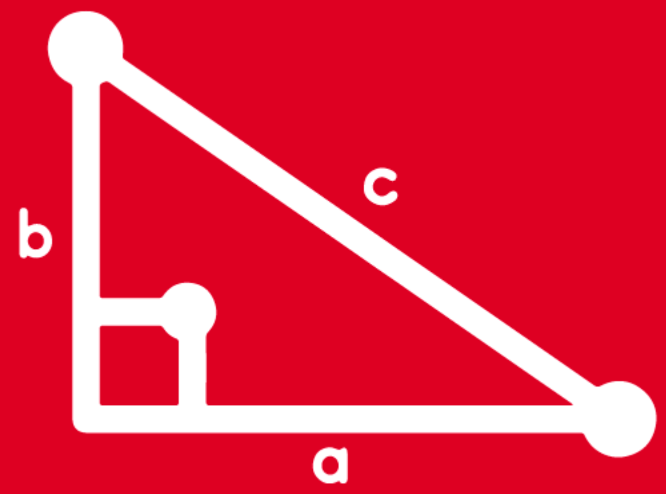
TRIGONOMETRY

Chapter 24
Session I



4th
SECONDARY

Resolución de triángulos oblicuángulos II

SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVACIÓN

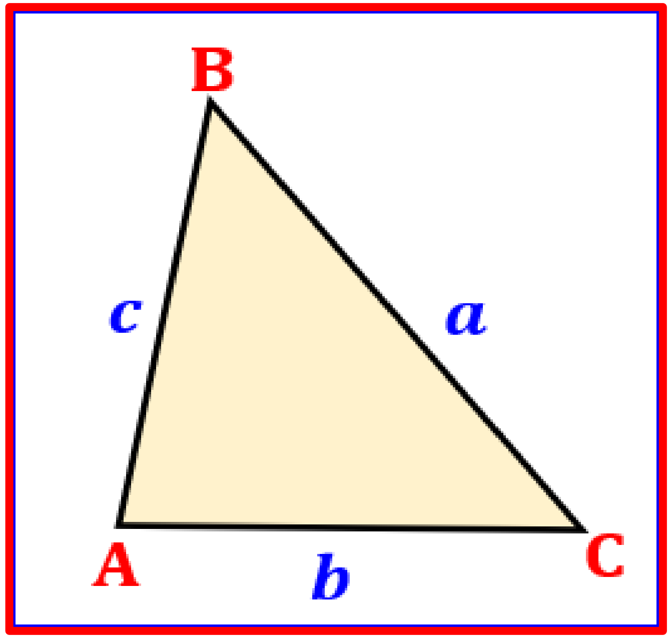
ticmas

Tecnología | Innovación | Ciencia | Matemática | Artes | Social

HELICOTEORÍA – 1 –

3. Teorema de tangentes:

En todo triángulo se cumple que la diferencia de longitudes de dos de sus lados, es a su suma; como la tangente de la semidiferencia de los ángulos opuestos a dichos lados, es a la tangente de la semisuma de los mismos ángulos.



$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

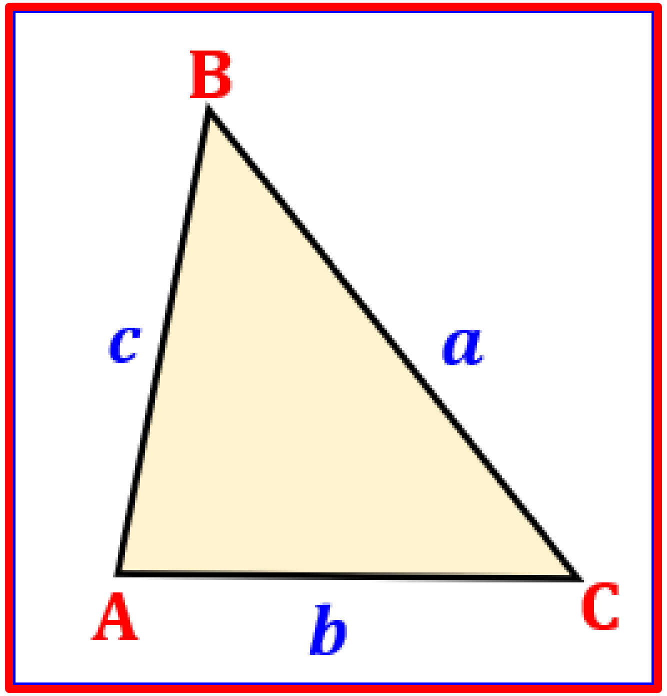
$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}$$

