ALGEBRA

Chapter
23

2th

Session II

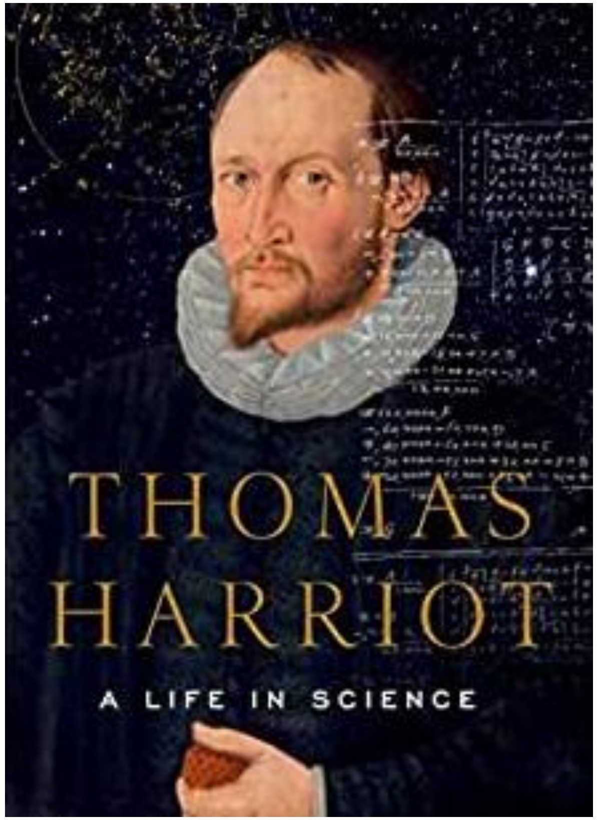
INECUACIONES DE 2DO GRADO

SACO OLIVEROS

THOMAS HARRIOT

Fue un matemático y astrónomo inglés. Nació en la ciudad de Oxford en el año 1560 y falleció el 2 de julio de 1621 en Londres. Fue el creador de notaciones y símbolos que se utilizan en álgebra tales como: > (mayor que) y < (menor que). Además, observó los satélites de Júpiter y las manchas solares.

La vida de Thomas Harriot sobresale notablemente en diferentes campos. Viaja a las Américas y realiza un trabajo etnográfico; en la astronomía observa la luna y dibuja mapas de sus descubrimientos; además se convierte en un matemático prolífico y se le atribuye la teoría de la refracción.



INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una inecuación de segundo grado con una incógnita (**ecuación cuadrática**), es aquella desigualdad condicional que reducida a su más simple expresión tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad ax^2 + bx + c \leq 0$$

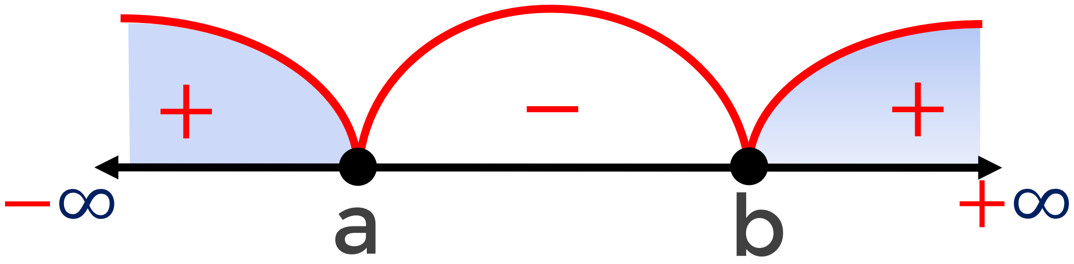
$a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

Para su resolución utilizaremos el criterio de los **PUNTOS CRÍTICOS**.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

