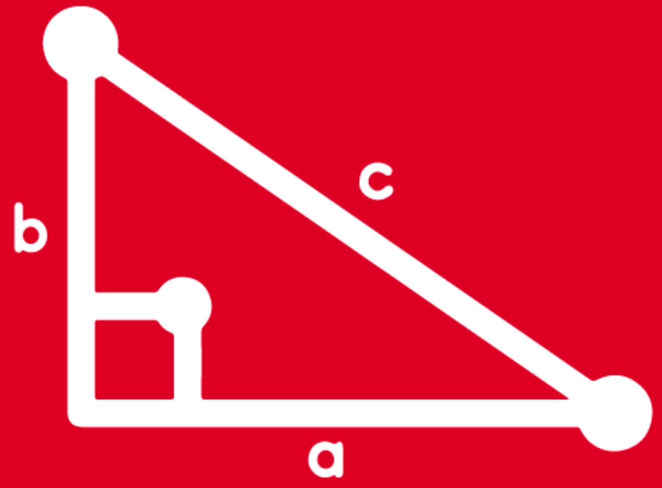
TRIGONOMETRY

Chapter 24
Session II

4th
SECONDARY



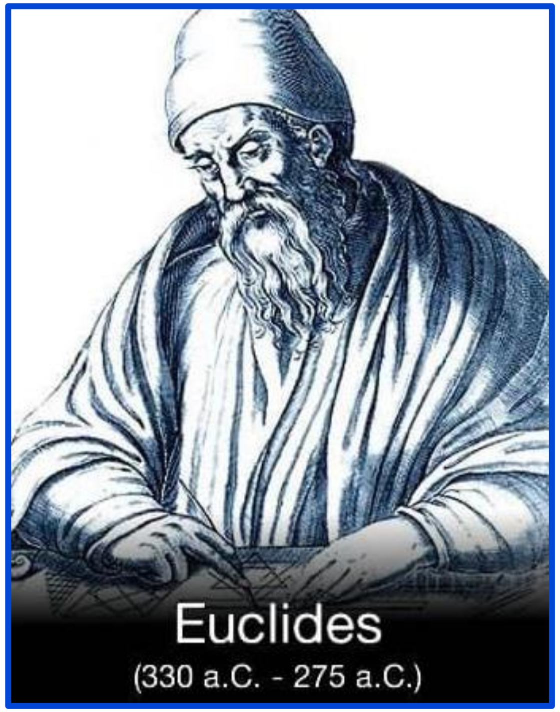
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS II

SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVACIÓN

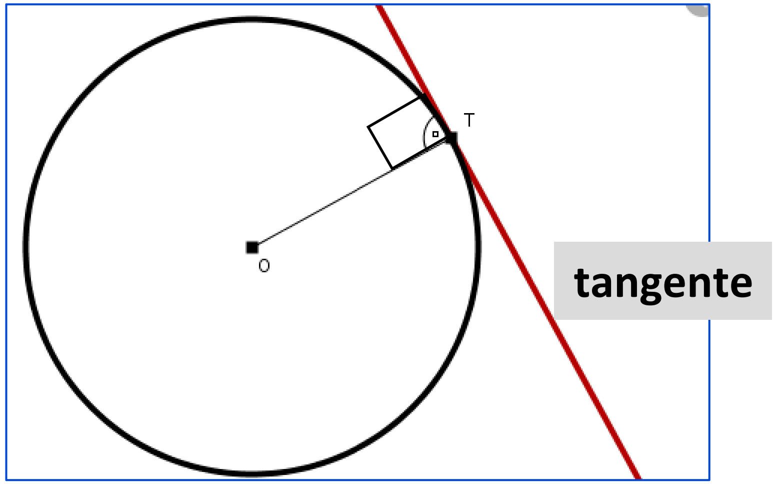
Los Griegos tenían la idea de que la tangente a una curva era una recta que "tocaba" a la curva sin cortarla. Hay que destacar a Euclides, quien analizó el comportamiento de una recta trazada por una circunferencia y formando un ángulo recto con su diámetro .

