



ALGEBRA

Chapter 22

4th
SECONDARY

Funciones III

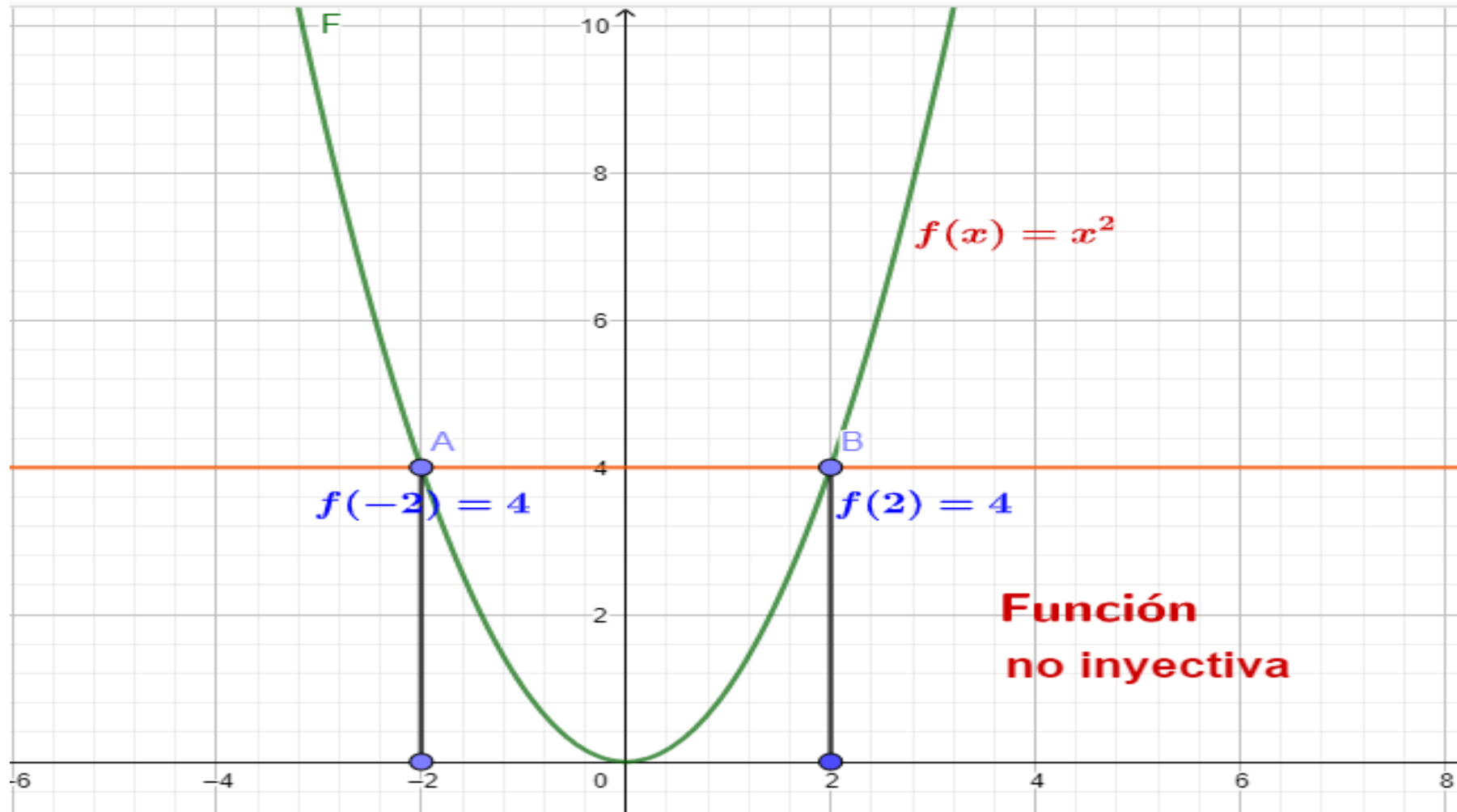


 **SACO OLIVEROS**

HELICO

MOTIVATING

Motivation Strategy



HELICO THEORY

FUNCIONES III



I) FUNCIÓN INYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$, diremos que f es **inyectiva** si y solo si:

$$\underbrace{f(a) = f(b)}_p, \underbrace{\text{implica}} \underbrace{a = b}_q \text{ para todo } a; b \in A$$

