ÁLGEBRA

CHAPTER 13

5th

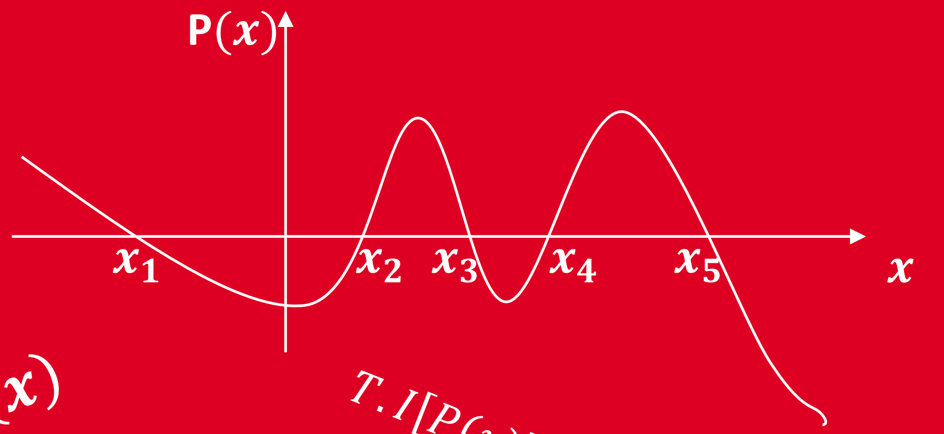
of Secondary

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$$\sum coeficientes\ P(x) = P(1)$$

$$P(x) \equiv 0$$

$G.A(P)$



$G.R(x)$

$T.I[P(x)] = P(0)$

Tema: Ecuaciones polinomiales

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

"El razonamiento matemático puede considerarse más bien esquemáticamente como el ejercicio de una combinación de dos instalaciones, que podemos llamar la intuición y el ingenio."

Alan Turing

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

ECUACIONES POLINOMIALES

Sea el polinomio **mónico** , de grado “n” :

$$P(x) = x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \cdots + (-1)^nS_n = 0$$

de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son raíces de aquel polinomio.

Donde:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ **SUMA DE RAÍCES**
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n$ **SUMA DE LOS PRODUCTO BINARIO DE LAS RAÍCES**
- $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$ **SUMA DE LOS PRODUCTO TERNARIO DE LAS RAÍCES**

$\vdots \qquad \vdots$

- $S_n = x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_n$ **PRODUCTO DE RAÍCES**

CASOS PARTICULARES :

Polinomio cúbico:

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

donde x_1, x_2, x_3 son raíces de aquel polinomio.

Donde:

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$S_3 = x_1x_2x_3$

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = x^3 \overset{+}{+} \underset{S_1}{\overset{-}{4}}x^2 \overset{+}{+} \underset{S_2}{3}x \overset{-}{-} \underset{S_3}{8} = 0$

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(+4) = -4$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(+3) = 3$
- $S_3 = x_1\,x_2\,x_3 = -(-8) = 8$

Observación:

En el caso que el polinomio no sea mónico , se dividirá entre su coeficiente principal y se procede al mismo criterio planteado.

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 9x + 15 = 0$

$3 \div$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$$x^3 - \underbrace{2}_{S_1}x^2 - \underbrace{3}_{S_2}x + \underbrace{5}_{S_3} = 0$$

Entonces:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(-2) = 2$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(-3) = -3$
- $S_3 = x_1\, x_2\, x_3 = -(+5) = -5$

Observación:

Sea un polinomio cúbico, donde :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Entonces se cumple:

✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\, x_1\, x_2\, x_3$

Lo cual equivale a decir:

Si $S_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \checkmark\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2S_2 \\ \checkmark\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_3 \end{cases}$$

Polinomio de cuarto grado:

$$\boxed{P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son raíces de aquel polinomio.

