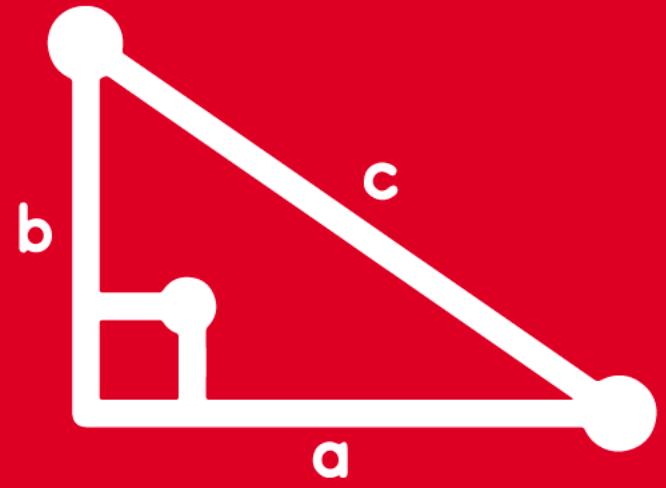
TRIGONOMETRY

Chapter 20
Session I



4th
SECONDARY

Identidades Trigonométricas del ángulo mitad

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

El numero de Mach (**M**) es una medida de velocidad relativa que se define como el cociente entre la velocidad de un objeto (**V**) y la velocidad del sonido (**Vs**).

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Vs}}$$

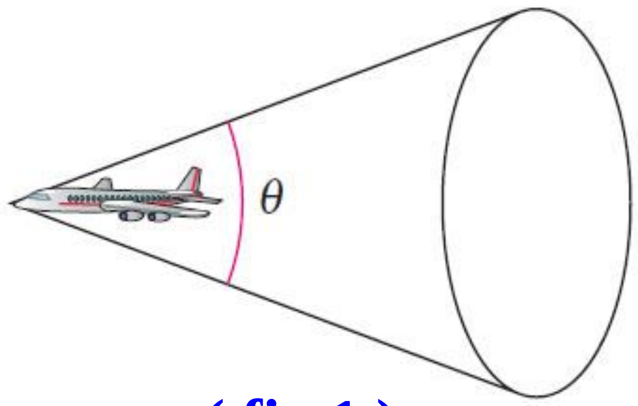
M es típicamente usado para describir la velocidad de los aviones. Mach 1 equivale a la velocidad del sonido, Mach 2 es dos veces la velocidad del sonido, etc.

Si **M** > 1 , origina ondas sonoras en forma de cono de movimiento. **(fig.1)**

El número de mach está relacionado con el ángulo θ en el vértice del cono por:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\mathbf{M}}$$

El avión Concorde **(fig.2)** tenía una velocidad de crucero de mach 2 ¿ Puedes calcular el valor de θ ?



(fig.1)

(fig.2)

Rpta : $\theta = 60^{\circ}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

1) Para el seno

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

2) Para el coseno

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

3) Para la tangente

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

NOTA:

El signo $\pm$ (positivo o negativo) depende del cuadrante al que pertenece el ángulo $\left(\frac{x}{2}\right)$ y su RT.

Ejemplos:

- $\operatorname{sen}20° = \overset{20° \in IC}{+}\sqrt{\frac{1-\cos 40°}{2}}$
- $\cos 100° = \overset{100° \in IIC}{-}\sqrt{\frac{1+\cos 200°}{2}}$

Recordar:

$\left.\begin{matrix}\text{sen}\\ \text{csc}\end{matrix}\right\}(+)$ Todas las RT son $(+)$

$\left.\begin{matrix}\text{tan}\\ \text{cot}\end{matrix}\right\}(+)$ $\left.\begin{matrix}\text{cos}\\ \text{sec}\end{matrix}\right\}(+)$

Identidades Auxiliares:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\csc(x)-\cot(x)$$

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right)=\csc(x)+\cot(x)$$

… también se conocen como **Fórmulas Racionalizadas.**

Ejemplos:

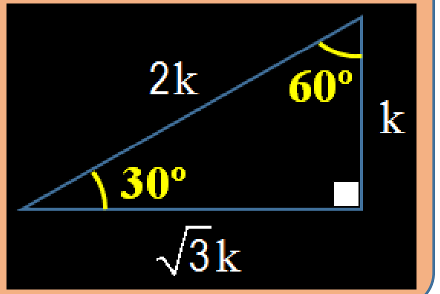
- $\tan 15° = \csc 30° - \cot 30°$

$\Rightarrow \tan 15° = 2-\sqrt{3}$

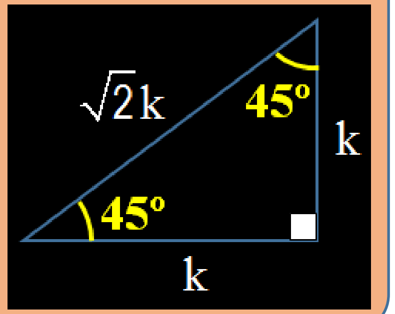
- $\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \csc\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}+1$

Recordar:



Recordar:



PROBLEMA 1

Si $\cos x = \frac{7}{8}$ y $x \in \langle 270°; 360° \rangle$, calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

Resolución:

Del dato:

$$270° < x < 360° \quad \div (2)$$

$$135° < \frac{x}{2} < 180°$$

$\rightarrow \frac{x}{2} \in$ II C

Obs: $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow (+)$

Además: $\cos x = \frac{7}{8}$

Piden:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{8}}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{1}}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\therefore \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

PROBLEMA 2

Si $\cos\alpha = \frac{1}{8}$ y $\alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$, calcule $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Resolución:

Del dato:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \qquad \div (2)$$

$$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \text{I C}$$

$$\text{Obs: } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow (+)$$

Además: $\cos\alpha = \frac{1}{8}$

Piden:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{8}}{\frac{2}{1}}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

PROBLEMA 3

Si $\cos\beta = -\frac{3}{4}$ y $\beta \in \mathrm{IIC}$, calcule $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$

Resolución:

Del dato:

$\beta \in \mathrm{IIC}$ ⇨ $90° < \beta < 180°$ $\div (2)$

$45° < \frac{\beta}{2} < 90°$

$\rightarrow \frac{\beta}{2} \in \mathrm{I\,C}$ ⇨ **Obs:** $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \rightarrow (+)$

Además: $\cos\beta = -\frac{3}{4}$

Piden: $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}$

$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}}$ ⇨ $\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}}$

$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{7}{\cancel{4}}}{\frac{1}{\cancel{4}}}}$

$\therefore \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{7}$

PROBLEMA 4

Reduzca : $K = \sqrt{\dfrac{1+sen50°}{1-sen50°}}$

Resolución:

Por R.T. ángulos complementarios:

$$\boxed{\mathbf{sen50° = cos40°}}$$

Piden: $K = \sqrt{\dfrac{1 + \mathbf{sen50°}}{1 - \mathbf{sen50°}}}$

$$K = \sqrt{\dfrac{1 + \mathbf{cos40°}}{1 - \mathbf{cos40°}}}$$

$$\boxed{\therefore \mathbf{K = cot20°}}$$

$$\boxed{\sqrt{\dfrac{1 + cosx}{1 - cosx}} = cot\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

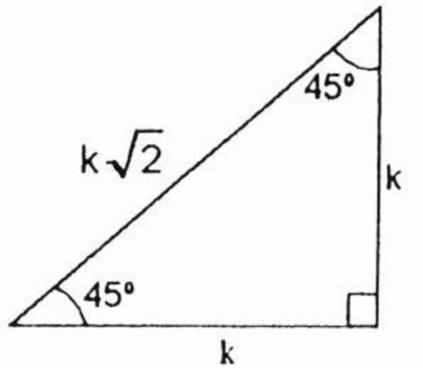
PROBLEMA 5

En un simulacro de admisión realizado en el aula de 4°.E el 10 % del total de los alumnos ha salido por debajo del puntaje aprobado. Si se sabe que esta cantidad es el resultado de resolver : $\mathbf{A = (cot22°30' - 1)^2}$

¿Cuál es el número total de alumnos del 4°.E?

Resolución:

$$\boxed{cot\left(\frac{x}{2}\right) = cscx + cotx}$$



Piden resolver:

$$A = (\underbrace{\text{cot}22°30'} - 1)^2$$

$$A = (\underbrace{csc45°} + \underbrace{cot45°} - 1)^2$$

$$A = (\ \sqrt{2} + \cancel{1} - \cancel{1})^2$$

$$\boxed{A = 2}$$

Del dato:

$$10\%.T = A$$

$$\frac{1\cancel{0}}{10\cancel{0}}.T = 2$$

$$\therefore \mathbf{T = 20}\ \textbf{alumnos}$$

PROBLEMA 6

Reduzca : $E = \left[\cot x - \cot\left(\frac{x}{2}\right)\right] \operatorname{sen} x$

Resolución:

$$E = \left[\cot x - \underbrace{\cot\left(\frac{x}{2}\right)}\right] . \operatorname{sen} x$$

$$E = [\cot x - (\csc x + \cot x)] . \operatorname{sen} x$$

$$E = [\cancel{\cot x} - \csc x - \cancel{\cot x}] . \operatorname{sen} x$$

$$E = -\underbrace{\csc x . \operatorname{sen} x}_{1}$$

$$\therefore E = -1$$

$$\boxed{\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x + \cot x}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x . \csc x = 1}$$

PROBLEMA 7

Calcule el valor de x agudo si :

$$cotx = sec50° - tan50°$$

Resolución:

$$\text{cotx} = \underbrace{sec50°} - \underbrace{tan50°}$$

$$\text{cotx} = \underbrace{\text{csc}40° - \text{cot}40°}_{\text{tan}\left(\frac{40°}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \text{cotx} = \text{tan}(20°)$$