$$\frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}$$

HELICOTEORÍA – 2 –

4. Teorema de proyecciones:

En todo triángulo, se cumple que un lado cualquiera es igual a la suma de sus otros dos lados multiplicados cada uno por los cosenos de los ángulos adyacentes a dicho lado.



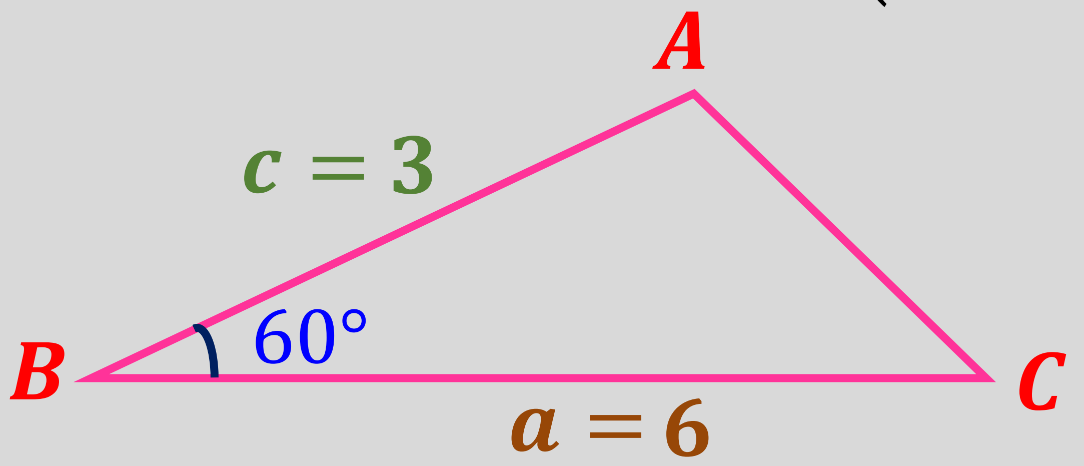
$$a = b.\cos C + c.\cos B$$

$$b = a.\cos C + c.\cos A$$

$$c = a.\cos B + b.\cos A$$

PROBLEMA 1

Del gráfico, calcule: $\tan\left(\dfrac{A-C}{2}\right)$



Resolución:

Teorema de tangentes

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

Reemplazando valores:

$$\Rightarrow \frac{6-3}{6+3}=\frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{120°}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\tan(60°)=\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)$$

Así: $\dfrac{1}{3}.\sqrt{3}=\tan\left(\dfrac{A-C}{2}\right)$

$$\therefore \tan\left(\frac{A-C}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

PROBLEMA 2

En un triángulo ABC, $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k$ $m\measuredangle C = 106°$. Calcule $\cot\left(\frac{B-A}{2}\right)$

Resolución

Del dato:

$a = 2k$
$b = 3k$

Teorema de tangentes

$$\boxed{\frac{b-a}{b+a} = \frac{\tan\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+A}{2}\right)}}$$

$A + B + C = 180° \Rightarrow A + B = 74°$

106°

Reemplazando valores:

$$\Rightarrow \frac{3k-2k}{3k+2k} = \frac{\tan\left(\frac{B-A}{2}\right)}{\tan\left(\frac{74°}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\tan(37°) = \tan\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

Así: $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \tan\left(\frac{B-A}{2}\right)$

$$\boxed{\therefore \cot\left(\frac{B-A}{2}\right) = \frac{20}{3}}$$

PROBLEMA 3

En un triángulo ABC, se cumple: $m\measuredangle A = 120°$ y $b = 4c$. Calcule el valor de $\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$

