



GEOMETRÍA

Capítulo 2

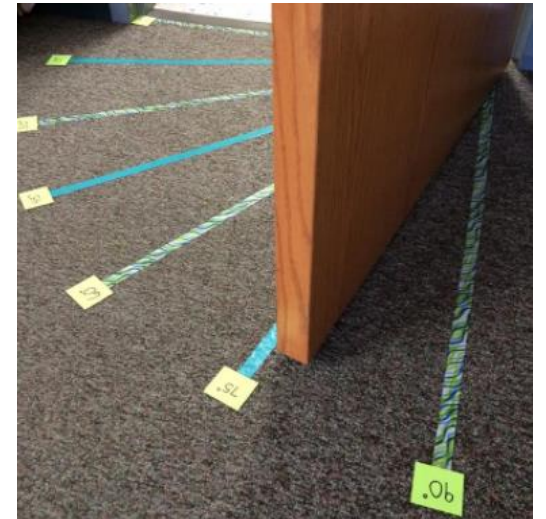
Sesión 2

3th
SECONDARY

ÁNGULOS



 **SACO OLIVEROS**



Helicomotivación



Definición: Es aquella figura geométrica que está formado por dos rayos que tienen en común el mismo origen.

ELEMENTOS:

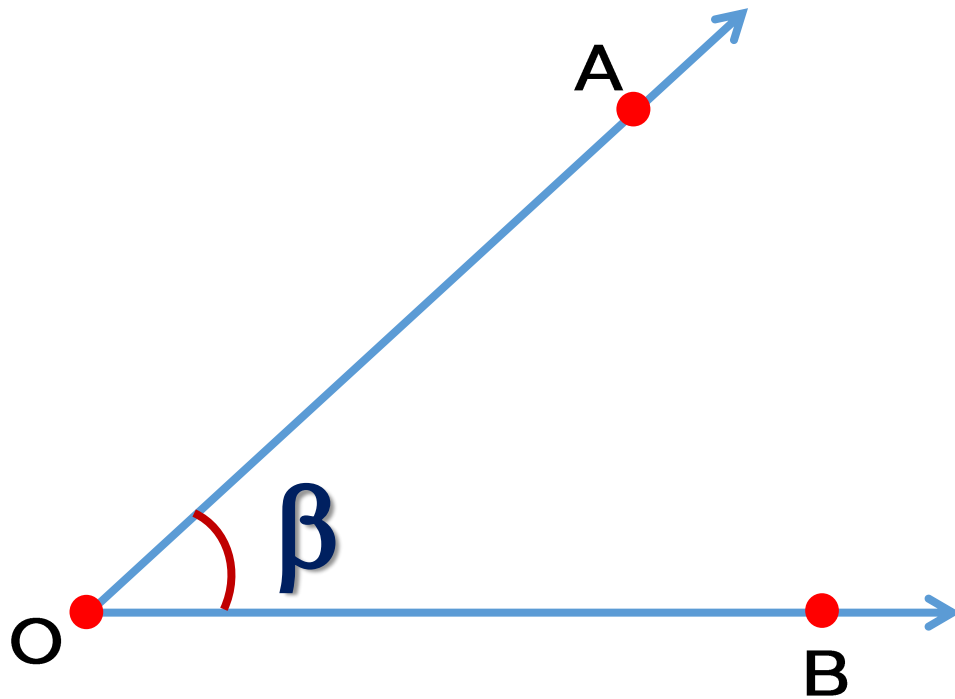
- Vértice : O
- Lados : \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} .

NOTACIÓN

$\sphericalangle AOB$: Ángulo AOB.

$m\angle AOB$: medida del ángulo AOB.

