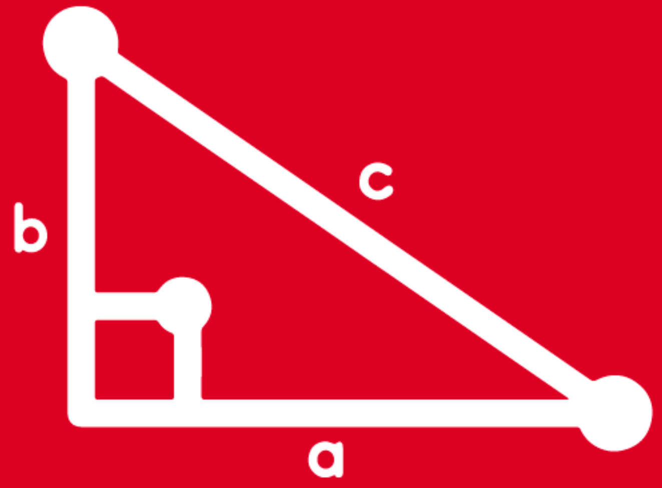
TRIGONOMETRY

Chapter 10
Sesión 2



4th
SECONDARY

Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal II

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

EVOLUCIÓN DE LOS SIGNOS MATEMÁTICOS

Para la suma lo representaban → p → plus

Para la resta lo representaban → m → minus

Para la suma lo representaban → +

Para la resta lo representaban → -

JOHANN WIDMAN

LIBRO DE ARITMETICA COMERCIAL(1489)

72

4 + 5 Wilt du das wyſ-
4 — 17 ſen oder deßgley-
3 + 30 chen/So ſumier
4 — 19 die zentner vnd
3 + 44 lb vnnd was auß
3 + 22 — iſt/das iſt mi-
Zentner 3 — 11 lb nus dz ſetz beſon-
3 + 50 der vnnd werden
4 — 16 4539 lb (So
3 + 44 du die zendtner
3 + 29 zů lb gemachett
3 — 12 haſt vnnd das /
3 + 9 + das iſt meer
darzů Addiereſt)vnd 75 minus. Nun
ſolt du für holtz abſchlahen allweeg für
ain legel 24 lb. Vnd das iſt 13 mal 24.
vnd macht 312 lb darzů addier das —
das iſt 75 lb vnd werden 387. Dye ſub-
trahier von 4539. Vnd bleyben 4152
lb. Nun ſprich 100 lb das iſt ein zentner
pro 4 fl $\frac{1}{8}$ wie kummen 4152 lb vnd kumē
171 fl 5 ß 4 heller $\frac{4}{5}$ Vñ iſt recht gmacht

Pfeffer

B

Signos de las Razones Trigonométricas

Regla práctica:

Y

IIC	**IC**
sen, csc } (+)	Todas las RT son (+)
IIIC	**IVC**
tan, cot } (+)	cos, sec } (+)

