# GEOMETRÍA

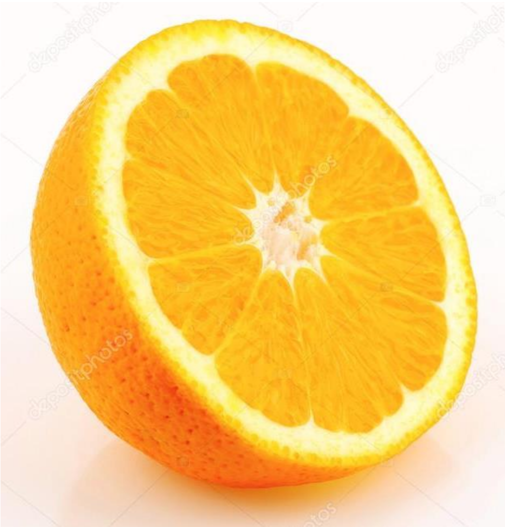
## Chapter 20

4th
SECONDARY

## ESFERA – TEOREMA DE PAPPUS - GULDIN

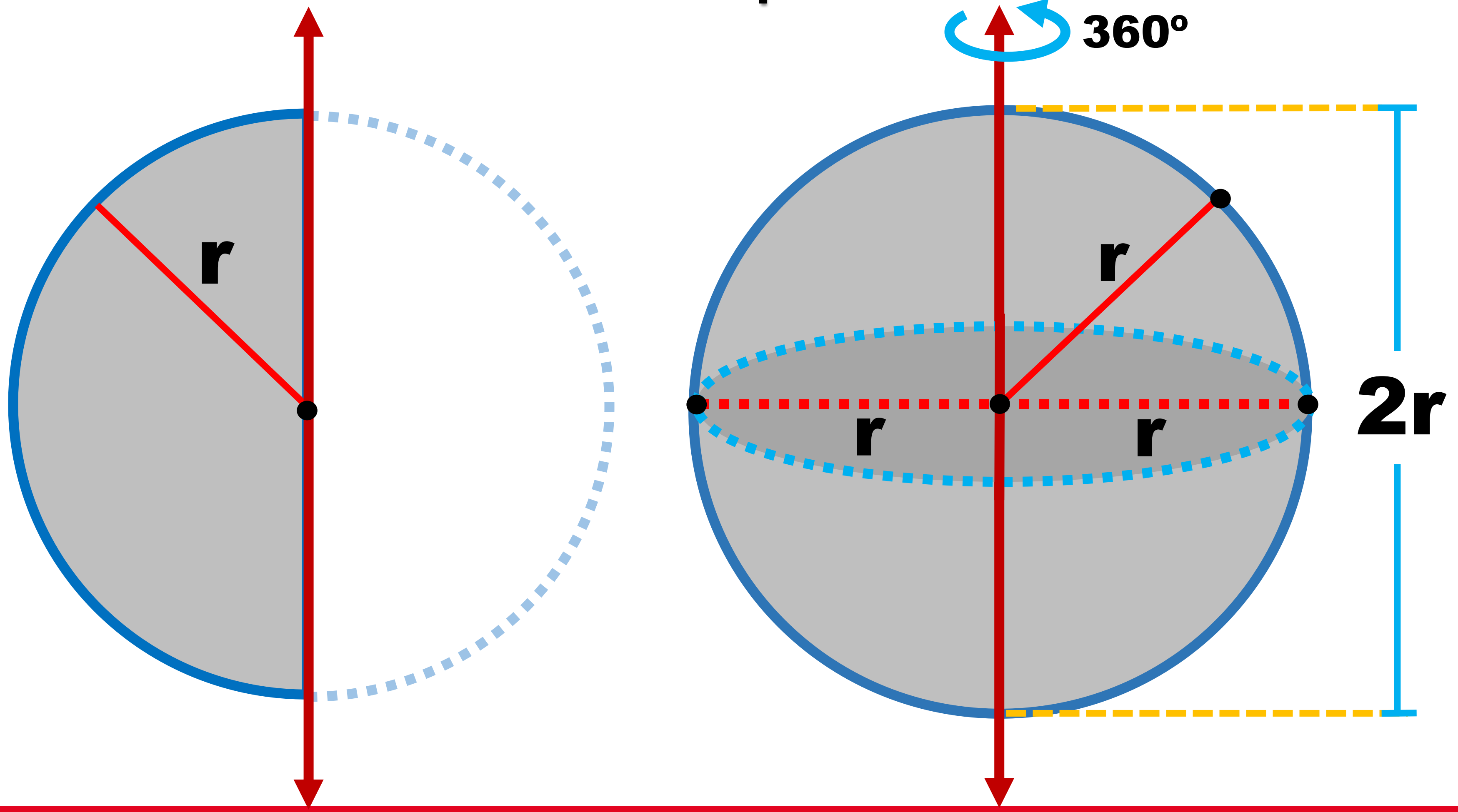
SACO OLIVEROS

La esfera es el sólido que tiene infinitos ejes de simetría nos sirve para diseñar objetos como una billa de acero, un balón de fútbol, un globo terráqueo, se usa en rodamientos, etc. La naturaleza nos brinda frutas de forma esférica, una naranja, el limón, la lima, una cereza, etc.



# ESFERA

Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira 360° alrededor de la recta que contiene a su diámetro.



