MATHEMATICAL REASONING

Chapter 18

5th
SECONDARY

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATION

!SABIAS QUE!

El **puente Hong Kong-Zhuhai-Macao** consta de una serie de puentes y túneles de 55 km que conectan Hong Kong con Macao y Zhuhai, las tres ciudades principales de China. La longitud total del puente y el túnel es de unos 55 km. El puente principal mide unos 30 km y el túnel mide 6,7 km, para permitir el paso de las embarcaciones.

HELICO THEORY

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Es un tema que incluye diversas situaciones problemáticas en la que se pide calcular un máximo valor o un mínimo valor.

SITUACIONES LÓGICAS CREATIVAS

- PROBLEMAS CON PALITOS
- PROBLEMAS CON FICHAS Y/O MONEDAS
- PARENTESCOS
- CERTEZAS
- OTROS

PROBLEMAS APLICATIVOS

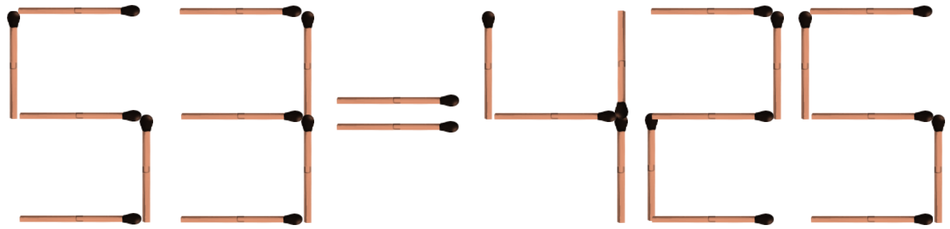
- SITUACIONES ALGEBRÁICAS
- SITUACIONES ARITMÉTICAS
- SITUACIONES GEOMÉTRICAS

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SITUACIONES LÓGICAS CREATIVAS

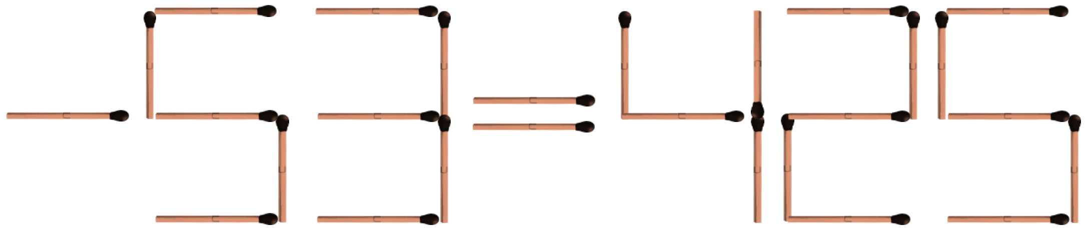
Ejemplo 1:

En la igualdad mostrada, para que se verifique deben moverse x cerillos, como mínimo. ¿Cuál es el valor de x?



Resolución:

Piden el valor de x.



