次

内容

１．線形代数

１．１　固有値分解１

　　　５２
　Ａ＝ ２８　　対称行列の固有値分解
　公式Ａ－λＩ＝０より固有値を求める

１）固有値

　5-λ 2
　2 8-λ=(5-λ)(8-λ)-2*2=40-13*λ+λ*λ-4=λ*λ-13*λ+36=0
　13∓√(169-4*1*36)　　　13∓√25
　2*1　　　　　= 2　　　=9,4

２）固有ベクトル

　5 2 x1　x1
　2 8 x2=9*x2

5*x1+2*x2=9*x1	-4*x1+2*x2=0	-2*x1+x2=0	x1=1/2*x2	1
2*x1+8*x2=9*x2	2*x1-x2=0		x1=1/2*x2	1/2

　5 2 x1　x1
　2 8 x2=4*x2

5*x1+2*x2=4*x1	x1+2*x2=0	x1=-2*x2	1
2*x1+8*x2=4*x2	2*x1+4*x2=0	x1=-2*x2	-2

　9　0
D= 0　4

■一般にｎ次正方行列Ａに対して Av＝λv を満たすようなスカラーλを固有値、非零ベクトルを固有ベクトルという。
■固有値λは、Ａの固有方程式 det(λ-A)=0 の解となっている。
■Ａの固有値λ1,.....,λn を対角成分に持つ対角行列

$$D=\begin{pmatrix} \lambda 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda n \end{pmatrix}$$

と、対応する固有ベクトルを列として並べた行列

　　P=(v1,....,vn)

に対いて、$A=PDP^{-1}$ が成立する。これを行列Ａの「固有値分解」、又は「対角比」と呼ぶ。
さらにＡが対称行列であるとき、対応する大きさ１の固有ベクトルを列として並べた行列Ｐは直行行列（$P^{-1}=P^T$）になるため、$A=PDP^T$ が成立する。

１．２　固有値分解２

　　0 0 1
A＝ 0 0 -1　　対称行列の固有値分解
　　1 -1 1

公式A－λＩ＝0より固有値を求める

１）固有値

-λ 0 1
0 -λ -1　　　-λ -1　　0 1　　0 1
1 -1 1-λ =-λ* -1 1-λ -0* -1 1-λ +1* -λ 1 =-λ*((-λ+λ*λ)-(1))+1*(λ)=-λ*(λ*λ-λ-1)+λ
=-λ*λ*λ+λ*λ+2*λ=0
λ*λ*λ-λ*λ-2*λ=0
λ(λ*λ-λ-2)=λ((λ+1)(λ-2))=0
λ=-1,0,2

0 0 1　x1　　x1
0 0 -1 x2　　x2
1 -1 1 x3=2* x3
X3=2x1　　　　　　x1=1/2*x3　　1
-x3=2x2　　　　　 x2=-1/2*x3　 -1
X1-x2+x3=2x3　　　　　　　　　2

２）固有値λ=2 に対する固有ベクトル v=(1/√6,vy,2/√26)

0 0 1　1/√6　　　　1/√6
0 0 -1 vy　　＝　　2 vy
1 -1 1 2/√6　　　　2/√6

2/√6　　　　　　　2/√6
-2/√6　　　＝　　 2vy　　　　　2vy=-2/√6　vy=-1/√6
1/√6-vy+2/√6　　　4/√6

■３次正方行列の行列式は

　　a11 a12 a13
det a21 a22 a23 =a11a22a33+a12a23a31+a13a21a32-a11a23a32-a12a21a33-a13a22a31
　　a31 a32 a33

これをサラスの公式

■高次方程式の解には因数分解を用いる。一般に高次方程式 f(x)=0 が x=α を解に持つとき、f(x)は x-α を因数に持つ。

１．３　固有値分解３

　　１２
Ａ＝ ２１　　対称行列の固有値分解

１）固有値

1-λ　2
2 1-λ=(1-λ)(1-λ)-4=1-λ-λ+λ*λ-4=0
λ*λ-2*λ-3=(2∓√4-4*1*(-3))/2=(2∓√16)/2=3,-1