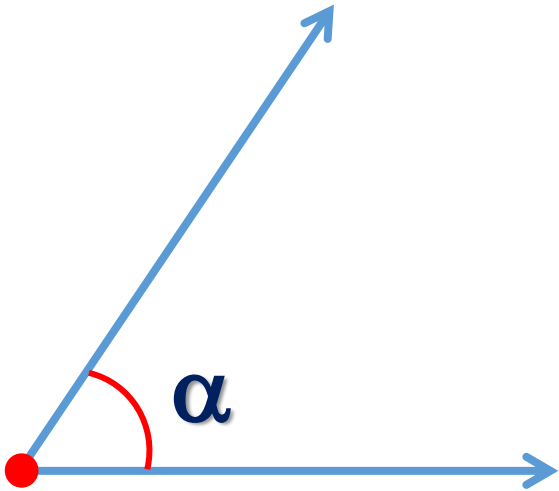
$$m\angle AOB = \beta$$



CLASIFICACIÓN

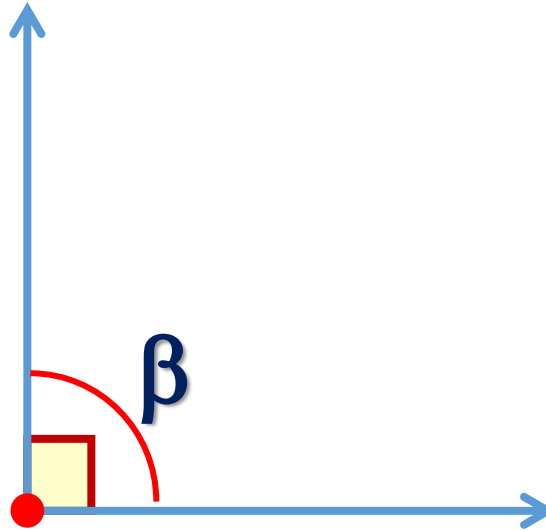


- De acuerdo a su medida.



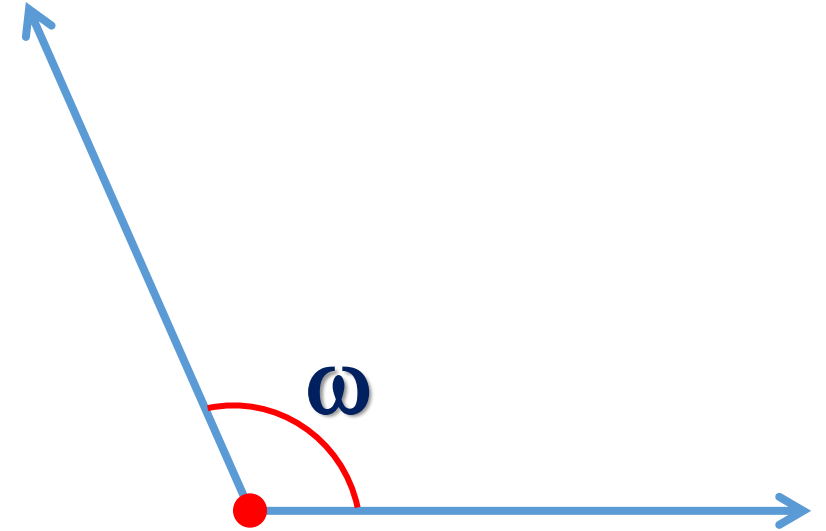
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

∠ Agudo



$$\beta = 90^\circ$$

∠ Recto

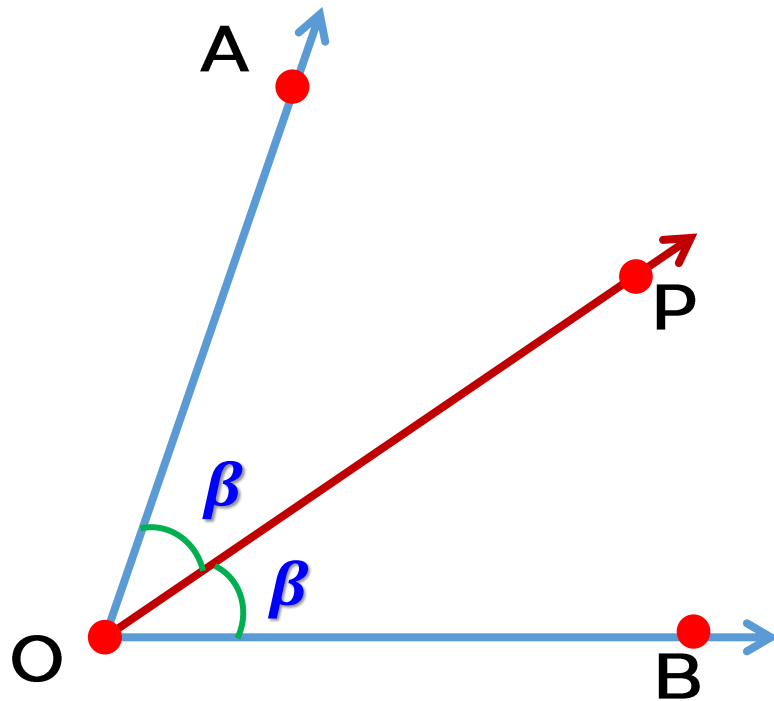


$$90^\circ < \omega < 180^\circ$$

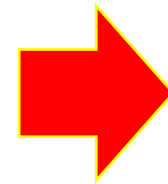
∠ Obtuso



Bisectriz: Es aquel rayo cuyo origen es el vértice de un ángulo y que lo divide a este en dos ángulos de igual medida.