$\therefore \quad x = 3$

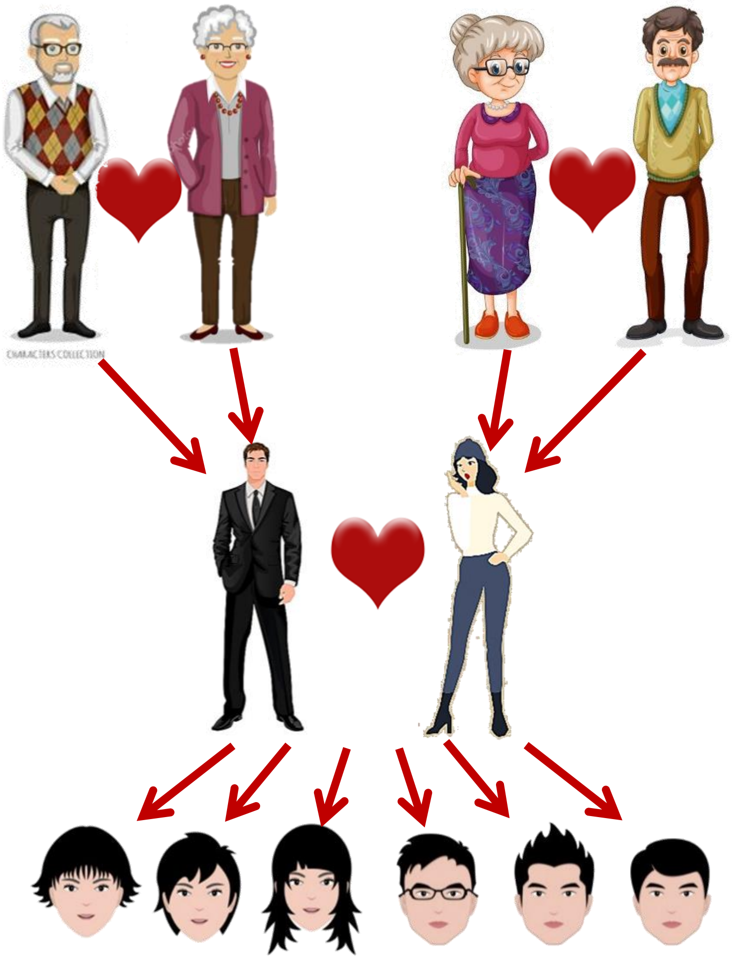
SITUACIONES LÓGICAS CREATIVAS

Ejemplo 2:

Dos abuelas, 2 abuelos, 3 padres, 3 madres, 2 suegras, 2 suegros, 4 hijas, 4 hijos, 1 yerno, 1 nuera, 3 hermanas y 3 hermanos consumieron en una cena familiar 3 aceitunas cada uno. ¿Cuántas aceitunas se consumieron como mínimo en esta reunión familiar?

Resolución:

De los datos:



Como cada uno come 3 aceitunas,

$12 \times 3 = 36$

$\therefore$ 36

HELICO THEORY

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SITUACIONES ALGEBRÁICAS

- COMPLETANDO CUADRADOS

Se sabe que:

$$x^2 \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x_{min} = 0$$

Para maximizar o minimizar una expresión cuadrática la idea es completar cuadrados

Ejemplo 1

Calcule el mínimo valor de

$$M = x^2 + 6x + 15; \quad x \in \mathbb{R}$$

Resolución

$$M_{min} = \underbrace{x^2 + 2x(\mathbf{3}) + (\mathbf{3})^2} + (\mathbf{6})$$

$$M_{min} = \underbrace{(x+3)^2}_{0} + 6$$

$$M_{min} = 6$$

HELICO THEORY

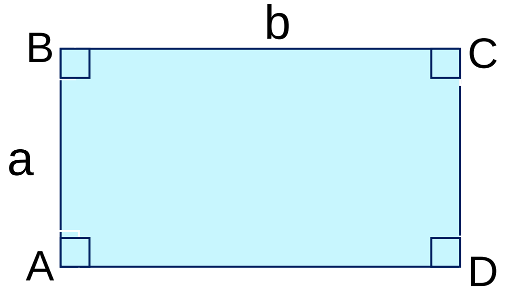
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

❑ SITUACIONES ARITMÉTICAS

Ejemplo:

El perímetro de un rectángulo es 36m. Halle el área máxima de dicha región rectangular.

Resolución



Perímetro $= 2a + 2b = 36$

$\rightarrow \quad a + b = 18$

Piden el área máxima, es decir

$$ab \Rightarrow Máximo$$

Algunos valores de ab serían:

$$1 \times 17 = 17$$
$$2 \times 16 = 32$$
$$3 \times 15 = 45$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$9 \times 9 = 81$$

El máximo valor de un producto conociendo la suma constante de dichos valores, se obtiene cuando los números son iguales.

