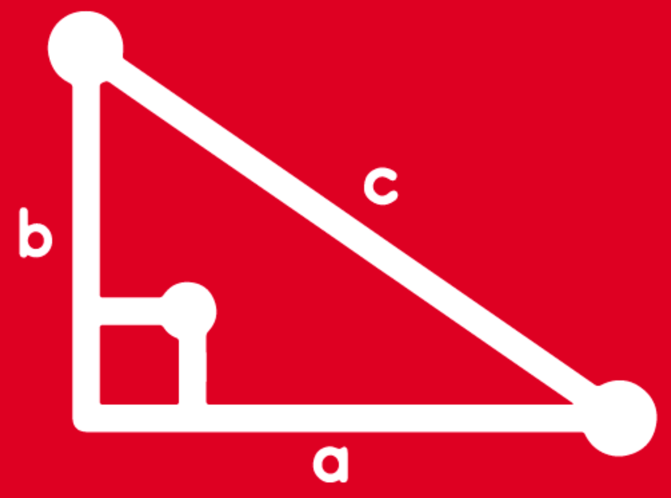
TRIGONOMETRY

Chapter 19

2nd
SECONDARY



ÁNGULOS COTERMINALES

SACO OLIVEROS

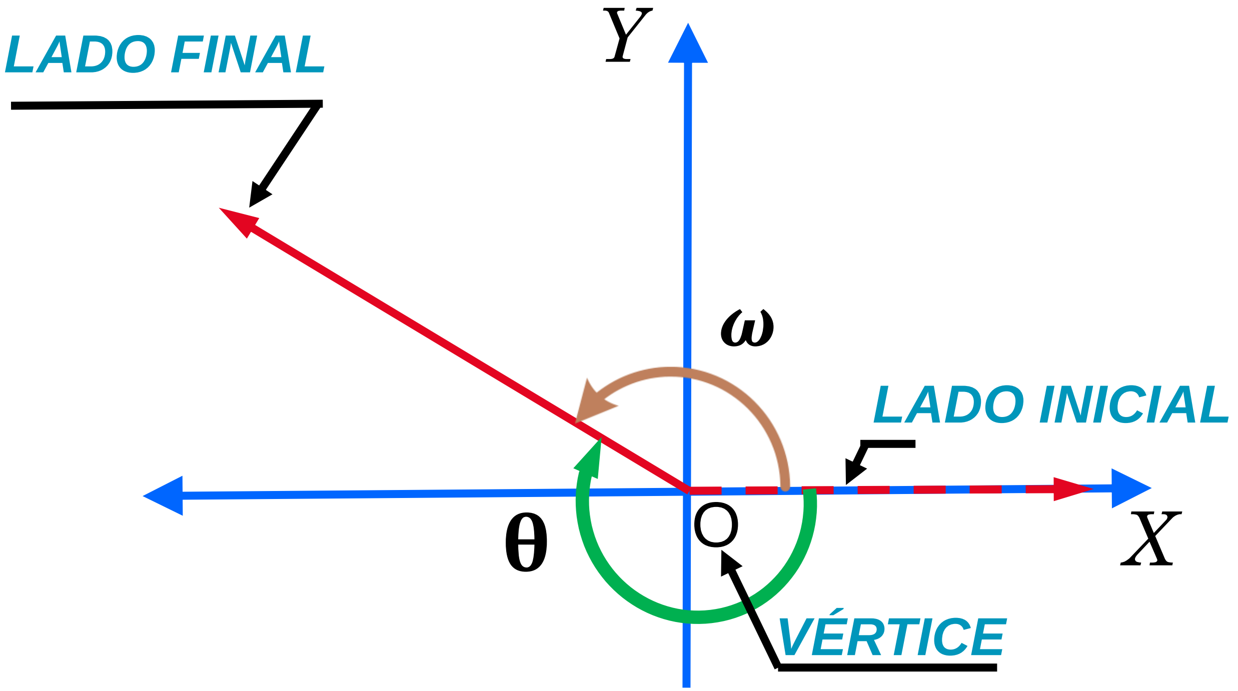
Helicomotivación

El Canadarm 2 , es un brazo manipulador robótico de la Estación Espacial Internacional. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones.

