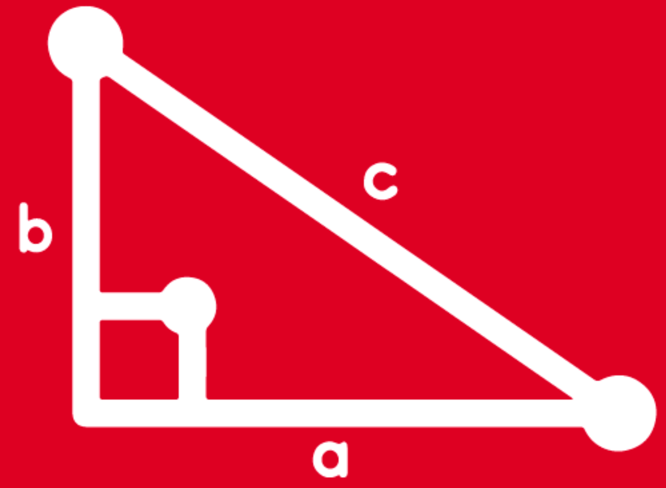
# TRIGONOMETRY

## Chapter 21
## Session 1




**4th**
**SECONDARY**

## TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS I

SACO OLIVEROS

# HELICO-MOTIVACIÓN

En el siglo XVI, aparecieron en Europa una serie de identidades conocidas como las *reglas de prostaféresis*; en la actualidad son conocidas como las identidades de **Transformaciones Trigonométricas**, las cuales convierten una suma y diferencia de senos y cosenos a un producto y viceversa.

Para deducir estas identidades se usan las *identidades del ángulo compuesto*:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y \quad \ldots (2)$$

Sumando **(1)** y **(2)**:

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\operatorname{sen}x.\cos y \quad \ldots (*)$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\text{Sea } \begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{A+B}{2} \quad ; \quad y=\frac{A-B}{2}$$

Reemplazando en **(*)** , se obtiene:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

# TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS I

## De suma y diferencia de senos y cosenos a producto

$$\mathrm{sen}A+\mathrm{sen}B=2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\mathrm{sen}A-\mathrm{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

**Ejemplos:**

- $\mathrm{sen}3x+\mathrm{sen}x=2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{sen}3x+\mathrm{sen}x=2\,\mathrm{sen}2x\cos x$

- $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\cos\left(\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ-40^\circ}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2}\cos 20^\circ$

$\Rightarrow$ $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=\cos 20^\circ$

# PROBLEMA 1

Transforme a producto : $E = cos5x + cos3x$

## Resolución:

$$cosA + cosB = 2\ cos\left(\frac{A+B}{2}\right) cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Piden:

$$E = \underbrace{\cos 5x}_{A} + \underbrace{\cos 3x}_{B}$$

$$\mathrm{E} = 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$

$$E = 2\cos\left(\frac{8x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x}{2}\right)$$

$$\therefore E = 2\ cos4x\ cosx$$

# PROBLEMA 2

Reduzca : $K = (sen70° - sen20°).csc25°$

## Resolución:

$$senA - senB = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$senx.cscx = 1$$

**Piden:**

$$K = (sen70° - sen20°).csc25°$$

$$K = \left[2\cos\left(\frac{70°+20°}{2}\right) sen\left(\frac{70°-20°}{2}\right)\right].csc25°$$

$$K = (2\cos45° \underbrace{sen25°).csc25°}_{1}$$

$$K = \cancel{2}.\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$\therefore K = \sqrt{2}$$

# PROBLEMA 3

Reduzca : $Q = \dfrac{\cos 50° - \cos 40°}{\mathrm{sen}\,35° - \mathrm{sen}\,25°}$

## Resolución:

$$Q = \frac{\cos 50° - \cos 40°}{\mathrm{sen}\,35 - \mathrm{sen}\,25°}$$

$$Q = \frac{-2\mathrm{sen}\left(\frac{50° + 40°}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{50° - 40°}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{35° + 25°}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{35° - 25°}{2}\right)}$$

$$\cos A - \cos B = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\mathrm{sen}A - \mathrm{sen}B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$Q = \frac{-\cancel{2}\,\mathrm{sen}(45°)\,\cancel{\mathrm{sen}(5°)}}{\cancel{2}\,\cos(30°)\,\cancel{\mathrm{sen}(5°)}} \Rightarrow Q = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow Q = -\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ Q = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

# PROBLEMA 4

Calcule el valor de " x " , siendo este agudo :

$$cot(x+10°)=\frac{sen4x+sen2x}{cos4x+cos2x}$$

## Resolución:

$$\cot(x+10°)=\frac{sen4x+sen2x}{cos4x+cos2x}$$

$$\cot(x+10°)=\frac{\cancel{2}sen(3x)\cancel{cos(x)}}{\cancel{2}\underbrace{cos(3x)}\cancel{cos(x)}}$$

$$\cot(x+10°)=tan(3x)$$

Por R.T. ángulos complementarios:

$$x+10°+3x=90° \Rightarrow 4x=80°$$

$$\therefore x=20°$$

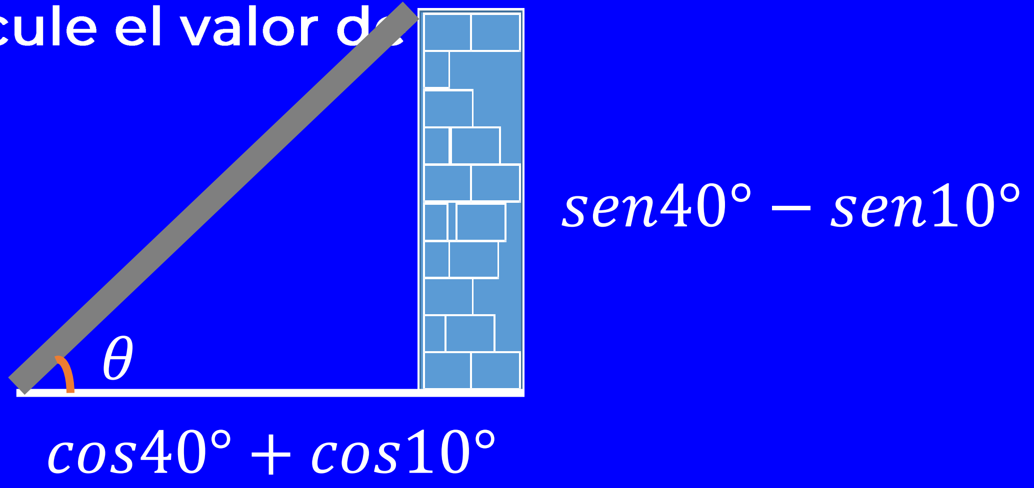
$$senA+senB=2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$cosA+cosB=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha}=tan\alpha$$

# PROBLEMA 5

Una escalera descansa sobre una pared lisa, tal como se muestra en la figura. Calcule el valor d




$$senA - senB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right) sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$cosA + cosB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right) cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

## Resolución:

### Del gráfico:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}40° - \text{sen}10°}{\cos40° + \cos10°}$$

$$\tan\theta = \frac{\cancel{2}\,\cancel{\cos(25°)}\ \text{sen}(15°)}{\cancel{2}\,\cancel{\cos(25°)}\ \underbrace{\cos(15°)}_{\tan15°}}$$

$$\tan\theta = \tan15°$$

$$\therefore \theta = 15°$$

# PROBLEMA 6

Reduzca :

$$R = \cos 130° + \cos 110° + \cos 10°$$

## Resolución:

$$R = \underbrace{\cos 130° + \cos 10°} + \cos 110°$$

$$R = 2\cos(70°)\cos(60°) + \cos 110°$$

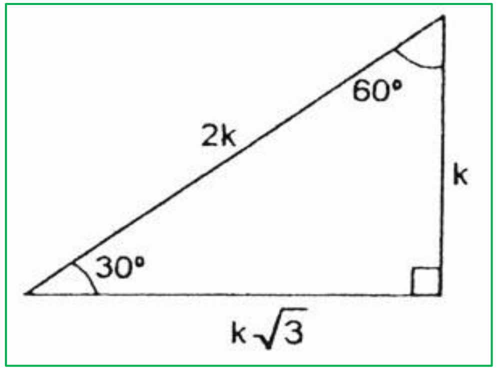
$$R = \cancel{2}.\cos 70°.\frac{1}{\cancel{2}} + \cos 110°$$

$$R = \underbrace{\cos 70° + \cos 110°}$$

$$R = 2\underbrace{\cos 90°}_{0}\cos 20°$$

$$\boxed{\therefore R = 0}$$

$$\boxed{\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$




$$\boxed{\cos 90° = 0}$$

# PROBLEMA 7

Reduzca :

$$K = \frac{sen11x + sen7x + sen3x}{cos11x + cos7x + cos3x}$$

## Resolución:

$$K = \frac{\mathbf{sen11x + sen3x} + \text{sen7x}}{\mathbf{cos11x + cos3x} + \text{cos7x}}$$

$$K = \frac{2\,sen(7x)\,cos(4x) + \text{sen7x}}{2\,cos(7x)\,cos(4x) + \text{cos7x}}$$

$$K = \frac{\text{sen7x}.\cancel{(2\text{cos4x} + 1)}}{\text{cos7x}.\cancel{(2\text{cos4x} + 1)}}$$

$$\boxed{\therefore \mathbf{K = tan7x}}$$

$$senA + senB = 2sen\left(\frac{A+B}{2}\right) cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$cosA + cosB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right) cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

# PROBLEMA 8

Halle el valor de " n " , si :

$$sen40° + cos70° = n.cos10°$$

## Resolución:

$$\underbrace{sen40°}_{} + \cos70° = n.\cos10°$$

$$\underbrace{\cos50° + \cos70°}_{} = n.\cos10°$$

$$2\,cos60°\,cos10° = n.\cos10°$$

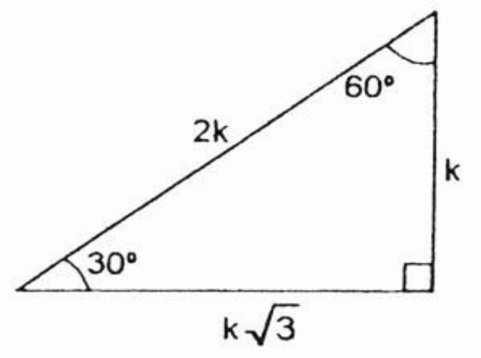
$$\cancel{2}.\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right).cos10° = n.\cos10°$$

$$cos10° = n.\cos10°$$

$$\boxed{\therefore n = 1}$$

$$\boxed{sen40° = cos50°}$$

$$\boxed{cosA + cosB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$



EL CAMINO

AL ÉXITO

es

LA ACTITUD