$$\rightarrow \quad A_{máxima} = 81u^2$$

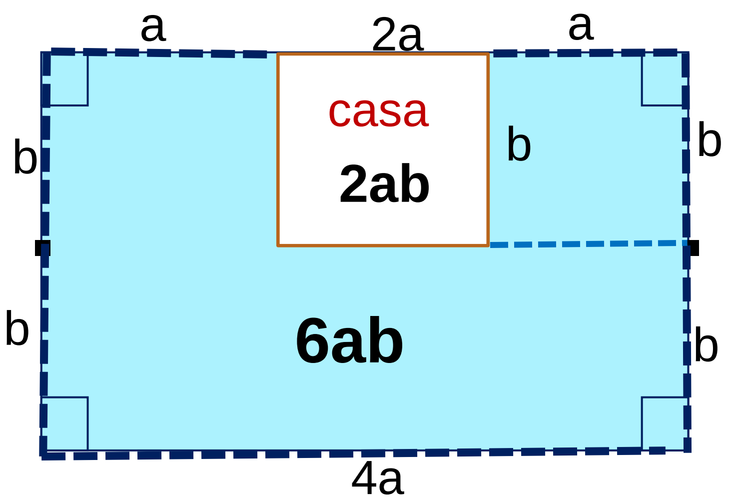
- MEDIA ARITMÉTICA(MA) Y MEDIA GEOMÉTRICA(MG)

$$\boxed{MA \geq MG}$$

Ejemplo:

Se desea cercar el jardín mostrado en el gráfico(sombreado), para lo cual se utiliza 32cm de cerca. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el jardín?

Colocando la cerca



Resolución:

Cerca: $6a + 4b = 32$

$3a + 2b = 16$

Área(máxima) = 6ab

$$\boxed{MA \geq MG}$$

$$\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a.2b}$$

$$8 \geq \sqrt{6ab}$$

$$64 \geq 6ab$$

$$6ab \leq 64$$

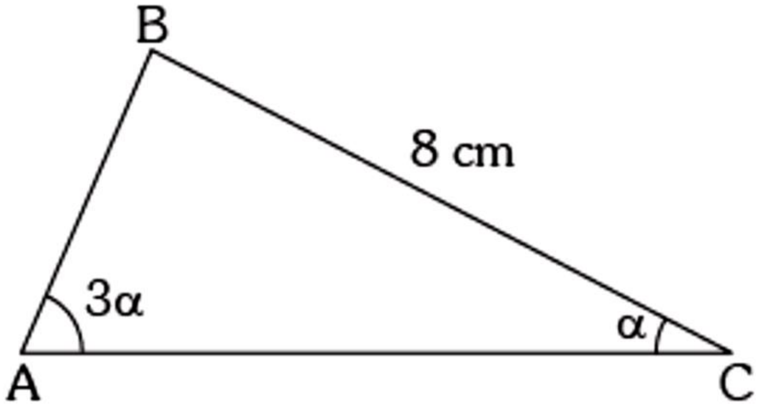
Área(máxima) = $64cm^2$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

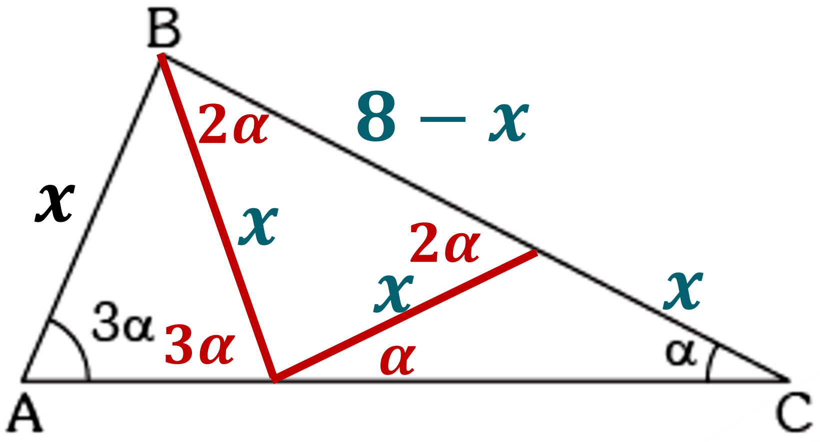
SITUACIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo:

En la figura, halle el mínimo valor entero de AB.



Piden el mínimo valor entero de $\overline{AB}$.



Por teorema de existencia de triángulos:

$$2x > 8 - x \quad \rightarrow x > 2{,}6\ldots$$

$$\therefore\ x_{mínimo\ entero} = 3$$

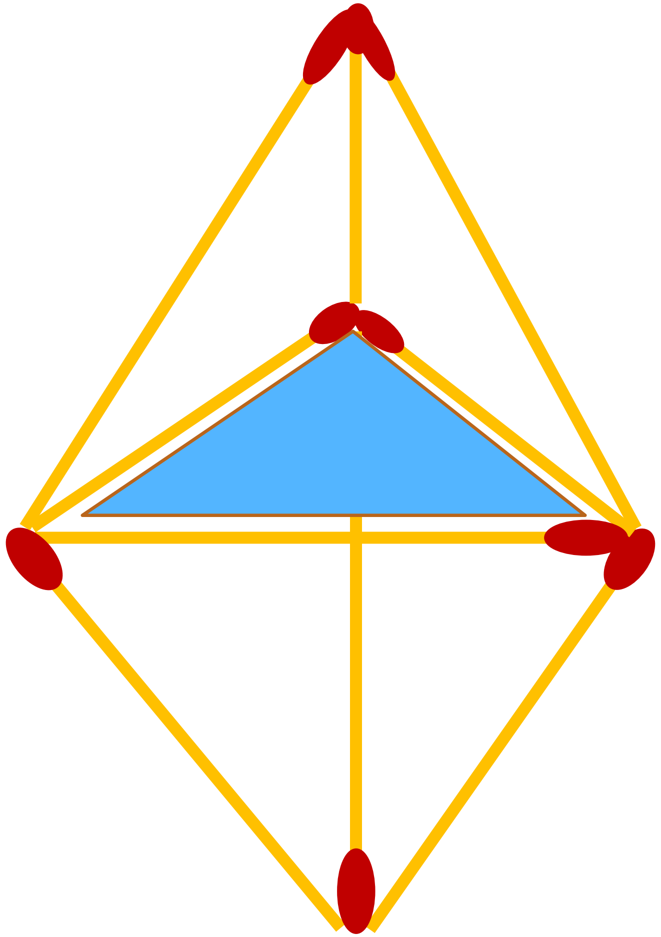
RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

PROBLEMA 1

¿Cuántos cerillos son necesarios para construir 7 triángulos equiláteros, de manera que cada lado del triángulo sea un cerillo completo y la cantidad de cerillos sea la mínima?

Resolución:

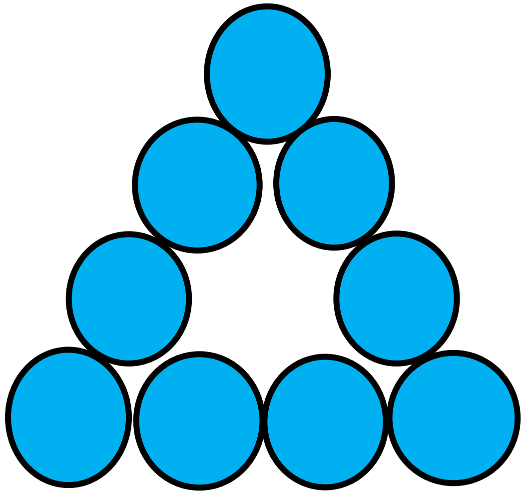
Ubicando los cerillos convenientemente



$\therefore$ $\underline{\underline{9\ palitos}}$

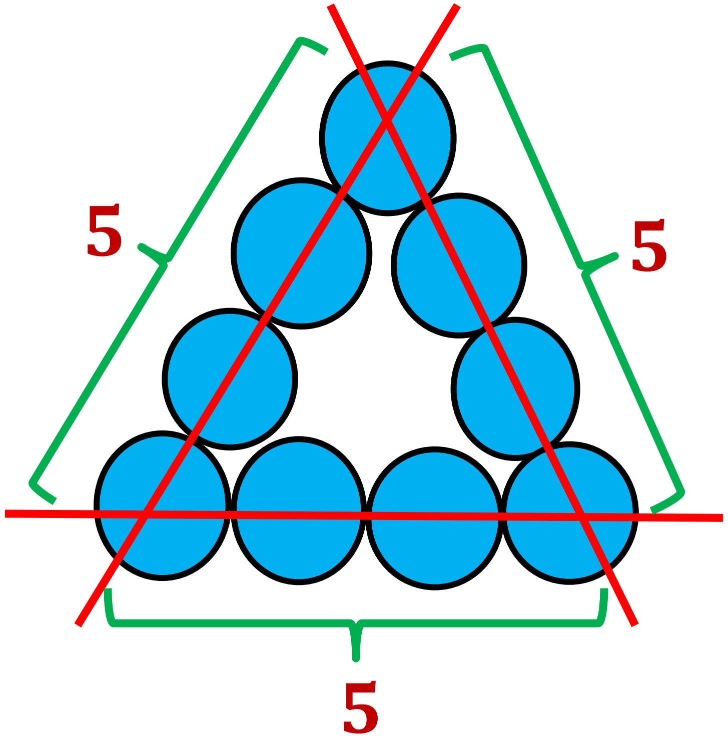
PROBLEMA 2

A partir de la disposición triangular mostrada, ¿Cuántas monedas debemos cambiar de posición, como mínimo para poder contar 5 monedas por cada lado del triángulo?



Resolución:

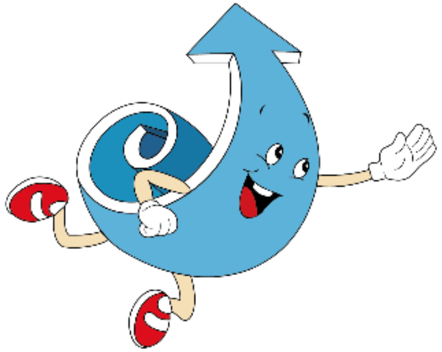
Ubicando las monedas convenientemente



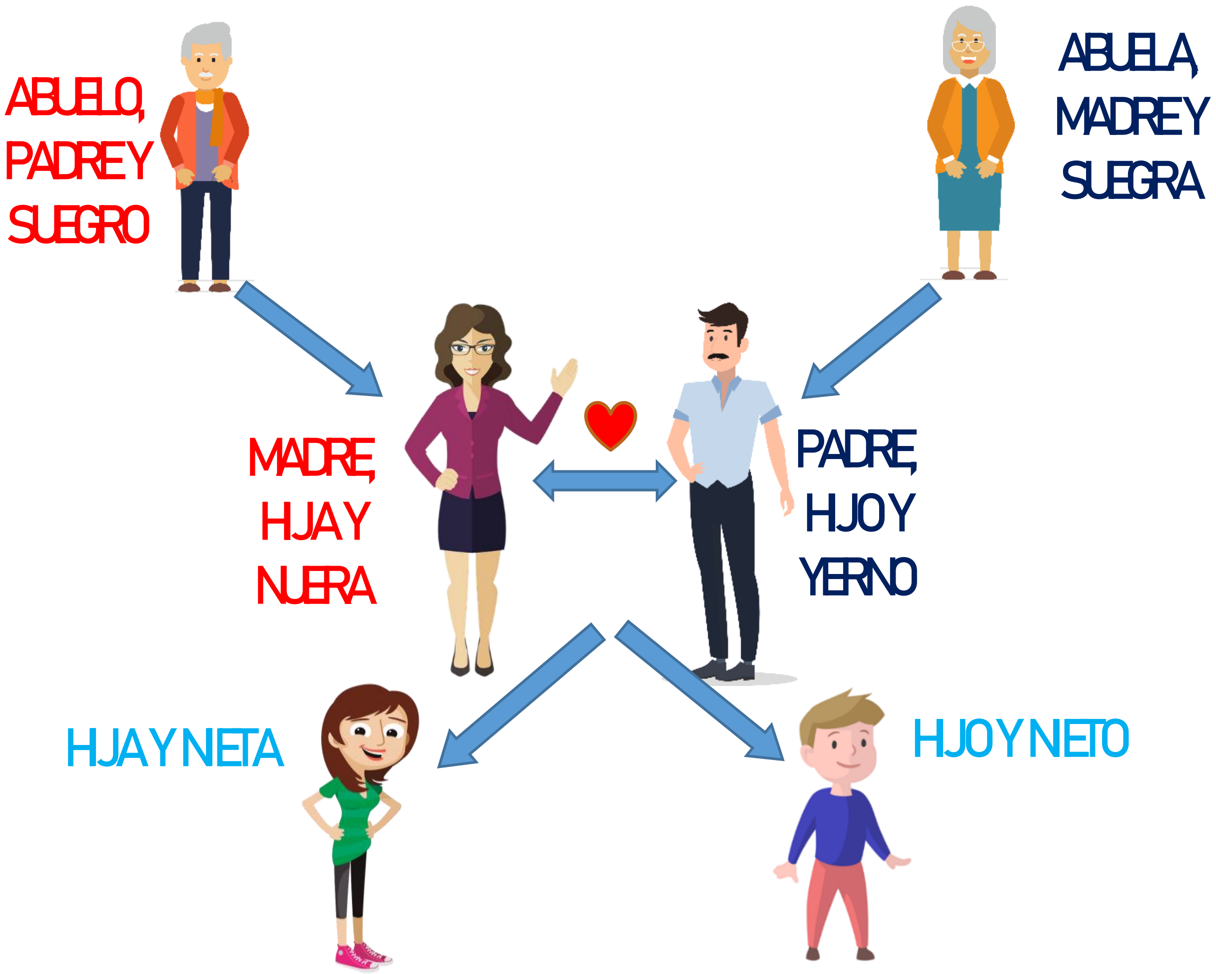
$\therefore$ $\underline{\underline{3\ monedas}}$

PROBLEMA 3

¿Cuántas personas forman una familia, como mínimo, en la que se puede contar 2 padres, 2 madres, 2 hijos, 2 hijas, 1 nieto, 1 nieta, 1 abuelo,1 abuela, 1 suegro,1 suegra y una nuera?



Resolución:



$\therefore$ $6\ personas$

PROBLEMA 4

Calcule el máximo valor de M en:

$$M = \frac{12}{x^2 - 6x + 13}$$

NOTA:

Calculamos el mínimo valor de D completando cuadrados.

Resolución:

Para que M tenga el máximo valor el denominador $x^2 - 6x + 13$ debe ser mínimo :

Calculamos el mínimo valor del denominador(D)

$$D_{min} = \underbrace{x^2 + 2x(3) + (3)^2} + (4)$$

$$D_{min} = \underbrace{(x+3)^2}_{0} + 4$$

$$D_{min} = 4$$

PIDEN

$$M_{max} = \frac{12}{4}$$

$\therefore$ 3

PROBLEMA 5

Calcule el mínimo valor que puede asumir F en:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

NOTA:

Calculamos el mínimo valor de F completando cuadrados.

Resolución:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

Factorizamos el número 3

$$F = 3\left[x^2 - \frac{8}{3}x\right] + 10$$

$$F = 3\left[x^2 - 2x\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right] + 10$$

$$F = 3\underbrace{\left[x^2 - 2x\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]} - 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 10$$

$$F_{min} = 3\underbrace{\left(x + \frac{4}{3}\right)^2}_{0} - 3\left(\frac{16}{9}\right) + 10$$

$$F_{min} = -\frac{16}{3} + 10 \qquad \therefore \ \frac{14}{3}$$

OTRA FORMA:

Calcule el mínimo valor que puede asumir F en:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

NOTA:

También podemos desarrollar este problema utilizando el operador derivada.

x' → Derivada de x

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$c' = 0$

c' → Derivada de una constante

Resolución:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

Derivando:

$$F' = 6x - 8 \longrightarrow 6x - 8 = 0$$

$$6x = 8 \qquad x = \frac{4}{3}$$

Reemplazando:

$$F_{min} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) + 10$$

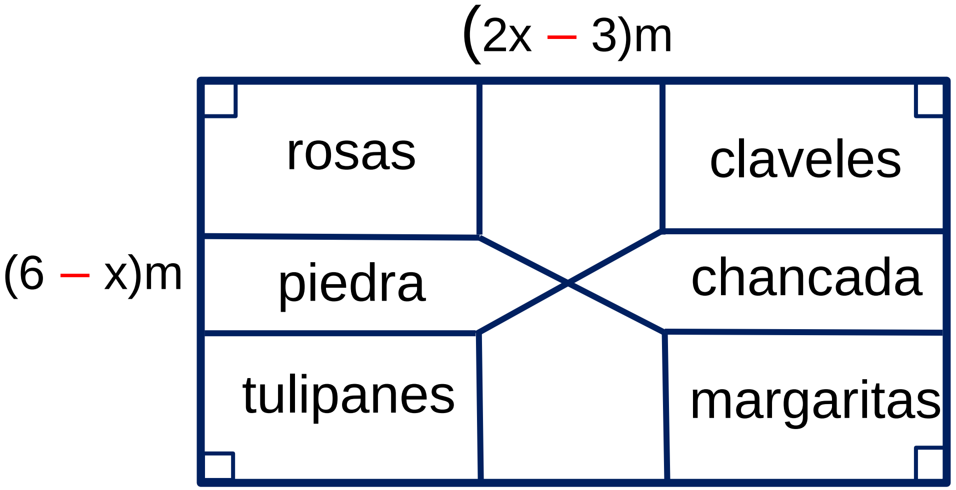
$$F_{min} = \frac{16}{3} - \frac{32}{3} + 10$$

