ALGEBRA

Chapter 9

3rd
SECONDARY

División Polinómica I

SACO OLIVEROS

RECORDANDO:

¿Puedes completar y ordenar en forma decreciente los siguientes polinomios?

$P(x) = 2x + x^4 + 1 \Rightarrow P(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 1$

$F(x) = 2 - x^2 + x^5 \Rightarrow F(x) = x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 2$

DIVISIÓN POLINÓMICA

Sea la división de polinomios:

Dividendo → $D(x)$

divisor → $d(x)$

$\dfrac{D(x)}{d(x)}$ Genera → $\begin{cases} \text{Cociente} \rightarrow q(x) \\ \text{Residuo} \rightarrow R(x) \end{cases}$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$\boxed{D(x) \equiv d(x).q(x) + R(x)}$$

PROPIEDADES:

I. $GA[D(x)] \geq GA[d(x)]$

II. $GA[q(x)] = GA[D(x)] - GA[d(x)]$

III. $GA[R(x)] \leq GA[d(x)] - 1$

III. $d(x) \not\equiv 0$

I MÉTODO DE HORNER :

Sea la división:

$$\frac{6x^5+17x^4-5x^3+10x-5}{2x^3+x^2-3}$$

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo y el divisor.

$$\frac{6x^5+17x^4-5x^3+0x^2+10x-5}{2x^{3}+x^2+0x-3}$$

ESQUEMA:

Coeficientes del dividendo

Coeficientes del divisor

		+	+	+	+	+
2	6	17	-5	0	10	-5
-1	$\div$	-3	0	9		
0		14	-7	0	21	
3		$\div$	-12	6	0	-18
			$\div$			
$\times$	3	7	-6	15	31	-23

Coeficientes del cociente

Coeficientes del residuo

$$q(x)=3x^2+7x-6$$

$$R(x)=15x^2+31x-23$$

II REGLA DE RUFFINI :

1 °Caso: Divisor de la forma $x + b$

Sea la división:

$$\frac{3x^5 - 7x^4 + 4x^2 + 5x - 6}{x - 2}$$

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{3x^5 - 7x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 5x - 6}{x - 2}$$

ESQUEMA:

Regla: $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Coeficientes del dividendo

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 3 & -7 & 0 & 4 & 5 & -6 \\
2 & \downarrow & 6 & -2 & -4 & 0 & 10 \\
\hline
\times & 3 & -1 & -2 & 0 & 5 & 4
\end{array}$$

Coeficientes del cociente

Residuo

$$\boxed{q(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 5}$$

$$\boxed{R(x) = 4}$$

2°Caso:

Divisor de la forma $ax + b$

Sea la división:

$$\frac{6x^5 + 5x^4 - 7x + 4}{2x - 1}$$

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{6x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 7x + 4}{2x - 1}$$

ESQUEMA:

Regla: $2x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

Coeficientes del dividendo

	6	5	0	0	-7	4
$\frac{1}{2}$		3	4	2	1	-3
$\times$	6	8	4	2	-6	1
$\div\ 2$						
	3	4	2	1	-3	

Residuo

Coeficientes del cociente

$$\boxed{q(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 3}$$

$$\boxed{R(x) = 1}$$

Problema 1

Calcule la suma de coeficientes del cociente de

$$\frac{6x^5 + 4x^4 - 25x^3 + 33x^2 - 22x + 6}{2x^2 - 2x + 1}$$

Resolución:

2	6	4	−25	33	−22	6
2	÷	6	−3			
−1		10	10	−5		
		÷	−18	−18	9	
			÷	10	10	−5
×				÷		
	3	5	−9	5	−3	1

$q(x) = 3x^3 + 5x^2 - 9x + 5$

$R(x) = -3x + 1$

$\sum Coef[q(x)] = 3 + 5 - 9 + 5$

$\therefore \sum Coef[q(x)] = 4$

Problema 2

Evalúe $\mathrm{A + B + C}$ si la división

$$\frac{8x^5 + 4x^3 + Ax^2 + Bx + C}{2x^3 + x^2 + 3}$$

deja como resto $\boxed{5x^2 + 11x + 7}$

Recordemos:

Se completa y se ordena el dividendo y el divisor.

$$\frac{8x^5 + 0x^4 + 4x^3 + Ax^2 + Bx + C}{2x^3 + x^2 + 0x + 3}$$

Resolución:

2	8	0	4	A	B	C
-1		-4	0	-12		
0		-4	2	0	6	
-3			6	-3	0	-9
	4	-2	3	5	11	7

$A - 12 + 0 - 3 = 5$ → $\boxed{A = 20}$

$B + 6 + 0 = 11$ → $\boxed{B = 5}$

$C - 9 = 7$ → $\boxed{C = 16}$

$$\boxed{\therefore \quad A + B + C = 41}$$

Problema 3

Obtenga el valor de a si el residuo es 100.

$$\frac{2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 7x + a}{x - 2}$$

Resolución:

$x - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2}$

	2	4	3	7	a
2		4	16	38	90
×	2	8	19	45	100

Residuo

$$q(x) = 2x^3 + 8x^2 + 19x + 45$$

$a + 90 = 100 \longrightarrow \boxed{\therefore\ a = 10}$

Problema 4

Indique el valor de m si el residuo es 4.

$$\frac{6x^5 + x^4 + 2x^3 - 10x^2 + m}{3x - 1}$$

Recordemos:

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{6x^5 + x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 0x + m}{3x - 1}$$

Resolución:

$$3x - 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

	6	1	2	-10	0	m
$\frac{1}{3}$		2	1	1	-3	-1
×	6	3	3	-9	-3	4
$\div 3$						
	2	1	1	-3	-1	

Residuo

$$q(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - 3x - 1$$

$$m - 1 = 4 \longrightarrow \boxed{\therefore\ m = 5}$$

Problema 5

Calcule ab en la división exacta

$$\frac{ax^5 + bx^4 - x^3 + 7x^2 - 5x - 12}{3x^2 + x - 4}$$

que representa la edad del papá de Luis que es alumno del 3° A. ¿Cuál es la edad del papá de Luis?

Resolución:

Aplicamos el método de Horner invertido:

-4	-12	-5	7	-1	b	a
-1		-3	-9			
-3		-8	-2	-6		
			-4	-1	-3	
				-8	-2	-6
	3	2	1	2	0	0

$b - 3 - 2 = 0$

$\boxed{b = 5}$

$a - 6 = 0$

$\boxed{a = 6}$

$ab = 6 \times 5$

$\boxed{ab = 30}$

∴ *El papá de Luis tiene 30 años.*

Problema 6

Determine $\sqrt{a+b}$ si la división

$$\frac{2x^5+3x^4+3x^3+2x^2+ax+b}{x^2-2x+3}$$

es exacta.

Resolución:

1	2	3	3	2	a	b
2		4	-6			
			14	-21		
-3				22	-33	
×					6	-9
	2	7	11	3	0	0

$$a-33+6=0$$
$$\boxed{a=27}$$

$$b-9=0$$
$$\boxed{b=9}$$

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{27+9}$$
$$\sqrt{a+b}=\sqrt{36}$$

$$\boxed{\therefore\ \sqrt{a+b}=\pm 6}$$

Problema 7

Obtenga la suma de coeficientes del cociente de

$$\frac{x^{200}+x^{199}+2x+5}{x-1}$$

Recordemos:

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{x^{200}+x^{199}+0x^{198}+\cdots+0x^{2}+2x+5}{x-1}$$

Resolución:

$x-1=0 \rightarrow \boxed{x=1}$

	1	1	0	0	… …	0	0	2	5
1		1	2	2	… …	2	2	2	4
	1	2	2	2	… …	2	2	4	9

$GA[q(x)] = \underbrace{GA[D(x)]}_{200} - \underbrace{GA[d(x)]}_{1} \Rightarrow \boxed{GA[q(x)] = 199}$

$\boxed{N° \ térms. = 200}$

$\boxed{q(x) = x^{199}+2x^{198}+2x^{197}+\ldots+2x^{2}+2x+4}$

$\sum Coef[q(x)] = \underbrace{1+2+2+\cdots+2+2+4}_{198 \ veces}$

$\boxed{\therefore \ \sum Coef[q(x)] = 401}$

Problema 8

El término independiente del cociente en

$$\frac{6x^4 + x^2 - 4x^3 + 10x - 2}{3x + 1}$$

es:

Recordemos:

Se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{6x^4 - 4x^3 + x^2 + 10x - 2}{3x + 1}$$

Resolución:

$3x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$

	6	−4	1	10	−2
$-\frac{1}{3}$		−2	2	−1	−3
×	6	−6	3	9	−5
÷ 3					
	2	−2	1	3	

$$\boxed{q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 3}$$

$$\boxed{\therefore\ TI = 3}$$