$p \quad \longrightarrow \quad q$

que es equivalente a la siguiente definición:

$$\underbrace{a \neq b}_{\sim q}, \underbrace{\text{implica}} \underbrace{f(a) \neq f(b)}_{\sim p} \dots$$

$\sim q \quad \longrightarrow \quad \sim p$

la cual usaremos
en los ejercicios

FORMA PRÁCTICA DE IDENTIFICAR CUÁNDO UNA FUNCIÓN ES INYECTIVA Y CUÁNDO NO

Sea $F = \{(a; 3), (b; 6), (c; 8), (d; 6)\}$

→ F **no** es inyectiva,

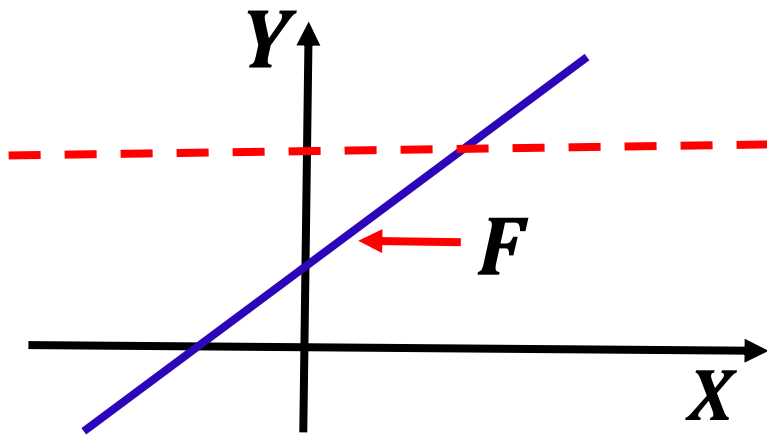
Sea $G = \{(a; 7), (b; 2), (c; 8), (d; 1), (e; 5), (f; 3)\}$

→ G **si** es inyectiva,
porque **ninguna** de las segundas componentes
se repite

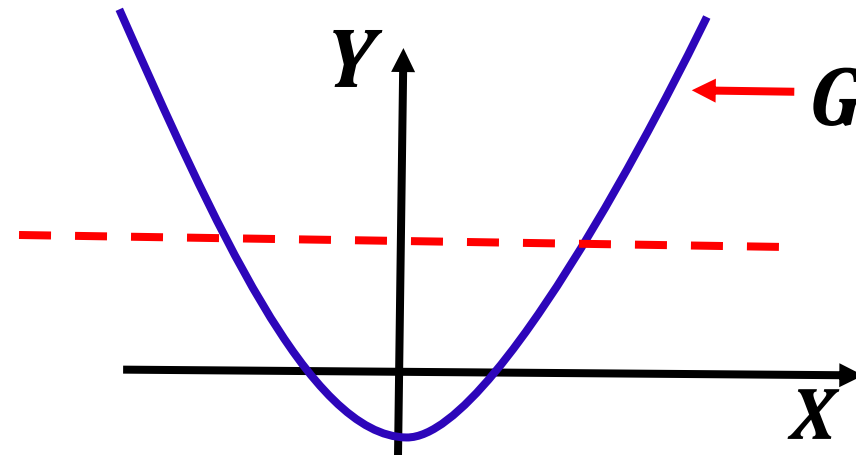
OBSERVACIÓN



Para gráficas de funciones, se dirá que **una gráfica es inyectiva** si al trazar una horizontal lo corta sólo en un punto.