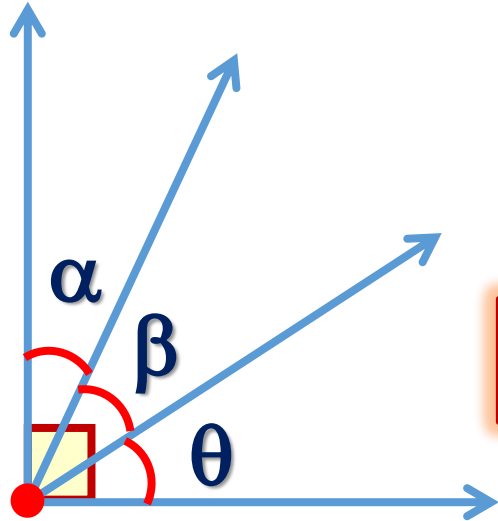
Si : \overrightarrow{OP} es bisectriz del $\angle AOB$



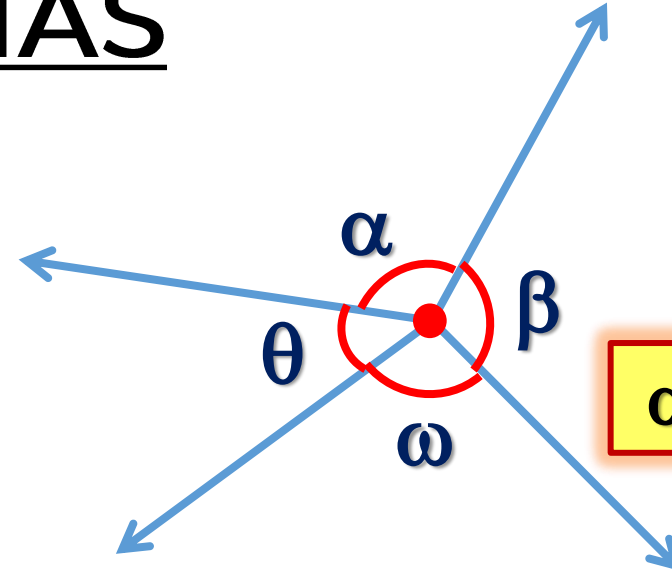
$$m \angle AOP = m \angle BOP$$



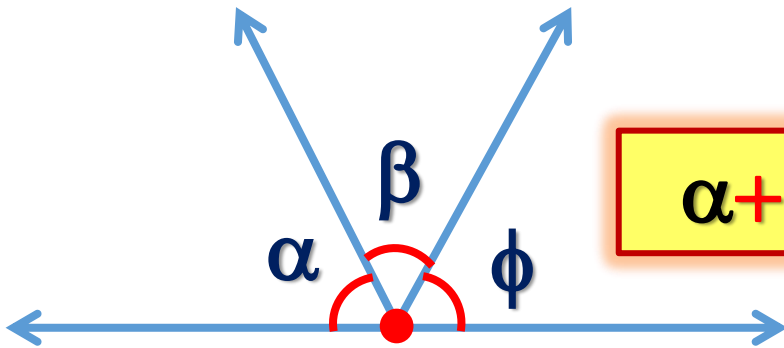
TEOREMAS



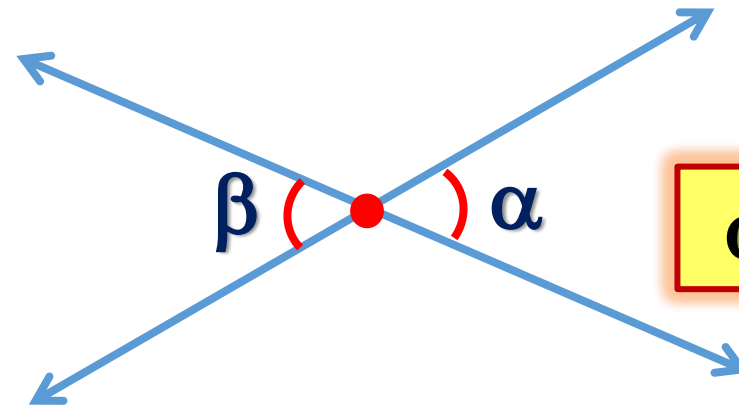
$$\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$$



