ÁLGEBRA

CHAPTER 21

5th

of Secondary

$$F(x) = y = a(x-h)^2 + k$$

$$\text{Vértice} = (h; k)$$

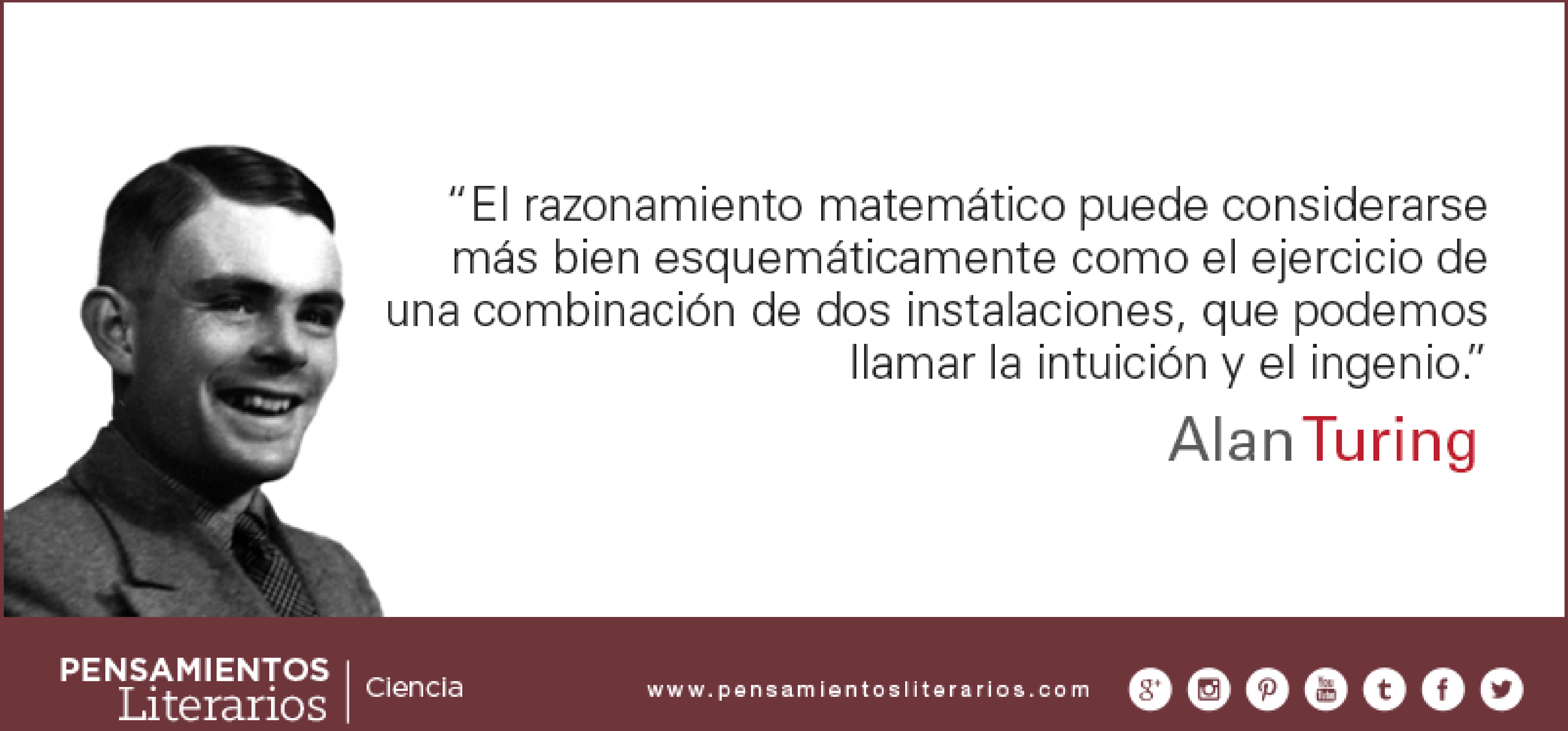
Tema: Funciones especiales

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS


“El razonamiento matemático puede considerarse
más bien esquemáticamente como el ejercicio de
una combinación de dos instalaciones, que podemos
llamar la intuición y el ingenio.”
Alan Turing
PENSAMIENTOS
Literarios
Ciencia
www.pensamientosliterarios.com