Para obtener la posición final del astronauta en el extremo del brazo , se requiere un uso repetido de las razones trigonométricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

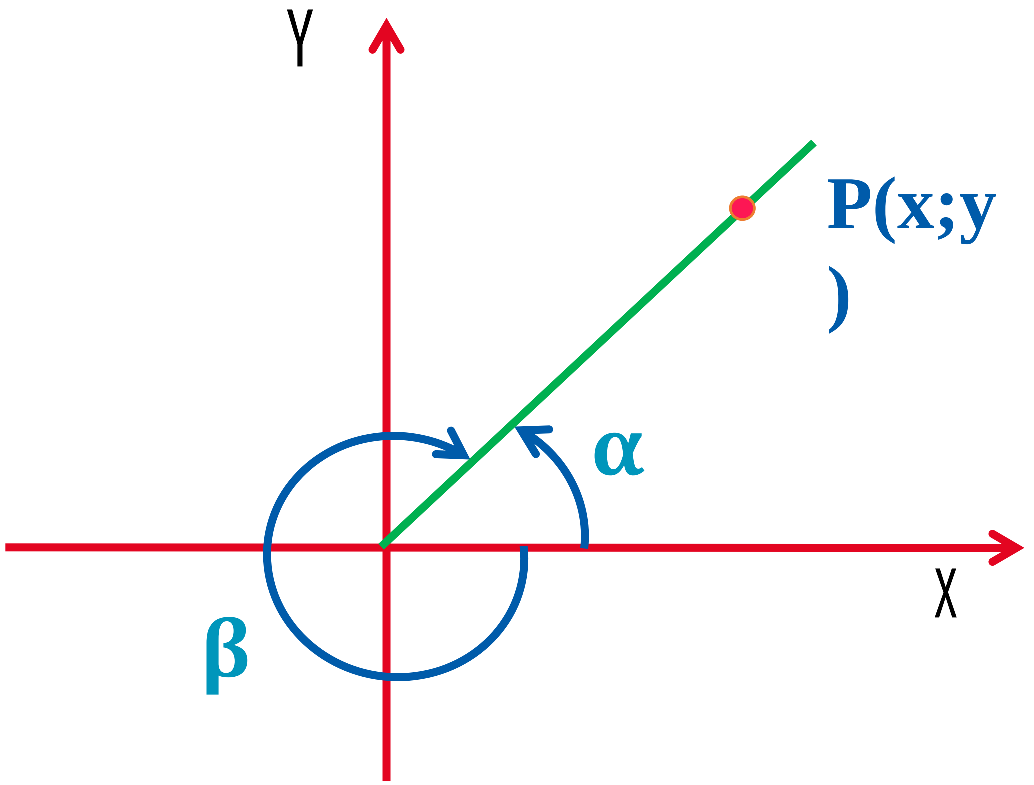
ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, vértice y lado final (terminal). Solo se diferencian en su medida.



De la figura: θ y ω son las medidas de dos ángulos coterminales.

Siendo α y β las medidas de dos ángulos coterminales, se verifica lo siguiente:



$$\boxed{\alpha - \beta = 360° n;\ n \in Z}$$

$$\boxed{R.T.(\alpha) = R.T.(\beta)}$$

Es decir:

$$\begin{cases} \text{sen}\alpha = \text{sen}\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \tan\beta \\ \cot\alpha = \cot\beta \\ \sec\alpha = \sec\beta \\ \csc\alpha = \csc\beta \end{cases}$$

1 Indique cuáles de los siguientes pares de ángulos son coterminales.

I. 350° y –70°
II. 780° y 60°
III. 510° y 170°

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son x e y, se cumple:

$$x - y = 360°n;\ n \in \mathbb{Z}$$

RESOLUCIÓN

I. 350°- (-70°) = 350°+70° = 420°

No son ángulos coterminales.

II. 780°- 60° = 720° = 2(360°)

Sí son ángulos coterminales.

III. 510° - 170° = 340°

No son ángulos coterminales.

$\therefore$ La II pareja son ángulos coterminales.

