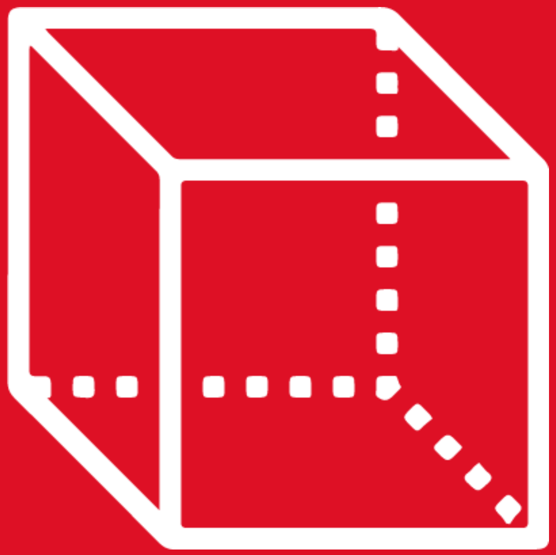
GEOMETRY

Chapter 16



4th

SECONDARY

RECTAS , PLANOS Y ÁNGULO DIEDRO

SACO OLIVEROS


P

RECTAS, PLANOS Y ÁNGULOS DIEDROS

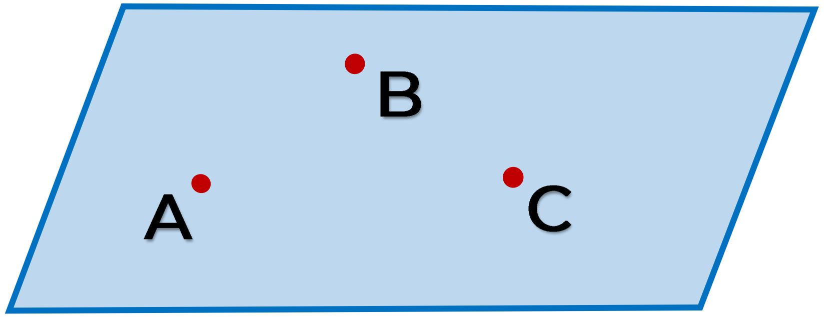
Notación:

▱P : Plano P

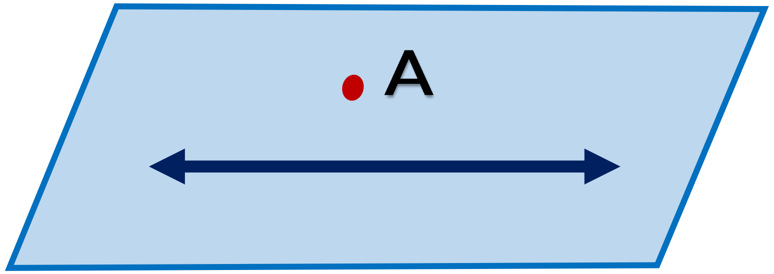
Determinación de un plano

Existen 4 teoremas para determinar un plano.

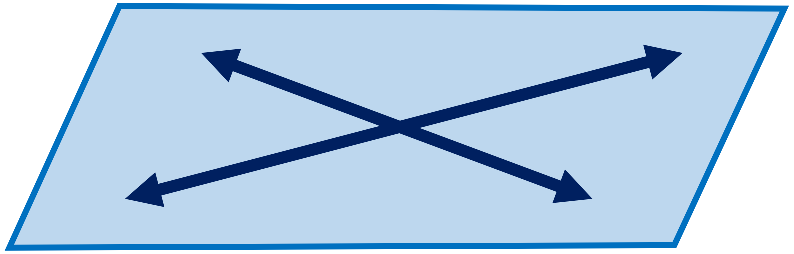
1. Tres puntos no colineales



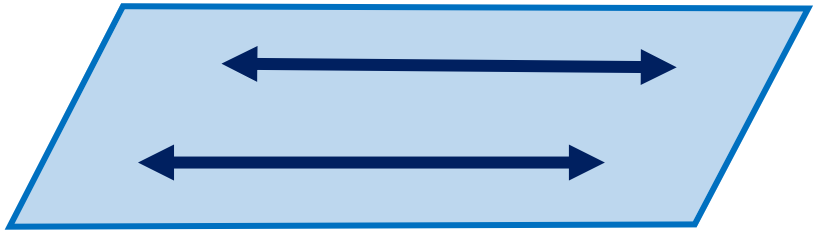
2. Una recta y un punto exterior a ella



3. Dos rectas secantes

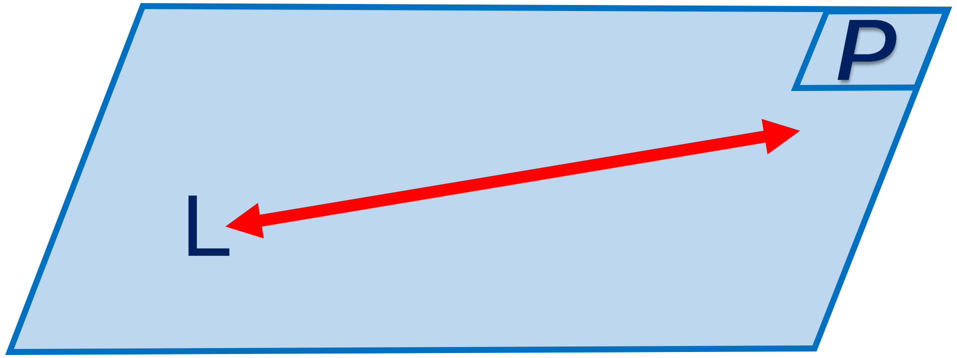


4. Dos rectas paralelas



Posiciones relativas entre rectas y planos

1. Recta contenida en un plano



$\overleftrightarrow{L} \subset P$

2. Recta paralela a un plano

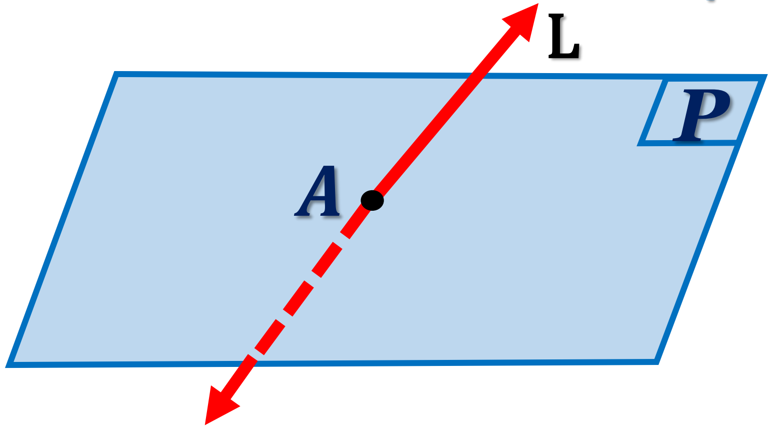
Si: $\overleftrightarrow{L} \not\subset P$