F es inyectiva

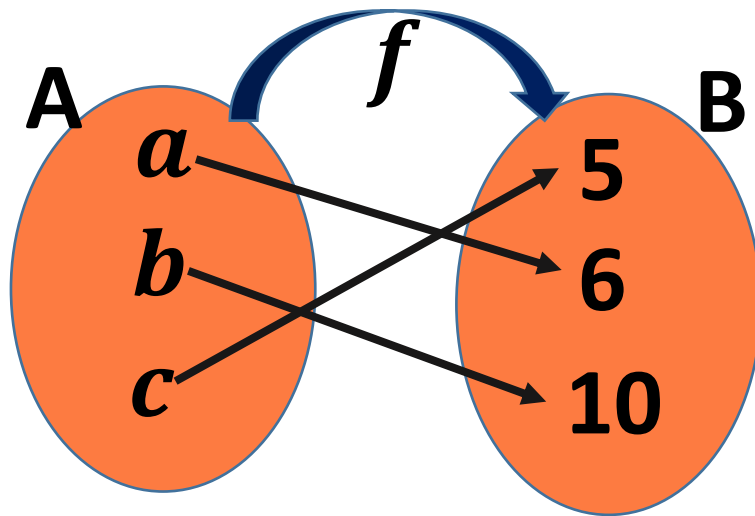


G no es inyectiva

II) FUNCIÓN SOBREYECTIVA

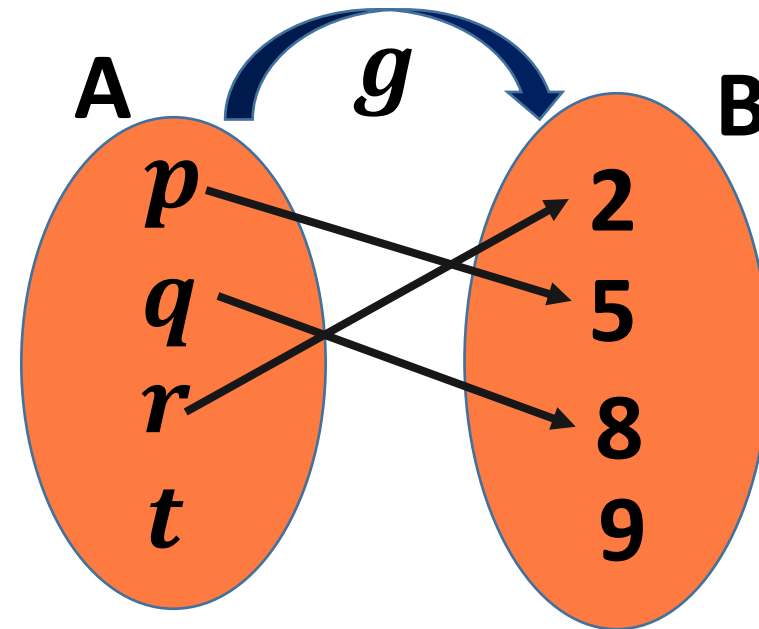


Sea la función $f: A \rightarrow B$, diremos que f es **sobreyectiva** si y solo si: $Rang(f) = B$



f es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) = B$$



g **no** es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) \neq B$$

III) FUNCIÓN BIYECTIVA



La función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si y solo si f es **inyectiva** y **sobreyectiva**

IV) FUNCIÓN INVERSA

Si $f: A \rightarrow B$ es una función **biyectiva**, entonces existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ llamada **inversa de f** , definida por la condición $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

PROPIEDAD:

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$$

$$\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$$

III) FUNCIÓN BIYECTIVA



La función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si y solo si f es **inyectiva** y **sobreyectiva**

IV) FUNCIÓN INVERSA

Si $f: A \rightarrow B$ es una función **biyectiva**, entonces existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ llamada **inversa de f** , definida por la condición $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

PROPIEDAD:

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$$

$$\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1 ¿Cuáles de las funciones son inyectivas?

$$F = \{(1; 2), (3; 5), (4; 8), (5; 9)\}$$

$$G = \{(0; 1), (2; 5), (4; 1), (5; 7)\}$$

$$H = \{(1; 5), (3; 5), (7; 10), (10; 5)\}$$

Resolución

F es inyectiva:

*pues **NO** se repite ningún elemento del rango; la correspondencia es uno a uno*

G no es inyectiva:

pues se repite un elemento del rango:

$(0; 1)$ y $(4; 1)$

H no es inyectiva:

pues se repite un elemento del rango:

$(1; 5)$, $(3; 5)$ y $(10; 5)$

PROBLEMA 2 Sean $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{1; 3; 5; 7\}$ y las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: A \rightarrow B$ tal que:

$$f = \{(1; 1), (2; 1), (3; 3), (4; 5)\}$$
$$g = \{(1; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7)\}$$

¿ f y g son sobreyectivas?

