

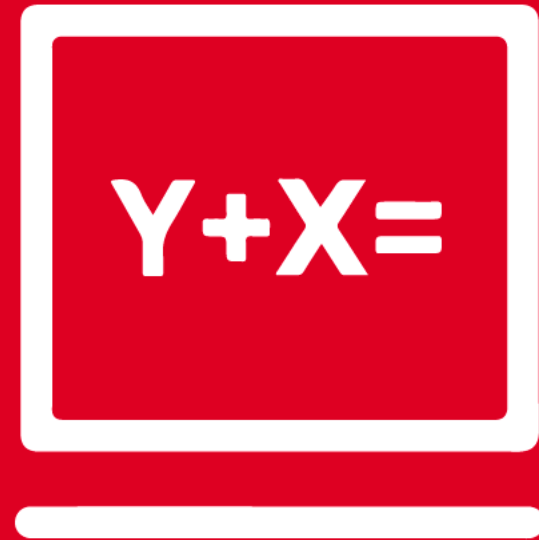


# ARITHMETIC

## Chapter 13

**4th**  
SECONDARY

MÁXIMO COMÚN DIVISOR



 **SACO OLIVEROS**

# MOTIVATING STRATEGY

Una regla muy poco considerada para el cálculo del MCD es la REGLA DE STURM

Calcule el MCD de 2520; 3060; 2790 y 4545.

Resolución

2520	3060	2790	4545	
↓	-2520	-2520	-2520	
<hr/>				
2520	540	270	2025	← Residuo
-2430	-540	↓	-1890	
<hr/>				
90	0	270	135	← Residuo
↓		-270	-90	
<hr/>				
90		0	45	
-90			↓	
<hr/>				
0			45 = MCD	

# 1 CONCEPTO

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCD es aquel número que cumple dos condiciones.

- ✦ Es un divisor común de dichos números.
- ✦ Es el mayor de los divisores comunes.

Ejm Sean los números 18 y 24

#	Divisores $\mathbb{Z}^+$
18	1; 2; 3; 6; 9; 18
24	1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

$$\text{MCD}(18; 24) = 6$$

Divisores comunes de 18 y 24

→ 1; 2; 3 y 6

En conclusión:

Sean los números A y B

$\text{CD}_{\text{comunes de A y B}} =$

$\text{CD}_{\text{MCD(A:B)}}$

## 2 MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD

### A Por descomposición canónica

El MCD es igual al producto de sus factores primos comunes elevados a los menores exponentes posibles.

**Ej m** Dados los números A , B y C

$$\begin{aligned}\text{Si } A &= 2^4 \times 3^5 \times 5^2 \\ B &= 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \\ C &= 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7\end{aligned}$$

$$\text{MCD}(A, B, C) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

### B Por descomposición simultanea

El MCD es el producto de sus factores comunes.

**Ejm** Calcule el MCD de 56; 140 y 168

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 140 & 2 \\ 168 & 2 \\ \hline 28 & 2 \\ 70 & 2 \\ 84 & 2 \\ \hline 14 & 7 \\ 35 & 7 \\ 42 & 7 \\ \hline 2 & \\ 5 & \\ 6 & \end{array}$$

PESI

$$\text{MCD}(56; 140; 168) = 2^2 \times 7 = 28$$



## Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Solo para determinar el MCD de dos números A y B.

Al calcular el MCD de 750 y 270, indique los cocientes y residuos respectivos.

