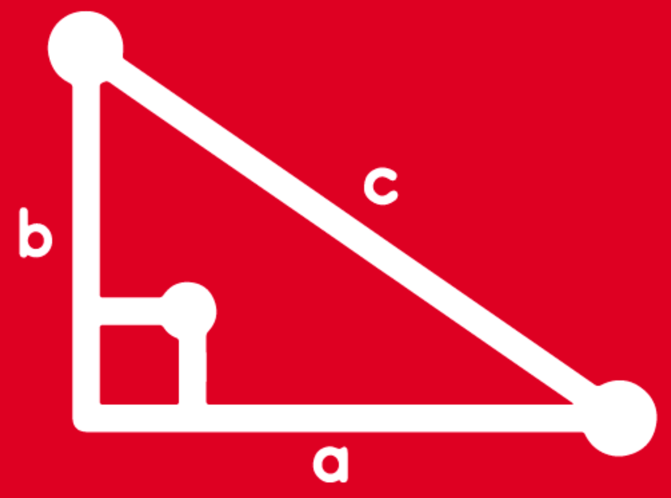
TRIGONOMETRY

Chapter 07

5th
SECONDARY



Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal II

SACO OLIVEROS

Divide las dificultades que examinas en tantas partes como sea posible para su mejor solución.

René Descartes 1596 - 1650

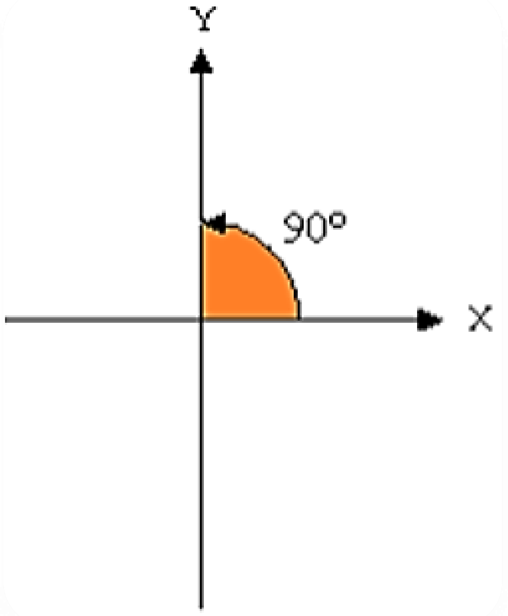
ÁNGULOS CUADRANTALES

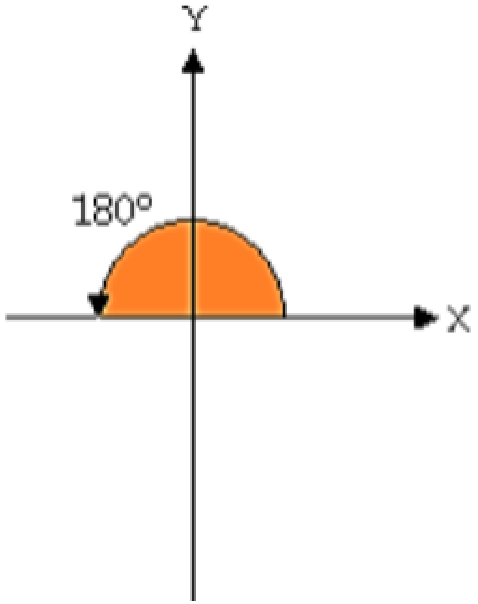
Son aquellos ángulos trigonométricos cuyo lado final se encuentra sobre algún semieje, por tal razón no pertenecen a cuadrante alguno

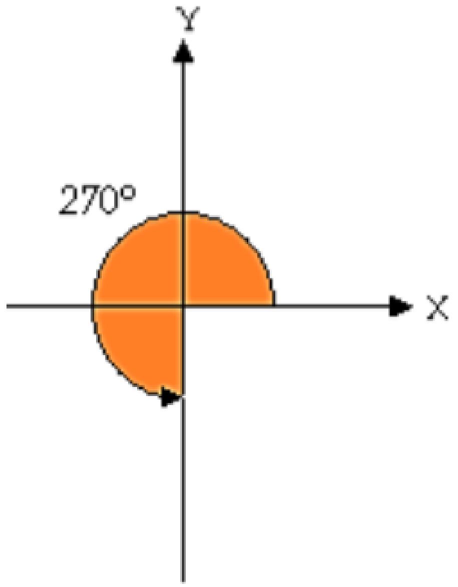
Podemos decir: *Que es todo ángulo múltiplo del ángulo recto, por consiguiente tendrán la forma:*