$$F_{min} = -\frac{16}{3} + 10$$

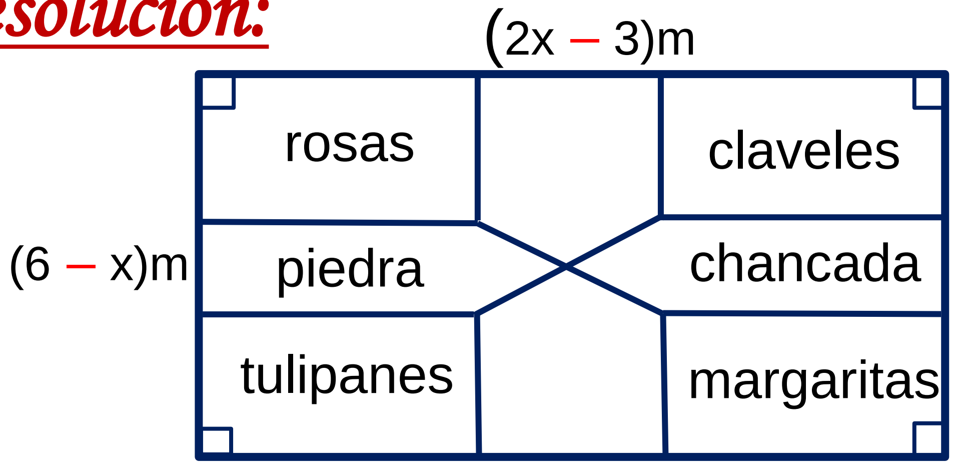
$$\therefore \frac{14}{3}$$

PROBLEMA 6

Un arquitecto dejo sobre su escritorio el plano de un futuro jardín cerca a su casa. Su hijo quiso jugarle una broma y cambió el plano por un dibujo y le pregunto mediante una nota: ¿ Cual sería el área máxima de dicho jardín?



Resolución:



$$S = (6 - x)(2x - 3) \longrightarrow 2S = (12 - 2x)(2x - 3)$$

RECORDEMOS: $\boxed{MA \geq MG}$

$$\frac{(12-2x)+(2x-3)}{2} \geq \sqrt{(12-2x)(2x-3)}$$

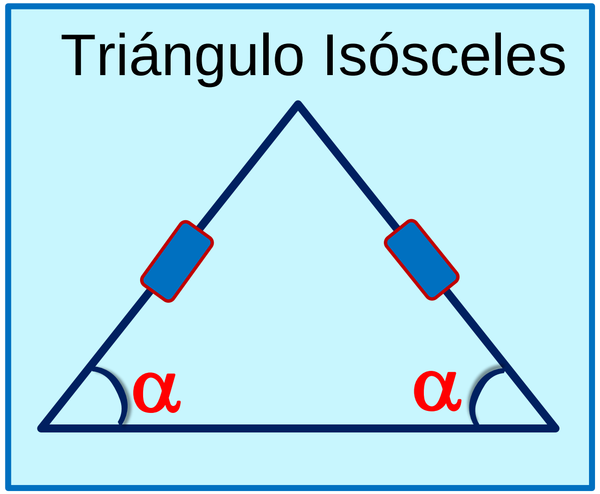
$$\frac{9}{2} \geq \sqrt{2S} \longrightarrow \frac{81}{4} \geq 2S \qquad \frac{81}{8} \geq S$$

