MATHEMATICAL REASONING

Chapter 22

5th
SECONDARY

Análisis combinatorio I

SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATION

A lo largo de nuestra vida realizamos actividades cotidianas como elegir el almuerzo ofertado en un restaurante, o ubicarnos en una fila del cine, formar grupos con nuestros estudiantes,..., etc. Para realizar el conteo de las diferentes maneras de realizarse dichas actividades es conveniente conocer ciertas técnicas que lo faciliten, estas técnicas o estrategias lo desarrollaremos en el presente capítulo.

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si un evento A ocurre de m maneras diferentes y otro evento B ocurre de n maneras diferentes, la ocurrencia del evento A o B, pero no de ambos, estará dado por:

Nº de ocurrencias del evento (A o B) $= \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$

Usualmente este principio se utiliza si los elementos son similares, sirven para lo mismo y que se toma una sola vez:

Distintas formas de viajar

Distintas formas de comprar

Distintas formas de cruzar un rio

Otros

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

❑ PRINCIPIO DE ADICIÓN

Ejemplo 1

Aldo viajará de Lima a Huancayo y tiene para elegir: la empresa A, que cuenta con 4 buses que realizan la ruta; la empresa B, que cuenta con 3 buses para la ruta y la empresa C, que dispone de 5 buses. Si Aldo quiere hacer el viaje en un solo bus, ¿de cuántas maneras diferentes podrá realizarlo?

Resolución

De los datos, Aldo elegirá un solo bus:

EMPRESA "A" o EMPRESA "B" o EMPRESA "C"

$$4 \quad + \quad 3 \quad + \quad 5$$

$$\therefore N° \; de \; maneras \; diferentes = 12$$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

❑ PRINCIPIO DE ADICIÓN

Ejemplo 2

Daniel desea comprar un televisor Samsung 4k para ver los partidos de Perú por las eliminatorias. Dicho televisor puede adquirirlo en 3 centros comerciales, el primero tiene 7 tiendas, el segundo 8 tiendas y el tercero 9 tiendas. ¿De cuántas maneras distintas puede adquirir su televisor

Resolución

De los datos, Daniel solo elegirá una tienda .

C.C. "A" o C.C. "B" o C.C "C"

$$7 + 8 + 9$$

$$\therefore N° \; de \; maneras \; diferentes = \underline{\underline{24}}$$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un evento A ocurre de m maneras diferentes y otro evento B ocurre de n maneras diferentes, la ocurrencia del evento A y B, en forma simultánea o consecutiva está dado por:

Nº de ocurrencias del evento (A y B) $= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$

Usualmente este principio se utiliza si los elementos son distintos, se repiten o se toman varias veces.

Distintas formas de vestir

Distintas formas de alimentarse

Distintas formas de ir por caminos

Otros

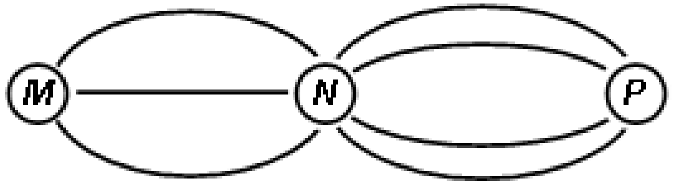
HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

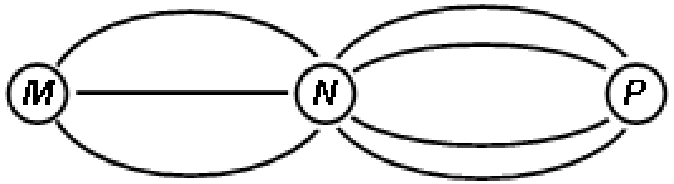
Ejemplo 1

El gráfico muestra un circuito de caminos entre tres ciudades distintas: M, N y P. Si una persona quiere ir de la ciudad M a la ciudad P, ¿de cuántas maneras distintas podrá hacerlo?



Resolución

Del gráfico se observa que:



DE M a N Y DE N a P

$$3 \times 4$$

$$\therefore \ N° \ de \ maneras \ diferentes = 12$$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Ejemplo 2

Robertito lanza una moneda y dos dados en forma simultanea. ¿Cuántos resultados distintos puede obtener?

Recordemos:

Al lanzar una moneda podemos obtener dos resultados distintos, mientras que al lanzar un dado se obtienen 6 resultados distintos

Resolución

Cara/sello y 1,2,3,4,5,6 y 1,2,3,4,5,6

$$2 \times 6 \times 6$$

$$2 \times 6 \times \quad = 72$$

$\therefore$ $N° \ de \ maneras \ diferentes: \ \underline{\underline{72}}$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea $\boldsymbol{n}$ un numero entero positivo, el factorial de $\boldsymbol{n}$ se denota por $\boldsymbol{n}!$ o $\underline{|\boldsymbol{n}}$ y se define como el producto de todos los enteros positivos desde el número hasta $\boldsymbol{n}$ inclusive.

$$\boldsymbol{n}! = \underline{|\boldsymbol{n}} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (n-1)\, n$$

Como el orden de los factores no altera el producto también se cumple:

$$\boldsymbol{n}! = \underline{|\boldsymbol{n}} = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$$

Por definición calculamos:

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$

$\vdots \quad \vdots$

También se cumple:

$$n! = n(n-1)!$$

$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

$\boxed{0! = 1}$

Demostración

$$n! = n(n-1)!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$Si, n = 1$$

Reemplazamos

$$\frac{1!}{1} = (1-1)!$$

$$1 = 0!$$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO I

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Problemita:

Hallar el valor de n en la siguiente expresión:

$$\frac{n!}{(n-1)!+(n-2)!}=20$$

Resolución:

Transformando adecuadamente:

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-1)(n-2)!+(n-2)!}=20$$

Factorizamos el denominador:

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,(n-1+1)}=20$$

$$\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{n}}=20$$

$$n-1=20$$

$$n=21$$

$$\therefore\ 21$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1

¿Cuántos resultados diferentes se obtendrán al lanzar 2 dados y dos monedas?

Resolución:

Al lanzar 2 dados y dos monedas:

1,2,3,4,5,6	y	1,2,3,4,5,6	y	Cara/sello	y	Cara/sello
6	$\times$	6	$\times$	2	$\times$	2

$$6 \text{ x } 6 \text{ x } 2 \text{ x } 2 = 144$$

$\therefore$ $N° \; de \; resultados \; diferentes$: $\underline{\underline{144}}$

PROBLEMA 2

¿De cuántas maneras distintas se puede vestir Esther si posee 2 blusas, 4 polos (2 iguales), 3 shorts, 5 pantalones (3 iguales) y 3 pares de zapatillas?

RECORDEMOS:

4 polos (2 iguales)
(4 – 2) + 1 = 3 distintas

5 pantalones (3 iguales)
(5 – 3) + 1 = 3 distintas

Resolución:

- 2 blusas → 2
- 4 polos (2 iguales) → 3

$2 + 3 = 5$

- 3 shorts → 3
- 5 pantalones (3 iguales) → 3

$3 + 3 = 6$

- 3 pares de zapatillas → 3

N° de maneras distintas: 5 x 6 x 3

∴ *N° de maneras distintas*: 90

PROBLEMA 3

Para enviar un artículo al mercado, este pasa por tres controles de calidad. En cada uno se inspecciona una cierta particularidad y se anota su conformidad; en el primer control hay 4 exámenes, en el segundo control hay 3 exámenes y en el tercer control hay 2 exámenes. ¿De cuántas maneras se puede controlar la calidad de un producto?

Resolución:

Control de calidad del yogurt

Primer control	y	Segundo control	y	Tercer control
4	×	3	×	2

$$N° \; de \; maneras: \; 4 \times 3 \times 2$$

$$N° \; de \; maneras: \; \underline{\underline{24}}$$

PROBLEMA 4

Un grupo de amigos proyectaron un viaje y decidieron ir en tren, en ómnibus o en camión. Si hay 5 rutas para el tren, 3 para el ómnibus y 2 para el camión. ¿Cuántas maneras tenemos para decidir nuestro viaje?

