5. МЕТОД ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

5.1. СУТЬ МЕТОДА ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

К достоинствам метода Фибоначчи относится использование на каждом шаге внутренней точки с уже вычисленным значением функции, что позволяет сократить количество вычислений функции вдвое, т.е. одна итерация требует расчета только одного нового значения функции. Однако если по какой-то причине число вычислений функции N выбрано неудачно, то метод Фибоначчи останавливается (т.е. перебор чисел Фибоначчи окончен), не находя минимума с заданной точностью. Попробуем ликвидировать данный недостаток метода Фибоначчи.

Для этого рассмотрим числа Фибоначчи в виде $F_N = \frac{\left(\tau^{N+1} - (-1)\tau^{N+1}\ \tau^{-(N+1)}\right)}{\sqrt{5}}$, где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \tau = (1+\sqrt{5})/2$. Покажем, что при больших значениях k справедливо асимптотическое представление $F_N = \frac{\tau^{N+1}}{\sqrt{5}} + O\left(\frac{1}{\tau^{N+1}}\right)$.

Будем выбирать x следующим образом:

$$x = \lim_{N\to\infty}\left(a + \frac{F_{N-2}}{F_N}(b-a)\right).$$

Вычислим предел $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{F_{N-2}}{F_N}\right)$, если

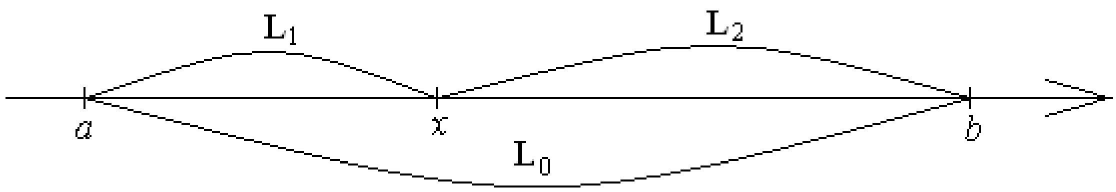
$$F_N = \frac{\tau^{N+1}}{\sqrt{5}} + O\left(\frac{1}{\tau^{N+1}}\right),$$

$$F_{N-2} = \frac{\tau^{N-1}}{\sqrt{5}} + O\left(\frac{1}{\tau^{N-1}}\right).$$

Тогда имеем

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{F_{N-2}}{F_N}\right) = \tau^2 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}381966.$$

Определение. Деление отрезка $[a,\ b]$ точкой x на две неравные части так, что отношение длины большего отрезка $[a,\ x]$ к длине всего отрезка $[a,\ b]$ равно отношению длины меньшего отрезка $[x,\ b]$ к длине большего $[a,\ x]$ отрезка называется *золотым сечением отрезка* $[a,\ b]$ (рис. 4).



$$\frac{L_0}{L_2} = \frac{L_2}{L_1}$$

Рис. 4. Деление отрезка $[a,\ b]$ точкой x в отношении золотого сечения

Рассмотрим отрезок $[a,\ b]$, где $a=0$, $b=1$, $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}381966$, $y=1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}618034$. Непосредственной подстановкой легко показать, что точки x и y – точки золотого сечения. Следовательно,

$$\text{при } N\to\infty \qquad \frac{F_{N-2}}{F_N}\to\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$x=a+\frac{F_{N-2}}{F_N}(b-a)\to x_{\text{точке золотого сечения}}.$$

Задача 1. Показать, что если $x<\frac{(a+b)}{2}$, то $x=a+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a)$ – точка золотого сечения.

Задача 2. Показать, что на этом же отрезке $[a,\ b]$ существует точка y ($y > \frac{(a+b)}{2}$), которая осуществляет золотое сечение отрезка $[a,\ b]$, причем $y = a + b - x$.

Задача 3. Показать, что точка x осуществляет золотое сечение отрезка $[a,\ z]$, а точка y – золотое сечение отрезка $[x,\ b]$.

Метод золотого сечения, как и метод Фибоначчи, заключается в последовательном уменьшении отрезка локализации на основании анализа значения функции в двух точках. Причем, в отличие от метода дихотомии, в методах Фибоначчи и золотого сечения на первой итерации требуются два вычисления значения функции, а на каждой последующей – по одному (рис. 5). Условия окончания стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности становится меньше удвоенной заданной точности. Отличие методов состоит в правиле выбора двух внутренних точек, в которых вычисляется значение функции.

