Zadanie nr 2 RPIS

Piotr Pijanowski

6 maja 2025

1 Treść zadania

1. Niech n oznacza cyfrę dziesiątek indeksu powiększoną o 1, a m – cyfrę jedności powiększoną o 1.
2. Rozpatrujemy trójkąt o wierzchołkach: $(0, 0)$, $(n, 0)$, (n, m).
3. Na tym trójkącie zmienna (X, Y) ma stałą gęstość, tzn. $f(x, y) = C$.
4. Wyznaczyć gęstość zmiennej $T = X + 2Y$.
5. Preferowane rozwiązanie to LaTeX. Może być inne narzędzie (Markdown, długopis), pod warunkiem, że przesłane rozwiązanie zawarte będzie w pliku `Z2_<indeks>.pdf`.

2 Wprowadzenie

Mój numer indeksu to 346952, więc zgodnie z treścią zadania przyjmujemy:

$$n = 6 \quad \text{(cyfra dziesiątek + 1)}, \qquad m = 3 \quad \text{(cyfra jedności + 1)}.$$

Rozpatrujemy trójkąt o wierzchołkach:

$$(0, 0), \quad (6, 0), \quad (6, 3),$$

wynikający z wartości n i m.

Zmienna losowa (X, Y) ma stałą gęstość na tym trójkącie, czyli:

$$f(x, y) = C,$$

gdzie C jest stałą do wyznaczenia tak, aby $f(x, y)$ była poprawną funkcją gęstości.

Następnie dokonamy podstawienia:

$$T = X + 2Y, \qquad X = X,$$

czyli przejdziemy do nowych zmiennych (T, X).

Wyliczymy wyznacznik Jacobiego dla tej transformacji, wyznaczymy nowe granice całkowania oraz na tej podstawie obliczymy marginalną gęstość zmiennej T, czyli $f_T(t)$.

3 Wyznaczenie stałej C

Aby funkcja $f(x,y)$ była poprawną funkcją gęstości, całka po całym nośniku musi być równa 1, czyli:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

W naszym przypadku zmienna (X,Y) jest rozłożona jednostajnie na trójkącie o wierzchołkach $(0,0)$, $(6,0)$, $(6,3)$, a poza tym obszarem gęstość wynosi 0. Ponieważ funkcja $f(x,y)$ przyjmuje stałą wartość C na tym trójkącie, możemy zapisać:

$$\int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{1}{2}x} C\,dy\,dx = 1.$$

Obliczamy całkę:

$$\int_0^6 [Cy]_0^{\frac{1}{2}x}\,dx = \int_0^6 C\cdot\frac{1}{2}x\,dx = C\cdot\frac{1}{2}\int_0^6 x\,dx = C\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = C\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{36}{2} = 9C.$$

Zatem:

$$9C = 1 \quad\Rightarrow\quad C = \frac{1}{9}.$$

Ostatecznie:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} & \text{dla } (x,y) \text{ należących do trójkąta,} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

4 Podstawienie nowych zmiennych i wyznaczenie Jacobianu

Wprowadzamy nowe zmienne:

$$T = X + 2Y, \qquad X = X$$

Zmienna X pozostaje bez zmian (dla zapisu), a zmienna T jest kombinacją liniową X i Y.

Aby przeprowadzić zmianę zmiennych, zapisujemy przekształcenie odwrotne:

$$X = X, \qquad Y = \frac{T-X}{2}$$

Następnie obliczamy wyznacznik Jacobianu tej transformacji. Tworzymy macierz pochodnych cząstkowych:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Wyznacznik Jacobianu wynosi:

$$|J| = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Wartość bezwzględna tego wyznacznika wynosi $|\det J| = \frac{1}{2}$, co będzie potrzebne przy zmianie zmiennych w gęstości.

