ALGEBRA

Chapter 6

4th
SECONDARY

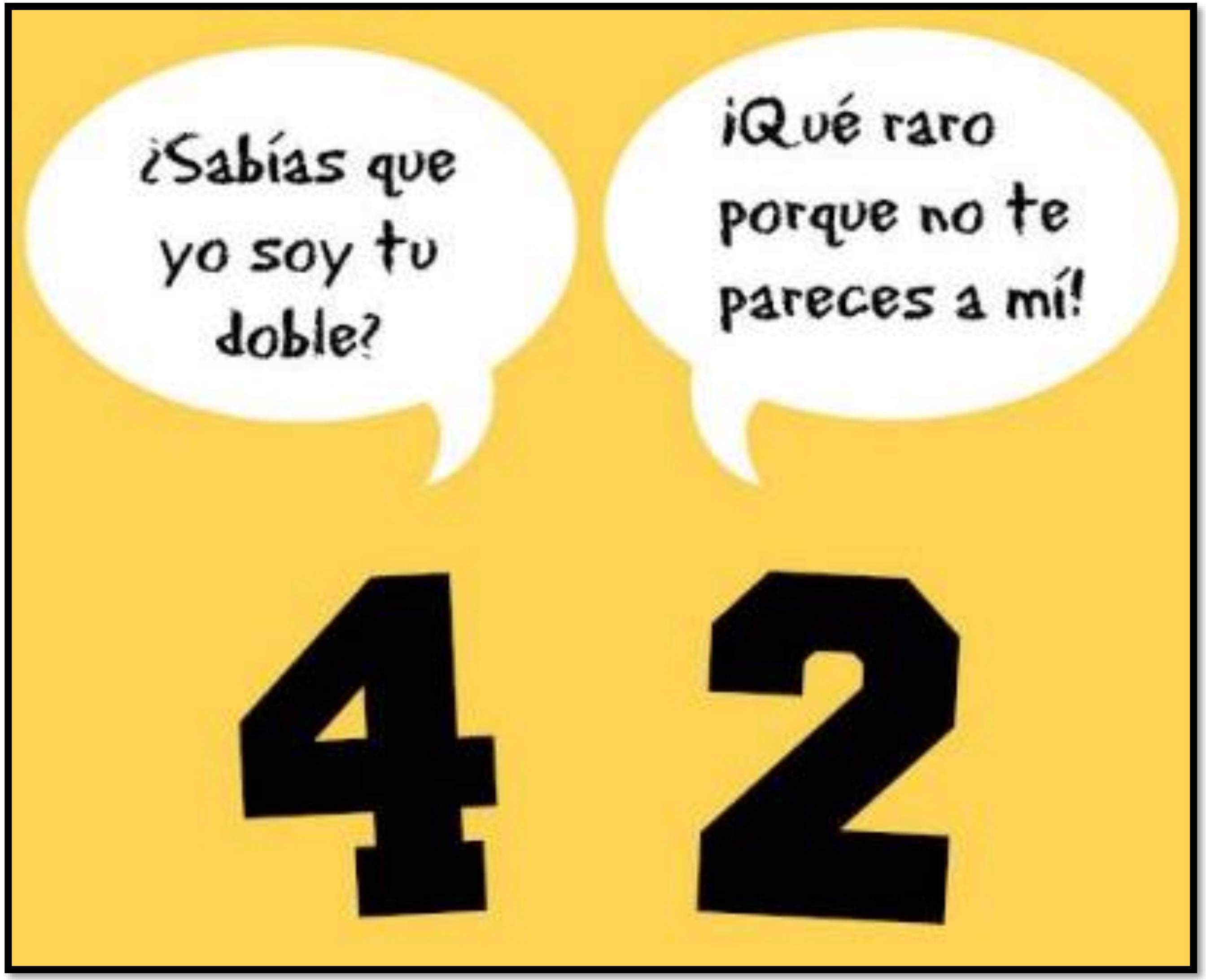
Factorización I

SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS


¿Sabías que yo soy tu doble?
¡Qué raro porque no te pareces a mí!
4
2

HELICO THEORY

CHAPTHER 06

SACO OLIVEROS

Concepto de factorización en $\mathbb{Z}$

Es la descomposición en la multiplicación indicada de sus factores primos.

Ejm.

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$$

a Polinomios sobre $\mathbb{Z}$

Es aquel polinomio que tiene todos sus coeficientes enteros.

Ejm.

$$P(x) = 5x^2 - 7x + 2$$

Ejm.

$$Q(x) = x^3 - 27$$

SACO OLIVEROS

b Factor algebraico (F.A.)

Sea F(x) un polinomio no constante, F(x) es factor algebraico de P(x) si $\frac{P(x)}{F(x)}$ es exacta.