$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360^\circ$$



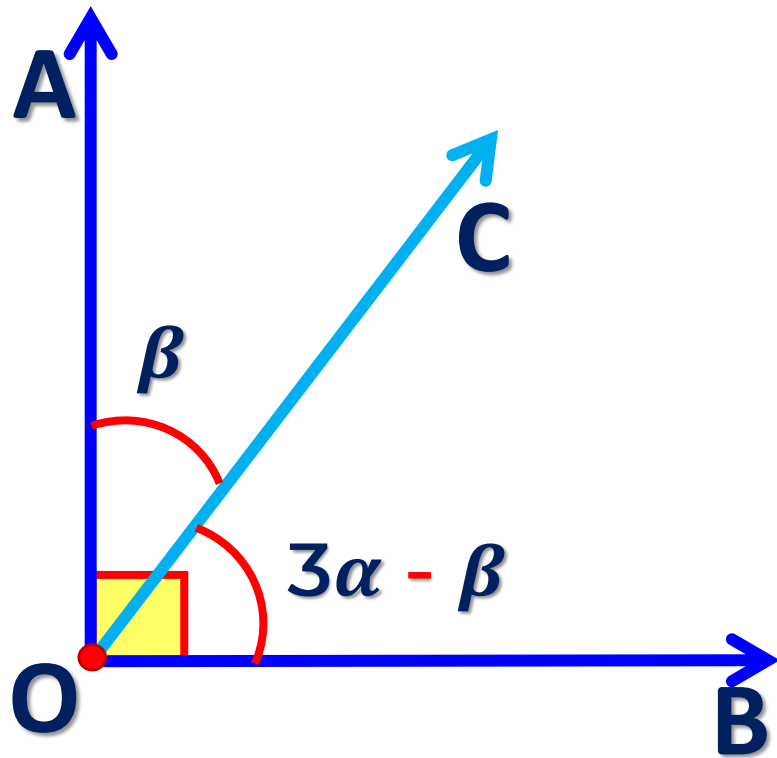
$$\alpha + \beta + \phi = 180^\circ$$



$$\alpha = \beta$$



1. Se tiene el ángulo recto AOB, si $m\angle AOC = \beta$, \overrightarrow{OC} es rayo del ángulo AOB y $m\angle BOC = 3\alpha - \beta$, halle el valor de α .



Dato: $m\angle AOB = 90^\circ$

Del gráfico se observa:

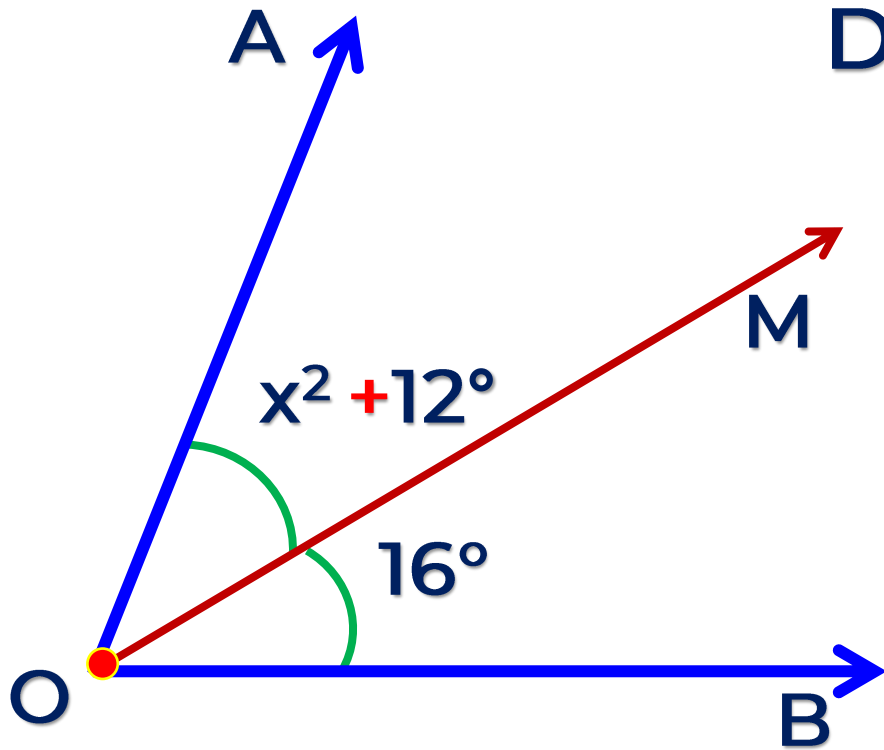
$$\Rightarrow 90^\circ = \cancel{\beta} + 3\alpha - \cancel{\beta}$$

$$90^\circ = 3\alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$



2. Se tiene un ángulo AOB, luego se traza la bisectriz OM, donde $m \angle AOM = x^2 + 12^\circ$, y $m \angle MOB = 16^\circ$. Halle el valor de x.



