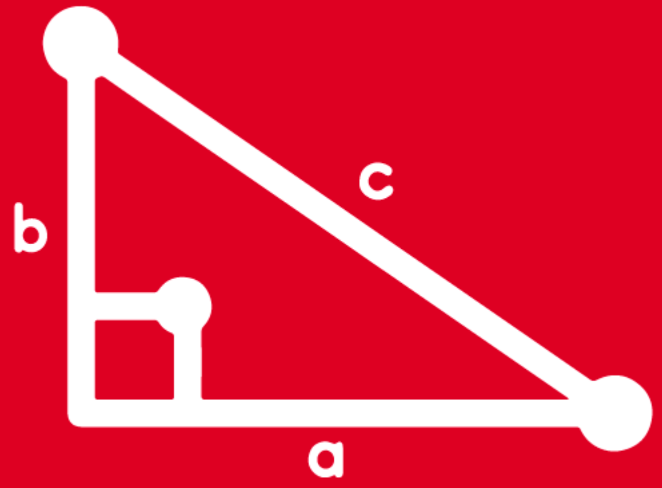
TRIGONOMETRY

Chapter 13
Session 1



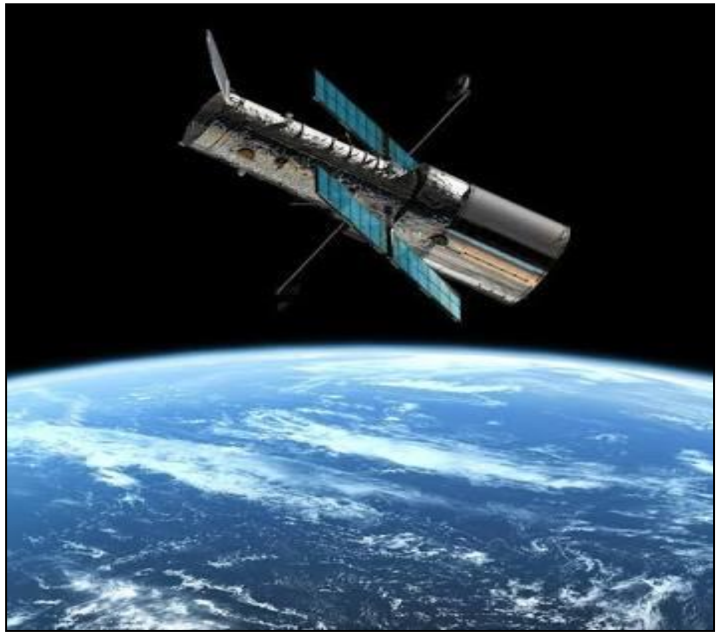
4th
SECONDARY

Introducción a los números reales

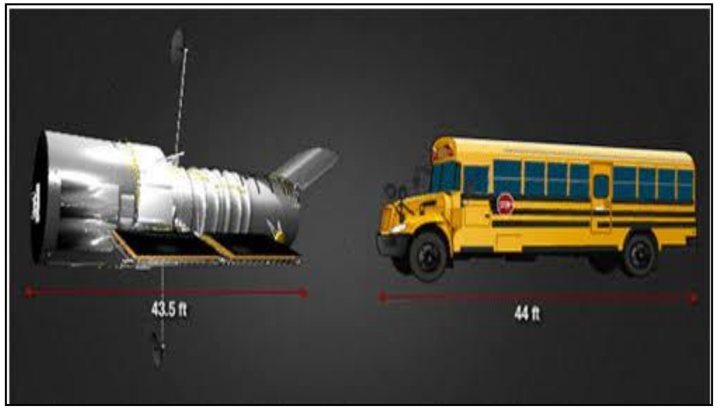
SACO OLIVEROS

Telescopio espacial Hubble

El telescopio espacial Hubble, fue una de las herramientas de exploración más importantes de la penúltima década, y continuará sirviendo como un maravilloso recurso durante el presente milenio. El telescopio espacial Hubble ha recibido créditos por haber encontrado numerosos objetos mientras fotografiaba nébulas, galaxias, estrellas y demás objetos distantes.