X

OBSERVACIÓN

Si $0° < \alpha < 90°$ ➡ $\alpha \in$ IC

Si $90° < \alpha < 180°$ ➡ $\alpha \in$ IIC

Si $180° < \alpha < 270°$ ➡ $\alpha \in$ IIIC

Si $270° < \alpha < 360°$ ➡ $\alpha \in$ IVC

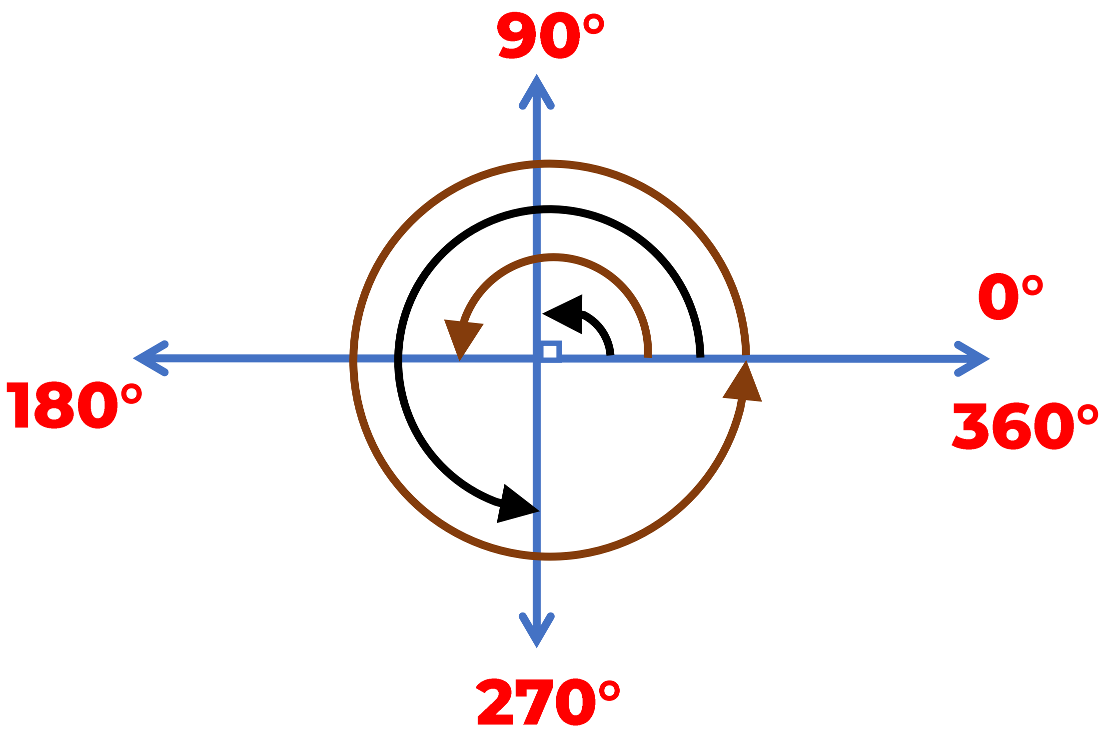
EJEMPLOS:

$\operatorname{sen}\Phi > 0$ y $\cos\Phi < 0 \Rightarrow \Phi \in$ IIC

$\tan\beta > 0$ y $\csc\beta < 0 \Rightarrow \beta \in$ IIIC

Ángulos Cuadrantales

Son ángulos en posición normal cuyo lado final coincide con alguno de los semiejes del plano cartesiano.



$90°n$	$\frac{\pi . n}{2}\mathrm{rad}$

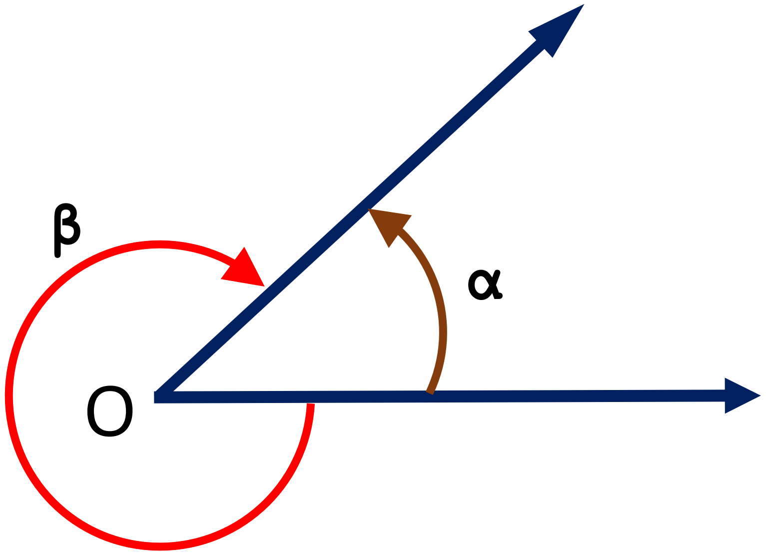
$n \in \mathbb{Z}$

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
SEN	0	1	0	-1
COS	1	0	-1	0
TAN	0	N.D	0	N.D
COT	N.D	0	N.D	0
SEC	1	N.D	-1	N.D
CSC	N.D	1	N.D	-1

N.D : No determinado

Ángulos coterminales

Son aquellos ángulos trigonométricos que al ser superpuestos presentan los mismos elementos (vértice, lado inicial y lado final).



