MATHEMATICAL REASONING

Chapter 24

2nd
SECONDARY

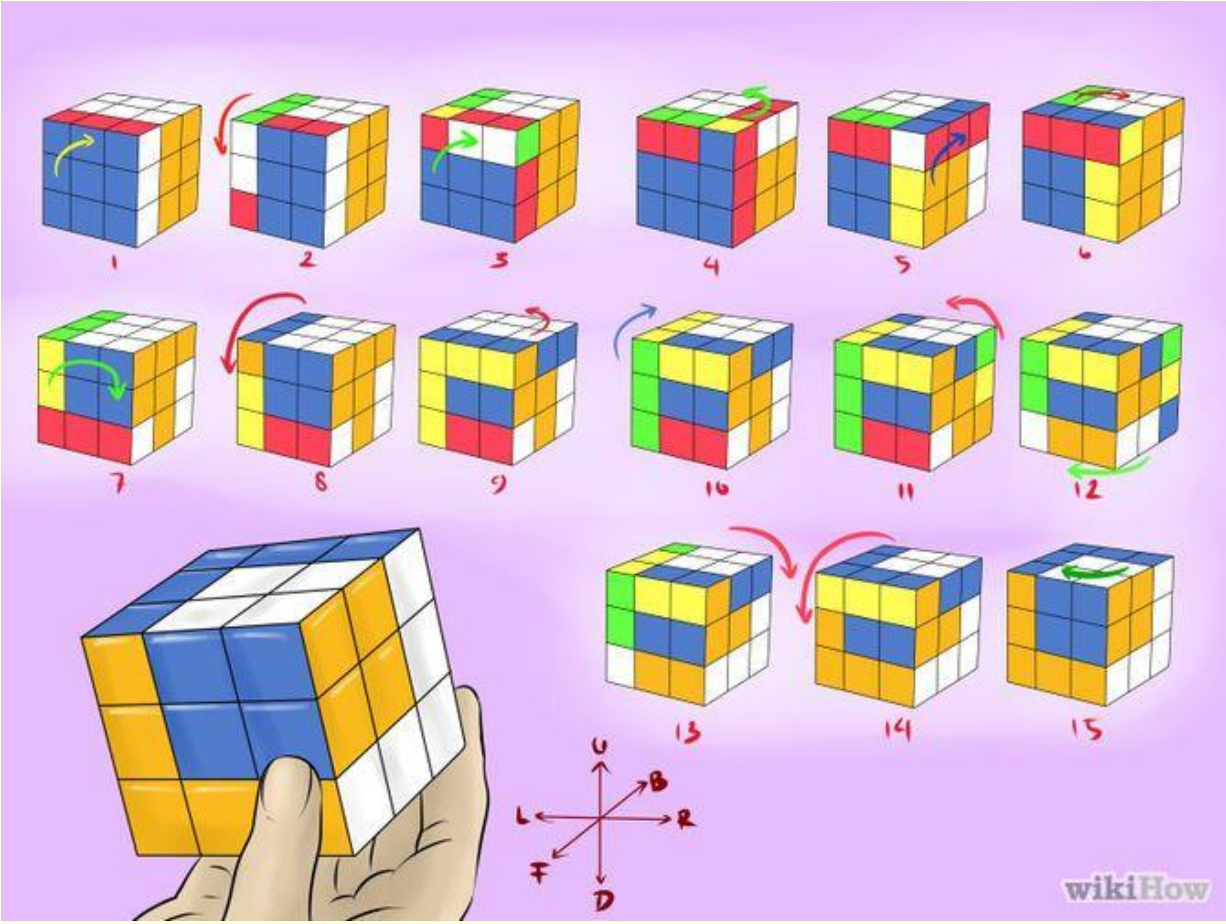
TÉCNICAS DE CONTEO II

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

- ## !SABIAS QUE!

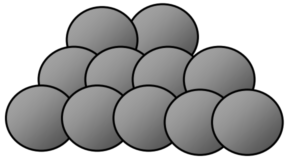
Un Cubo Rubik tiene más de 43 TRILLONES de combinaciones posibles, pero sólo una solución. Si tardaras un segundo por cada movimiento, te tomaría 1,4 billones de años pasar por todas las posibles combinaciones.



PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Si se tiene n elementos diferentes, con ellos se puede realizar lo siguiente:

n elementos diferentes



ORDENAR

PERMUTACIONES

(Interesa el orden en que se tomen los elementos)

AGRUPAR

COMBINACIONES

(No interesa el orden en que se tomen los elementos)

PERMUTACIONES

Son los diferentes arreglos u ordenamientos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto. En una permutación interesa el orden o ubicación de los elementos. Se pueden presentar los siguientes casos:

PERMUTACIÓN LINEAL

- Permutación de todos los elementos

El número de maneras diferentes de permutar (ordenar) "n" elementos diferentes se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes seis caballos podrán llegar a la meta en una carrera en el hipódromo si no hay empates?

$$P_6 = 6!$$

$$P_6 = 1 \ x\ 2\ x\ 3\ x\ 4\ x\ 5\ x\ 6$$

$$P_6 = 720$$

$\therefore$ 720

VARIACIÓN

También llamada permutación parcial; se ordenan parte de los elementos de un conjunto dado. Para m elementos en total, de los cuales se ordenan n (n<m) , se calcula como:

$$\boldsymbol{V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar cuatro de un total de seis niños en una banca de cuatro asientos?

$$V_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} \longrightarrow V_4^6 = \frac{6!}{2!}$$

$$V_4^6 = \frac{720}{2}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{360}}$$

PERMUTACIONES

PERMUTACIÓN CIRCULAR

El número de permutaciones circulares diferentes de n elementos distintos se calcula así:

$$\boxed{P_{C_n} = (n-1)!}$$

Ejemplo:

Seis amigos se ubican en seis sillas alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes podrán ubicarse?

$n = 6$

$N°de\ maneras = P_{C_6}$

$N°de\ maneras = (6-1)!$

$N°de\ maneras = 5!$

$N°de\ maneras = 120$

$\therefore$ 120

PERMUTACIONES

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

El número de permutaciones de n elementos donde r_1 son iguales, r_2 también iguales, r_3 también iguales,..., y r_k también iguales, se calcula de la siguiente manera:

$$P^{n}_{r_1;r_2;r_3;\ldots;r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \cdots \times r_k!}$$

Ejemplo:

¿Cuántas palabras que tengan sentido o no se pueden leer con todas las letras de la palabras MIMOSO?

$\underbrace{\text{MIMOSO}}_{\text{6 letras}}$

n = 6

Se repiten:

M $\longrightarrow$ 2 veces:

O $\longrightarrow$ 2 veces:

$$P^{6}_{2;2} = \frac{6!}{2! \times 2!} \longrightarrow P^{6}_{2;2} = \frac{720}{4}$$

180

COMBINACIONES

Son las diferentes selecciones o agrupamientos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto. En una combinación no interesa el orden ni ubicación de sus elementos.

EN GENERAL

El número de combinaciones diferentes de m elementos agrupados de n en n se calcula de la siguiente manera:

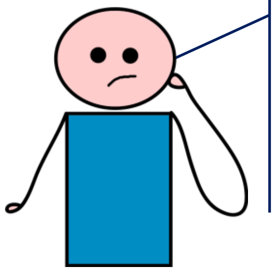
$$C_n^m = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

COMBINACIONES

Ejemplo:

¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en total en un campeonato en el que participan 20 equipos, jugando todos contra todos a una sola rueda?

Resolución:



Para que se juegue un partido de fútbol se necesitan dos equipos, entonces, se tiene que elegir grupos conformados por 2 equipos

$$C_2^{20} = \frac{20!}{2! \times (20-2)!}$$

$$C_2^{20} = 190$$

190

HELICO PRACTICE

1 A la final del concurso de matemáticas llegaron cinco competidores. Si todos tienen las mismas posibilidades de ganar, **¿de cuántas maneras diferentes podría terminar el cuadro de mérito de este concurso?**

Sol: Como un cuadro de mérito implica un orden determinado, se trata de una permutación:

$$P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Rpta. 120 maneras

NOMBRE USUARIO	ID USUARIO	PUNTUACIÓN
Paula	653	98
Juan Carlos Egocheaga	644	89
Germán	651	87
Marcos	655	86
Midori	640	83
Ana Belén González Menéndez	661	82
Susana	657	77
nuria	649	76
David	659	70
ICGG	664	64
javier_sergio	662	63
Jesus	663	45
asv1	665	43
Ana	668	40
Marisa Negrete	650	36
ns	641	31
sara	654	15
David	667	11
José	648	6
Maria	647	6
Marina	652	3
noe	642	2
ori	658	1