5.2. АЛГОРИТМ МЕТОДА ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Алгоритм метода золотого сечения совпадает с алгоритмом метода Фибоначчи за исключением того, что в качестве внутренних точек выбираются точки золотого сечения.

Пусть заданы количество шагов N, точность вычислений ε и отрезок локализации $[a_0,\ b_0]$.

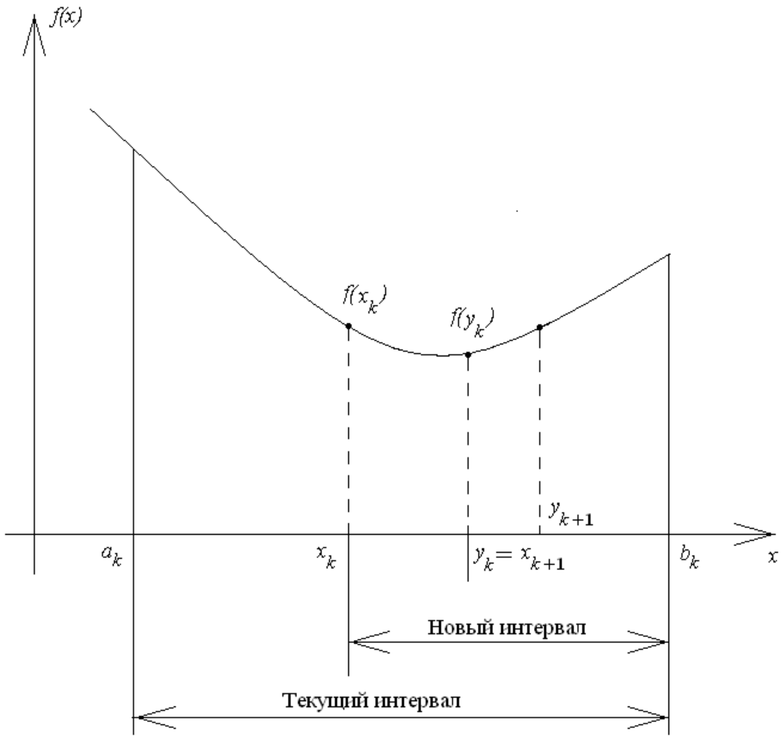


Рис. 5. Схема выбора нового отрезка локализации
методом золотого сечения

В методе золотого сечения на первом шаге выбор точек осуществляется по формулам расчета точек золотого сечения отрезка $[a_0,\ b_0]$:

$$x_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0);$$

$$y_0 = a_0 + b_0 - x_0.$$

Затем вычисляем значения функции $f(x_0)$ и $f(y_0)$ и сравниваем их. Если $f(x_0) < f(y_0)$, то точка минимума $x^* \in [a_0,\ y_0]$ и $a_1 = a_0$, $b_1 = y_0$. Если $f(x_0) \geq f(y_0)$, то $x^* \in [x_0,\ b_0]$ и $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$.

В итоге в любом случае мы получаем отрезок $[a_1,\ b_1]$, который обладает следующими свойствами:

1) $x^* \in [a_1,\ b_1]$;

2) $b_1 - a_1 = y_0 - a_0 = b_0 - x_0 = b_0 - a_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) =$

$$=(b_0-a_0)\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=(b_0-a_0)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);$$

3) новый отрезок локализации $[a_1,\ b_1]$, помимо точки минимума x^*, содержит одну из найденных точек x_0 или y_0.

Идея метода золотого сечения, как и метода Фибоначчи, заключается в том, чтобы использовать эту внутреннюю точку с уже вычисленным значением функции. Тогда количество вычислений функции сократится вдвое и одна итерация потребует расчета только одного нового значения функции.

Пусть в результате первого шага мы получили новый отрезок локализации $[a_1,\ b_1]$, который содержит, например, точку x_0 – точку золотого сечения отрезка $[a_1,\ b_1]$. Тогда на втором шаге полагаем $y_1=x_0$, а точку x_1 находим как вторую точку золотого сечения этого же отрезка, симметричную относительно середины отрезка точке y_1, по формуле $x_1=a_1+b_1-y_0$. Затем вычисляем значения функции $f(x_1)$ и $f(y_1)$ и сравниваем их. Если $f(x_1)<f(y_1)$, то точка минимума $x^*\in[a_1,\ y_1]$ и $a_2=a_1,\ b_2=y_1$. Если $f(x_1)\geq f(y_1)$, то $x^*\in[x_1,\ b_1]$ и $a_2=x_1,\ b_2=b_1$. И так далее.

