



ARITHMETIC

Chapter 7

2th
SECONDARY

DIVISIBILIDAD I



 **SACO OLIVEROS**



¿Qué tan complicado será dividir 99999222177225 entre 9 y dar como resultado el residuo?

Al dividir 2612^{123} entre 13, en 10 segundos podrías obtener el residuo?



1

TEORIA DE DIVISIBILIDAD

Es parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe reunir un numeral para que sea divisible por otro y las consecuencias que se derivan de este hecho.

2

DIVISOR

Un número B es divisor de A, si al dividir A entre B el cociente es un número entero y el residuo es cero.

$$\begin{array}{r} 132 \quad | \quad 11 \\ \underline{132} \quad | \quad 12 \\ 0 \end{array}$$

Luego 11 es divisor de 132.



3

MULTIPLICIDAD

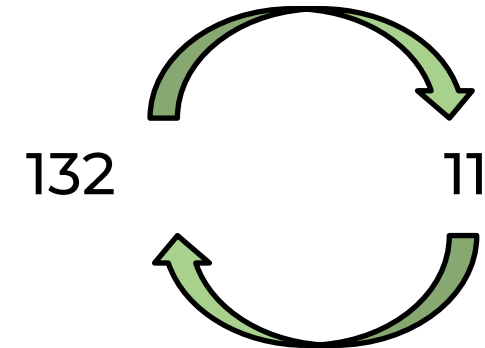
El número entero A es múltiplo de un número entero positivo B , si A es el resultado de multiplicar B por una cantidad entera. Consideremos el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r} 132 \\ 11 \overline{)132} \\ \underline{132} \\ 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad 132 = 11(12)$$

Además:

- 132 es múltiplo de 11
132 es divisible por 11.
 - $0=11(0)$ entonces 0 es múltiplo de 11.
- ¡LA DIVISIBILIDAD Y MULTIPLICIDAD SON CONCEPTOS EQUIVALENTES!**

Es múltiplo de



Es divisor de



4

Notación de múltiplo

Del ejemplo anterior:
132 es múltiplo de 11

Se denota $132 = 11^0$

también $132 = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$

EL CERO ES MÚLTIPLO
DE TODO NÚMERO

Ejemplos:

- ❖ $72 = 8^1$ ya que $72 = 8(9)$
- ❖ $23 = 23^1$ ya que $23 = 23(1)$
- ❖ $-28 = 7^{-4}$ ya que $-28 = 7(-4)$
- ❖ $0 = 9^0$ ya que $0 = 9(0)$

TODO NÚMERO
ENTERO ES MÚLTIPLO
DE SÍ MISMO



5

NÚMEROS NO DIVISIBLES

POR DEFECTO

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{120} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{10} \end{array}$$

$$123 = 12(10) + 3$$

$$123 = 12 + 3$$

POR EXCESO

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{132} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{11} \end{array}$$

$$123 = 12(11) - 9$$

$$123 = 12 - 9$$

$$3 + 9 = 12$$

$$r + r_e = d$$

$$84 = 9 + 3 \quad = 9 - 6$$

$$67 = 8 + 3 \quad = 8 - 5$$

$$77 = 5 + 2 \quad = 5 - 3$$

$$27 = 7 + 6 \quad = 7 - 1$$

$$47 = 4 + 3 \quad = 4 - 1$$



6

OPERACIONES CON MÚLTIPLOS DEL MISMO MÓDULO

Adición: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} \underbrace{14}_{\circ} + \underbrace{28}_{\circ} = \underbrace{42}_{\circ} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \underbrace{7}_{\circ} + \underbrace{7}_{\circ} = \underbrace{7}_{\circ} \end{array}$$

Generalizamos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ n + n = n \end{array}}$$

Sustracción: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} \underbrace{72}_{\circ} - \underbrace{45}_{\circ} = \underbrace{27}_{\circ} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \underbrace{9}_{\circ} - \underbrace{9}_{\circ} = \underbrace{9}_{\circ} \end{array}$$

Generalizamos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ n - n = n \end{array}}$$

Multiplicación: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} \underbrace{15}_{\circ} \times 3 = \underbrace{45}_{\circ} \\ \downarrow \\ \underbrace{5}_{\circ} \times 3 = \underbrace{5}_{\circ} \\ \boxed{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ n \times k = n \end{array}} \end{array}$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

Potenciación: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} 3^4 = 81 \\ \downarrow \\ (\underbrace{3}_{\circ})^4 = \underbrace{3}_{\circ} \end{array}$$

Generalizamos: $\boxed{(\underbrace{\circ}_{n})^k = \underbrace{\circ}_{n}}; k \in \mathbb{Z}^+$



Ejemplo:

$$F = \binom{0}{7+1} \binom{0}{7+3} \binom{0}{7+2}$$

$$F = \binom{0}{7+1} \times 3 \times 2$$

$$F = 7+6$$

C

En conclusión

$$\binom{0}{n+a} \binom{0}{n+b} \binom{0}{n+c} \dots \binom{0}{n+m} = \binom{0}{n+a \cdot b \cdot c \dots m}$$

