GEOMETRÍA

Capítulo 24

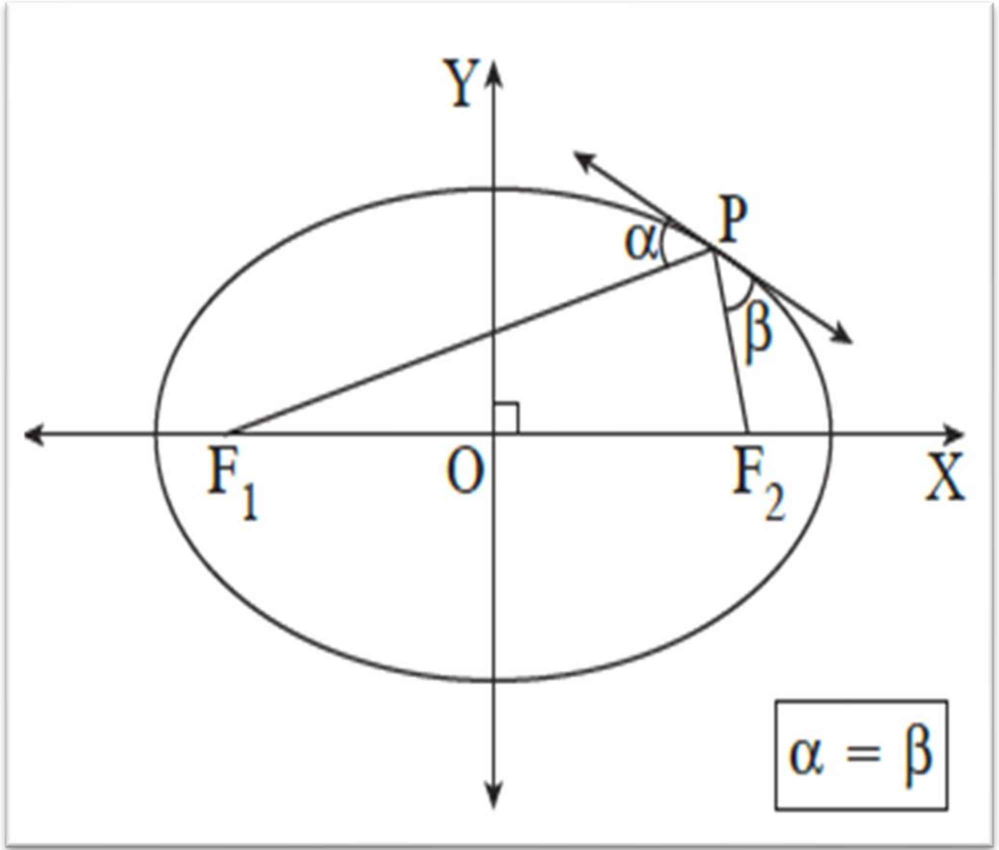
5st
SECONDARY

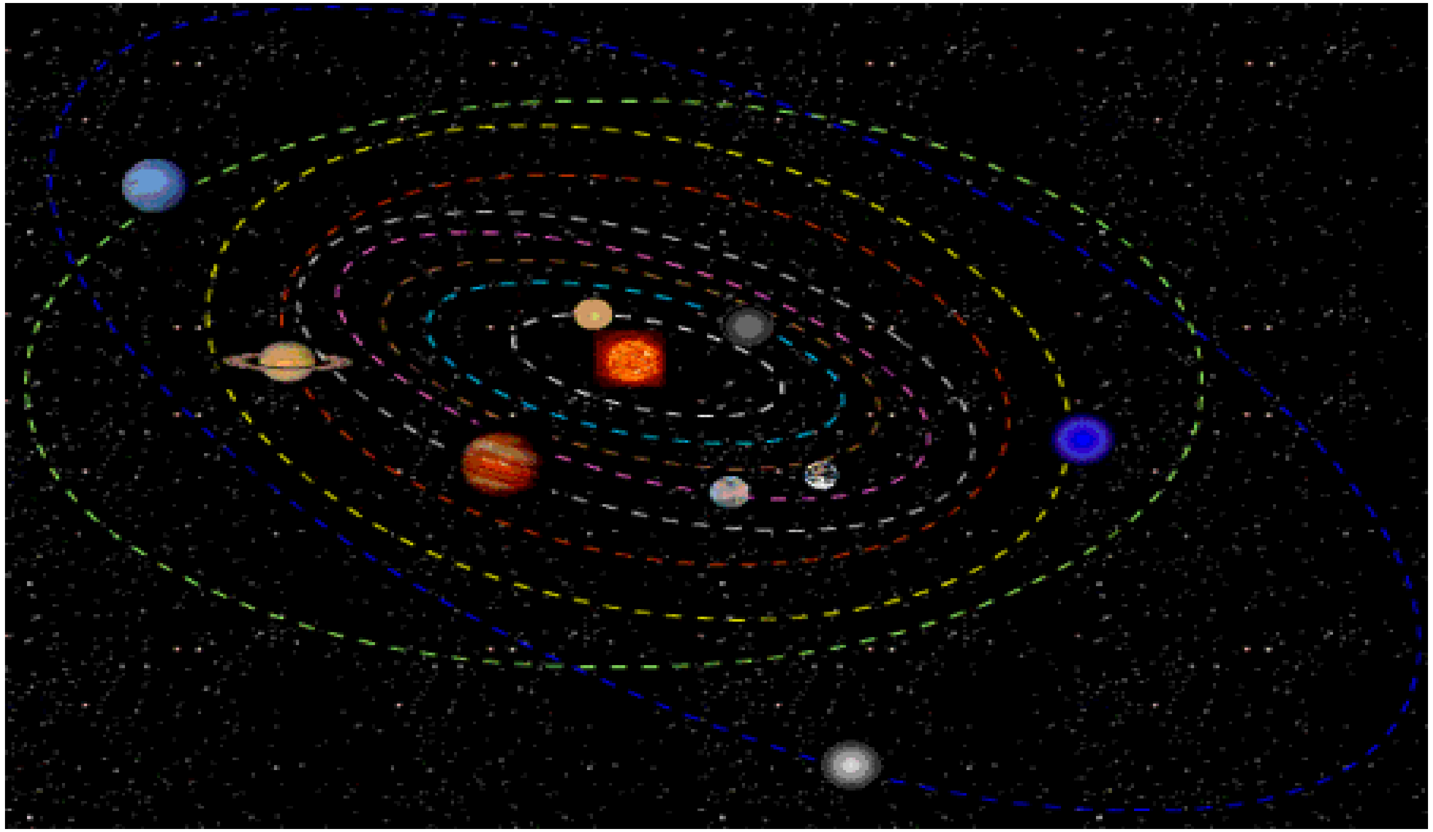
ECUACIÓN DE LA ELIPSE

SACO OLIVEROS

Aplicaciones de una elipse

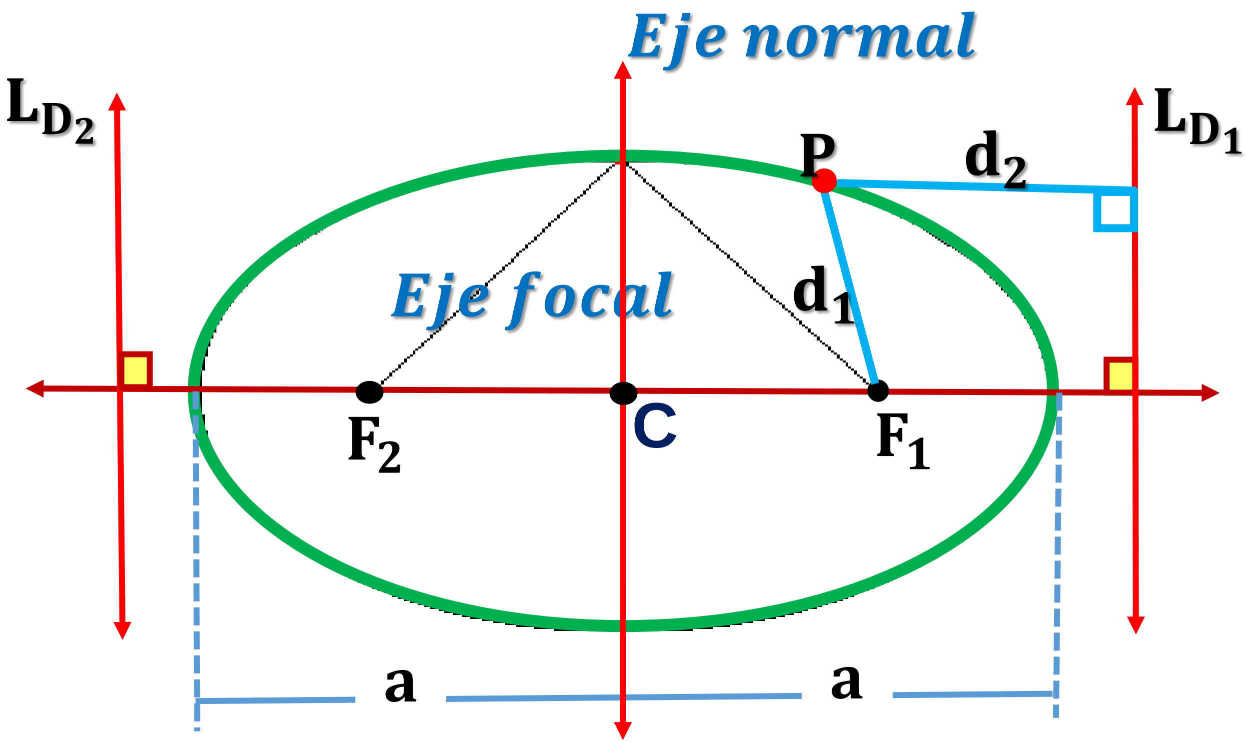
La elipse tiene una propiedad muy interesante: Si unimos cualquier punto P, de la elipse con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto son iguales. Esta propiedad se utiliza en construcción de espejos (de luz y sonido), pues por la emisión de luz o sonido, desde uno de los focos se refleja en el otro foco.





ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Dados dos puntos fijos F1 y F2 distintos, denominados focos, se define la elipse como el lugar geométrico del conjunto de puntos P(x ; y) tales que la suma de distancias de P a los focos F1 y F2 es igual a una constante convencional 2a.

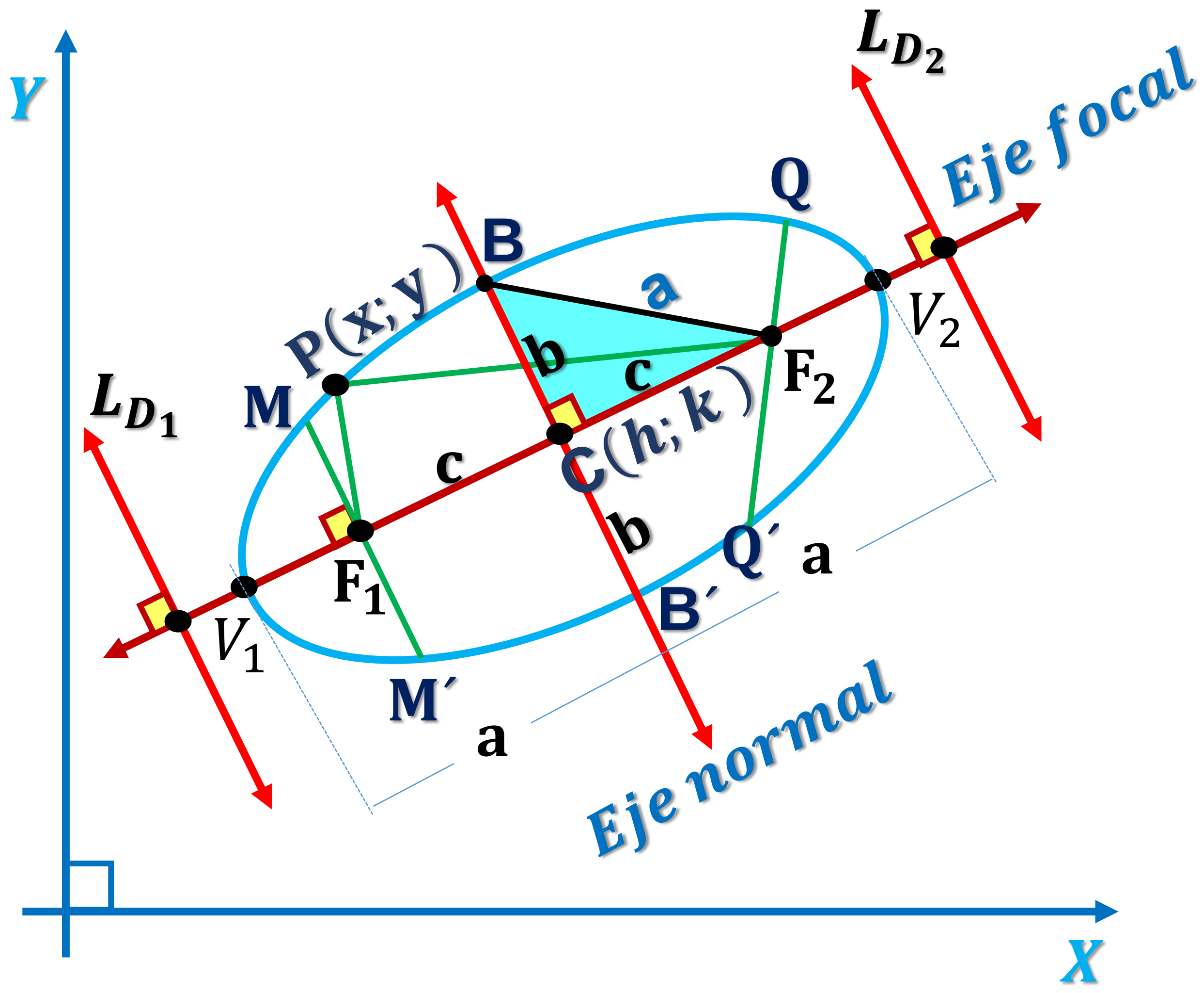


Por definición de cónica se tiene

$$\frac{d(P; F_1)}{d(P; L_{D_1})} = e$$

Donde e es la excentricidad de la elipse y se demuestra que siempre es menor que uno (e < 1).

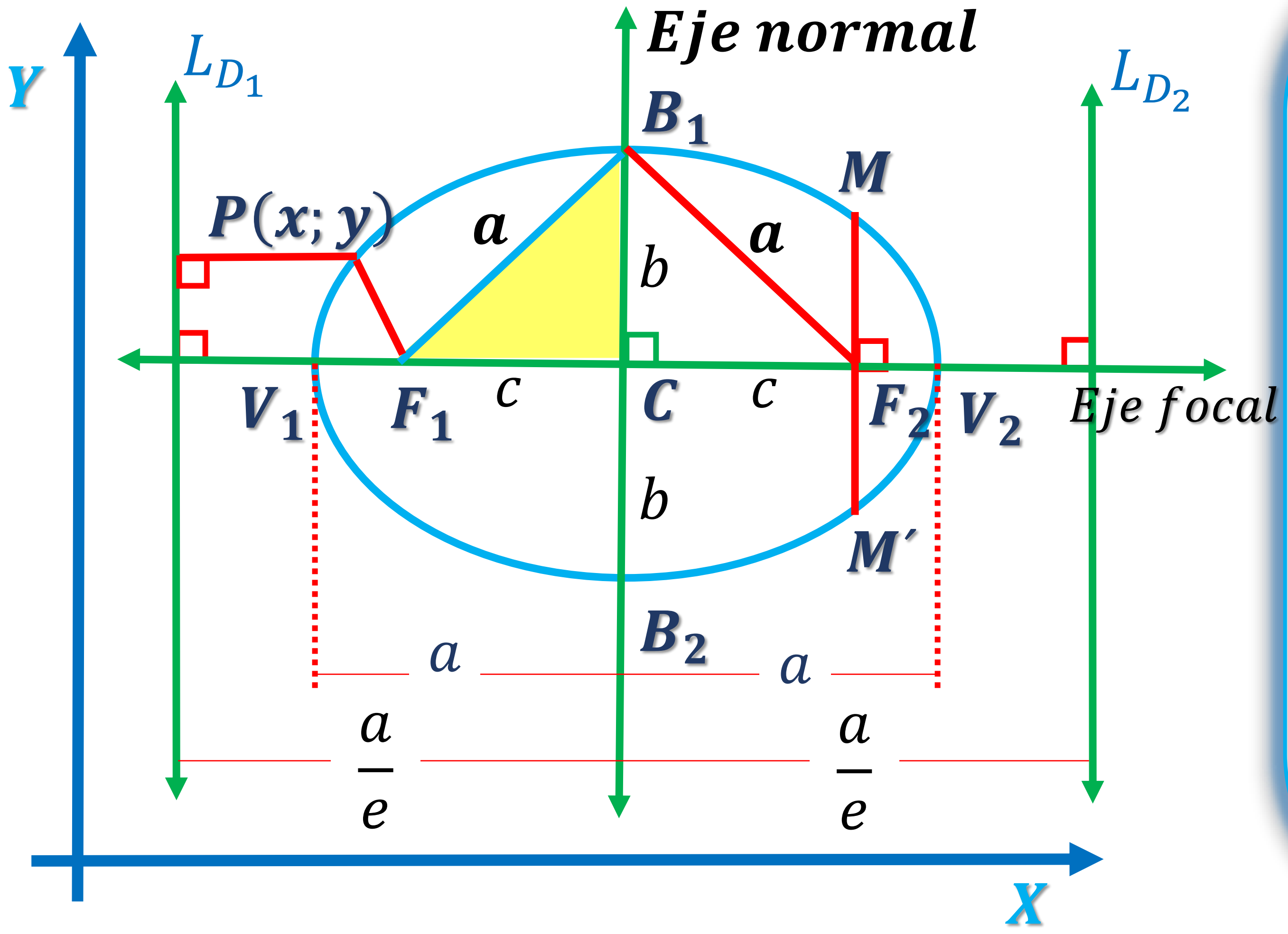
Elementos asociados a la Elipse



- FOCOS : F_1 y F_2 $(F_1F_2 = 2c)$
- CENTRO : $C(h;k)$
- Vértices de la elipse : V_1 y V_2
- Eje mayor : $\overline{V_1V_2}$ $(V_1V_2 = 2a)$
- Eje menor : $\overline{B_1B_2}$ $(B_1B_2 = 2b)$
- CUERDA FOCAL : $\overline{QQ'}$
- LADO RECTO : $\overline{MM'}$
- DIRECTRICES : $\overleftrightarrow{L_{D_1}}$ y $\overleftrightarrow{L_{D_2}}$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

Propiedades básicas de la elipse



1. $d(B_1;F_1) = d(B_1;F_2) = a$

   $d(B_2;F_1) = d(B_2;F_2) = a$

2. $d(C;L_1) = d(C;L_2) = \dfrac{a}{e}$

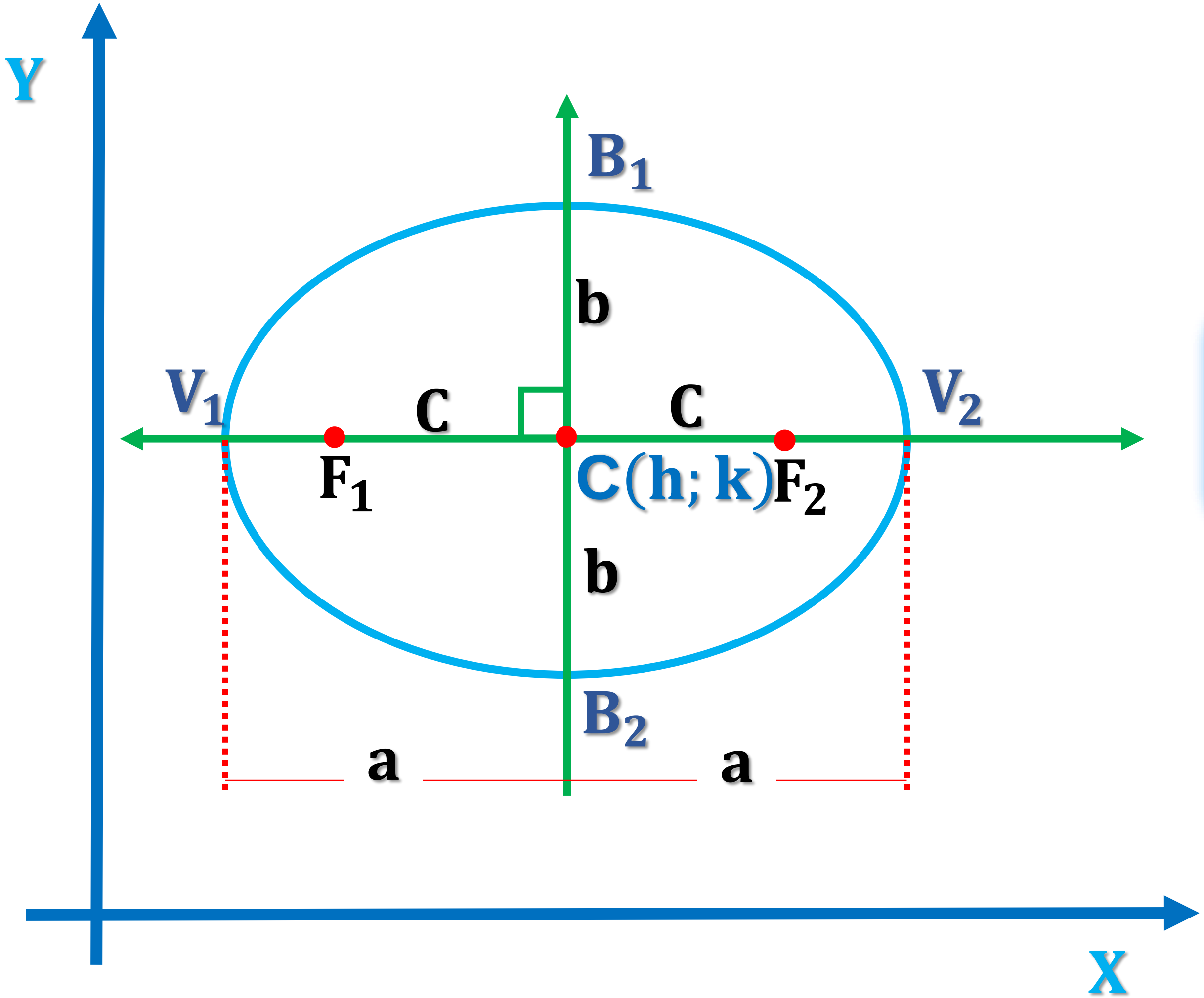
3. $c = ae$

4. $a^2 = b^2 + c^2$

5. $0 < e < 1$ ó $e = \dfrac{c}{a} < 1$

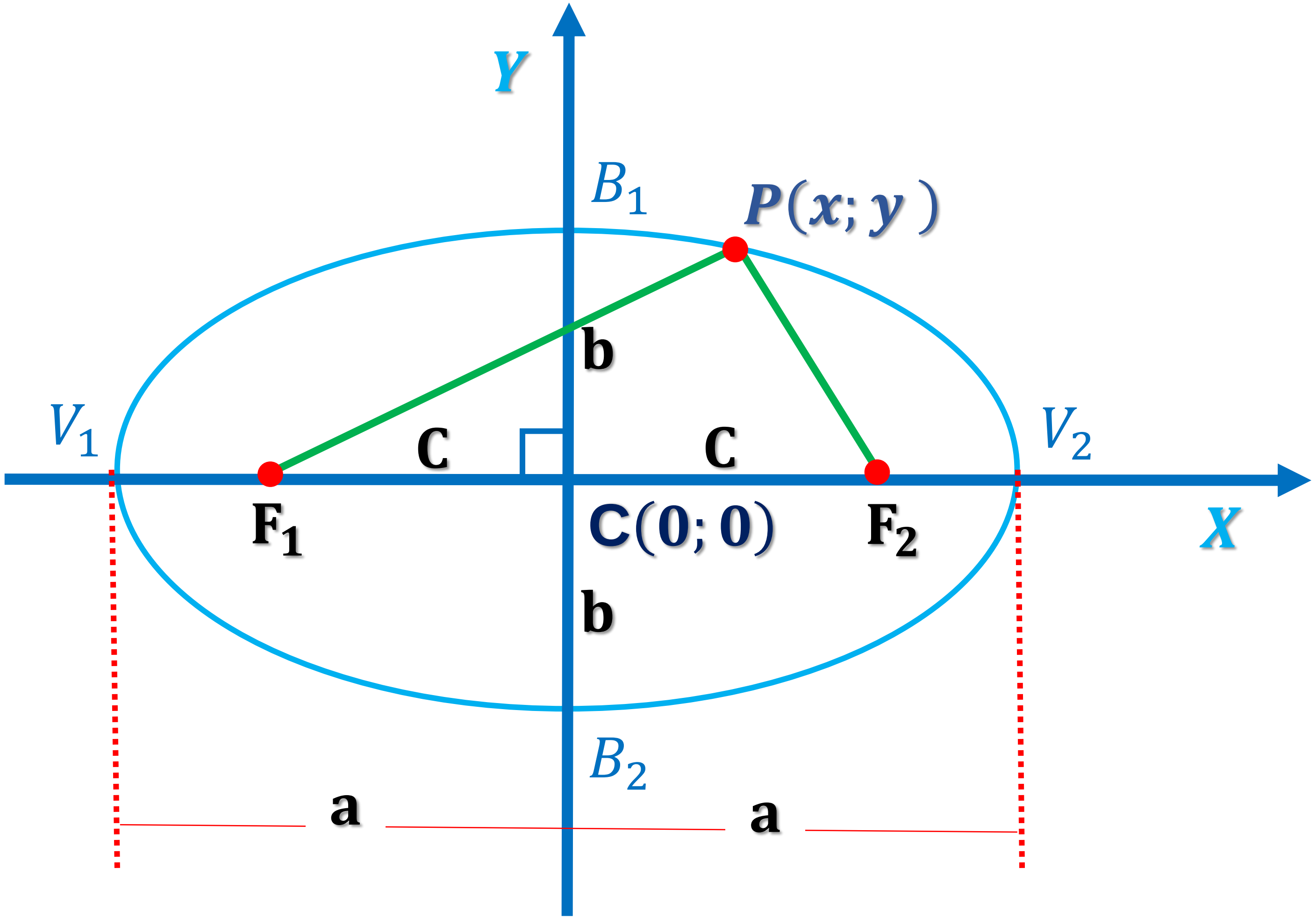
6. $Lado\ recto(MM') = \dfrac{2b^2}{a}$

Ecuación de la elipse con eje paralelo al eje X



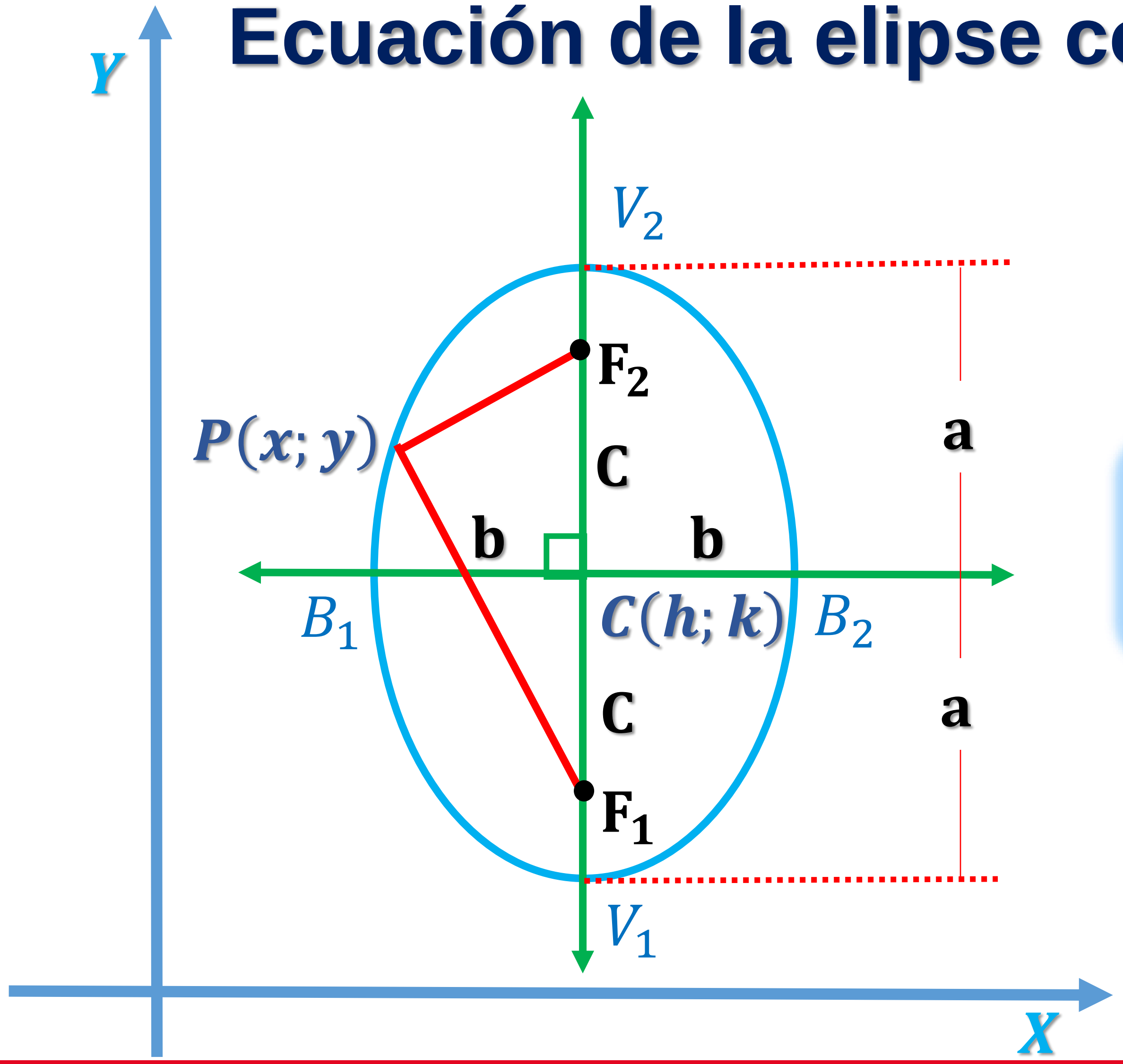
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la elipse con eje focal en el eje X



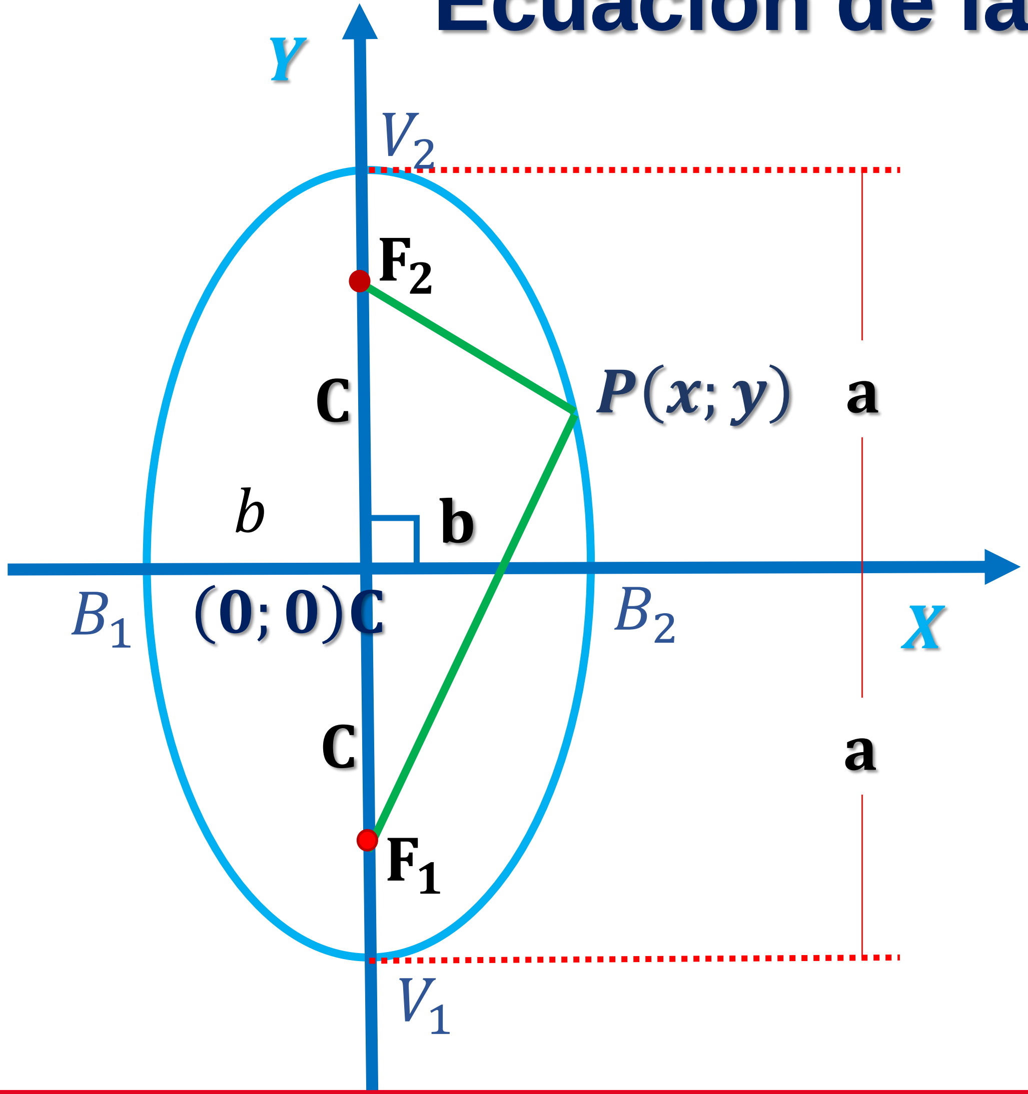
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la elipse con eje focal paralelo el eje Y



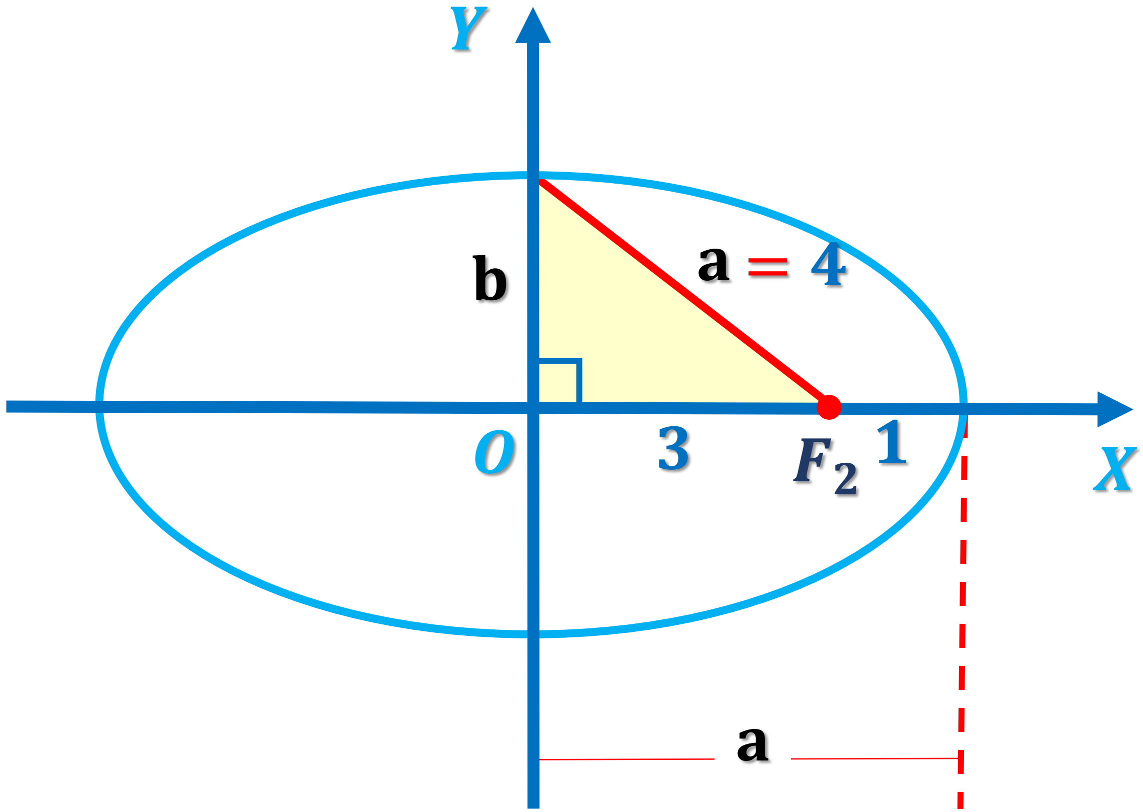
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

1. Halle la ecuación de la elipse de foco F_2.



Resolución

- Piden: La ecuación de la elipse.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$a = 4$

- Por teorema de Pitágoras.

$$3^2+b^2=4^2$$

$$b=\sqrt{7}$$

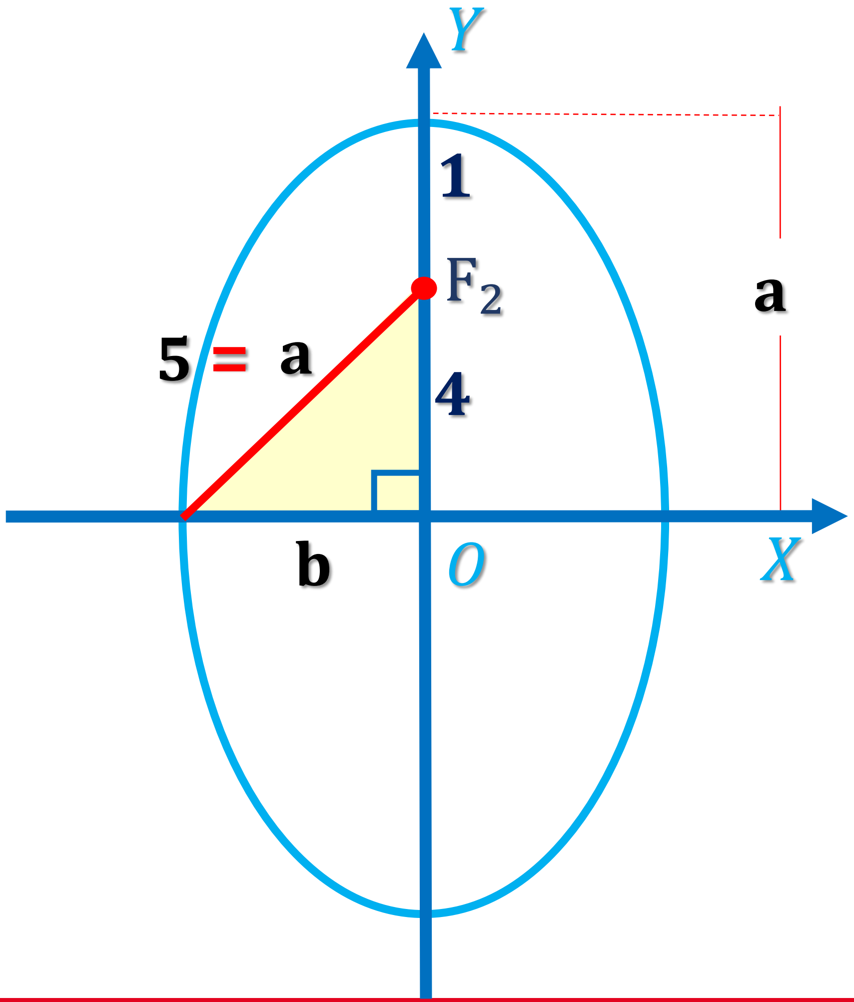
- Reemplazando.

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{\sqrt{7}^2}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1}$$

2. Halle la ecuación de la elipse de foco F_2.

Resolución



- Piden: La ecuación de la elipse.

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

$a = 5$

- Por teorema de Pitágoras.

$$4^2 + b^2 = 5^2$$

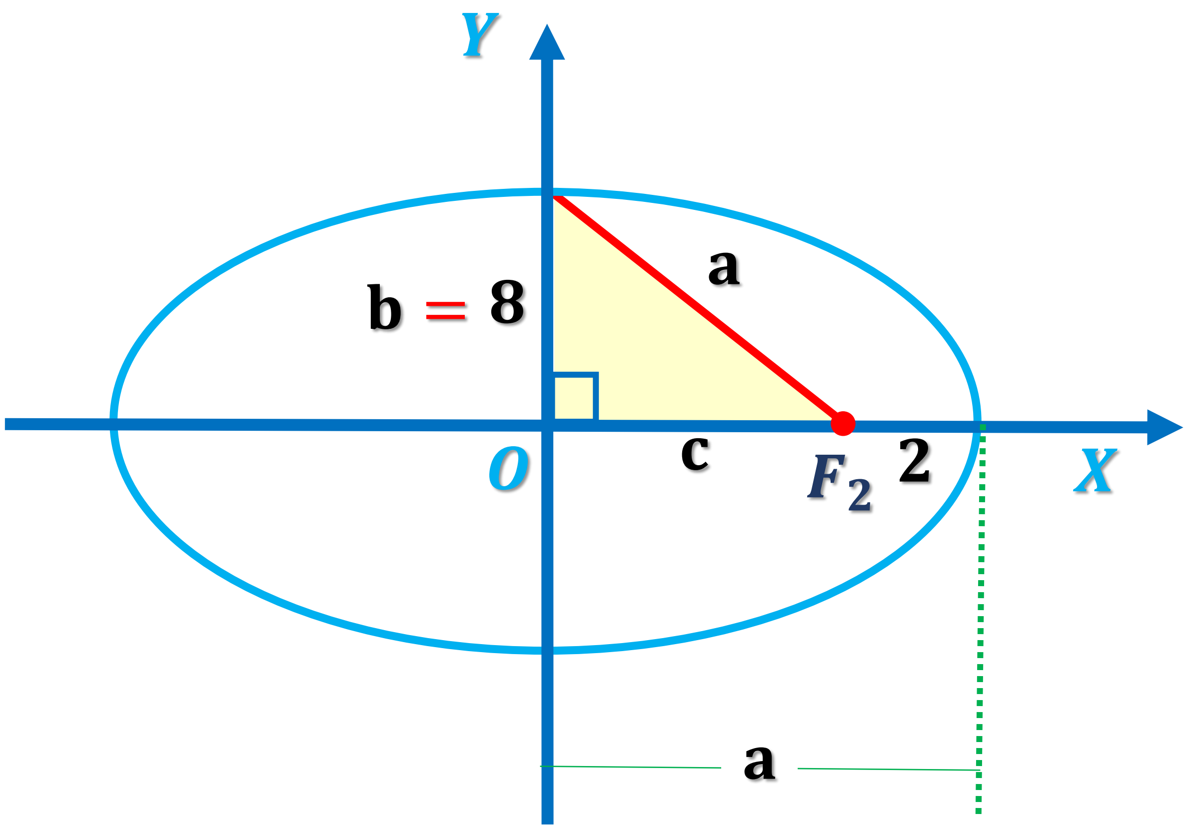
$b = 3$

- Remplazando.

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$$

3. Determine la excentricidad de la elipse de foco F_2.



Resolución

- **Piden: La excentricidad.**

$$e = \frac{c}{a}$$

- **Por teorema de Pitágoras.**

$$8^2 + c^2 = a^2$$

$$8^2 + c^2 = (c+2)^2$$

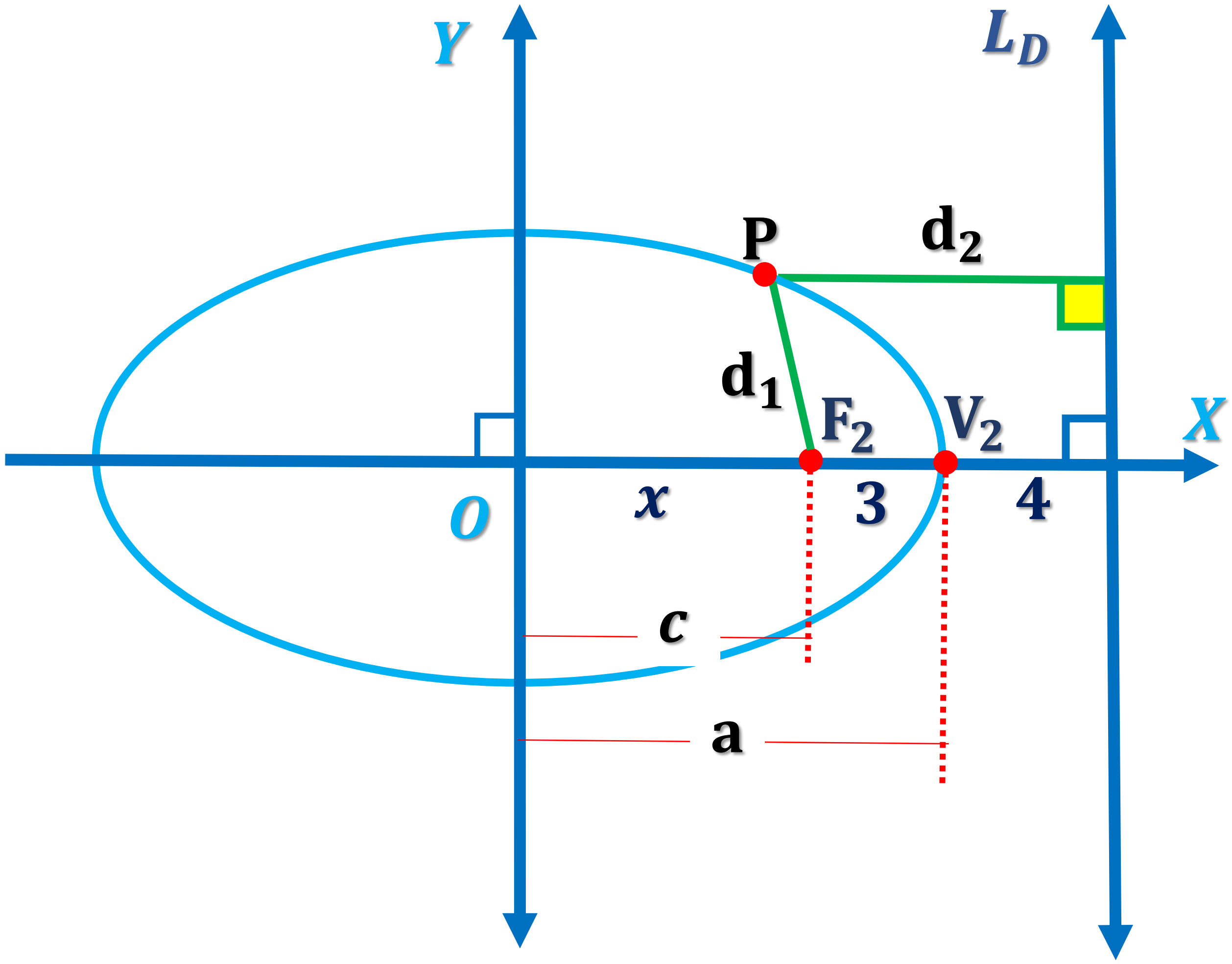
$$c = 15$$

$$a = 17$$

- **Reemplazando.**

$$e = \frac{15}{17}$$

4. Halle el valor de x, si en la elipse: F_2 es foco y L_D es directriz.



Resolución

- Piden: x.
- Por excentricidad:

$$e = \frac{c}{a} \qquad e = \frac{d_1}{d_2}$$

- Remplazando.

$$e = \frac{x}{x+3} \qquad e = \frac{3}{4}$$

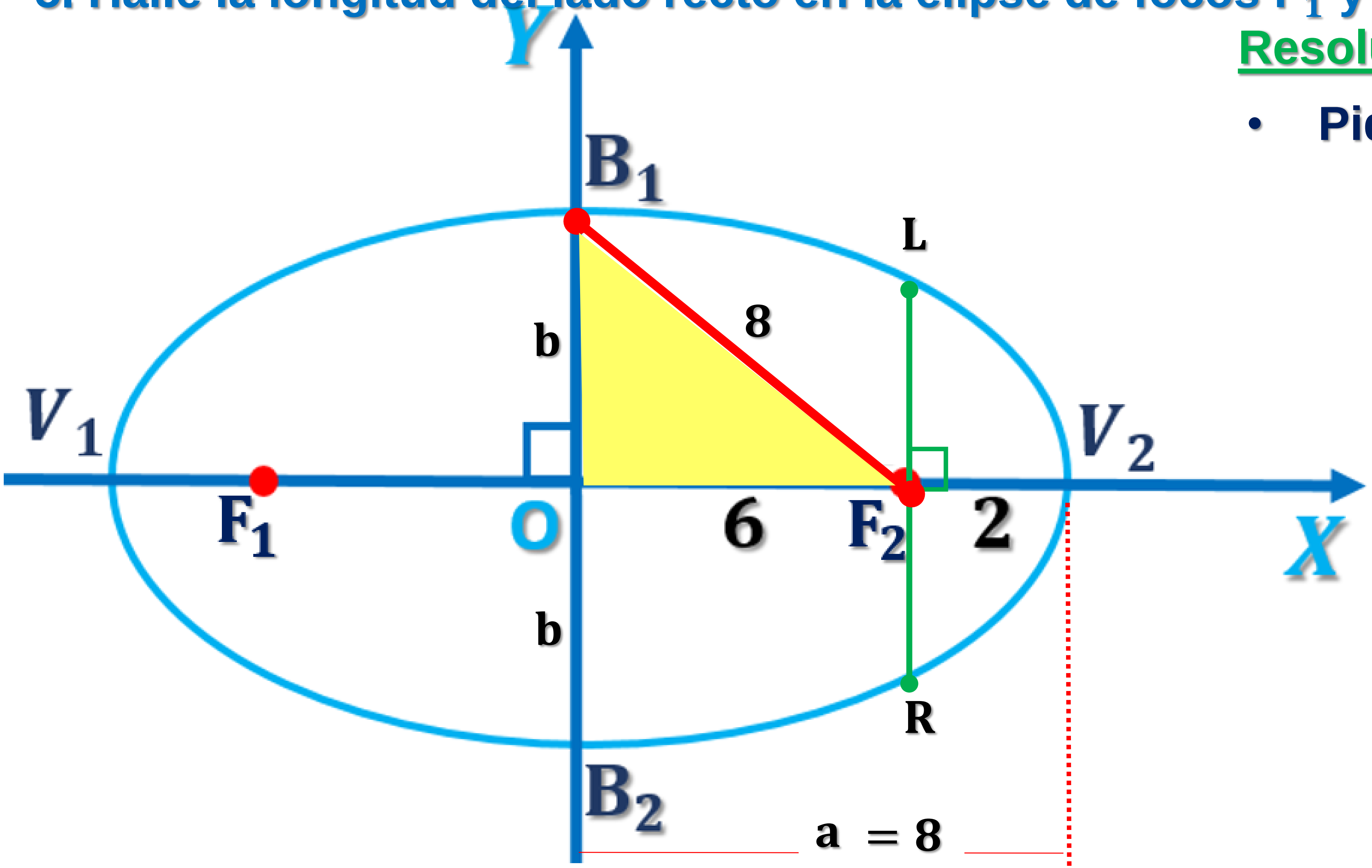
- Igualando.

$$\frac{x}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3x + 9$$

$$\boxed{x = 9}$$

5. Halle la longitud del lado recto en la elipse de focos F_1 y F_2.



Resolución

- Piden: LR.

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$b^2 + 6^2 = 8^2$$

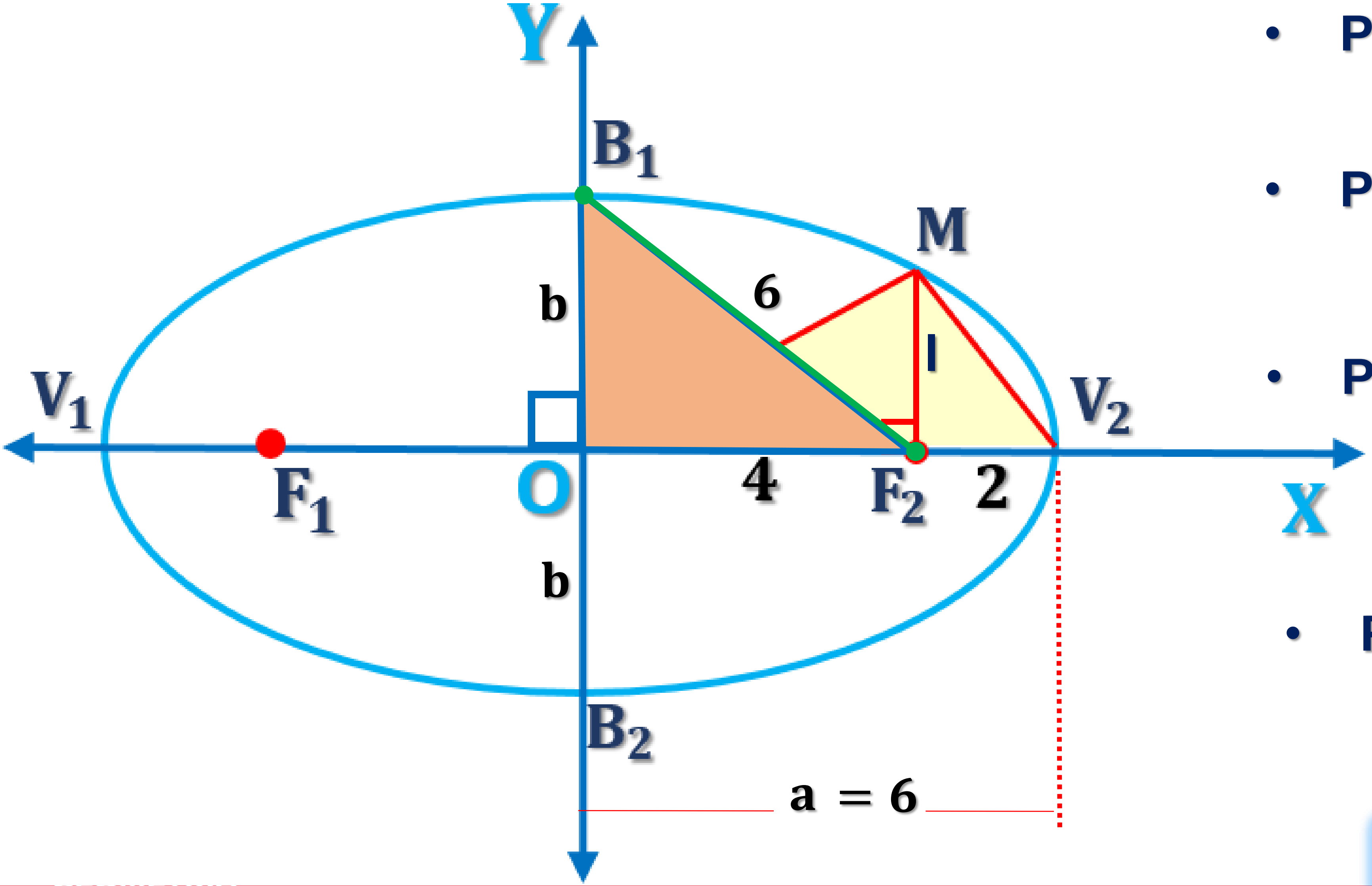
$$b^2 + 36 = 64$$

$$b^2 = 28$$

$$LR = \frac{2(28)}{8}$$

$$\boxed{LR = 7}$$

6. Calcule el área de la región sombreada, si F_1 y F_2 son focos de la elipse.



Resolución

- Piden: S.

$$S = \frac{1}{2}(6)(l) \quad \dots (1)$$

- Por teorema de Pitágoras:

$$b^2 + 4^2 = 6^2$$

$$b^2 + 16 = 36 \qquad b^2 = 20$$

- Por teorema:

$$l = \frac{b^2}{a} = \frac{20}{6}$$

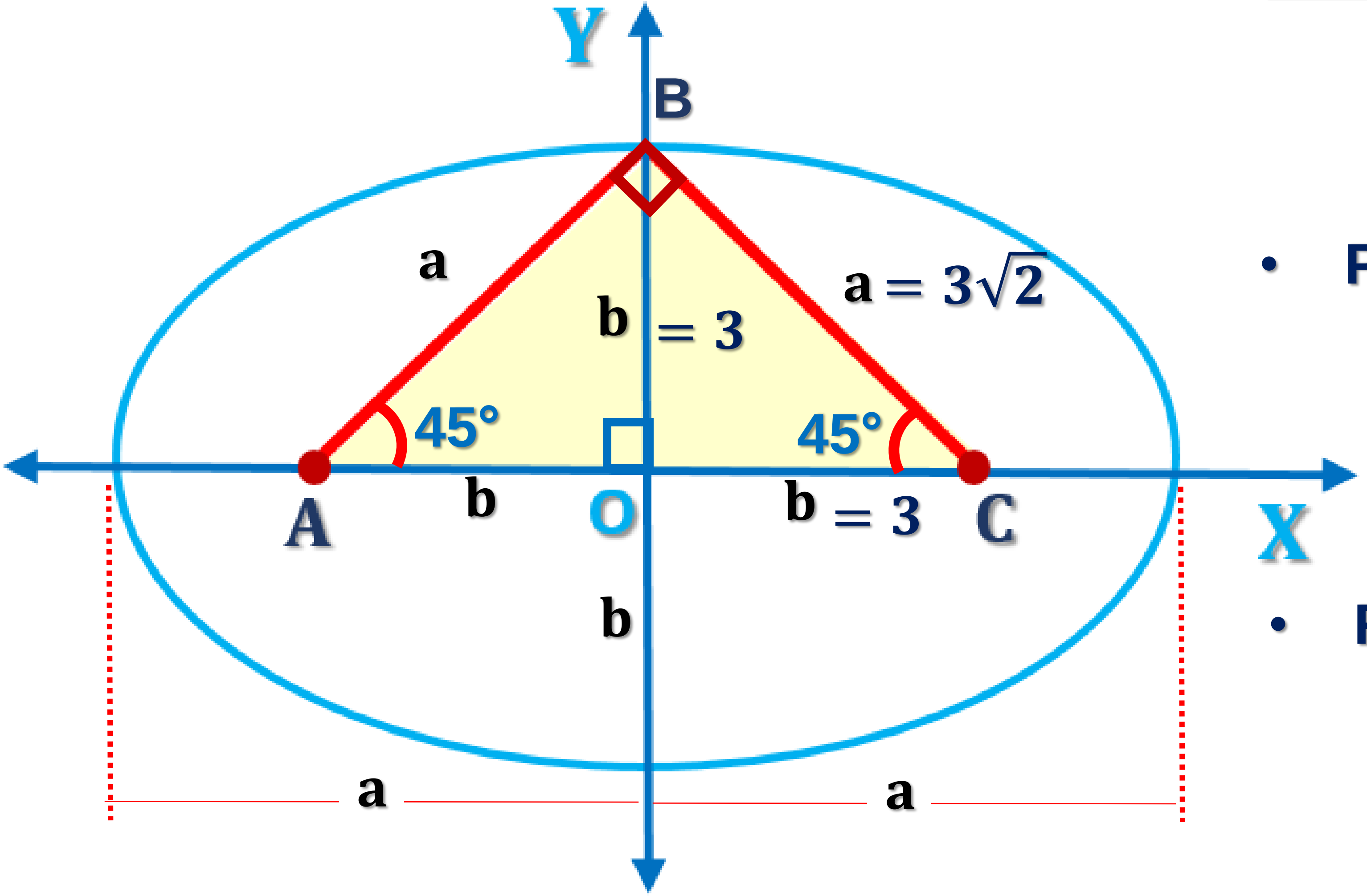
$$l = \frac{10}{3} \quad \dots (2)$$

- Reemplazando 2 en 1.

$$S = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{6})\left(\frac{10}{\cancel{3}}\right)$$

$$\boxed{S = 10\ u^2}$$

7. Halle la ecuación de la elipse, si A y C son focos y el área de la región ABC es $9\ u^2$.



Resolución

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- **Por dato:**

$$S_{ABC}=9\ u^2$$

$$\frac{(\cancel{2}b)(b)}{\cancel{2}}=9 \Rightarrow b^2=9$$

$$b=3$$

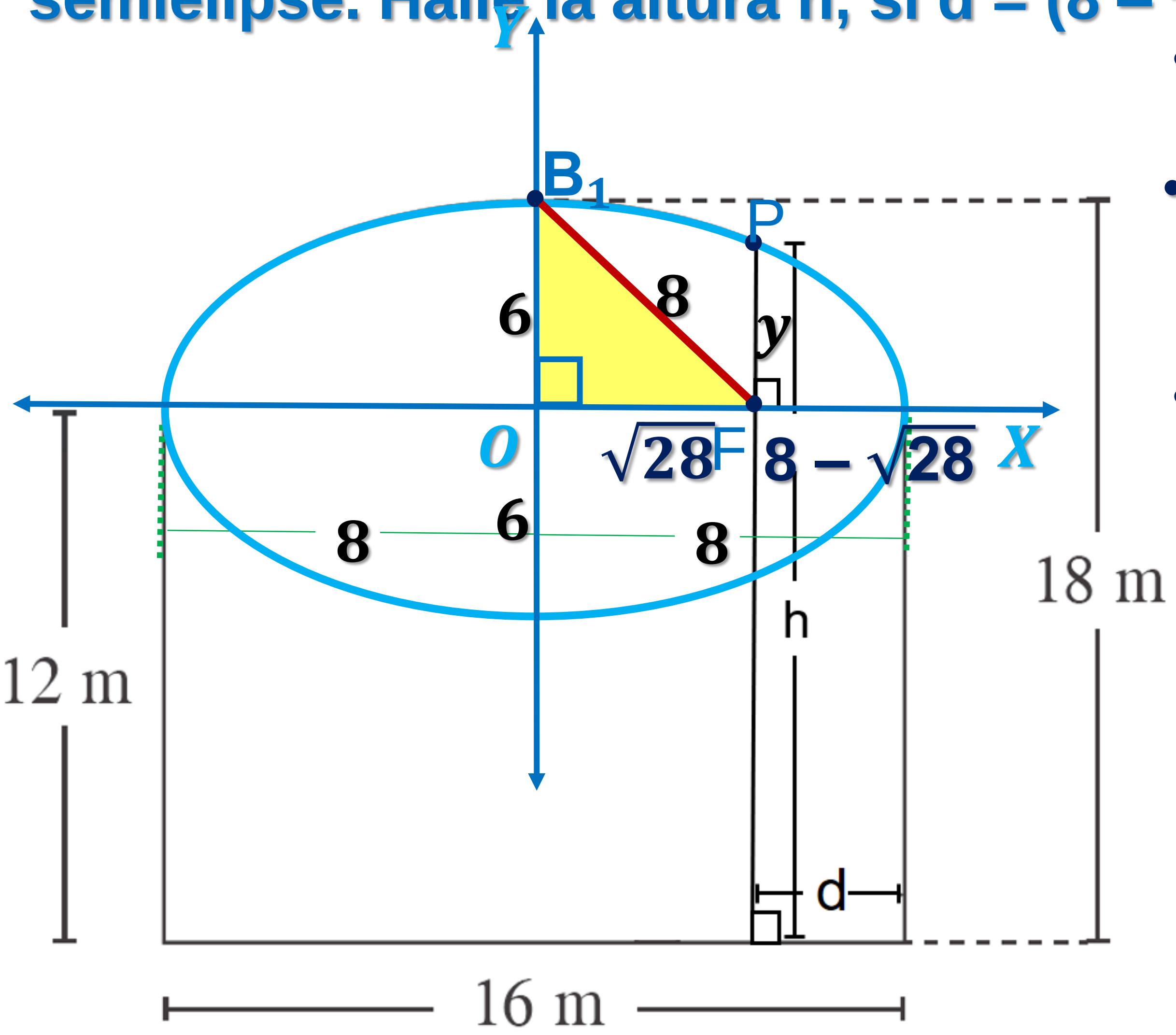
$$a=3\sqrt{2}$$

- **Reemplazando.**

$$\frac{x^2}{(3\sqrt{2})^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1}$$

8. En la figura, se muestra la entrada de un túnel cuyo techo tiene forma de una semielipse. Halle la altura h, si d = $(8 - \sqrt{28})$ m.



Resolución

- Piden: h

$$h = 12 + y \qquad \ldots (1)$$

- Por teorema de Pitágoras:

$$6^2 + (\sqrt{28})^2 = (B_1F)^2$$
$$64 = (B_1F)^2 \Rightarrow B_1F = 8$$

- Luego se deduce que:

$B_1F = a$, F es foco de la elipse y OF = c.

- $\overline{PF}$ es la mitad del lado recto.

$$\Rightarrow PF = \frac{b^2}{a} \Rightarrow y = \frac{6^2}{8}$$
$$y = 4,5 \quad \ldots (2)$$

- Reemplazando 2 en 1.

$$h = 12 + 4,5 \qquad \boxed{h = 16,5\ m}$$