ALGEBRA

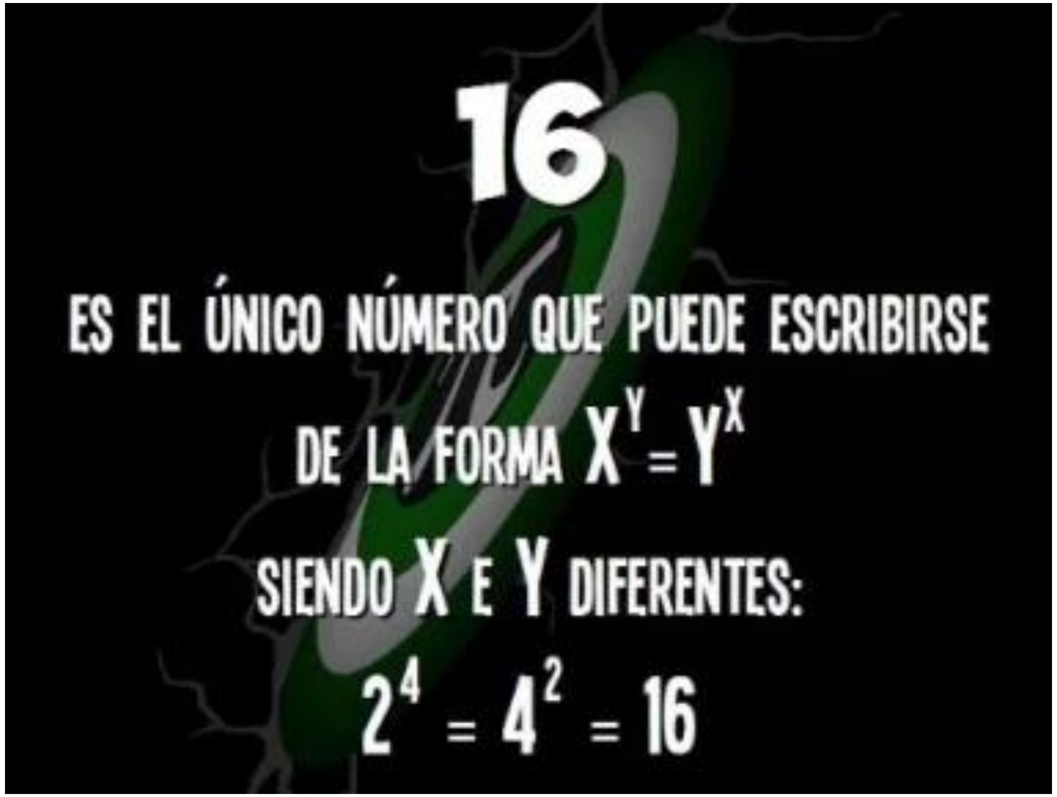
Chapter 05

3rd
SECONDARY

Grado de un polinomio

SACO OLIVEROS

Sabías que ……


16
ES EL ÚNICO NÚMERO QUE PUEDE ESCRIBIRSE
DE LA FORMA $X^Y = Y^X$
SIENDO X E Y DIFERENTES:
$2^4 = 4^2 = 16$

GRADO DE UN POLINOMIO

Es la característica de una expresión algebraica racional entera (polinomio) el cual viene dado por los exponentes que afectan a sus variables.

I PARA UN MONOMIO:

$$M(x;y;z) = 3x^{2}y^{5}z^{4}$$

1. Grado Relativo (GR):

Es el exponente de la variable indicada.

$GR(x) = 2$

$GR(y) = 5$

$GR(z) = 4$

2. Grado Absoluto (GA):

Es la suma de exponentes de las variables indicadas.

G.A= $2 + 5 + 4 = 11$

II PARA UN POLINOMIO DE 2 O MÁS TÉRMINOS:

1. Grado Relativo (GR):

Es el mayor exponente de la variable indicada.

$$P(x;y) = 3m^4x^8y^5 - 7x^5y^9 + 4x^{12}y^4z^6$$

$$GR(x) = 12$$

$$GR(y) = 9$$

2. Grado Absoluto (GA):

Es la mayor suma de exponentes de las variables indicadas, obtenida en uno de sus términos.

$$P(x;y) = \underbrace{3m^4x^8y^5}_{13} - \underbrace{7x^5y^9}_{14} + \underbrace{4x^{12}y^4z^6}_{16}$$

$$GA = 16$$

III PROPIEDADES DE LOS GRADOS EN OPERACIONES ALGEBRAICAS:

1. Adición y Sustracción:

Dado dos polinomios P y Q, donde:

Grado(P) = m (mayor)

m > n

Grado(Q) = n (menor)

Grado(P + Q) = m

Grado(P - Q) = m

Ejm.:

Dado dos polinomios:

$P(x) = 2x^4 - 5x^{12} + 3 \rightarrow GA = 12$

$Q(x) = 4x^9 + 9x^4 - 8 \rightarrow GA = 9$

Grado(P + Q) = 12

Grado(P - Q) = 12

2. Multiplicación y División:

Dado dos polinomios P y Q, donde:.

