

Algorytmy ewolucyjne

Piotr Lipiński

Zadanie podziału obiektów na kategorie

- Danych jest n obiektów. Każdemu obiektyowi należy przypisać jedną z k kategorii, w taki sposób, aby osiągnąć jak największą wartość funkcji celu (oceniającej cały podział n obiektów na k kategorii).
 - Przykładowe zastosowania:
 - grupowanie danych,
 - kolorowanie grafów,
 - pakowania kontenerów.
 - Podstawowe problemy:
 - Jak reprezentować dane?
 - Jak zaprojektować operatory ewolucyjne?
 - Podstawowe podejścia:
 - kodowanie grup za pomocą liczb (von Laszewski)
 - kodowanie grup za pomocą separatorów
 - grupujący algorytm genetyczny (Falkenauer)

Kodowanie grup za pomocą liczb (von Laszewski)

- Kodowanie:
 - Osobnik składa się z chromosomu całkowitoliczbowego $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ długości n, którego każda i-ta składowa x_i reprezentuje numer grupy przypisanej i-temu obiektowi.
- Operatory ewolucyjne:
 - krzyżowanie strukturalne (von Laszewskiego)
 - mutacja strukturalna (von Laszewskiego)

Przykład chromosomu

(1 1 2 3 1 1 2 3 2 2 3 3)

Oznacza że:

I grupa	II grupa	III grupa
{1,2,5,6}	{3,7,9,10}	{4,8,11,12}

Krzyżowanie strukturalne

- Mamy dwóch rodziców (z łańcuchami 12 elementowymi):

$$P1 = (1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3)$$

$$P2 = (1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3)$$

Krzyżowanie strukturalne

Te łańcuchy rodziców

$$P1 = (1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3)$$

$$P2 = (1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3)$$

dekodujemy na następujące podziały:

$$P1: \{1,2,5,6\} \ \{3,7,9,10\} \ \{4,8,11,12\}$$

$$P2: \{1,2,4,7\} \ \{3,5,8,9\} \ \{6,10,11,12\}$$

Krzyżowanie strukturalne

P1: {1,2,5,6} {3,7,9,10} {4,8,11,12}

P2: {1,2,4,7} {3,5,8,9} {6,10,11,12}

Losowo wybieramy grupę i kopujemy elementy, pozostałe grupy przepisujemy

P3: {1,2,4,7} {3,5,7,8,9,10} {6,10,11,12}

Krzyżowanie strukturalne

P3: {1,2,4,7} {3,5,7,8,9,10} {6,10,11,12}

Z pozostałych grup usuwamy elementy powtarzające się:

P3: {1,2,4} {3,5,7,8,9,10} {6,11,12}

Otrzymujemy taki łańcuch:

P3 = (1 1 2 1 2 3 2 2 2 3 3)

Krzyżowanie strukturalne

P1: {1,2,5,6} {3,7,9,10} {4,8,11,12}

P2: {1,2,4,7} {3,**5**,**8**,9} {6,10,11,12}

P3: {1,2,4} {3,**5**,**7**,**8**,9,10} {6,11,12}

P3 = (1 1 2 1 **2** 3 **2** 2 2 3 3)

Można zastosować dodatkowo mechanizm przywracający poprzednią liczność grup:

Elementy, które nie zostały skopiowane

wymazujemy z łańcucha w tym przypadku są to

elementy „5” i „8”:

P3 = (1 1 2 1 * 3 2 * 2 2 3 3)

Krzyżowanie strukturalne

P3 = (1 1 2 1 * 3 2 * 2 2 3 3)

Miejsce gwiazdek zamieniamy (losowo) na liczby
dwóch innych podziałów (czyli w naszym przypa-
dku jest to element „7” z grupy „1” oraz ele-
ment „10” z grupy 3 u drugiego rodzica, czyli
w miejsce gwiazdek wstawiamy losowo numery
grup „1” i „3”) ⇒

P3 = (1 1 2 1 **3** 3 2 **1** 2 2 3 3)

