ALGEBRA

CHAPTER 10

5th
SECONDARY

BINOMIO DE NEWTON

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

Triángulo de tartaglia

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & \ldots & & & & & & & & \ldots & 1
\end{array}
$$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

Binomio de Newton

I) TEOREMA DE NEWTON

El desarrollo polinomial de la potencia de $(a+b)^n$, siendo n un número natural, viene dada por:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k \quad ; n \geq k \geq 0$$

Expansión de la potencia de $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = \underbrace{C_o^n . a^n + C_1^n . a^{n-1}\, b + C_2^n . a^{n-2}\, b^2 + \cdots + C_n^n b^n}_{n+1 \text{ términos}}$$

Ejemplo:

Desarrolle la potencia de $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^4$

Resolución:

$$(a+\mathbf{b})^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^4 = C_o^4 .\, a^4 + C_1^4 .\, a^3\, b + C_2^4 .\, a^2\, b^2 + C_3^4 ab^3 + C_4^4 .\, b^4$$

$$(a+b)^4 = 1.\, a^4 + 4.\, a^3\, b + 6.\, a^2\, b^2 + 4ab^3 + 1.\, b^4$$

$$\boxed{(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}$$

II) CARACTERISTICAS DEL DESARROLLO DEL BINOMIO DE NEWTON

1.– El desarrollo de $(a+b)^n$ $es\ un\ polinomio\ homogéneo\ de\ \ grado\ n$

2.–El número de términos del desarrollo de $(a+b)^n es\ igual$
$a \quad (n+1)$

3.–Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos
son números combinatorios complementarios

III) TÉRMINO GENERAL (T_{k+1})

Cualquier término del desarrollo de $(a+b)^n$ viene dado por :

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n a^{n-k} b^k}$$

Donde: (k+1) nos indica la posición (lugar) que ocupa el Término de dicho desarrollo.

Ejemplo:

Halle el tercer término en $(x^2+y^4)^5$

Resolución:

Se tiene: n=5

K+1=3 ⇨ K=2

$$T_3 = T_{2+1} = C_2^5 (x^2)^{5-2} \cdot (y^4)^2$$

$$T_3 = \frac{5\times4}{2\times1} x^6 y^8$$

$$\boxed{\therefore T_3 = 10x^6y^8}$$

IV) TÉRMINO CENTRAL

El lugar que ocupa el término central de $(a+b)^n$ *depende del valor de* n; *asi tenemos*:

a) n es par

Existe un único término central

$$Lugar\ (T_C)=\frac{n}{2}+1$$

b) n es impar

Existe dos términos centrales

$$Lugar\ (T_{C1})=\frac{n+1}{2}$$

$$Lugar\ (T_{C2})=\frac{n+3}{2}$$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

Problema 1

Determine el décimo término en el desarrollo de:

$$\left(343x^5 + \frac{1}{7x}\right)^{12}$$

Recordar

Término general del desarrollo de $(a+b)^n$

$$\boxed{T_{K+1} = C_k^n a^{n-k} b^k}$$

Resolución:

Se tiene: $n = 12$

$k + 1 = 10 \Rightarrow k = 9$

Calculamos T_{10}

$$T_{10} = T_{9+1} = C_9^{12}(343x^5)^{12-9} \cdot \left(\frac{1}{7x}\right)^9$$

$$T_{10} = C_9^{12}(7^3x^5)^3 \cdot \left(\frac{1}{7^9x^9}\right)$$

$$T_{10} = C_3^{12}(\cancel{7^9} \cdot x^{15}) \cdot \left(\frac{1}{\cancel{7^9}x^9}\right)$$

$$T_{10} = \underbrace{\left(\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}\right)}_{220} \cdot x^6$$

$$\boxed{\therefore T_{10} = 220x^6}$$

Problema 2

Determine el lugar del término que contiene a x^5 en:

$$\left(3x^5 + \frac{1}{x}\right)^{13}$$

Recordar

Término general del desarrollo de $(a+b)^n$

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n a^{n-k} b^k}$$

Resolución:

Se tiene: $n = 13$

$$T_{k+1} = C_k^{13}(3x^5)^{13-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$T_{k+1} = C_k^{13} 3^{13-k} . x^{65-5k} . \left(\frac{1}{x^k}\right)$$

Reduciendo la parte literal:

$$x^{\overset{5}{65-6k}}$$

del dato:

$$65 - 6k = 5$$

$$k = 10$$

$$\therefore \textit{El lugar del término es } k+1 = 11$$

Problema 3

Halle el coeficiente de x^{12} en el desarrollo de:

$$\left(1+x^2\right)^{30}$$

Recordar

Término general del desarrollo de $(a+b)^n$

$$\boxed{T_{k+1}=C_k^n a^{n-k} b^k}$$

Resolución:

Se tiene : $n=30$

$$T_{k+1}=C_k^{30}(1)^{30-k}.\left(x^2\right)^k$$

$$T_{k+1}=C_k^{30}\,1.\left(x^{\overset{12}{2k}}\right)$$

del dato:

$$2k=12$$

$$k=6$$

Luego el coeficiente es:

$$C_k^{30}=C_6^{30}$$

$$\boxed{\therefore \text{El coeficiente de } x^{12} \text{ es } C_6^{30}}$$

Problema 4

Obtenga el término central en el desarrollo de:

$$\left(x^3 - x^{-2}\right)^{10}$$

Recordar

Si n es par

$(a+b)^n$ *admite un solo término central, cuyo Lugar es:*

$$\boxed{Lugar(T_c) = \frac{n}{2} + 1}$$

Resolución:

Se tiene: $n = 10$

$$Lugar(T_c) = \frac{10}{2} + 1 = 6$$

Por lo tanto:

$$T_c = T_6 = T_{5+1} = C_5^{10}\left(x^3\right)^{10-5}\left(-x^{-2}\right)^5$$

$$T_c = \underbrace{\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}}_{252} x^{15}\cdot\left(-x^{-10}\right)$$

$$\boxed{\therefore T_c = -252x^5}$$

Problema 5

José quiere comprar una moto marca SUZUKI cuyo precio en soles es 4M; y M es el valor del término independiente en $(x^8 + x^{-4})^{12}$.
Si José tiene ahorrado S/1000. ¿Cuánto le falta ahorrar para comprar dicha Moto?

Recordar

Término general del desarrollo de $(a+b)^n$

$$\boxed{T_{K+1} = C_k^n a^{n-k} b^k}$$

Resolución:

Sea $M = T_{k+1}$ *el Término Independiente:*

$$M = T_{k+1} = C_k^{12} \underbrace{(x^8)^{12-k} \cdot (x^{-4})^k}$$

$$M = C_k^{12}\, x^{96-12k} \quad \ldots (\alpha)$$

Por ser Término Independiente se cumple:

$$96 - 12k = 0$$

$$\boxed{k = 8}$$

En (α)

$$M = C_8^{12} = C_4^{12}$$

$$M = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$M = 495 \quad \Rightarrow \quad 4M = 1980$$

$$\boxed{\therefore \text{ Le falta ahorrar } s/980}$$

Problema 6

Halle el valor de n, si en la expansión de $(x+3)^n$ los términos de lugares 9 y 10 tienen coeficientes iguales.

Recordar:

En los números combinatorios se cumple:

$$C_k^n = \left(\frac{n-k+1}{k}\right) C_{k-1}^n$$

Resolución:

Se tiene:

$$T_9 = T_{8+1} = C_8^n (x)^{n-8} . (3)^8$$

$$T_{10} = T_{9+1} = C_9^n (x)^{n-9} . (3)^9$$

Se cumple por dato:

$$\text{Coef}(T_9) = \text{Coef}(T_{10})$$

$$C_8^n . (\cancel{3})^8 = C_9^n . (\cancel{3})^9$$

$$C_8^n = C_9^n . (3)$$

$$\cancel{C_8^n} = \left(\frac{n-9+1}{\cancel{9}}\right) \cancel{C_8^n} . (\cancel{3})$$

$$1 = \frac{n-8}{3}$$

$$\boxed{\therefore n = 11}$$

Problema 7

Determine el lugar que ocupa el término independiente en el desarrollo de:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{55}$$

Recordar

Término general del desarrollo de $(a+b)^n$

$$\boxed{T_{k+1}=C_k^n a^{n-k} b^k}$$

Resolución:

Sea T_{k+1} el Término Independiente:

$$T_{k+1}=C_k^{55}\underbrace{\left(x^{2/3}\right)^{55-k}.\left(x^{-1/4}\right)^k}$$

$$T_{k+1}=C_k^{55}.\,x^{\frac{110-2k}{3}-\frac{k}{4}}$$

Por ser Término Independiente se cumple:

$$\frac{110-2k}{3}-\frac{k}{4}=0$$

$$\frac{110-2k}{3}=\frac{k}{4}$$

$$440-8k=3k$$

$$\boxed{k=40}$$

$\therefore$ *El lugar del Término Independiente es* $k+1=41$

Problema 8

Calcule "$a+b$", si $\left(\frac{x^a}{y^{b-5}}+\frac{y^b}{x}\right)^b$ tiene un término central cuya parte literal es x^3y^{15}

Recordar

Si n es par

$(a+b)^n$ *admite un solo término central, cuyo* Lugar *es*:

$$\boxed{Lugar(T_c)=\frac{n}{2}+1}$$

Resolución:

Se tiene: $n=b$

$$Lugar(T_c)=\frac{b}{2}+1$$

Calculamos el T_c:

$$T_c=T_{\frac{b}{2}+1}=C^b_{b/2}\left(\frac{x^a}{y^{b-5}}\right)^{b-b/2}\cdot\left(\frac{y^b}{x}\right)^{b/2}$$

Reduciendo la parte literal:

$$\left(\frac{x^a}{y^{b-5}}\cdot\frac{y^b}{x}\right)^{b/2}=x^{(a-1)b/2}\cdot y^{5b/2}\ =x^3y^{15}\ (dato)$$

Del Dato:

$$\frac{5b}{2}=15 \Rightarrow b=6$$

$$(a-1)\frac{6}{2}=3 \Rightarrow a=2$$

$$\boxed{\therefore a+b=8}$$