$$S_{max} = \underline{\underline{10{,}125 m^2}}$$

PROBLEMA 7

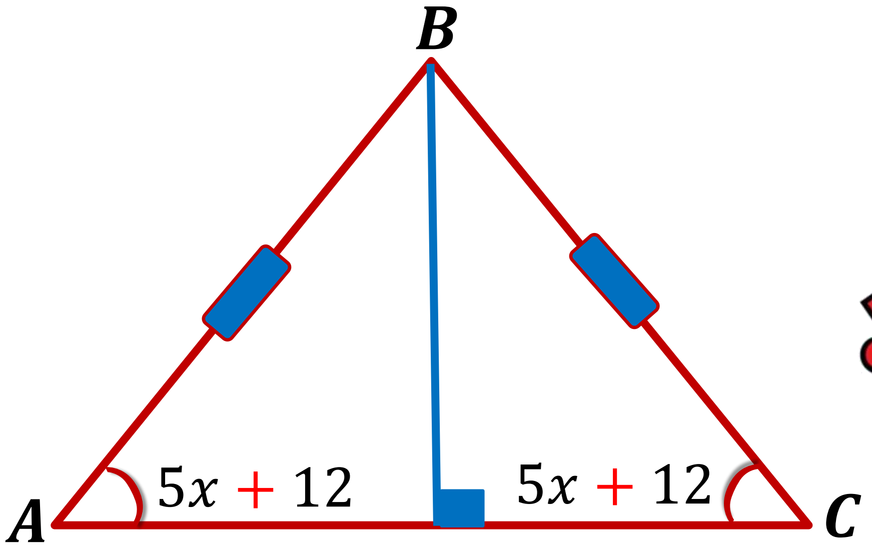
Dado el triángulo ABC; donde AB $=$ BC; si m$\measuredangle A = 5x + 12°$ ¿Cuál es el máximo valor entero de x que permite la existencia del triángulo?

RECORDEMOS:



Resolución:

Construyendo el triangulo según lo indicado.



$$5x + 12 < 90°$$

$$5x < 78°$$

$$x < 15,6$$

$$x_{máximo\ entero} = 15$$

$\therefore$ 15

PROBLEMA 8

Dado el triángulo ABC; donde $m\measuredangle C = 8x - 5°$ ¿Cuál es el mínimo valor entero de x que permite que el triángulo sea obtusángulo, obtuso en C?

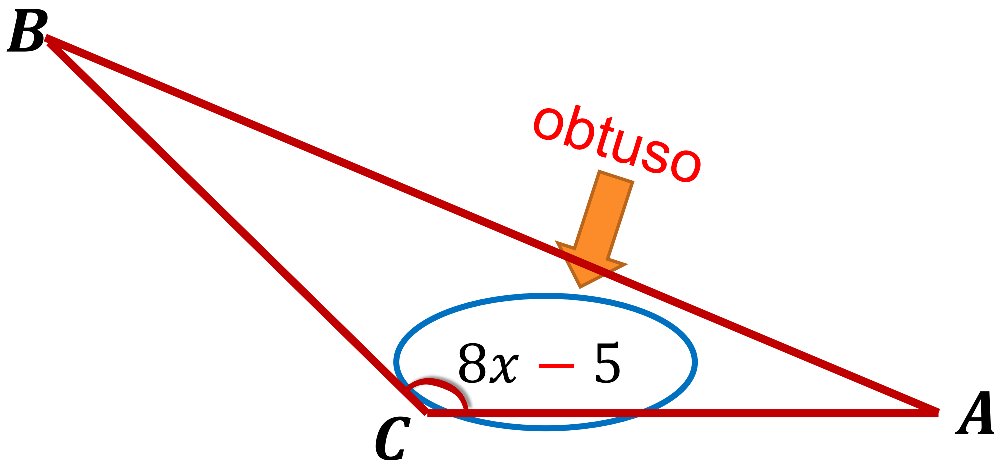
RECORDEMOS:

Ángulo obtuso

$$90° < \alpha < 180°$$

Resolución:

Construyendo el triángulo según lo indicado.



$$90° < 8x - 5° < 180°$$

$$\longrightarrow 95° < 8x° < 185°$$

$$11{,}87 < x < 23{,}12$$

$$x_{mínimo\ entero} = 12$$

$\therefore$ $\underline{\underline{12}}$