Mutacja strukturalna

- Wybieramy losowo dwa obiekty np. 4 i 6 i zamieniamy je miejscami

$$P = (1 \ 1 \ 2 \ \underline{1} \ 3 \ \underline{2} \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3)$$

$$P' = (1 \ 1 \ 2 \ \underline{3} \ 3 \ \underline{1} \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3)$$

Rozwiążanie

- kodowanie grup za pomocą liczb
(von Laszewski)
- kodowanie za pomocą separatorów
- grupujący algorytm genetyczny (Falkenauer)

Kodowanie za pomocą separatorów

- Chromosom długości $n+k-1$ $\{i_1, i_2, \dots, i_{n+k-1}\}$
- Liczby całkowite z zakresu $\{1, \dots, n\}$ reprezentują obiekty
- Liczby całkowite z zakresu $\{n+1, \dots, n+k-1\}$ reprezentują separatory
- Krzyżowanie
 - z częściowym dopasowaniem (PMX)
 - z uporządkowaniem (OX)
- Mutacja losowa (dwóch obiektów)

Przykład chromosomu

Dla tak określonego osobnika:

I grupa	II grupa	III grupa
$\{1,2\}$	$\{3,4,5\}$	$\{6,7\}$

chromosom reprezentujemy jako łańcuch:

(1 2 8 3 4 5 9 6 7)

gdzie „8” i „9” są separatorami

Krzyżowanie

- Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)
- Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

Krzyżowanie

- Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)
- Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

(PMX)

- Zaproponowane przez Goldberga i Lingle'a
- Idea: wybiera losową grupę od jednego rodzica i pozostawia porządek i pozycje tak wielu elementów drugiego rodzica, jak tylko jest to możliwe

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

(PMX)

- Mamy dwa łańcuchy 11-elementowe, gdzie liczby 10 i 11 są separatorami:
 $P1 = (1 \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 8 \ 9)$
 $P2 = (4 \ 5 \ 2 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$
- Losowo wybieramy numer grupy i kopujemy elementy do potomków (P1->O2, P2->O1):
 $O1 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ \textcolor{brown}{1} \ \textcolor{brown}{8} \ \textcolor{brown}{7} \ \textcolor{brown}{6} \ \underline{11} \ x \ x)$
 $O2 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ \textcolor{brown}{4} \ \textcolor{brown}{5} \ \textcolor{brown}{6} \ \textcolor{brown}{7} \ \underline{11} \ x \ x)$

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)

$$O1 = (x \ x \ x \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \underline{11} \ x \ x)$$

$$O2 = (x \ x \ x \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \underline{11} \ x \ x)$$

Ta wymiana określa ciąg odwzorowań:

1-4, 8-5, 7-6, 6-7

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)

$$O1 = (x \ x \ x \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \underline{11} \ x \ x)$$

$$O2 = (x \ x \ x \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \underline{11} \ x \ x)$$

- Do pozostałych grup dokładamy te elementy które nie powodują konfliktu:

$$O1 = (x \ 2 \ 3 \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \underline{11} \ x \ 9)$$

$$O2 = (x \ x \ 2 \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \underline{11} \ 9 \ 3)$$

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

(PMX)

Jakie elementy powodują konflikt ?

$$O1 = (x \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ 9)$$

$$P1 = (\textcolor{brown}{1} \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ \textcolor{brown}{8} \ 9)$$

$$O2 = (x \ x \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

$$P2 = (\textcolor{brown}{4} \ \textcolor{brown}{5} \ 2 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem

(PMX)

- Na koniec korzystając z odwzorowania uzupełniamy grupy pozostałymi obiektami:

Odwzorowanie: 1-4, 8-5, 7-6, 6-7

$$O1 = (x \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ 9)$$

$$P1 = (\textcolor{brown}{1} \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ \textcolor{brown}{8} \ 9) + \{1-4, 8-5\}$$

$$O1 = (4 \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 5 \ 9)$$

$$O2 = (x \ x \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

$$P2 = (\textcolor{brown}{4} \ \textcolor{brown}{5} \ 2 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 9 \ 3) + \{1-4, 8-5\}$$

$$O2 = (1 \ 8 \ 2 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$$

Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)