HELICO

THEORY

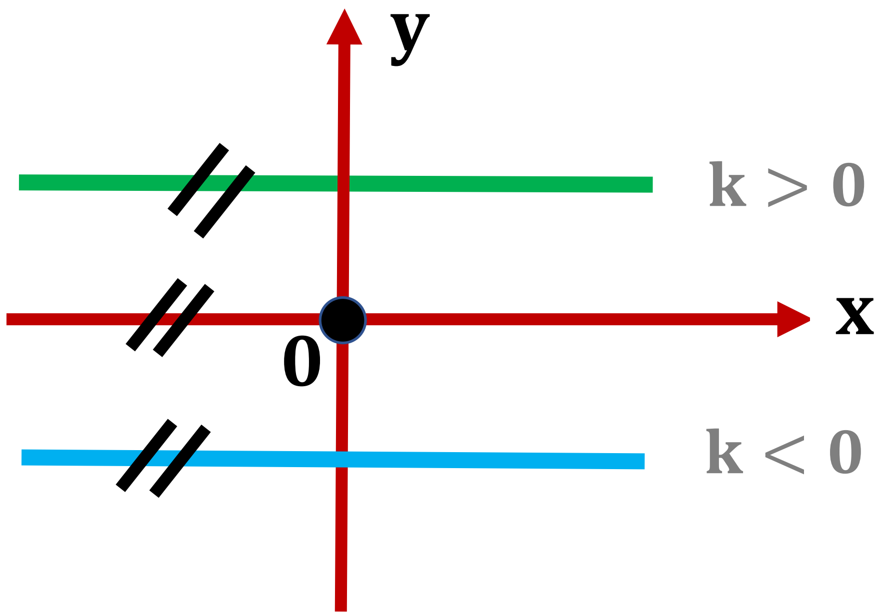
SACO OLIVEROS

FUNCIONES II

I) FUNCIÓN CONSTANTE

Es aquella función de la forma: $\boxed{f(x) = k}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

Donde k es una **constante** , cuya gráfica es:



Donde: $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$

$\boxed{Ran(f) = \{k\}}$

* $f(4) = k$
* $f(\sqrt{5}) = k$
* $f(-9) = k$
* $f(0) = k$

II) FUNCIÓN LINEAL

Es aquella función de la forma: $\boxed{f(x) = ax + b}$ $\forall\ a \neq 0$

Ejemplo:

Grafique: $f(x) = -3x + 12$

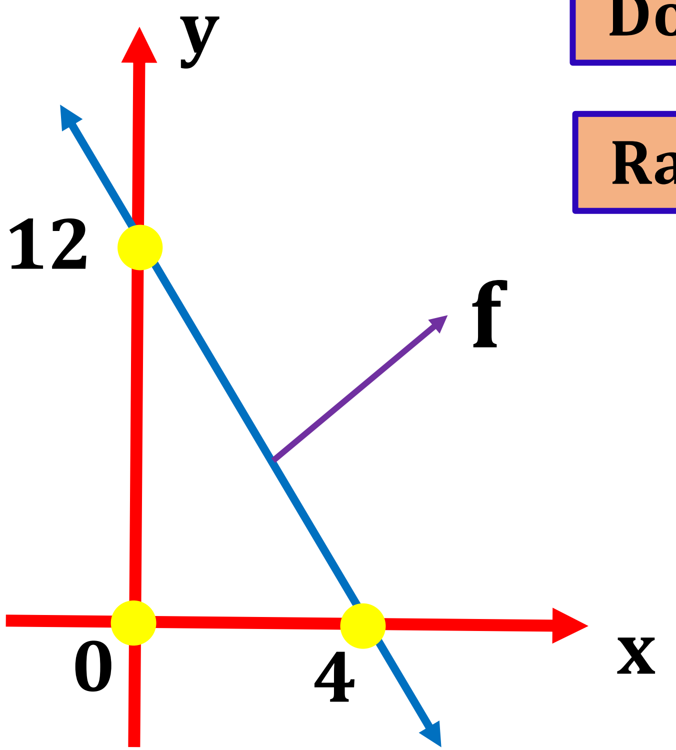
Corte en el eje x:

$f(x) = 0 \rightarrow -3x + 12 = 0 \rightarrow$ $x = 4$

Corte en el eje y:

$f(0) = -3(0) + 12 = y \rightarrow$ $y = 12$

- Su **dominio** es $< -\infty; +\infty >$
- Su **rango** es $< -\infty; +\infty >$
- f es **decreciente** en todo su dominio



$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$

$\boxed{Ran(f) = \mathbb{R}}$

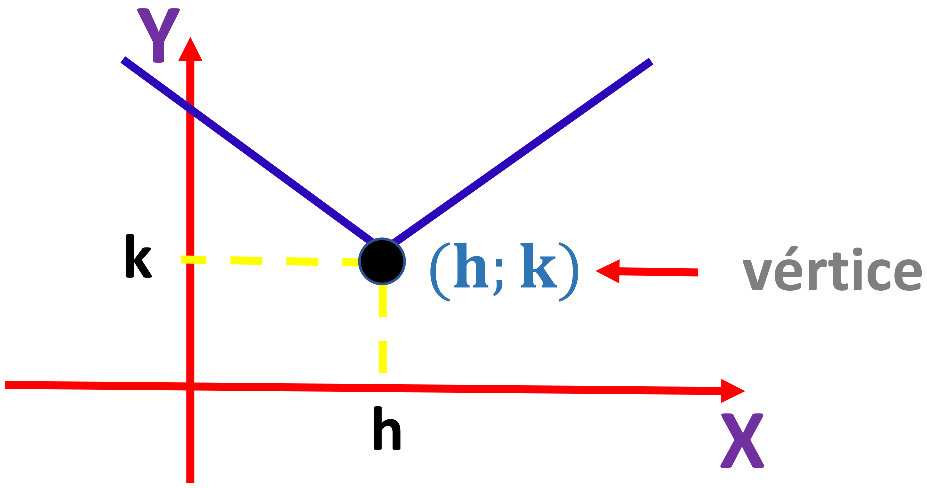
III) FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

Es aquella función de la forma: $f(x) = a|x - h| + k$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