Las dos propiedades que observó parecían construir para él las características de la tangente.

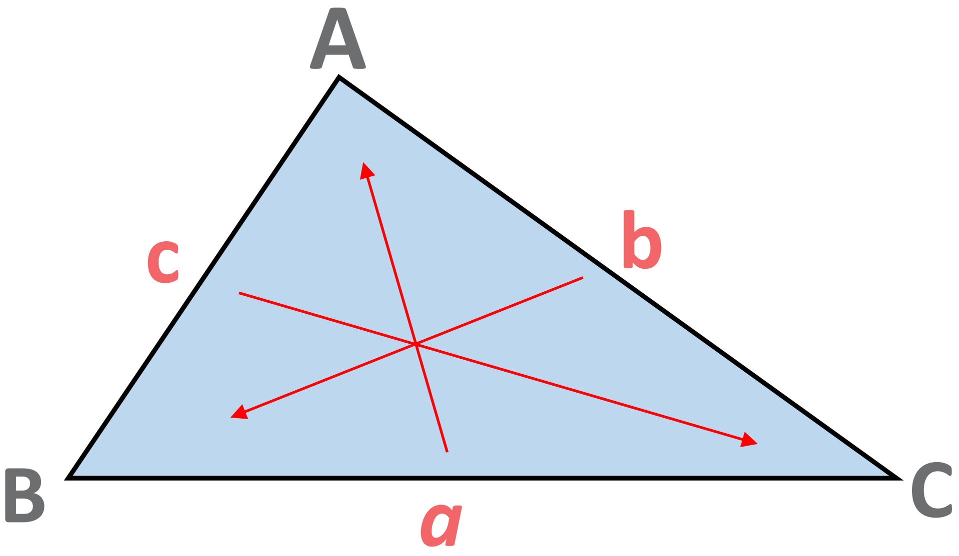


1. **La recta sólo tiene en común un punto con la circunferencia.**

2. **Es imposible interponer otra línea entre esa recta y la circunferencia.**

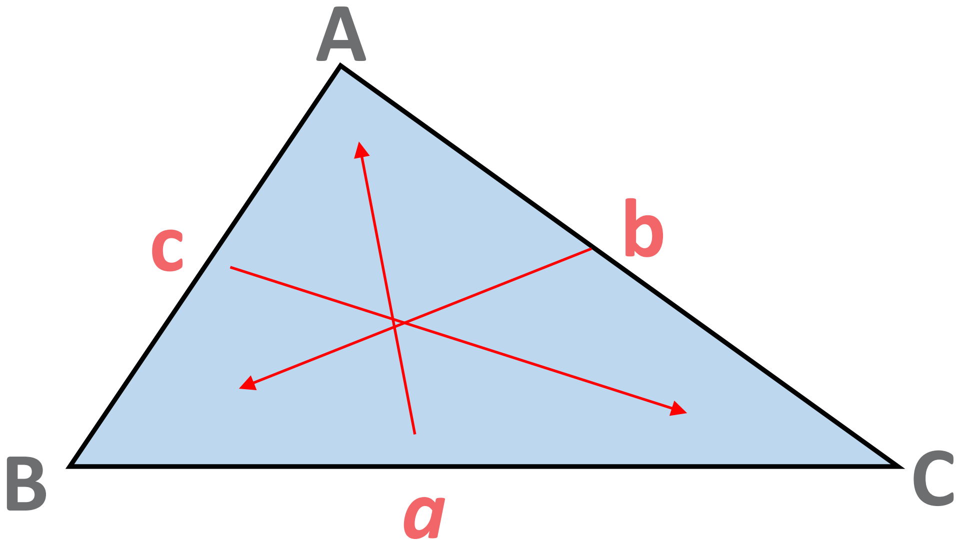


LEY DE SENOS



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