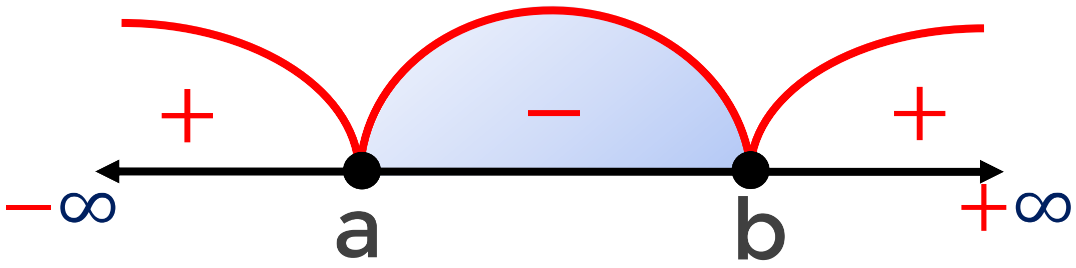
La solución de la inecuación de segundo grado depende del sentido de la desigualdad.

$(x-a)(x-b) \geq 0$



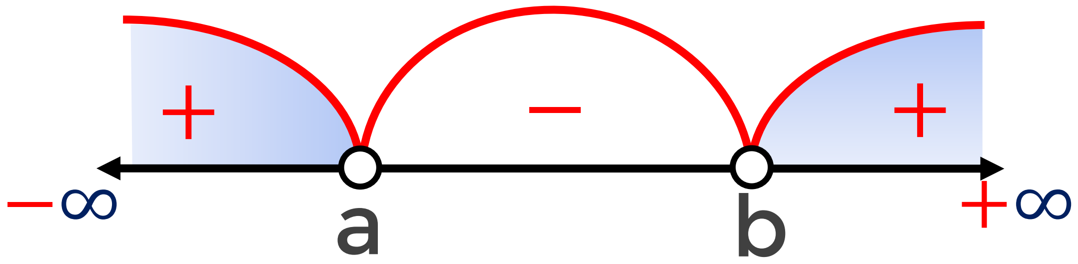
$x \in \langle -\infty\,;\,a] \cup [b\,;\,+\infty\rangle$

$(x-a)(x-b) \leq 0$



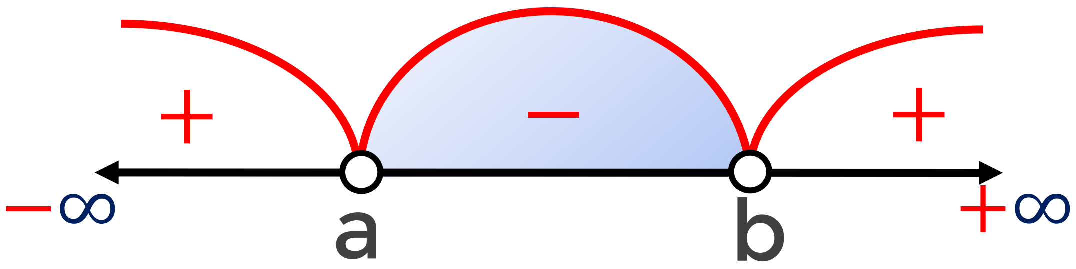
$x \in [a\,;\,b]$

$$(x-a)(x-b)>0$$



$$x \in \langle -\infty \,;\, a\rangle \cup \langle b \,;\, +\infty\rangle$$

$$(x-a)(x-b)<0$$



$$x \in \langle a \,;\, b\rangle$$

REGLA PRÁCTICA:

Puntos críticos abiertos	Puntos críticos cerrados	
$<$	$\leq$	$-$
$>$	$\geq$	$+$

PROPIEDAD:

Para qué $ax^2 + bx + c > 0 \ , \ \forall x \in R$

se debe cumplir: $\boxed{a > 0 \quad \wedge \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0}$