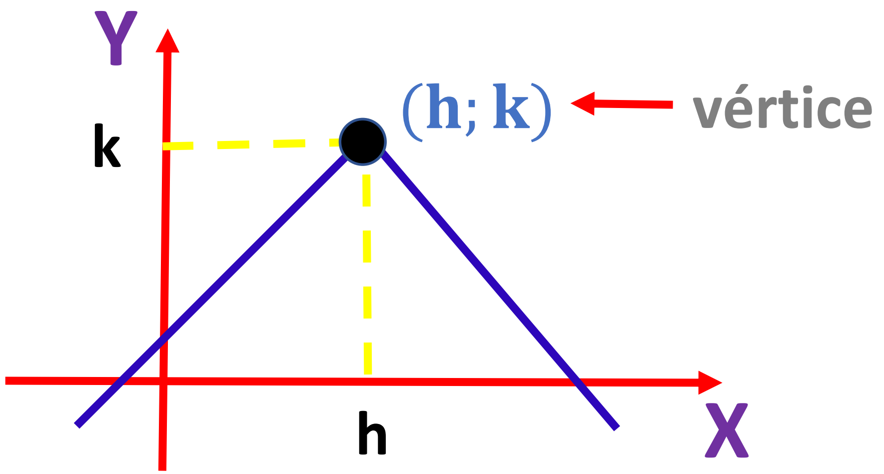
Cuya gráfica es:

$y = a|x - h| + k$ a>0



$Ran(f) = [k; +\infty >$

$y = a|x - h| + k$ a<0

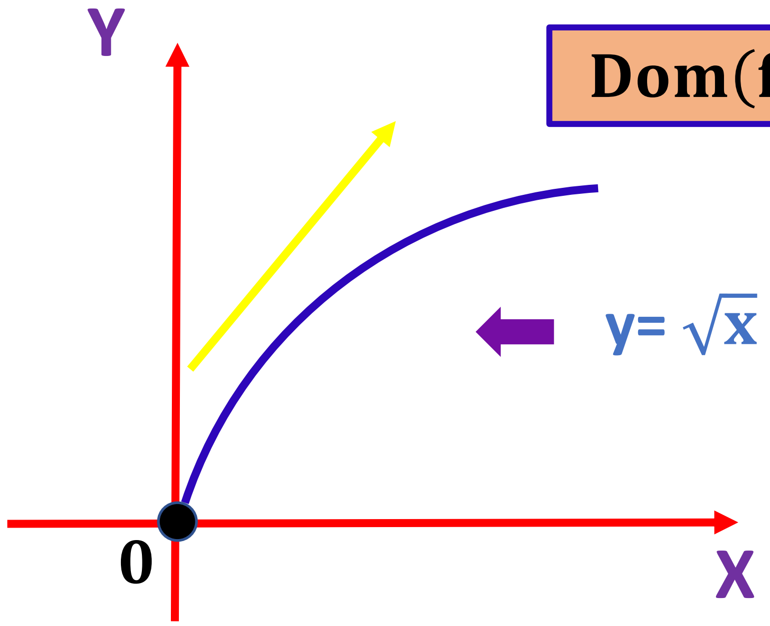


$Ran(f) =< -\infty; k]$

IV) FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Es aquella función de la forma: $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

Cuya gráfica es:



$\boxed{Dom(f) = [0; +\infty >}$

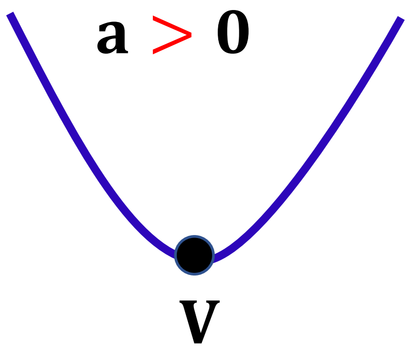
$\boxed{Ran(f) = [0; +\infty >}$

Características

* Es **creciente** en todo su dominio
* Su **mínimo** valor es cero
* Su **dominio** es $[0; +\infty >$
* Su **rango** es $[0; +\infty >$

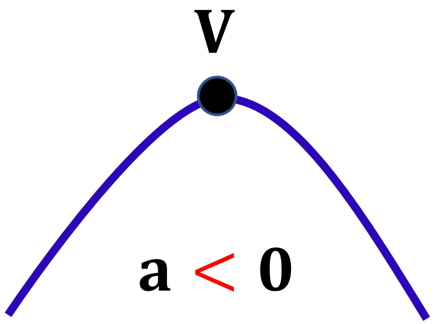
V) FUNCIÓN CUADRÁTICA

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \forall\ a \neq 0$$



(tiene mínimo)

$$Ran(f) = [k; +\infty>$$



(tiene máximo)

