ALGEBRA

Chapter 11
5th

NÚMEROS COMPLEJOS

SACO OLIVEROS

Helicomotivación

APLICACIONES EN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

ABRIR ENLACE:

https://youtu.be/zu4VplA9kks

NÚMEROS COMPLEJOS

I) UNIDAD IMAGINARIA

$$i = \sqrt{-1}$$

Ejemplos:

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = 3i$
- $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = 5i$

II) POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Se cumple:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

donde: $k \in enteros$

Ejemplos:

- $i^{23} = i^{20+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{201} = i^{200+1} = i^{4k+1} = i$

III) NÚMEROS COMPLEJOS

$a, b \in Reales$

Definición:

$$z = (a; b) = a + bi \;/ i = \sqrt{-1}$$

Donde:

- *Parte real:* $Re(Z) = a$
- *Parte imaginaria:* $Im(Z) = b$

Ejemplo:

- $z = (3; 2) = 3 + 2i$

$Re(Z) = 3$

$Im(Z) = 2$

Definiciones:

Donde: $a, b \in Reales$

Sea: $z = a + bi, entonces\ se\ define$

1. $complejo\ conjugado\ (\bar{z}): \quad \bar{z} = a - bi$
2. $complejo\ opuesto (z^*): \quad z^* = -a - bi$

Ejemplos:

$$z = 3 - 4i \Rightarrow \bar{z} = 3 + 4i$$

$$z = 3 - 4i \Rightarrow z^* = -3 + 4i$$

Operaciones con Números complejos

Adición y sustracción

Ejemplo:

- $z_1 = 2 + 4i$
  $z_2 = 3 + 2i$ $+$

$$z_1 + z_2 = 5 + 6i$$

- $z_1 = 2 + 4i$
  $z_2 = 3 + 2i$ $-$

$$z_1 - z_2 = -1 + 2i$$

Multiplicación

Sea: $z_1 = 2 + 4i$
$z_2 = 3 + 2i$

$$z_1 . z_2 = (2 + 4i)(3 + 2i)$$

$$z_1 . z_2 = 6 + 4i + 12i + \underbrace{8i^2}_{\boxed{-8}}$$

$$z_1 . z_2 = -2 + 16i$$

OBSERVACIÓN:

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

División:

$$z = \frac{2+4i}{3-2i}$$

$$z = \frac{(2+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$z = \frac{-2+16i}{13} = \frac{-2}{13} + \frac{16}{13}i$$

Módulo de un complejo

Sea el número complejo:

$$z = a + bi$$

Módulo de z : $|z|$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; |z| \geq 0$$

Resultados Importantes:

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i}=i}$$

$$\boxed{\frac{1-i}{1+i}=-i}$$

$$\boxed{(1+i)^2=2i}$$

$$\boxed{(1-i)^2=-2i}$$

$$\boxed{(1\pm i)^4=-4}$$

$$\frac{a+bi}{n+mi}\rightarrow \mathbb{C}.\ \textit{imaginario puro}$$

$$\textit{se cumple: }\frac{a}{m}=-\frac{b}{n}$$

$$\frac{a+bi}{n+mi}\rightarrow \textit{complejo real}$$

$$\textit{se cumple: }\frac{a}{n}=\frac{b}{m}$$

PROBLEMA 1

Sean los números complejos:

$$z_1 = -3 + 8i \qquad z_2 = 5 - 7i$$

$Halle\ la\ parte\ real\ de: z_2 - z_1$

Resolución

$$z_2 - z_1 = (5 - 7i) - (-3 + 8i)$$

$$z_2 - z_1 = 8 - 15i$$

$$\boxed{Re(z_2 - z_1) = 8}$$

PROBLEMA 2

Si: $z_1 = 3 - 2i \qquad z_2 = \overline{z_1} - 3i$

Calcule el valor de $Im(z_1.z_2)$

Resolución

$\boxed{z_1 = 3 - 2i} \Rightarrow \boxed{\overline{z_1} = 3 + 2i}$

$\Rightarrow z_2 = 3 + 2i - 3i$

$\Rightarrow \boxed{z_2 = 3 - i}$

$\Rightarrow z_1.z_2 = (3 - 2i)(3 - i)$

$\Rightarrow z_1.z_2 = 9 - 3i - 6i + 2i^2$

Pero: $i^2 = -1$

$\Rightarrow z_1.z_2 = 7 - 9i$

$\Rightarrow \boxed{Im(z_1.z_2) = -9}$

PROBLEMA 3

En la igualdad: $(2+3i)x+(1-2i)y=14+8i$

Además {x,y}⊂ R. Determine x/y

Resolución

$$2x+3ix+y-2iy=14+8i$$

$$(2x+y)+(3x-2y)i=14+8i$$

$$\begin{cases}2x+y=14\\3x-2y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x+2y=28\\3x-2y=8\end{cases}$$

$$7x=36$$

$$x=36/7$$

$$y=26/7$$

$$Piden: x/y$$

$$\Rightarrow x/y=36/26$$

$$x/y=18/13$$

PROBLEMA 4

Halle el valor de m para que el complejo:

$z = \frac{m+3i}{2-5i}$ sea imaginario puro

Resolución

$Si: z = \frac{a+bi}{c+di}$ es imaginario puro : $\frac{a}{d} = -\frac{b}{c}$

Por dato se cumple:

$$\frac{m}{-5} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m = \frac{15}{2}}$$

PROBLEMA 5

Reduzca:

$$M = \frac{i^{16} + 5i^{21} + 4i^{43} + i^{81}}{2i^{440} - i^{320}}$$

$$i^{4k} = 1$$
$$i^{4k+1} = i$$
$$i^{4k+2} = -1$$
$$i^{4k+3} = -i$$

Resolución

$$M = \frac{i^{4k} + 5i^{4k+1} + 4i^{4k+3} + i^{4k+1}}{2i^{4k} - i^{4k}}$$

$$M = \frac{(1) + 5(i) + 4(-i) + (i)}{2(1) - (1)} = 1 + 2i$$

PROBLEMA 6

De la igualdad: $asumiendo\ x, y \in R$

$$(1+i)^2+(1+i)^4+(1+i)^6+(1+i)^8=x+yi$$

Efectúe: P= $\dfrac{x+y}{x-y}$

Resolución

$$(1+i)^4=-4$$

$$(1+i)^2=2i$$

$$(1+i)^6=(1+i)^2(1+i)^4=(2i)(-4)=-8i$$

$$(1+i)^8=(1+i)^4(1+i)^4=(-4)(-4)=16$$

$$\boldsymbol{Reemplazando}:$$

$$\underset{Im}{2i}+\underset{Re}{-4}+\underset{Im}{-8i}+\underset{Re}{16}=12-6i=x+yi$$

$$\begin{cases} x=12 \\ y=-6 \end{cases}$$

$$P=\frac{(12)+(-6)}{(12)-(-6)}=1/3$$

PROBLEMA 7

La edad de Ricardo hace 10 años está dado por 5M, donde M se calcula al resolver: $\frac{M}{17}=\frac{5+3i}{5-3i}-\frac{3+5i}{3-5i}$

¿ Cuál es la edad de Ricardo?

Resolución

$$(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

$$\frac{5+3i}{5-3i}\cdot\frac{5+3i}{5+3i} \qquad \frac{3+5i}{3-5i}\cdot\frac{3+5i}{3+5i}$$

$$\frac{(5+3i)^2}{5^2+3^2} \qquad \frac{(3+5i)^2}{3^2+5^2}$$

$$\frac{25+30i-9}{25+9} \qquad \frac{9+30i-25}{9+25}$$

$$\frac{16+30i}{34} \qquad \frac{-16+30i}{34}$$

$$\frac{M}{17}=\frac{8+\cancel{15i}}{17}-\frac{-8+\cancel{15i}}{17}$$

$$\frac{M}{17}=\frac{16}{17}$$

$$M=16$$

HACE 10 años	ACTUALMENTE
80 años	90 años

PROBLEMA 8

Simplifique: $E = \dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}}}}$

Si: $i = \sqrt{-1}$

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

Resolución

$$E = \frac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}}} = \frac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}} = \frac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}$$

$$E = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\boxed{\therefore E = i}$$