Por R.T. ángulos complementarios: $x + 20° = 90°$

$$\boxed{\therefore \text{x} = 70°}$$

Por R.T. ángulos complementarios:

$$\boxed{\text{sec}50° = \text{csc}40°}$$

$$\boxed{\text{tan}50° = \text{cot}40°}$$

$$\boxed{cscx - cotx = tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

PROBLEMA 8

Reduzca : $P = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sec x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\tan x}$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \csc\alpha - \cot\alpha}$$

$$\boxed{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \csc\alpha + \cot\alpha}$$

Resolución:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \underbrace{\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sec x} - \underbrace{\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\tan x}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \sec x - \tan x$$

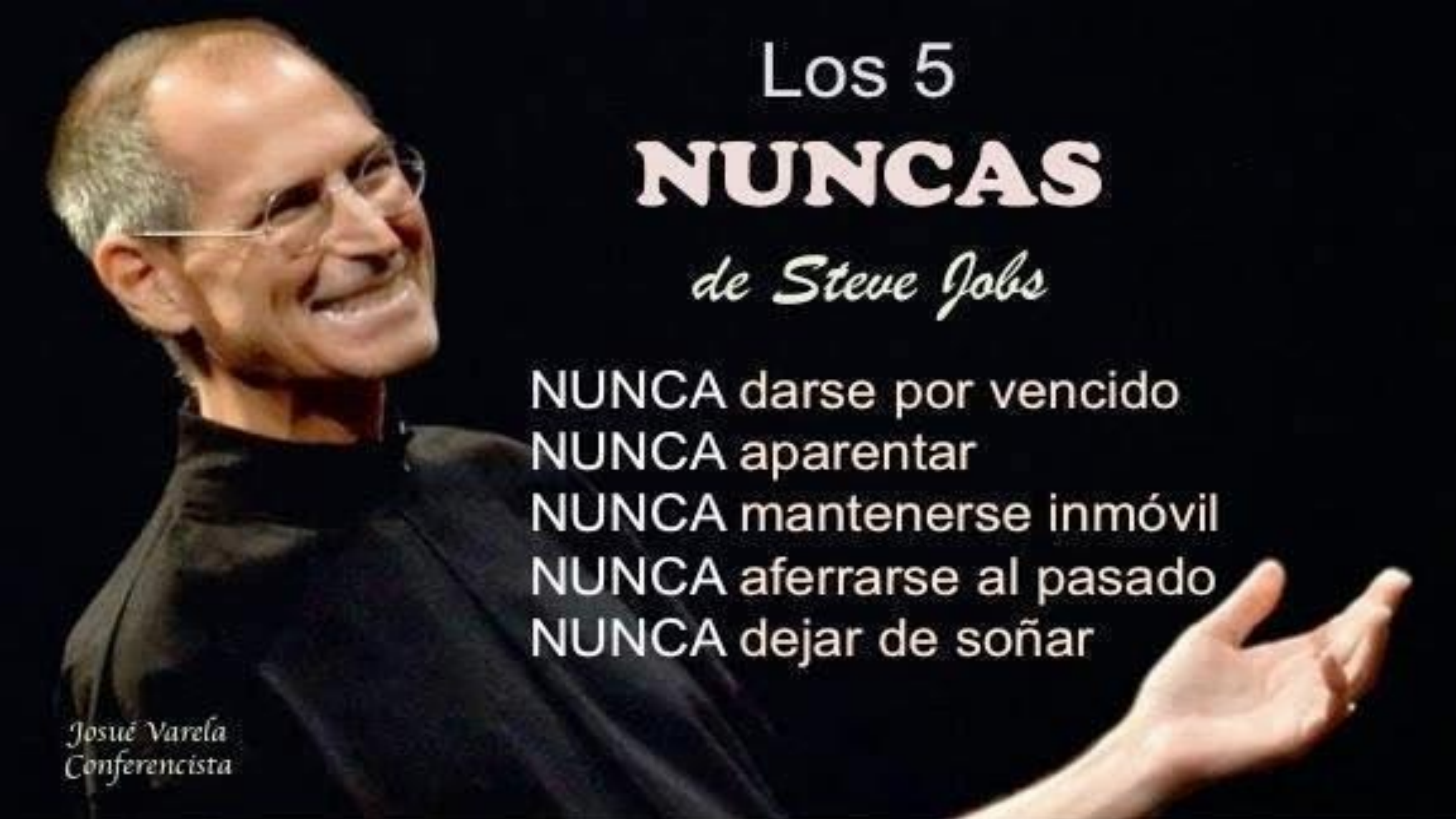
$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \underbrace{\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\sec x} + \underbrace{\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{\tan x}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = \sec x + \tan x$$

Reemplazando:

$$P = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sec x}{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\tan x} \Rightarrow P = \frac{\cancel{\sec x} - \tan x - \cancel{\sec x}}{\sec x + \cancel{\tan x} - \cancel{\tan x}} \Rightarrow P = \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{1}{\cancel{\cos x}}}$$

$$\boxed{\therefore P = -\operatorname{sen} x}$$


Los 5
NUNCAS
de Steve Jobs
NUNCA darse por vencido
NUNCA aparentar
NUNCA mantenerse inmóvil
NUNCA aferrarse al pasado
NUNCA dejar de soñar
Josué Varela
Conferencista