Resolución

Del dato: $\boxed{b = 4c}$

Teorema de tangentes

$$\boxed{\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}}$$

$$\underbrace{A}_{120°} + B + C = 180° \Rightarrow B + C = 60°$$

Reemplazando valores:

$$\frac{4c - c}{4c + c} = \frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{60°}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}\tan(30°) = \tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

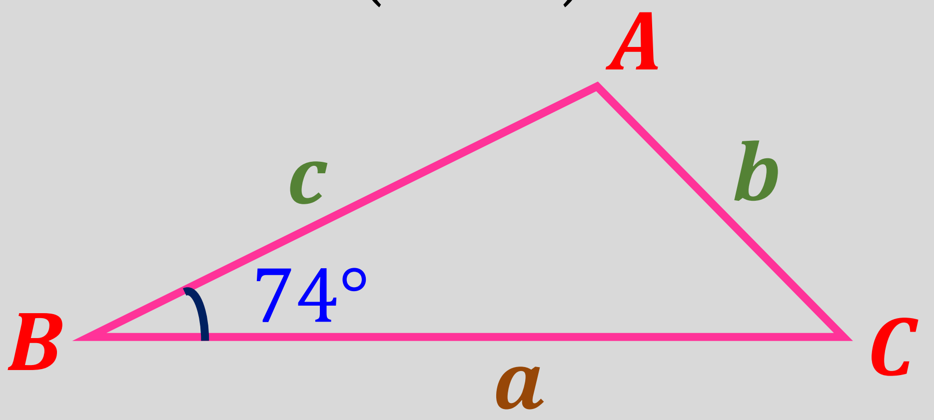
Así: $\frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$$\boxed{\therefore \tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{5}}$$

PROBLEMA 4

En la figura, si $2a^2 + 5c^2 = 11ac$

Calcule $\tan\left(\dfrac{A-C}{2}\right)$, además $a > c$



Resolución:

Dato: $2a^2 - 11ac + 5c^2 = 0$

$2a \quad -c \Rightarrow 2a = c$ ✗

$a \quad -5c \Rightarrow a = 5c$ ✓

Teorema de tangentes

$$\boxed{\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}}$$

Reemplazando valores:

$$\Rightarrow \frac{5c - c}{5c + c} = \frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{106°}{2}\right)}$$

Así: $\dfrac{2}{3}\underbrace{\tan 53°}_{\frac{4}{3}} = \tan\left(\dfrac{A-C}{2}\right)$

$$\boxed{\therefore \tan\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{8}{9}}$$

PROBLEMA 5

En un triángulo ABC, reduzca: $E = \dfrac{c.\,\mathrm{sen}(A + C)}{a - b.\cos C}$

Resolución

$\Delta\, ABC : A + B + C = 180°$

$\Rightarrow A + C = 180° - B$

Teorema de proyecciones

$$\boxed{a = b.\cos C + c.\cos B}$$

Reemplazando en E:

$$E = \frac{c.\,sen(180° - B)}{\cancel{b.\cos C} + c.\cos B - \cancel{b.\cos C}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{c}.\,senB}{\cancel{c}.\cos B}$$

$$\boxed{\therefore E = tanB}$$

PROBLEMA 6

En un triángulo ABC, si $\cos C = 0{,}1$; calcule $E = 1 - \dfrac{c.\cos A + c.\cos B}{a + b}$

Resolución

Teorema de proyecciones: $\boxed{a = b.\cos C + c.\cos B}$ $\boxed{b = a.\cos C + c.\cos A}$

Piden: $E = \dfrac{a + b - c.\cos A - c.\cos B}{a + b}$

$$E = \frac{b.\cos C + \cancel{c.\cos B} + a.\cos C + \cancel{c.\cos A} - \cancel{c.\cos A} - \cancel{c.\cos B}}{a + b}$$

