ALGEBRA

Chapter 18

2th
SECONDARY

RACIONALIZACION
SSION II

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

La raíz cuadrada de 2 es un número racional?

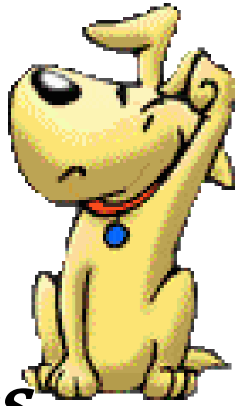
Mi calculadora dice que la raíz cuadrada de 2 es 1,4142135623730950488016887242097, ¡pero eso no es todo! de hecho sigue indefinidamente, sin que los números se repitan. No se puede escribir una fracción que sea igual a la raíz cuadrada de 2. Así que la raíz de 2 es un número irracional. Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son números irracionales.

Ejemplos:

$\sqrt{3}$ =1,7320508075688772935274463415059 (etc.)...

$\sqrt{99}$ =9,9498743710661995473447982100121 (etc.)...

pero $\sqrt{4} = 2$ *y* $\sqrt[3]{27} = 3$*, así que no todas las raíces son irracionales.*



HELICO THEORY

Es el proceso mediante el cual se transforma el denominador de una fracción que tiene raíz a otra que no lo tiene, para ello hacemos uso del factor racionalizante.

Casos

	Expresión irracional	Factor racionalizante (FR)	Expresión racional
1.	$\sqrt[n]{A^k}$	$\sqrt[n]{A^{n-k}}\,; n > k$	A
2.	$(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$	$(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$	$a - b$

RACIONALIZACIÓN

Caso I:

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}}}$$

$$\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{N.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}}$$

Ejemplo.: Racionalizar $\frac{12}{\sqrt[3]{2}}$

Resolución:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12.\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\boxed{\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = 6\sqrt[3]{4}}$$

Caso II:

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}}$$

$$\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$$

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{N\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)}{a-b}}$$

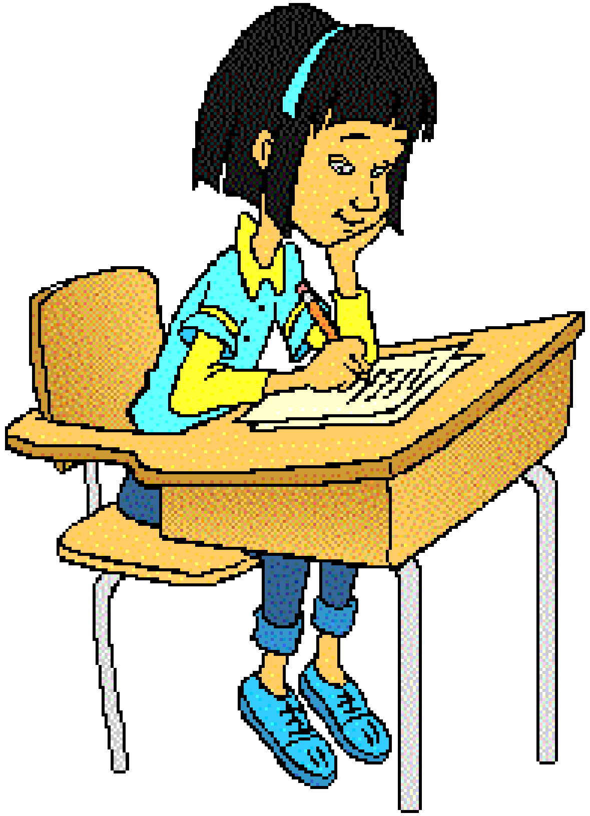
Ejemplo.: Racionalizar $\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Resolución:

$$\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{7\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2}$$

$$\boxed{\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{7\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}}$$



HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1

Calcule

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

Resolución:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} + \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

$$A = \frac{\sqrt{14}}{7} + \frac{6\sqrt{14}}{7} = \frac{\cancel{7}\sqrt{14}}{\cancel{7}} = \sqrt{14}$$

Racionalización - 1er Caso

$$\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} \times \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}} = \frac{A\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

Nota: $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$

$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = (\sqrt{7})^2 = 7$

Recuerda

Rpta: $\boxed{A = \sqrt{14}}$

PROBLEMA 2

Transforme a una fracción racionalizada.

$$B = \frac{5}{\sqrt[5]{5}} + 3\sqrt[5]{625}$$

Resolución:

$$B = \frac{5}{\sqrt[5]{5}} + 3\sqrt[5]{625}$$

$$B = \frac{5}{\sqrt[5]{5}} \times \frac{\sqrt[5]{\boxed{5^4}}}{\sqrt[5]{5^4}} + 3\sqrt[5]{625}$$

$$B = \frac{\cancel{5}\sqrt[5]{625}}{\cancel{5}} + 3\sqrt[5]{625}$$

$$B = \sqrt[5]{625} + 3\sqrt[5]{625}$$

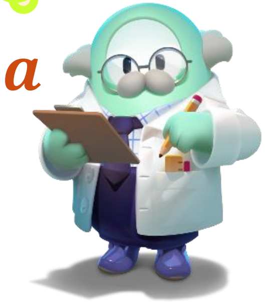
Racionalización - 1er Caso

$$\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} \times \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}} = \frac{A\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