Aplic

	<i>cocientes sucesivos</i>				
	2	1	3	2	
750	270	210	60	30	MCD
	210	60	30	0	
	<i>residuos sucesivos</i>				

→ Cocientes sucesivos

2 ; 1 ; 3 y 2

→ Residuos sucesivos:

210 ; 60 ; 30

### 3 PROPIEDADES

1 Dados  $A$  y  $B \in \mathbb{Z}^+$  se cumple que

\* Si  $A = \overset{\circ}{B}$  (múltiplo de  $B$ )

$$\text{MCD}(A, B) = B$$

\* Si  $A$  y  $B$  son PESI

$$\text{MCD}(A, B) = 1$$

\* Si  $\text{MCD}(A, B) = d$

$$A = d \cdot \alpha, B = d \cdot \beta$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son PESI

2 Dados  $A, B, C$  y  $D \in \mathbb{Z}^+$   
 $\text{MCD}(A, B, C, D) =$

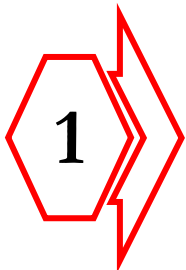
$$\text{MCD}[\text{MCD}(A, C), \text{MCD}(B, D)] =$$

$$\text{MCD}[\text{MCD}(A, B), \text{MCD}(C, D)]$$

3 Si  $\text{MCD}(A, B, C) = d$ , entonces

$$\text{MCD}(A_n, B_n, C_n) = d_n$$

$$\text{MCD}\left(\frac{A}{n}, \frac{B}{n}, \frac{C}{n}\right) = \frac{d}{n} \quad ; n \in \mathbb{Z}^+$$



Calcule el MCD de 1800; 2400 y 1600.

### Resolution

#### Descomposición simultanea

$$\begin{array}{r|l} 1800 - 2400 - 1600 & 100 = 2^2 \times 5^2 \\ 18 - 24 - 16 & 2 \\ 9 - 12 - 8 & \end{array}$$

**PESI**

$$\rightarrow \text{MCD}(1800; 2400; 1600) = 2^3 \times 5^2 =$$

RPTA :	200
-----------	-----



Si el MCD de  $28k$ ;  $44k$  y  $60k$  es 120,  
halle el valor del número menor.

### Resolution

$$\begin{array}{r|l} 28k - 44k - 60k & k \\ 28 - 44 - 60 & 2 \\ 14 - 22 - 30 & 2 \\ 7 - 11 - 15 & \end{array}$$

$$\text{MCD}(28k; 44k; 60k) = 4k$$

$$4k = 120$$

$$k = 30$$

Menor número :

$$\therefore 28k = 28 \times 30$$

RPTA

:

840





Si  $\text{MCD}(\overline{3a4}; \overline{18b6}) = 22$ , calcule  $ab$ .

Resolution

Criterio por 11

$$\overline{3a4} = 22\alpha = \overset{\circ}{22} = \begin{matrix} \nearrow \overset{\circ}{2} \\ \searrow \underset{\circ}{11} \end{matrix}$$

$$\overset{+-+}{\overline{3a4}} = \overset{\circ}{11}$$

$$3 - a + 4 = \overset{\circ}{11}$$

$$7 - a = \overset{\circ}{11}$$

$$a = 7$$

$$\overline{18b6} = 22\beta = \overset{\circ}{22} = \begin{matrix} \nearrow \overset{\circ}{2} \\ \searrow \underset{\circ}{11} \end{matrix}$$

$$\overset{-+-+}{\overline{18b6}} = \overset{\circ}{11}$$

$$-1 + 8 - b + 6 = \overset{\circ}{11}$$

$$13 - b = \overset{\circ}{11}$$

$$b = 2$$

$$a \times b =$$

RPTA  
:

14

4

El MCD de dos números es 34. Si la suma de dichos números es 204. Determine el número mayor.

Resolution

Dato:  $\text{MCD}(A, B) = 34$   $A + B = 204$

Recordemos:  $A = 34\alpha$   $\alpha, \beta$  son PESI  
 $B = 34\beta$

$$A + B = 34\alpha + 34\beta = 204$$

$$34(\alpha + \beta) = 204$$

$$(\alpha + \beta) = 6$$

↓ ↓

5	1
---	---

Mayor número →  $A = 34\alpha = 34 \times 5$

RPTA :	170
-----------	-----

5

Calcule la suma de cocientes que se obtienen al hallar el MCD de 130 y 95, por el algoritmo de Euclides.