5 Wyznaczenie $f_T(t)$, czyli gęstości zmiennej T

(a) Związek gęstości

Ponieważ gęstość $f(x,y) = \frac{1}{9}$, a po dokonaniu podstawienia zmiennych $T = X + 2Y$, $X = X$, wiemy, że:

$$g(x,t) = f\left(x, y = \frac{t-x}{2}\right) \cdot |\det J| = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

czyli nowa gęstość $g(x,t)$ w układzie (x,t) wynosi:

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \text{jeśli } (x, y = \frac{t-x}{2}) \text{ należy do trójkąta,} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

(b) Dziedzina zmiennej T

Aby wyznaczyć dziedzinę zmiennej T, zauważmy, że:

$$T = X + 2Y, \quad \text{gdzie } X \in [0,6],\ Y \in \left[0, \frac{1}{2}X\right]$$

Obliczamy skrajne możliwe wartości T:

- Minimalna wartość: $X = 0,\ Y = 0 \Rightarrow T = 0$
- Maksymalna wartość: $X = 6,\ Y = 3 \Rightarrow T = 6 + 2 \cdot 3 = 12$

Zatem:

$$T \in [0, 12]$$

(c) Warunki ograniczające zmienne

Oryginalnie:

$$X \in [0,6], \quad Y \in [0,3]$$

Po podstawieniu $Y = \frac{t-x}{2}$, musimy zapewnić:

$$0 \leq \frac{t-x}{2} \leq \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad x \leq t \leq 2x$$

Przekształcamy do przedziału dla x:

$$\frac{t}{2} \leq x \leq t$$

Dodatkowo $x \in [0,6]$, więc ostatecznie:

$$x \in \left[\max\left(\frac{t}{2}, 0\right), \min(t,6)\right]$$

—

(d) Wyznaczenie $f_T(t)$ przez całkowanie

Aby wyznaczyć gęstość $f_T(t)$, całkujemy $g(x,t)$ po dopuszczalnych wartościach x:

$$f_T(t) = \int_{\frac{t}{2}}^{\min(t,6)} \frac{1}{18}\, dx$$

Zatem:

- Dla $t \in [0,6]$:

$$f_T(t) = \int_{\frac{t}{2}}^{t} \frac{1}{18}\, dx = \frac{1}{18} \cdot \left(t - \frac{t}{2}\right) = \frac{t}{36}$$

- Dla $t \in [6,12]$:

$$f_T(t) = \int_{\frac{t}{2}}^{6} \frac{1}{18}\, dx = \frac{1}{18} \cdot \left(6 - \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{t}{36}$$

(e) Sprawdzenie, czy $f_T(t)$ jest funkcją gęstości

Sprawdzamy, czy całkowita całka z funkcji $f_T(t)$ na jej nośniku jest równa 1:

$$\int_0^{12} f_T(t)\, dt = \int_0^6 \frac{t}{36}\, dt + \int_6^{12} \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{36}\right) dt$$

Obliczamy pierwszą całkę:

$$\int_0^6 \frac{t}{36}\,dt = \frac{1}{36}\int_0^6 t\,dt = \frac{1}{36}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^6 = \frac{1}{36}\cdot\frac{36}{2} = \frac{1}{36}\cdot 18 = \frac{1}{2}$$

Obliczamy drugą całkę:

$$\int_6^{12}\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{36}\right)dt = \int_6^{12}\frac{1}{3}\,dt - \int_6^{12}\frac{t}{36}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}(12-6) - \frac{1}{36}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_6^{12} = 2-\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{144}{2}-\frac{36}{2}\right) = 2-\frac{1}{36}\cdot(72-18) = 2-\frac{1}{36}\cdot 54 = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$\int_0^{12} f_T(t)\,dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Funkcja $f_T(t)$ spełnia więc warunki funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

6 Ostateczny wynik: gęstość zmiennej T

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{t}{36} & \text{dla } t \in [0,6] \\ \frac{1}{3}-\frac{t}{36} & \text{dla } t \in [6,12] \\ 0 & \text{poza przedziałem } [0,12] \end{cases}$$