$$Ran(f) = <-\infty; k]$$

$$V = (h; k)$$

$$\boxed{h = -\frac{b}{2a}}$$

$$\boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

V ⟶ Vértice de la parábola

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$g(x) = x^2 + 6x - 3$$

$$h(x) = -3x^2 + 6x - 5$$

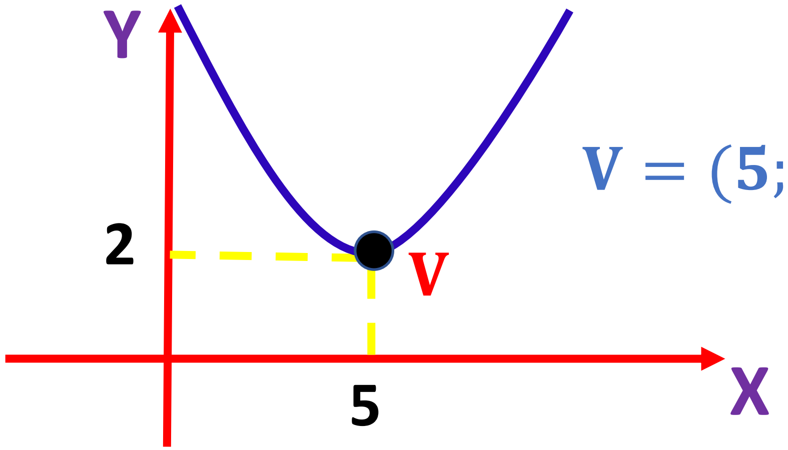
$$j(x) = -x^2 - 2x + 4$$

Gráfica de la función cuadrática de la forma:

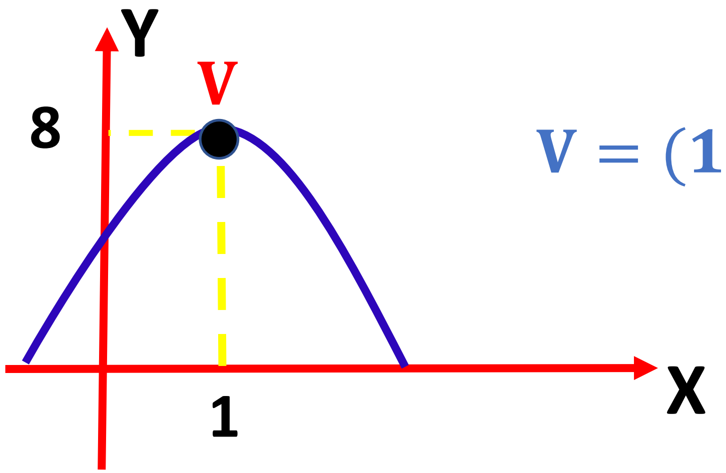
Sea: $f(x) = a(x-h)^2 + k \longrightarrow V = (h;k)$

$g(x) = -2(x-1)^2 + 8$

$f(x) = 3(x-5)^2 + 2$



$V = (5;2)$



$V = (1;8)$

- * Su **mínimo** valor es 2
- * Su **rango** es $[2; +\infty >$
- * Es **decreciente** en $< -\infty; 5\,]$
- * Es **creciente** en $[5; +\infty >$

- * Su **máximo** valor es 8
- * Su **rango** es $< -\infty; 8\,]$
- * Es **creciente** en $< -\infty; 1\,]$
- * Es **decreciente** en $[1; +\infty >$

Observación:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k \qquad a > 0$$

$$\boxed{\mathrm{Ran}(f) = [k;\ +\infty >} \qquad \boxed{V = (h; k)}$$

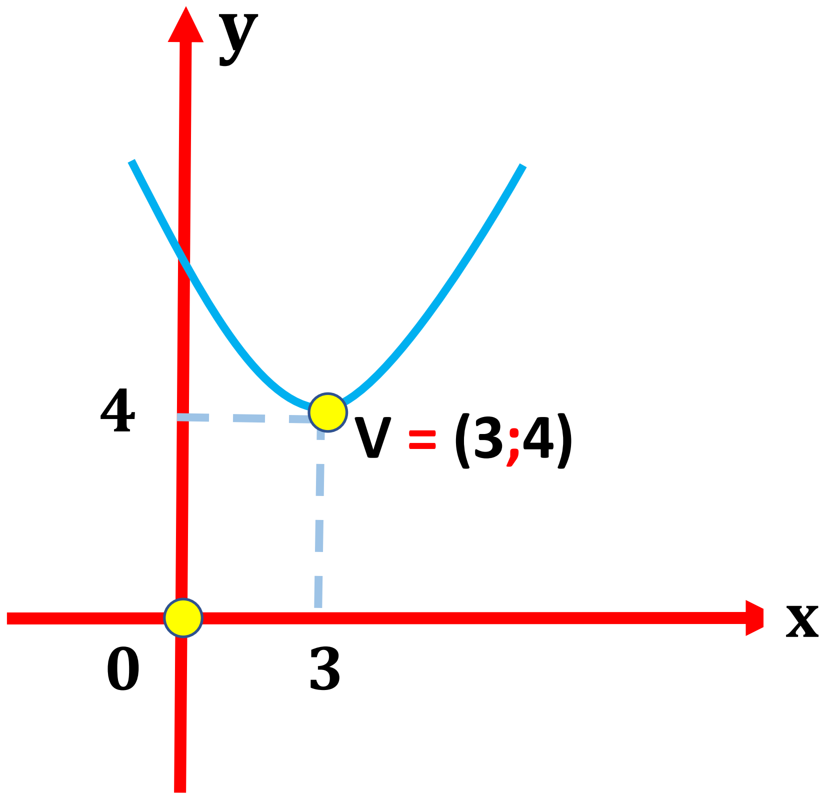
Si: $f(x) = x^2 - 6x + 13$

Podemos conocer su **rango** y **vértice** completando cuadrados:

$$y = \underline{x^2 - 6x + 9} + 4$$

$$y = 1(x-3)^2 + 4$$

Es una parábola hacia arriba

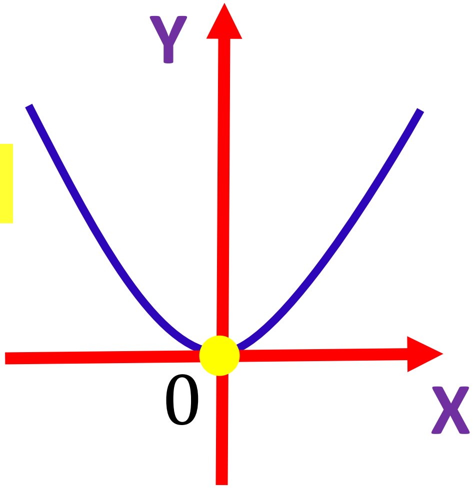


$$\boxed{\text{Vértice} = (3; 4)}$$

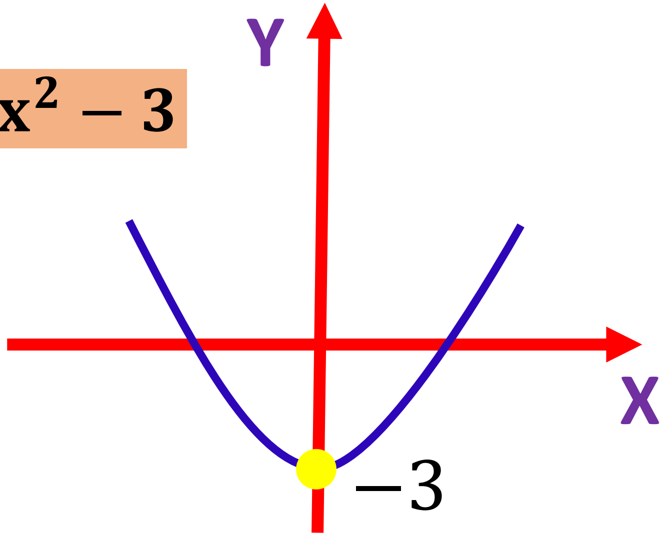
$$\boxed{\mathrm{Ran}(f) = [4;\ +\infty >}$$

