

ALGEBRA

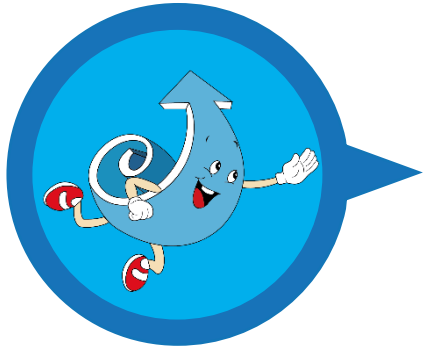
Chapter 2

4th
SECONDARY

Productos Notables I



HELICO MOTIVATING



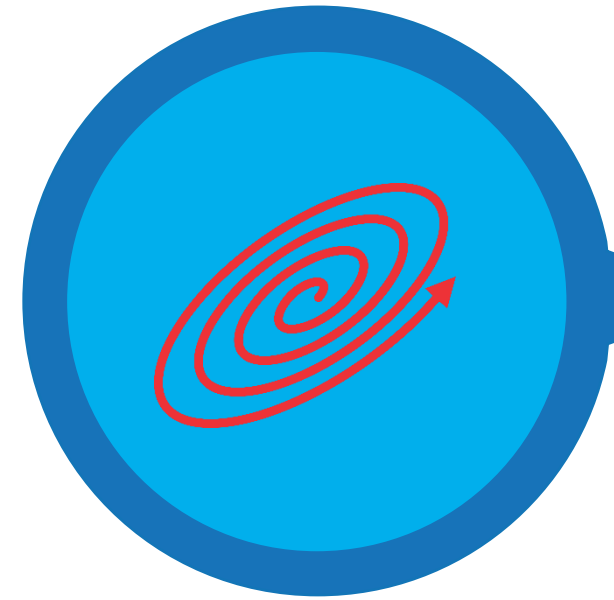
¿Puedes calcular mentalmente la siguiente expresión y dar la respuesta en el menor tiempo posible?

$$\sqrt[8]{(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1) + 1}$$

Rpta. 2

HELICO THEORY

CHAPTER 02



¿QUÉ SON PRODUCTOS NOTABLES?

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin efectuar la multiplicación.

1 DESARROLLO DE UN BINOMIO AL CUADRADO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(x + 3)^2 = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$

$$x^2 + 6x + 9$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(x - 7)^2 = (x)^2 - 2(x)(7) + (7)^2$$

$$x^2 - 14x + 49$$

2 IDENTIDAD DE LEGENDRE

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Ejemplo:

$$(x + 5)^2 + (x - 5)^2 = 2(x^2 + 5^2)$$

$$2(x^2 + 25)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Ejemplo:

$$(x + 5)^2 - (x - 5)^2 = 4(x)(5)$$

$$20x$$

3 DESARROLLO DEL BINOMIO AL CUBO

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ejemplo:

$$(x + 5)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(5) + 3(x)(5)^2 + (5)^3$$

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo:

$$(x - 4)^3 = (x)^3 - 3(x)^2(4) + 3(x)(4)^2 - (4)^3$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

4 IDENTIDAD DE CAUCHY

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

Ejemplo:

$$(x + 5)^3 = (x)^3 + (5)^3 + 3(x)(5)(x + 5)$$

$$x^3 + 125 + 15x(x + 5)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

Ejemplo:

$$(x - 4)^3 = (x)^3 - (4)^3 - 3(x)(4)(x - 4)$$

$$x^3 - 64 - 12x(x - 4)$$

5 DESARROLLO DEL TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Ejemplo: $(m + n + 6)^2 = m^2 + n^2 + 6^2 + 2(mn + 6n + 6m)$

$$m^2 + n^2 + 6^2 + 2mn + 12n + 12m$$

6 DESARROLLO DEL TRINOMIO AL CUBO

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

Ejemplo: $(m + n + 7)^3 = m^3 + n^3 + 7^3 + 3(m + n)(m + 7)(n + 7)$

$$(m + n + 7)^3 = m^3 + n^3 + 343 + 3(m + n)(m + 7)(n + 7)$$

HELICO PRACTICE

CHAPTER 02

1. Efectúe $T = (x + 5)^2 + (x - 3)^2 - 2(x + 1)^2 - 15$

Resolución $(x + 5)^2 + (x - 3)^2 - 2(x + 1)^2 - 15$

Desarrollando los productos notables se obtiene:

$$x^2 + 2(x)(5) + 5^2 + x^2 - 2(x)(3) + 3^2 - 2(x^2 + 2(x)(1) + 1^2) - 15$$

Multiplicando y elevando al cuadrado se tiene:

$$x^2 + 10x + 25 + x^2 - 6x + 9 - 2(x^2 + 2x + 1) - 15$$

Luego de reducir términos semejantes y multiplicar se obtiene:

$$\cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 34 - \cancel{2x^2} - \cancel{4x} - 2 - 15$$

$$\boxed{17}$$

2. Si $a + b = 5$; $ab = 3$ calcule

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - 2}$$

Resolución

Binomio al cubo

$$(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(5)^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 3(5)$$



$$125 = a^3 + b^3 + 45$$

$$80 = a^3 + b^3$$



Binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(5)^2 = 2(3) + a^2 + b^2$$

$$25 = 6 + a^2 + b^2$$

$$19 = a^2 + b^2$$

Reemplazando datos

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - 2} = \frac{80}{17}$$

3. Sabiendo que $x - x^{-1} = 4$; Calcula: $x^3 - x^{-3}$

Resolución

Binomio al cubo $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

$$\text{sea: } x - x^{-1} = 4$$

$$\text{elevando al cubo } (x - x^{-1})^3 = 4^3$$

$$x^3 - x^{-3} - 3x \cdot x^{-1}(x - x^{-1}) = 64$$

$$x^3 - x^{-3} - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 64$$

$$x^3 - x^{-3} - 12 = 64$$

$$x^3 - x^{-3} = 76$$

4. Se tiene como información que al resolver el siguiente problema, si: $a = \sqrt{3} + 1$
 $b = \sqrt{3} - 1$

Calcule : $a^4 + b^4$ ésta es la edad del profesor chumbiray

¿Cual es la edad del profesor chumbiray?

Resolución $ab = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$

$$ab = \sqrt{3}^2 - 1^2 = 2$$

Binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2\sqrt{3})^2 = a^2 + 2(2) + b^2$$

$$2^2 \cdot 3 = 2(2) + a^2 + b^2$$

$$12 = 4 + a^2 + b^2$$

$$8 = a^2 + b^2$$

$$(8)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

$$(8)^2 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2$$

$$64 = (a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2$$

$$64 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

$$64 = a^4 + 2(2)^2 + b^4$$

$$56 = a^4 + b^4$$

La edad del profesor es 56 años

5. Si $S = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$

$$M = \frac{(3x+5)^2 - (3x-5)^2}{15x}$$

halle el valor de $\sqrt{S + M}$

Resolución

Aplicando Legendre en S y M

$$S = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$$

$$S = 2 \left((3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 \right)$$

$$S = 2(18 + 12)$$

$$S = 60$$

Recordando la Identidad de Legendre:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$M = \frac{(3x + 5)^2 - (3x - 5)^2}{15x}$$

$$M = \frac{4(3x)(5)}{15x} = \frac{60x}{15x}$$

$$M = 4$$

Piden: $\sqrt{S + M}$

$$\Rightarrow \sqrt{60 + 4} = 8$$

Rpta: 8

6. Sea: $x^2 + y^2 + z^2 = 25 \wedge$

$$xy + yz + xz = 12$$

Con $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ calcule $x + y + z$

Resolución

Aplicando en el problema

$$(x + y + z)^2 = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{25} + \underbrace{2(xy + yz + xz)}_{2(12)}$$

$$(x + y + z)^2 = 25 + 2(12)$$

$$(x + y + z)^2 = 49$$

Del dato $x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow x + y + z = 7$$

Rpta: 7

7. Si: $a + b + c = 6$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 10$$

Efectúe : $T = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2$

Resolución

Desarrollando los binomios al cuadrado en T:

$$T = \underline{a^2} + \underline{2ab} + \underline{b^2} + \underline{b^2} + \underline{2bc} + \underline{c^2} + \underline{a^2} + \underline{2ac} + \underline{c^2}$$

Agrupando convenientemente:

$$T = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2} + \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)}$$

$$T = 10 + \underbrace{(a + b + c)^2}$$

$$T = 10 + (6)^2$$

$$\therefore T = 46$$

Recordar el desarrollo del binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Recordar el desarrollo del Trinomio al cuadrado:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

Rpta: 46

8. Si

$$x + y + z = 4 \wedge (x + y)(y + z)(x + z) = 5$$

Efectúe: $M = x^3 + y^3 + z^3$

Resolución

Aplicando en el problema

$$\underbrace{(x + y + z)^3}_{(4)^3} = \underbrace{x^3 + y^3 + z^3}_M + \underbrace{3(x + y)(x + z)(y + z)}_{3(5)}$$

$$(4)^3 = M + 3(5)$$

$$64 = M + 15$$

$$\therefore M = 49$$

Recordar el desarrollo del Trinomio al cubo:

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

Rpta: 49