GEOMETRÍA

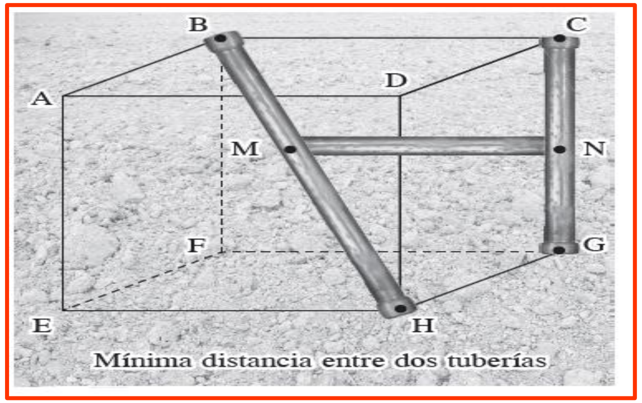
Capítulo 15

5th
SECONDARY

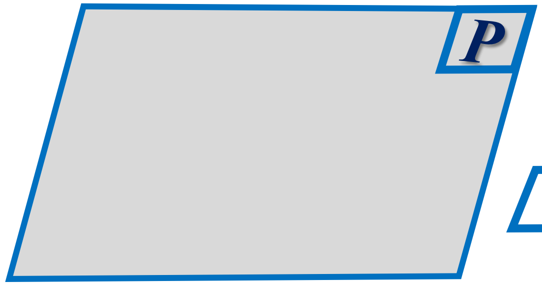
Rectas, planos y ángulo diedro

SACO OLIVEROS

En geometría del espacio estudiamos a los puntos, rectas y planos que forman a los poliedros y sólidos geométricos, por ejemplo:



RECTAS, PLANOS Y ÁNGULO DIEDRO



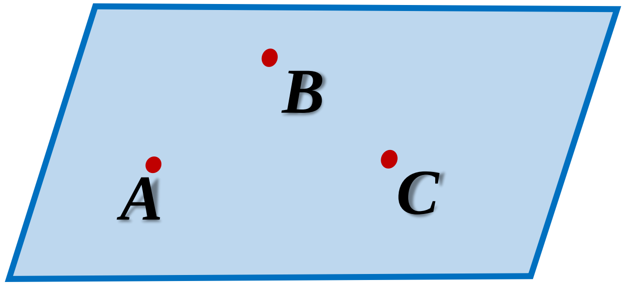
Notación:

 P : Plano P

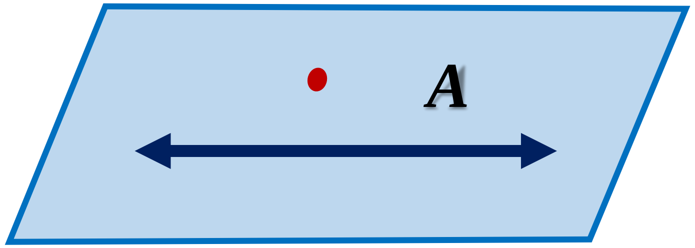
Determinación de un plano

Existen 4 teoremas para determinar un plano.

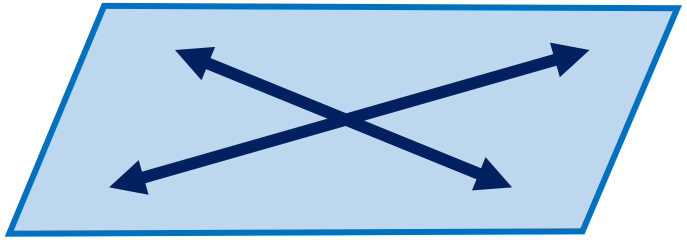
1. Tres puntos no colineales



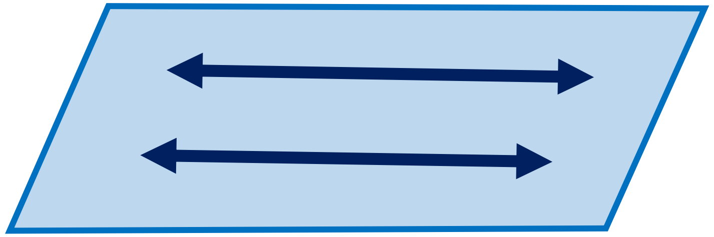
2. Una recta y un punto exterior a ella



3. Dos rectas secantes

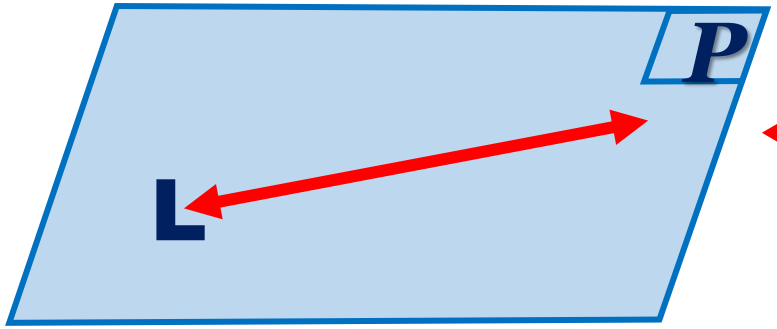


4. Dos rectas paralelas



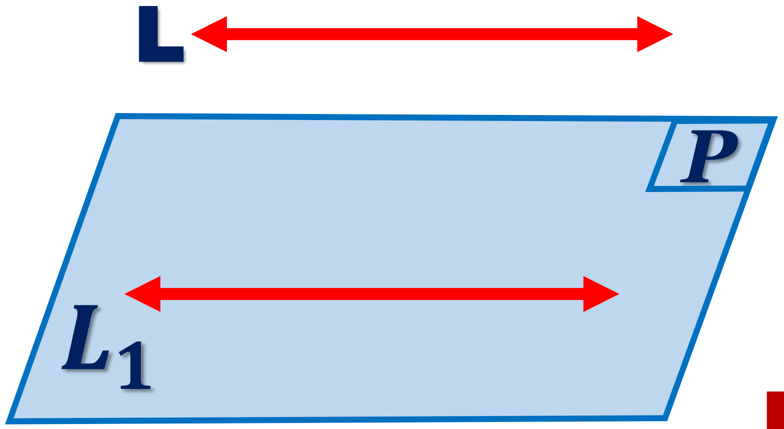
Posiciones relativas entre rectas y planos

1. Recta contenida en un plano



$\overleftrightarrow{L} \subset P$

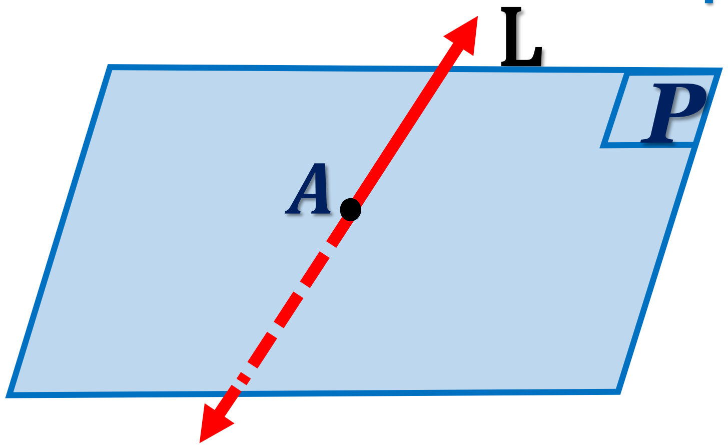
2. Recta paralela a un plano



Si: $\overleftrightarrow{L} \not\subset P$, $\overleftrightarrow{L_1} \subset P$ y $\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{L_1}$