Desplazamientos

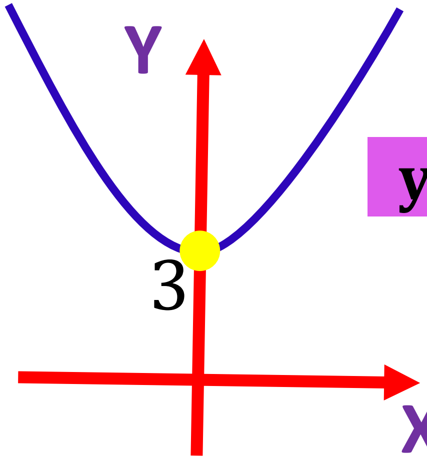
$\mathbf{y = x^2}$

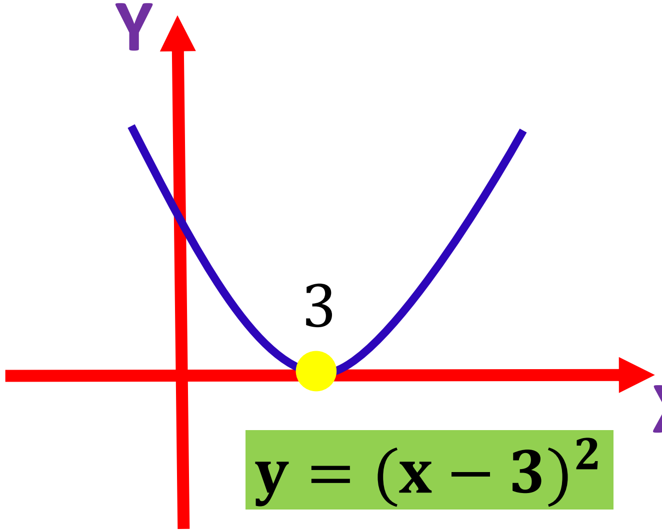


$\mathbf{y = x^2 - 3}$

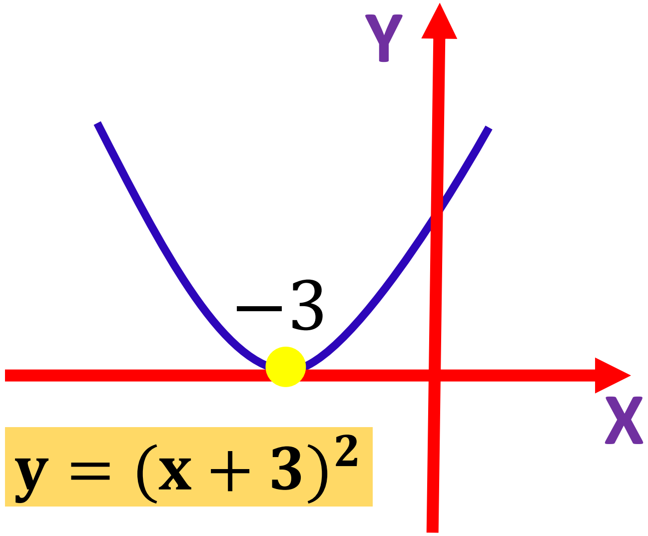


$\mathbf{y = x^2 + 3}$

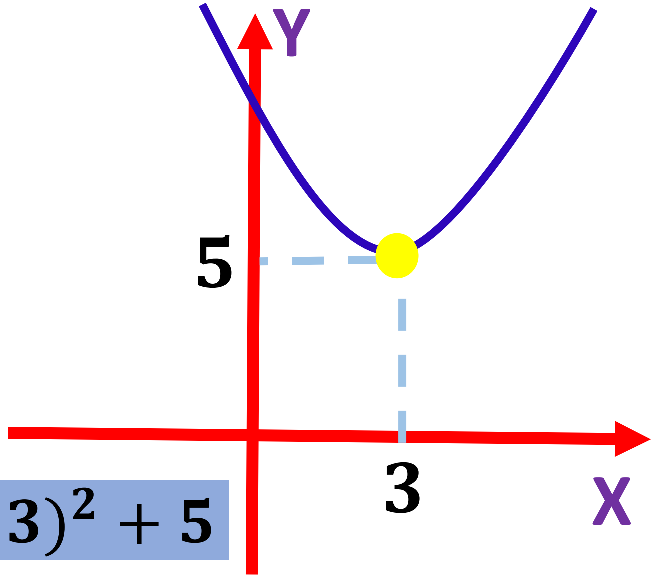




$\mathbf{y = (x - 3)^2}$



$\mathbf{y = (x + 3)^2}$



$\mathbf{y = (x - 3)^2 + 5}$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

1. Sea F una función constante tal que:

$$\frac{F(8)+F(10)}{F(5)-3} = 8$$

Calcule: $F(2014) + F(2005)$

Resolución :

Como F es constante

$$\boxed{F(x) = k}$$

$\Rightarrow$ $F(8) = F(10) = F(5) = k$

Reemplazando:

$$\frac{k+k}{k-3} = 8$$

$$2k = 8k - 24$$

$\Rightarrow$ $\boxed{k = 4}$

Piden: $F(2014) + F(2005)$

$$k \quad + \quad k$$

$$\therefore F(2014) + F(2005) = 8$$

2. Sea $f(x)$ una función lineal tal que

$$f(4) = 7 \quad y \quad f(3) = 1$$

Determine $f(-2)$

Resolución :

Como f es Lineal:

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

$$f(4) = 4a + b = 7$$

$$f(3) = 3a + b = 1$$

$$\boxed{a = 6}$$

$$\boxed{b = -17}$$

$$\boxed{f(x) = 6x - 17}$$

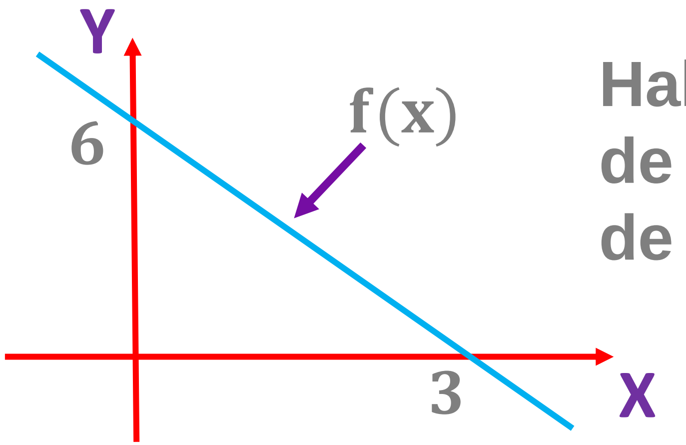
piden:

$$f(-2) = 6(-2) - 17$$

$$f(-2) = -12 - 17$$

$$\boxed{\therefore f(-2) = -29}$$

3. Según la siguiente gráfica:



Halle la regla de correspondencia de f(x):

Resolución :

Como $f(x)$ es lineal $\boxed{f(x) = ax + b}$

Corte en el eje Y

$$f(0) = 6 \rightarrow a(0) + b = 6$$

$$\boxed{b = 6}$$

Corte en el eje X

$$f(3) = 0 \rightarrow 3a + b = 0$$

$$\rightarrow 3a + 6 = 0$$

$$\boxed{a = -2}$$

$$\boxed{\therefore f(x) = -2x + 6}$$

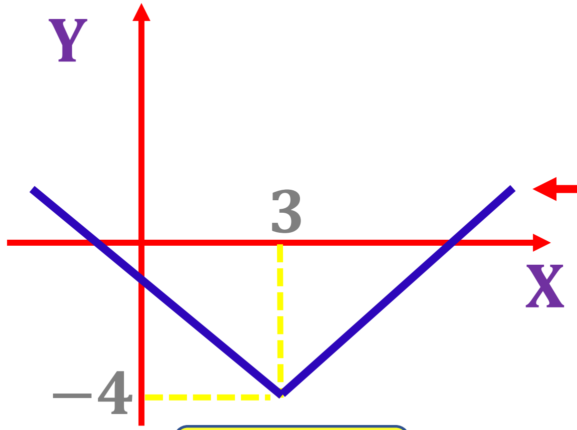
4. Grafique las siguientes funciones: $f(x) = |x - 3| - 4$ y $g(x) - |x + 2| + 5$