, $\overleftrightarrow{L_1} \subset P$

y $\overleftrightarrow{L} \ // \ \overleftrightarrow{L_1}$

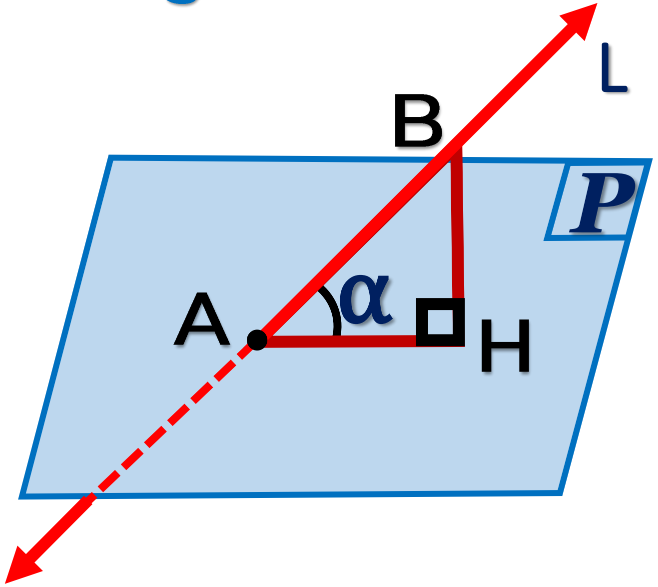
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \ // \ P$

3. Recta secante a un plano



$L \cap P = \{A\}$

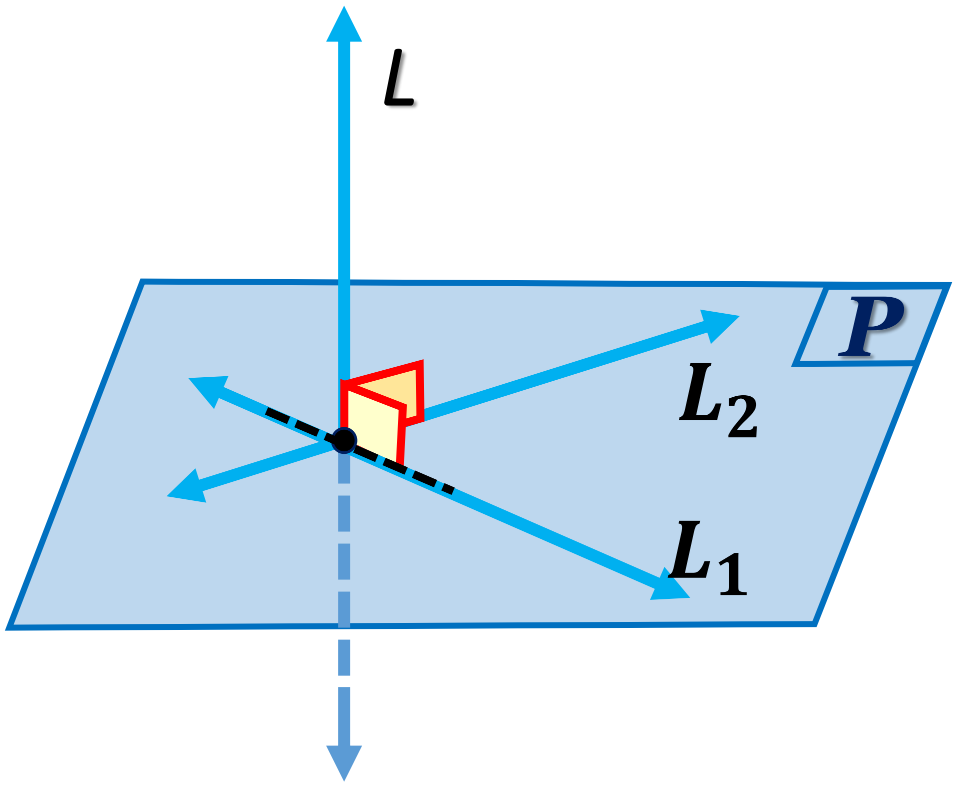
4. Ángulo entre una recta un plano



$\overline{AH}$: proyección de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre P.

α: medida del ángulo que forma $\overleftrightarrow{L}$ con

Recta perpendicular a un plano

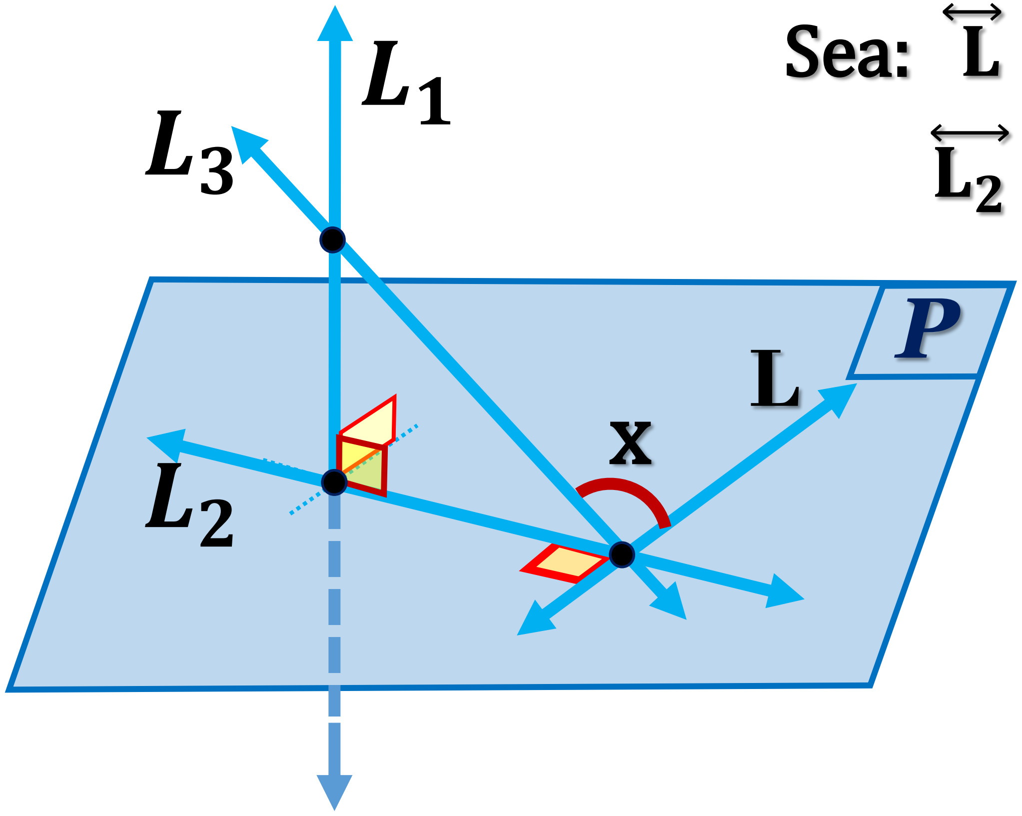


Si : $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2} \rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp P$