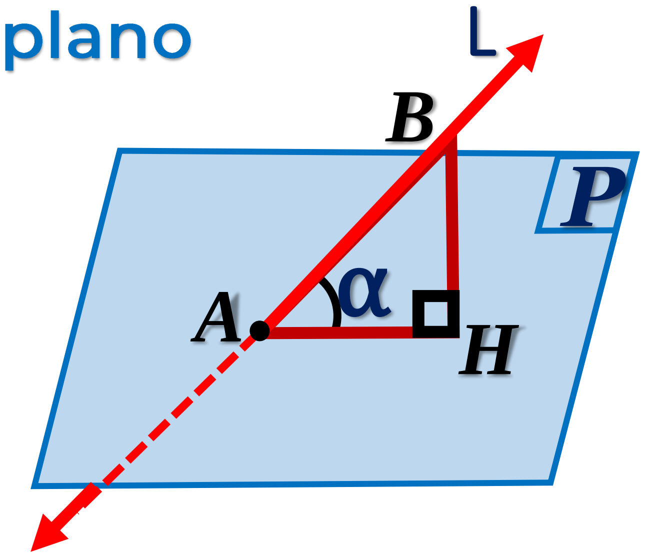
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \,//\, P$

3. Recta secante a un plano



$\overleftrightarrow{L} \cap P = \{A\}$

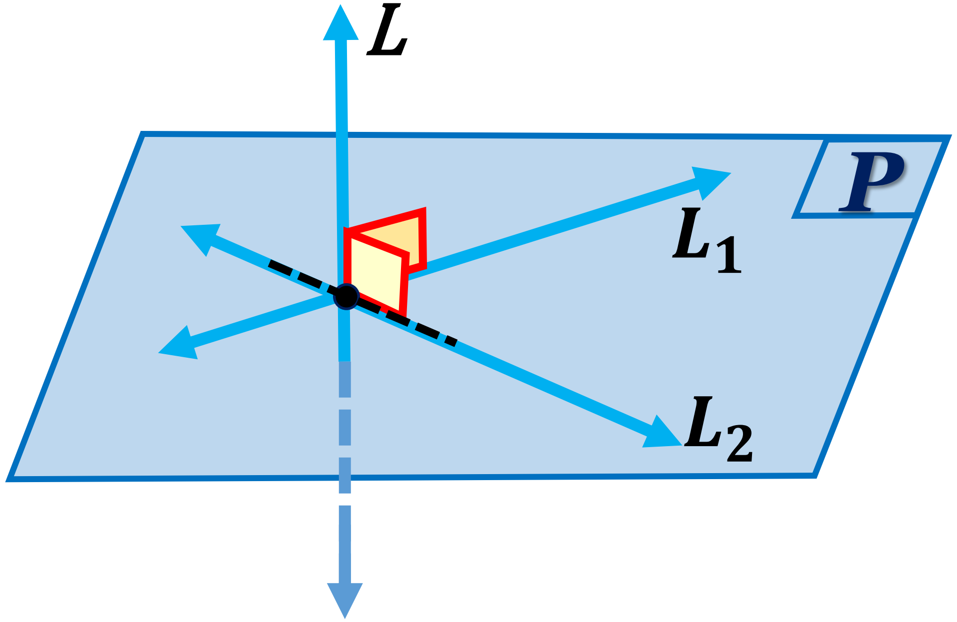
4. Ángulo entre una recta un plano



$\overline{AH}$: proyección de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre P.

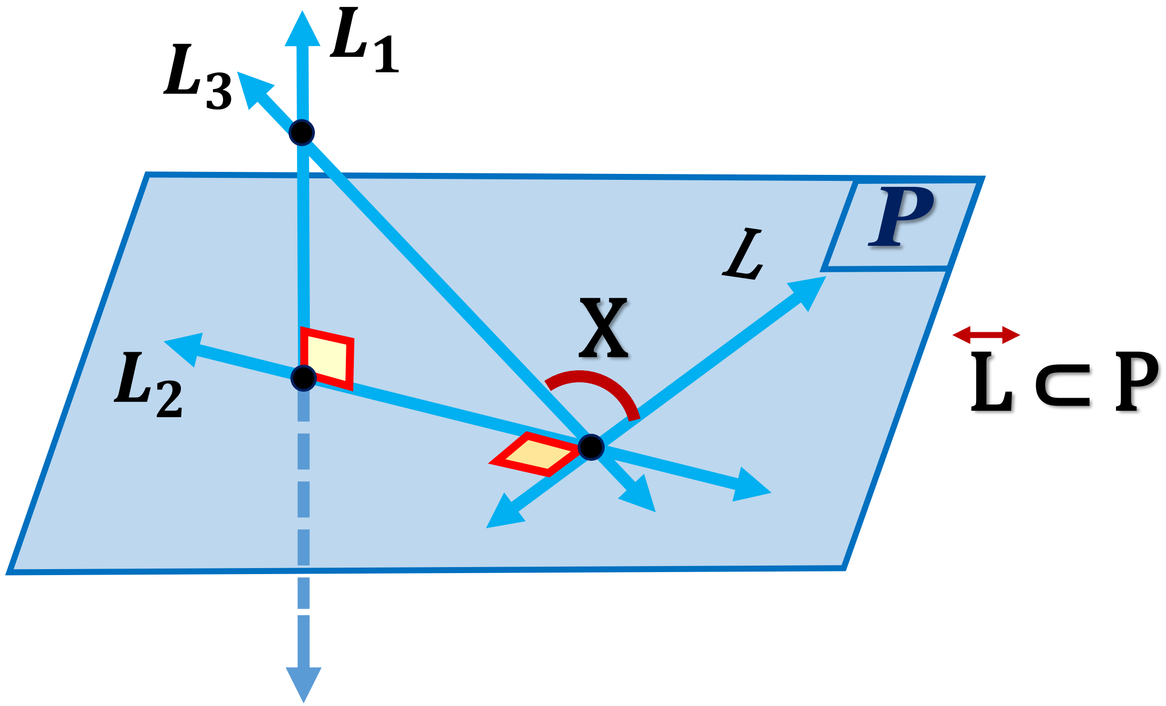
α: medida del ángulo que forma $\overleftrightarrow{L}$ con P.