Nota: $\sqrt[5]{5} \times \sqrt[5]{5^4} = \sqrt[5]{5^5} = 5$

$5^4 = 625$

Recuerda



Rpta: $\boxed{B = 4\sqrt[5]{625}}$

PROBLEMA 3

Efectúe

$$F=\frac{10}{\sqrt{6}-1}-2\sqrt{6}+10$$

Resolución:

$$F=\frac{10}{\sqrt{6}-1}-2\sqrt{6}+10$$

$$F=\underbrace{\frac{10}{\sqrt{6}-1}\times\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}+1}}-2\sqrt{6}+10$$

Diferencia de Cuadrados

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$F=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}(\sqrt{6}+1)}{\underset{1}{\cancel{5}}}-2\sqrt{6}+10=\cancel{2\sqrt{6}}+2-\cancel{2\sqrt{6}}+10$$

Rpta: $\boxed{F=12}$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}=\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}=\frac{A\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{6}-1)\times(\sqrt{6}+1)=(\sqrt{6})^2-1^2=5$

PROBLEMA 4

Simplifique

$$Q=\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{3}$$

Resolución:

$$Q=\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{3}$$

$$Q=\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$$

$$Q=\frac{\cancel{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\cancel{4}}+\sqrt{3}$$

Diferencia de Cuadrados

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$Q=\sqrt{6}-\sqrt{3}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{3}$$

$$Q=\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{6}}-\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{3}}$$

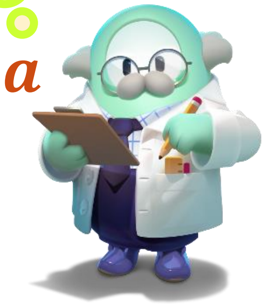
Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}=\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}=\frac{A\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{6}+\sqrt{3})\times(\sqrt{6}-\sqrt{3})=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2=3$

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2=4$

Recuerda



Rpta: $\boxed{F=-\sqrt{2}}$

Racionalice y luego efectúe.

$$F = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{5}$$

PROBLEMA 5

Resolución:

$$Q = \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{5}$$

$$Q = \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{1}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{1}}{\sqrt{5}+\sqrt{1}} - \frac{8}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} + \sqrt{5}$$

$$Q = \frac{\cancel{4}(\sqrt{5}+1)}{\cancel{4}} - \frac{{}^{2}\cancel{8}(\sqrt{5}-1)}{{}^{1}\cancel{4}} + \sqrt{5}$$

$$Q = \sqrt{5} + 1 - 2(\sqrt{5}-1) + \sqrt{5}$$

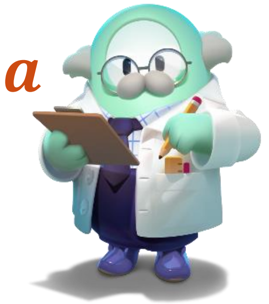
$$Q = \cancel{\sqrt{5}} + 1 - \cancel{2\sqrt{5}} + 2 + \cancel{\sqrt{5}}$$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} = \frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}} = \frac{A\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{5}-1) \times (\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5})^2 - (1)^2 = 4$

Recuerda



Rpta: $\boxed{Q = 3}$

PROBLEMA 6

Efectúe y racionalice.

$$H=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Resolución:

$$H=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$H=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\boxed{\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt{2}}{\boxed{\sqrt{2}}}$$

$$H=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}).\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$$

Racionalización - 1er Caso

$$\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}}=\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}}\times\frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}}=\frac{A\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

Nota: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$

Recuerda

Rpta: $\boxed{H=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}}$

Simplifique

PROBLEMA 7

$$Q = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Resolución:

$$Q = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$Q = \underbrace{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$Q =$

Identidad de Legendre

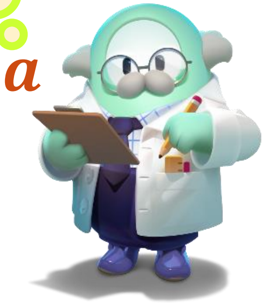
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}} = \frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}} = \frac{A\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}+\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 1$

Recuerda



Rpta: $\boxed{Q = 4\sqrt{6}}$

Racionalice e indique el denominador racionalizado de

$$J = \frac{1}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 1)}$$

PROBLEMA 8

Sabiendo que este denominador duplicado representa el número de manzanas que hoy comió Jorge, ¿Cuántas manzanas fueron?

Resolución:

$$J = \frac{1}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 1)} \times \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}$$

$$J = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}{(7 - 5)(3 - 1)} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} = \frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}} = \frac{A\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{x - y}$$

Nota: $(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \times (\sqrt{7} + \sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2$

$(\sqrt{3} + \sqrt{1}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{1}) = (\sqrt{3})^2 - (1)^2 = 2$

Recuerda

Rpta: Hoy el consumió 8 manzanas