ALGEBRA

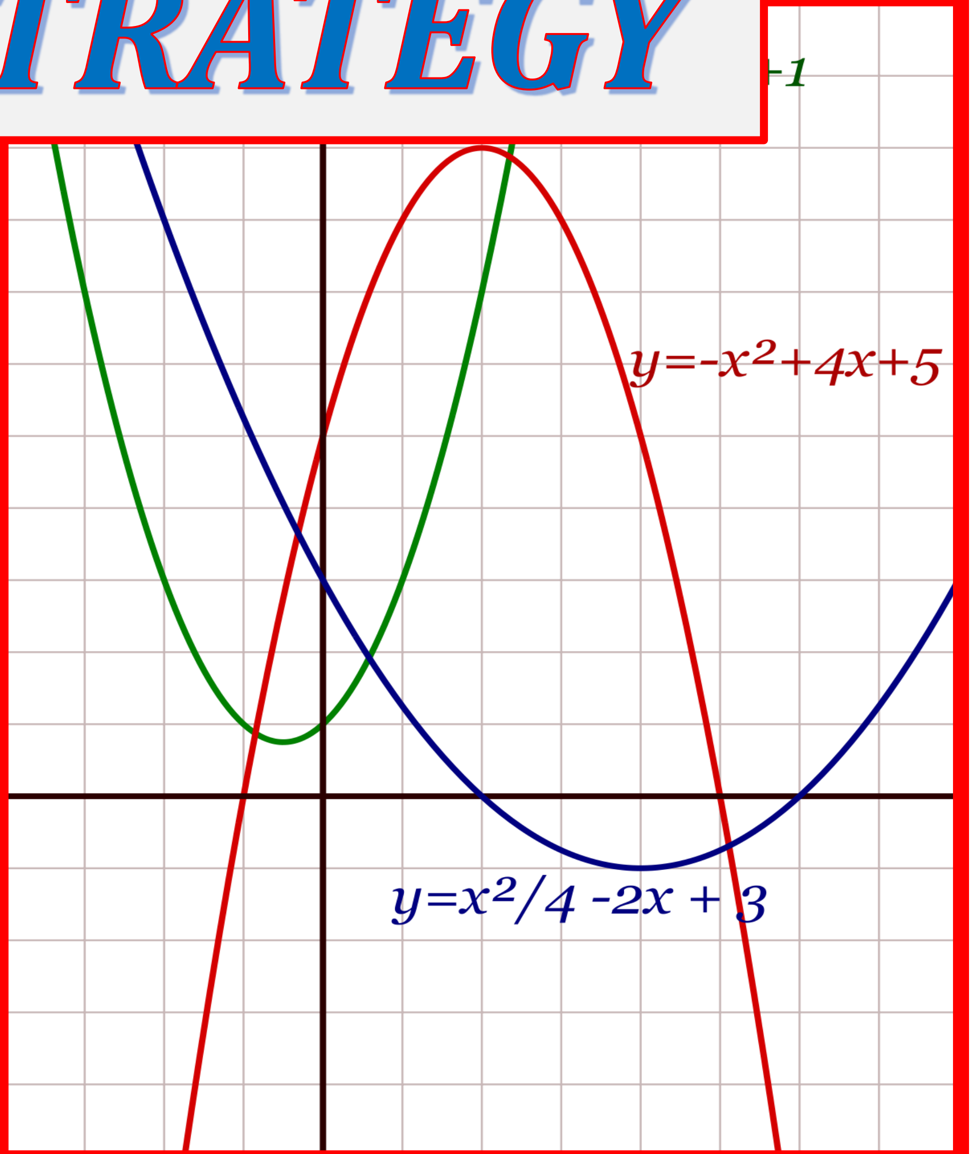
Chapter 17

3th
SECONDARY

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY



ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Denominada también ***ECUACIÓN CUADRÁTICA****, es aquella ecuación polinomial de una incógnita, que se reduce a la forma general:*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}\ ;\ a \neq 0$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \; ; \; a \neq 0 \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Raíces de la ecuación:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

NATURALEZA DE LAS RAÍCES:

Sea la ecuación cuadrática

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \; ; \; a \neq 0$$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Primer caso:

Si: $\boxed{\Delta > 0}$

La ecuación tiene raíces reales y diferentes.

Segundo caso:

Si: $\boxed{\Delta = 0}$

La ecuación tiene raíces reales e iguales (solución única).

Tercer caso:

Si: $\boxed{\Delta < 0}$

La ecuación tiene raíces complejas y conjugadas.

TEOREMA DE CARDANO - VIETE:

Sea la ecuación cuadrática :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; \ a \neq 0$$

✓ ***Suma de Raíces:***

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

✓ ***Producto de Raíces:***

$$P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

PROPIEDADES ADICIONALES:

- *La ecuación tiene raíces simétricas si y solo si:*

$$\boxed{x_1 + x_2 = 0} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

- *La ecuación tiene raíces recíprocas si y solo si:*

$$\boxed{x_1 . x_2 = 1} \Rightarrow \boxed{a = c}$$

Problema 1

Halle el valor de x

$$(x-4)^2+(x-1)^2=13$$

Recordemos:

Trinomio cuadrado perfecto:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

Resolución:

$$(x-4)^2+(x-1)^2=13$$

$$x^2-8x+16+x^2-2x+1=13$$

$$\cancel{2}x^2-\cancel{10}x+\cancel{4}=0$$

$x^2-5x+2=0$, *donde:* $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=2 \end{cases}$