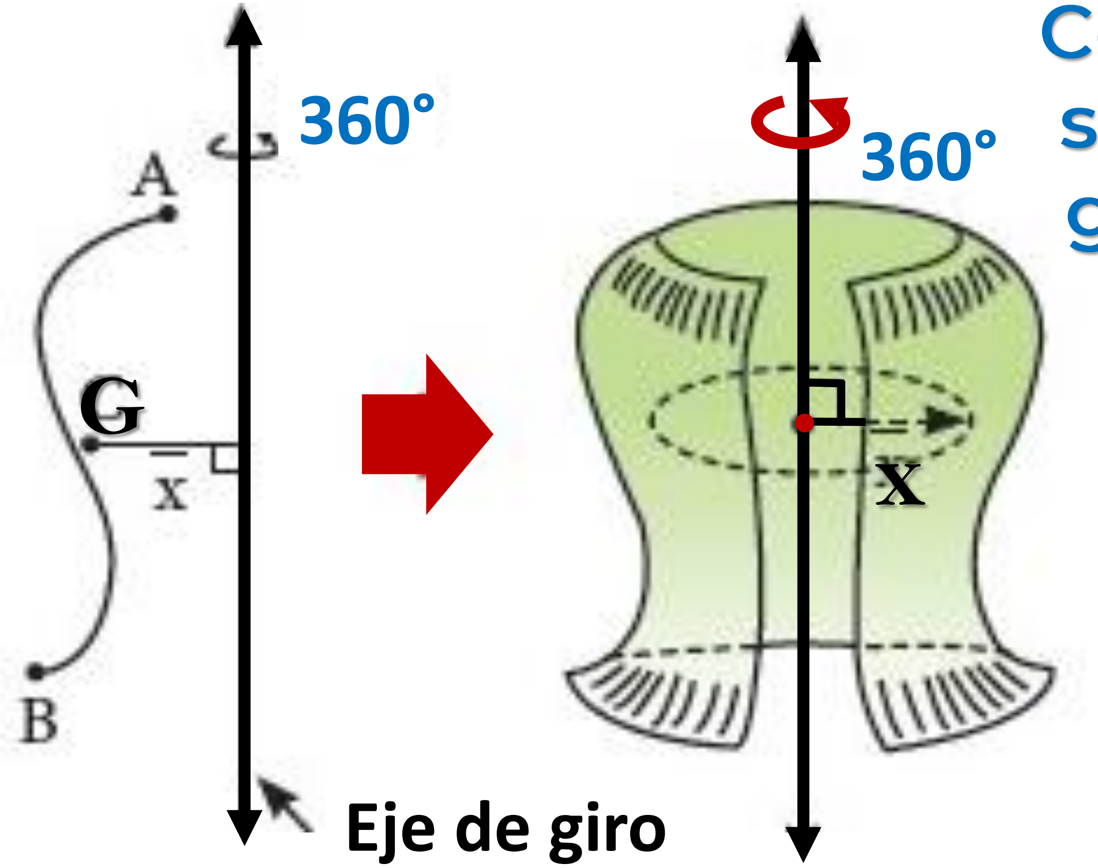

$$V_{(esf)} = \frac{4}{3}\pi.r^3$$

$$A_{(esf)} = 4\pi.r^2$$

# TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

## Superficie de revolución

Es el área de la superficie generada por una línea plana al girar 360° en torno a una recta coplanar y no secante a dicha línea.




Corte de la superficie generada

$$A_{(SG)} = 2\pi(x)L$$

$A_{(SG)}$ : área de la superficie generada.

$L$ : longitud de la línea AB.

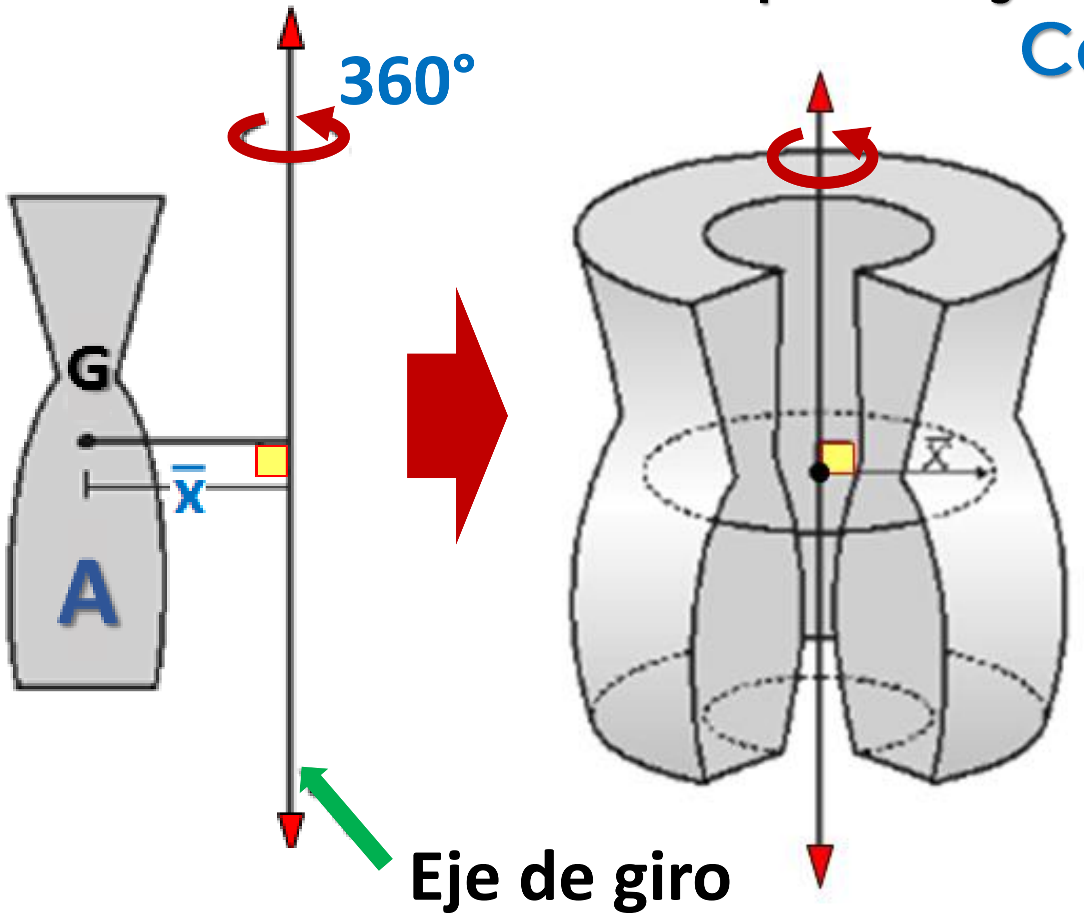
$G$ : centroide de la línea AB.

$x$ : Longitud del radio de la circunferencia descrita por el centroide.

# TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

## Sólido de revolución

Es el volumen del sólido generado por una región plana al girar 360° en torno a una recta coplanar y no secante a dicha región.




### Corte del sólido generado

$$V_{SG} = 2.\pi.(x).A$$

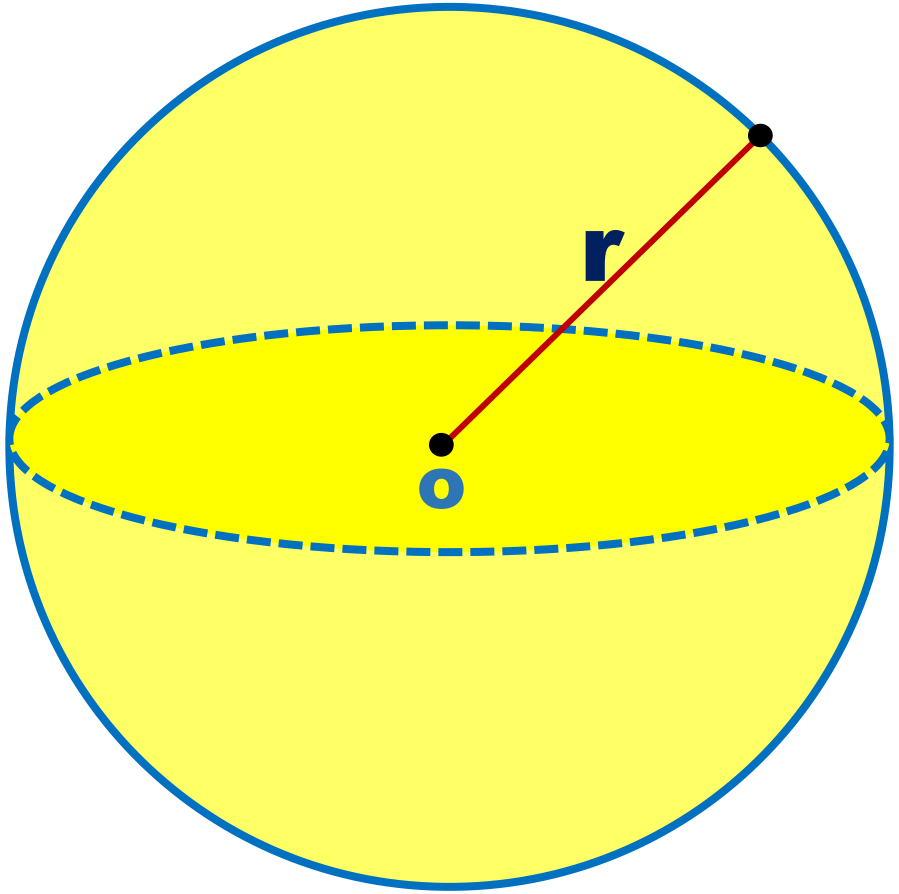
$V_{SG}$ : volumen del sólido generado.

A: área de la región generadora.

G: centroide de la región generadora.

$x$: Longitud radio de la circunferencia descrita por el centroide.

1. Calcule el volumen de una esfera, si el área de su superficie es $12\pi\ u^2$.




## Resolución

- Piden: V

$$V = \frac{4}{3}\pi . r^3 \quad \text{... (1)}$$

- Por dato:

$$A_{(ESF)} = 12\pi$$

$$4\cancel{\pi}r^2 = 12\cancel{\pi}$$

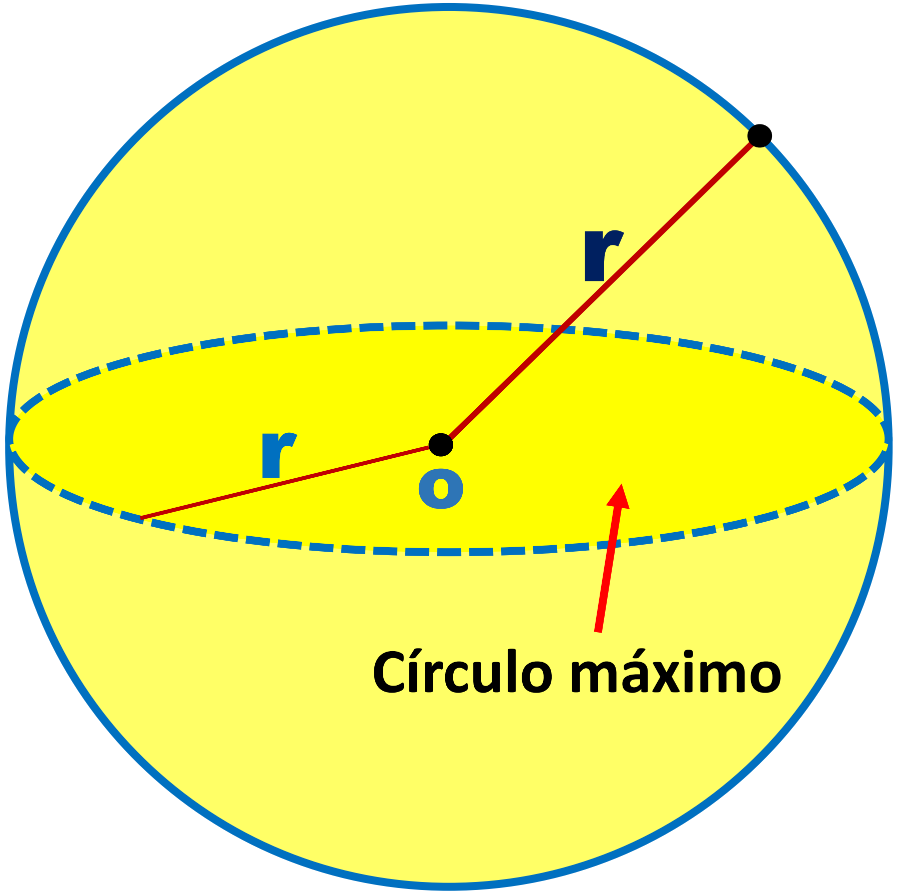
$$r = \sqrt{3} \quad \text{... (2)}$$

- Reemplazando 2 en 1.

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 = \frac{4}{\cancel{3}}\pi.\cancel{3}\sqrt{3}$$

$$\boxed{V = 4\sqrt{3}\pi\ u^3}$$

2. Calcule el volumen de una esfera, si el área de su círculo máximo es $12\pi$ u$^2$.




## Resolución

- Piden: V

$$V = \frac{4}{3}\pi . r^3 \quad \text{... (1)}$$

- Por dato:

$$A_{(Cir)} = 12\pi$$

$$\cancel{\pi} r^2 = 12\cancel{\pi}$$

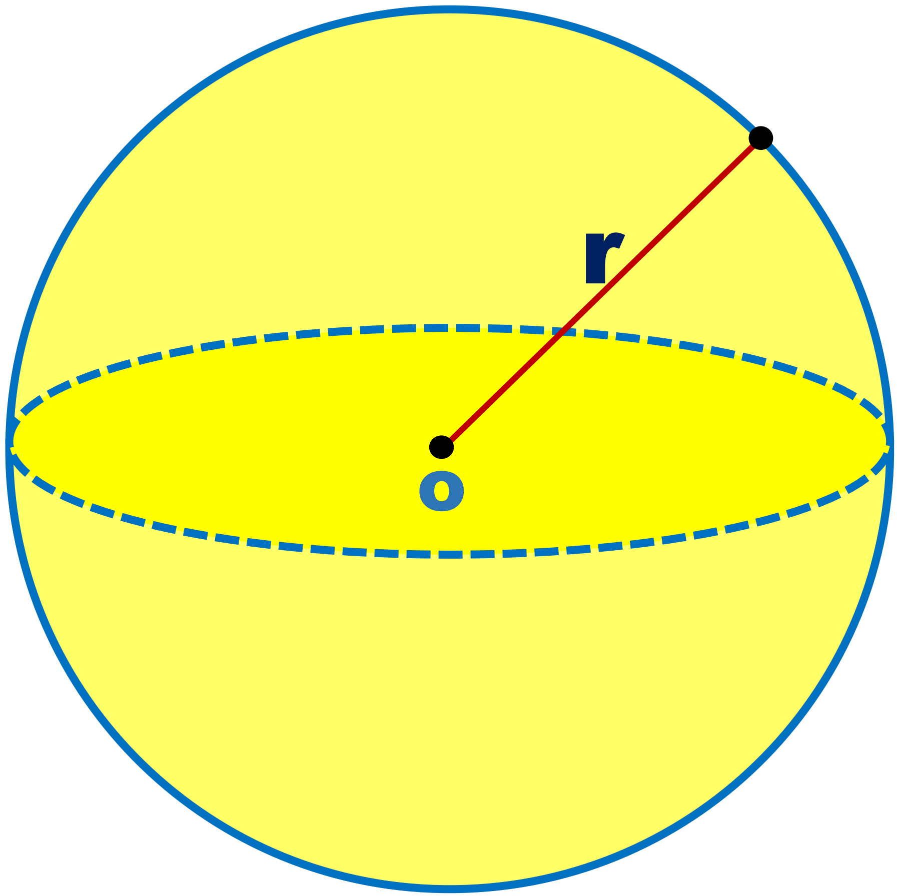
$$r = 2\sqrt{3} \quad \text{... (2)}$$

- Reemplazando 2 en 1.

$$V = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = \frac{4}{\cancel{3}}\pi(8.\cancel{3}\sqrt{3})$$

$$\boxed{V = 32\sqrt{3}\pi \text{ u}^3}$$

3. Halle la longitud del radio de una esfera, sabiendo que su volumen es numéricamente igual al doble del área de su superficie esférica.




## Resolución

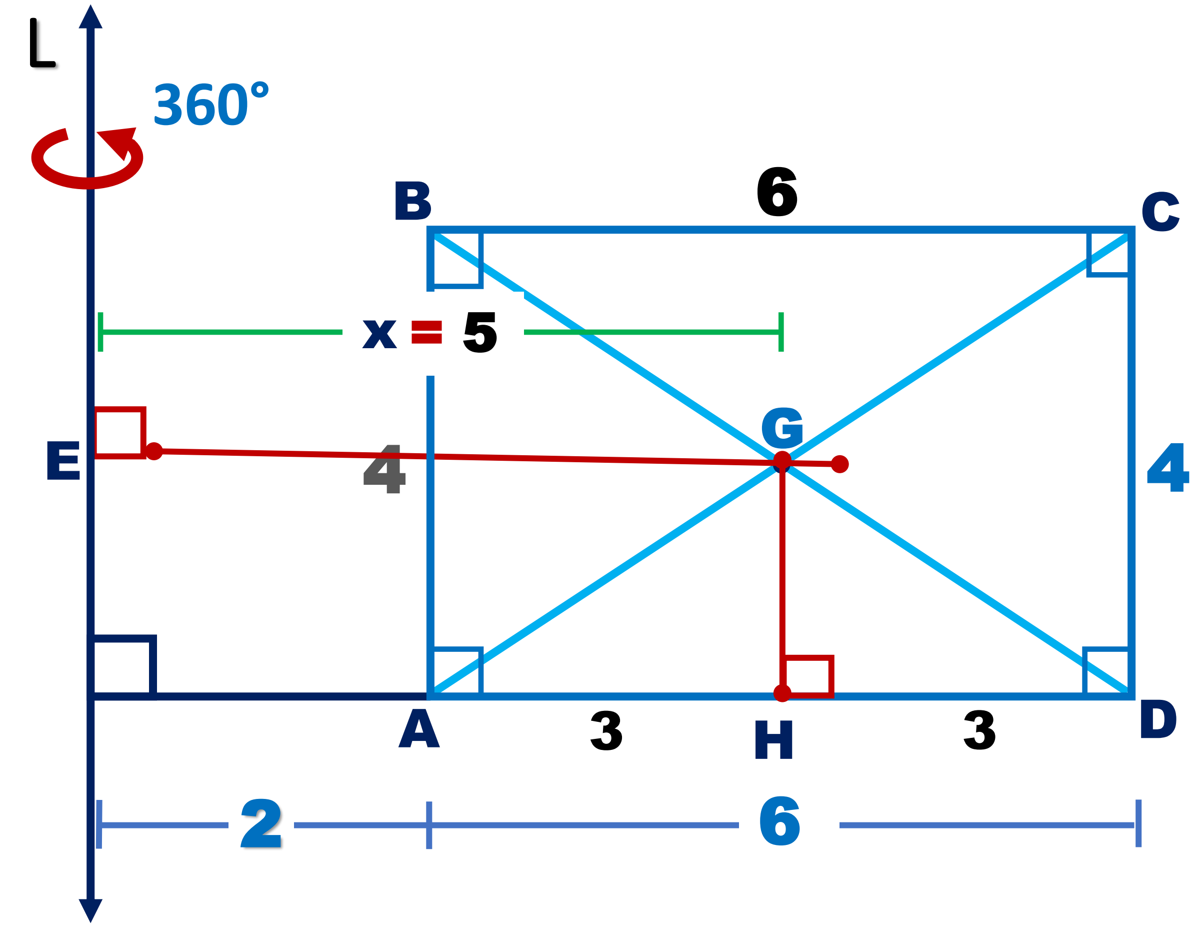
- Piden: r
- Por dato:

$$V_{(Esf)} = 2(A_{(Esf)})$$

$$\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}.\,\cancel{r^3} = 2(\cancel{4}\cancel{\pi}.\,\cancel{r^2})$$

$$\boxed{r = 6}$$

4. Calcule el área de la superficie generada, por el rectángulo al girar 360° alrededor de la recta L.




## Resolución

- Piden: $A_{(SG)}$

$$A_{(SG)} = 2\pi.x.L$$

- Del gráfico:

$$L = 6 + 4 + 6 + 4$$
$$L = 20$$

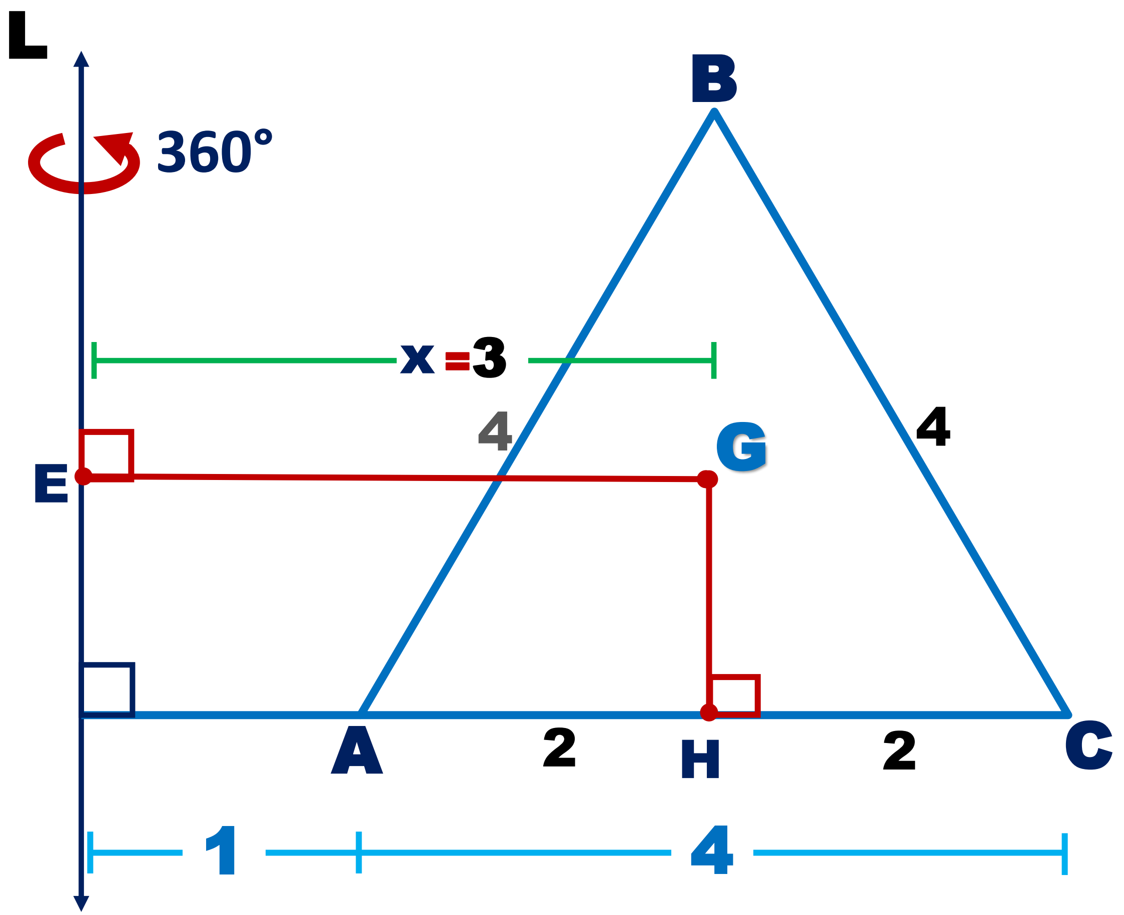
- Se traza $\overline{GE} \perp \overleftrightarrow{L}$
- Se traza $\overline{GH} \perp \overline{AD}$ $\quad AH = HD = 3$
- Reemplazando al teorema.

$$A_{(SG)} = 2\pi.5.20$$

$$\boxed{A_{(SG)} = 200\pi\ u^2}$$

5. Calcule el área de la superficie generada por el triángulo equilátero al girar 360° alrededor de la recta L.




## Resolución

- Piden: $A_{(SG)}$

$$A_{(SG)} = 2\pi.x.L$$

- Del gráfico:

$$L = 4 + 4 + 4$$

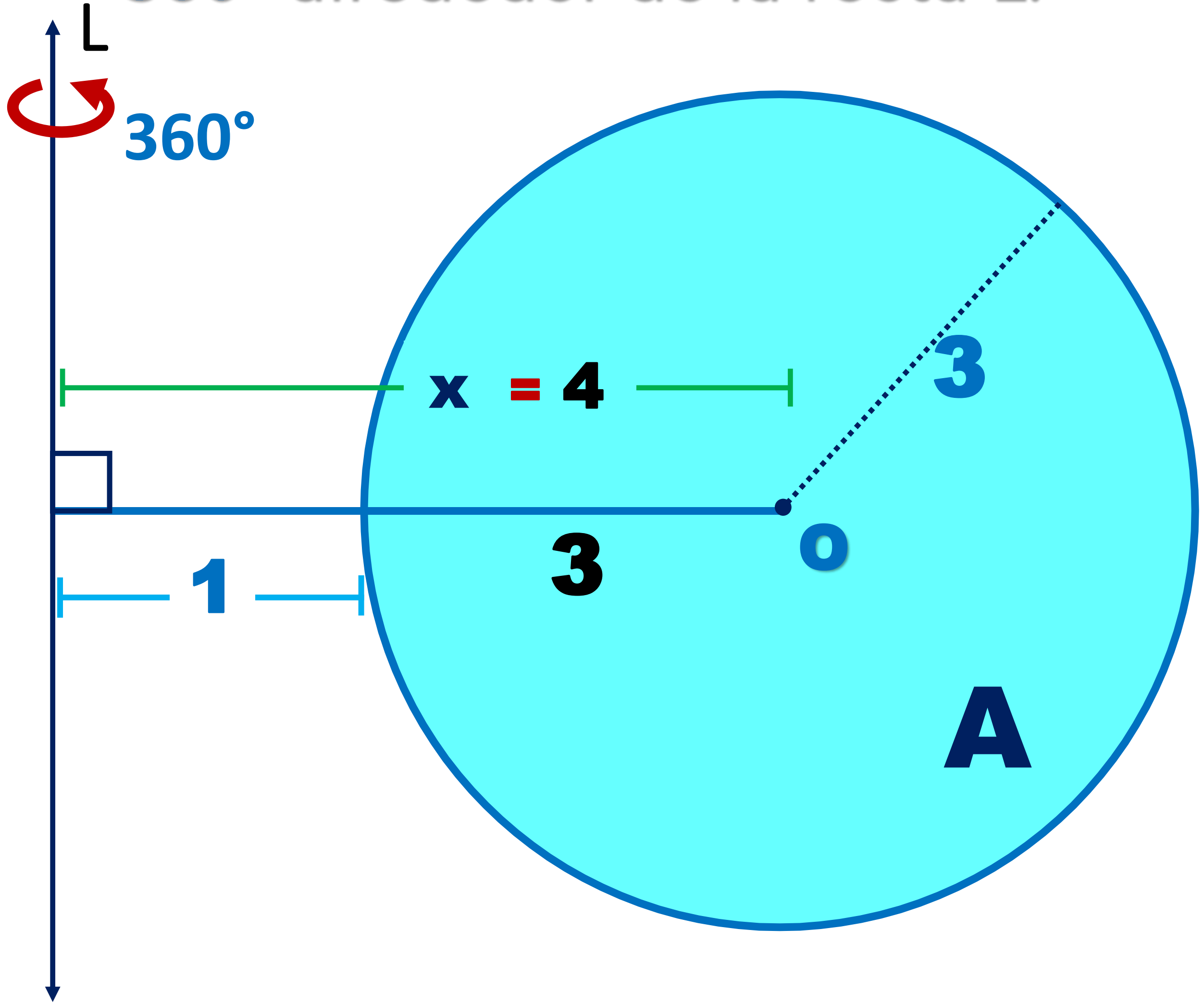
$$L = 12$$

- Se traza $\overline{GE} \perp \overleftrightarrow{L}$
- Se traza $\overline{GH} \perp \overline{AC}$ $AH = HC = 2$
- Reemplazando al teorema.

$$A_{(SG)} = 2\pi.3.12$$

$$\boxed{A_{(SG)} = 72\pi\ u^2}$$

6. Calcule el volumen de sólido generado por el círculo al girar 360° alrededor de la recta L.




## Resolución

- Piden: $V_{(SG)}$

$$V_{(SG)} = 2\pi.x.A$$

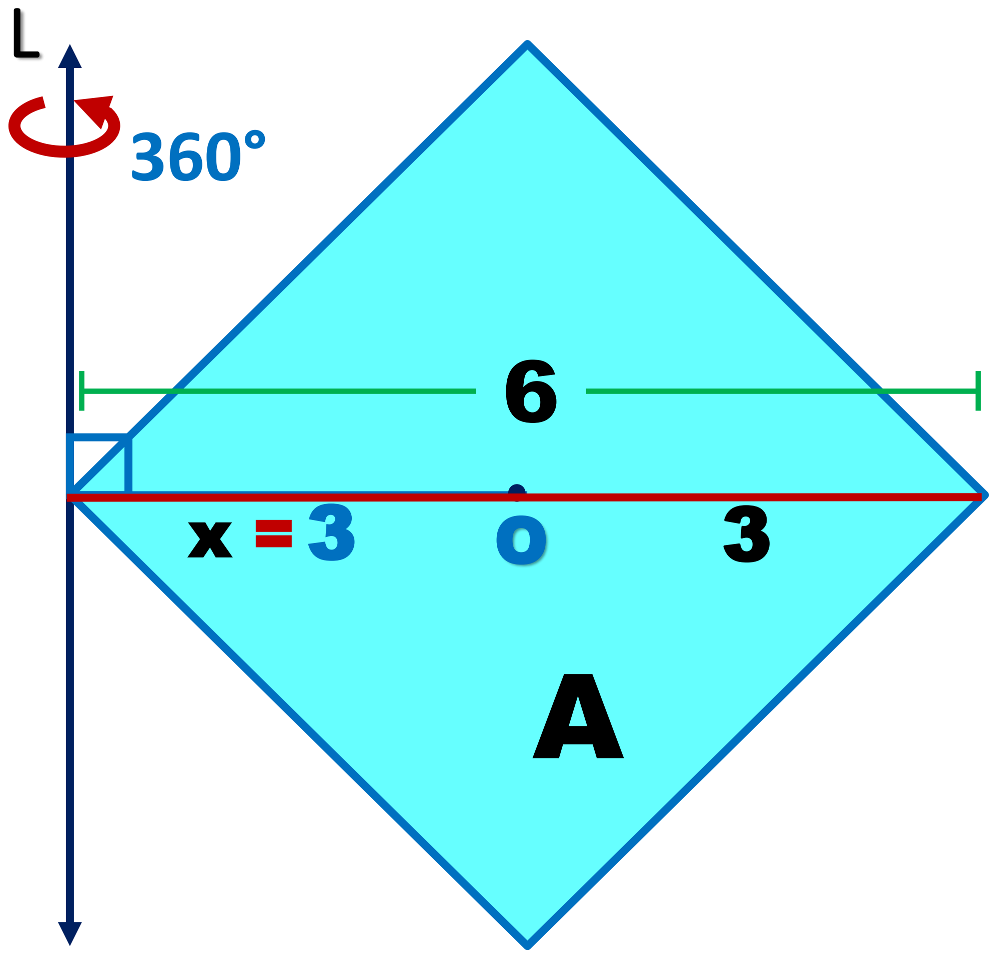
- Reemplazando:

$$V_{(SG)} = 2\pi\ (4)(\pi.3^2)$$

$$V_{(SG)} = 2\pi.(4)(9\pi)$$

$$\boxed{V_{(SG)} = 72\pi^2\ u^3}$$

7. Calcule el volumen de sólido generado por la región cuadrada de centro O, al girar 360° alrededor de la recta L.




## Resolución

- Piden: $V_{(SG)}$

$$V_{(SG)} = 2\pi.x.A$$

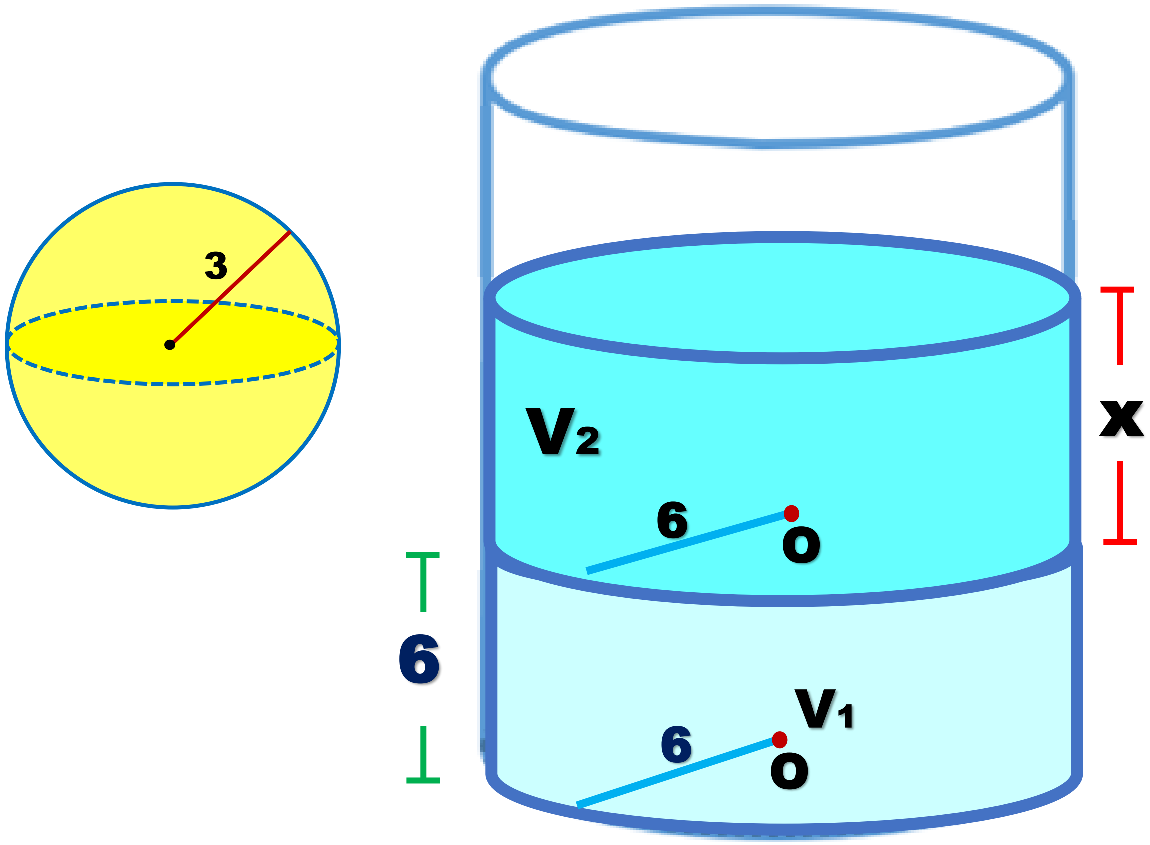
- Reemplazando:

$$V_{(SG)} = 2\pi\ (3)\left(\frac{6^2}{2}\right)$$

$$V_{(SG)} = 2\pi.(3)(18)$$

$$\boxed{V_{(SG)} = 108\pi\ u^3}$$

8. Se tiene un recipiente en forma de cilindro circular recto de 6 cm de radio el cual contiene agua hasta una altura de 6 cm. Luego se echa una esfera metálica de radio 3 cm. Determine la altura que sube el agua en dicho recipiente.




## Resolución

- Piden: x
- Del gráfico:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{4}{3}\pi . 3^3 = \pi.(6)^2(x)$$

$$\cancel{36}\pi = \cancel{36}\pi.x$$

$$\boxed{1\text{ cm} = x}$$

SACO OLIVEROS