LEY DE COSENOS



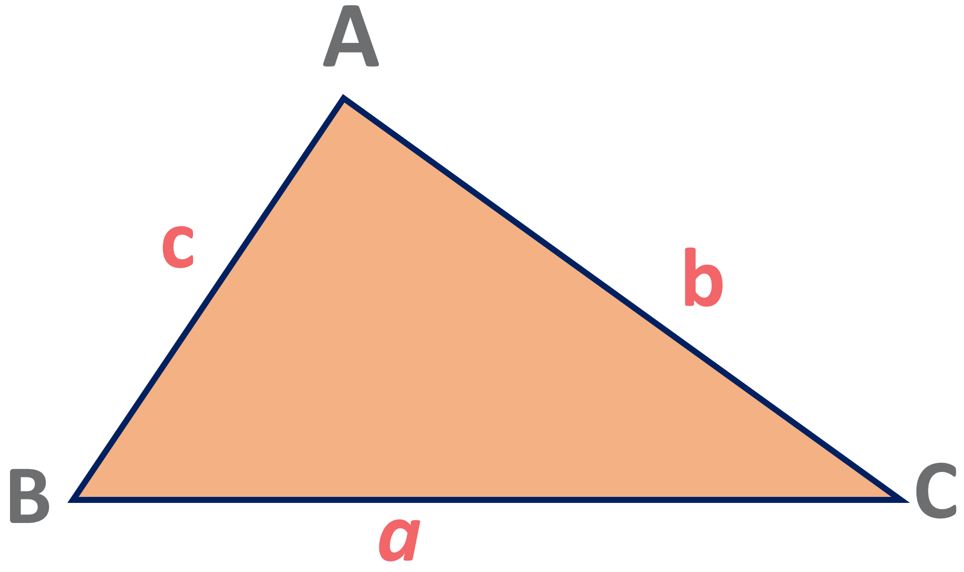
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cosC$$

LEY DE TANGENTES

En un triángulo ABC se cumple:



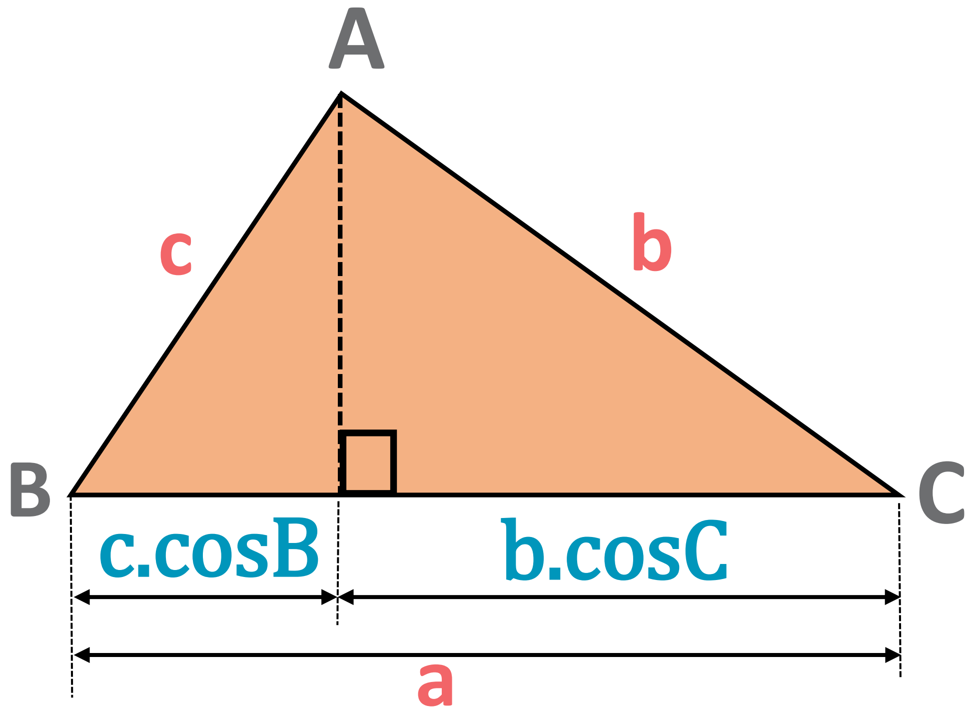
$$\frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \frac{a-c}{a+c}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} = \frac{b-c}{b+c}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b}$$