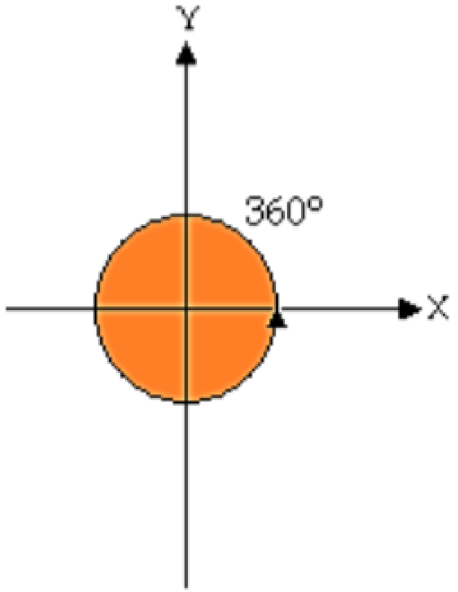
$90°n$	$\frac{\pi}{2}\,\text{rad}\ n$

$n \in \mathbb{Z}$









RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

RT \ ∡	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	–1	ND	1
csc	ND	1	ND	–1	ND

N.D : No Determinado

OBSERVACIÓN:

Si α es un ángulo cuadrantal

$\text{sen}\alpha = \{-1; 0; 1\}$

$\cos\alpha = \{-1; 0; 1\}$

$\tan\alpha = 0$

$\cot\alpha = 0$

SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

Regla práctica:

90°

IIC

sen
csc } (+)

IC

Todas las RT son (+)

180°

0°

360°

IIIC

tan
cot } (+)

IVC

cos
sec } (+)

270°

OBSERVACIÓN

Si $0° < \alpha < 90°$ ➔ $\alpha \in$ IC

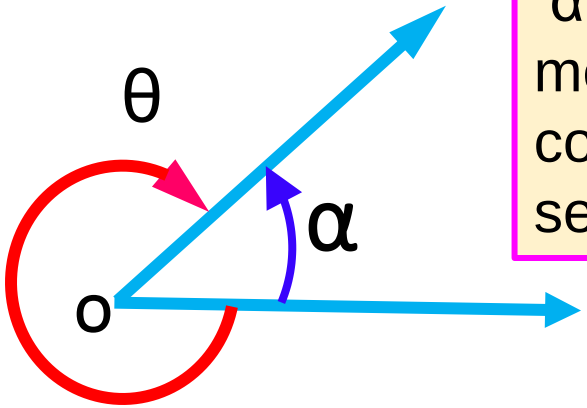
Si $90° < \alpha < 180°$ ➔ $\alpha \in$ IIC

Si $180° < \alpha < 270°$ ➔ $\alpha \in$ IIIC

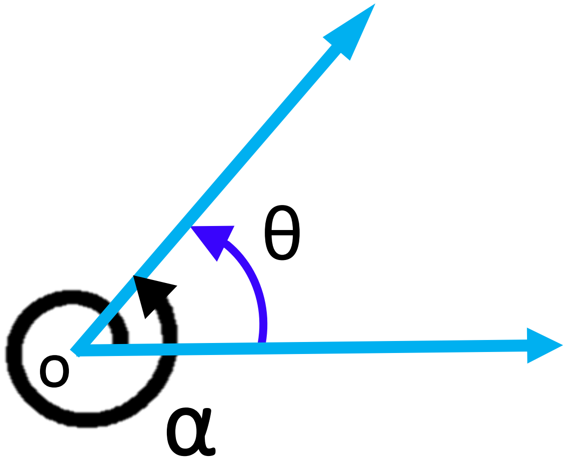
Si $270° < \alpha < 360°$ ➔ $\alpha \in$ IVC

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, lado final y vértice.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en sentidos opuestos.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en el mismo sentido.

Siendo **α** y **θ** las medidas de dos ángulos coterminales, se cumple.

I. $\alpha - \theta = 360°\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

II. Rt (α) = Rt (θ)

1. Siendo θ y β ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°, se cumple que $\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{\cos\theta-1}=1+\operatorname{sen}\beta$ ... (*)

calcule θ + β.