Resolución

f **no** es Sobreyectiva:

pues $Ran(f) \neq B$

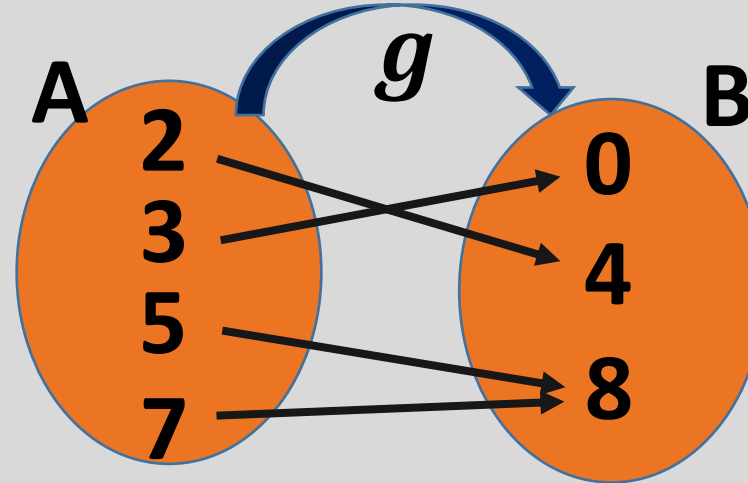
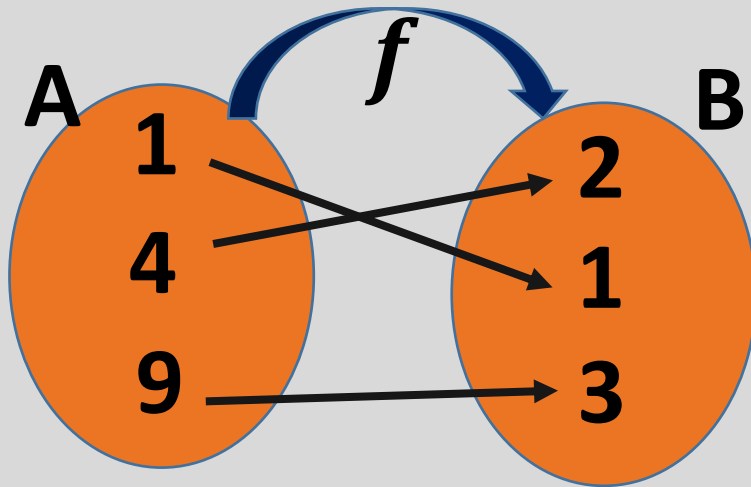
$$\{1; 3; 5\} \neq \{1; 3; 5; 7\}$$

g **si** es Sobreyectiva:

pues $Ran(g) = B$

$$\{1; 3; 5; 7\} = \{1; 3; 5; 7\}$$

PROBLEMA 3 Sean las funciones:



¿ f y g son inyectivas?