1. Resuelva

$$(x-2)^2 > 4$$

RESOLUCIÓN

$$(x-2)^2 > 4$$

$$(x-2)^2 - 4 > 0$$

$$(x \cancel{-2} \cancel{+2})(x-2-2) > 0$$

$$(x)(x-4) > 0$$

Puntos Críticos: $x = 0 \wedge x = 4$

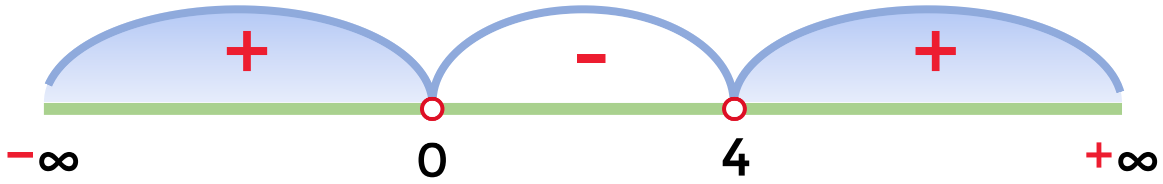
$$\boxed{C.S = \langle -\infty\,;0\rangle \cup \langle 4;+\infty\rangle}$$

RECORDEMOS

Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Gráficamente



2. Calcule la variación de x en

$$(2x-5)^2 \leq 9$$

RESOLUCIÓN

$$(2x-5)^2 \leq 9$$

$$(2x-5)^2 - 9 \leq 0$$

$$(2x-5+3)(2x-5-3) \leq 0$$

$$(2x-2)(2x-8) \leq 0$$

Puntos Críticos: $x = 1 \wedge x = 4$

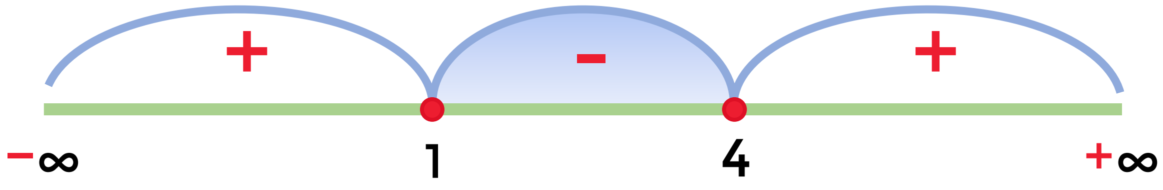
$$\boxed{C.S = [1;4]}$$

RECORDEMOS

Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Puntos Críticos



3. Resuelva

$$(x+4)^2 \geq 16$$

RESOLUCIÓN

$$(x+4)^2 \geq 16$$

$$(x+4)^2 - 16 \geq 0$$

$$(x+4+4)(x+4-4) \geq 0$$

$$(x)(x+8) \geq 0$$

Puntos Críticos: $x = 0 \wedge x = -8$

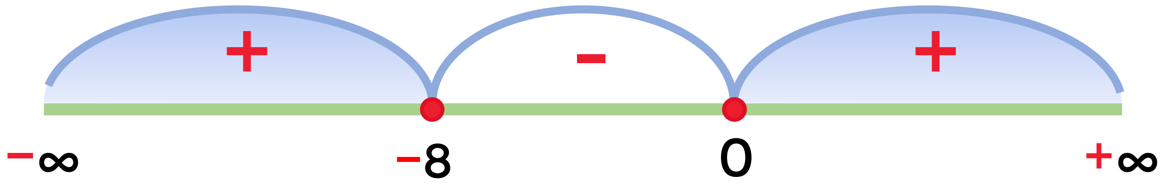
$$\boxed{C.S = \langle -\infty ; -8] \cup [0 ; +\infty\rangle}$$