α y β son ángulos coterminales

Propiedades

- $\alpha - \beta = 360°k\ ,\ \forall\ k \in Z - \{0\}$
- $RT(\alpha) = RT(\beta)$ $\left\{\begin{array}{l} \text{sen}\alpha = \text{sen}\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \tan\beta \\ \cot\alpha = \cot\beta \\ \sec\alpha = \sec\beta \\ \csc\alpha = \csc\beta \end{array}\right.$

1. Determine el valor de θ coterminal a 160°, donde θ∈⟨4100°; 4200°⟩

RESOLUCIÓN

Como θ y 160° son coterminales entonces:

$$\theta - 160° = 360°k \,, \forall\, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\theta = 360°k + \mathbf{160}\,°$$

$$\mathbf{4100°} < \theta < \mathbf{4200°}$$

$$4100° < 360°k + 160° < 4200° \quad \ldots (-160°)$$

$$3940° < 360°k < 4040° \quad \ldots (\div\, 360°)$$

$$10{,}94 < k < 11{,}22 \qquad , k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 11 \Rightarrow \theta = 360°(11) + 160° = \boxed{\mathbf{4120°}}$$

2. Determine el menor ángulo positivo coterminal a –560° de manera gráfica.

RESOLUCIÓN

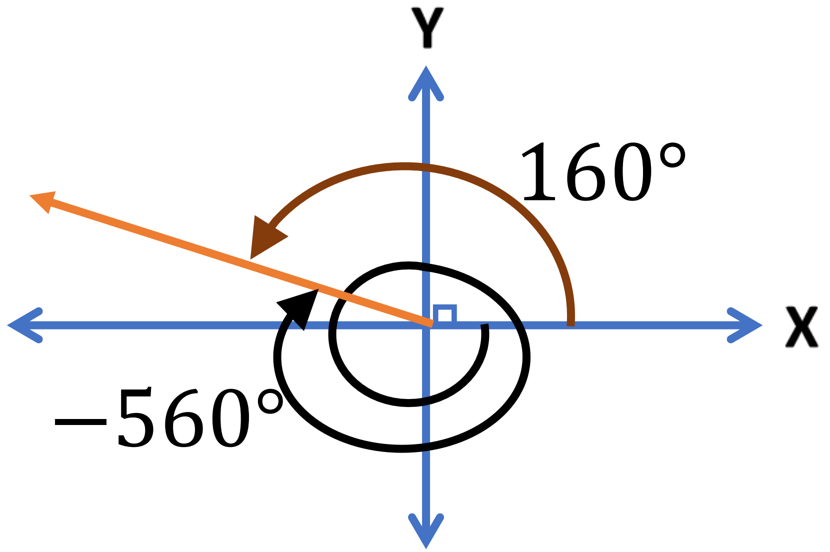
Sea x coterminal a $-560°$,entonces:

$$x-(-560°)=360°k\ ,\forall\ k\in\mathbb{Z}-\{0\}$$

$$x=360°k-560°$$

- Para $k=2$ ➡ $x=360°.(2)-560°$

➡ $\boxed{x=160°}$



3. Si α y 60° son coterminales, efectúe:

$$P = \tan^2\alpha + \sec\alpha - 2\cos\alpha$$

RESOLUCIÓN

Como α y 60° son coterminales entonces:

$$\boldsymbol{RT(\alpha) = RT(60°)}$$

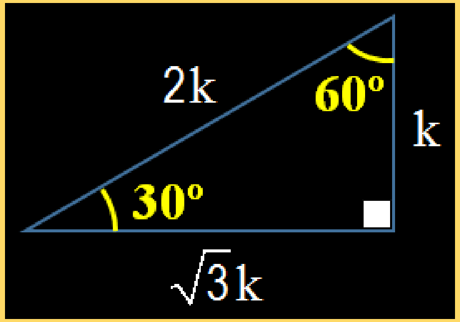
$$P = tan^2 60° + sec60° - 2cos60°$$

$$P = \sqrt{3}^2 + 2 - \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$P = 3 + 2 - 1$$

$$\boxed{\therefore\ P = 4}$$

Recordar:



