PMP Homework "Bayesian Inference"

Ovidiu Rata 3A3

November 2024

a)

Formula lui Bayes pentru probabilitati conditionate este:

$$P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Rezultatul pe care dorim sa-l obtinem este $P(B|T = pozitiv)$.
Astfel, obtinem:

$$P(B|T = pozitiv) = \frac{P(T = pozitiv, B)}{P(T = pozitiv)}$$

$$P(T = pozitiv) = P(T = pozitiv, B) + P(T = pozitiv, \neg B)$$

Calculam urmatoarele probabilitati comune:

$$P(\neg B) = 1 - 0.01 = 0.99$$

$$P(T = pozitiv, B) = P(T = pozitiv|B) \cdot P(B) = 0.95 \cdot 0.01 = 0.0095$$

$$P(T = pozitiv|\neg B) = 1 - P(T = negativ|\neg B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$P(T = pozitiv, \neg B) = P(T = pozitiv|\neg B) \cdot P(\neg B) = 0.99 \cdot 0.1 = 0.099$$

$$P(T = pozitiv) = 0.0095 + 0.099 = 0.1085$$

Astfel, rezultatul este:

$$P(B|T = pozitiv) = \frac{P(T = pozitiv, B)}{P(T = pozitiv)} = \frac{0.0095}{0.1085} \approx 0.08756$$

b)

$$P(T = pozitiv) = P(T = pozitiv, B) + P(T = pozitiv|\neg B) \cdot P(\neg B)$$

$$= P(T = pozitiv, B) + P(\neg B) - P(T = negativ|\neg B) \cdot P(\neg B)$$

$$= 0.0095 + 0.99 - P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99 = 0.9995 - P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99$$

$$P(B|T = pozitiv) = \frac{P(T = pozitiv, B)}{P(T = pozitiv)} = \frac{0.0095}{0.9995 - P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99}$$

$$P(B|T = pozitiv) \geq 0.5$$

$$\frac{0.0095}{0.9995 - P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99} \geq 0.5$$

$$\frac{0.0095}{0.5} \geq 0.9995 - P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99$$

$$P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99 \geq 0.9995 - \frac{0.0095}{0.5}$$

$$P(T = negativ|\neg B) \cdot 0.99 \geq 0.9995 - 0.019 = 0.9805$$

$$P(T = negativ|\neg B) \geq \frac{0.9805}{0.99}$$

$$P(T = negativ|\neg B) \geq 0.9904$$

Pentru ca $P(B|T = pozitiv)$ sa fie cel putin 0.5, specificitatea trebuie sa fie minim 0.9904.