В общем случае для нахождения отрезка $[a_{i+1},\ b_{i+1}]$ необходима проверка следующих условий:

– если $f(x_i)<f(y_i)$, то точка минимума $x^*\in[a_i,\ y_i]$ и

$$a_{i+1}=a_i,$$

$$b_{i+1}=y_i,$$

$$y_{i+1}=x_i,$$

$$x_{i+1}=a_{i+1}+b_{i+1}-y_{i+1};$$

– если $f(x_i)>f(y_i)$, то точка минимума $x^*\in[b_i,\ x_i]$ и

$$a_{i+1}=x_i,$$

$$b_{i+1}=b_i,$$

$$x_{i+1} = y_i ,$$
$$y_{i+1} = a_{i+1} + b_{i+1} - x_{i+1} .$$

Условием окончания является выполнение условия $|b_{i+1} - a_{i+1}| \le 2\varepsilon$, т.е. длина текущего интервала неопределенности становится меньше удвоенной заданной точности и $x^* \in [a_{i+1},\ b_{i+1}]$.

В качестве приближенного решения можно взять $x^*_{прибл} = \dfrac{a_{i+1} + b_{i+1}}{2}$.

На рис. 6 приведена блок-схема алгоритма расчета минимума функции одного переменного методом золотого сечения.

5.3. Сходимость

Для метода золотого сечения характеристика относительного уменьшения начального интервала неопределенности находится по формуле $R(N) = \left(1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{N-1}$, где N – количество вычислений функции.