2 Siendo α y 53° las medidas de dos ángulos coterminales, efectúe:

$$P = 15\text{sen}\alpha - 8\cot\alpha$$

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son α y 53° se cumple:

$$\text{R.T.}(\alpha) = \text{R.T.}(53°)$$

RESOLUCIÓN

Como α y 53° son coterminales, entonces:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}53°$$

$$\cot\alpha = \cot 53°$$

Reemplazando en P:

$$P = 15\text{sen}53° - 8\cot 53°$$

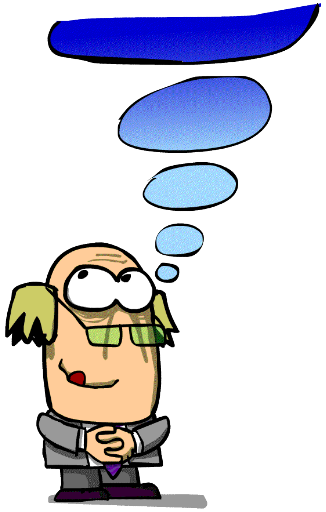
$$P = 15\left(\frac{4}{5}\right) - 8\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$P = 12 - 6$$

$$\therefore \boxed{P = 6}$$

3 Si los ángulos θ y α son las medidas de dos ángulos coterminales, reduzca

$$M = \frac{8\cot\alpha}{\cot\theta} - \frac{3\sec\theta}{\sec\alpha} + 2$$



Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son θ y α se cumple:

$$R.T.(\theta) = R.T.(\alpha)$$

RESOLUCIÓN

Como θ y α son coterminales, entonces:

$$\cot\theta = \cot\alpha$$

$$\sec\theta = \sec\alpha$$

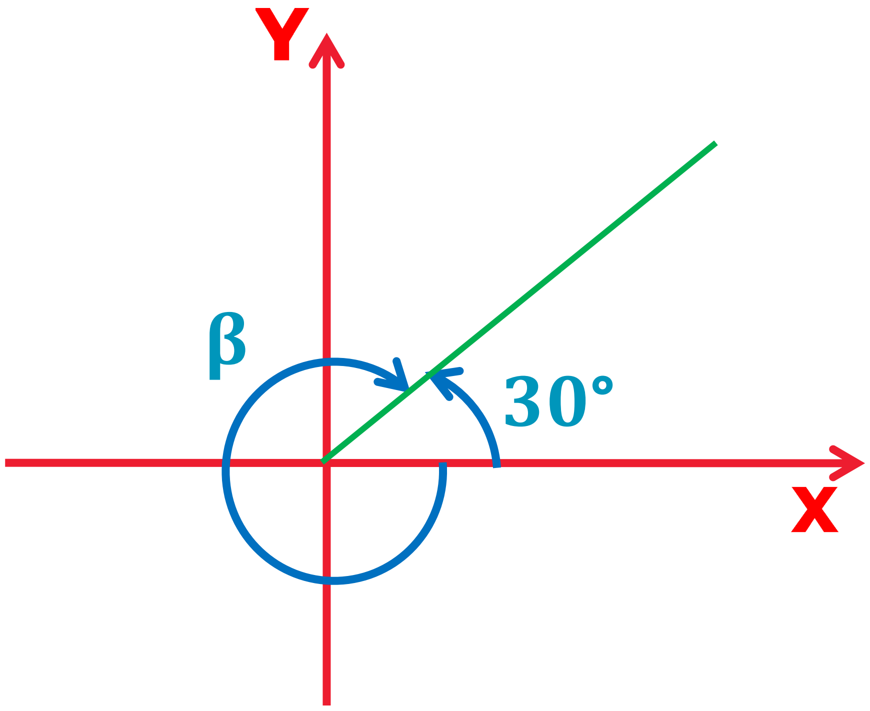
Reemplazando en M:

$$M = \frac{8\cancel{\cot\theta}}{\cancel{\cot\theta}} - \frac{3\cancel{\sec\theta}}{\cancel{\sec\theta}} + 2$$

$$M = 8 - 3 + 2$$

$$\therefore \boxed{M = 7}$$

4 Del gráfico



Efectúe $E = \sqrt{3}\sec\beta - \cot^2\beta$

RESOLUCIÓN

Del gráfico, β y 30° son las medidas de dos ángulos coterminales, por lo tanto:

$$\sec\beta = \sec 30°$$

$$\cot\beta = \cot 30°$$

Reemplazando en E:

$$E = \cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 - 3$$

$$\therefore \boxed{E = -1}$$

SACO OLIVEROS

5

Si α y β son las medidas de dos ángulos coterminales, tal que tanα = 2; efectúe

$$K = \frac{5\tan\beta - \tan\alpha}{4}$$

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son α y β, se cumple:

$$R.T.(\alpha) = R.T.(\beta)$$

RESOLUCIÓN

Como α y β son coterminales, entonces:

$$\tan\alpha = \tan\beta$$

Reemplazando en K:

$$K = \frac{5\tan\alpha - \tan\alpha}{4}$$

$$K = \frac{\cancel{4}\tan\alpha}{\cancel{4}} \Rightarrow K = \tan\alpha$$

$\therefore$ $\boxed{K = 2}$

6 Siendo θ y β son las medidas de dos ángulos coterminales, reduzca:

$$F = (3\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}\beta)\csc\theta$$

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son θ y β, se cumple:

$$R.T.(\theta) = R.T.(\beta)$$

RESOLUCIÓN

Como θ y β son coterminales, entonces:

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\beta$$

Reemplazando en F:

$$F = (3\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}\theta)\csc\theta$$

$$F = 7\operatorname{sen}\theta\csc\theta$$

1

$$\therefore \boxed{F = 7}$$

7

Si α y β son las medidas de dos ángulos coterminales, tal que tanα + tanβ = - 8 y β $\in IIC$; efectúe 4cot β

Como α y β son las medidas de dos ángulos coterminales, se cumple:

$$tan\alpha = tan\beta$$

RESOLUCIÓN

En la condición:

$$\tan\beta \quad + \tan\beta \qquad = -8$$

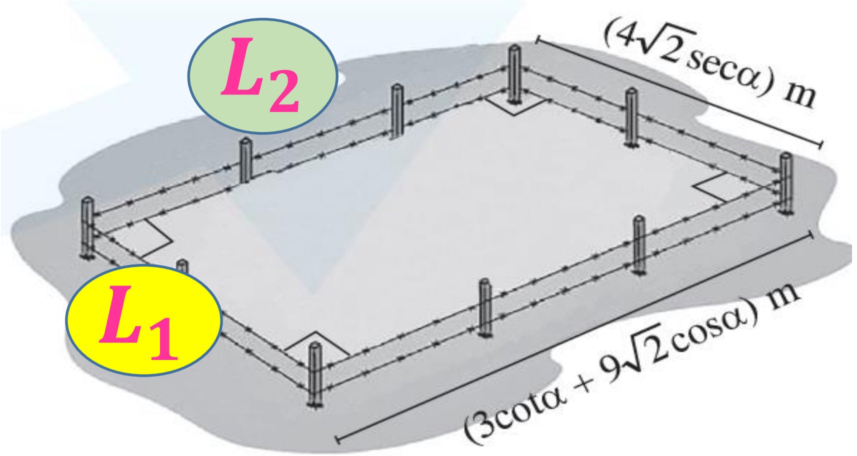
$$2\tan\beta$$

Así: $\tan\beta = -4 \implies \cot\beta = -\dfrac{1}{4}$

Piden: $4\cot\beta = \cancel{4}\left(-\dfrac{1}{\cancel{4}}\right)$

$\therefore$ $\boxed{4\cot\beta = -1}$

8 David compró un terreno en forma de rectángulo, tal como se muestra en la figura



Si α y 45° son las medidas de dos ángulos coterminales, ¿cuál es el área de dicho terreno?

RESOLUCIÓN

Como α y 45° son coterminales, luego

$\boxed{\sec\alpha = \sec 45°}$ $\boxed{\cot\alpha = \cot 45°}$

Así:

$$L_1 = 4\sqrt{2}\sec 45° = 8m$$

$$\sqrt{2}$$

$$L_2 = 3(1) + 9\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = 12m$$

Piden: Área del terreno = $L_1 \times L_2$

$$\boxed{\text{Área del terreno} = 96m^2}$$