- Krzyżowanie PMX wykorzystuje jednocześnie ważne podobieństwa w wartościach i uporządkowaniu

Piotr Lipiński, Wykład z algorytmów ewolucyjnych

23

Krzyżowanie

- Krzyżowanie z częściowym dopasowaniem (PMX)
- Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

Piotr Lipiński, Wykład z algorytmów ewolucyjnych

24

Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Zaproponowane przez Davisa
- Idea: wybiera losową grupę od jednego rodzica i pozostawia wzajemne uporządkowanie elementów z drugiego rodzica

Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Mamy dwóch rodziców:
 $P1 = (1 \ 2 \ 3 \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ 8 \ 9)$
 $P2 = (4 \ 5 \ 2 \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ 9 \ 3)$
- Losujemy grupę, która będziemy dziedziczyć (np. grupę 2):
 $O1 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ \underline{11} \ x \ x)$
 $O2 = (x \ x \ x \ \underline{10} \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ \underline{11} \ x \ x)$

Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Bierzemy ciąg elementów z drugiego rodzica (oprócz separatorów) – ciąg zaczynamy od grupy występującej po wybranej grupie
 - $O1 = (x \ x \ x \ 10 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 11 \ x \ x)$
 - $P2 = (4 \ 5 \ 2 \ 10 \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ 11 \ 9 \ 3)$
 - 9-3-4-5-2-1-8-7-6
- Wykreślamy te elementy które tworzą konflikt
 - 9-3-2-1-8

Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Mając dany ciąg uzupełniamy puste miejsca w nowym osobniku zaczynając od pustych miejsc w grupie występującej zaraz po wylosowanej grupie
 - 9-3-2-1-8
 - $O1 = (x \ x \ x \ 10 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 11 \ x \ x)$
 - $O1 = (2 \ 1 \ 8 \ 10 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 11 \ 9 \ 3)$
- Podobnie postępujemy z drugim osobnikiem
 - $O1 = (2 \ 1 \ 8 \ 10 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 11 \ 9 \ 3)$
 - $O2 = (3 \ 4 \ 5 \ 10 \ 1 \ 8 \ 7 \ 6 \ 11 \ 9 \ 2)$

Krzyżowanie z uporządkowaniem (OX)

- Krzyżowanie OX korzysta z tego, że ważna jest kolejność występowania elementów w ciągu po sobie, a nie ich pozycja w ciągu
- Ciągi 9-3-4-5-2-1-8-7-6 i
4-5-2-1-8-7-6-9-3 są jednakowe

Mutacja

- W mutacji wymieniamy losowo wybrane dwa geny (elementy) w chromosomie nie wyłączając separatorów np.:
 $P = (1 \ 2 \ \underline{3} \ 10 \ 4 \ 5 \ \underline{6} \ 7 \ \underline{11} \ 8 \ 9)$
 $O = (1 \ 2 \ \underline{6} \ 10 \ 4 \ 5 \ \underline{3} \ 7 \ \underline{11} \ 8 \ 9)$

Rozwiążanie

- kodowanie grup za pomocą liczb
(von Laszewski)
- kodowanie za pomocą separatorów
- grupujący algorytm genetyczny (Falkenauer)

Grupujący algorytm genetyczny

- Zaproponowany przez Falkenauera
- Chromosom składa się z dwóch części:
 - części obiektowej
 - części grupowej
- Część obiektowa – łańcuch całkowitoliczbowy n-wymiarowy (i_1, i_2, \dots, i_n), gdzie j- ta liczba całkowita
 $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$ wskazuje grupę przyporządkowaną obiektowi j
- Część grupowa – łańcuch liczb całkowitoliczbowych reprezentujące poszczególne grupy
- Operatory genetyczne (krzyżowanie i mutacja) pracują na części grupowej.

