



TRIGONOMETRY

Chapter 12

5th
SECONDARY

**Identidades
trigonométricas auxiliares**

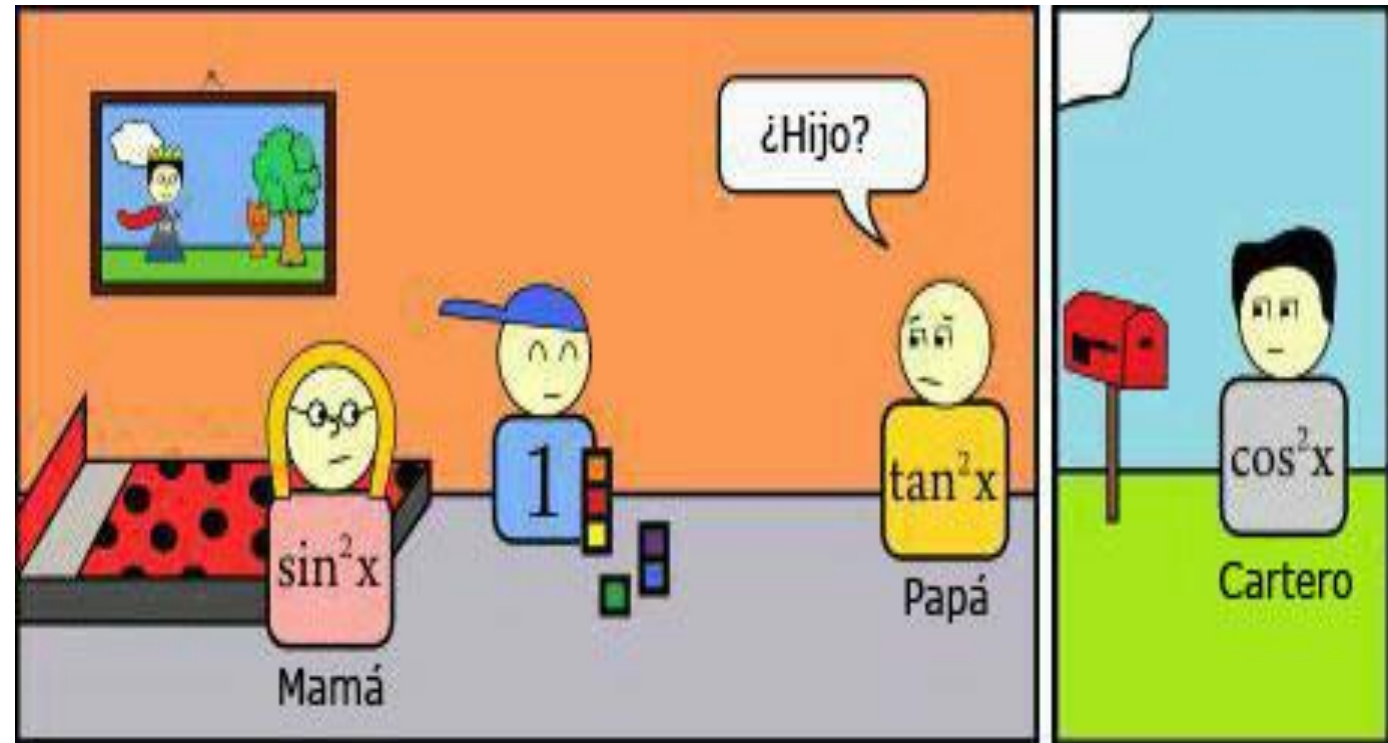


 **SACO OLIVEROS**



En este capítulo, continuaremos con el uso de las **identidades trigonométricas auxiliares** que nos permitirá simplificar las expresiones trigonométricas

¿Cuál es tu comentario acerca del dibujo?. 😁





IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

4. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

5. $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$

$$(1 + \sin x - \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 - \cos x)$$

$$(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$$

$$(1 - \sin x - \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 - \cos x)$$





1. Reduzca: $= \frac{\quad + \quad}{\quad + \quad} + \frac{\quad}{\quad}$

RESOLUCIÓN

Piden:

$$G = \frac{\text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x + 3}{\text{sen}^6 x + \text{cos}^6 x + 5} + \frac{4}{3}$$

$$G = \frac{1 - 2\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x + 3}{1 - 3\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x + 5} + \frac{4}{3}$$

$$G = \frac{4 - 2\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x}{6 - 3\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x} + \frac{4}{3}$$

Identidades Auxiliares

3. $\text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x = 1 - 2\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x$

4. $\text{sen}^6 x + \text{cos}^6 x = 1 - 3\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x$

$$G = \frac{2(2 - \text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x)}{3(2 - \text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x)} + \frac{4}{3}$$

$$G = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow G = \frac{6}{3} \quad \therefore G = 2$$



2. Simplifique la expresión: $= \left(\frac{+}{+} \right)$

RESOLUCIÓN

Piden:

$$T = \left(\frac{\sec^2 x + \csc^2 x}{\tan x + \cot x} \right) \cos x$$

$$T = \left(\frac{\cancel{\sec^2 x} \cdot \cancel{\csc^2 x}}{\cancel{\sec x} \cdot \cancel{\csc x}} \right) \cos x$$

Identidades Auxiliares

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

$$T = (\sec x \cdot \csc x) \cos x$$

Ordenando:

$$T = \underbrace{\cos x \cdot \sec x \cdot \csc x}_1$$

$$\therefore T = \csc x$$





3. Simplifique la expresión:

$$= \frac{-\theta + \theta}{-\theta + \theta}$$

RESOLUCIÓN

Piden:

$$W = \frac{1 - \cot\theta + \sec\theta \cdot \csc\theta}{1 - \tan\theta + \sec\theta \cdot \csc\theta}$$

Identidad Auxiliar

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

$$W = \frac{1 - \cancel{\cot\theta} + \tan\theta + \cancel{\cot\theta}}{1 - \cancel{\tan\theta} + \cancel{\tan\theta} + \cot\theta}$$

$$W = \frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} \rightarrow W = \frac{1 + \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}}$$

$$W = \frac{\frac{\cancel{\cos\theta} + \text{sen}\theta}{\cos\theta}}{\frac{\text{sen}\theta + \cancel{\cos\theta}}{\text{sen}\theta}} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore W = \tan\theta$$





4. Si se cumple: $\tan \theta + \cot \theta = \sqrt{7}$
 Halle el valor de: $\sqrt{\tan \theta + \cot \theta}$

RESOLUCIÓN

Dato: $\tan \theta + \cot \theta = \sqrt{7}$

$$\Rightarrow \sec \theta \cdot \csc \theta = \sqrt{7}$$

Luego, elevando al cuadrado:

$$(\sec \theta \csc \theta)^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$\Rightarrow \sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta = 7$$

Identidades Auxiliares

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

Piden: $P = \sqrt[3]{\sec^2 \theta + \csc^2 \theta + 1}$

$$P = \sqrt[3]{\underbrace{\sec^2 \theta \cdot \csc^2 \theta}_7 + 1}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt[3]{7 + 1} \quad \therefore P = 2$$





5. De la condición:

Determine: =

$$+ = \sqrt{-}$$

RESOLUCIÓN

Piden: $F = \text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x$

$$F = 1 - 2\text{sen}^2 x \text{cos}^2 x \dots (*)$$

Dato: $\text{sen} x + \text{cos} x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow (\text{sen} x + \text{cos} x)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2$$

$$\underbrace{\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x}_{1} + 2\text{sen} x \text{cos} x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\text{sen} x \text{cos} x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2\text{sen} x \text{cos} x = \frac{2}{3} - 1$$

$$\Rightarrow 2\text{sen} x \text{cos} x = -\frac{1}{3}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Identidad Auxiliar

3. $\text{sen}^4 x + \text{cos}^4 x = 1 - 2\text{sen}^2 x \cdot \text{cos}^2 x$

$$\Rightarrow \text{sen} x \text{cos} x = -\frac{1}{6}$$

Reemplazando en (*):

$$F = 1 - 2 \left(-\frac{1}{6} \right)^2$$

$$\therefore F = \frac{17}{18}$$





6. Si se cumple que: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Calcule: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

RESOLUCIÓN

Piden: $E = (1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{cos} x)$

$$\Rightarrow 2E = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{cos} x)$$

$$\Rightarrow 2E = (1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2$$

Dato $\rightarrow \frac{1}{3}$

Identidad Auxiliar

5. $(1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{cos} x)$

$$\Rightarrow 2E = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 2E = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2E = \frac{16}{9} \quad \therefore E = \frac{8}{9}$$





7. Si se cumple que: $\quad + \quad = \quad - \quad$

Reduzca: $= \left(+ \right) + \left(+ \right)$

RESOLUCIÓN

Piden: $F = \operatorname{sen}^4 x (1 + \operatorname{sen}^2 x) + \cos^4 x (1 + \cos^2 x)$

$\Rightarrow F = \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \cos^4 x + \cos^6 x$

Ordenando: $F = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x + \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$

$\Rightarrow F = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

$\Rightarrow F = 2 - 5\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \dots (*)$

Dato: $\underbrace{\sec^2 x + \csc^2 x}_{= 25/4} = 25/4$

$\Rightarrow \sec^2 x \csc^2 x = 25/4$

Identidades Auxiliares

2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

3. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$

4. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$

$\xrightarrow{\text{inv}} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 4/25$

Reemplazando en (*):

$F = 2 - 5 \times \frac{4}{25} \quad \therefore F = \frac{6}{5}$





- 8.** En un concurso de matemática, los encargados de formular las preguntas y sus alternativas cometieron un error. La pregunta número 5 tiene dos alternativas correctas. Descubra cuáles son:

Matemática 2018

5.º año

Ejercicio 5

Elimine x de las siguientes relaciones:

$$\sec x + \csc x = a$$

$$\tan x + \cot x = b$$

Encuentre la relación correcta entre a y b .

A) $a^2 + b^2 = b$

~~B) $a^2 - b^2 = 2b$~~

C) $a + b = 2ab$

D) $a + 2 = b + 1$

~~E) $b + 2 = a^2 b^{-1}$~~

RESOLUCIÓN

$$\sec x + \csc x = a \dots (I)$$

$$\tan x + \cot x = b \dots (II)$$

Identidades Auxiliares

$$1. \tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

$$2. \sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$\text{De (II): } \sec x \csc x = b \Rightarrow \sec^2 x \csc^2 x = b^2$$

$$\text{De (I): } (\sec x + \csc x)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \sec^2 x + \csc^2 x + 2 \sec x \csc x = a^2$$

$$\Rightarrow \sec^2 x \csc^2 x + 2 \sec x \csc x = a^2$$

$$\text{Reemplazando: } b^2 + 2b = a^2$$

Dando forma de las alternativas, tenemos:

$$\therefore a^2 - b^2 = 2b \vee b + 2 = a^2 b^{-1}$$