Teorema de las tres perpendiculares

Sea: $\overleftrightarrow{L} \subset P$

$\overleftrightarrow{L_2} \subset P$

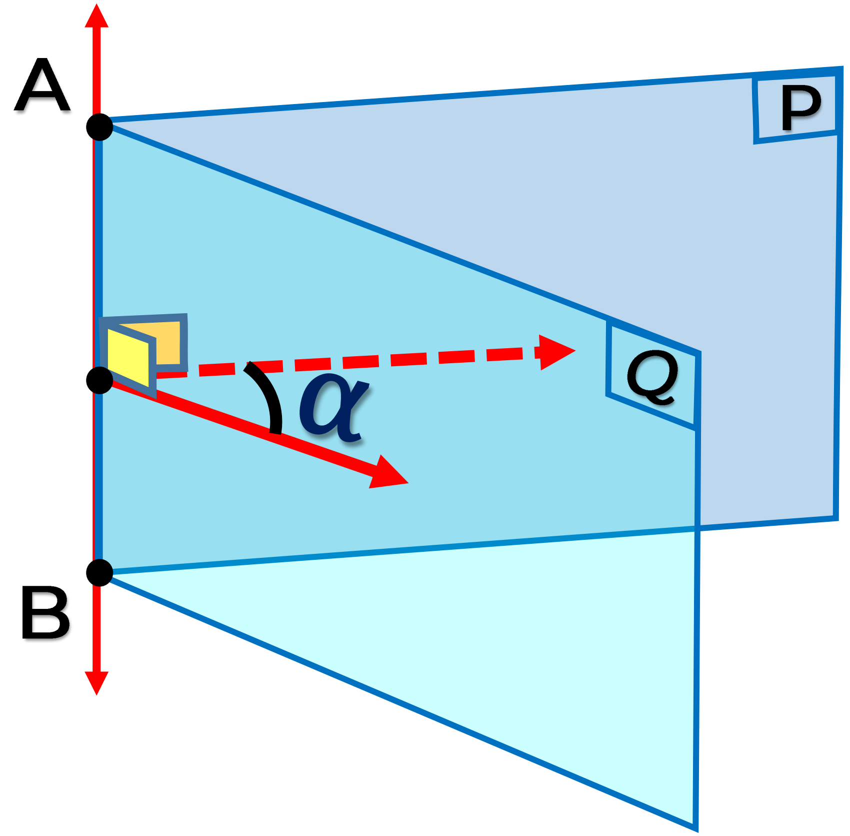


Si: $\overleftrightarrow{L_1} \perp P$ y $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L} \Rightarrow \overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L}$

$\therefore$ x = 90°

ÁNGULO DIEDRO

Es la unión de dos semiplanos no coplanares y una recta.



En la figura

. P y Q son las caras del diedro.

. $\overleftrightarrow{AB}$ es la arista del diedro.