Przykład chromosomu

Dla tak określonego osobnika:

I grupa	II grupa	III grupa
{1,3,7,8}	{2,9}	{4,5,6}

chromosom :

$$(1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 \ 2 \ 3)$$

gdzie 1,2,3 oznaczają numery grup

Operator krzyżowania

- Rodzice:

$$P1 = (1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 \ 2 \ 3)$$

$$P2 = (2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 2 \ 6 : 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)$$

- Wybieramy losowo dwa punkty cięcia w każdej części grupowej:

$$P1 = (1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 | 2 \ 3 |)$$

$$P2 = (2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 2 \ 6 : 2 | 3 \ 4 | 5 \ 6)$$

Operator krzyżowania

- Następnie zawartość wyciętej części pierwszego rodzica wstawimy w miejsce cięcia u drugiego rodzica

$$P1 = (1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 | 2 \ 3 |)$$

$$P2 = (2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 2 \ 6 : 2 | 3 \ 4 | 5 \ 6)$$

$$0 = (\dots : 2_2 \ 2_1 \ 3_1 \ 3_2 \ 4_2 \ 5_2 \ 6_2)$$

indeksy oznaczają od którego rodzica pochodzi grupa

Operator krzyżowania

$$P1 = (1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 | 2 \ 3 |)$$

$$P2 = (2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 2 \ 6 : 2 | 3 \ 4 | 5 \ 6)$$

$$0 = (\dots : 2_2 \ 2_1 \ 3_1 \ 3_2 \ 4_2 \ 5_2 \ 6_2)$$

- Zawartość grup :

grupa 2_2 {1,7,8}

grupa 2_1 {2,9}

grupa 3_1 {4,5,6}

grupa 3_2 {2,3}

grupa 4_2 {6}

grupa 5_2 {4}

grupa 6_2 {5,9}

Operator krzyżowania

- Usuwamy z listy grup stare grupy, które powodują konflikt, czyli te z indeksem „2” które zawierają elementy znajdujące się w grupie z indeksem „1”

grupa 2₂ {1,7,8}
grupa 2₁ {2,9}
grupa 3₁ {4,5,6}
grupa 3₂ {2,3}
grupa 4₂ {6}
grupa 5₂ {4}
grupa 6₂ {5,9}

Kolorem zaznaczono grupy które nie zostaną usunięte

Operator krzyżowania

- Na podstawie grup, które nie zostały usunięte tworzony jest chromosom potomka, czyli z grup:

grupa 2₂ {1,7,8}
grupa 2₁ {2,9}
grupa 3₁ {4,5,6}

Otrzymamy osobnika:

$$O = (2_2 2_1 ? 3_1 3_1 3_1 2_2 2_2 2_1 : 2_2 2_1 3_1)$$

gdzie znak zapytania oznacza, że dany element nie został przydzielony do żadnej grupy

- Po zmianie nazw grup otrzymujemy:
 $O = (1 2 ? 3 3 3 1 1 2 : 1 2 3)$

Operator krzyżowania

$$O = (1 \ 2 \ ? \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 \ 2 \ 3)$$

- Element 3 nie został przyporządkowany do żadnej z grup, w związku z tym tworzymy dodatkową grupę i przypisujemy do niej element 3

$$O = (1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 2 : 1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

- Podobnie postępujemy tworząc drugiego potomka

Operator mutacji

- Wybieramy i eliminujemy (losowo) kilka grup
- Obiekty bez przydziału ponownie umieszczamy w grupach w sposób losowy:

$$P = (1 \ 2 \ 2 \ 4 \ 5 \ 3 \ 1 \ 1 \ 5 : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$$

$$P' = (1 \ ? \ ? \ ? \ ? \ 3 \ 1 \ 1 \ ? : 1 \ ? \ 3 \ ? \ ?)$$

$$O = (1 \ 4 \ 5 \ 4 \ 6 \ 3 \ 1 \ 1 \ 6 : 1 \ 4 \ 3 \ 5 \ 6)$$