Resolución:

Según los datos:

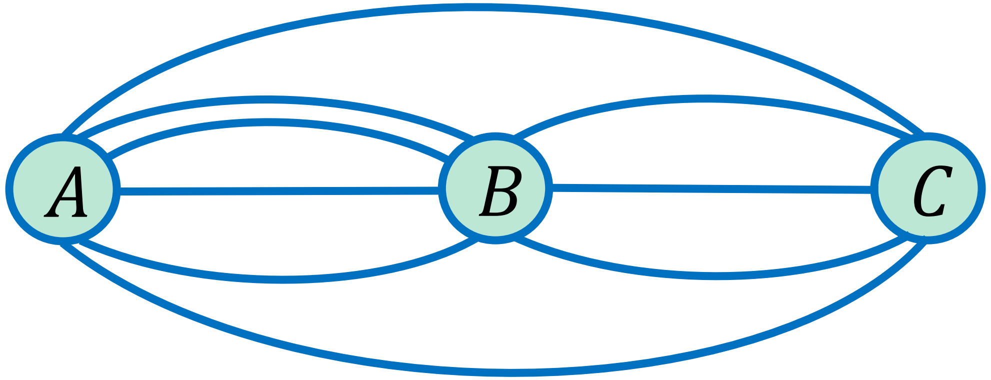
TREN	O	OMNIBUS	O	CAMION
5	+	3	+	2

$$N° \; de \; maneras: = 5 + 3 + 2$$

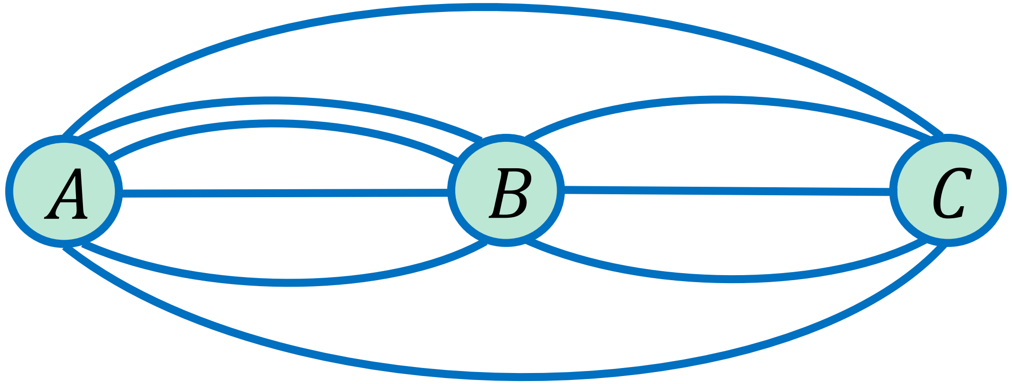
$$\therefore \; N° \; de \; maneras : \underline{10}$$

PROBLEMA 5

¿De cuántas maneras diferentes se podrá ir de A hacia C, sin retroceder?



Resolución:



De A a B: ⟶ 4 caminos:

De B a C: ⟶ 3 caminos:

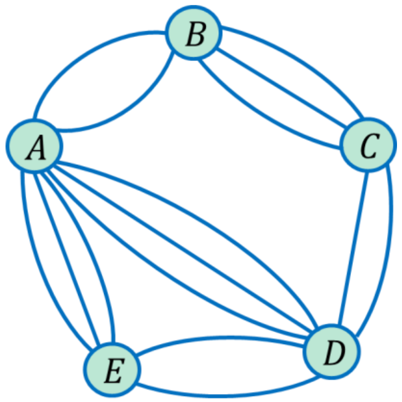
De A a C: ⟶ 2 caminos:

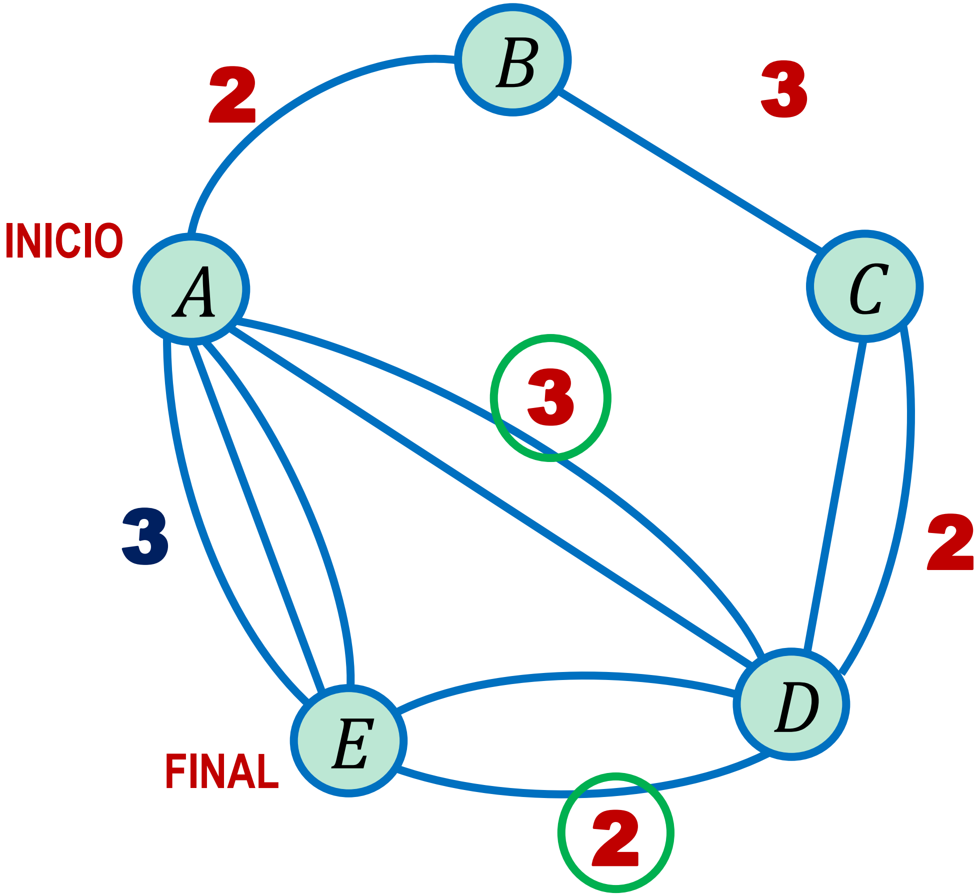
$$(4 \times 3) + 2 = 14$$

$\therefore$ $N° \; de \; maneras \; diferentes:$ 14

PROBLEMA 6

En el Ministerio de transportes se observa un mapa simplificado de los caminos que unen a cinco distritos A, B, C, D y E. Se quería saber cuántas formas diferentes existían para ir desde el distrito A hacia el distrito E sin retroceder para implementar un plan de acción durante las horas punta. ¿Podría usted decir la cantidad de rutas buscadas?





$$N° \; de \; rutas: = 2 \times 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 + 3$$

$$N° \; de \; rutas: = 24 + 6 + 3$$

$$\therefore \; N° \; de \; rutas: \; \underline{\underline{33}}$$

PROBLEMA 7

Si:

$$3^{2a-8} = 3(4!) + 3^2$$

Calcule: $3a - 2$

Resolución:

$$3^{2a-8} = 3(4!) + 3^2$$

$$3^{2a-8} = 3(24) + 9$$

$$3^{2a-8} = 72 + 9$$

$$3^{2a-8} = 81$$

$$3^{2a-8} = 3^4$$

Recordemos:

4!=4x3x2x1

4!=24

Recordemos:

Si: $a^m = a^n$

$\rightarrow m = n$

$$2a - 8 = 4$$

$$2a = 12$$

$$a = 6$$

Piden: $3a - 2$

$$3(6) - 2 = 16$$

$\therefore$ 16

PROBLEMA 8

Hallar el valor de x :

$$\frac{(x+3)!}{(x+2)!+(x+1)!}=7$$

Resolución:

$$\frac{(x+3)!}{(x+2)!+(x+1)!}=7$$

Recordemos

$$n! = n(n-1)!$$

$$(n+3)! = (n+3)(n+2)!$$

$$(n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1)!$$

Transformando adecuadamente:

$$\frac{(x+3)(x+2)(x+1)!}{(x+2)(x+1)!+(x+1)!}=7$$

Factorizamos el denominador:

$$\frac{(x+3)(x+2)\cancel{(x+1)!}}{\cancel{(x+1)!}(x+2+1)}=7 \rightarrow \frac{\cancel{(x+3)}(x+2)}{\cancel{(x+3)}}=7$$

$$x+2=7$$

$$x=$$

$$\therefore\ 5$$

HELICO WORKSHOP

Muchas gracias