Determine los vértices y rangos de $f(x)$ y $g(x)$

Resolución :

$y = 1|x - 3| - 4$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -4$



$f(x)$

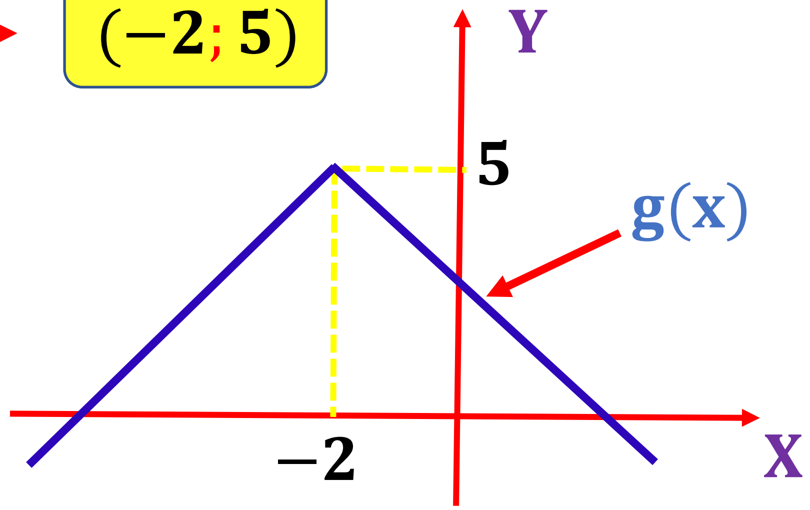
$(3; -4)$ ← vértice

$\boxed{Ran(f) = [-4; +\infty>}$

$y = -1|x + 2| + 5$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 5$

vértice → $(-2; 5)$



$\boxed{Ran(g) =< -\infty; 5]}$

5. Grafique la función:

$$f(x) = x^2 - 8x + 20$$

Además determine el vértice y rango de $f(x)$

Resolución :

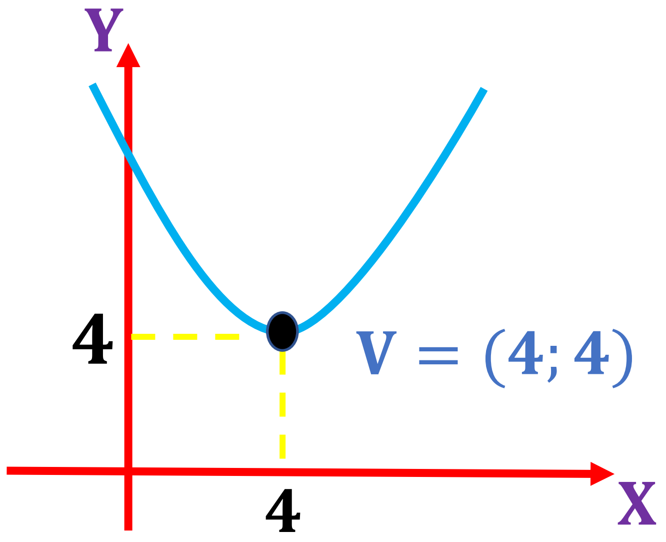
Recordar:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si: } f(x) = (x-h)^2 + k \\ V = (h;k) \\ \mathrm{Ran}(f) = [k; +\infty > \end{array}}$$

Completando cuadrados:

$$f(x) = \underline{x^2 - 8x + 16} + 4$$

$$f(x) = (x-4)^2 + 4 \rightarrow \begin{cases} h = 4 \\ k = 4 \end{cases}$$



$$\therefore \quad V = (4;4) \quad \wedge$$
$$\mathrm{Ran}(f) = [4; +\infty >$$

6. Sea la función:

$$h(x) = \sqrt{4 - |3x - 5|}$$

Halle su dominio

Resolución :

Toda cantidad subradical de índice par debe de ser mayor o igual a cero.

$$4 - |3x - 5| \geq 0$$

$$4 \geq |3x - 5|$$

$$|3x - 5| \leq 4$$

$$-4 \leq 3x - 5 \leq 4$$

Recordar:

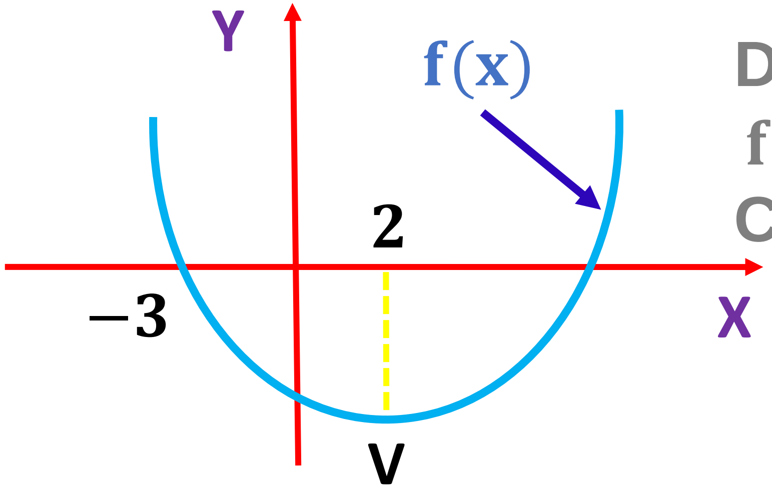
$$\text{Si: } |a| \leq b \leftrightarrow$$
$$b \geq 0 \quad \wedge \quad -b \leq a \leq b$$

$$+5 \rightarrow \quad 1 \leq 3x \leq 9$$

$$\div 3 \rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

$$\therefore \mathrm{Dom}(h) = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$$