Ejm.

$$P(x) = (x+1)(x^2-2) \quad ; \quad F(x) = x^2 - 2$$

Resolución

$$\frac{P(x)}{F(x)} = \frac{(x+1)(x^2-2)}{x^2-2}$$

Luego F(x) es un factor algebraico

c

Polinomio primo en Z

Es cuando no admite descomposición.

Ejm.

$$P(x) = x^2 + 2$$

Ejm.

$$Q(x) = x$$

d Factor primo

F(x) es factor primo de P(x) si se cumple lo siguiente.

F(x) es factor algebraico.

F(x) es polinomio primo.

Ejm.

$\mathbf{F(x) = x + 2}$ es factor primo de $\mathbf{P(x) = x^2 - 4}$

En efecto, F(x) es factor algebraico de P(x)

F(x) es polinomio primo

Por lo tanto: $\mathbf{F(x) = x + 2}$ es factor primo

II Criterios de factorización.

A Criterio del factor común.

1 Factor común monomio.

Ejm. $Factorizar: 5x^{10}y^5 - 10x^7y^8 - 25x^{11}y^9$

en efecto,

FCM de: $5x^{10}y^5 - 10x^7y^8 - 25x^{11}y^9$ es: $5x^7y^5$

$$5x^{10}y^5 - 10x^7y^8 - 25x^{11}y^9 = 5x^7y^5(x^3 - 2y^3 - 5x^4y^4)$$

2 Factor común polinomio.

Ejm. Factorizar: $(2x-3y+z)m^5 + (2x-3y+z)n^5 + (2x-3y+z)p^5$

$en\ efecto,$

$FCP\ de$: $(2x-3y+z)m^5 + (2x-3y+z)n^5 + (2x-3y+z)p^5$

es: $(2x-3y+z)$

$$(2x-3y+z)m^5 + (2x-3y+z)n^5 + (2x-3y+z)p^5 = (2x-3y+z)(m^5 + n^5 + p^5)$$

B Criterio de la agrupación de términos.

Se agrupa convenientemente los términos.

Ejm.

Factorizar: $a^2 x^2 + b^2 y + a^2 y + b^2 x^2$

En efecto,

$$\underline{a^2 x^2} + \underline{b^2 y} + \underline{a^2 y} + \underline{b^2 x^2} = a^2 (\underline{x^2 + y}) + b^2 (\underline{x^2 + y})$$

$$(x^2 + y)(a^2 + b^2)$$

SACO OLIVEROS

C Criterio de las identidades.

1 Trinomio cuadrado perfecto.

$$A^{2m} + 2A^mB^n + B^{2n} = (A^m + B^n)^2$$

$$\sqrt{\ } \qquad \sqrt{\ }$$

$$A^m \qquad \boxed{2A^mB^n} \qquad B^n$$

$$A^{2m} - 2A^mB^n + B^{2n} = (A^m - B^n)^2$$

$$\sqrt{\ } \qquad \sqrt{\ }$$

$$A^m \qquad \boxed{2A^mB^n} \qquad B^n$$

Ejm.

Factorizar : $x^2 + 6xy + 9y^2$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$$

$\sqrt{}$ $\sqrt{}$

x $3y$

$$\boxed{2(x)\,(3y) = 6xy}$$

2 Diferencia de cuadrados.

$$A^{2m} - B^{2n} = (A^m + B^n)(A^m - B^n)$$

$\sqrt{\ }\downarrow$ $\qquad$ $\sqrt{\ }\downarrow$

A^m $\qquad$ B^n

Ejm. Factorizar

$P(x) = 49 - x^2$

En efecto, $P(x) = (7 - x)(7 + x)$

SACO OLIVEROS

3

Suma y diferencia de cubos.

$$A^{3m} + B^{3n} = (A^m + B^n)(A^{2m} - A^m B^n + B^{2n})$$

$$\sqrt[3]{} \downarrow \qquad \sqrt[3]{} \downarrow$$

$$A^m \qquad B^n$$

Ejm.