Donde:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
- $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$
- $S_4 = x_1x_2x_3x_4$

Raíz de un Polinomio

Diremos que "a" es una raíz de un polinomio (no constante) $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$$

$$P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 \quad = 0$$

Entonces "1" es raíz de $P(x)$

PROPIEDADES

1. **Teorema fundamental del álgebra:** Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

2. **Paridad de raíces irracionales:** Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes racionales , se cumple que si una raíz del polinomio es $a + \sqrt{b}$ si y sólo si $a - \sqrt{b}$ es también raíz del polinomio.
$(a, b \in \mathbb{Q} \wedge b > 0$ no cuadrado perfecto$)$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

1. Si a, b y c son raíces de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + x - 12 = 0$$

Efectué: $Q = \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}$

Resolución :

$$\overset{+}{x^3} \; \overset{-}{-\underset{\downarrow S_1}{3}x^2} \; \overset{+}{+\underset{\downarrow S_2}{1}x} \; \overset{-}{-\underset{\downarrow S_3}{12}} = 0$$

Entonces:

- $S_1 = a + b + c = -(-3) = 3$
- $S_2 = ab + ac + bc = +(+1) = 1$
- $S_3 = a\,b\,c = -(-12) = 12$

Nos piden :

$$Q = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

Calculando el $\mathrm{MCM} = abc$

$$Q = \frac{\overbrace{c + b + a}^{S_1}}{\underbrace{a\,b\,c}_{S_3}}$$

$$Q = \frac{3}{12}$$

$$\boxed{\therefore Q = \frac{1}{4}}$$

2. Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación

$$x^3 - 2x + 3 = 0$$

Efectué : $K = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

Resolución :

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{0x^2} - \overset{+}{2x} + \overset{-}{3} = 0$$

$0x^2 \rightarrow S_1$, $2x \rightarrow S_2$, $3 \rightarrow S_3$

Entonces:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(0) = 0$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(-2) = -2$
- $S_3 = x_1\, x_2\, x_3 = -(+3) = -3$

Recordar :

Si $S_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \checkmark \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2S_2 \\ \checkmark \; x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_3 \end{cases}$

Del problema : $S_1 = 0$, entonces:

$$K = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

$$K = 3\,S_3 = 3\,(-3)$$

$$\boxed{\therefore K = -9}$$

3. Si $3+\sqrt{5}$ es una raíz del polinomio

$$P(x)=x^4-8x^3+x^2+ax+b$$

Calcule la suma de las otras raíces.

Resolución :

Sea x_1, x_2 , x_3 y x_4 raíces de la ecuación de cuarto grado

Del problema :

$$P(x)=\overset{+}{x^4}\ \overset{-}{-\ \underbrace{8}_{S_1}x^3}\ \overset{+}{+\ x^2}\ \overset{-}{+\ ax}\ \overset{+}{+\ b}$$

Por dato : $\boxed{x_1=3+\sqrt{5}}$

Recordar :

$$P(x)=x^4-S_1x^3+S_2x^2-S_3x+S_4=0$$

Suma de raíces : $S_1=x_1+x_2+x_3+x_4$

$$S_1=x_1+x_2+x_3+x_4=-(-8)=8$$

$$3+\sqrt{5}+x_2+x_3+x_4=8$$

$$x_2+x_3+x_4=5-\sqrt{5}$$

$\therefore$ *Suma de las otras raíces es* $5-\sqrt{5}$

4. En la ecuación:

$$3x^3 + mx^2 + 9x - n = 0$$

cuyas raíces son 2; -1 y 5. Determine $m + n$.