Resolución

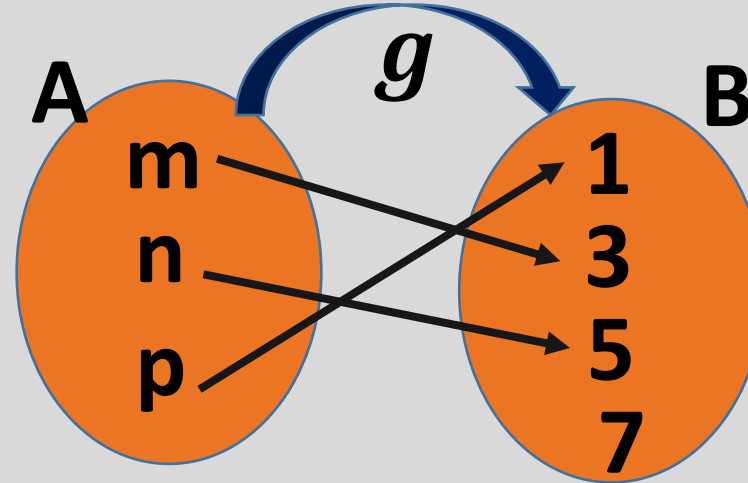
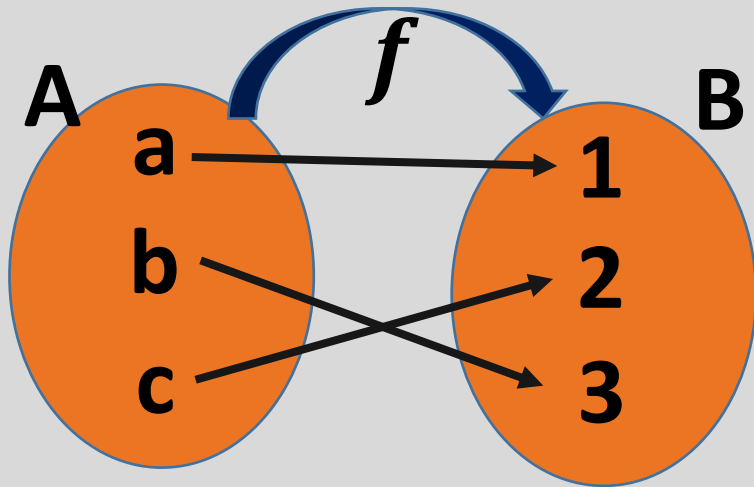
f **si** es inyectiva:

NO se repite ningún elemento del rango

g **no** es inyectiva:

$(5;8), (7;8)$

PROBLEMA 4 Sean las funciones:



¿ f y g son sobreyectivas?

Resolución

f **si** es Sobreyectiva:

pues $Ran(f) = B$

$\{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3\}$

g **no** es Sobreyectiva:

pues $Ran(g) \neq B$

$\{1; 3; 5\}$

PROBLEMA 5 Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: A \rightarrow B$ funciones;
Además: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 3, 5, 8\}$ tales que:
 $f = \{(2; 5), (4; 5), (8; 3), (6; 8)\}$
 $g = \{(2; 2), (6; 3), (4; 8), (8; 5)\}$
¿ f y g son biyectivas?

Resolución

$f: A \rightarrow B$ es biyectiva **si y solo**
si f es inyectiva y sobreyectiva

I) f NO es Inyectiva

$f = \{(2; 5), (4; 5), (8; 3), (6; 8)\}$
pues se repite un elemento del rango:

$(2; 5)$ y $(4; 5)$

f NO es biyectiva

I) g es Inyectiva

$g = \{(2, 2); (6, 3), (4, 8); (8, 5)\}$

Pue **NO** se repite ningún elemento del rango

II) g es sobreyectiva

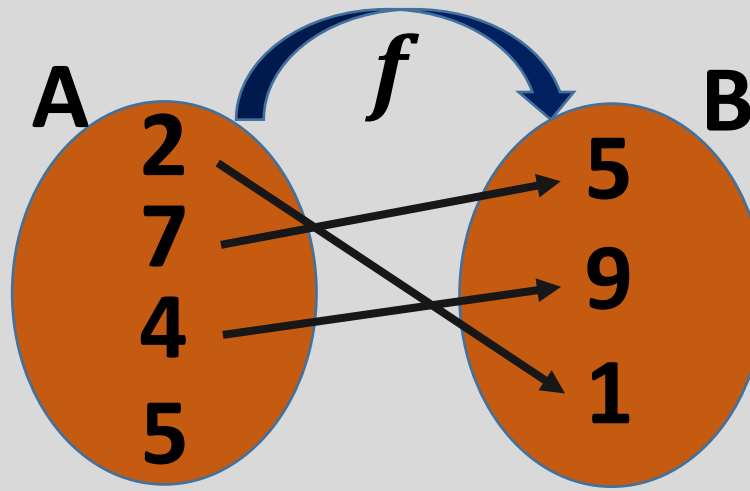
pues el $\text{Ran}(g) = B$

$\{2, 3, 5, 8\} = \{2, 3, 5, 8\}$

g ES biyectiva

PROBLEMA 6

Sea la función:



¿Existe f^{-1} ? En caso exista, halle $\text{Dom}(f^{-1})$ y $\text{Ran}(f^{-1})$