Factorizar $x^3 + 27$

en efecto,

$$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$A^{3m} - B^{3n} = (A^m - B^n)(A^{2m} + A^m B^n + B^{2n})$$

$$\sqrt[3]{} \downarrow \qquad \sqrt[3]{} \downarrow$$

$$A^m \qquad B^n$$

Ejm.

$$Factorizar\ x^3 - 125$$

$$en\ efecto,$$

$$x^3 - 125 = (x-5)(x^2 + 5x + 25)$$

SACO OLIVEROS

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 06

SACO OLIVEROS

1. Señale un factor primo de:

$$Q(x;y) = 7m(3x-2y) - 5n(2y-3x) - 6x + 4y$$

Resolución

$$Q(x;y) = 7m(3x-2y) - 5n(2y-3x) - 2(3x-2y)$$

$$Q(x;y) = 7m\underline{(3x-2y)} + 5n\underline{(-2y+3x)} - 2\underline{(3x-2y)}$$

$$Q(x;y) = \underline{(3x-2y)}(7m+5n-2)$$

$$Un\ factor\ primo:\quad (3x-2y)$$

2. Indique los factores primos de:

$$P(a;b) = ab^4 - 5a^2b^3 + 4a^3b^2 - 20a^4b$$

Resolución

$$P(a;b) = \overline{ab^3}\,\underline{(b-5a)} + \overline{4a^3b}\,\underline{(b-5a)}$$

$$ab\,(b-5a)(b^2+4a^2)$$

3. Factorice:

$$P(a;b) = a^{10}b - 16a^2b$$

Resolución

$$P(a;b) = a^2b\,\underline{(a^8 - 16)}$$

$$P(a;b) = a^2b\,\underline{(a^4 - 4)}(a^4 + 4)$$

$$P(a;b) = a^2b\,(a^2 - 2)(a^2 + 2)(a^4 + 4)$$

SACO OLIVEROS

4. Calcule un factor primo de:

$$P(a;b;x) = (ab - 5x)^2 - (bx - 5a)^2$$

Resolución

$$P(a;b;x) = (ab - 5x - bx + 5a)(ab - 5x + bx - 5a)$$

$$P(a;b;x) = \big(b(a - x) + 5(a - x)\big)\big(b(a + x) - 5(a + x)\big)$$

$$P(a;b;x) = \big((a - x)(b + 5)\big)\big((a + x)(b - 5)\big)$$

$$P(a;b;x) = (a - x)(b + 5)(a + x)(b - 5)$$

Un factor primo: $(a - x)$

5. Factorice:

$$m^2 - 4p^2 + 4mn + 4n^2$$

Recordar el Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP)

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \end{array}}$$

Recordar la Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)}$$

Resolución

Agrupando convenientemente y aplicando T.C.P.

$$\underbrace{m^2 + 4mn + 4n^2}_{(m+2n)^2} - 4p^2$$

$$(m+2n)^2 - (2p)^2$$

Por Diferencia de Cuadrados

$$(m + 2n - 2p)(m + 2n + 2p)$$

Rpta: $\boxed{(m + 2n - 2p)(m + 2n + 2p)}$

6. El número de alumnos becados en el colegio

Saco Oliveros es la cantidad de Factores primos del polinomio

$$P(x,y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$$

Indique cuántos son los becados.

Resolución

Recordar la Suma de Cubos

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Factorizando por Agrupación de Términos

$$P(x,y) = \underbrace{x^4 + xy^3} + \underbrace{x^3y + y^4}$$

$$P(x,y) = x(\underline{x^3 + y^3}) + y(\underline{x^3 + y^3})$$

$$P(x,y) = (x+y)(x^3 + y^3)$$

Por Suma de Cubos

$$P(x,y) = (x+y)(\underbrace{x^3 + y^3})$$

$$P(x,y) = \underbrace{(x+y)(x+y)}(x^2 - xy + y^2)$$

$$P(x,y) = (x+y)^2(x^2 - xy + y^2)$$

N° de Factores Primos = 2

Rpta: Hay 2 alumnos becados

7. Factorice:

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$$

Recordar el Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\boxed{\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2 \end{aligned}}$$

Resolución

Agrupando convenientemente y efectuando

$$P(x) = \underbrace{(x+1)(x+4)}\underbrace{(x+2)(x+3)}+1$$

$$P(x) = \left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)+1$$

Cambiando de Variable: $\boxed{x^2+5x=m}$

$$P(x) = \underbrace{(m+4)(m+6)}+1$$

$$P(x) = m^2+10m+24+1$$

$$P(x) = m^2+10m+25$$

Factorizando por T.C.P. y luego reemplazando el valor de m

$$P(x) = (m+5)^2$$

$$P(x) = (x^2+5x+5)^2$$

Rpta: $\boxed{(x^2+5x+5)^2}$

8. Indique los factores primos de

$$T(x;y) = ab\left(x^2 + y^2\right) + xy(a^2 + b^2)$$

Resolución

Efectuando el polinomio T

$$T(x;y) = ab\left(x^2 + y^2\right) + xy(a^2 + b^2)$$

$$T(x;y) = abx^2 + aby^2 + xya^2 + xyb^2$$

Por Agrupación de Términos

$$T(x;y) = ax(bx + ay) + by(ay + bx)$$

$$T(x;y) = (bx + ay)(ax + by)$$

Rpta: $\boxed{(bx + ay)(ax + by)}$