Notación

. Ángulo diedro: P – $\overleftrightarrow{AB}$ – Q

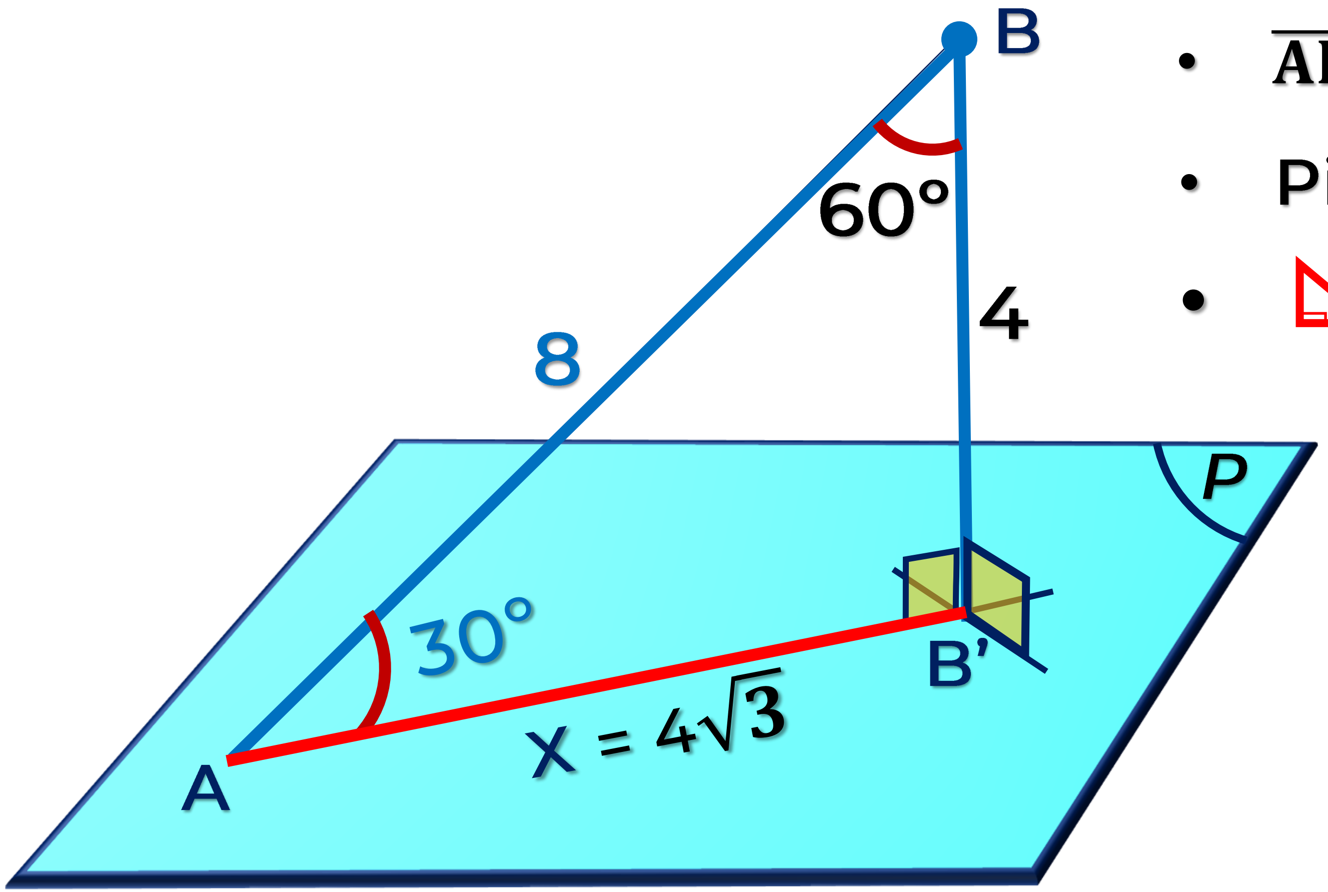
. Diedro AB

Además

. md $\overline{AB}$: medida del diedro $\overline{AB}$

. md $\overline{AB} = \alpha$

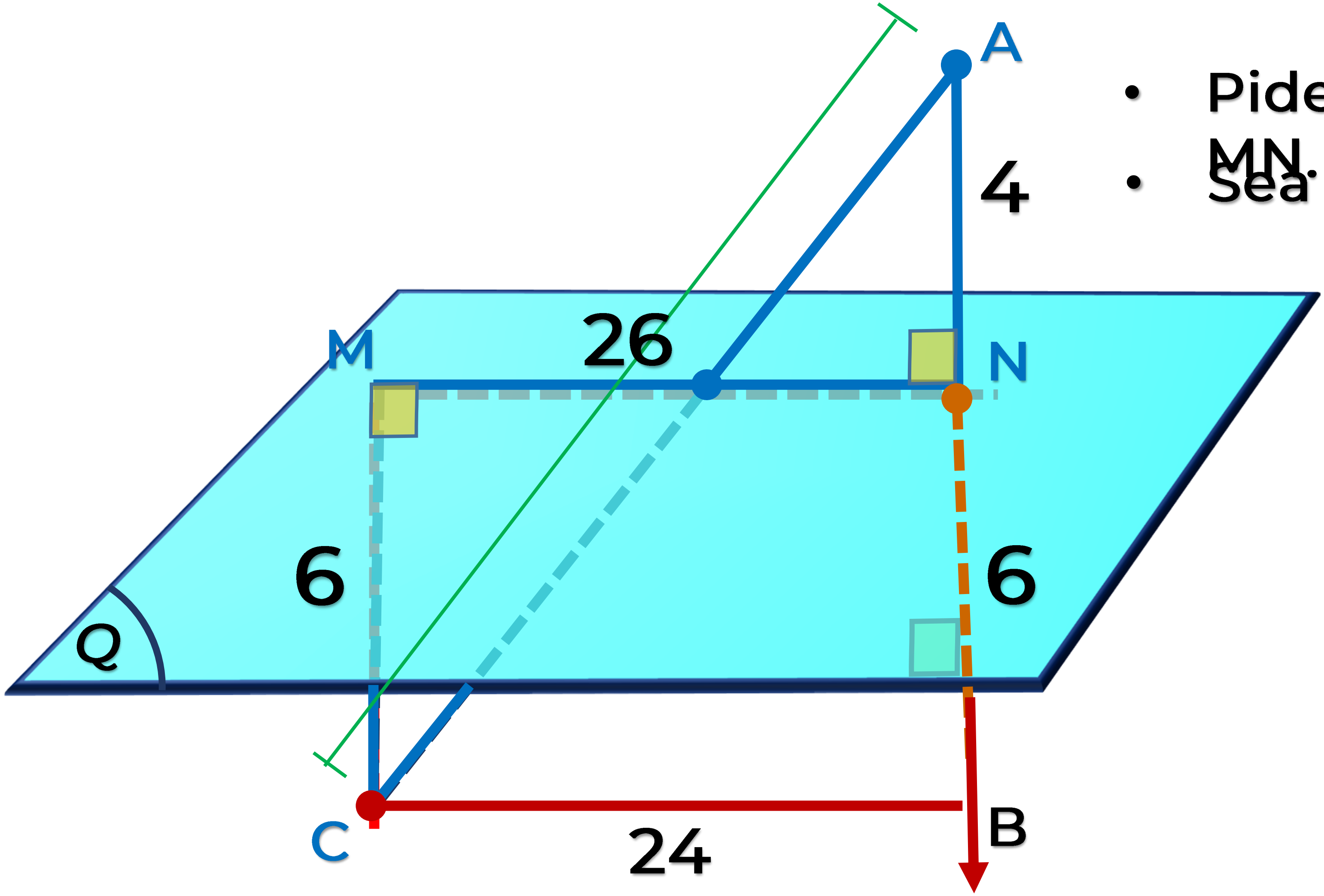
1. En la figura, halle la longitud de la proyección del $\overline{AB}$ sobre el plano P, si $\overline{AB}$ forma 30° con el plano P y AB = 8 u.



- $\overline{AB}$`: Proyección del $\overline{AB}$ sobre el plano
- Piden : x.
- ⊿ AB`B : Notable de 30° y 60°

$$\boxed{x = 4\sqrt{3}\ u}$$

2. Halle la longitud de la proyección de $\overline{AC}$ sobre el plano Q, si AN = 4 u, MC = 6 u y AC = 26 u.



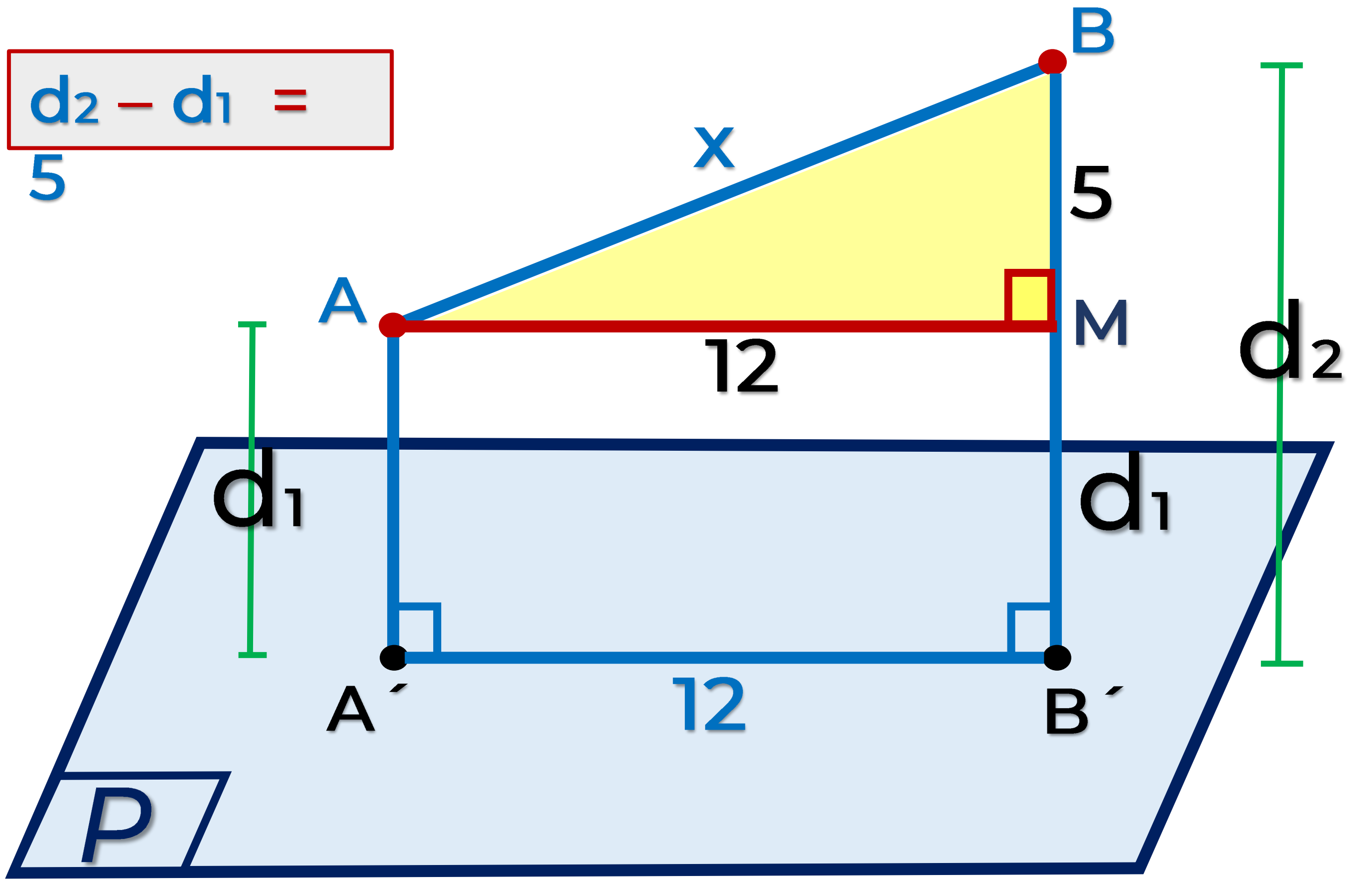
- $\overline{MN}$: Proyección del $\overline{AC}$ sobre el plano Q.
- Piden : MN.
- Sea $\overline{CB} \perp \overrightarrow{AN}$ $(B \in \overrightarrow{AN})$.
- MC = NB = 6 ∧ MN = CB = 24
- ◺ABC : T. Pitágoras