LEY DE PROYECCIONES

En un triángulo ABC se cumple:

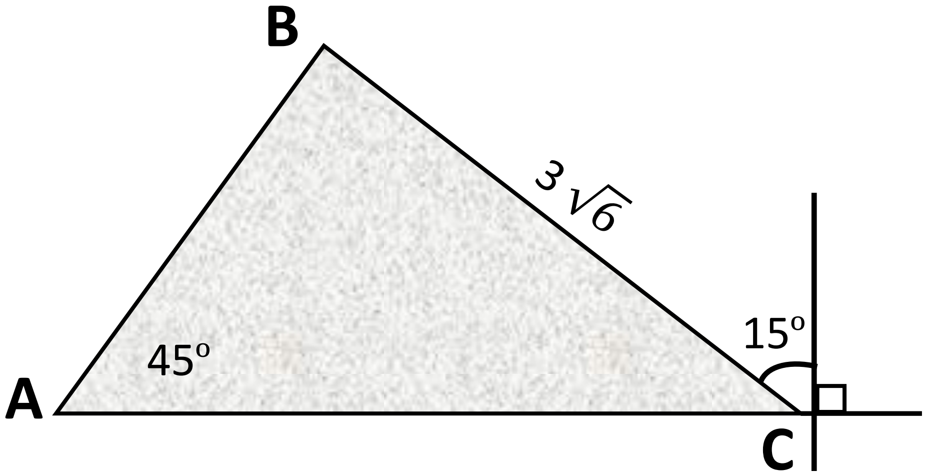


$$a = b.\cos C + c.\cos B$$

$$b = a.\cos C + c.\cos A$$

$$c = a.\cos B + b.\cos A$$

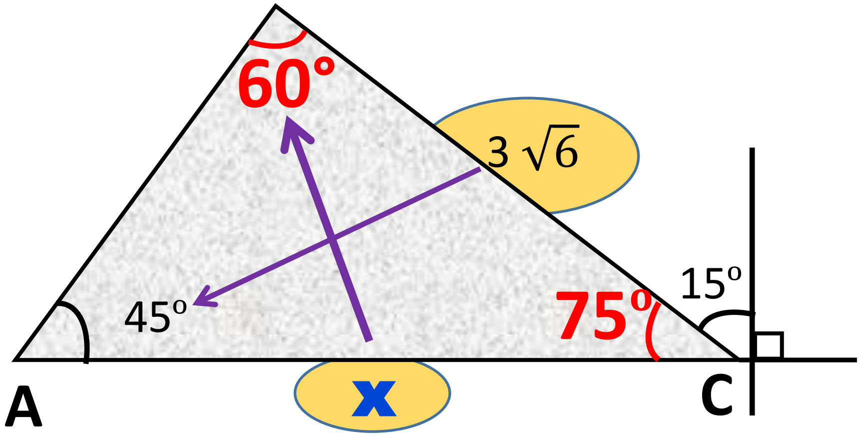
1) De la figura , calcule AC



Resolución:

Recordar:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{sen\,B}$$



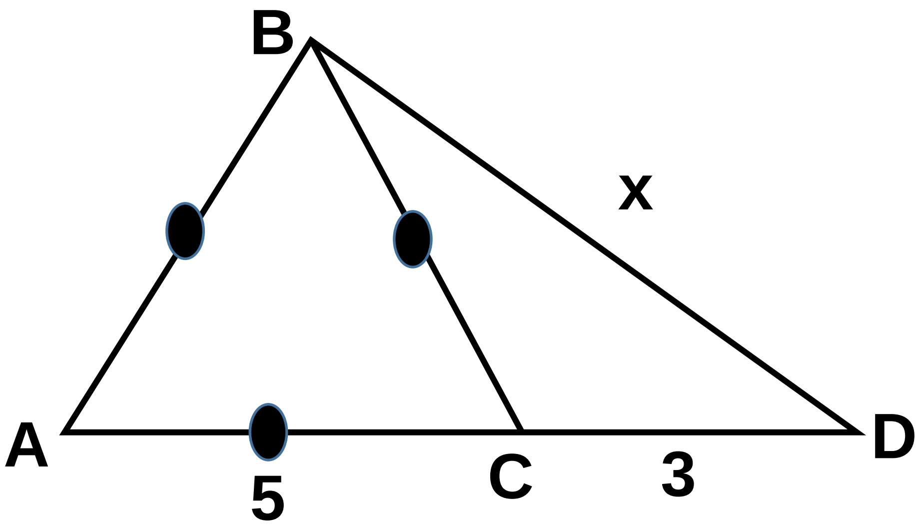
De la ley de senos tenemos:

$$\frac{x}{\text{sen } 60^o} = \frac{3\sqrt{6}}{\text{sen } 45^o}$$

$$x = \frac{3\sqrt{6}\,sen60^0}{sen\,45^o} = \frac{3\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)}$$

$$x = \frac{3\cancel{\sqrt{2}}\ \sqrt{3}\ \sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} \qquad \therefore \boxed{x = 9}$$

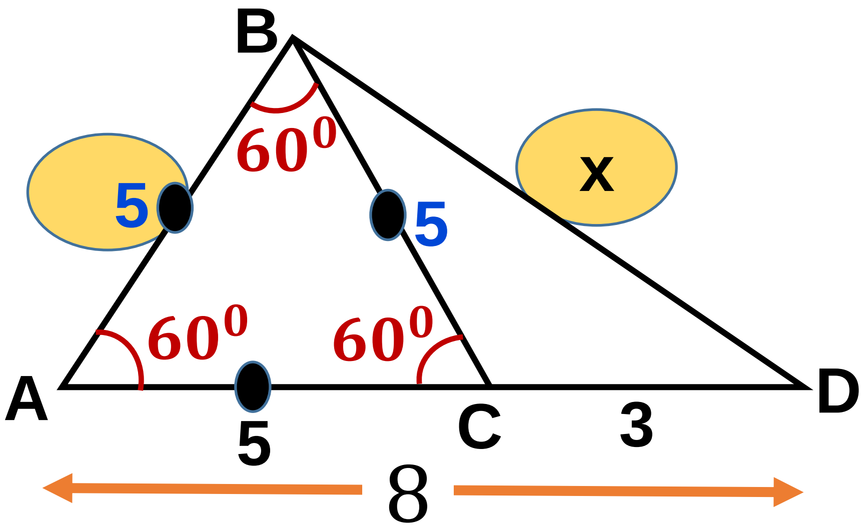
2) De la figura , halle el valor de x



Resolución:

***Recordar*:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathrm{b}\,\mathrm{c}\,.\cos\mathrm{A}$$



Ley de cosenos en el Δ ABD:

$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2\,.\,\mathbf{5}\,.\,\mathbf{8}\,.cos60^0$$

$$x^2 = 25 + 64 - \overset{40}{\cancel{80}}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$x^2 = 49$$

$$\therefore \boxed{x = 7}$$

3) En un triángulo ABC , se cumple que $A + B = 90^o, A - B = 74^o$ y $b = 5$; halle el valor de a

Resolución:

Recordar:

$$\frac{\tan(\frac{A-B}{2})}{\tan(\frac{A+B}{2})} = \frac{a-b}{a+b}$$

Ley de tangentes

$$\frac{tan\left(\frac{74°}{2}\right)}{tan\left(\frac{90°}{2}\right)} = \frac{a-5}{a+5}$$