Recta perpendicular a un plano



$$\text{Si}: \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1} \; y \; \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2} \rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp P$$

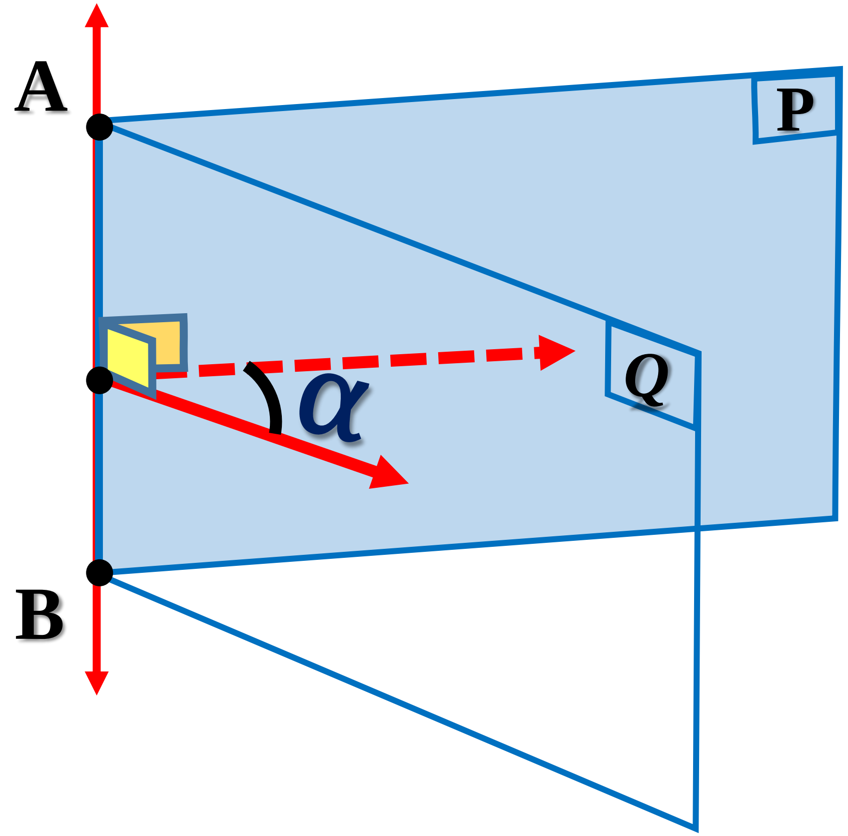
Teorema de las tres perpendiculares



$$\text{Si}: \overleftrightarrow{L_1} \perp P, \overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L} \; y \; \overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L} \rightarrow X = 90^0$$

ÁNGULO DIEDRO

Es la figura formada por la unión de dos semiplanos y una recta común.



En la figura

. P y Q son las caras del diedro.

. $\overleftrightarrow{AB}$ es la arista del diedro.

Notación

. Ángulo diedro: P – $\overleftrightarrow{AB}$ – Q

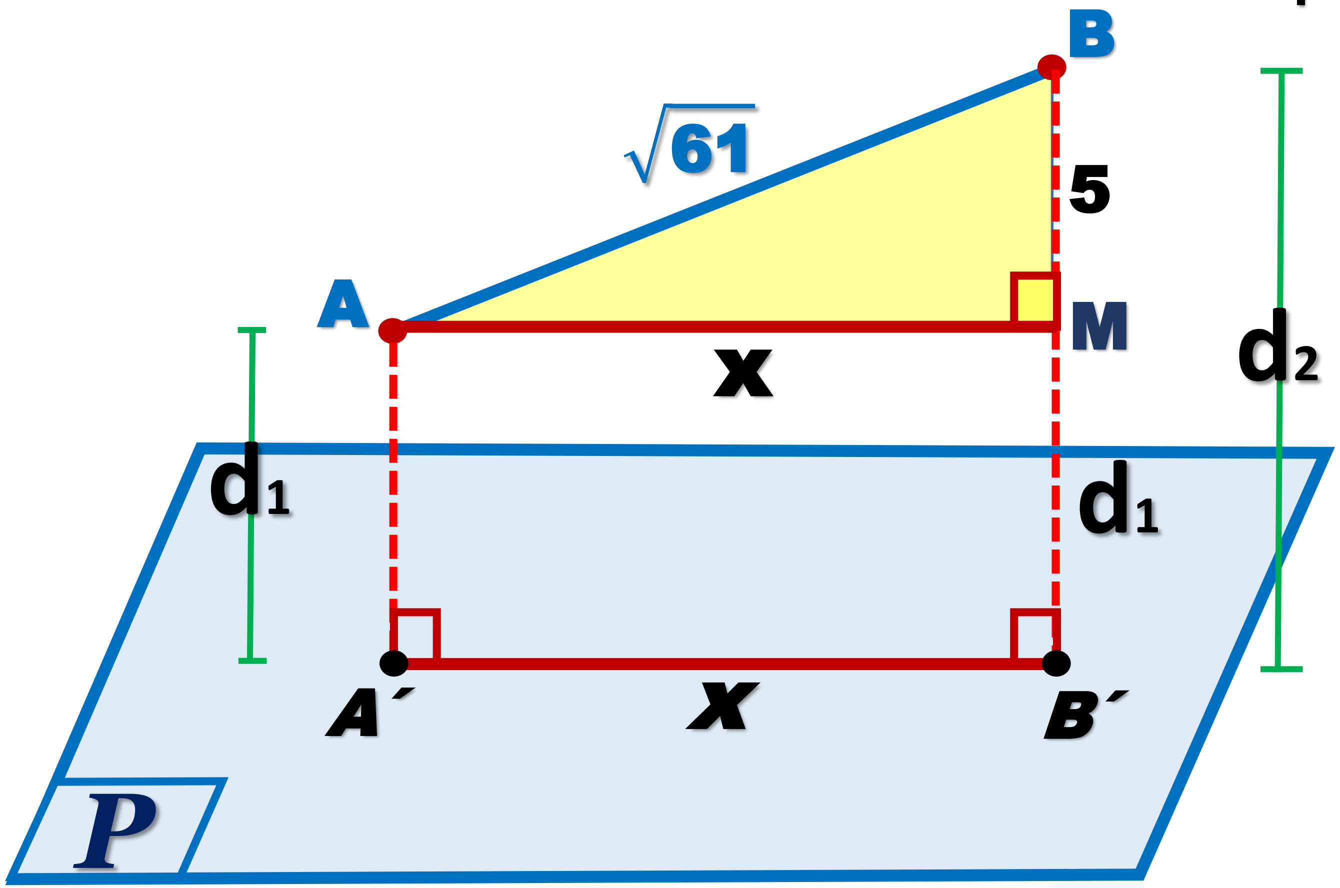
. Diedro AB

Además

. md $\overline{AB}$: medida del diedro $\overline{AB}$

. md $\overline{AB}$ = α

1. Se tiene un $\overline{AB}$ exterior a un plano P. Si AB = $\sqrt{61}$ y la diferencia entre las distancias de A y B hacia el plano P es 5, calcule la longitud de la proyección de dicho segmento sobre el plano P.



- Nos piden x.

$\boxed{d2 - d1 = 5}$

- Se traza $\overline{AM}$ perpendicular a $\overline{BB}$\`
- En $\overline{BB}$\` :