固有値ベクトル

１２	x1	x1		
２１	x2=	3*x2		
X1+2x2=3x1	2x1=2x2		x1=x2	1
2x1+x2=3x2	2x1=2x2			1
１２	x1	x1		
２１	x2=	-1*x2		
X1+2x2=-x1	x1=-3x2			1
2x1+x2=-x2	x1=-x2			1

１．４　特異値分解１

行列

　１０１
Ａ＝-１１０

を特異値分解し A=UΣV^T の形で表す

AA^T ＝	１０１	1 -1=	1+0+1	-1+0+0=	2 -1
	-１１０	0 1	-1+0+0	1+1+0	-1 2
		1 0			

１）固有値分解

2 -1　2-λ　-1
-1 2=　-1 2-λ= (2-λ)(2-λ)-1=4-2λ-2λ+λ*λ-1=λ*λ-4λ+3
λ=(4∓√(16-4*3))/2=3,1
特異値は√3,√1

■任意の零行列でない m×n 行列 A に対して、Av=σu,A^Tu=σv を満たすような正の数σを特異値、m 次元ベクトル u を左特異ベクトル、n 次元ベクトル v を右特異ベクトルと呼ぶ。

また、定義式から AA^Tu=$σ^2$ u,A^TAv=$σ^2$ v が得られるので、行列 AA^Tと A^TA の固有値ベクトルを求めることで、行列 A の特異値・(左右) 特異ベクトルを知ることができる。

このようにして求められた特異値を大きい順に(i,j)で成分に並べ、その他の成分を 0 で埋めた m×n 行列Σと、左特異ベクトルを列として横に並べた m 次正方行列 U、右特異ベクトルを列として横に並べた n 次正方行列 V を用いて A=UΣV^Tと書ける。これを A の特異値分解と呼ぶ。なお特異値を降順に並べることにすると、Σは一意に定まるが U 及び V は
一意に定まらない。

１．５　特異値分解２

行列

　　1 0 0

A＝0 1 2

を特異値分解し $A=U\Sigma V^T$ の形で表す

AA^T =　1 0 0　　1 0=　　1+0+0　0　　　=1 0

　　　　0 1 2　　0 1　　0　　　0+1+4　0 5

　　　　　　　　0 2

１）固有値分解

1-λ　0

0　　5-λ=(1-λ)(5-λ)=0　　　λ=1,5

特異値は 1,√5

２）固有値ベクトル

1 0　x1　　x1

0 5　x2=　5*x2

X1=5*x1

5*x2=5*x2

1 0　x1　　x1

0 5　x2=　1*x2

X1=1*x1

5*x2=1*x2

３）

A の特異値はσ=1,√5 なので、これを降順に並べれば

Σ=√5 0 0

　0　0 1

U の第一列は AA^T の固有値 5 に対応する固有ベクトル $u=(ux,uy)^T$ のうち、大きさが 1 のもの

1 0　ux　　　ux

0 5　uy　　5 uy

ux=5ux　　　ux=0,uy は任意の実数

5uy=5uy

V の各列は A^TA の固有ベクトルだが、これらは正規直行性を満たす必要がある。

v1=(0,1/√5,2/√5),v3=(0,-2/√5,vz)と置けばそれらの直交性から $v1^Tv3=0$ になる。

0*0+1/√5*-2/√5+2/√5*vz=0

Vz=1/√5

１．６　L1 ノルム、L2 ノルム

１）Ｌ１ノルム

$$x\ 1 = \sum_{i=1}^{n} |xi|$$

２）Ｌ２ノルム

$$x\ 2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} xi(2)}$$

３）最大値ノルム

$$x\ \infty = \max_{I} |xi|$$

１．７　距離

４）マンハッタン距離

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |xi-yi|$$

５）ユークリッド距離

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (xi-yi)2\text{乗}}$$

６）マハラノビス距離

$$D(x,y) = \sqrt{\Sigma(x-y)T\Sigma\text{-}1\text{乗}(x-y)}$$

７）ハミング距離

情報理論において等しい文字数を持つ２つの文字列に対して用いられる距離。対応する位置にある異なった文字の個数によって定義する。