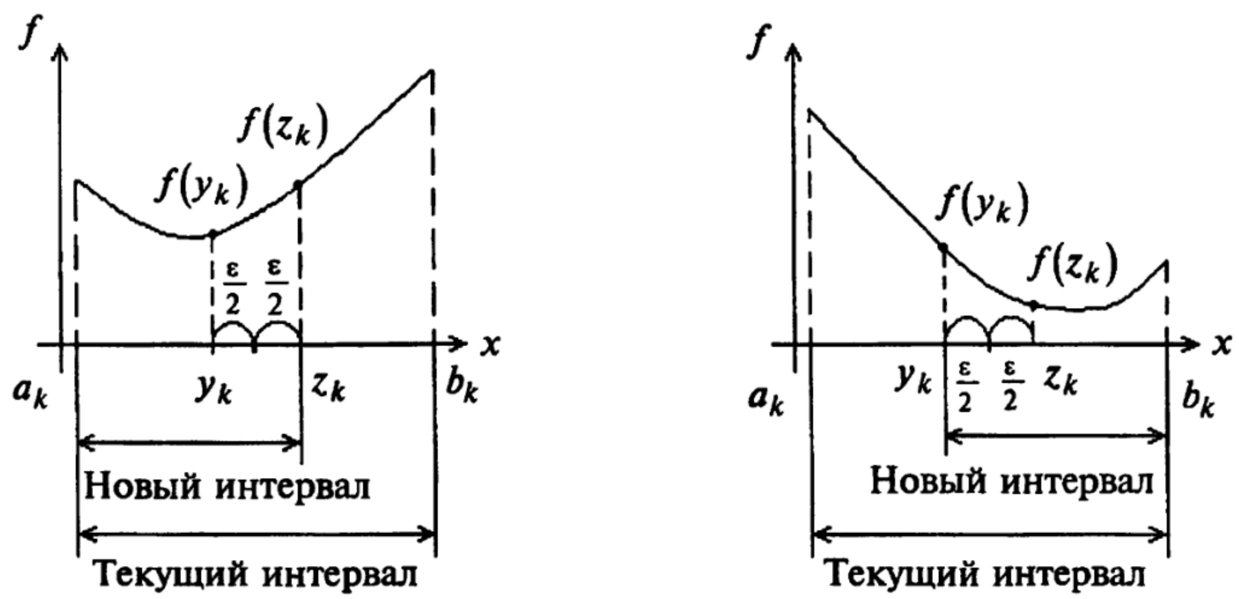
а) если $f(y_k) \le f(z_k)$, положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = z_k$ (рис. 5.6, *а*) и перейти к шагу 5;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить $a_{k+1} = y_k$, $b_{k+1} = b_k$ (рис. 5.6, *б*).

Шаг 5. Вычислить $|L_{2(k+1)}| = |b_{k+1} - a_{k+1}|$ и проверить условие окончания:

а) если $|L_{2(k+1)}| \le l$, процесс поиска завершается и $x^* \in L_{2(k+1)} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. В качестве приближенного решения можно взять середину последнего интервала: $x^* \cong \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$;

б) если $|L_{2(k+1)}| > l$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.



Сходимость

Для метода дихотомии характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N)=\dfrac{1}{2^{\frac{N}{2}}}$, где N - количество вычислений функции.

З а м е ч а н и я 5.5.

1. Текущие интервалы неопределенности $L_0, L_2, L_4, \ldots$ имеют четные номера, указывающие на количество сделанных вычислений функции, как и в методе деления интервала пополам.

2. Эффективность методов дихотомии и деления интервала пополам при малых ε можно считать одинаковой.

Пример 5.4. Найти минимум функции $f(x)=2x^2-12x$ методом дихотомии.

□ 1. Зададим начальный интервал неопределенности: $L_0=[0,10]$ (см. п. 1 примера 5.2). Положим $\varepsilon=0{,}2$, $l=1$.

2. Положим $k=0$.

3^0. Вычислим

$$y_0=\frac{a_0+b_0-\varepsilon}{2}=\frac{0+10-0{,}2}{2}=4{,}9;\quad z_0=\frac{a_0+b_0+\varepsilon}{2}=\frac{0+10+0{,}2}{2}=5{,}1;$$
$$f(y_0)=-10{,}78;\quad f(z_0)=-9{,}18.$$

4^0. Так как $f(y_0)<f(z_0)$, то $a_1=a_0=0$, $b_1=z_0=5{,}1$ (рис. 5.6, *а*).

5^0. Получим $L_2=[0;5{,}1]$, $|L_2|=5{,}1>l=1$. Положим $k=1$ и перейдем к шагу 3.

