

5.1.6. Метод Фибоначчи

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ одной переменной, т.е. такую точку $x^* \in R$, что $f(x^*) = \min_{x \in R} f(x)$.

Для построения эффективного метода одномерной минимизации, работающего по принципу последовательного сокращения интервала неопределенности, следует задать правило выбора на каждом шаге двух внутренних точек. Конечно, желательно, чтобы одна из них всегда использовалась в качестве внутренней и для следующего интервала. Тогда количество вычислений функции сократится вдвое и одна итерация потребует расчета только одного нового значения функции. В методе Фибоначчи реализована стратегия, обеспечивающая максимальное гарантированное сокращение интервала неопределенности при заданном количестве вычислений функции и претендующая на оптимальность. Эта стратегия опирается на числа Фибоначчи.

Определение 5.4. Числа Фибоначчи определяются по формуле

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Последовательность чисел Фибоначчи имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Стратегия поиска

Метод относится к последовательным стратегиям. Задается начальный интервал неопределенности и количество N вычислений функции. Алгоритм уменьшения интервала опирается на анализ значений функции в двух точках (см. рис. 5.2). Точки вычисления функции находятся с использованием последовательности из $N+1$ чисел Фибоначчи. Как в методе золотого сечения, на первой итерации требуются два вычисления функции, а на каждой последующей - только по одному. Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм

Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $L_0 = [a_0, b_0]$; $l > 0$ - допустимую длину конечного интервала, $\varepsilon > 0$ - константу различимости.

Шаг 2. Найти количество N вычислений функции как наименьшее целое число, при котором удовлетворяется условие $F_N \geq \frac{|L_0|}{l}$, и числа Фибоначчи F_0, F_1, \dots, F_N .

Шаг 3. Положить $k = 0$.

Шаг 4. Вычислить $y_0 = a_0 + \frac{F_{N-2}}{F_N}(b_0 - a_0)$; $z_0 = a_0 + \frac{F_{N-1}}{F_N}(b_0 - a_0)$.

Шаг 5. Вычислить $f(y_k)$, $f(z_k)$.

Шаг 6. Сравнить $f(y_k)$ с $f(z_k)$:

а) если $f(y_k) \leq f(z_k)$, положить

$$a_{k+1} = a_k; \quad b_{k+1} = z_k; \quad z_{k+1} = y_k; \quad y_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-3}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить

$$a_{k+1} = y_k; \quad b_{k+1} = b_k; \quad y_{k+1} = z_k; \quad z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Перейти к шагу 7;

б) если $f(y_k) > f(z_k)$, положить

$$a_{k+1} = y_k; \quad b_{k+1} = b_k; \quad y_{k+1} = z_k; \quad z_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{N-k-2}}{F_{N-k-1}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Шаг 7. Проверить условие окончания и в случае необходимости сделать заключительное N -е вычисление функции для получения решения:

а) если $k \neq N - 3$, положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 5;

б) если $k = N - 3$, то всегда $y_{N-2} = z_{N-2} = \frac{(a_{N-2} + b_{N-2})}{2}$, т.е. отсутствует

точка нового вычисления функции. Следует положить: $y_{N-1} = y_{N-2} = z_{N-2}$; $z_{N-1} = y_{N-1} + \varepsilon$. В точках y_{N-1} и z_{N-1} вычисляются значения функции и находятся границы конечного интервала неопределенности:

- если $f(y_{N-1}) \leq f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = a_{N-2}$, $b_{N-1} = z_{N-1}$;

- если $f(y_{N-1}) > f(z_{N-1})$, положить $a_{N-1} = y_{N-1}$, $b_{N-1} = b_{N-2}$.

Процесс поиска завершается и $x^* \in [a_{N-1}, b_{N-1}]$. В качестве приближенного решения можно взять любую точку последнего интервала, например, его середину $x^* \cong \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}$.

Сходимость

Для метода Фибоначчи характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \frac{1}{F_N}$, где N - количество вычислений функции.

З а м е ч а н и я 5.7.

1. При заданном количестве N вычислений функции метод Фибоначчи обеспечивает минимальную величину конечного интервала неопределенности по сравнению с методами, изложенными в разд. 5.1.2 - 5.1.5.

2. Нумерация интервалов неопределенности такая же, как в методе золотого сечения: $L_0, L_2, L_3, L_4, \dots$ (см. п. 1 замечаний 5.6).

3. На k -й итерации длина интервала неопределенности сокращается по правилу $\frac{F_{N-k-1}}{F_{N-k}}$.