Grado(P) = m

Grado(Q) = n

Grado(P . Q) = m + n

Grado(P÷Q) = m − n , Donde: m ≥ n

Ejm.:

Dado dos polinomios:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^{19} + 3 \rightarrow GA = 19$$

$$Q(x) = 4x^{12} + 9x^4 - 8 \rightarrow GA = 12$$

Grado(P.Q) = $19 + 12 = 31$

Grado(P÷Q) = $19 - 12 = 7$

3. Potenciación y Radicación:

Dado el polinomio P y n un número natural.

Grado(P) = m

Grado(P^n) = m . n

Grado($\sqrt[n]{P}$) = m ÷ n , Donde: n ≥ 2

Ejm.:

Dado el polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^{24} + 3 \rightarrow GA = 24$$

Grado(P^3) = $24 . 3 = 72$

Grado($\sqrt[4]{P}$) = $24 \div 4 = 6$

Problema 1

Se tiene el monomio:

$$M(x,y) = 7x^{2a-4}y^{b-3}z^{4+b}$$

de $GR(x) = 4$ y $GR(y) = 2$.

Calcule $a + b$.

Resolución:

$$M(x,y) = 7x^{2a-4}y^{b-3}z^{4+b}$$

- *Evaluamos el exponente de x:*

Por dato: $GR(x) = 4$

Además: $GR(x) = 2a - 4$

$2a - 4 = 4$

$\boxed{a = 4}$

- *Evaluamos el exponente de y:*

Por dato: $GR(y) = 2$

Además: $GR(y) = b - 3$

$b - 3 = 2$

$\boxed{b = 5}$

Respuesta $\therefore\ a + b = 9$

Problema 2

Sea $GR(x) = 10$ y $GR(y) = 8$,

además

$$M(x,y) = (a+b)x^{a+2}y^{b-2}$$

Indique su coeficiente.

Resolución:

$$M(x,y) = (a+b)x^{a+2}y^{b-2}$$

- $Evaluamos\ el\ exponente\ de\ x$:

$Por\ dato$: $GR(x) = 10$

$Además$: $GR(x) = a+2$

$a+2 = 10$

$\boxed{a = 8}$

- $Evaluamos\ el\ exponente\ de\ y$:

$Por\ dato$: $GR(y) = 8$

$Además$: $GR(y) = b-2$

$b-2 = 8$

$\boxed{b = 10}$

$\boxed{Calculando\ el\ coeficiente:}$

$Coef[M(x,y)] = a+b$ → $\boxed{Respuesta = 18}$

Problema 3

Si $GR(x) = 12$ y $GR(y) = 9$, además

$$P(x,y) = 4x^{a+6}y^{b+2} + 2x^{a+7}y^{b+5} + 3x^{a+4}y^{b+1}$$

determine el grado absoluto.

Resolución:

$$P(x,y) = \underbrace{4x^{a+6}y^{b+2}}_{a+b+8} + \underbrace{2x^{a+7}y^{b+5}}_{a+b+12} + \underbrace{3x^{a+4}y^{b+1}}_{a+b+5}$$

- *Evaluamos los exponentes de x:*

Por dato: $GR(x) = 12$

Además: $GR(x) = a + 7$

$$a + 7 = 12$$

$$\boxed{a = 5}$$

- *Evaluamos los exponentes de y:*

Por dato: $GR(y) = 9$

Además: $GR(y) = b + 5$

$$b + 5 = 9$$

$$\boxed{b = 4}$$

Calculando el grado absoluto:

$$GA = \underbrace{a}_{5} + \underbrace{b}_{4} + 12$$

Respuesta= 21

Problema 4

Dado el polinomio $P(x,y) = 2mx^{m+1}y^{n+2} + 2nx^{m+3}y^{n+3} + 3x^{m-1}y^{n+3}$

De grado absoluto igual a 10. Calcule la suma de sus coeficientes.