RESOLUCIÓN

$$1-\cos\theta \geq 0 \quad \wedge \quad \cos\theta-1 \geq 0$$

$$\underbrace{\cos\theta \leq 1 \quad \wedge \quad \cos\theta \geq 1}$$

$$\cos\theta = 1$$

$$\theta = \{0°; 360°\}, \text{ como } 0°<\theta \leq 360°$$

$$\Rightarrow \theta = 360°$$

REEMPLAZANDO EN (*)

$$\underbrace{\cancel{\sqrt{1-\cos\theta}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\sqrt{\cos\theta-1}}}_{0}=1+\operatorname{sen}\beta$$

$$-1=\operatorname{sen}\beta \Rightarrow \beta = 270°$$

$$\therefore \boxed{\theta+\beta = 630°}$$

2. Siendo los ángulos α y θ ángulos cuadrantales, positivos y menores a una vuelta, tal que se cumple $\operatorname{sen}\alpha + \tan\theta = -1$, efectúe

$$F = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\csc(\alpha - \theta)}$$

Recordar:

RT \ ∢	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0

RESOLUCIÓN

Como $0° < \alpha$ y $\theta < 360°$ y $\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{-1} + \underbrace{\tan\theta}_{0} = -1$

$\theta = 180°$

$\alpha = 270°$

Reemplazando en F:

$$F = \frac{\operatorname{sen}90° + \cos 90°}{\csc 90°} \Rightarrow F = \frac{1 + 0}{1}$$

$\therefore \boxed{F = 1}$

3. Si para un ángulo α en posición estándar se cumple $\cot\alpha\sqrt{\cos\alpha} < 0$ indique el signo de: $P = \tan\alpha + \cot\alpha$ y $Q = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\cot\alpha}_{(-)}\underbrace{\sqrt{\cos\alpha}}_{(+)} < 0$$

Si $\cos\alpha > 0$ ➡ $\alpha \in IC \vee \alpha \in IVC$

Si $\cot\alpha < 0$ ➡ $\alpha \in IIC \vee \alpha \in IVC$

por lo tanto: **$\alpha \in IVC$**

Recordar:

sen, csc (+)	Todas las RT son (+)
tan, cot (+)	cos, sec (+)

Piden signo de:

$P = \underbrace{\tan\alpha}_{(-)} + \underbrace{\cot\alpha}_{(-)}$ ➡ $P = (-)$

$Q = \underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{(-)} \,.\, \underbrace{\cos\alpha}_{(+)}$ ➡ $Q = (-)$

$\therefore$ $\boxed{(-)\ ;\ (-)}$

4. Siendo θ un ángulo positivo y menor a una vuelta se cumple

$$\tan\theta \cdot \operatorname{sen}120° < 0 \qquad \cos\theta \cdot \tan 300° > 0$$

Indique el signo de sen2θ

RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\tan\theta}_{(-)} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}120°}_{(+)} < 0$$

$\theta \in$ IIC ∨ $\theta \in$ IVC

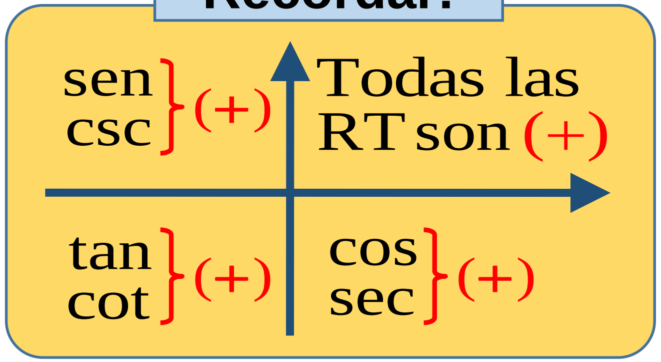
$$\underbrace{\cos\theta}_{(-)} \cdot \underbrace{\tan 300°}_{(-)} > 0$$

$\theta \in$ IIC ∨ $\theta \in$ IIIC

Así: $\theta \in$ IIC

$$\boxed{90° < \theta < 180°}$$

Recordar:



$$180° < \underbrace{2\theta}_{} < 360°$$

$2\theta \in$ IIIC ∨ IVC

∴ signo de **sen2θ** es (–)

