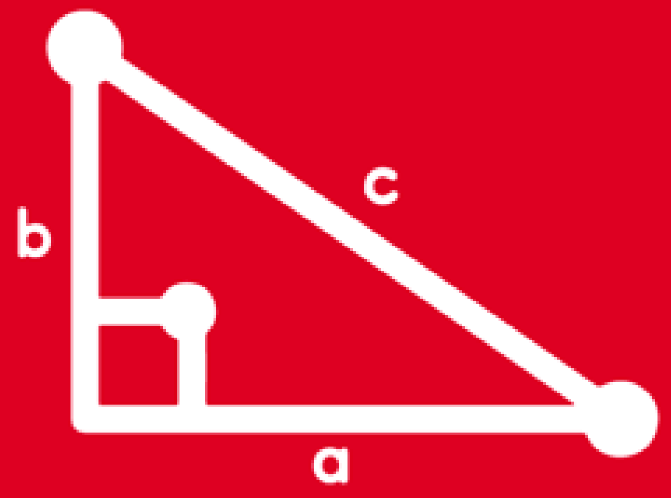
TRIGONOMETRY

Chapter 11

5th
SECONDARY

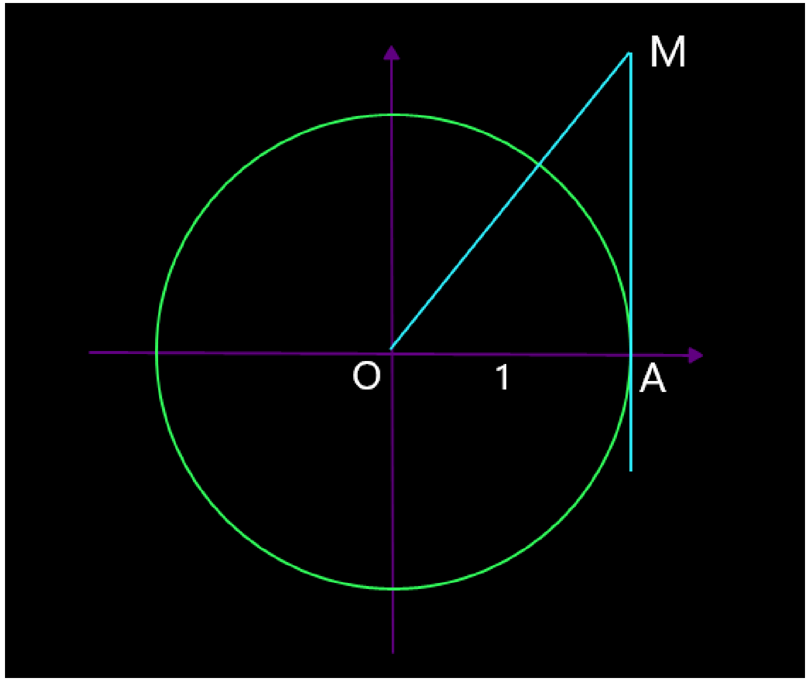


IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS I

SACO OLIVEROS

Abu Al-Wafa (940-997)

De origen iraní, fue un destacado astrónomo y matemático. Entre sus aportes en Trigonometría tenemos el cálculo del segmento AM como la $tan\,\theta$ en una circunferencia unitaria. Asimismo, logra estudiar las identidades trigonométricas.



$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

¿Qué es una identidad trigonométrica?

Son igualdades en donde intervienen las razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo **valor admisible** de la variable angular. Es decir, donde las razones trigonométricas estén definidas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

IDENTIDADES POR DIVISIÓN:

$$\boxed{tanx = \frac{senx}{cosx}}$$

$$\boxed{cotx = \frac{cosx}{senx}}$$

IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\boxed{senx.cscx = 1} \quad \begin{cases} senx = \dfrac{1}{cscx} \\[2ex] cscx = \dfrac{1}{senx} \end{cases}$$

$$\boxed{cosx.secx = 1} \quad \begin{cases} cosx = \dfrac{1}{secx} \\[2ex] secx = \dfrac{1}{cosx} \end{cases}$$

$$\boxed{tanx.cotx = 1} \quad \begin{cases} tanx = \dfrac{1}{cotx} \\[2ex] cotx = \dfrac{1}{tanx} \end{cases}$$

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$\boxed{sen^2x + cos^2x = 1}$$

$$\begin{cases} sen^2x = 1 - cos^2x \\ cos^2x = 1 - sen^2x \end{cases}$$

$$\boxed{sec^2x - tan^2x = 1}$$

$$\begin{cases} tan^2x = sec^2x - 1 \\ sec^2x = tan^2x + 1 \end{cases}$$

$$\boxed{csc^2x - cot^2x = 1}$$

$$\begin{cases} cot^2x = csc^2x - 1 \\ csc^2x = cot^2x + 1 \end{cases}$$

1. Reduzca la expresión

$$E = \text{sen}^3x.\text{csc}x + \cos^3x.\sec x$$

RESOLUCIÓN

Recordar las identidades:

$\text{sen}x.\text{csc}x = 1$

$\cos x.\sec x = 1$

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$$E = \text{sen}^3x.\,\text{csc}x + \cos^3x.\,\sec x$$

$$E = \text{sen}^2x.\,\underbrace{\text{sen}x.\,\text{csc}x}_{1} + \cos^2x.\,\underbrace{\cos x.\,\sec x}_{1}$$

$$E = \text{sen}^2x + \cos^2x$$

$$\therefore\ \boxed{E = 1}$$

2. Reduzca : $W = \dfrac{\csc\theta + \sec\theta}{1 + \tan\theta}$

Recordar las identidades:

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

RESOLUCIÓN

$$W = \frac{\csc\theta + \sec\theta}{1 + \tan\theta}$$

$$W = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$W = \frac{\dfrac{\overset{1}{\cancel{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}}}{\operatorname{sen}\theta\cancel{\cos\theta}}}{\dfrac{\cancel{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}\,1}{\cancel{\cos\theta}\;1}}$$

$$W = \frac{1(1)}{\operatorname{sen}\theta(1)}$$

$$W = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\therefore\ \boxed{W = \csc\theta}$$

3. Reduzca : $E=\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\text{sen}^2 x}-\sec^2 x$

Recordar las identidades:

$1-\cos^2 x=\text{sen}^2 x$

$1-\text{sen}^2 x=\cos^2 x$

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$

$\tan x=\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$

RESOLUCIÓN

$$E=\frac{1-\cos^2 x}{1-sen^2 x}-\sec^2 x$$

$$E=\boxed{\frac{sen^2 x}{\cos^2 x}}-\underbrace{\sec^2 x}_{1+\tan^2 x}$$

$$E=\cancel{\tan^2 x}-1-\cancel{\tan^2 x}$$

$$\therefore \boxed{E=-1}$$

4. Mi amiga María se ha matriculado en una piscina, cerca de su casa, para aprender a nadar. La piscina tiene forma rectangular , como se muestra el dibujo y sus dimensiones son las siguientes

Ancho: 5A metros

Largo:10A metros

En una hora que María está en la piscina, comienza nadando tres veces el ancho para calentar los músculos, y después 6 largos completos como le indica su monitor. ¿Cuántos metros nadará María?

Para resolver el problema, primero halle el valor de A de la siguiente identidad

$$\frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}-\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=A\cot x$$

RESOLUCIÓN

$$\frac{senx}{1-cosx}-\frac{senx}{1+cosx}=\frac{senx(1+cosx)-senx(1-cosx)}{(1-cosx)(1+cosx)}$$

$$\frac{\cancel{senx}+senx.cosx-\cancel{senx}+senx.cosx}{(1-cos^2x)}=\frac{2\cancel{senx}.cosx}{sen^{\cancel{2}}x}$$

$$\frac{2cosx}{senx}=2cotx \quad 2cot\,x=A\,cot\,x \quad \boxed{A=2}$$

Ancho : 5A = 5(2) = 10 metros

Largo : 10A = 10(2) = 20 metros

$\Rightarrow$ María nadará : 3(10) + 6(20) $\therefore$ **150 metros**

5. Si x es la medida de un ángulo del segundo cuadrante, reduzca la expresión

$$E=\frac{\operatorname{sen}x}{\csc x}-\cos x\sqrt{\frac{\csc^2 x-\cot^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

Como $x \in IIC$
$\cos x$ es $(-)$

RESOLUCIÓN

$$E=\frac{\operatorname{sen}x}{\csc x}-\cos x\sqrt{\frac{\csc^2 x-\cot^2 x}{1+\tan^2 x}}$$

$$E=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}x}{1}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}}-\cos x\sqrt{\frac{(1+\cancel{\cot^2 x})-\cancel{\cot^2 x}}{\sec^2 x}}$$

$$E=\operatorname{sen}^2 x-\cos x\sqrt{\frac{1}{\sec^2 x}}$$

$$E=\operatorname{sen}^2 x-\cos x\left|\frac{1}{\sec x}\right|$$

$$E=\operatorname{sen}^2 x-\cos x\left|\cos x\right|$$

$$E=\operatorname{sen}^2 x-\cos x(-\cos x)$$

$$E=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{E=1}}$

6. De la condición: $\operatorname{sen}x-\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Calcule: $\sec x.\csc x$

Recordar las identidades:

$\cos x=\dfrac{1}{\sec x}$ $\operatorname{sen}x=\dfrac{1}{\csc x}$

$\operatorname{sen}^2x+\cos^2x=1$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

RESOLUCIÓN

$$senx-cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(senx-cosx)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$sen^2x-2senxcosx+cos^2x=\frac{2}{4}$$

$$sen^2x+cos^2x-2senx.cosx=\frac{1}{2}$$

$$1-2senx.cosx=\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{1}{2}=2senx.cosx$$

$$\frac{1}{2}=2senx.cosx$$

$$\frac{1}{4}=senx.cosx$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{cscx}.\frac{1}{secx}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{secx.cscx}$$

$$\therefore\ \boxed{secx.cscx=4}$$

7. Siendo: $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}x}=4$, determine $E=8(\cot x-1)$

RESOLUCIÓN

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$\frac{1+cosx}{senx}=4$$

$$\frac{1}{senx}+\frac{cosx}{senx}=4$$

$$cscx+cotx=4$$

$$cscx=4-\ cotx$$

$$csc^2x=(4\ -\ cotx)^2$$

$$1+\cancel{cot^2x}=16-8cotx+\cancel{cot^2x}$$

$$8cotx=15$$

$$cotx=\frac{15}{8}$$

$$E=8(cotx-1)$$

$$E=8\left(\frac{15}{8}-1\right)$$

$$E=15-8$$

$$\therefore\ \boxed{E=7}$$

8. Si se cumple que:

$$\operatorname{sen}x + \cos x = m$$

$$\operatorname{sen}x . \cos x = n$$

determine una relación entre m y n independiente de x.

RESOLUCIÓN

$$senx + cosx = m$$

$$(senx + cosx)^2 = m^2$$

$$sen^2x + 2senxcosx + cos^2x = m^2$$

$$sen^2x + cos^2x + 2senxcosx = m^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$1 + 2\underbrace{senxcosx}_{n} = m^2$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{1 + 2n = m^2}}$$