### Resolution

**Cocientes sucesivos**

	1	2	1	2	2
130	95	35	25	10	5
	35	25	10	5	0

**Residuos sucesivos**

**MCD**

Piden:

Suma de cocientes  
Sucesivos :

$$= 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8$$

RPTA  
:

8

6

La suma de dos números es 1232. Si al hallar el MCD de ellos por divisiones sucesivas se obtuvo como cocientes a 2; 2; 1; 1 y 2. Determine el número menor.

### Resolution

	2	2	1	1	2
31x	13x	5x	3x	2x	x
	5x	3x	2x	x	0

**Dato:**  $31x + 13x = 1232$

$$44x = 1232$$

$$x = 28$$

**Número Menor :**

$$13x = 13(28) = 364$$

**RPTA :** 364

7

El acero o fierro corrugado se vende en varillas; estas varillas son producidas en el país por Aceros Arequipa y se fabrican en diferentes grosores y longitudes, dependiendo del tipo de construcción que se desea realizar.

Si se tienen tres varillas de longitudes 780 cm, 420 cm y 300 cm, ¿cuál es el menor número de trozos de igual longitud que se pueden obtener de las tres varillas sin desperdiciar material?

### Resolution

$$\begin{array}{r}
 780 - 420 - 300 \mid 10 \\
 78 - 42 - 30 \mid 6 \\
 \hline
 (13) - (7) - (5) \mid
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 60\text{cm}$$

Piden:

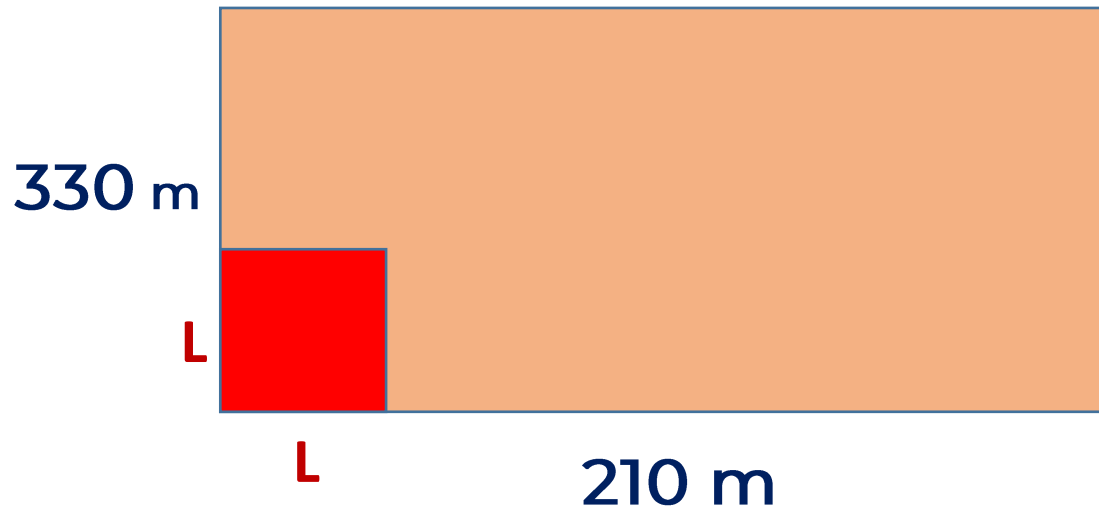
$$= 13 + 7 + 5 = 25$$

RPTA :	25 trozos
-----------	--------------

8

¿Cuál es el menor número de parcelas cuadradas que se pueden obtener de un terreno rectangular de dimensiones 330 m de largo y 210 m de ancho?

### Resolution



$$L = \text{MCD} (330 \text{ m} ; 210 \text{ m}) = 30 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{Piden: } & \frac{330}{30} \times \frac{210}{30} \\ & = 11 \times 7 = 77 \end{aligned}$$

RPTA :	77 parcelas
-----------	-------------