SACO OLIVEROS

5. De la condición $\dfrac{\qquad + \qquad}{\qquad + \qquad} = \text{b.csc30° + a.tan360°}$. Calcule $\dfrac{a}{b}$

RESOLUCIÓN

$$\frac{a^2 sen90° + b^2 cos180°}{a + btan45°} = \text{bcsc30° + atan360°}$$

RECORDAR:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\frac{a^2(1) + b^2(-1)}{a + b(1)} = \text{b(2)} + \cancel{\text{a(0)}}$$

Recordar:

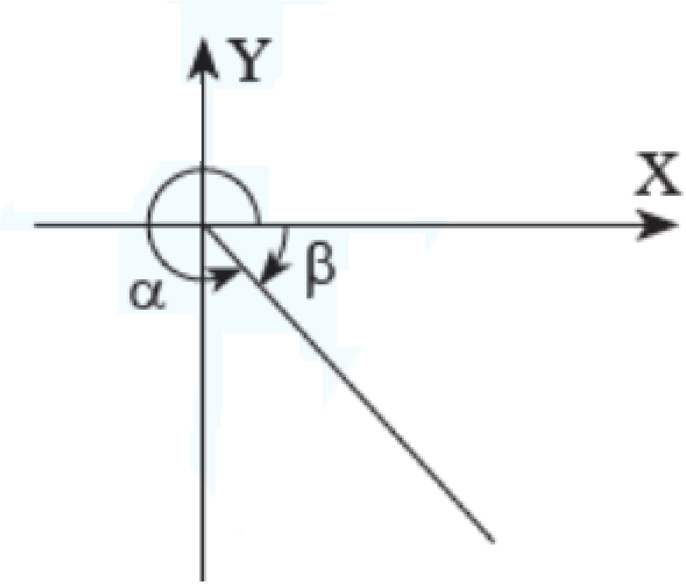
RT \ ∢	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0

$$\frac{a^2 - b^2}{a+b} = 2\text{b}$$

$$a = 3b \quad \therefore \quad \boxed{\frac{a}{b} = 3}$$

6. En la figura, se cumple que tanα.tanβ + senα.cscβ = 5. Calcule tanα

RESOLUCIÓN



α y β ∈ IVC

Del gráfico se observa que α y β son las medidas de dos ángulos coterminales, luego se cumple :

Rt (α)= Rt(β)

Del dato:

$$\tan\alpha.\tan\beta + \operatorname{sen}\alpha.\csc\beta = 5$$

$$\tan\alpha.\tan\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}\alpha.\csc\alpha}_{1} = 5$$

$$\tan^2\alpha + 1 = 5$$

$$\tan^2\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{4}$$

$$\tan\alpha = \pm 2$$

Como α ∈ IVC

$$\therefore \boxed{\tan\alpha = -2}$$

7. Si $\cos\phi = -8/17$, además $\phi \in \langle 180°;270° \rangle$, halle el valor de $\sec\phi + \tan\phi$.

RESOLUCIÓN

- **Como** $\phi \in \langle 180°; 270° \rangle$

  $\phi \in$ **IIIC** ➡ $x(-), y(-), r(+)$

- **Además:**

$$\cos\phi = \frac{-8}{17} = \frac{x}{r}$$

$$\cos\phi = \frac{x}{r}$$

Luego:

$x = -8$ y $r = 17$

Sabemos: $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$17 = \sqrt{(-8)^2 + y^2}$ ➡ $y = -15$

Piden: $E = \sec\phi + \tan\phi$

$$E = \frac{17}{-8} + \frac{-15}{-8}$$

$\therefore$ $\boxed{E = -\frac{1}{4}}$

8. Si $\operatorname{sen}\theta > 0$, además $25^{\tan\theta} = 0{,}2$; efectúe: $M = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

RESOLUCIÓN

Del dato:

$$25^{\tan\theta} = \frac{1}{5}$$

$$5^{2\tan\theta} = 5^{-1}$$

$$2\tan\theta = -1$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{2}$$

Como $\operatorname{sen}\theta$ es $(+)$ y $\tan\theta$ es $(-)$

$\boldsymbol{\theta \in \text{IIC}}$ ➡ $x(-), y(+), r(+)$

- $\tan\theta = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{y}{x}$ ➡ $x = -2\,,\, y = 1$

$r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2}$ ➡ $r = \sqrt{5}$

Piden: $M = \sqrt{5}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

$$M = \cancel{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} + \frac{-2}{\cancel{\sqrt{5}}}\right) = 1 - 2$$

Recordar: