ÁLGEBRA

CHAPTER 5

5th

of Secondary

TEMA:

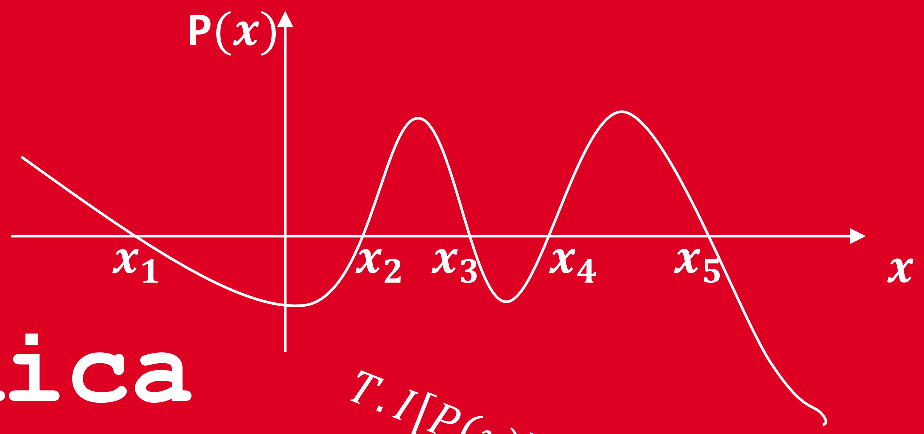
Divisibilidad Polinómica

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$$\sum \text{coeficientes } P(x) = P(1)$$

$$P(x) \equiv 0$$

$$G.A(P)$$



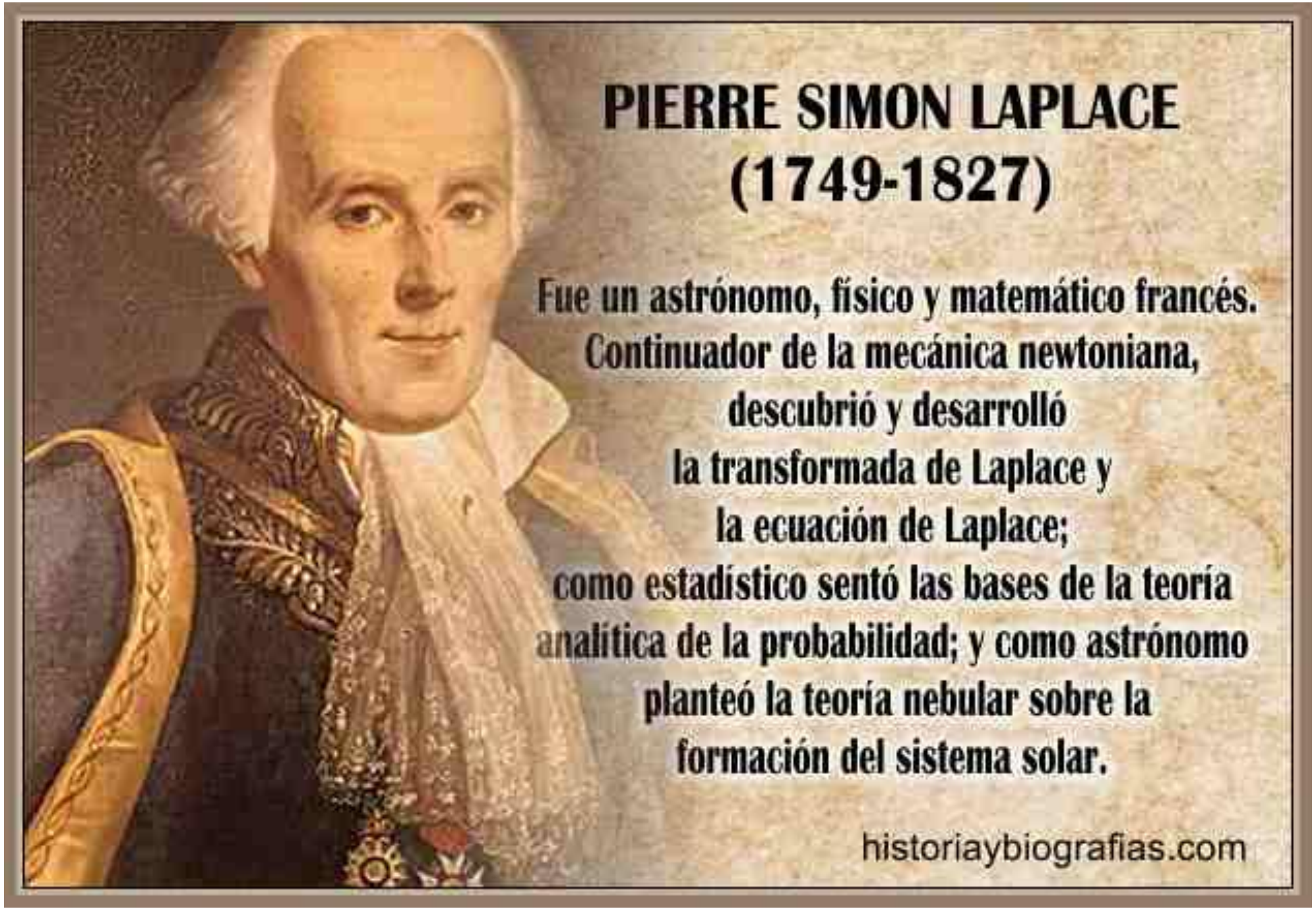
$$T.I[P(x)] = P(0)$$

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

SACO OLIVEROS

EL “NEWTON” FRANCÉS



HELICO
THEORY

SACO OLIVEROS

D I V I S I B I L I D A D P O L I N Ó M I C A

Se estudiarán las propiedades que se cumplen en una división exacta entre entre polinomios.

DEFINICIÓN

Dados dos polinomios f(x) y g(x) de grados no nulos, se dice que f(x) es divisible con g(x) si existe un único polinomio h(x), tal que f(x)=g(x).h(x)

EJEMPLO $P_{(x)} = x^2 - 5x + 6$ es divisible con $x - 2$

La afirmación anterior es verdadera porque $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$ no deja residuo.

TEOREMAS

Sea P(x) un polinomio no nulo.

1) Si P(x) entre (x-a) deja un resto R, entonces P(a)=R.

2) Si P(x) es divisible separadamente con (x-a) y (x-b), entonces P(x) es divisible con el producto (x-a)(x-b).

3) Si al dividir P(x) con (x-a) y (x-b) en forma separada y deja el mismo resto R en cada caso, entonces al dividir P(x) con el producto (x-a)(x-b) dejará el mismo resto R.

HELICO PRACTICE

SACO OLIVEROS

1) **Si un polinomio de segundo grado se divide con (x-2) y (x+1),sus residuos son 21 y 3 respectivamente. Identifique el polinomio si su término independiente es 1.**

Resolución

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + 1$$

$$\frac{P_{(x)}}{x-2} \rightarrow R_{(x)} = 21 \Rightarrow P_{(2)} = 21$$

$$\frac{P_{(x)}}{x+1} \rightarrow R_{(x)} = 3 \Rightarrow P_{(-1)} = 3$$

Reemplazando:

$$P_{(2)} = 4a + 2b + 1 = 21$$

$$P_{(-1)} = a - b + 1 = 3$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 20 \\ a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 4 \\ b = 2 \end{matrix}$$

$$\therefore P_{(x)} = 4x^2 + 2x + 1$$

2) Si un polinomio de segundo grado es divisible con (x-1) y (x+3) y cuyo coeficiente principal es 2. Halle el polinomio.

Resolución

Por el teorema 2:

$$\frac{P_{(x)}}{(x-1)(x+3)} \rightarrow R_{(x)} = 0$$

$$\underbrace{P_{(x)}}_{2°} \equiv \underbrace{(x-1)(x+3)}_{2°}.q_{(x)}$$

$$P_{(x)} = (x-1)(x+3).q_{(x)}$$

$q_{(x)} = 2$ (Coef. principal)

$$P_{(x)} = 2(x-1)(x+3)$$

Multiplicando:

$$\therefore P_{(x)} = 2x^2 + 4x - 6$$

3) Al dividir el polinomio P(x) con (x-4) y (x-2) se obtiene como residuo 9 y 5,respectivamente. Halle el resto de dividir P(x) con el producto (x-4)(x-2).

Resolución

$$\frac{P_{(x)}}{x-4} \rightarrow R_{(x)} = 9 \quad \Rightarrow \quad P_{(4)} = 9$$

$$\frac{P_{(x)}}{x-2} \rightarrow R_{(x)} = 5 \quad \Rightarrow \quad P_{(2)} = 5$$

$$P_{(x)} \equiv (x-4)(x-2)q_{(x)} + R_{(x)}$$

(1° grado)

Por propiedad: $R_{(x)} = ax + b$

$$P_{(4)} = R_{(4)} \qquad P_{(2)} = R_{(2)}$$

$$9 = 4a + b \qquad 5 = 2a + b$$

$$\begin{cases} 4a + b = 9 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore R_{(x)} = 2x + 1$$

4) Si un polinomio se divide entre (x-3) y (x+3),se obtiene como resto común 5. Halle el residuo de dividir dicho polinomio con x^2-9.

Resolución

$$\frac{P_{(x)}}{x-3} \to R_{(x)} = 5$$

$$\frac{P_{(x)}}{x+3} \to R_{(x)} = 5$$

$$P_{(x)} \equiv (x^2-9)q_{(x)} + R_{(x)}$$

$$P_{(x)} = (x+3)(x-3)q_{(x)} + R_{(x)}$$

Por el teorema N°3:

$$R_{(x)} = 5$$

$$\therefore R_{(x)} = 5$$

5) La nota del examen de Wilmer es el resultado del siguiente problema: "Indique el término independiente de un polinomio de tercer grado tal que si al dividirlo con (x-1), (x+2) y (x-4) origina un residuo común de 20. Además el polinomio es divisible con (x+1).¿Cuál es la nota de Wilmer?

Resolución

$$P_{(x)} \equiv \underbrace{(x-1)(x+2)(x-4)}_{3°}q_{(x)} + 20$$

$3°$ $\quad$ $3°$ $\quad$ $q_{(x)} = k$

$$P_{(x)} = (x-1)(x+2)(x-4)k + 20$$

$$\frac{P_{(x)}}{x+1} \rightarrow R_{(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{(-1)} = 0$$

$$P_{(-1)} = (-2)(1)(-5)k + 20 \quad = 0$$

$$k = -2$$

$$P_{(x)} = -2(x-1)(x+2)(x-4) + 20$$

Por propiedad para T.I.

$$T.I. = P_{(0)} \qquad P_{(0)} = -2(-1)(2)(-4) + 20$$

$$\Rightarrow \quad T.I. = 4$$

La nota de Wilmer es 4

6) Obtenga el resto de dividir un polinomio P(x) con (x-10) si se sabe que el término independiente del cociente es 5 y el término independiente de P(x) es 2.

Resolución

$$\boxed{P_{(x)} \equiv d_{(x)}.\,q_{(x)} + R_{(x)}}$$

$$P_{(x)} = (x - 10).\,q_{(x)} + r$$

Por dato:

$$T.I.[P_{(\mathrm{x})}] = P_{(0)} = 2$$

$$T.I.[q_{(\mathrm{x})}] = q_{(0)} = 5$$

$$P_{(0)} = d_{(0)}.\,q_{(0)} + r$$

Reemplazando:

$$2 = (0 - 10).\,(5) + r$$

$$r = 52$$

$$\therefore resto = 52$$

7) Sea P(x) un polinomio de quinto grado con término independiente 8 y con suma de coeficientes igual a -6. Si el resto de dividir P(x) con x^4+4 es $4x^3$, calcule el cociente.

Resolución

$$\boxed{P_{(x)} \equiv d_{(x)}.q_{(x)} + R_{(x)}}$$

$$P_{(x)} = \underbrace{(x^4+4).q_{(x)}} + 4x^3$$

5° 5° $q_{(x)} = ax + b$

$$P_{(x)} = (x^4+4).(ax+b) + 4x^3$$

T.I. $P_{(0)} = d_{(0)}.q_{(0)} + R_{(0)}$

$$8 = (0^4+4).(a(0)+b) + 4(0)^3$$

$8 = 4b$ $b = 2$

Σ coef. $P_{(1)} = d_{(1)}.q_{(1)} + R_{(1)}$

$$-6 = (1^4+4).(a+2) + 4(1)^3$$

$-10 = (1^4+4).(a+2)$ $a = -4$

$$\therefore q_{(x)} = -4x + 2$$

8) Un polinomio de cuarto grado, cuyo coeficiente principal es la unidad, es divisible con (x^2-1) y $(x-4)$. Al dividirlo con $(x+3)$ da resto 56. Halle el resto de dividirlo con $(x-2)$

Resolución

$$P_{(x)} \equiv \underbrace{(x^2-1)(x-4).q_{(x)}}$$

4° 4° Coef. princ.= 1

$$q_{(x)} = ax + b \Rightarrow q_{(x)} = 1x + b$$

$$\frac{P_{(x)}}{x+3} \to R_{(x)} = 56 \Rightarrow P_{(-3)} = 56$$

$$P_{(x)} = (x^2-1)(x-4)(x+b)$$

$$P_{(-3)} = (9-1)(-3-4)(-3+b)$$

$$56 = 8(-7)(-3+b) \qquad b = 2$$

$$\frac{P_{(x)}}{x-2} \to R \Rightarrow P_{(2)} = R$$

$$P_{(2)} = (4-1)(2-4)(2+2)$$

$$\therefore R = -24$$