3^1. Вычислим

$$y_1=\frac{a_1+b_1-\varepsilon}{2}=\frac{0+5{,}1-0{,}2}{2}=2{,}45;\quad z_1=\frac{a_1+b_1+\varepsilon}{2}=\frac{0+5{,}1+0{,}2}{2}=2{,}65;$$
$$f(y_1)=-17{,}395;\quad f(z_1)=-17{,}755.$$

4^1. Так как $f(y_1)>f(z_1)$, то $a_2=y_1=2{,}45$; $b_2=b_1=5{,}1$ (рис. 5.6, *б*).

5^1. Получим $L_4=[2{,}45;5{,}1]$, $|L_4|=5{,}1-2{,}45=2{,}65>l=1$. Положим $k=2$ и перейдем к шагу 3.

3^2. Вычислим

$$y_2=\frac{a_2+b_2-\varepsilon}{2}=\frac{2{,}45+5{,}1-0{,}2}{2}=3{,}675;\quad z_2=\frac{a_2+b_2+\varepsilon}{2}=\frac{2{,}45+5{,}1+0{,}2}{2}=3{,}875;$$
$$f(y_2)=-17{,}089;\quad f(z_2)=-16{,}469.$$

4^2. Так как $f(y_2)<f(z_2)$, то $a_3=a_2=2{,}45$; $b_3=z_2=3{,}875$ (рис. 5.6, *а*).

5^2. Получим $L_6=[2{,}45;3{,}875]$, $|L_6|=3{,}875-2{,}45=1{,}425>l=1$. Положим $k=3$ и перейдем к шагу 3.

3^3. Вычислим

$$y_3=\frac{a_3+b_3-\varepsilon}{2}=\frac{2{,}45+3{,}875-0{,}2}{2}=3{,}06;\quad z_3=\frac{a_3+b_3+\varepsilon}{2}=\frac{2{,}45+3{,}875+0{,}2}{2}=3{,}26;$$
$$f(y_3)=-17{,}99;\quad f(z_3)=-17{,}86.$$

4^3. Так как $f(y_3)<f(z_3)$, то $a_4=a_3=2{,}45$; $b_4=z_3=3{,}26$ (рис. 5.6, *а*).

5^3. Получим $L_8=[2{,}45;3{,}26]$, $|L_8|=3{,}26-2{,}45=0{,}81<l=1$;

$$x^*\in[2{,}45;3{,}26],\ N=8,\quad x^*\cong\frac{2{,}45+3{,}26}{2}=2{,}855.$$

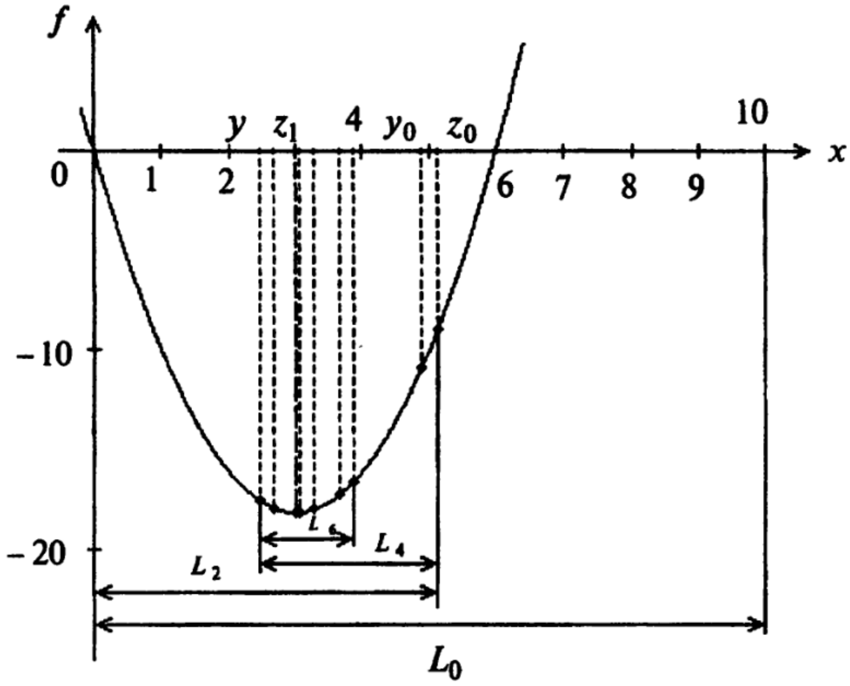


Рис. 5.7

Первые итерации поиска изображены на рис. 5.7. ■