MATHEMATICAL REASONING

Chapter 17

3rd
SECONDA
RY

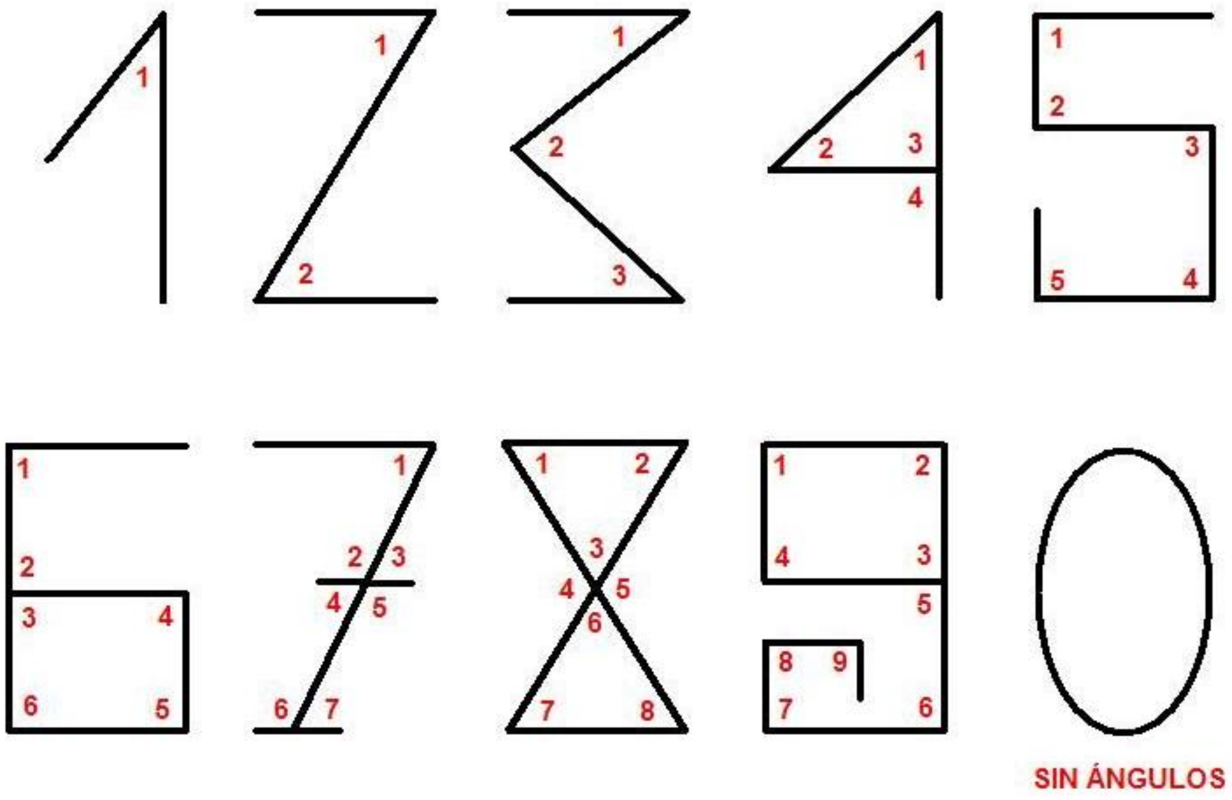
SERIES II

SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATION

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Lo que comúnmente hoy llamamos números, 1, 2, 3, 4, 5…, son las llamadas cifras arábigas. Anteriormente se utilizaban los números romanos, pero los árabes popularizaron estas cifras, aunque anteriormente habían sido utilizadas por los fenicios y en la India. Una apasionante curiosidad es la explicación de por qué 1 significa "uno", y 2 significa "dos"… es consecuencia de su número de ángulos….



HELICO THEORY

SERIE GEOMÉTRICA Es la adición indicada de los términos de una Sucesión Geométrica. Esta serie puede ser Finita o Infinita.

❑ SERIE GEOMÉTRICA FINITA

EN GENERAL

$$\boxed{S = \frac{t_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Donde, t_1 : Primer sumando

q : Razón geométrica

n : Cantidad de sumandos

Por Ejemplo

$$\overbrace{3 + 6 + 12 + 24 + \cdots}^{40 \text{ sumandos}}$$

x2 x2 x2

$$S = \frac{3(2^{40} - 1)}{2 - 1}$$

$$\therefore \quad S = 3(2^{40} - 1)$$

HELICO THEORY

SERIE GEOMÉTRICA

- SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINITA

EN GENERAL

$$S_{\infty} = \frac{t_1}{1 - q}$$

Donde, q : Razón geométrica

$$0 < |q| < 1$$

Por Ejemplo

$$S_{\infty} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

$\times\frac{1}{5}$ $\times\frac{1}{5}$ $\times\frac{1}{5}$

$$S_{\infty} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4}$$

HELICO THEORY

OTRAS SERIES NOTABLES

SERIE DE PRODUCTOS

❑ PRODUCTOS BINARIOS

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) \longrightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

❑ PRODUCTOS TERNARIOS

$$S_n = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1)\times(n+2)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