4. Siendo α y β ángulos coterminales y cosα=$-\frac{1}{3}$; α∈IIC calcule: tanβ.

RESOLUCIÓN

$$cos\alpha = -\frac{1}{3} = \frac{x}{r}$$

Como $\alpha \in IIC$ se tiene que: $x < 0\,;\, y > 0$

Entonces : $x = -1$; r= 3

Luego: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$3 = \sqrt{(-1)^2 + y^2}$$

$$9 = 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2\sqrt{2}$$

Luego : $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2}$

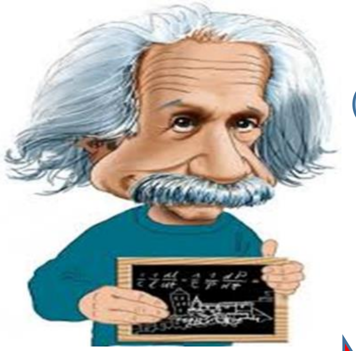
Como α y β son coterminales entonces:

$$\boldsymbol{RT(\alpha) = RT(\beta)}$$

$$\therefore\ tan\beta = -2\sqrt{2}$$

5. Si cotα = 2,4 y α∈IIIC , efectúe: M = cscα + cotα

RESOLUCIÓN



$$cot\alpha = \frac{x}{y}$$

- $\alpha \epsilon IIIC$ ⇒ $x(-); y(-); r(+)$

$$cot\alpha = 2,4 = \frac{\cancel{2}4}{1\cancel{0}} = \frac{-12}{-5} = \frac{x}{y}$$

Luego: $x = -12$; $y = -5$

Radio Vector: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} \Rightarrow r = 13$$

Piden: $M = csc\alpha + cot\alpha$

$$M = \left(\frac{13}{-5}\right) + \left(\frac{-12}{-5}\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{13 - 12}{-5}$$

$$\boxed{\therefore M = -\frac{1}{5}}$$

6. **Si $\cos^2\phi = \frac{3}{8}$, donde $\phi \in IIIC$, efectúe: $G = \sqrt{10}.sen\phi - \sqrt{6}.\cos\phi$**

RESOLUCIÓN

$$\cos^2\phi = \frac{3}{8} \Rightarrow \cos\phi = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

$$\text{Como } \phi \in IIIC:\ \cos\phi = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{x}{r}$$

$$Sabemos: \boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow 8 = 3 + y^2$$

$$\Rightarrow 5 = y^2 \Rightarrow \pm\sqrt{5} = y$$

$$\text{Como } \phi \in IIIC \Rightarrow -\sqrt{5} = y$$

$$Piden: G = \sqrt{10}sen\emptyset - \sqrt{6}cos\emptyset$$

$$G = \sqrt{10}.\left(\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\right) - \sqrt{6}.\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\right)$$

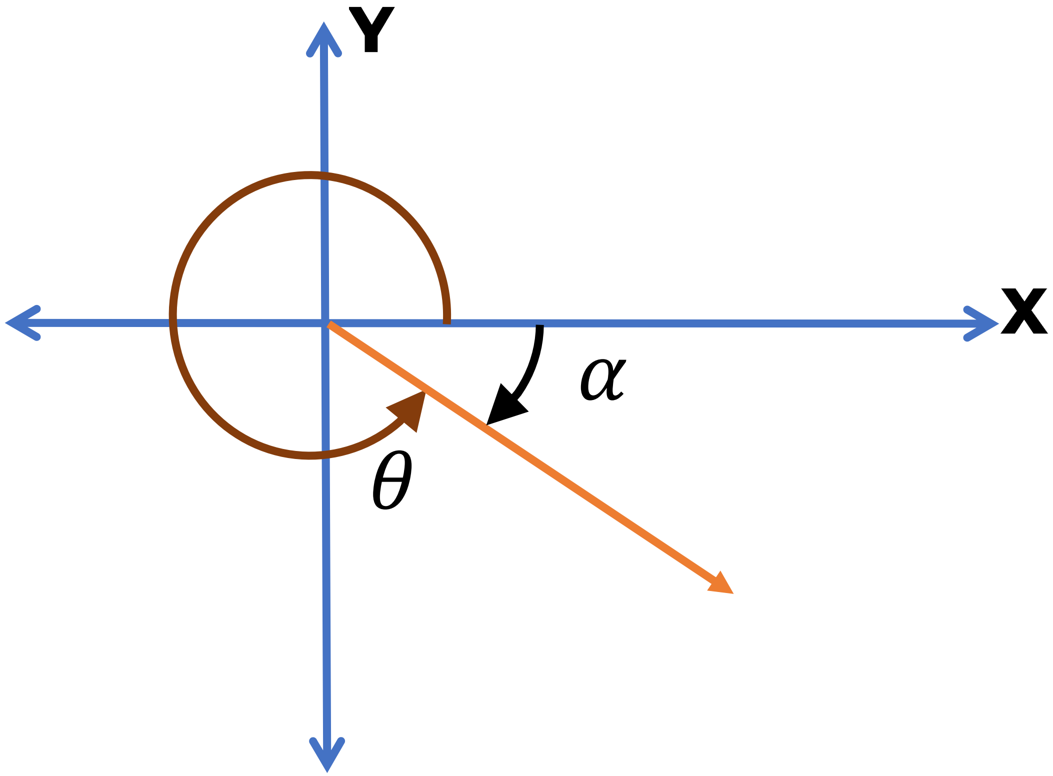
$$G = \left(\frac{-\sqrt{50}}{\sqrt{8}}\right) + \left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}\right)$$

