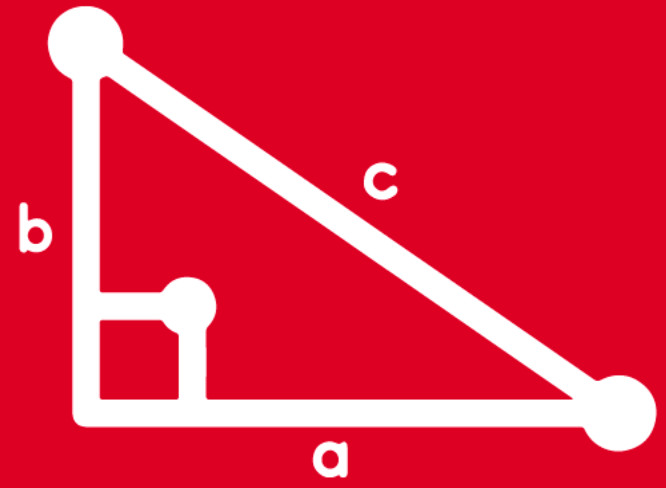
# TRIGONOMETRY

## Chapter 21

**3rd**
**SECONDARY**




**IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS II**

SACO OLIVEROS


"A veces sentimos
que lo que hacemos
es tan solo una gota
en el mar, pero el
mar sería menos si
le faltara una gota"
Madre
Teresa de Calcuta

# IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

## ¿QUÉ SON IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS?

Son igualdades entre expresiones que contienen razones trigonométricas de una o mas variables, las cuales se verifican para un conjunto de valores admisibles.

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

### IDENTIDADES PITÁGORICAS

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sec^2\theta - tan^2\theta = 1$$

$$csc^2\theta - cot^2\theta = 1$$

# Ejemplos:

$$\text{sen}^2 147° + \cos^2 147° = 1$$
$$\sec^2 31° - \tan^2 31° = 1$$
$$\csc^2 316° - \cot^2 316° = 1$$

Además debemos recordar:

## A ) IDENTIDADES RECÍPROCAS :

$$\text{sen}\theta.\csc\theta = 1 \;\rightarrow\; \csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

$$\cos\theta.\sec\theta = 1 \;\rightarrow\; \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta.\cot\theta = 1$$

## B ) IDENTIDADES POR DIVISIÓN:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

1 ) Demuestre que $sen^5x.\ csc^3x + cos^5x.\ sec^3x = 1$

Resolución
:

Agrupamos y luego aplicamos identidades recíprocas y pitagóricas:

$$E = (senx\ .\ cscx)^3 sen^2x + (cosx\ .\ secx)^3 cos^2x$$

$$E = (1)^3 sen^2x + (1)^3 cos^2x$$

$$E = sen^2x + cos^2x = 1$$

**Lqqd** : $sen^5x.\ csc^3x + cos^5x.\ sec^3x = 1$

2 ) Demuestre que $(1 - \text{sen}^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = \cot^2\theta$

## Resolución

Sea $E = (1 - \text{sen}^2\theta)(1 + \cot^2\theta)$

Luego reemplazamos:

$E = \cos^2\theta \,.\, \csc^2\theta$

$E = \left(\cos\theta \,.\, \dfrac{1}{\text{sen}\theta}\right)^2 = \cot^2\theta$

## Recordar

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Lqqd: $(1 - \text{sen}^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = \cot^2\theta$

3 ) Gustavo y Ángel participaron en un concurso, con un premio de s/.100 para el primer lugar y se les planteó una sola pregunta: Reducir la expresión siguiente

$$A = \sec\theta - \operatorname{sen}\theta \,.\, \tan\theta;$$

dieron como respuestas... Gustavo : $\operatorname{sen}\theta$ y Ángel : $\cos\theta$

¿ Quién dio la respuesta correcta y cuál fue ella ?

## Resolución

$$A = \frac{1}{\cos\theta} - \operatorname{sen}\theta . \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$A = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

$$A = \frac{\cancel{\cos^2}\theta}{\cancel{\cos}\theta} = \cos\theta$$

## Recordar

$\cos\theta . \sec\theta = 1 \rightarrow \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\therefore$ Ángel dio la respuesta correcta.

4 ) Simplifique $P = \left(\dfrac{\text{sen}^3\theta}{1-\cos^2\theta}\right)\csc\theta$

## Resolución:

Aplicamos identidades pitagóricas y recíprocas:

$$P = \left(\dfrac{\cancel{\text{sen}^3}\theta}{\cancel{\text{sen}^2}\theta}\right)\csc\theta$$

$$P = \text{sen}\theta \,.\, \csc\theta$$

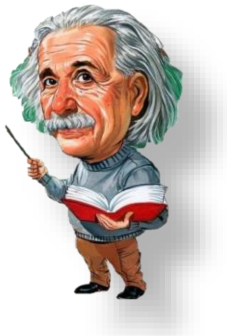
$$\boxed{P = 1}$$

### Recordar

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\text{sen}\theta . \csc\theta = 1$$



5 ) Simplifique E = senx ( cscx – senx )

**Resolución:**

E = senx.cscx – senx.senx

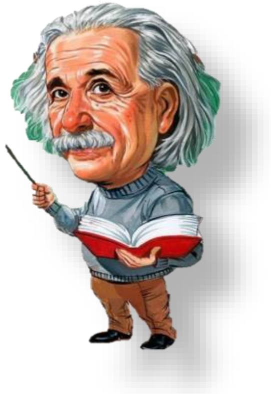
E = $1 - sen^2x$

$$\boxed{E = cos^2x}$$

## Recordar

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$



6 ) Simplifique $E = (\cos\theta + \text{sen}\theta \,.\, \tan\theta)\cos\theta$

## Resolución

$$E = \cos\theta.\cos\theta + \text{sen}\theta \,.\, \tan\theta.\cos\theta$$

$$E = \cos^2\theta + \text{sen}\theta \,.\, \frac{\text{sen}\theta}{\cancel{\cos\theta}}.\cancel{\cos\theta}$$

$$E = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta$$

$$\boxed{E = 1}$$

7 ) Reduzca $C = (2\,\text{senx} + \text{cosx})^2 + (\text{senx} - 2\,\text{cosx})^2$

## Resolución

$\therefore C = 4sen^2x + \cancel{4senx.cosx} + cos^2x + sen^2x - \cancel{4senx.cosx} + 4cos^2x$

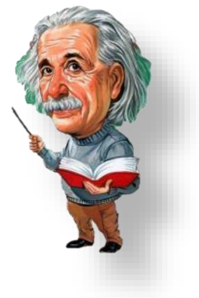
$C = 4sen^2x + cos^2x + sen^2x + 4cos^2x$

$C = 5sen^2x + 5cos^2x$

$C = 5(sen^2x + cos^2x)$

$C = 5(1)$

$\boxed{C = 5}$



8 ) Reduzca $P = \dfrac{\tan x + \tan^3 x}{\cot x + \cot^3 x}$

## Resolución

:

$$P = \frac{\tan x\,(1 + \tan^2 x)}{\cot x\,(1 + \cot^2 x)} = \frac{\tan x\,(\sec^2 x)}{\cot x\,(\csc^2 x)} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}$$

$$P = \frac{\dfrac{senx}{cos^3 x}}{\dfrac{cos}{sen^3 x}} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x} \quad = \tan^4 x$$