$BM + MB\grave{} =$

$BM + d1 = d2$

$BM = d2 - d1$

$BM = 5$

- ◺ABM : Pitágoras

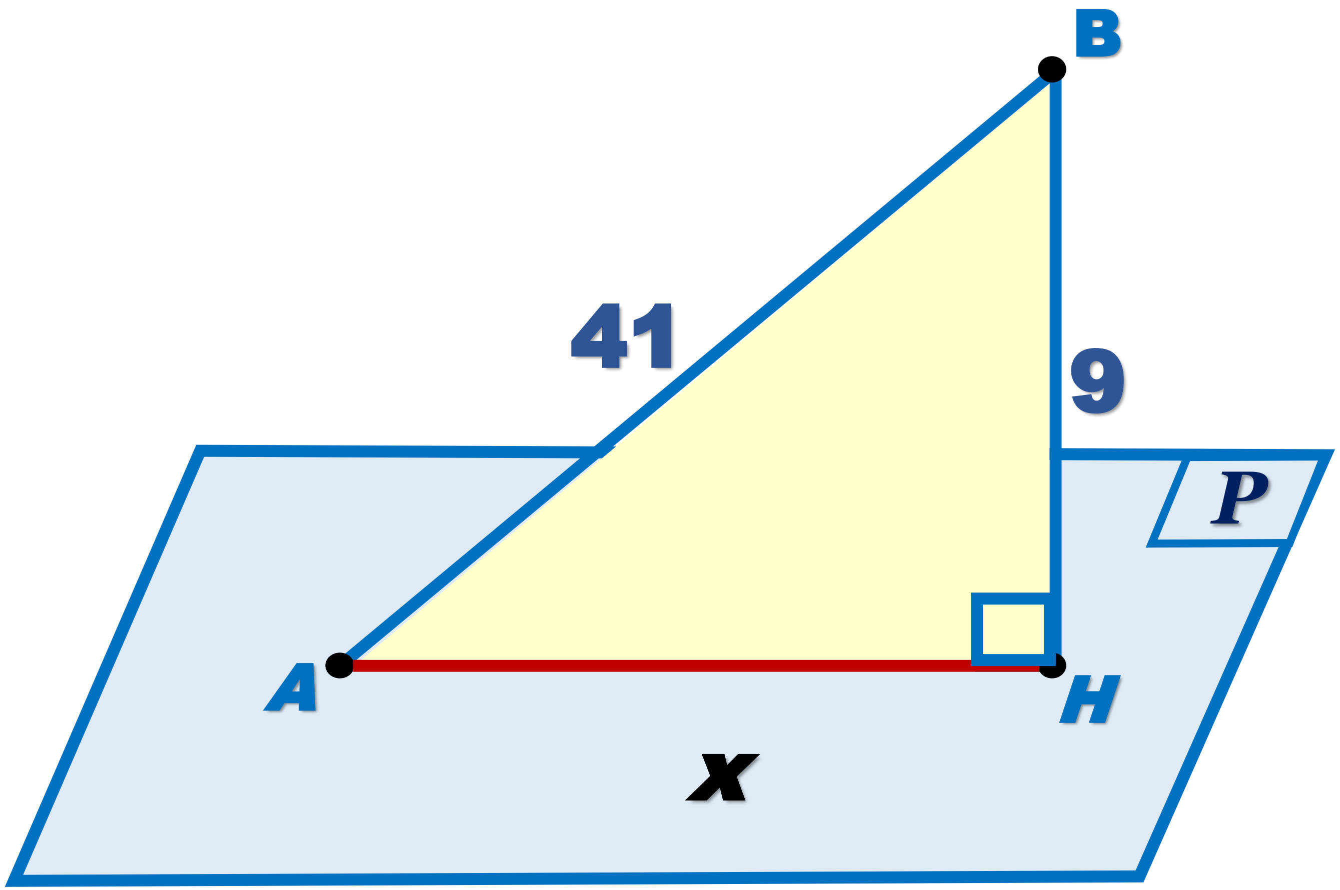
$\cancel{\sqrt{61}}^{\cancel{2}} = 5^2 + x^2$

$61 = 25 + x^2$

$36 = x^2$

$\boxed{6 = x}$

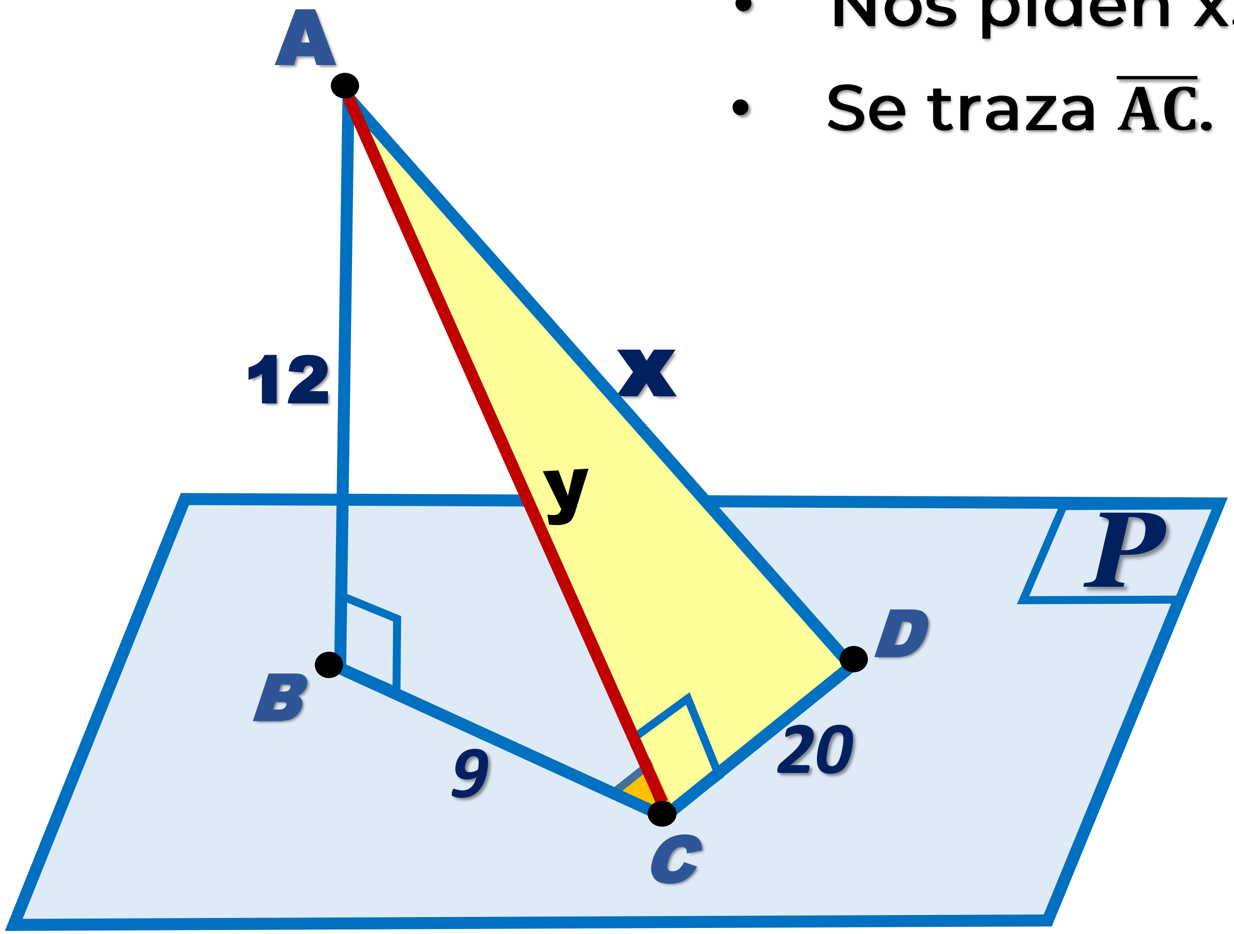
2. En la figura, si AB = 41 y BH = 9, halle la longitud de la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano P.