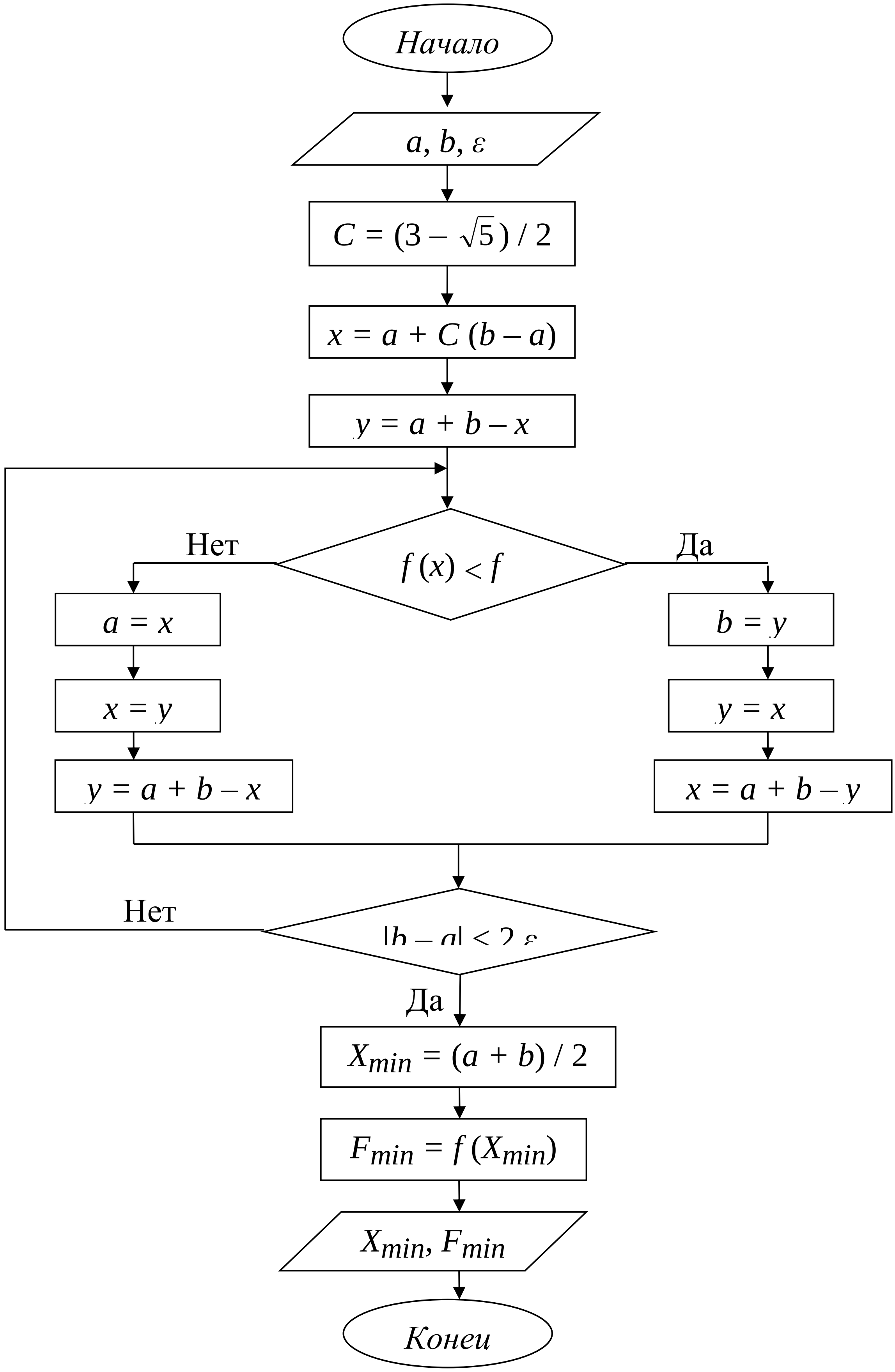


Рис. 6. Блок-схема алгоритма расчета минимума функции одного переменного методом золотого сечения

Пример 4. Найти минимум функции $f(x) = x^2 - 2x + 3$ методом золотого сечения.

Решение. Предположим, что начальный отрезок локализации известен, например, отрезок $[-3, 7]$. Если начальный отрезок локализации неизвестен, то находим его с помощью алгоритма Свенна.

1. Зададим $\varepsilon = 0{,}5$.

2. Вычислим

$$x_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = -3 + 0{,}382 \cdot (7 - (-3)) = 0{,}8197,$$

$$f(x_0) = 2{,}0325;$$

$$y_0 = a_0 + b_0 - x_0 = -3 + 7 - 0{,}8197 = 3{,}1803,$$

$$f(y_0) = 6{,}7539.$$

3. Сравним $f(x_0)$ и $f(y_0)$. Так как $f(x_0) < f(y_0)$, то по свойствам унимодальной функции следует $a_1 = a_0 = -3$, $b_1 = y_0 = 3{,}1803$.

4. Поскольку длина нового отрезка локализации $|a_1,\ b_1| > 2\varepsilon$, а именно $|b_1 - a_1| = |3{,}1803 - (-3)| = 6{,}1803 > 1$, то продолжаем вычисления.

5. Вычислим

$$y_1 = x_0 = 0{,}8197,$$

$$f(y_1) = 2{,}0325;$$

$$x_1 = a_1 + b_1 - y_1 = -3 + 3{,}1803 - 0{,}8197 = -0{,}6393,$$

$$f(x_1) = 4{,}6874.$$

6. Сравним $f(x_1)$ и $f(y_1)$. Так как $f(x_1) > f(y_1)$, то по свойствам унимодальной функции следует $a_2 = x_1 = -0{,}6393$, $b_2 = b_1 = 3{,}1803$.

7. Поскольку длина нового отрезка локализации $|a_2,\ b_2| > 2\varepsilon$, а именно $|b_2 - a_2| = |3{,}1803 - (-0{,}6393)| = 3{,}81966 > 1$, то продолжаем вычисления.

8. Вычислим

$x_2 = y_1 = 0{,}8197$,

$f(x_2) = 2{,}0325$;

$y_2 = a_2 + b_2 - x_2 = -0{,}6393 + 3{,}1803 - 0{,}8197 = 1{,}7217$,

$f(y_2) = 2{,}52036$.

9. Сравним $f(x_2)$ и $f(y_2)$. Так как $f(x_2) < f(y_2)$, то по свойствам унимодальной функции следует $a_3 = a_2 = -0{,}6393$, $b_3 = y_2 = 1{,}7217$.

10. Поскольку длина нового отрезка локализации $|a_3,\ b_3| > 2\varepsilon$, а именно $|b_3 - a_3| = |1{,}7217 - (-0{,}6393)| = 2{,}3607 > 1$, то продолжаем вычисления.