$$26^2 = 10^2 + (CB)^2$$
$$676 = 100 + (CB)^2$$
$$576 = (CB)^2$$
$$24 = CB$$

$\boxed{MN = 24\ u}$

4. En la figura, A'B' = 12 u y la diferencia de las distancias de B y A al plano P es 5 u, halle AB.

$d_2 - d_1 = 5$



- Piden: x.
- Se traza $\overline{AM} \perp \overline{BB'}$
- En $\overline{BB'}$:

$$BM + d_1 = d_2$$

$$BM = d_2 - d_1$$

$$BM = 5$$

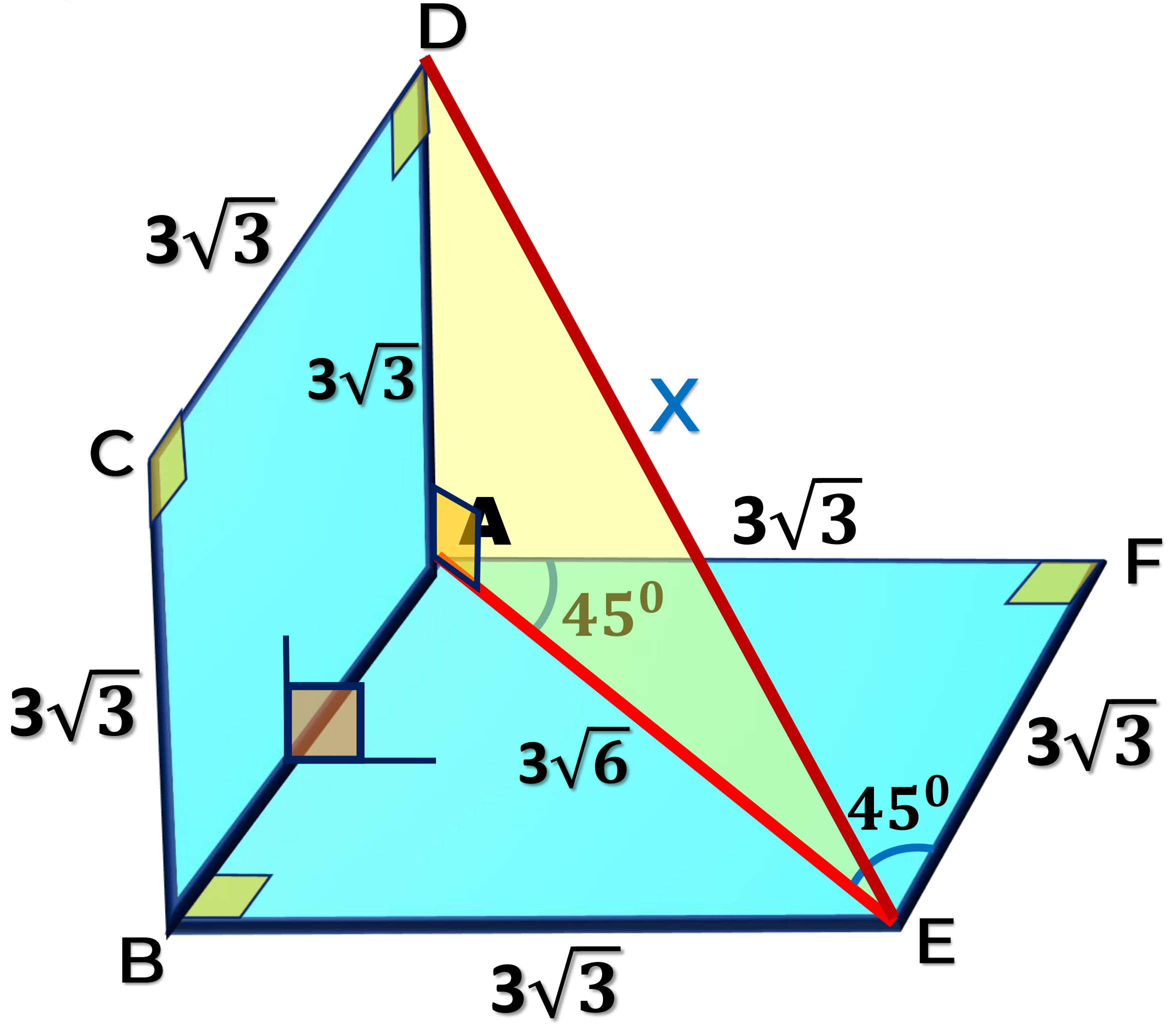
- △AMB : T. Pitágoras

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

$$x^2 = 169$$

$$\boxed{x = 13 \text{ u}}$$

5. Se tienen los cuadrados ABCD y ABEF contenidos en planos perpendiculares. Si EF = $3\sqrt{3}$ u, calcule DE.



- Piden : x.
- Por dato.