En 1990, el telescopio espacial Hubble fue lanzado por primera vez desde la nave espacial Discovery, pero el proyecto comenzó muchos años antes. El proyecto es una colaboración entre la Aeronáutica Nacional y Administración Espacial (por sus siglas al inglés, NASA, National Aeronautics and Space Administration) y la Agencia Espacial Europea.

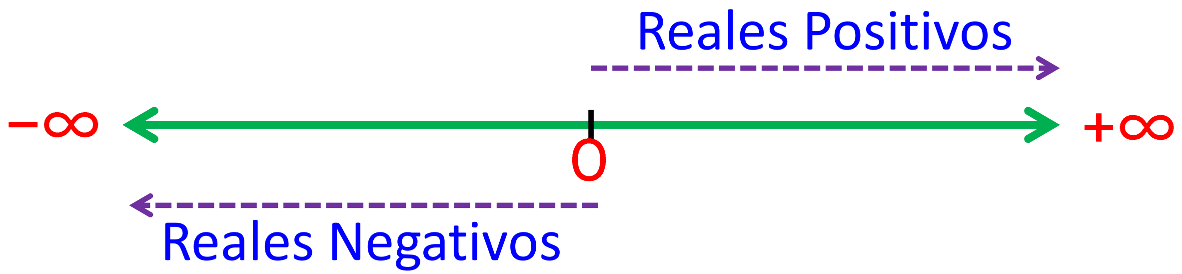


Números reales

El conjunto de los números reales es aquel conjunto de números que consta de dos operaciones, adición y multiplicación, y una relación en orden menor que (<). Los números reales (R) forman un conjunto completo y ordenado.

Recta de los números reales:

Es una recta geométrica, donde a cada número real le corresponde un solo punto de la recta y viceversa. Es decir, hay una relación biunívoca entre el punto de la recta y un número real.



Números reales

Símbolo de relación de orden

$>$: mayor que

$<$: menor que

$\geq$: mayor igual que

$\leq$: menor igual que

Desigualdades

Es la relación de orden que se da entre dos números reales. Sean $a,b \in R$, luego:

$a > 0 \leftrightarrow$ a es positivo

$a < 0 \leftrightarrow$ a es negativo

$a > b \leftrightarrow (a-b)$ es positivo

$a < b \leftrightarrow (a-b)$ es negativo

Intervalos

Abierto:

$a < x < b \leftrightarrow x \in \langle a;b \rangle$

Cerrado:

$a \leq x \leq b \leftrightarrow x \in [a;b]$

Semiabierto:

$a < x \leq b \leftrightarrow x \in \langle a;b]$

$a \leq x < b \leftrightarrow x \in [a;b\rangle$

Infinitos:

$x > a \leftrightarrow x \in \langle a;+\infty \rangle$

$x \geq a \leftrightarrow x \in [a;+\infty \rangle$

$x < b \leftrightarrow x \in \langle -\infty;b \rangle$

$x \leq b \leftrightarrow x \in \langle -\infty;b]$

Números reales

Propiedades

:

Si a,b,c ∈ R, se cumple que:

$a > b \leftrightarrow c + a > b + c$

$a > b \wedge c \in R^{+} \leftrightarrow ac > bc$

$a > b \wedge c \in R^{-} \leftrightarrow ac < bc$

$\sqrt{a} \geq 0 \leftrightarrow a \geq 0$

$\forall a \in R \rightarrow a^2 \geq 0$

$a.b > 0 \rightarrow$ a y b tienen el mismo signo

$a.b < 0 \rightarrow$ a y b tienen diferente signo

$a.b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$

PROBLEMA 1

Si $x \in \langle -1;3]$, calcule la variación de $G = \dfrac{3x+2}{4}$

Resolución:

Del dato: $-1 < x \leq 3$ $\times (3)$

$$-3 < 3x \leq 9 \quad + (2)$$

$$-1 < 3x + 2 \leq 11 \quad \div (4)$$

$$-\frac{1}{4} < \underbrace{\frac{3x+2}{4}}_{G} \leq \frac{11}{4}$$

$\therefore \quad \in \left\langle \;\_\_ \;\_\_ \;\; \_\_ \right]$

PROBLEMA 2

Si $x \in \langle 3;5]$, calcule la variación de $M = 3x^2 + 1$

Resolución:

Del dato: $3 < x \leq 5$ $\quad ( )^2$

$9 < x^2 \leq 25$ $\quad \times (3)$

$27 < 3x^2 \leq 75$ $\quad +(1)$

$$28 < \underbrace{3x^2 + 1}_{M} \leq 76$$

$\boxed{\therefore\ M \in \langle 28 ; 76]}$

PROBLEMA 3

Calcule la variación de x, si: $3 \leq 4x - 9 < 7$

Resolución:

Del dato:

$$3 \leq 4x - 9 < 7 \quad +(9)$$

$$12 \leq 4x < 16 \quad \div (4)$$

$$3 \leq x < 4$$

$$\boxed{\therefore x \in [3;4\rangle}$$

PROBLEMA 4

Complete el siguiente cuadro:

	Mínimo valor
$x^2 - 3$	-3
$x^2 + 7$	7
$(x+5)^2 - 1$	-1

Resolución:

Recordar: $\forall x \in \mathbb{R}$ → $x^2 \geq 0$ $-(3)$

$x^2 - 3 \geq -3$

Recordar: $\forall x \in \mathbb{R}$ → $x^2 \geq 0$ $+(7)$

$x^2 + 7 \geq 7$

Como $(x+5) \in \mathbb{R}$ → $(x+5)^2 \geq 0$ $-(1)$

$(x+5)^2 - 1 \geq -1$

PROBLEMA 5

Calcule el menor valor de: $\mathbf{F} = x^2 + 8x + 5\ ;\ x \in \mathbb{R}$

Resolución:

Por propiedad: $\forall a \in R \rightarrow a^2 \geq 0$

$$(x + 4)^2 \geq 0$$

$$x^2 + 8x + 16 \geq 0 \quad -(11)$$

$$\underbrace{x^2 + 8x + 5}_{F} \geq -11$$

$$F \in [-11;+\infty\rangle$$

$\therefore$ El menor valor de F es -11

PROBLEMA 6

Si $\alpha \in \langle 30°;37° \rangle$, calcule la variación de: $M = 10\text{sen}\alpha - 1$

Resolución:

Del dato: $30° < \alpha < 37°$

$$\text{sen}30° < \text{sen}\,\alpha < \text{sen}37°$$

$$\frac{1}{2} < \text{sen}\,\alpha < \frac{3}{5} \quad \times\ (10)$$

$$5 < 10\text{sen}\,\alpha < 6 \quad -\ (1)$$

$$4 < 10\text{sen}\,\alpha - 1 < 5$$

$\therefore M \in \langle 4;5 \rangle$

PROBLEMA 7

Si $45° < \beta < 53°$, calcule la variación de: $P = 6\tan\beta - 1$

Resolución:

Del dato: $45° < \beta < 53°$

$\tan 45° < \tan\beta < \tan 53°$

$1 < \tan\beta < \frac{4}{3} \quad \times (6)$

$6 < 6\tan\beta < 8 \quad - (1)$

$5 < 6\tan\beta - 1 < 7$

$\therefore M \in \langle 5;7 \rangle$

PROBLEMA 8

Al copiar de la pizarra la expresión $3 + 2\cos\alpha$, un estudiante cometió un error y escribió $3\operatorname{sen}\alpha + 2$. Halle la variación de lo que estaba escribiendo en la pizarra y lo que el alumno copió, sabiendo que α es ángulo agudo.

Resolución:

Del dato:

$0° < \alpha < 90°$

Para la RT coseno, se cumple:

$0 < \cos\alpha < 1 \quad \times (2)$

$0 < 2\cos\alpha < 2 \quad + (3)$

$3 < 3 + 2\cos\alpha < 5$

$\boxed{3 + 2\cos\alpha \in \langle 3;5 \rangle}$

Para la RT seno, se cumple:

$0 < \operatorname{sen}\alpha < 1 \quad \times (3)$

$0 < 3\operatorname{sen}\alpha < 3 \quad + (2)$

$2 < 3\operatorname{sen}\alpha + 2 < 5$

$\boxed{3\operatorname{sen}\alpha + 2 \in \langle 2;5 \rangle}$