目　次

内容

１．　線形代数学（行列）

1）固有値・固有ベクトルの求め方を確認する。

2）固有値分解について理解を深める。

3）特異値・特異ベクトルの概要を知る。

4）特異値分解の概要を知る。

１．１　スカラーとベクトルの違い

1）スカラー

　普通の数字

　四則演算ができるもの

2）ベクトル

　大きさ、向きを表すために用いられる。

　数字の組み合わせ

１．２　行列

スカラーを表のようにしてまとめたもの

1）ベクトルの変換

１．３　連立１次方程式

ｘ１＋２ｘ２＝３

ｘ１、ｘ２：未知のもの

関係性はわかる。下記直線の上の値だけを取りうる。

ｘ２＝－１／２ｘ１＋３／２

ｘ２＝－２／５ｘ１＋１

１．４　連立１次方程式を行列で表す（ａｘ＝ｂ）

ｘ１＋２ｘ２＝３　　　　　　　　Ａｘ＝ｂ

２ｘ１＋５ｘ２＝５

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

１．５　行列の積

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6*1+4*2 \\ 3*1+5*2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \\ b31 & b32 & b33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a11*b11+a12*b21+a13*b31 \\ a21*b11+a22*b21+a23*b31 \\ a31*b11+a32*b21+a33*b31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1+1*3 & 2*3+1*1 \\ 4*1+1*3 & 4*3+1*1 \end{pmatrix}$$

１．６　連立方程式の解き方

下限法

ｘ１＋４ｘ２＝７

２ｘ１＋６ｘ２＝１０

1）２行目を１／２する

$x_1 + 4x_2 = 7$

$x_1 + 3x_2 = 5$

２）１行目に２行目の－１倍を加える

$x_2 = 2$

$x_1 + 3x_2 = 5$

３）２行目に１行目の－３倍を加える

$x_2 = 2$

$x_1 = -1$

４）１行目と２行目を入れ替える

$x_1 = -1$

$x_2 = 2$

注）必要な技術（行基本変形）

①．ｉ行目をｃ倍する

②．ｓ行目にｔ行目のｃ倍を加える

③．ｐ行目とｑ行目を入れ替える。

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

１．７　手順自体も計算として表現する方法

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 10\end{pmatrix}$$

２行目を１／２倍する

$$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{matrix}\quad\begin{matrix}7\\ 10\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}7\\ 5\end{matrix}$$