Пример 5.7. Найти минимум функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ методом Фибоначчи.

□ 1. Зададим начальный интервал неопределенности: $L_0 = [0, 10]$ (см. п. 1 примера 5.2). Пусть $l = 1$, $\varepsilon = 0,01$; $F_6 = 13 > \frac{|L_0|}{l} = \frac{10}{1} = 10$, поэтому $N = 6$.

2. Найдем числа Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13$.

3. Положим $k = 0$.

4⁰. Вычислим

$$y_0 = a_0 + \frac{F_4}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{5}{13} \cdot 10 = 3,846; \quad z_0 = a_0 + \frac{F_5}{F_6}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{8}{13} \cdot 10 = 6,154.$$

5⁰. Вычислим $f(y_0) = -16,57$; $f(z_0) = 1,893$.

6⁰. Сравним $f(y_0)$ с $f(z_0)$. Так как $f(y_0) < f(z_0)$, то $a_1 = a_0 = 0$;

$$b_1 = z_0 = 6,154; \quad y_1 = a_1 + \frac{F_{6-3}}{F_{6-1}}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{3}{8} \cdot 6,154 = 2,308; \quad z_1 = y_0 = 3,846.$$

7⁰. Проверим условие окончания: $k = 0 \neq N - 3 = 6 - 3 = 3$; $L_2 = [0; 6,154]$. Положим $k = 1$ и перейдем к шагу 5.

5¹. Вычислим значение $f(y_1) = -17,04$; $f(z_1) = -16,57$ (уже было вычислено на шаге 5⁰).

6¹. Сравним $f(y_1)$ и $f(z_1)$. Так как $f(y_1) < f(z_1)$, то $a_2 = a_1 = 0$;

$$b_2 = z_1 = 3,846; \quad y_2 = a_2 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-2}}(b_2 - a_2) = 0 + \frac{2}{5} \cdot 3,846 = 1,538; \quad z_2 = y_1 = 2,308.$$

7¹. Проверим условие окончания: $k = 1 \neq N - 3 = 3$; $L_2 = [0; 3,846]$. Положим $k = 2$ и перейдем к шагу 5.

5². Вычислим $f(y_2) = -13,73$; $f(z_2) = -17,04$ (было вычислено на шаге 5¹).

6². Сравним $f(y_2)$ с $f(z_2)$. Так как $f(y_2) > f(z_2)$, то

$$a_3 = y_2 = 1,538; \quad b_3 = b_2 = 3,846; \quad y_3 = z_2 = 2,308;$$
$$z_3 = a_3 + \frac{F_{6-4}}{F_{6-3}}(b_3 - a_3) = 1,538 + \frac{2}{3} \cdot (3,846 - 1,538) = 3,077.$$

7². Проверим условие окончания: $k = 2 \neq N = 3$, $L_4 = [1,538; 3,846]$. Положим $k = 3$ и перейдем к шагу 5.

5³. Вычислим $f(y_3) = f(z_2) = -17,04$ (уже было известно); $f(z_3) = -17,9884$.

6³. Сравним $f(y_3)$ и $f(z_3)$. Так как $f(y_3) > f(z_3)$, то

$$a_4 = y_3 = 2,308; \quad b_4 = b_3 = 3,846; \quad y_4 = z_3 = 3,077;$$

$$z_4 = a_4 + \frac{F_{6-5}}{F_{6-4}}(b_4 - a_4) = 2,308 + \frac{1}{2} \cdot (3,846 - 2,308) = 3,077.$$

7³. Проверим условие окончания: $k = 3 = N - 3 = 3$; $L_5 = [2,308; 3,846]$. Положим $y_5 = y_4 = z_4 = 3,077$; $z_5 = y_5 + \varepsilon = 3,077 + 0,01 = 3,087$. Вычислим $f(y_5) = -17,9884$ (было вычислено на шаге 5³); $f(z_5) = -17,985$. Так как $f(y_5) < f(z_5)$, то $a_5 = a_4 = 2,308$; $b_5 = z_5 = 3,087$. Поэтому $x^* \in L_6 = [2,308; 3,087]$; $|L_6| = 3,087 - 2,308 = 0,78 < l = 1$. Заметим, что $\frac{|L_6|}{|L_0|} = 0,078 \cong \frac{1}{F_6} = \frac{1}{13} = 0,077$. В качестве приближенного решения возьмем середину интервала L_6 : $x^* \cong \frac{2,308 + 3,087}{2} = 2,697$. ■