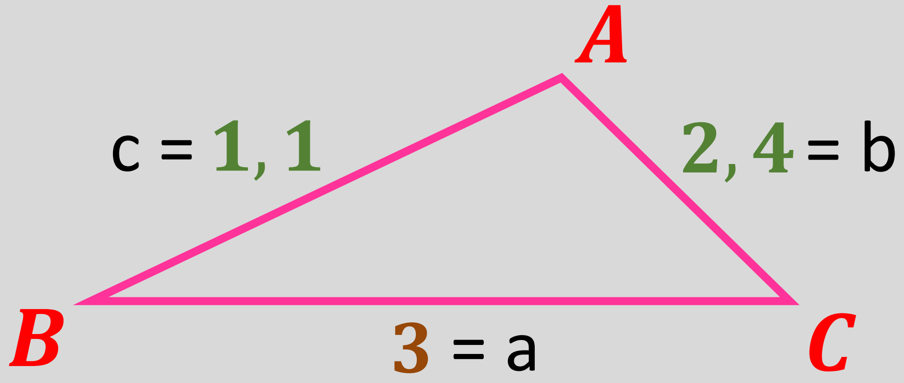
$$\Rightarrow E = \frac{b.\cos C + a.\cos C}{a + b} = \frac{\cancel{(a + b)}\cos C}{\cancel{a + b}} \Rightarrow E = \cos C$$

$$\boxed{\therefore E = 0{,}1}$$

PROBLEMA 7

Del gráfico, calcule:

$$M = \frac{35\cos A + 41\cos B + 54\cos C}{13}$$



Resolución:

Teorema de proyecciones:

a = b cos C + c cos B

b = a cos C + c cos A

c = a cos B + b cos A

$$3 = 2{,}4\cos C + 1{,}1\cos B$$
$$2{,}4 = 3\cos C + 1{,}1\cos A$$
$$1{,}1 = 3\cos B + 2{,}4\cos A$$

+

Sumando expresiones:

$$6{,}5 = 3{,}5\cos A + 4{,}1\cos B + 5{,}4\cos C$$

Multiplicando 10:

$$65 = 35\cos A + 41\cos B + 54\cos C$$

Reemplazando en M:

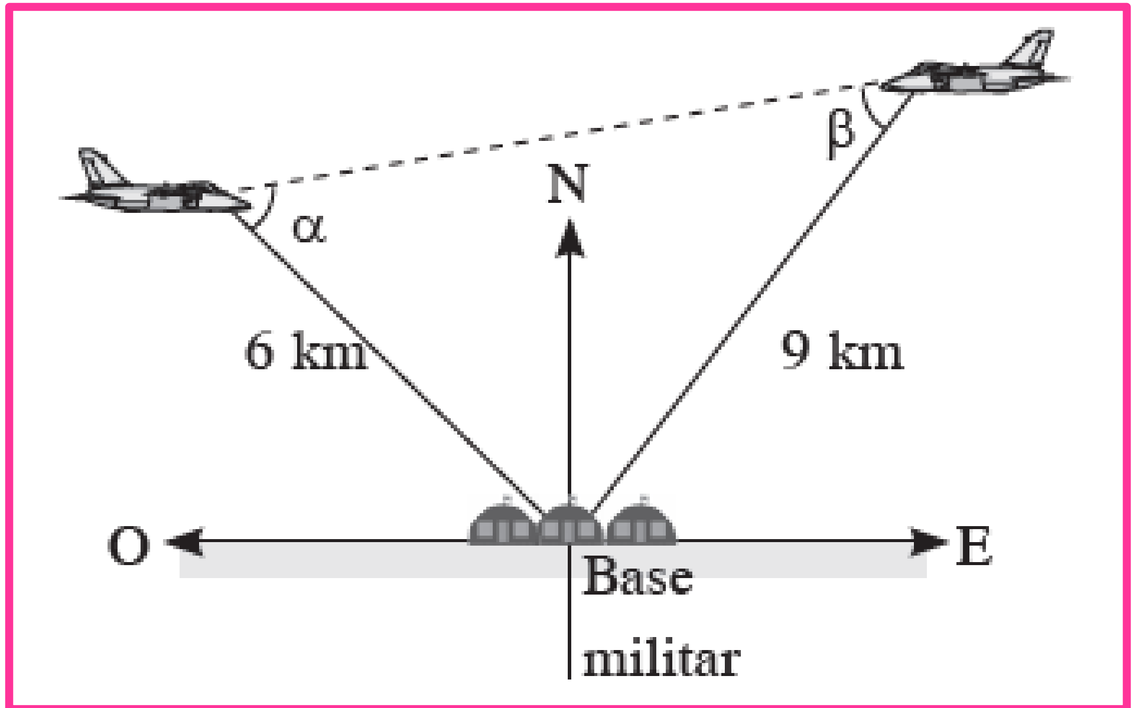
$$M = \frac{35\cos A + 41\cos B + 54\cos C}{13}$$