Resolución

Recordar:

Si $f: A \rightarrow B$ es una función *biyectiva* entonces
 $\exists f^{-1}$

Del gráfico $f = \{(2; 1), (7; 5), (4; 9)\}$

I) f es Inyectiva

pues **NO** se repite ningún elemento del rango; la correspondencia es uno a uno

ALGEBRA

II) f es Sobreyectiva

Pues: $\text{Ran}(f) = B$

$$\{1, 5, 9\} = \{1, 5, 9\}$$

f es biyectiva \Rightarrow Existe f^{-1}

$$f^{-1} = \{(1; 2), (5; 7), (9; 4)\}$$

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f^{-1}) &= \{1, 5, 9\} \\ \text{Ran}(f^{-1}) &= \{2, 4, 7\}\end{aligned}$$

PROBLEMA 7 Se tiene $f: A \rightarrow B$ función, donde $f = \{(2; 9), (3; 4), (4; 5)\}$. El costo de una bicicleta viene dado por el producto de los valores del dominio de la función inversa de f
¿Cuál es el costo de la bicicleta?

RESOLUCIÓN

Si $f: A \rightarrow B$, **ES BIYECTIVA** $\rightarrow \exists f^{-1}$

I) f es inyectiva

$$f = \{(2; \underline{9}), (3; \underline{4}), (4; \underline{5})\}$$

pues **NO** se repite ningún elemento del rango

II) f es sobreyectiva

$$\text{rang}(f) = B$$

$$\{4, 5, 9\} = \{4, 5, 9\}$$

ALGEBRA

por lo tanto f es biyectiva $\rightarrow \exists f^{-1}$

$$f^{-1} = \{(9; 2), (4; 3), (5; 4)\}$$

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \{9, 4, 5\}$$

nos piden el costo de la bicicleta

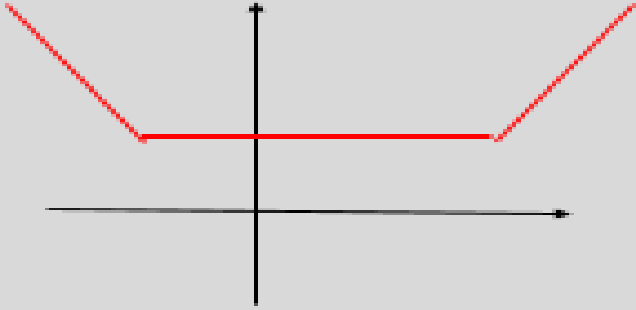
$$\text{el producto de los Valores del dominio} \begin{cases} = 9 \times 4 \times 5 \\ = 180 \end{cases}$$

EL COSTO DE LA BICICLETA ES
180 SOLES

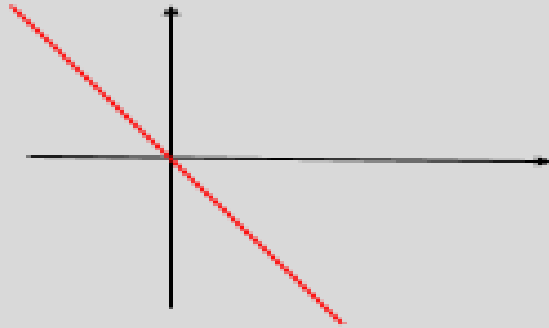
 SACO OLIVEROS

PROBLEMA 8 ¿Cuál de las siguientes funciones son inyectivas?

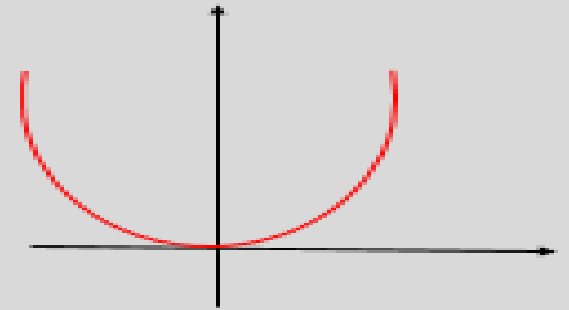
I)