１行目に２行目の－１倍を加える

$$\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix}$$

１	－１	１	４	x １	１	－１	７
０	１	１	３	x ２	０	１	５

０	１	x １	２
１	３	x ２	５

２行目に１行目の－３倍を加える

１	０
－３	１

１	０	０	１	x １	１	０	２
－３	１	１	３	x ２	－３	１	５

０	１	x １	２
１	０	x ２	－１

１行目に２行目を入れ替える

０	１
１	０

０	１	０	１	x １	０	１	２
１	０	１	０	x ２	１	０	－１

１	０	x １	－１
０	１	x ２	２

１）ｉ行目をｃ倍する

０ ０ ０ ０ ０

１ ０ ０ ０ ０ ０
０ １ ０ ０ ０ ０
０ ０ ｃ ０ ０ ０　　ｉ行目
０ ０ ０ １ ０ ０
０ ０ ０ ０ １ ０

２）ｓ行目にｔ行目のｃ倍を加える

１ ｃ ０ ０ ０ ０
０ １ ０ ０ ０ ０
０ ０ １ ０ ０ ０
０ ０ ０ １ ０ ０
０ ０ ０ ０ １ ０

３）ｐ行目とｑ行目を入れ替える

１ ０ ０ ０ ０ ０
０ １ ０ ０ ０ ０
０ ０ ０ ０ １ ０

０１００００
００００１０

１．８　行列の逆数

1　4	x 1	7
2　6	x 2	１０

0　1	1　　0	1　－1	1　0	1　4	x 1
1　0	－3　1	0　1	0　1／2	2　6	x 2

－3　2	1　4	x 1	＝	－3　2	7
1　　－1／2	2　6	x 2		1　　－1／2	１０

1　0	x 1	＝	－3　2	7
0　1	x 2		1　　－1／2	１０
単位行列			逆行列	

１．８　単位行列と逆数

1）単位行列

	1	0	0
I＝	0	1	0
	0	0	1

2）逆行列

A（A－1）＝（A－1）A＝I

１．９　逆行列の求め方

1　4	x 1	7
2　6	x 2	１０

左右同じ形にする

1　4	x 1	1　0	7
2　6	x 2	0　1	１０

1　4	1　0
2　6	0　1

２行目を１／２倍する

1　4	1　0
1　3	0　1／2

１行目に２行目の－１倍を加える

０	１	１	－１／２
１	３	０	１／２

２行目に１行目の－３倍を加える

０	１	１	－１／２
１	０	－３	２

１行目と２行目を入れ替える

１	０	－３	２
０	１	１	－１／２

逆行列

■ガウスの掃出し法

１．１０　問題（逆行列）

４	７	１	０
１	２	０	１

２行目の－４倍を１行目に加える

０	－１	１	－４
１	２	０	１

１行目の２倍を２行目に加える

０	－１	１	－４
１	０	２	－７

１行目を－１倍する

０	１	－１	４
１	０	２	－７

２行目と１行目を入れ替える

１	０	２	－７
０	１	－１	４

１．１１　逆行列が存在しない条件

解が無い連立方程式

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

ａ：ｂ　≠　ｃ：ｄ

ａ：ｂ　＝　ｃ：ｄ　　　　　　逆行列を持たない

ａｄ－ｂｃ＝０

平行四辺形の面積が０となる

１．１２　行列式の特徴

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} = \begin{matrix} v1 \\ v2 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v1 \\ v2 \end{vmatrix}$$

１）同じものを含んでいる場合０となる

$$\begin{vmatrix} v1 \\ v2 \\ w \\ v4 \\ : \\ w \\ : \\ vn \end{vmatrix} = 0$$

２）１つのベクトルがλ倍されると、行列式はλ倍される

$$\begin{vmatrix} v1 \\ v2 \\ : \\ : \\ \lambda vi \\ : \\ : \\ vn \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} v1 \\ v2 \\ : \\ vi \\ : \\ : \\ : \\ vn \end{vmatrix}$$

３）他の部分が全部同じでｉ番目のベクトルだけが違った場合、行列式の足し合わせになる。

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_i + w \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$$

４）行を入れ替えると符号が変わる

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \\ v_t \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \\ v_s \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}$$

①．同じものがあったら０になる。

②．他が同じで、１つだけ足したものは行列の足し合わせになる。

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \\ v_t \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \\ v_s \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s + v_t \\ v_t + v_s \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} = 0$$

５）３つ以上のベクトルからできている行列式は、展開できる。

ｖ１＝（ａ、ｂ、ｃ）

ｖ２＝（ｄ、ｅ、ｆ）

ｖ３＝（ｇ、ｈ、ｉ）

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

１．１３　行列式の求め方

ある一つの正方行列に、ある一つの数値が対応する。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a22 & a23 \end{vmatrix}$$

１．１４　問題

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix} = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1*(1)-3*(-1)+2*(1)=6$$