7. De la gráfica:

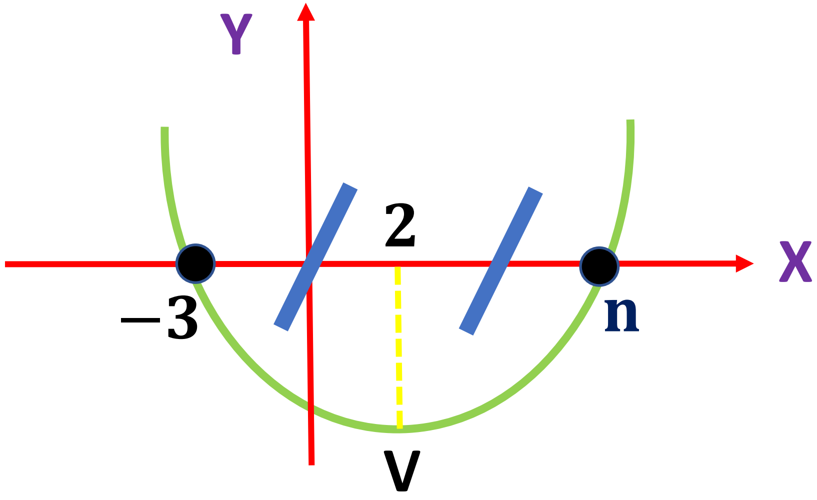


Donde

$f(x) = 2x^2 + ax + b$

Calcule: $a + b$

Resolución :



$f(x) = a(x+3)(x-n)$

De la gráfica , se obtiene:

Punto medio:

$$\frac{n + (-3)}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad n = 7$$

$f(x) = 2(x+3)(x-7)$

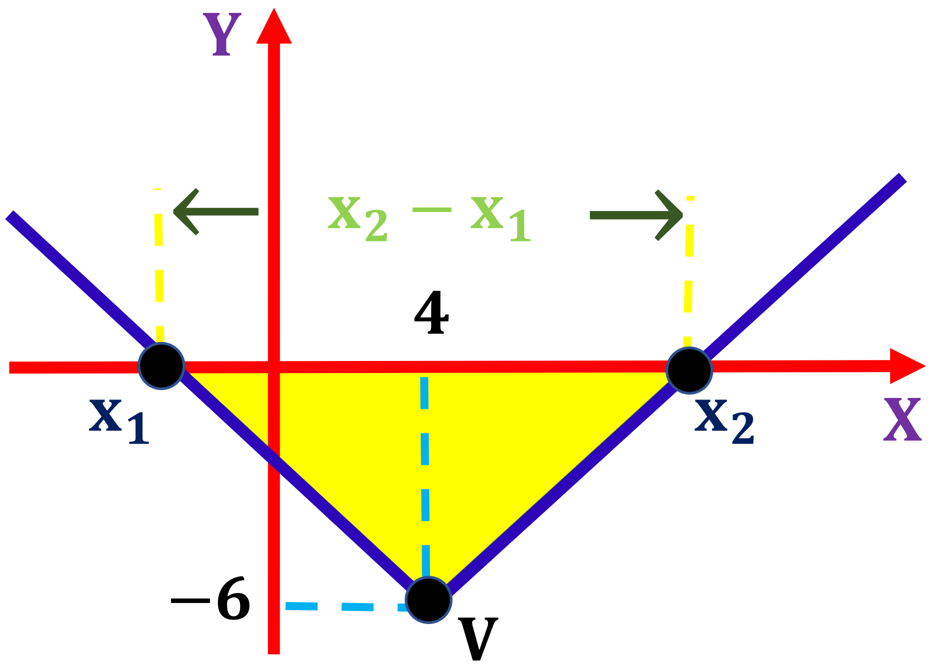
$f(x) = 2(x^2 - 4x - 21)$

$f(x) = 2x^2 - 8x - 42 \rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = -42 \end{cases}$

$$\boxed{\therefore\ a + b = -50}$$

8. El costo de un horno microondas es $15T$ soles, donde T coincide con el área de la región limitada por la función: $F(x) = |x - 4| - 6$ y el eje X. ¿Cuánto es el costo de dicho horno?

Resolución :



$V = (4; -6)$

$$F(x) = |x - 4| - 6 = 0$$

$$|x-4| = 6 \begin{cases} x - 4 = -6 & \rightarrow & x_1 = -2 \\ x - 4 = 6 & \rightarrow & x_2 = 10 \end{cases}$$

$$T = \text{Área} = \frac{(x_2 - x_1) \times 6}{2} = (12) \times 3 = 36u^2$$

Costo del horno:

$$15T = 15(36) = 540$$

$\therefore$ **Costo del horno es s/540**