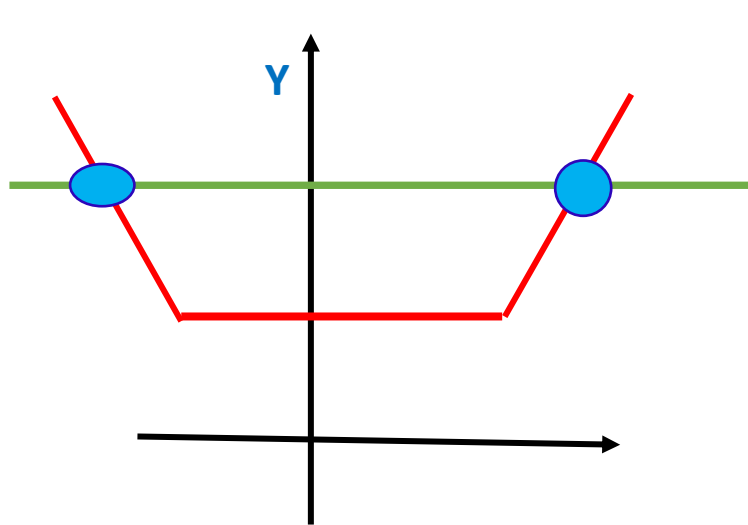
II)



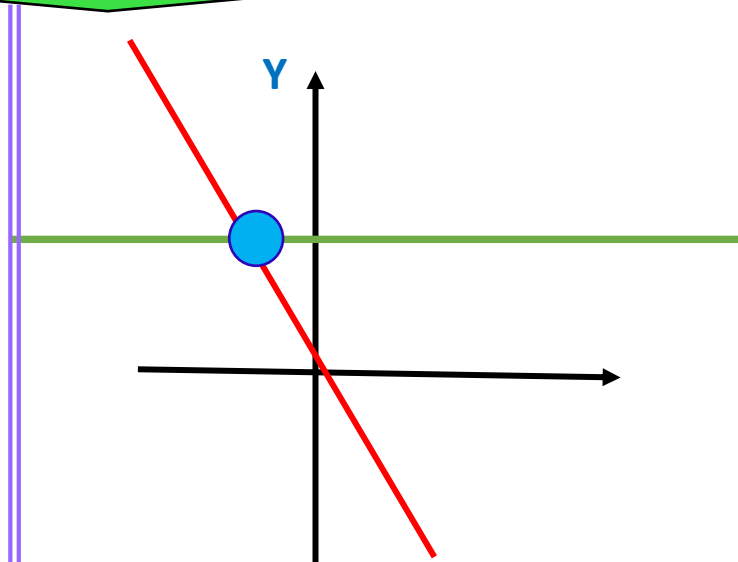
III)



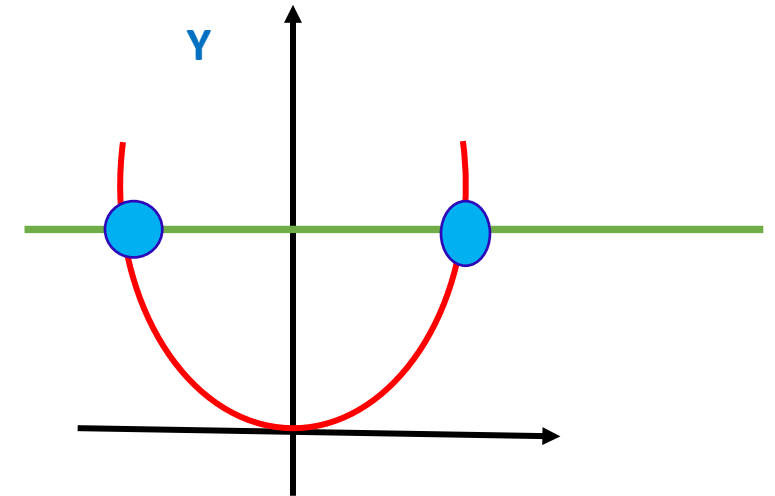
Teorema: Una función f es inyectiva si cualquier RECTA HORIZONTAL corta a su gráfica a lo más en un punto



NO ES INYECTIVA



SI ES INYECTIVA



NO ES INYECTIVA