ABCD y ABEF : Cuadrados

- Se traza $\overline{AE}$.
- ◺AFE : Notable de 45° y 45°
- ◺DAE : T. Pitágoras

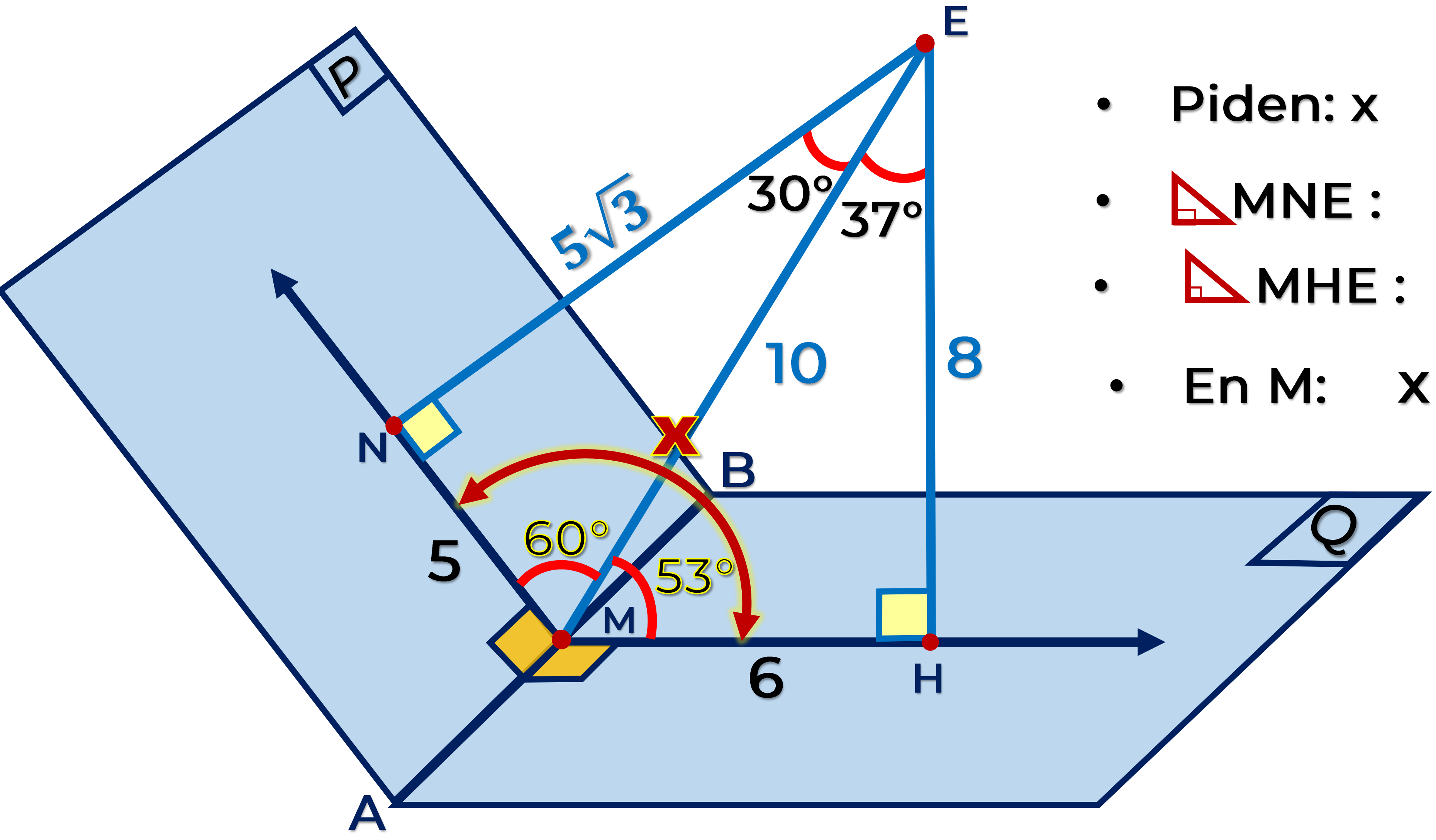
$$x^2 = (3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{6})^2$$

$$x^2 = 27 + 54$$

$$x^2 = 81$$

$$\boxed{x = 9 \text{ u}}$$

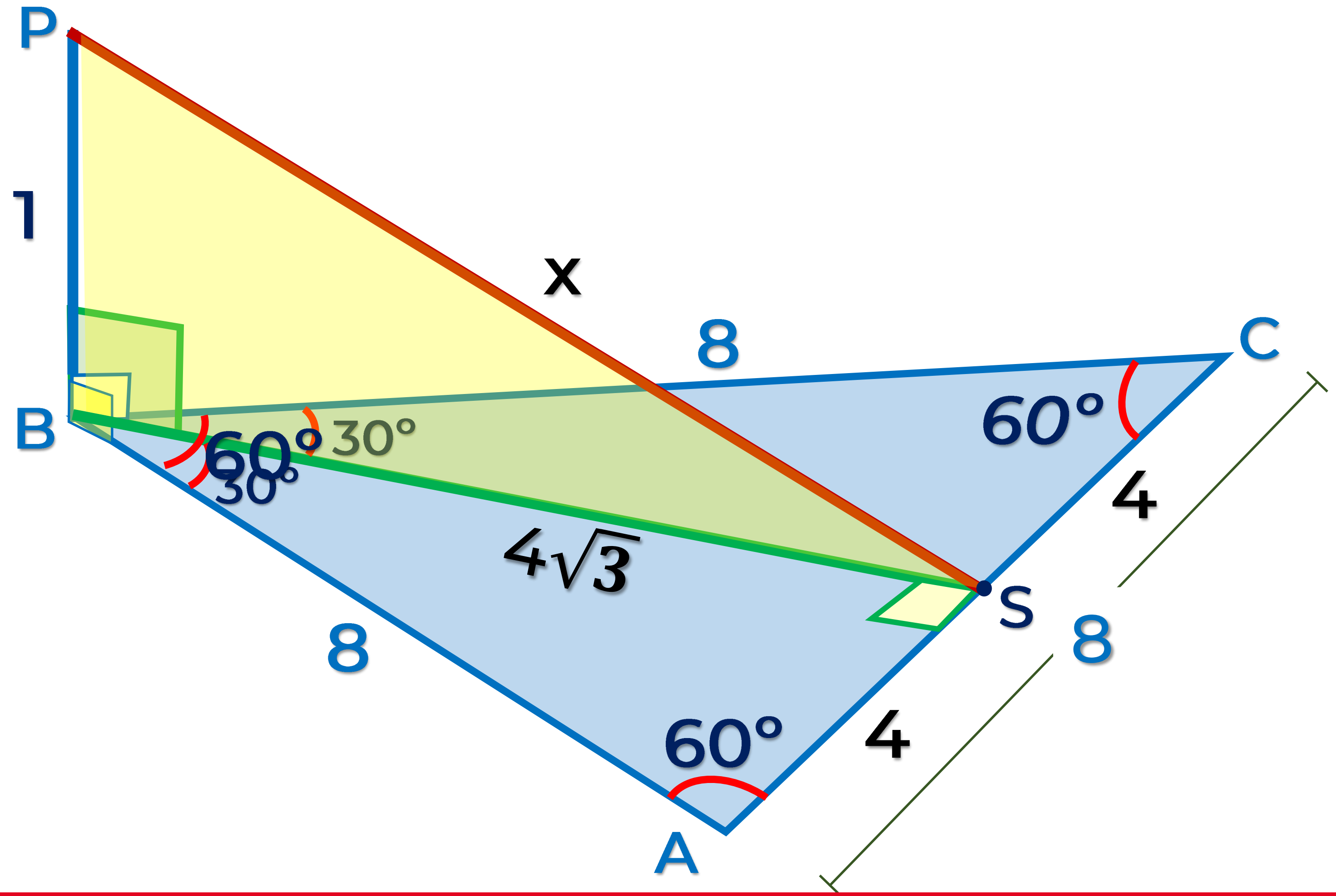
6. Halle la medida del ángulo diedro P-AB-Q mostrado.



- Piden: x
- △MNE : Notable de 30° y 60°
- △MHE : Notable de 37° y 53°
- En M: $x = 53° + 60°$

$\boxed{x = 113°}$

6. Se tiene un triángulo equilátero ABC de lado 8 u. Luego, por el vértice B se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano que contiene a dicho triángulo; tal que, BP = 1 u. Si S es punto medio de $\overline{AC}$, halle PS.



- Piden: x
- Se traza $\overline{BS}$.