$$\Rightarrow M = \frac{65}{13}$$

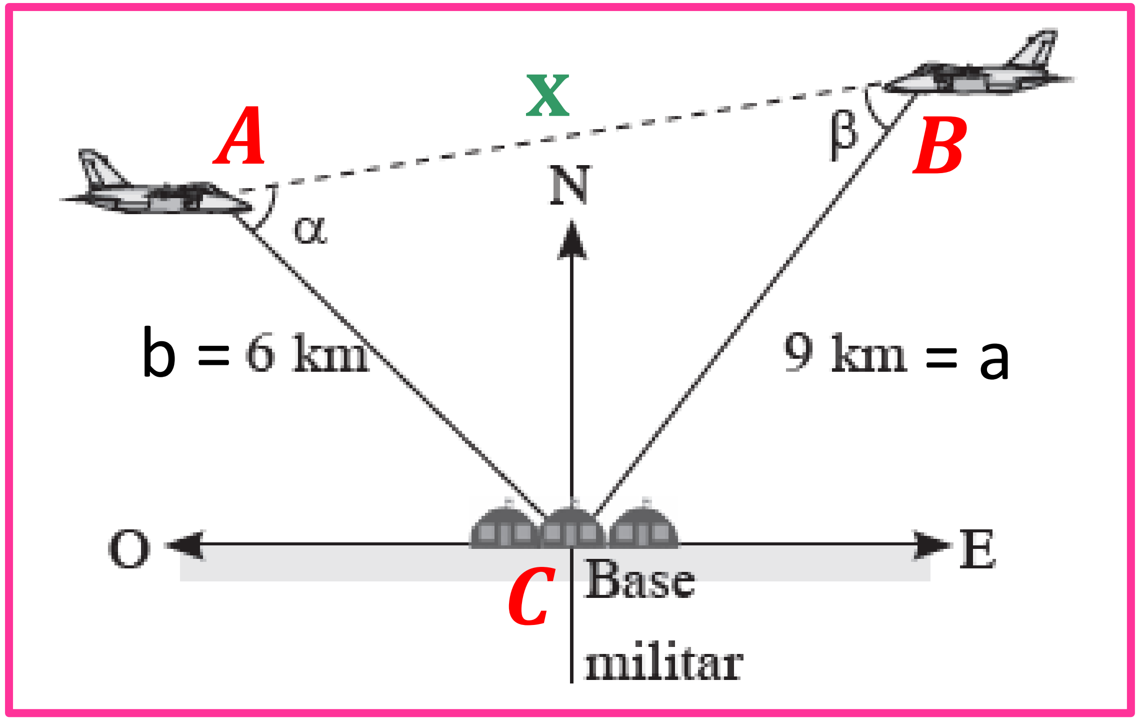
$$\therefore M = 5$$

PROBLEMA 8

En una base militar, sobre su espacio aéreo se divisan dos aviones desconocidos, uno en la dirección noroeste a una distancia de 6 km respecto del centro de control y el otro en la dirección noreste a una distancia de 9 km, tal como se muestra en la figura. Si $\sec\alpha = 3$ y $\sec\beta = 9/7$; determine la distancia que separa a ambos aviones.



Resolución



x: distancia entre los aviones

Teorema de proyecciones:

$$c = b.cosA + a.cosB$$

$$\Rightarrow x = 6cos\alpha + 9cos\beta \ldots (*)$$

Datos:

$$\begin{cases} sec\alpha = 3 \\ sec\beta = 9/7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} cos\alpha = 1/3 \\ cos\beta = 7/9 \end{array}} \ldots (\mathrm{I})$$

Usar (I) en (*):

$$\Rightarrow x = 6\left(\frac{1}{3}\right) + 9\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2 + 7 = 9$$

$$\therefore \text{Dist. entre los aviones} = 9\text{km}$$