２．線形代数学（固有値）

２．１　固有値と固有ベクトル

　Ａｘ＝λｘ

　行列とベクトルをかけると、同じベクトル×スカラになる。

１　４　１　　　５　　　　　１
２　３　１＝　　５＝　　５＊１

固有値λ＝５

　　　　　　　　　　　　　　１
固有値ベクトル（うちの一つ）１　特定の比率になっている（定数倍）

２．２　固有値と固有ベクトルの求め方

　Ａｘ＝λｘ

　（Ａ－λＩ）ｘ＝０（Ａとλはベクトルとスカラは引き算できない）

|Ａ－λＩ|＝０　　行列が０（逆行列を持たない）

|１－λ　４
２　　３－λ|＝（(１－λ）＊（３－λ)）－４＊２＝０

１＊３＋（－λ）＋（－３λ）＋λ＊λ－８＝０

λ＊λ－４λ－５＝０

二次方程式の解

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b*b-4ac}}{2a}$$

（４∓√１６＋２０）／２＝４∓６／２＝５、－１

１）固有値５の時

１　４　ｘ１　　ｘ１
２　３　ｘ２＝５ｘ２

１ｘ１＋４ｘ２＝５ｘ１―――＞４ｘ２＝４ｘ１―――＞ｘ１＝ｘ２　　　１
２ｘ１＋３ｘ２＝５ｘ２―――＞２ｘ１＝２ｘ２　　　　　　　　　　　１

２）固有値－１の時

１　４　ｘ１　　　ｘ１
２　３　ｘ２＝－１ｘ２

１ｘ１＋４ｘ２＝－ｘ１―――＞４ｘ２＝－２ｘ１―――＞ｘ１＝－２ｘ２　　１
２ｘ１＋３ｘ２＝－ｘ２―――＞２ｘ１＝－４ｘ２　　　　　　　　　　　-1/2

２．３　固有値と固有ベクトルの求め方（問題）

3 2 0
0 2 0 の固有値、固有ベクトルの求め方
0 0 1

Ａｘ＝λｘ　（Ａｘ－λｘ）＝０

$$\begin{vmatrix} 3-λ & 2 & 0 \\ 0 & 2-λ & 0 \\ 0 & 0 & 1-λ \end{vmatrix} \longrightarrow (3-λ)*\begin{vmatrix} 2-λ & 0 \\ 0 & 1-λ \end{vmatrix} =(3-λ)(2-λ)(1-λ)=0 \quad λ＝３，２，１$$

１）固有値＝３

3 2 0	x1	x1
0 2 0	x2 =	3*x2
0 0 1	x3	x3

3*x1+2*x2	=3*x1	2*x2=0	・x2=0
2*x2	=3*x2	2*x2-3*x2=0	・x2=0
X3	=3*x3	x3-3*x3=0	・x3=0

X1 は全然わからない。－＞X1 は好きな数が入る　　1
0
0

２）固有値＝２

3 2 0	x1	x1
0 2 0	x2 =	2*x2
0 0 1	x3	x3

3*x1+2*x2	=2*x1	x1+2*x2=0	x1=-2x2
2*x2	=2*x2		
x3	=2*x3	x3=0	

X1 は全然わからない。－＞X1 は好きな数が入る　　1
-1/2
0

３）固有値＝１

3 2 0	x1	x1
0 2 0	x2 =	1*x2
0 0 1	x3	x3

3*x1+2*x2	=1*x1	2*x1+2*x2=0	x1=x2
2*x2	=1*x2	x2=0	
x3	=1*x3	x3=x3	

X1 は全然わからない。－＞X1 は好きな数が入る　　0
0
1

X3 はわからない（好きな数が入る）から１にする。

２．４　固有値分解

固有値はｎ＊ｎの場合ｎ個存在する

ＡＶ＝ＶＡ

Ａ＝ＶＡＶinver

１４

２３

固有値５、－１	固有ベクトル	1	1	逆行列	1/3 2/3
		1	-1/2		2/3 -2/3

1 4	1 1	5 0	1/3 2/3
2 3=	1 -1/2	0 -1	2/3 -2/3

２．５　固有値分解・問題

2 1

0 6

１）固有値・固有値ベクトル

Ａ－λＩ＝0

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(2-λ)(6-λ)-1*0=(2-λ)(6-λ)=0　　固有値２，６

2 1	x1	x1	
0 6	x2=	2*x2	
2*x1+x2=2*x1	x2=0		1
6*x2=2*x2			0
2 1	x1	x1	
0 6	x2=	6*x2	
2*x1+x2=6*x1	x2=4x1		1
6*x2=6*x2			4