Ejemplo:

$$\binom{0}{5+3}^3 = \binom{0}{5+3} \binom{0}{5+3} \binom{0}{5+3} = \binom{0}{5+3^3} = \binom{0}{5+2}$$

$$\binom{0}{9+2}^2 = \binom{0}{9+2} \binom{0}{9+2} = \binom{0}{9+2^2} = \binom{0}{9+4}$$

D

En conclusión

$$\binom{0}{n+r}^k = \binom{0}{n+r^k}; k \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

$$\binom{0}{7-1}^4 = \binom{0}{7+1^4} = \binom{0}{7+1}$$

$$\binom{0}{7-1}^3 = \binom{0}{7-1^3} = \binom{0}{7-1}$$

E

En conclusión

$$\binom{0}{n-r}^k = \begin{cases} \binom{0}{n+r^k}; & k: \text{par} \\ \binom{0}{n-r^k}; & k: \text{impar} \end{cases}$$



RESOLUCIÓN

1 Calcule la suma de los 15 primeros múltiplos positivos de 12.

Por dato: $12(1) + 12(2) + 12(3) + 12(4) + \dots + 12(15)$

Factorizamos: $12[1+2+3+4+\dots+15]$

RECORDAR

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$12\left[\frac{15(16)}{2}\right]$$

$$12 \cdot [120]$$

\therefore La suma es 1440



RESOLUCIÓN

2 Se sabe que: $189 = \overset{0}{13} + x$ $150 = \overset{0}{8} - y$ Calcule $(x+y)^2$

$$\begin{array}{rcl}
 189 & = & \overset{0}{13} + x \\
 \underline{182} & & \downarrow \\
 7 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 150 & = & \overset{0}{8} - y \\
 \underline{144} & & \downarrow \\
 6 & &
 \end{array}$$

$\begin{array}{r} \text{L}13 \\ 14 \end{array}$

$\begin{array}{r} \text{L}8 \\ 18 \end{array}$

$$\therefore (x+y)^2 = (7+2)^2 = 81$$



RESOLUCIÓN

3 ¿Cuántos números múltiplos de 8 hay desde 248 hasta 1424?

POR DATO : $248 \leq 8k \leq 1424$

ENTRE 8 : $31 \leq k \leq 178$

Los valores que toma "k":

K: 31, 32, 33, ... 178

Total = $178 - 31 + 1 = 148$

∴ Hay 148 números múltiplo de 8



RESOLUCIÓN

4 Indique la cantidad de números múltiplos de 11 que hay entre 66 y 638.

POR DATO: $66 < 11k < 638$

ENTRE 11: $6 < k < 58$

Los valores que toma "k":

$$K: 7, 8, 9, \dots, 57$$

$$\text{Total} = 57 - 7 + 1 = 51$$

Hay 51 números



RESOLUCIÓN

5 Determine el residuo que se obtiene al dividir “N” entre 5. $N = 4324 + 5289 + 6321$

$$\begin{array}{r} 4324 \\ 32 \\ 24 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{L} \quad 5 \\ 8 \ 6 \ 4 \end{array}$$

$$4324 = \dot{5} + 4$$

$$\begin{array}{r} 5289 \\ 28 \\ 39 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{L} \quad 5 \\ 10 \ 5 \ 7 \end{array}$$

$$5289 = \dot{5} + 4$$

$$\begin{array}{r} 6321 \\ 32 \\ 21 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{L} \quad 5 \\ 12 \ 6 \ 4 \end{array}$$

$$6321 = \dot{5} + 1$$

$$N = \dot{5} + 4 + \dot{5} + 4 + \dot{5} + 1 \quad \Rightarrow \quad N = \dot{5} + 9 \quad \Rightarrow \quad N = \dot{5} + 4$$

El residuo es 4



RESOLUCIÓN

- 6 Sea $P = 2345 \times 2314 + 19$ al dividirlo entre 12 se obtiene a de residuo, calcule el costo de un tablero de ajedrez cuyo precio es $(a - 3)(a + 1)$ soles.

$$\begin{array}{r} 2345 \\ 114 \\ \hline 65 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 195 \end{array}$$

$$2345 = 12 + 5$$

$$\begin{array}{r} 2314 \\ 111 \\ \hline 34 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 192 \end{array}$$

$$2314 = 12 + 10$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 7 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \rightarrow 19 = 12 + 7$$

$$P = (12 + 5)(12 + 10) + 12 + 7$$

$$P = 12 + 57 \rightarrow P = 12 + 9$$

$$a = 9$$

$$\text{Costo} = (9 - 3)(9 + 1)$$

$$\boxed{\text{Costo} = 6 \times 10 = 60 \text{ soles}}$$



RESOLUCIÓN

7

Del 1 al 600 se determina

A: cantidad de números múltiplos de 5

B: cantidad de números múltiplos de 3

Calcule $A + B$

$$A = \frac{600}{5} = 120$$

$$B = \frac{600}{3} = 200$$

$$A + B = 120 + 200$$

$$A + B = 320$$



RESOLUCIÓN

8 Jimmy viajará al extranjero por razones de estudio pero le promete a su esposa que volverá luego de 100 días. Si hoy es el día de su partida y es martes, calcule que día de la semana caerá la fecha de su retorno.



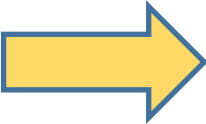
100

30

2

7

14



Ha pasado 14 semanas más 2 días

Será día jueves