Resolución :

$$3x^3 + mx^2 + 9x - n = 0$$

$3 \div$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$$x^3 + \underbrace{\frac{m}{3}}_{S_1}x^2 + \underbrace{3}_{S_2}x - \underbrace{\frac{n}{3}}_{S_3} = 0$$

Por dato :

$\boxed{x_1 = 2}$ $\boxed{x_2 = -1}$ $\boxed{x_3 = 5}$

Recordar :

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $S_3 = x_1x_2x_3$

Del problema:

- $S_1 = 2 + (-1) + 5 = -\left(\frac{m}{3}\right)$

$$6 = -\frac{m}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = -18}$$

- $S_3 = (2).(-1).(5) = -\left(-\frac{n}{3}\right)$

$$-10 = \frac{n}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = -30}$$

$$\therefore m + n = -48$$

5. Si una de las raíces de la ecuación:

$$4x^3 + mx^2 + nx - 8 = 0$$

es $2 - \sqrt{2}$. Halle: $m + n$

Resolución :

Por la paridad de raíces irracionales:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Además:

$$4x^3 + mx^2 + nx - 8 = 0$$

$4 \div$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$$x^3 + \underbrace{\frac{m}{4}}_{S_1} x^2 + \underbrace{\frac{n}{4}}_{S_2} x - \underbrace{2}_{S_3} = 0$$

Recordar :

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ S_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_3 = \underbrace{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}. x_3$$

$$\Rightarrow -(-2) = (2^2 - \sqrt{2}^2) \cdot x_3$$

$$\Rightarrow 2 = 2 . x_3 \Rightarrow x_3 = 1$$

Reemplazando $x_3 = 1$ en el polinomio:

$$\Rightarrow 4(1)^3 + m(1)^2 + n(1) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + m + n - 8 = 0$$

$$\boxed{\therefore m + n = 4}$$

6. El pago mensual que realiza Javier por su celular post pago es de 20T soles; donde T está dado por la mayor de las raíces de:

$$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$$

Si el contrato es por 18 meses. ¿Cuánto pagará por dicho celular?

Resolución :

Aplicando divisores binómicos

	1	−7	7	15
$x = -1$		−1	8	−15
	1	−8	15	0

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$x \quad -3$

$x \quad -5$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad \boxed{x_3 = 5}$

mayor raíz

PAGO MENSUAL $= 20(5) = s/100$

PAGO TOTAL $= 18.(s/\ 100)$

$$\therefore \textit{Pago total} = s/\ 1800$$

7. Sean a; b y c las raíces de :

$$x^3 + 6x - 4 = 0$$

Halle el valor de $\mathrm{K} = \dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab}$

Resolución :

$$\overset{+}{x^3} + \underset{\substack{\downarrow \\ S_1}}{\overset{-}{0x^2}} + \underset{\substack{\downarrow \\ S_2}}{\overset{+}{6x}} - \underset{\substack{\downarrow \\ S_3}}{\overset{-}{4}} = 0$$

Entonces:

- $S_1 = a + b + c = -(0) = 0$
- $S_2 = ab + ac + bc = +(+6) = 6$
- $S_3 = abc = -(-4) = 4$

Recordar :

Si $S_1 = 0$

$\Rightarrow$
- ✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2S_2$
- ✓ $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_3$

Nos piden :

$$\mathrm{K} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

$m.c.m(ab, ac, bc) = abc$

$$\mathrm{K} = \frac{\overbrace{a^2 + b^2 + c^2}^{-2\,S_2}}{\underbrace{a\,b\,c}_{S_3}} = \frac{-2\,(6)}{4}$$

$$\boxed{\therefore K = -3}$$

8. Se sabe que las raíces de:

$$x^3 - 12x^2 + mx - 28 = 0$$

están en progresión aritmética. Halle m.

Resolución :

Por dato se sabe que es una P.A

$\boxed{x_1 = a - r}$ $\boxed{x_2 = a}$ $\boxed{x_3 = a + r}$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3a \ldots (I)$$

Además:

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ x^3 & -\underbrace{12}_{S_1}x^2 & +\ mx & -\ 28 = 0 \end{array}$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(-12) \ldots (II)$$

De (I) y (II) : $a = 4$

$$\boxed{x_2 = 4}$$

Reemplazando la raíz $x_2 = 4$ en el polinomio

$$4^3 - 12(4)^2 + m(4) - 28 = 0$$

$$64 - 192 + m(4) - 28 = 0$$

$$4m = 156$$

$$\boxed{\therefore m = 39}$$