RECORDEMOS

Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Gráficamente



4. Determine el conjunto solución de

$$3(x+5)^2-(x-5)(x+5)>0$$

RESOLUCIÓN

$$3\,(x^2+10x+25)-(x^2-25)>0$$

$$3x^2+30x+75-x^2+25>0$$

$$2x^2+30x+100>0$$

$$\begin{array}{lcl} 2x & & 10 \;=\; 10x \;+ \\ x & & 10 \;=\; \underline{20x} \end{array}$$

$$(2x+10)(x+10)>0$$

Puntos Críticos: $x=-5 \;\wedge\; x=-10$

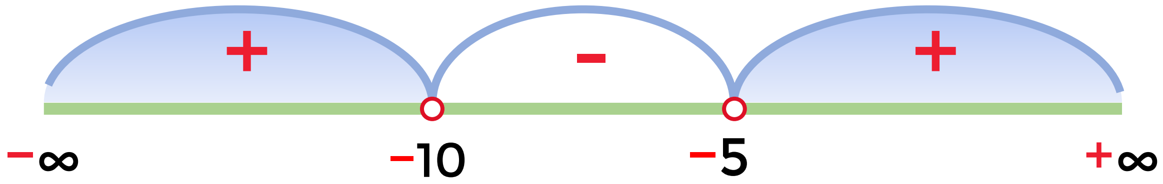
$$\boxed{C.S=\langle -\infty\,;-10\,\rangle \cup \langle -5\,;+\infty\rangle}$$

RECORDEMOS

Trinomio Cuadrado Perfecto

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Gráficamente



5. Resuelva

$$-x^2 + 2x \geq 0$$

RESOLUCIÓN

$-x^2 + 2x \geq 0$ ……$x\,(-1)$

$x^2 - 2x \leq 0$

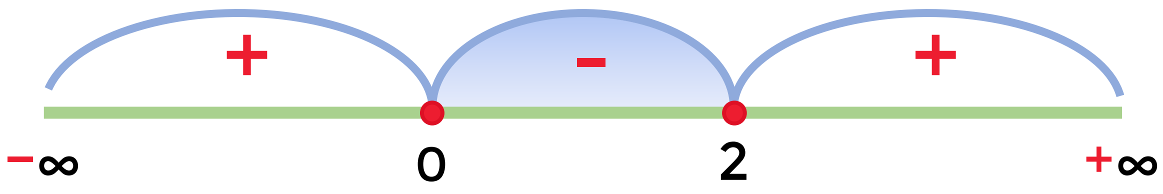
$x(x-2) \leq 0$

Puntos Críticos: $x = 0 \;\wedge\; x = 2$

$$\boxed{C.S = [\,0\,;\,2\,]}$$

RECORDEMOS

Gráficamente



6. Determine le conjunto solución de

$$-x^2 - 2x + 35 > 0$$

RESOLUCIÓN

$$-x^2 - 2x + 35 > 0 \quad \ldots\ldots x(-1)$$

$$x^2 + 2x - 35 < 0$$

$$\begin{array}{lll} x & 7 & = 7x \quad + \\ x & -5 & = \underline{-5x} \end{array}$$