Resolución:

$$P(x;y) = \overbrace{2mx^{m+1}y^{n+2}}^{\boxed{m+n+3}} + \overbrace{2nx^{m+3}y^{n+3}}^{\boxed{m+n+6}} + \overbrace{3x^{m-1}y^{n+3}}^{\boxed{m+n+2}}$$

$Por\ dato:\ GA = 10$

$Además:\ GA = m+n+6$

$$m+n+6 = 10$$

$$\boxed{m+n = 4}$$

$\boldsymbol{Calculando\ la\ suma\ de\ coeficientes:}$

$$\sum Coef = 2m + 2n + 3$$

$$\sum Coef = 2\underbrace{(m+n)} + 3$$

$$\sum Coef = 2(4) + 3$$

$$\boxed{\therefore \sum Coef = 11}$$

Problema 5

Halle el valor de m si la expresión

$$E=\sqrt[5]{x^m\sqrt[3]{x^m\sqrt[4]{x^m}}}$$

es de grado absoluto 17.

Recordemos:

RADICALES SUCESIVOS:

$$\sqrt[m]{x^a\cdot\sqrt[n]{x^b\cdot\sqrt[p]{x^c}}}=\sqrt[mnp]{x^{(an+b)p+c}}$$

Resolución:

$$E=\sqrt[5]{x^m\cdot\sqrt[3]{x^m\cdot\sqrt[4]{x^m}}}$$

Reduciendo E:

$$E=\sqrt[5.3.4]{x^{(m.3+m).4+m}}$$

$$E=\sqrt[60]{x^{17m}}$$

$$\boxed{E=x^{\frac{17m}{60}}}$$

- ***Obteniendo GA(E):***

$$GA(E)=\frac{17m}{60}\ \ldots(\alpha)$$

- ***Pero por dato:***

$$GA(E)=17\ \ldots(\beta)$$

Igualando (α) y (β):

$$\frac{\cancel{17}m}{60}=\cancel{17}$$

$$\boxed{\therefore\ \textbf{Respuesta}:\ m=60}$$

Problema 6

Si el polinomio

$$P(x) = (a-3)x^4 + (b-2)x^3 + ax^2 + bx + 7$$

es de segundo grado, la suma de sus coeficientes aumentada en 8 representa la mesada de Luis. ¿Cuál es la mesada de Luis?

Resolución:

$$P(x) = \overbrace{(a-3)}^{\boxed{0}}x^4 + \overbrace{(b-2)}^{\boxed{0}}x^3 + ax^2 + bx + 7$$

Por dato sabemos que: $GA[P(x)] = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-3=0 \longrightarrow \boxed{a=3} \\ b-2=0 \longrightarrow \boxed{b=2} \end{cases}$$

$$P(x) = ax^2 + bx + 7$$

$$P(x) = \underline{3}x^2 + \underline{2}x + \underline{7}$$

$$\Rightarrow \sum Coef[P(x)] = 3+2+7 = 12$$

$\therefore$ *La mesada de Luis es*: $12 + 8 = 20$

Problema 7

Determine el grado absoluto de

$$P(x) = (x+3)(x^2+5)(x^3+8)(x^4+15)\dots(x^{20}+1)$$

Recordemos:

$$Grado(P) = m$$

$$Grado(Q) = n$$

$$\boxed{Grado(P.Q) = m+n}$$

Resolución:

$$P(x) = \underbrace{(x+3)}_{\boxed{GA=1}}\underbrace{(x^2+5)}_{\boxed{GA=2}}\underbrace{(x^3+8)}_{\boxed{GA=3}}\underbrace{(x^4+15)}_{\boxed{GA=4}}\dots\underbrace{(x^{20}+1)}_{\boxed{GA=20}}$$

$$GA[P(x)] = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 20$$

Recordemos: $\boxed{1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

$$GA[P(x)] = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}(20+1)}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$GA[P(x)] = 10.21$$

$$\boxed{\therefore\ Respuesta = 210}$$

Problema 8

Si el grado absoluto del polinomio es $2n-3$

$$P(x)=\left(x^5+x^4\right)^3+\left(x^3+x^2\right)^6+\left(x^7-x^2\right)^9$$

halle el valor de n.

Recordemos:

$$\left.\begin{array}{l} Grado(P)=m \\ Grado(Q)=n \end{array}\right\} \quad m>n$$

$\Rightarrow$ $\boxed{Grado\left(P^k\right)=k.m}$

$\Rightarrow$ $\boxed{Grado(P+Q)=m}$

Resolución:

$$P(x)=\overbrace{\left(x^5+x^4\right)^3}^{GA=3.5=15}+\overbrace{\left(x^3+x^2\right)^6}^{GA=6.3=18}+\overbrace{\left(x^7-x^2\right)^9}^{GA=9.7=63}$$

$$\boxed{GA[P(x)]=63}$$

Por dato sabemos que:

$$GA[P(x)]=2n-3$$

$\Rightarrow$ $2n-3=63$

$\boxed{\therefore \text{Respuesta: } n=33}$