$$G = \left(\frac{-5\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\right) + \left(\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\boxed{\therefore G = -1}$$

7. **De acuerdo al gráfico reduzca:**

$$E = \frac{2tan\alpha.cot\theta + 4sen^2\alpha}{sen\alpha.csc\theta + 2sen^2\theta}$$



RESOLUCIÓN

Si α y θ son ángulos coterminales

- $tan\alpha = tan\theta$
- $sen\alpha = sen\theta$

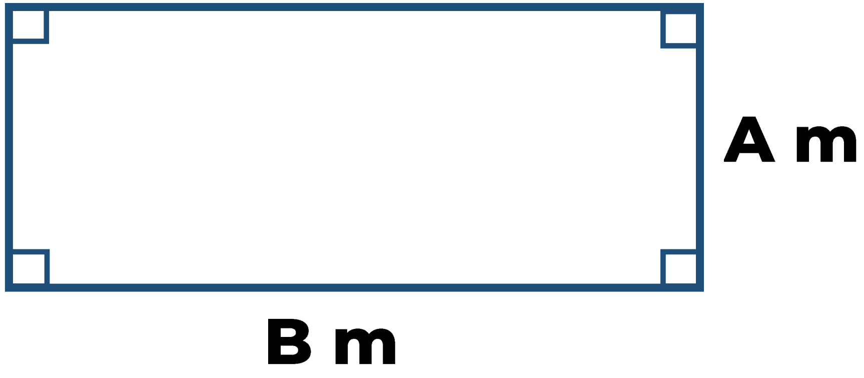
Piden: $E = \dfrac{2tan\alpha.cot\theta + 4sen^2\alpha}{sen\alpha.csc\theta + 2sen^2\theta}$

$$E = \frac{2\cancel{tan\theta.}cot\theta + 4sen^2\theta}{\cancel{sen\theta.}csc\theta + 2sen^2\theta}$$

$$E = \frac{2.1 + 4sen^2\theta}{1 + 2sen^2\theta} = \frac{2\cancel{(1 + 2sen^2\theta)}}{\cancel{1 + 2sen^2\theta}}$$

$$\boxed{\therefore E = 2}$$

8. **Lucas desea cercar su jardín con una malla metálica. Las dimensiones del jardín son las siguientes:**



A = 5sen2α + 3sen6α

B = 3cos8α − sec4α

Si se sabe que α = 45°, ¿cuál es el perímetro del jardín?

RESOLUCIÓN

$$A = 5sen2\alpha + 3sen6\alpha$$

$$A = 5sen2(45°) + 3sen6(45°)$$

$$A = 5sen90° + 3sen270°$$

$$A = 5(1) + 3(-1) = 2$$

$$B = 3cos8\alpha - sec4\alpha$$

$$B = 3cos8(45°) - sec4(45°)$$

$$B = 3cos360° - sec180°$$

$$B = 3(1) - (-1) = 4$$

$$Perímetro: 2p = 2A + 2B$$

$$2p = 2(2) + 2(4)$$

$$\boxed{\therefore\ 2p = 12\ m}$$