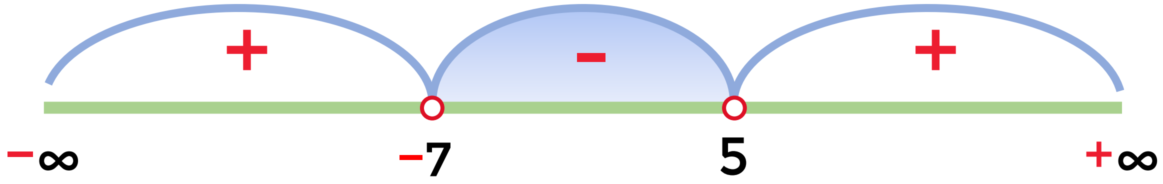
$$(x+7)(x-5) < 0$$

Puntos Críticos: $x = -7 \wedge x = 5$

$$\boxed{C.S = \langle -7\,;5\rangle}$$

RECORDEMOS

Gráficamente



7. Resuelva e indique la solución de

$$(x+1)^2+(x-1)(x-2)-9\leq 0$$

RESOLUCIÓN

$$(x+1)^2+(x-1)(x-2)-9\leq 0$$

$$x^2+2x+1+x^2+(-1-2)x+(-1)(-2)-9\leq 0$$

$$x^2+2x+1+x^2-3x+2-9\leq 0$$

$$2x^2-x-6\leq 0$$

$$2x \qquad 3 = 3x \quad +$$

$$x \qquad -2 = \underline{-4x}$$

$$(2x+3)(x-2)\leq 0$$

Puntos Críticos: $x=-\frac{3}{2} \wedge x=2$

RECORDEMOS

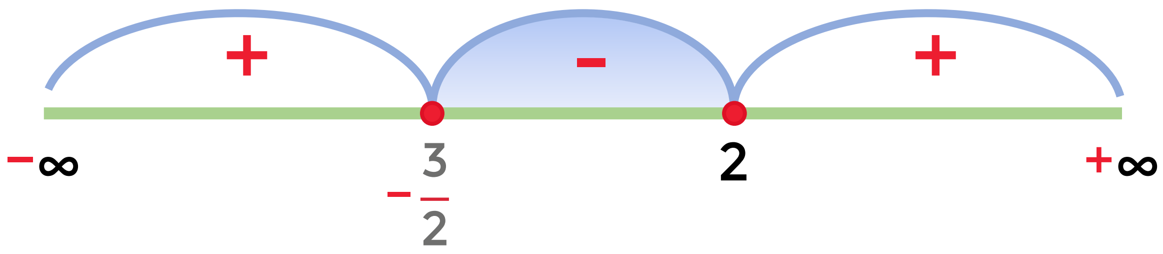
Trinomio Cuadrado Perfecto

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Identidad de Steven

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Gráficamente



$$\boxed{C.S=\left[-\frac{3}{2};\ 2\right]}$$

8. Al resolver

$$(5x+2)^2-(6x-1)^2 \geq 3$$

Se obtiene el CS=[a , b]. Sabiendo que a+11b representa la edad de Petronila, ¿Cuál es esa edad?

RESOLUCIÓN

$$(5x+2)^2-(6x-1)^2 \geq 3$$

$$(5x+2+6x-1)\,(5x+2-(6x-1)) \geq 3$$

$$(11x+1)\,(5x+2-6x+1) \geq 3$$

$$(11x+1)\,(3-x) \geq 3$$

$$-11x^2+33x\cancel{+3}-x \geq \cancel{3}$$

$$-11x^2+32x \geq 0$$

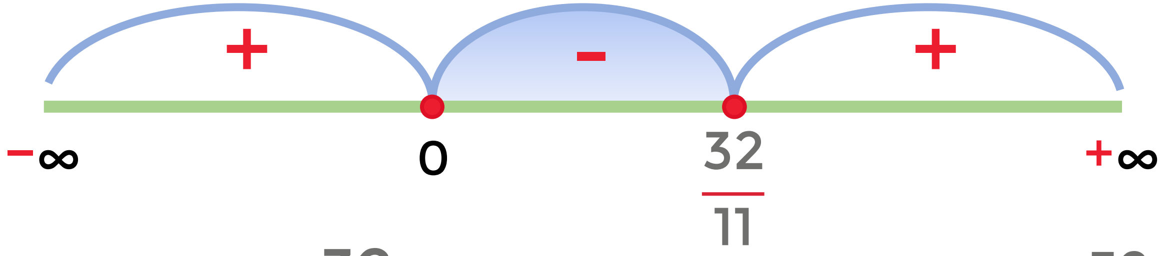
$$-11x^2+32x \geq 0 \quad \ldots\ldots \times(-1)$$

$$11x^2-32x \leq 0$$

$$(x)(11x-32) \leq 0$$

Puntos Críticos: $x=0 \ \wedge \ x=\dfrac{32}{11}$

Gráficamente



$$C.S=\left[0\,;\frac{32}{11}\right]=[a\,;b] \rightarrow a=0 \wedge b=\frac{32}{11}$$

Edad: Petronila $a+11b=0+\cancel{11}\cdot\dfrac{32}{\cancel{11}}=\boxed{32 \text{ años}}$