HELICO PRACTICE

2 Se debía colocar seis afiches sobre un panel informativo, pero al momento de hacerlo, solo quedaban tres espacios vacíos. **¿De cuántas maneras diferentes se podrían colocar tres de los seis afiches en dicho panel?**

Sol: **Se indica colocar los afiches de maneras diferentes, es una variación:**

$$V_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Rpta. 120 maneras

3 Siete amigos se sientan en una misma fila en siete asientos frente a una sala. Si Alex y Carlos desean sentarse siempre en los extremos de la fila, **¿de cuántas maneras diferentes podrían ubicarse en dicha fila?**

Sol:

$$A \quad \underbrace{X \quad X \quad X \quad X \quad X} \quad C$$

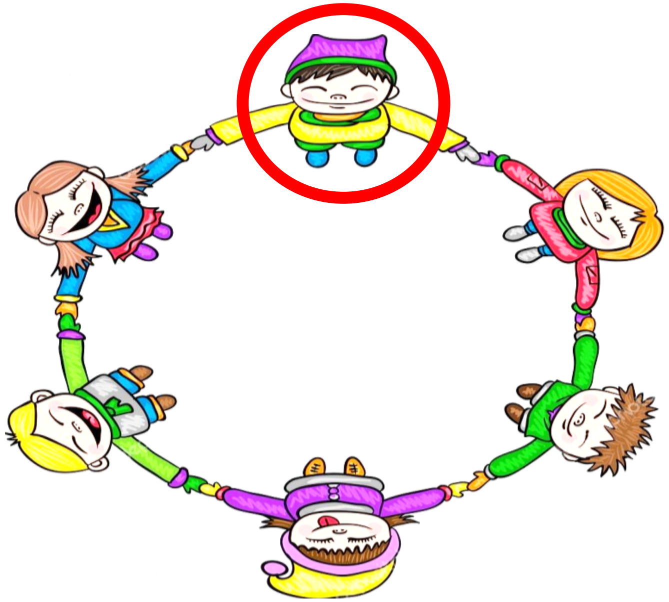
$$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

Rpta.	240 maneras

HELICO PRACTICE

4 Seis niños jugaban a la ronda en la escuela, la profesora que los observaba se preguntó: **¿Cuántas rondas diferentes podrían formar dichos niños?, ¿Cuál sería la respuesta para dicha pregunta de la profesora?**

Sol:



Se toma un niño como punto de referencia, los demás permutan con respecto a él:

$\therefore$ **Nº de rondas = 5! = 120**

Rpta. **120 maneras**

HELICO PRACTICE

5 ¿Cuántas palabras diferentes se podría formar con todas las letras de la palabra "**PANAMA**", si no importa su significado final?

Sol:

PANAMA tiene 6 letras

La letra "A" se repite tres veces

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Rpta. 120 palabras

6 De los ocho chocolates que le quedaban, todos diferentes, Alex decidió comerse tres de ellos. **¿De cuántas maneras diferentes podrá Alex elegir los chocolates que finalmente consumirá?**

Sol:

$$C_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!\ x\ 3!} = \frac{8!}{5!\ x\ 3!} = \frac{8\ x\ 7\ x\ \cancel{6}\ x\ \cancel{5!}}{\cancel{5!}\ x\ \cancel{6}} = 56$$

Rpta. 56 maneras

7 Pepe quería adquirir cuatro polos para este verano. Sin embargo, cuando fue a la tienda comercial, le gustaron siete polos distintos; lamentablemente tenía el dinero exacto para solo cuatro. **¿De cuántas maneras diferentes pudo elegir Pepe los polos que iba a comprar?**

Sol:

$$V_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7\ x\ 6\ x\ 5\ x\ 4\ x\ \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = \mathbf{840}$$

Rpta. 840 maneras

HELICO PRACTICE

8 Coco compró diez canicas, pero se le rompió la bolsa donde los llevaba, por lo que decidió colocar cuatro canicas en su bolsillo derecho y el resto en el izquierdo. **¿De cuántas maneras diferentes pudo haber elegido las canicas que fueron a parar al bolsillo derecho?**

Sol:

$$V_4^{10} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \, x \, 9 \, x \, 8 \, x \, 7 \, x \, \cancel{6!}}{4! \, x \, \cancel{6!}} = \mathbf{210}$$

Rpta. 210 maneras