２）逆行列

1 1	1 0
0 4	0 1

2 行目を－１／4 して１行目に加算する

1 0	1 -1/4
0 4	0 1

２行目を１／４する

1 0	1 -1/4
0 1	0 1/4

固有値分解

2 1	1 1	2 0	1 -1/4
0 6=	0 4	0 6	0 1/4

２．６　特異値分解

正方行列以外の固有値分解

Ｍｖ＝σｕ

M(T)ｕ＝σｖ

このような特殊な単位ベクトルがあるならば特異値分解できる。

Ｍ＝ＵＳＶ(T)　　　　　U,V は直行行列

２．７　特異値の求め方

ＭＶ＝ＵＳ　　　M(T)Ｕ＝ＶＳ(T)

Ｍ＝ＵＳＶ(T)　　M(T)＝ＶＳ(T)Ｕ(T)

積は

MM(T)＝ＵＳＶ(T)ＶＳ(T)Ｕ(T)＝ＵＳＳ(T)Ｕ(T)

２．８　特異値の求め方（具体例）

１）

1 2 3		1 2 3	1 3	1+4+9	3+4+3	14 10
M=3 2 1	MM(T)=	3 2 1	2 2=	3+4+3	9+4+1=	10 14
			3 1			

14 10

10 14 の固有値分解

①．固有値と固有値ベクトル

14-λ　10

10　　14-λ=0　　　　(14-λ)(14-λ)-10*10=0　　λ*λ-28λ+196-100=0　　λ=24,4

14 10　x1　　　x1

10 14　x2=　　24*x2

14*x1+10*x2=24*x1　　10*x1=10*x2　　x1=x2　　　　1

10*x1+14*x2=24*x2　　10*x1=10*x2　　　　　　　　1

14 10　x1　　　x1

10 14　x2=　　4*x2

14*x1+10*x2=4*x1　　10*x1=-10*x2　　x1=-x2　　　1

10*x1+14*x2=4*x2　　10*x1=-10*x2　　　　　　　-1

②．固有値分解

14 10　　1/√2 -1/√2　　24 0　　1/√2 -1/√2(T)

10 14=　1/√2 -1/√2　　0　4　　1/√2 -1/√2

　　1 にするため√2 にしている

２）

1 2 3　　　　　　　　　　1 3　　　1 2 3　　1+9 2+6 3+3　　10 8 6

M=3 2 1　　　　M(T)M= 2 2　　　3 2 1=　2+6 4+4 6+2=　　8　8 8

　　　　　　　　　　　　3 1　　　　　　　3+3 6+2 9+1　　6　8 10

①. 固有値・固有値ベクトル

10 8 6　　　　　　10-λ　8 6

8　8 8　　　　　　8 8-λ　8　　　　　8-λ　8　　8 6　　　8 6

8　8 10=　　　　8 8 10-λ=(10-λ)* 8 10-λ-8*8 10-λ+8*8-λ　8

=(10-λ)((8-λ)(10-λ)-8*8)-8*(8*(10-λ)-6*8)+8*(8*8-6*(8-λ))

=(10-λ)((80-18λ+λ*λ)-64)-8*(80-8*λ-48)+8*(64-48+6*λ)

=(10-λ)(λ*λ-18*λ+16)-8*(8*λ+32)+8*(6*λ+16)

=(10*λ*λ-180*λ+160-λ*λ*λ+18*λ*λ-16*λ)-64*λ-256+48*λ+128

=-λ*λ*λ+28*λ*λ-212*λ+32

３）特異値分解

1 2 3　1/√2 -1/√2　　√24 0 0　　　　1/√3 1/√3　1/√3

M= 3 2 1= 1/√2 1/√2=　0 √4 0=　　　1/√2　0　　-1/√2

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1/√6 -2/√6　1/√6