$$\frac{tan\,37°}{\boxed{tan\,45°}} = \frac{a-5}{a+5}$$

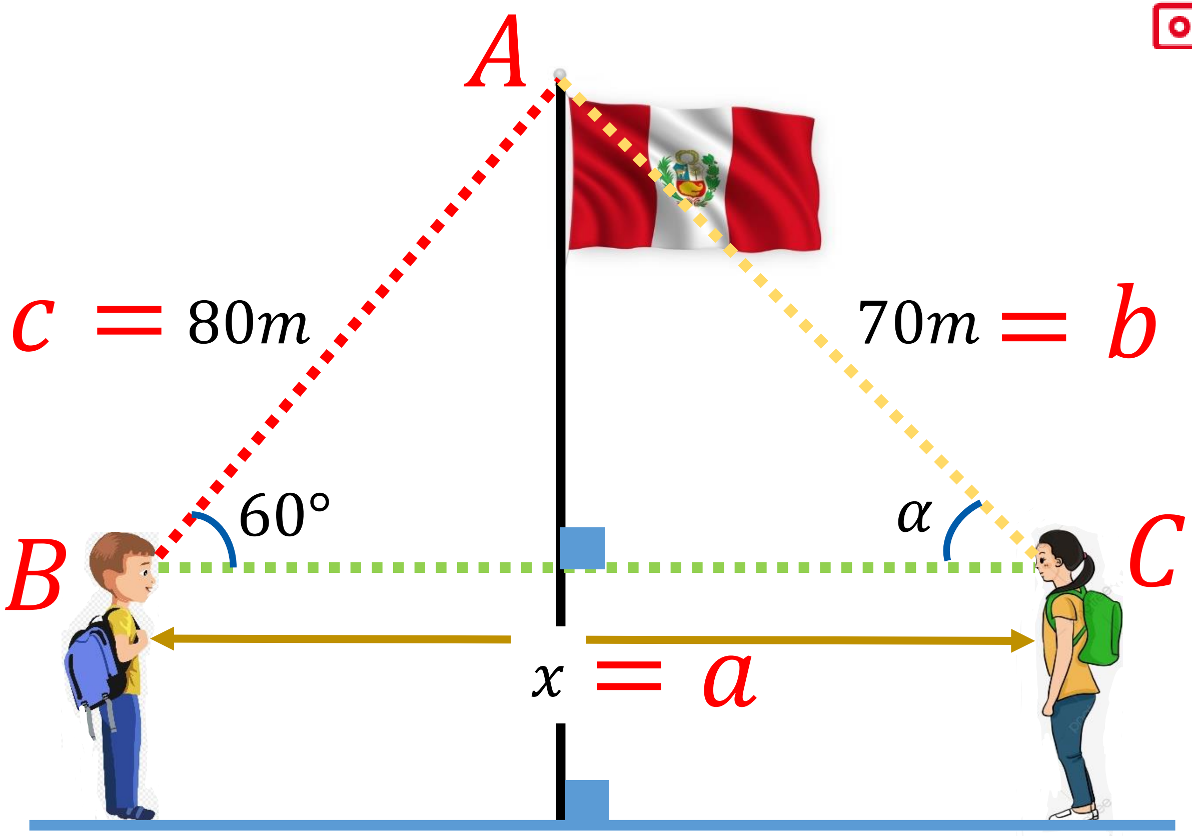
1

$$\frac{3}{4} = \frac{a-5}{a+5}$$

$$3a + 15 = 4a - 20$$

$$\therefore \boxed{a = 35}$$

4) Dos alumnos observan la parte superior del asta de la bandera con ángulos de elevación de $60°$ y α. Si las líneas visuales miden $80m$ y $70m$ respectivamente. Calcule las distancias que separa a los escolares, si ellos tienen la misma altura (los alumnos y el asta se encuentran en un mismo plano vertical).
Dato: $\sec\alpha = 7$



Resolución:

LEY DE PROYECCIONES

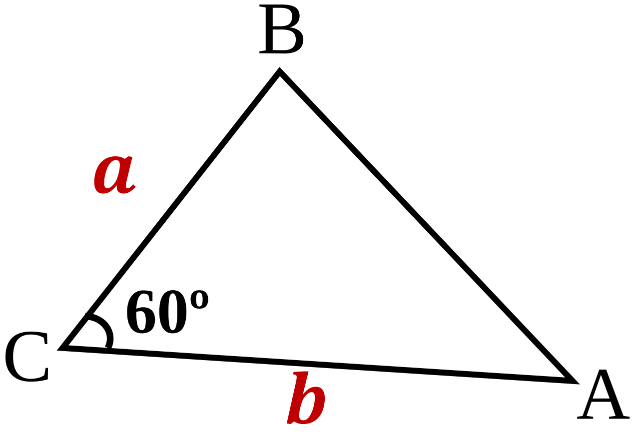
$$a = b.\cos C + c.\cos B$$

$$x = 70.\cos\alpha + 80.\cos 60°$$

$$x = \overset{10}{\cancel{70}}.\left(\frac{1}{\cancel{7}}\right) + \overset{40}{\cancel{80}}.\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 50$$

$$\therefore \boxed{x = 50m}$$

5) Del gráfico, si BC = 4AC ; calcule E = $\sqrt{3}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)-3$



Resolución:

Ley de tangentes: $$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{120°}{2}\right)}=\frac{4b-b}{4b+b}$$

$Si:\ C=60°$
$\Rightarrow A+B=120°$

Si: BC = 4AC
$a=4b$

$$\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sqrt{3}}=\frac{3\cancel{b}}{5\cancel{b}}\ \Rightarrow\ \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{3}{5}\right)$$

Nos piden: $\mathbf{E=\sqrt{3}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)-3}$

$$\mathbf{E}=\sqrt{3}\,\sqrt{3}\left(\frac{3}{5}\right)-3$$

$$E=\frac{9}{5}-3$$

$$\therefore\ \boxed{\mathbf{E}=-\frac{6}{5}}$$

6) En un triángulo ABC, de lados *a*, *b* y *c* ; simplifique

$$K = \frac{\cos C(c - b.\cos A)}{\cos B(b - c.\cos A)}$$

Resolución:

***Recordar*:**

$$c = a.\cos B + b.\cos A$$

$$b = a.\cos C + c.\cos A$$

Tenemos:

$$K = \frac{\cos C(c - b.\cos A)}{\cos B(b - c.\cos A)}$$

$$K = \frac{\cos C(a.\cos B + \cancel{b.\cos A} - \cancel{b.\cos A})}{\cos B(a.\cos C + \cancel{c.\cos A} - \cancel{c.\cos A})}$$

$$K = \frac{\cancel{\cos C\ (a.\cos B)}}{\cancel{\cos B\ (a.\cos C)}}$$

$$\therefore \boxed{K = 1}$$

7) En un triángulo ABC (lados a, b y c) , se cumple que

$$\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)\cot\left(\frac{A+C}{2}\right)=\frac{1}{5}$$

Calcule $\dfrac{\text{sen } A}{\text{sen } C}$

Resolución:

Del dato: $\tan\left(\dfrac{A-C}{2}\right).\cot\left(\dfrac{A+C}{2}\right)=\dfrac{1}{5}$

$$\tan\left(\frac{A-C}{2}\right).\frac{1}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{array}{l} a=3k \\ c=2k \end{array}$$

Usando ley de senos:

$$\frac{c}{\text{sen } C}=\frac{a}{\text{sen } A}$$

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}=\frac{a}{c}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\text{sen } A}{\text{sen } C}=\frac{3}{2}}$$

8) En un triángulo ABC de lados *a*, *b* y *c* y circunradio R; simplifique

M=2RsenB+*a*.cos(A+B)+c.cos(B+C)

Resolución:

Del dato:

A+B+C=180°

$$A+B=180°-C$$

$$B+C=180°-A$$

***Recordar*:**

$$\operatorname{sen}B=\frac{b}{2R}$$

$$b = a.\cos C + c.\cos A$$

Tenemos:

$$M=2R\operatorname{sen}B+a.\cos(A+B)+c.\cos(B+C)$$

$$M=2R\operatorname{sen}B+a.\cos(180°-C)+c.\cos(180°-A)$$

$$M=\cancel{2R}\left(\frac{b}{\cancel{2R}}\right)-a.\cos(C)-c.\cos(A)$$

$$M=b-\underbrace{(a.\cos(C)+c.\cos(A))}_{b}$$

$$M=b-b$$

$$\therefore \boxed{M=0}$$