PROBLEMA 1

Halle el valor de R:

$$R = \underbrace{2 + 4 + 8 + 16 + \cdots}_{\text{30 términos}}$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Resolución:

$$R = \overbrace{2 + 4 + 8 + 16 + \cdots}^{\text{30 términos}}$$

x2 x2 x2

$$R = \frac{2(2^{30} - 1)}{2 - 1}$$

$$R = 2(2^{30} - 1)$$

$$R = 2^{31} - 2$$

$$\therefore \quad 2^{31} - 2$$

PROBLEMA 2

Calcule:

$$S = \underbrace{5 + 15 + 45 + 135 + \cdots}_{20\text{ términos}}$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Resolución:

$$S = \overbrace{5 + 15 + 45 + 135 + \cdots}^{20\text{ términos}}$$

x3 x3 x3

$$S = \frac{5(3^{20} - 1)}{3 - 1}$$

$$S = \frac{5(3^{20} - 1)}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{5(3^{20} - 1)}{2}$$

PROBLEMA 3

Efectué:

$$S = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \cdots \infty$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_\infty = \frac{t_1}{1-q}}$$

Resolución:

$$S_\infty = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \cdots \infty$$

$$\text{x}\frac{1}{6} \quad \text{x}\frac{1}{6} \quad \text{x}\frac{1}{6}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} \longrightarrow S_\infty = \frac{1}{\frac{5}{6}}$$

$$S_\infty = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{6}{5}$$

PROBLEMA 4

Calcule: $S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \cdots + 20\times 21$

Resolución:

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \cdots + 20\times 21 \longrightarrow n = 20$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

Remplazando

$$S = \frac{20(\cancel{21}^{7})(22)}{\cancel{3}} \longrightarrow S = 140(22)$$

$$S = 3080$$

$$\therefore\ 3080$$

PROBLEMA 5

Juan Carlos es el papá de Karen. Éste le propone a su hija que por el primer problema que resuelva le dará un céntimo, por el segundo 3 céntimos, por el tercero 9 céntimos, por el cuarto 27 céntimos y así sucesivamente. Si Juan Carlos tuvo que pagar por 30 problemas que resolvió su hija, podría usted decir, ¿cuánto dinero pagó?

RECORDEMOS:

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Resolución:

$$S = \overbrace{1 + 3 + 9 + 27 + \cdots}^{30 \text{ sumandos}}$$

x3 x3 x3

$$S = \frac{1(3^{30} - 1)}{3 - 1}$$

$$S = \frac{(3^{30} - 1)}{2}$$

$$\therefore \frac{(3^{30} - 1)}{2} \text{ céntimos}$$

PROBLEMA 6

Roxana está resolviendo su balotario mensual y tiene mucha dificultad con este problema: Halle el valor de la serie:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \cdots \infty$$

¿Cuál fue la respuesta de Roxana

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_\infty = \frac{t_1}{1-q}}$$

Resolución:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \cdots \infty$$

$$\text{x}\frac{1}{5} \quad \text{x}\frac{1}{5} \quad \text{x}\frac{1}{5} \quad \text{x}\frac{1}{5}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \longrightarrow S_\infty = \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$S_\infty = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{4}$$

PROBLEMA 7

El profesor Ronald propone el siguiente problema en la pizarra: Efectúe:

$$S=\frac{8}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{128}+\cdots\infty$$

diciéndoles a sus alumnos que el primer alumno que resuelva correctamente el problema será exonerado del examen bimestral. Si Enrique, que es uno de sus mejores alumnos, quedó exonerado, podría usted decir, ¿qué respuesta dio?

Hallando la razón geométrica:

$$q=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}} \longrightarrow q=\frac{6}{8} \longrightarrow q=\frac{3}{4}$$

Resolución:

$$S=\frac{8}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{128}+\cdots\infty$$

$$\times\frac{3}{4}\quad \times\frac{3}{4}\quad \times\frac{3}{4}\quad \times\frac{3}{4}\quad \times\frac{3}{4}$$

$$S_\infty=\frac{\frac{8}{27}}{1-\frac{3}{4}} \longrightarrow S_\infty=\frac{\frac{8}{27}}{\frac{1}{4}}$$

$$S_\infty=\frac{32}{27}$$

$$\therefore \frac{32}{27}$$

PROBLEMA 8

Para un examen de selección de alumnos para formar un círculo de estudios se propone la siguiente pregunta de series:

Halle el valor de la suma límite de la siguiente serie geométrica decreciente:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots \infty$$

Qué respuesta dieron los alumnos?

Hallando la razón geométrica:

$$q = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} \longrightarrow q = -\frac{4}{8} \longrightarrow q = -\frac{1}{2}$$

Resolución:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots \infty$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \times\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \times\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \times\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \longrightarrow S_\infty = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \frac{2}{3}$$

OTRA FORMA:

Para un examen de selección de alumnos para formar un círculo de estudios se propone la siguiente pregunta de series:

Halle el valor de la suma límite de la siguiente serie geométrica decreciente:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots \infty$$

Qué respuesta dieron los alumnos?

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_\infty = \frac{t_1}{1 - q}}$$

Resolución:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \cdots \infty$$

$$S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots \infty$$

$$\times\frac{1}{4} \qquad \times\frac{1}{4} \qquad \times\frac{1}{4}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} \longrightarrow S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$$

$$S_\infty = \frac{4}{6}$$

$$\therefore \frac{2}{3}$$