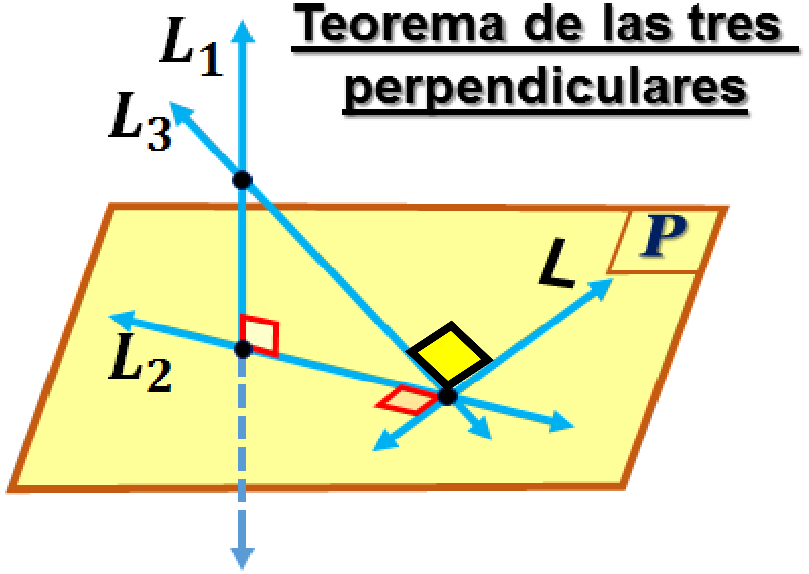
- Nos piden x.
- ◺ABH : Pitágoras

$$41^2 = 9^2 + x^2$$
$$1681 = 81 + x^2$$
$$1600 = x^2$$
$$\boxed{40 = x}$$

3. En la figura, halle $\overline{AD}$ si $\overline{AB} \perp P$.



- Nos piden x.
- Se traza $\overline{AC}$.



- ◺ABC: Pitágoras

$y^2 = 12^2 + 9^2$

$y^2 = 144 + 81$

$y^2 = 225$

$y = 15$

- ◺ACD: Pitágoras

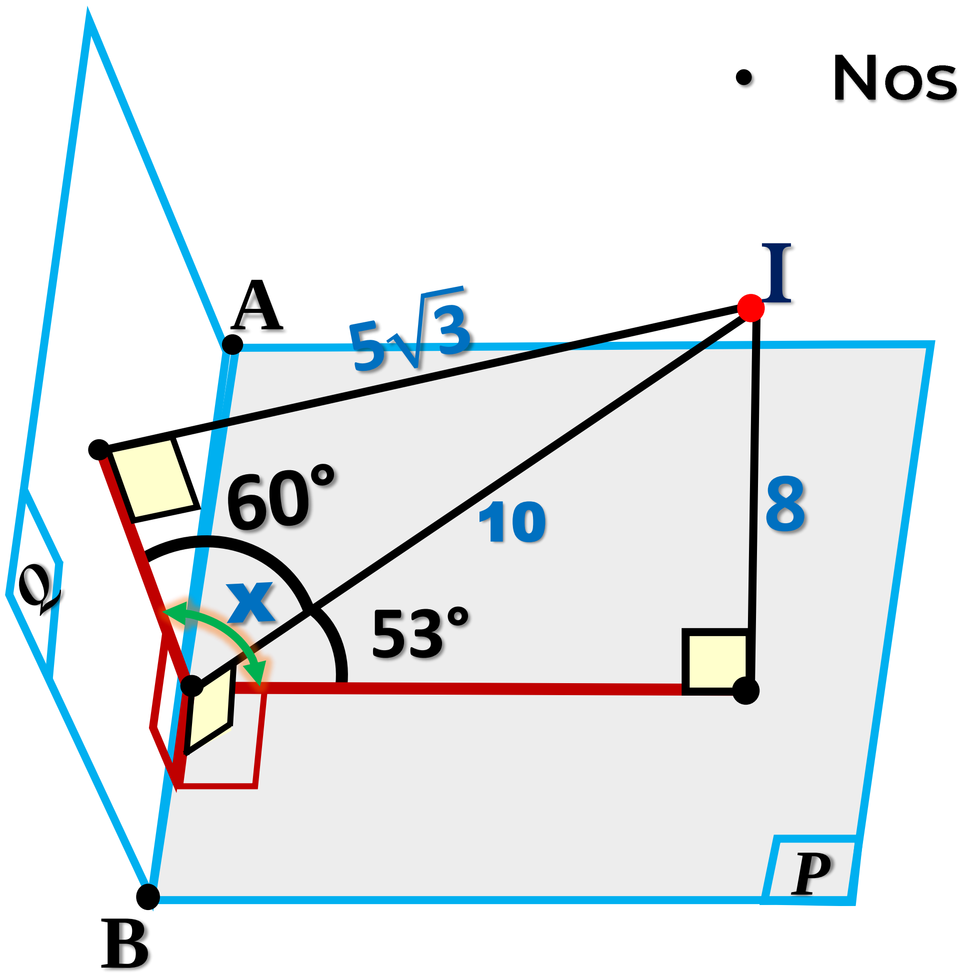
$x^2 = 15^2 + 20^2$

$x^2 = 225 + 400$

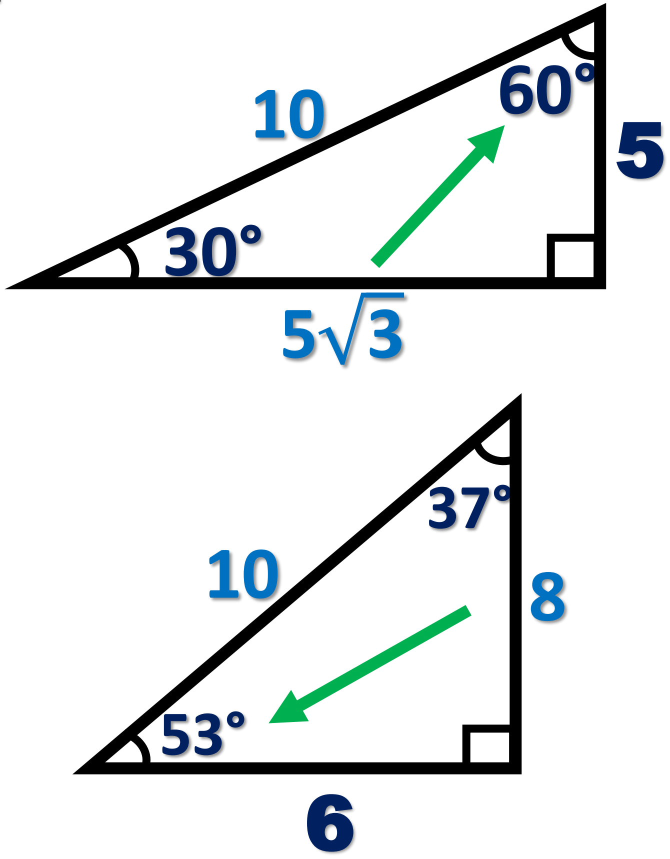
$x^2 = 625$

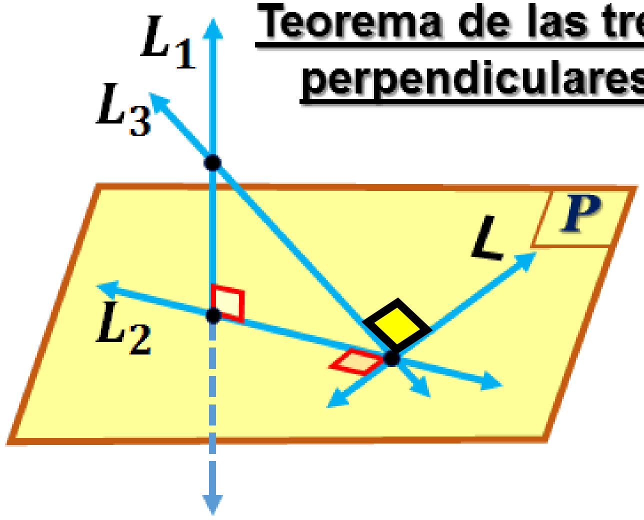
$\boxed{x = 25}$

4. Halle la medida de un ángulo diedro si se sabe que un punto interior de dicho diedro, dista de las caras $5\sqrt{3}$ u y 8 u, y dista de la arista 10 u.