Cálculo del discriminante:

$$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

$$\Delta=(-5)^2-4(1)(2)$$

$$\boxed{\Delta=17}$$

Fórmula general:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}} \Rightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{17}}{2(1)}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\therefore \boxed{x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{2}} \vee \boxed{x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{2}}$$

Problema 2

Indique una raíz de la ecuación

$$(2x-3)(x-5)=(x-3)(x+1)$$

Resolución:

$$(2x-3)(x-5)=(x-3)(x+1)$$

$$2x^2-10x-\cancel{3x}+15=x^2+x-\cancel{3x}-3$$

$$x^2\underline{-11x}+18=0$$

$$\begin{array}{ll} x & -9 \\ x & -2 \end{array}$$

$$(x-9)(x-2)=0$$

$$x-9=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

$$\therefore \quad \boxed{x=9} \quad \vee \quad \boxed{x=2}$$

Problema 3

Siendo x_1 *y* x_2 *las raíces de la ecuación*

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

halle el valor de $x_1 + x_2 + x_1 . x_2$.

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 *y* x_2

SUMA DE RAÍCES:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

PRODUCTO DE RAÍCES:

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Resolución:

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

- $x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5}$
- $x_1 . x_2 = \frac{3}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 . x_2 = 3}$

Nos piden: $\underbrace{x_1 + x_2}_{5} + \underbrace{x_1 . x_2}_{3}$

$$5 + 3$$

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_1 . x_2 = 8$$

Problema 4

Si las raíces de la ecuación

$$x^2-2x+3=0$$

son a y b, halle el valor de

$$T=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$$

Recordemos:

Sea: $ax^2+bx+c=0$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

SUMA DE RAÍCES:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

PRODUCTO DE RAÍCES:

$$x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

Resolución:

$$x^2-2x+3=0$$

$$a+b=-\frac{(-2)}{1}=2 \qquad a.b=\frac{3}{1}=3$$

➢ $\underbrace{(a+b)}^3=a^3+b^3+3\underbrace{ab}\underbrace{(a+b)}$

$$2^3=a^3+b^3+3(3)(2)$$

$$\boxed{a^3+b^3=-10}$$

➢ $\underbrace{(a+b)}^2=a^2+b^2+2\underbrace{ab}$

$$2^2=a^2+b^2+2(3)$$

$$\boxed{a^2+b^2=-2}$$

Nos piden:

$$T=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$$

$$T=\frac{-10}{-2}$$

$$\boxed{\therefore\quad T=5}$$

Problema 5

Si la siguiente ecuación

$$5x^2 + (7b - 21)x + 11 = 0$$

***tiene raíces simétricas** donde el valor de b representa la edad del hijo del profesor Edgar, ¿cuál será la edad del profesor Edgar si es $(9b + 5)$?*

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

La ecuación tiene raíces simétricas si y solo si:

$\boxed{x_1 + x_2 = 0} \Rightarrow \boxed{b = 0}$

Resolución:

$$\boxed{5x^2 - (\underbrace{7b - 21}_{0})x + 11 = 0}$$

La ecuación tiene raíces simétricas:

$$\Rightarrow 7b - 21 = 0$$

$\boxed{b = 3}$ *(Edad del hijo del profesor Edgar)*

Edad del profesor Edgar:

$$9b + 5 = 9(3) + 5$$

$$\boxed{9b + 5 = 32}$$

∴ *El profesor Edgar tiene 32 años.*

Problema 6

Si la siguiente ecuación

$$(3a+5)x^2+7x+4a=0$$

presenta raíces recíprocas, halle el valor de a?

Recordemos:

$$ax^2+bx+c=0$$

cuyas raíces son: x_1 ***y*** x_2

La ecuación tiene raíces recíprocas si y solo si:

$$\boxed{x_1 . x_2 = 1} \qquad \boxed{a=c}$$

Resolución:

$$\boxed{\underline{(3a+5)}x^2+7x+\underline{4a}=0}$$

La ecuación tiene raíces recíprocas:

$$\Rightarrow \quad 3a+5=4a$$

$$\boxed{\therefore \quad a=5}$$

Problema 7

Calcule el valor de n si las raíces de la ecuación

$$(n+2)x^2-6nx+9=0$$

son iguales.

Recordemos:

$$ax^2+bx+c=0$$

La ecuación tiene raíces iguales si y solo si $\Delta=0$:

$$\boxed{b^2-4ac=0}$$

Resolución:

$$\boxed{\underbrace{(n+2)}_{a}x^2\underbrace{-6n}_{b}x\underbrace{+9}_{c}=0}$$

La ecuación tiene raíces iguales ⇒ $\boxed{b^2-4ac=0}$

$$(-6n)^2-4(n+2)(9)=0$$

$$\cancel{36}n^2-\cancel{36}n-\cancel{72}=0$$

$$n^2-n-2=0$$

$$\begin{array}{ll} n & -2 \\ n & +1 \end{array}$$

$$n-2=0 \quad \vee \quad n+1=0$$

$$\therefore \quad \boxed{n=2} \quad \vee \quad \boxed{n=-1}$$

Problema 8

Forme la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $5+\sqrt{2}$ y $5-\sqrt{2}$.

Resolución:

Sean: $x_1 = 5+\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 5-\sqrt{2}$

- $S = x_1 + x_2$

$$S = 5 + \cancel{\sqrt{2}} + 5 - \cancel{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{S = 10}$$

- $P = x_1 . x_2$

$$P = (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$$

$$P = 5^2 - \sqrt{2}^2$$

$$\boxed{P = 23}$$

Formando la ecuación:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Rpta: $\boxed{x^2 - 10x + 23 = 0}$