Dato: Si \overrightarrow{OM} es bisectriz $\angle AOB$

$\Rightarrow m \angle AOM = m \angle MOB$

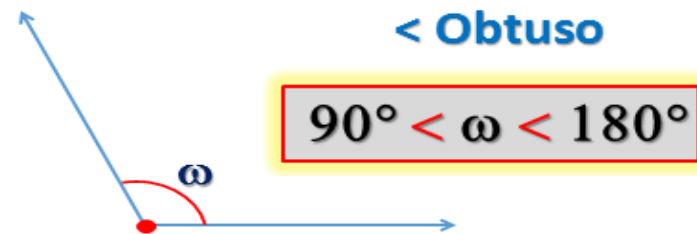
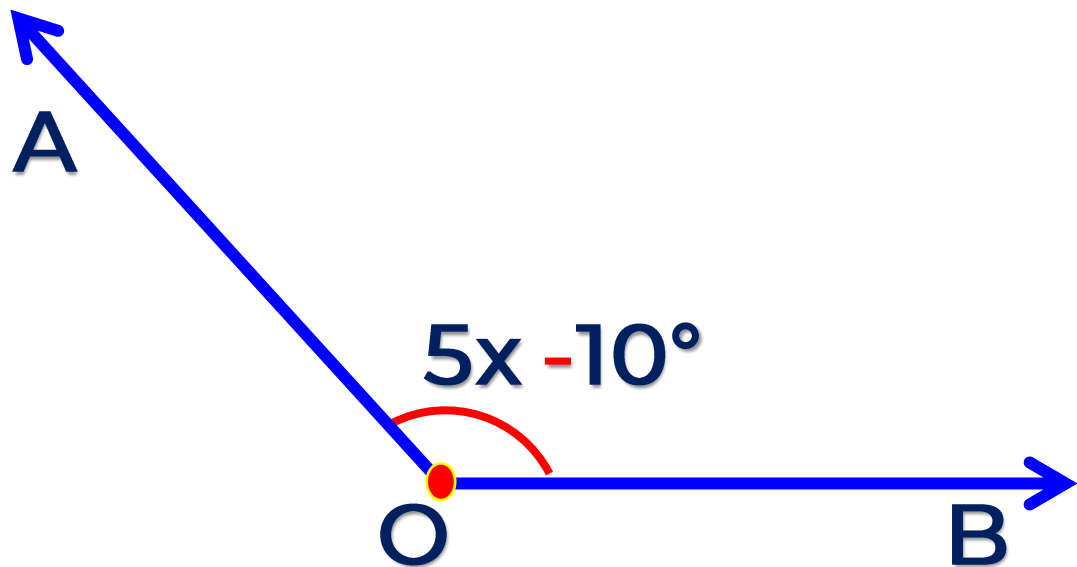
$$x^2 + 12^\circ = 16^\circ$$

$$x^2 = 4^\circ$$

$$x = 2^\circ$$



3. Según el gráfico, halle el mínimo valor entero de x si el $\angle AOB$ es obtuso.



➔ $90^\circ < 5x - 10^\circ < 180^\circ \quad (+10^\circ)$

~~$100^\circ < 5x < 190^\circ$~~ $(:5)$

$20^\circ < x < 38^\circ$

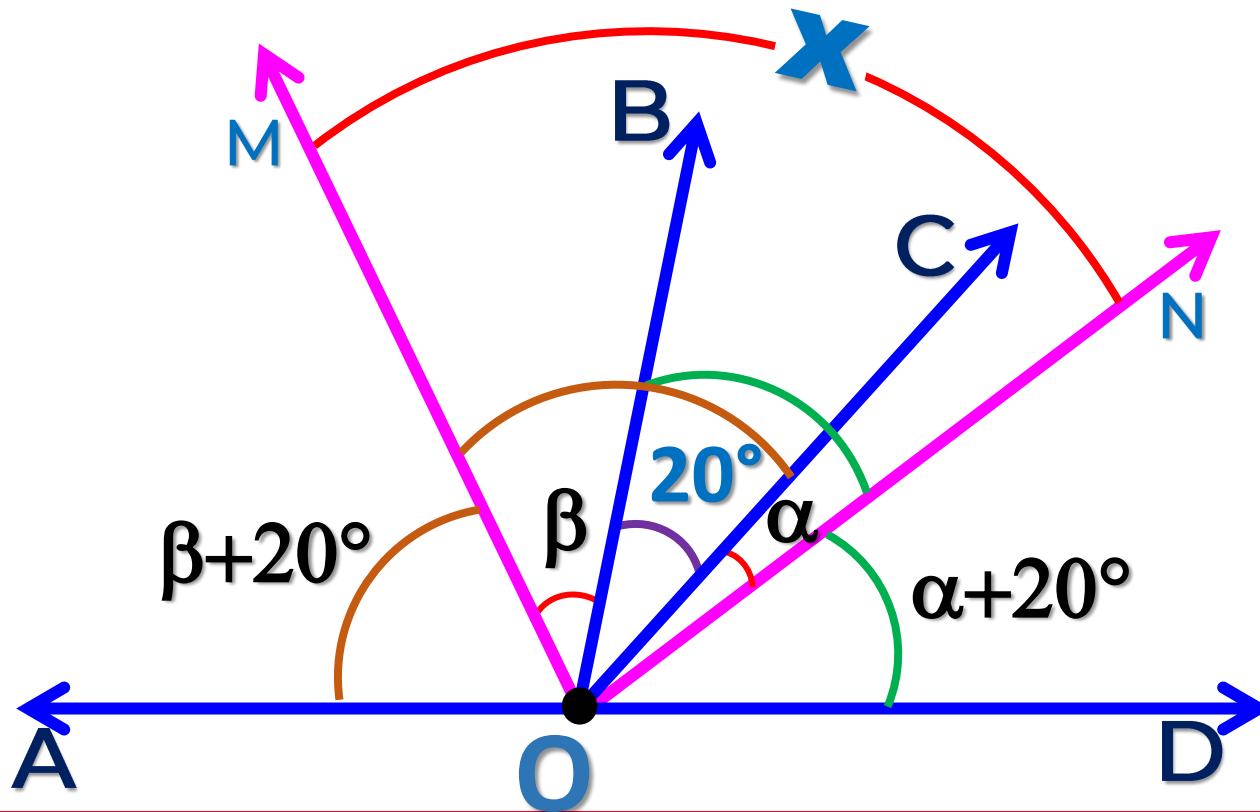
$x(\text{enteros}) = 21^\circ, 22^\circ, 23^\circ, \dots, 36^\circ \text{ y } 37^\circ$

$x_{\min} = 21^\circ$



4. Según el gráfico, halle la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

Si \overrightarrow{OM} es bisectriz de $\angle BOD$



$$\beta + 20^\circ + \beta + 20^\circ + \alpha + \alpha + 20^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\cancel{2\alpha} + \cancel{2\beta} = \cancel{120^\circ}$$

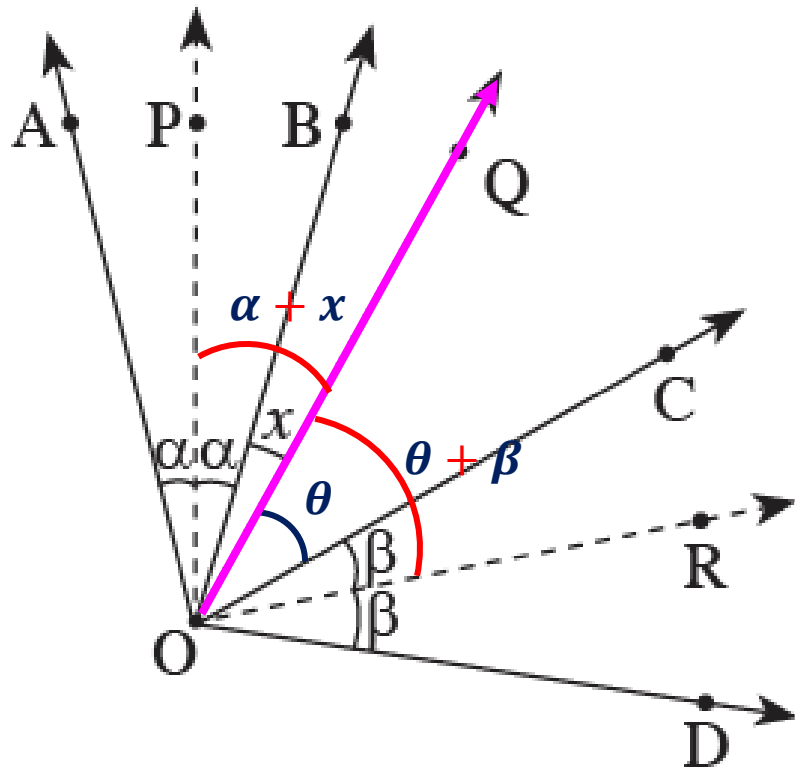
$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\alpha + \beta}_{60^\circ} + 20^\circ$$

$$\mathbf{x = 80^\circ}$$



5. Halle el valor de x si \overrightarrow{OQ} es bisectriz del $\angle POR$ y $m\angle BOR - m\angle AOP = 20^\circ$.



Dato: Si \overrightarrow{OQ} es bisectriz $\angle POR$

$$\alpha + x = \theta + \beta \quad \Rightarrow \quad x = \theta + \beta - \alpha$$

Dato: $m\angle BOR - m\angle AOP = 20^\circ$

$$(x + \theta + \beta) - (\alpha) = 20^\circ$$

$$x + \theta + \beta - \alpha = 20^\circ$$

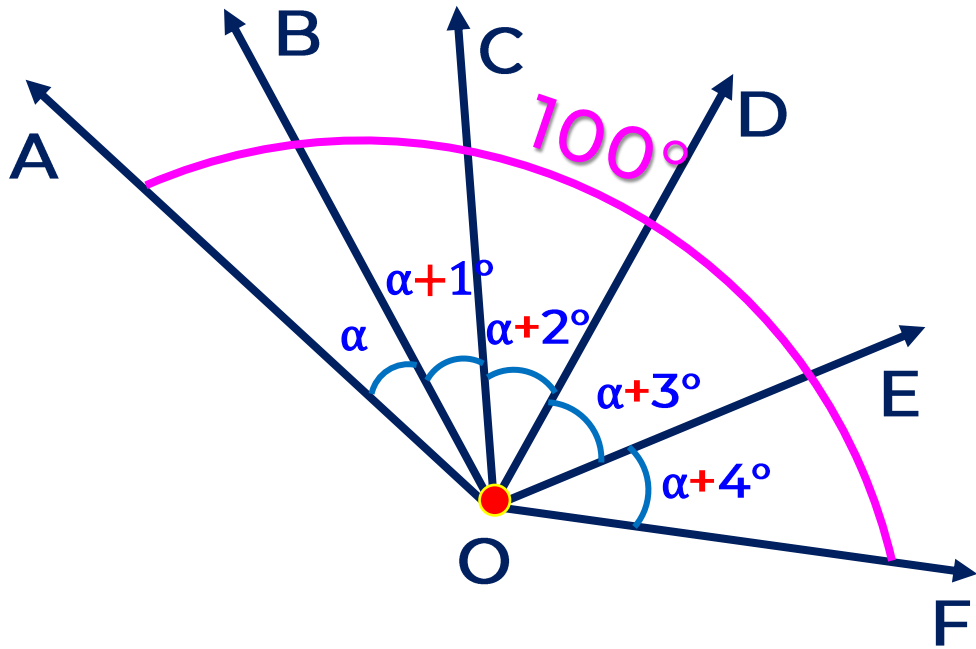
$$x + \underbrace{\theta + \beta}_{x} = 20^\circ$$

$$\mathbf{x = 10^\circ}$$



6. Se tienen cinco ángulos consecutivos, cuyas medidas son números enteros consecutivos. Halle la medida del mayor de ellos, si los cinco suman 100° .

De la figura observamos:



$$\alpha + \alpha + 1^\circ + \alpha + 2^\circ + \alpha + 3^\circ + \alpha + 4^\circ = 100^\circ$$

$$5\alpha + 10^\circ = 100^\circ$$

$$5\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 18^\circ$$

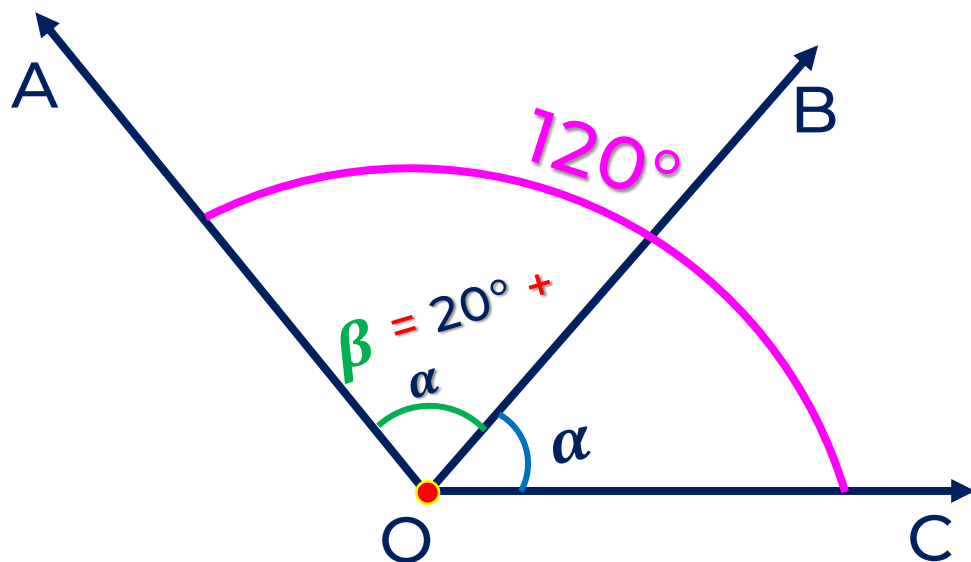
Nos Piden

Ángulo de mayor medida = $18^\circ + 4^\circ$

$$\text{Áng. mayor} = 22^\circ$$



7. La diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes AOB y BOC es 20° . Si $m\angle AOC = 120^\circ$, halle la $m\angle BOC$.



Dato: $m\angle AOB - m\angle BOC = 20^\circ$

$$\beta - \alpha = 20^\circ$$

$$\beta = 20^\circ + \alpha$$

Dato: $m\angle AOC = 120^\circ$

$$\beta + \alpha = 120^\circ$$

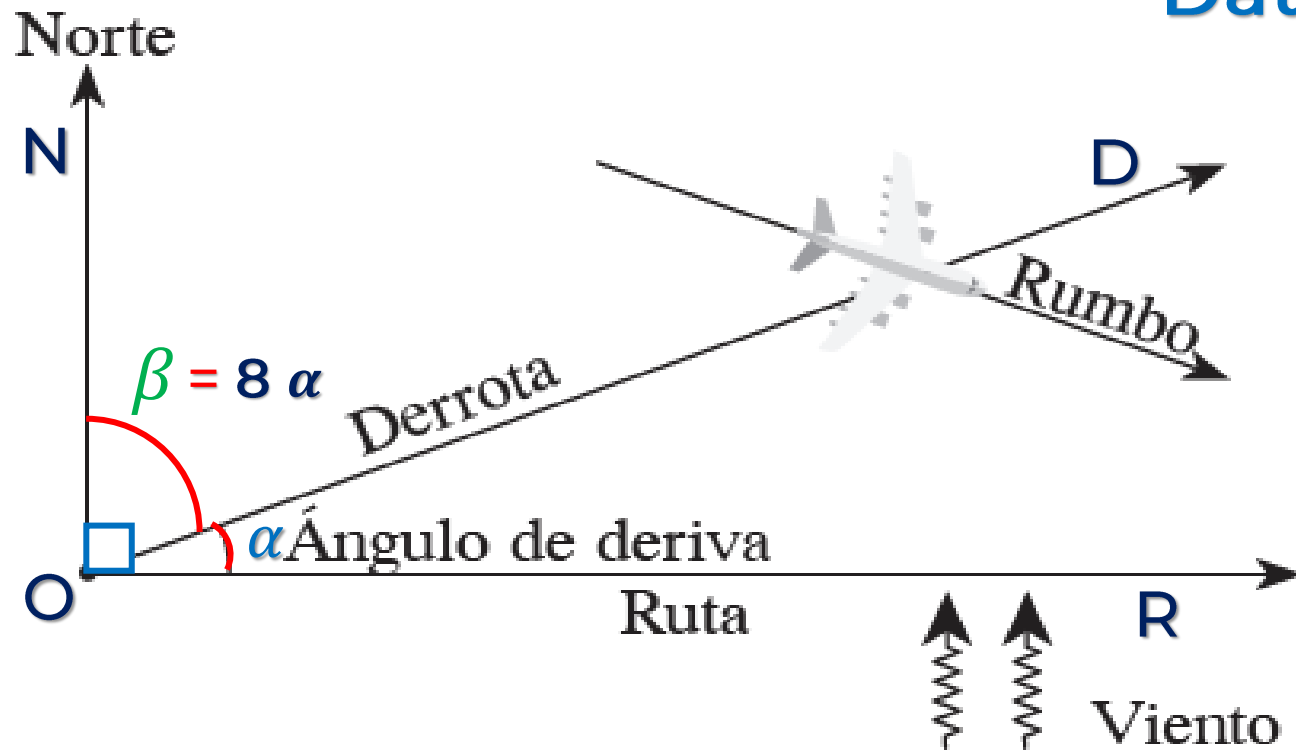
$$\alpha + 20^\circ + \alpha = 120^\circ$$

$$2\alpha = 100^\circ$$

$$\alpha = 50^\circ$$



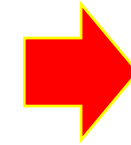
8. Según el gráfico, halle la medida del ángulo de deriva si se sabe que este es la octava parte del ángulo formado por el Norte y la Derrota; además la Ruta es perpendicular al Norte.



Dato: $m \angle \text{NOR} = 90^\circ$

$$m \angle \text{DOR} = \frac{1}{8} \cdot m \angle \text{NOR}$$

$$\alpha = \frac{1}{8} \beta \Rightarrow \boxed{8\alpha = \beta}$$



$$\beta + \alpha = 90^\circ$$

$$8\alpha + \alpha = 90^\circ$$

$$9\alpha = 90^\circ$$

$$\boxed{\alpha = 10^\circ}$$