- Nos piden x.





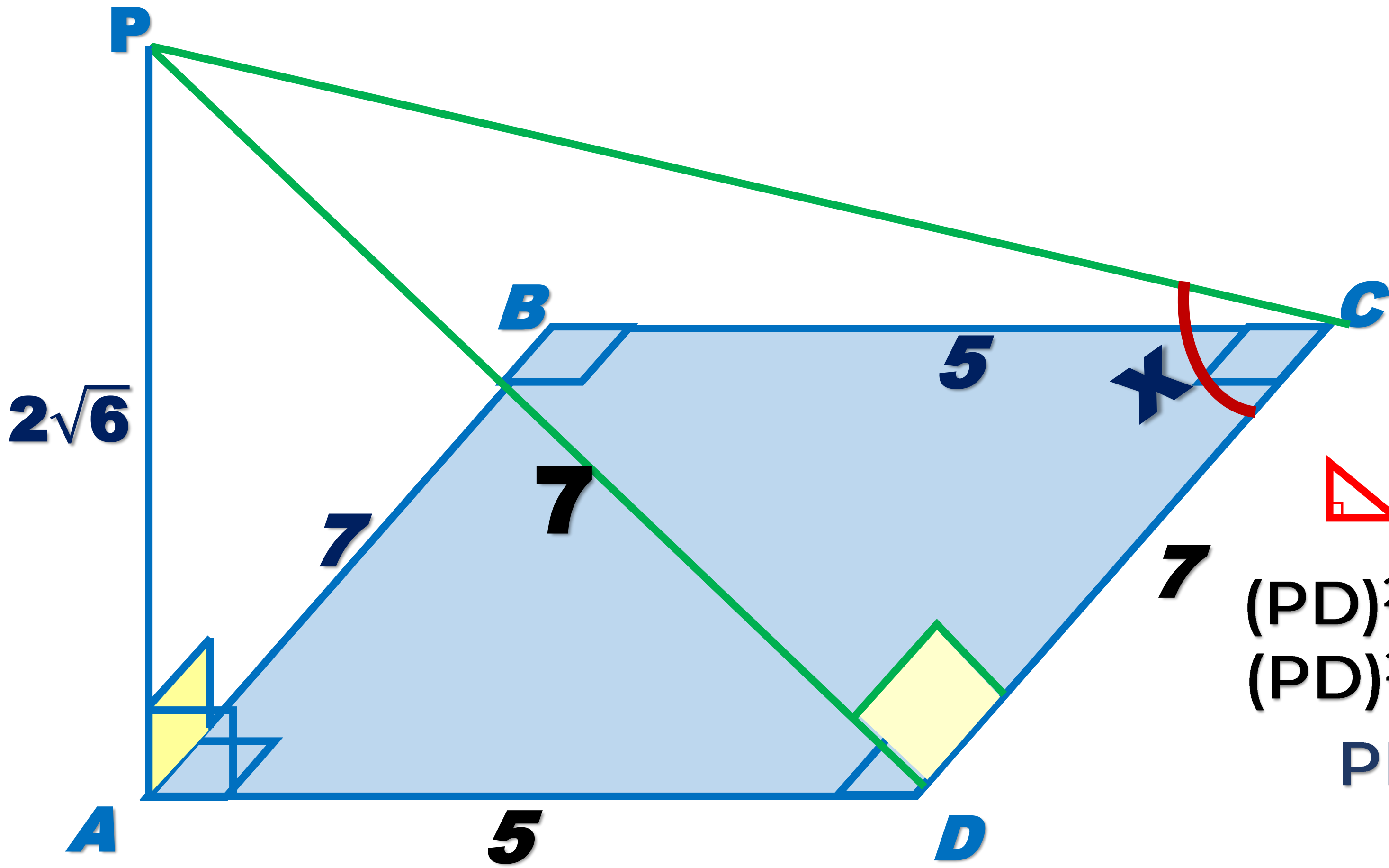
Teorema de las tres perpendiculares

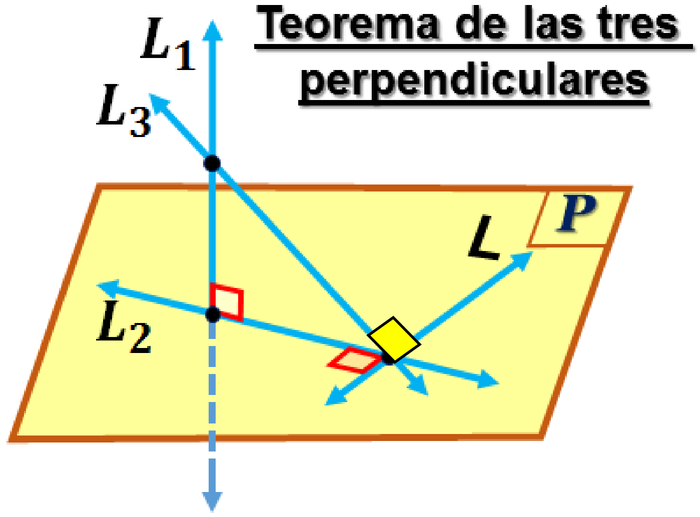
Del gráfico

$x = 53° + 60°$

$\boxed{x = 113°}$

5. Se tiene una región rectangular ABCD donde AB = 7 y BC = 5. Luego, por el extremo A se traza la perpendicular $\overline{AP}$ a dicha región, tal que AP = $2\sqrt{6}$. Halle la m<PCD.