◺ ASB: Notable de 30° y 60°

$BS = 4\sqrt{3}$

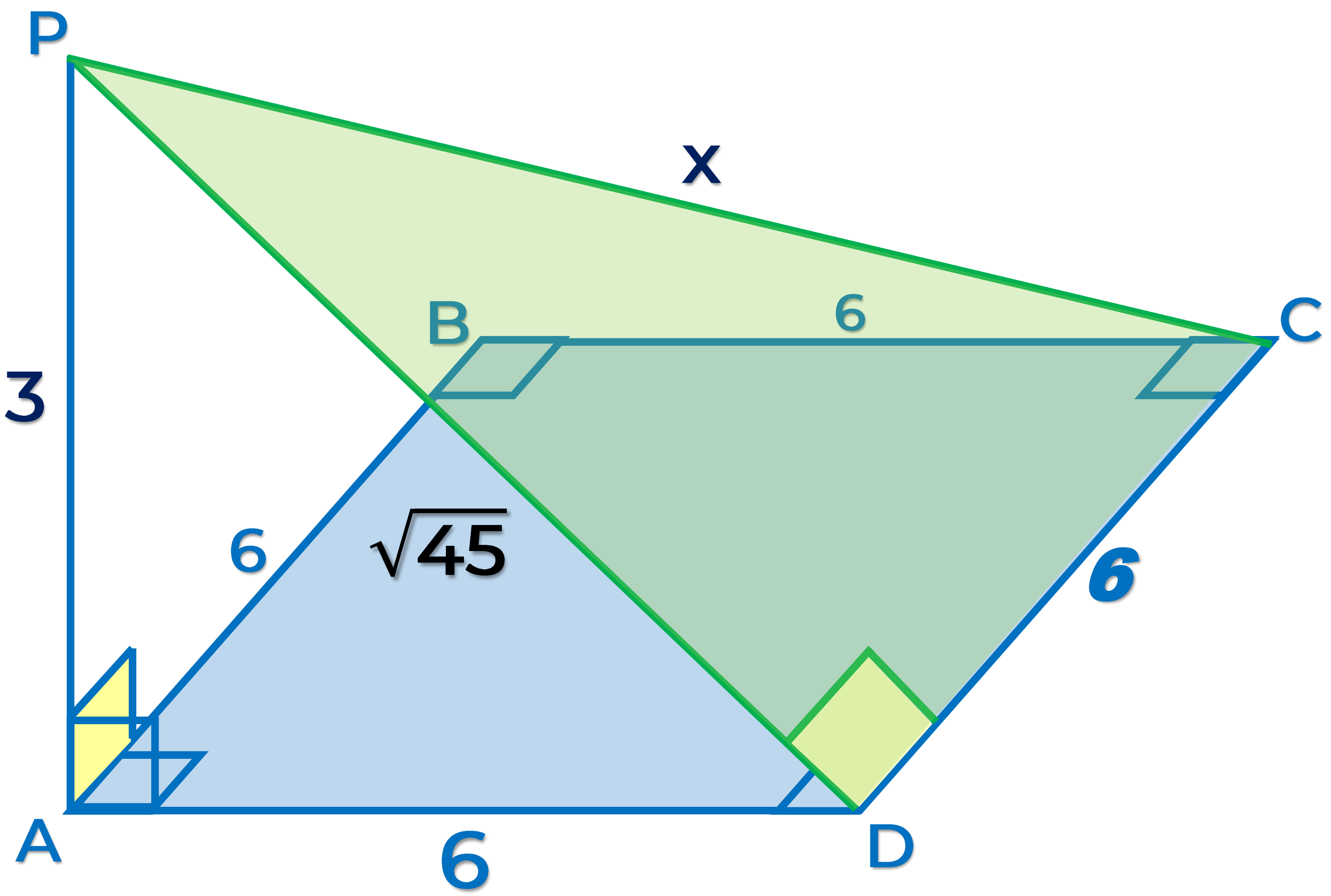
- ◺PBS : T. Pitágoras

$x^2 = 1^2 + (4\sqrt{3})^2$

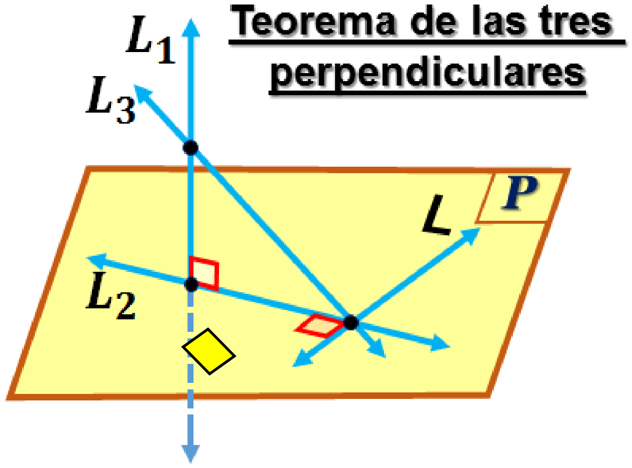
$x^2 = 49$

$\boxed{x = 7}$

8. Se tiene un cuadrado ABCD de lado igual a 6 u. Luego, por el vértice A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano que contiene a dicho cuadrado; tal que, AP = 3 u. Halle PC.



- Piden: x
- Se traza $\overline{PD}$.



- T. Pitágoras

$\triangle$PAD :

$(PD)^2 = 3^2 + 6^2$

$(PD)^2 = 45$

$PD = \sqrt{45}$

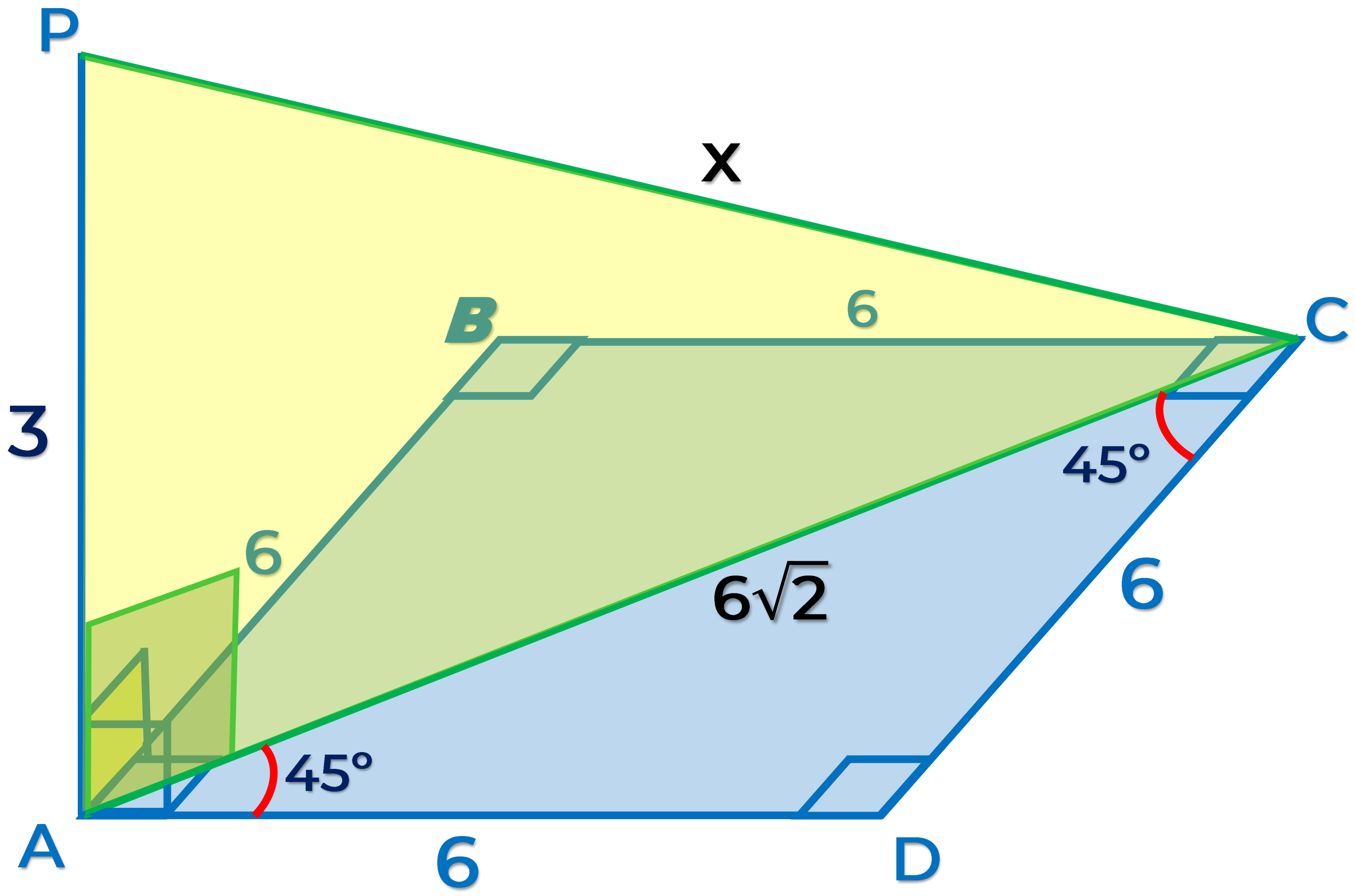
$\triangle$PDC :