11. Вычислим

$y_3 = x_2 = 0{,}8197$,

$f(y_3) = 2{,}0325$;

$x_3 = a_3 + b_3 - y_3 = -0{,}6393 + 1{,}7217 - 0{,}8197 = 0{,}2624$,

$f(x_3) = 2{,}5441$.

12. Сравним $f(x_3)$ и $f(y_3)$. Так как $f(x_3) > f(y_3)$, то по свойствам унимодальной функции следует $a_4 = x_3 = 0{,}2624$, $b_4 = b_3 = 1{,}7217$.

13. Поскольку длина нового отрезка локализации $|a_4,\ b_4| > 2\varepsilon$, а именно $|b_4 - a_4| = |1{,}7217 - 0{,}2624| = 1{,}4590 > 1$, то продолжаем вычисления.

14. Вычислим

$x_4 = y_3 = 0{,}8197$,

$f(x_4) = 2{,}0325;$

$y_4 = a_4 + b_4 - x_4 = 0{,}2624 + 1{,}7217 - 0{,}8197 = 1{,}1641,$

$f(y_4) = 2{,}0270.$

15. Сравним $f(x_4)$ и $f(y_4)$. Так как $f(x_4) > f(y_4)$, то по свойствам унимодальной функции следует $a_5 = x_4 = 0{,}8197$, $b_4 = b_3 = 1{,}7217$.

16. Длина нового отрезка локализации $|a_5,\ b_5| < 2\varepsilon$, а именно $|b_5 - a_5| = |1{,}7217 - 0{,}8197| = 0{,}9017 < 1$, значит, мы достигли заданной точности и найденный отрезок локализации $[a_5,\ b_5]$ содержит точку минимума x^*.

17. Выбираем $x^* = \dfrac{a_5 + b_5}{2} = \dfrac{1{,}7217 + 0{,}8197}{2} = 1{,}2705.$

Замечание. $R(N)\big|_{N=6} = \left(1 - \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^5 = \dfrac{|b_5 - a_5|}{|b_0 - a_0|} = 0{,}09017.$

6. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ

6.1. Достоинства

1) Метод дихотомии численно устойчив, а также прост для программирования.

2) Как видно из приведенных выше примеров, метод Фибоначчи в сравнении с остальными методами дает при одном и том же заданном количестве вычислений функции наименьший отрезок локализации. Для примера рассмотрим характеристики относительного уменьшения отрезка локализации для методов Фибоначчи $R_F(N) = \frac{1}{F_N}$ и золотого сечения $R_Z(N) = \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{N-1}$ (так как на каждой итерации для данных методов требуется одно вычисление функции). Тогда с учетом $F_N = \frac{\tau^{N+1}}{\sqrt{5}} + O\left(\frac{1}{\tau^{N+1}}\right)$ и $\tau = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ имеем:

$$\frac{R_F(N)}{R_Z(N)} = \frac{1}{F_N} \div \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{N-1} = \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{N+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \approx 0{,}854102 \cdot$$

3) Метод золотого сечения прост для программирования и будет численно устойчив, если после некоторого числа шагов k предусмотреть возможные повторные вычисления $x_k = a_k + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_k - a_k)$.

6.2. Недостатки

1) К недостаткам метода дихотомии относится то, что на каждой итерации необходимо вычислять два значения функции $f(x_k)$ и $f(y_k)$, тогда как в методах Фибоначчи и золотого сечения только одно – $f(x_k)$ или $f(y_k)$, другое же значение функции берется с предыдущего шага. Таким образом, для нахождения минимума требуется большее по сравнению с остальными методами количество вычислений функции.

2) Метод Фибоначчи численно неустойчив, так как ошибки округления быстро накапливаются. Поэтому для численной реализации нахождения минимума он не применяется, а используется для определения наименьшего отрезка локализации при заданном количестве вычислений функции.

3) Метод золотого сечения дает отрезок локализации, длина которого больше соответствующего отрезка метода Фибоначчи примерно на 15%.

Указанные недостатки преодолеваются использованием комбинирования методов золотого сечения и последовательной параболической интерполяции, изложенной в книге Форсайта Дж. Именно данный метод минимизации функции одной переменной используется во многих ППП, например, в Matlab.