◺APD : Pitágoras

$(PD)^2 = 5^2 + (2\sqrt{6})^2$

$(PD)^2 = 49$

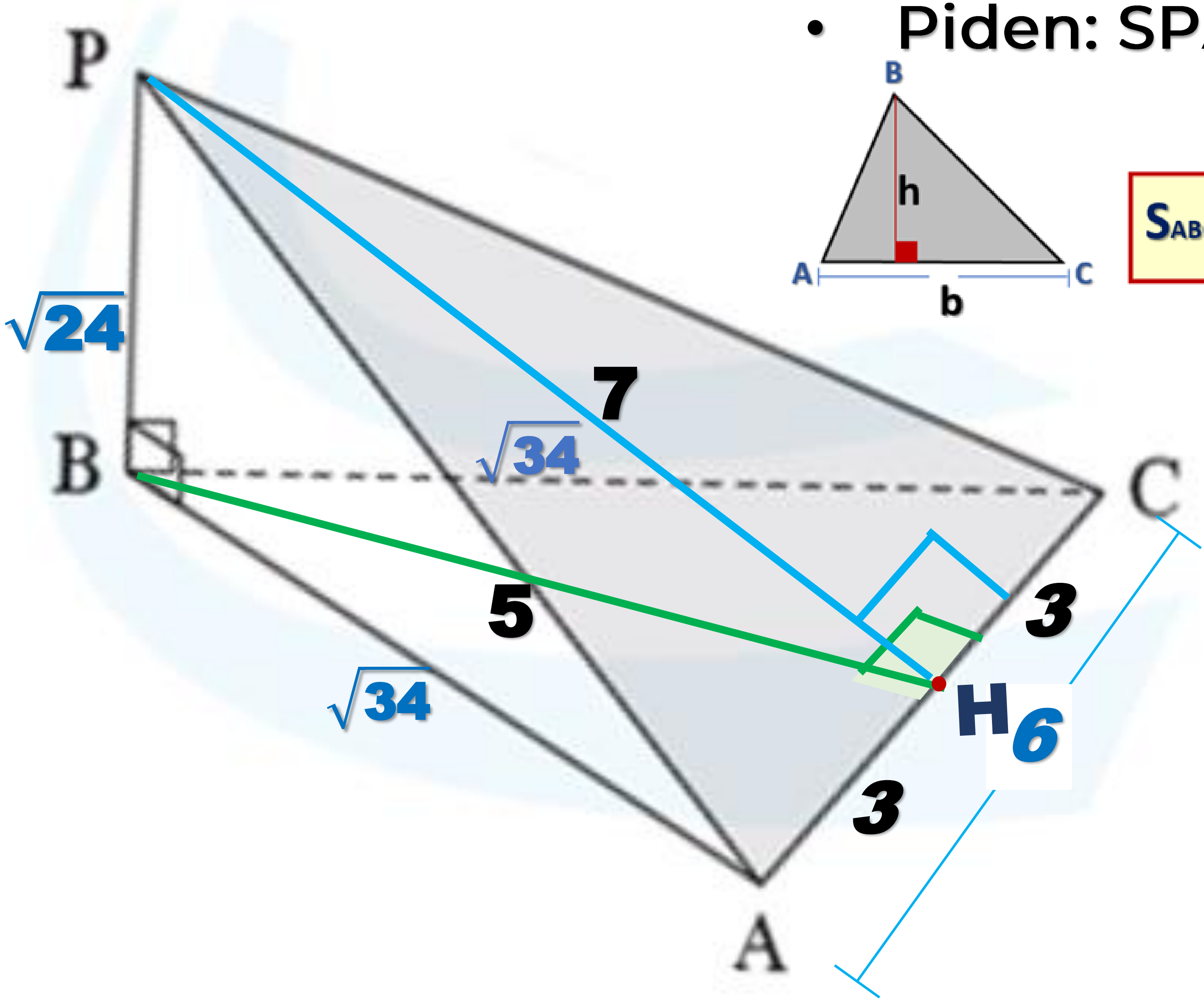
$PD = 7$

◺CDP :

Notable de 45° y 45°

$\boxed{x = 45°}$

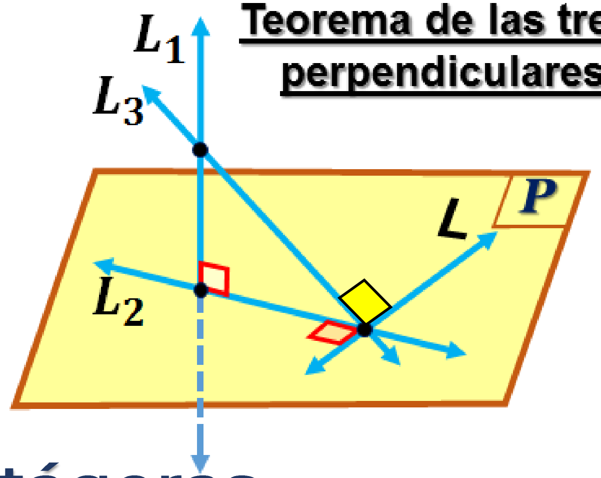
6. En la figura, AB = BC = $\sqrt{34}$, AC = 6 y PB = $\sqrt{24}$. Calcule el área de la región triangular PAC.



- Piden: SPAC

$$S_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

Teorema de las tres perpendiculares



◺ABH : Pitágoras

$$(\sqrt{34})^2 = 3^2 + (BH)^2$$
$$25 = (BH)^2$$
$$5 = BH$$

◺BPH : Pitágoras

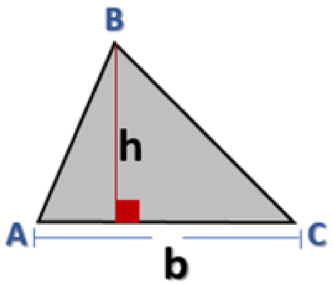
$$(PH)^2 = 5^2 + (\sqrt{24})^2$$
$$(PH)^2 = 49$$
$$BH = 7$$

Reemplazando

$$SPAC = \frac{6.7}{2}$$

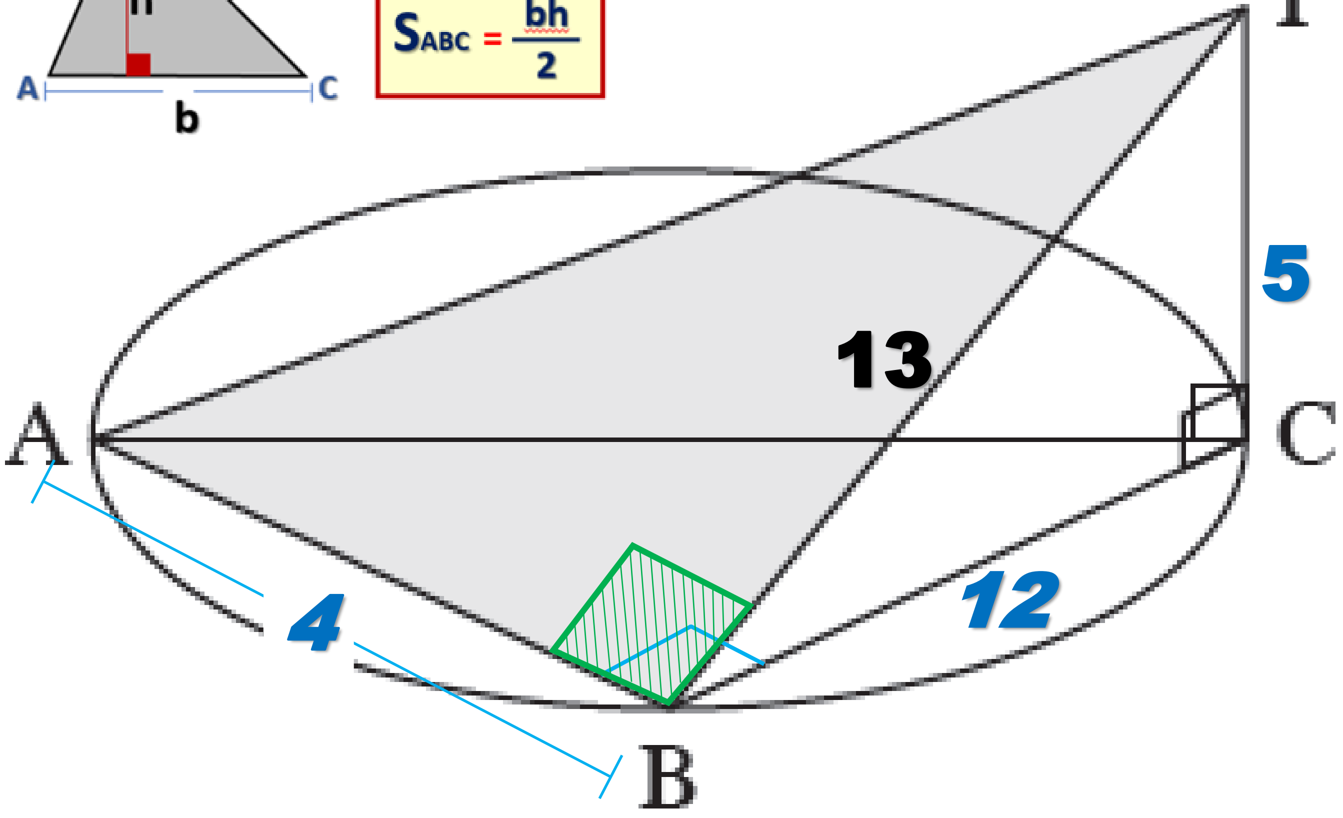
$$\boxed{SPAC = 21\ u^2}$$

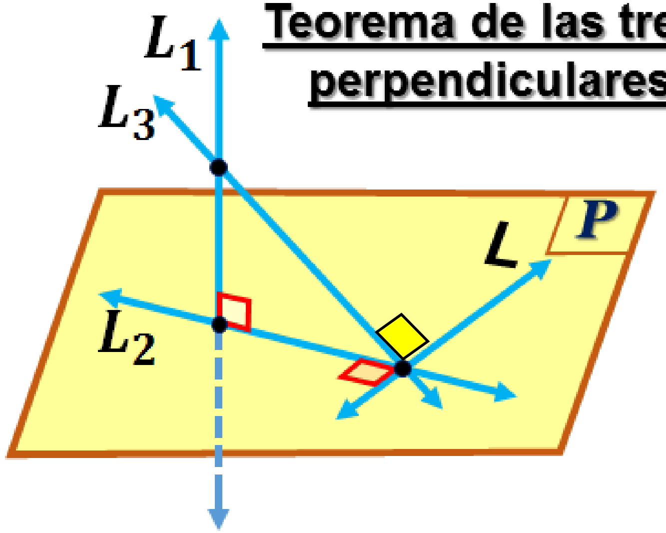
7. En la figura, $\overline{AC}$ es diámetro del círculo, AB = 4, PC = 5 y BC = 12. Calcule el área de la región ABP.



- Piden: S_{ABP}

$$S_{ABC} = \frac{bh}{2}$$





Teorema de las tres perpendiculares

◺BCP : Pitágoras

$(BP)^2 = 5^2 + 12^2$

$(BP)^2 = 169$

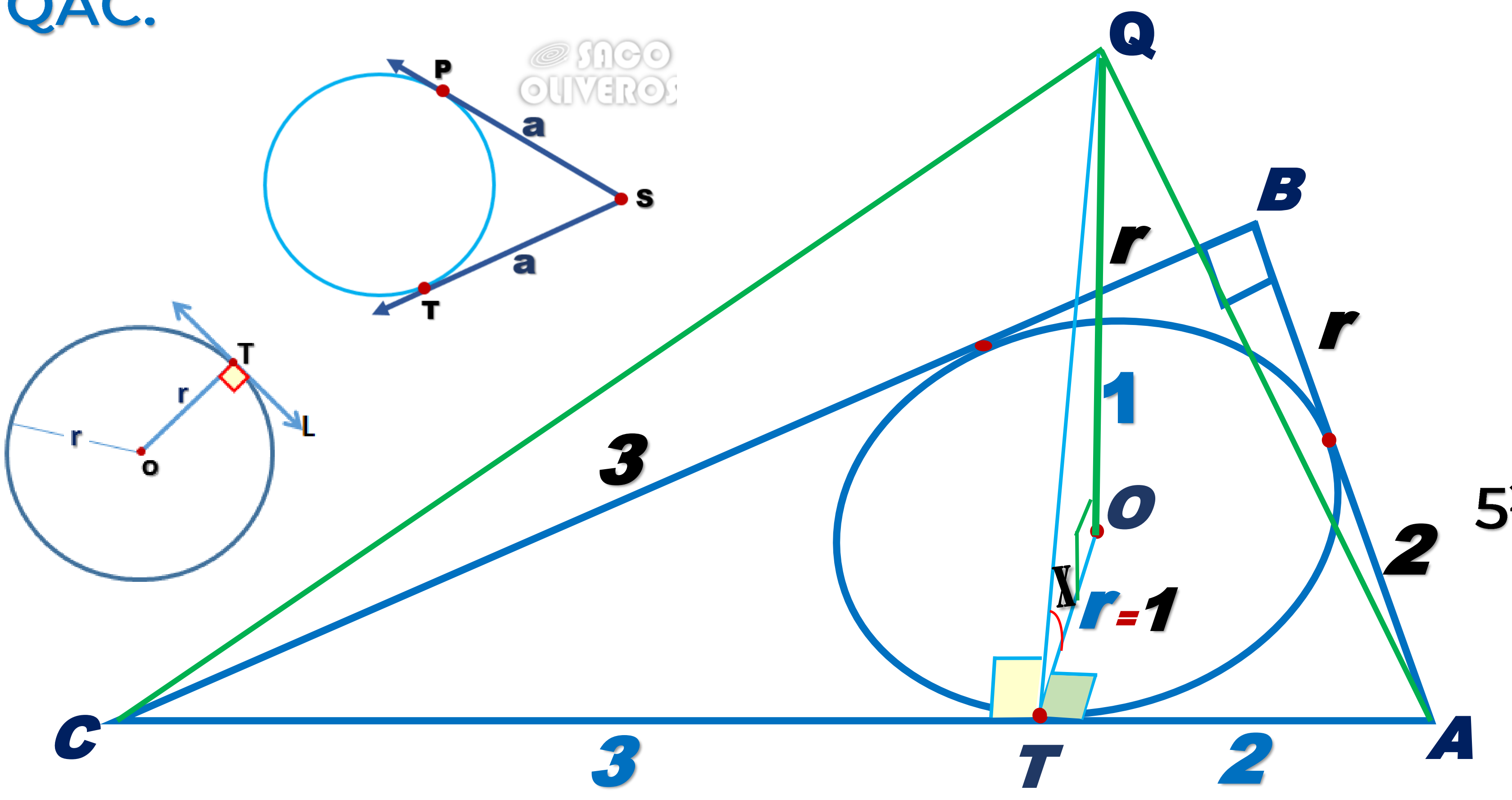
$BP = 13$

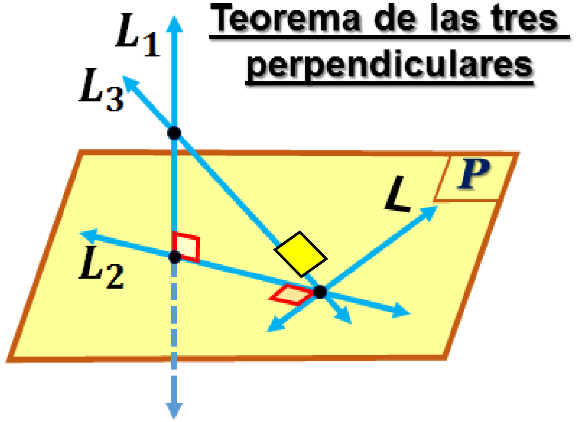
Reemplazando

$$SAPC = \frac{4.13}{2}$$

$$\boxed{S_{ABP} = 26\ u^2}$$

8. Una circunferencia de centro O está inscrita en un triángulo ABC, recto en B, siendo T punto de tangencia en $\overline{AC}$ y $\overline{QO}$ es perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC. Si AT = 2 m, TC = 3m y QO = 1m, halle la medida del diedro formado por las regiones triangulares ABC y QAC.





ABC : Pitágoras

$5^2 = (r + 3)^2 + (r + 2)^2$

$1 = r$

QOT :

Notable de 45° y 45°

$x = 45°$