$x^2 = (\sqrt{45})^2 + 6^2$

$x^2 = 81$

$\boxed{x = 9\ u}$

9. Se tiene un cuadrado ABCD de lado igual a 6 u. Luego, por el vértice A se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano que contiene a dicho cuadrado; tal que, AP = 3 u, halle PC.



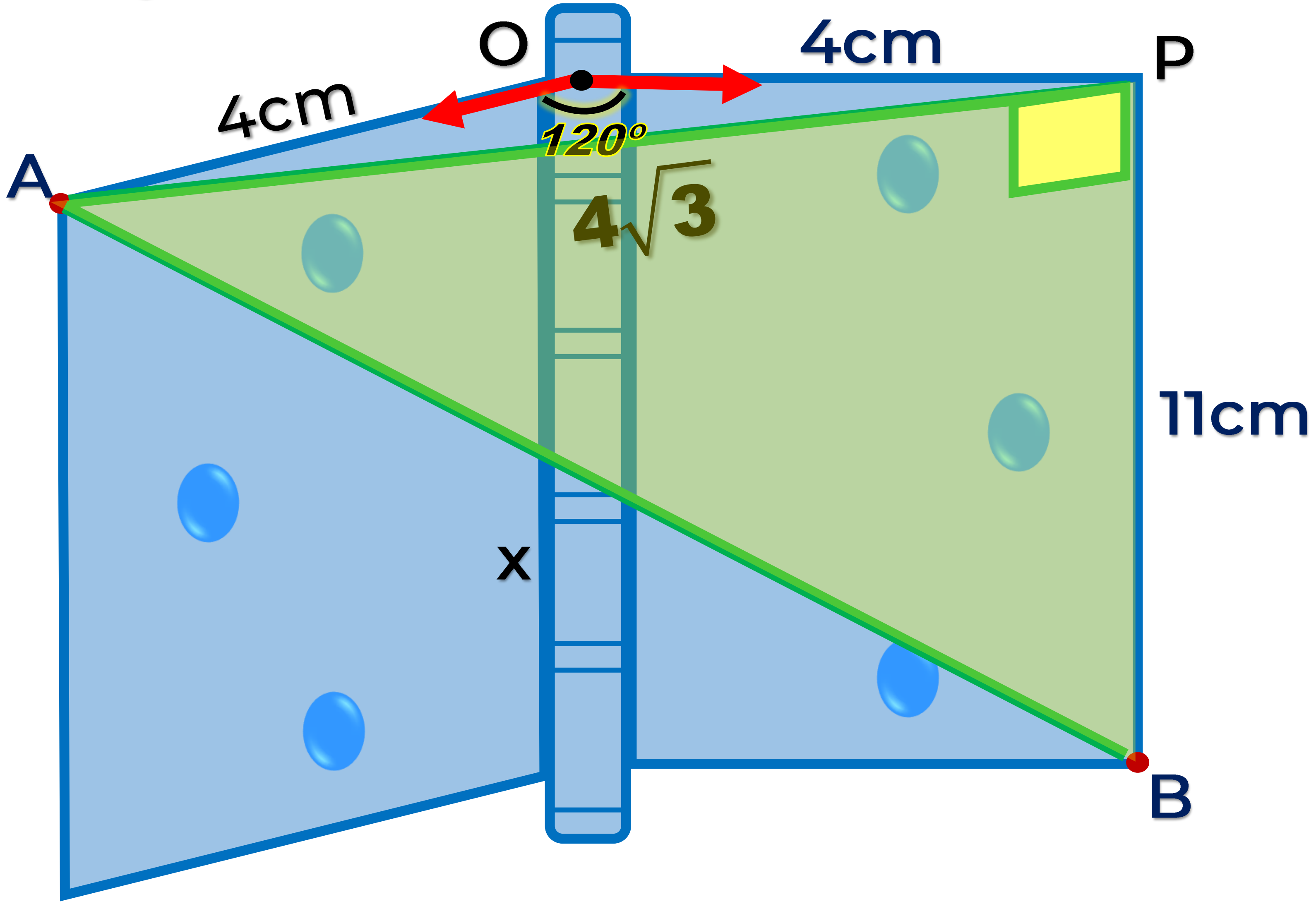
- Piden: x
- Se traza $\overline{PD}$.
- $\triangle$ ADC : Notable de 45° y 45°
- $\triangle$ PAC : T. Pitágoras

$$x^2 = (6\sqrt{2})^2 + 3^2$$

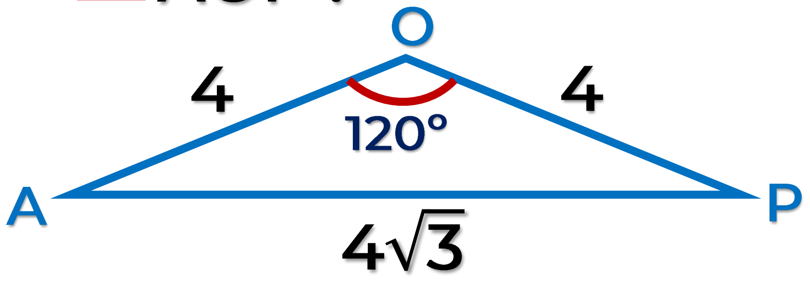
$$x^2 = 81$$

$$\boxed{x = 9\text{ u}}$$

10. En la figura se muestra una bisagra la cual se abre formándose un ángulo diedro de 120°. Halle la distancia de A hacia B.



- Piden: x
- Se traza $\overline{AP}$.
- $\triangle$ AOP :



- $\triangle$ APB : T. Pitágoras.

$$x^2 = (4\sqrt{3})^2 + 11^2$$

$$x^2 = 169$$

$$\boxed{x = 13}$$