ALGEBRA

Chapter 14

4th
SECONDARY

Ecuaciones polinomiales

SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS

La edad de Carla es $(a^3 + b^3 + c^3)$ años; donde

a; b y c son las raíces de la ecuación: $x^3 + 2x - 4 = 0$

¿Cuál será la edad de Carla dentro de 4 años?

RPTA: 16 años

HELICO THEORY

CHAPTHER 14

SACO OLIVEROS

ECUACIONES POLINOMIALES

I) ECUACIÓN POLINOMIAL

Son aquellas ecuaciones de grado "n" de la forma:

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0} \quad a_0 \neq 0,\ n \in Z^+$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$: son los coeficientes de P(x)

- $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
- $P(x) = 4x^5 + 7x^3 - 8x - 3 = 0$

III) Raíz de un Polinomio

Diremos que "a" es una raíz de un polinomio P(x) si y sólo si P(a)=0.

Ejemplo:

Sea : $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Se observa que "1" es raíz de P(x),pues:

$$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$$

$$P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{P(1)=0}$$

III) PROPIEDADES

1) Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ ➡ Presenta 3 raíces

$x^5 + 7x^3 - 8x - 3 = 0$ ➡ Presenta 5 raíces

2) Sea: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

Si $a + \sqrt{b}$ es raíz de P(x) ⟺ $a - \sqrt{b}$ también es raíz de P(x)

Si: $5+\sqrt{3}$ es raíz de P(x) ➡ $5-\sqrt{3}$ es raíz de P(x)

IV) TEOREMA DE CARDANO

Sea la ecuación :

$$P(x) = \overset{+}{a_0}x^n + \overset{-}{a_1}x^{n-1} + \overset{+}{a_2}x^{n-2} + \overset{-}{a_3}x^{n-3} + \ldots + \overset{(-1)^n}{a_n} = 0$$

cuyas raíces son: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

SUMA DE RAÍCES $\quad x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \dfrac{-a_1}{a_0}$

SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS $\quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots = \dfrac{a_2}{a_0}$

SUMA DE PRODUCTOS TERNARIOS $\quad x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots. = \dfrac{-a_3}{\ }$

Y así sucesivamente hasta llegar al “producto de raíces ”

PRODUCTOS DE RAÍCES $\quad x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{\ }$

EJEMPLOS APLICATIVOS

1) Sea: $\overset{+}{2}x^3\overset{-}{-3}x^2\overset{+}{-7}x\overset{-}{+1}=0$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{-7}{2}$

$\Rightarrow x_1x_2x_3=\frac{-1}{2}$

2) Sea: $\overset{+}{2}x^4\overset{-}{-}x^3\overset{+}{-10}x^2\overset{-}{+7}x\overset{+}{-8}=0$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x_1x_2+\ldots\ldots+x_3x_4=\frac{-10}{2}=-5$

$\Rightarrow x_1x_2x_3+\ldots\ldots+x_2x_3x_4=\frac{-7}{2}$

$\Rightarrow x_1x_2x_3x_4=\frac{-8}{2}=-4$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 14

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1

Resuelva la ecuación polinomial:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$$

Resolución **Divisores de 30:** $\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15 \pm 30;$

	1	-6	-1	30
X= 3		3	-9	-30
	1	-3	-10	$\boxed{0}$

$$(x^2-3x-10)(x-3)=0$$

$$(x-5)(x+2)(x-3)=0$$

$$C.S=\{-2;3;5\}$$

$x_1 = 5$ $x_2 = -2$ $x_3 = 3$

PROBLEMA 2

Sean x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación:

$x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$ Efectúe: $T=\dfrac{(x_1x_2x_3)^{x_1+x_2+x_3}}{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}$

Resolución

$$\overset{+}{x^3} \overset{-}{- 2x^2} \overset{+}{+ 5x} \overset{-}{+ 3} = 0$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 5$

$x_1x_2x_3 = -3$

$$T = \frac{(-3)^2}{5}$$

$$\boxed{T = \frac{9}{5}}$$

PROBLEMA 3

Sabiendo que a es la suma de raíces y b es el producto de raíces de la ecuación:

$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 3 = 0.$

Efectúe: P=$(a+b)^{-4}$

Resolución

$$\overset{+}{3x^4} \overset{-}{+} \overset{+}{2x^3} + 5x^2 \overset{-}{+} x \overset{+}{+} 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-2}{3}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{3}{3}$$

$$a = \frac{-2}{3} \qquad b = \frac{3}{3}$$

$$(a+b)^{-4} = \boxed{81}$$

PROBLEMA 4

Se tiene a $x_1, x_2\ y\ x_3$ como raíces de la ecuación: $x^3 + 7x + 5 = 0$ Efectúe:

M=$\frac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

Resolución

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{0x^2} + \overset{+}{7x} + \overset{-}{5} = 0$$

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7$$

$$x_1x_2x_3 = -5$$

Nota Si: a+b+c=0

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$

$$M = \frac{3x_1x_2x_3}{-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}$$

$$M = \frac{3(-5)}{-2(7)} = \boxed{\frac{15}{14}}$$

PROBLEMA 5

La edad de Lucio en años es $\frac{T}{2}$; donde T está dado por el siguiente problema:
" Si a; b y c son las raíces de: $x^3 - 2x^2 - 3x - 5=0$
Halle $T = a^2 + b^2 + c^2$ "¿ Cuál es la edad de Lucio?

Resolución

$$\overset{+}{x^3} \overset{-}{-} 2x^2 \overset{+}{-} 3x \overset{-}{-} 5 = 0$$

a+b+c= $\frac{2}{1} = 2$

ab+bc+ca= $-\frac{3}{1} = -3$

abc= $\frac{5}{1}$ =5

RECORDAR:

$$(a + b + c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ac)$$

Remplazando

$$(2)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2} + 2(-3)$$

$$4 = \mathrm{T} - 6$$

$$\boxed{10 = \mathrm{T}}$$

Piden: $\frac{T}{2} = \frac{10}{2} = 5$

RPTA: LUCIO TIENE 5 AÑOS

PROBLEMA 6

Si a, b y c son raíces de la ecuación $x^3+4x^2+2=0$.

Efectúe M= $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$

Resolución

$$\overset{+}{x^3}+\overset{-}{4x^2}+\overset{+}{0x}+\overset{-}{2}=0$$

a+b+c=- $\frac{4}{1}=-4$

ab+bc+ca= $\frac{0}{1}=0$

abc= - $\frac{2}{1}=-2$

del Dato: M= $\frac{a}{bc}\cdot\frac{a}{a}+\frac{b}{ac}\cdot\frac{b}{b}+\frac{c}{ab}\cdot\frac{c}{c}$

M= $\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}$

Recordar: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

$$(-4)^2=a^2+b^2+c^2+2(0)$$

$$16=a^2+b^2+c^2$$

Remplazando

M= $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{16}{-2}=-8$

rpta $M=-8$

PROBLEMA 7

Halle el valor de a+b , si la ecuación :
$x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ tiene como raíces a 5 y 2

Resolución

$+ \qquad - \qquad + \qquad -$

$$x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$$

$$\boxed{\text{sea } x_1 = 5\,;\, x_2 = 2}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1} = -a$$

$$x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_3 . x_1 = \frac{b}{1} = b$$

$$x_1 . x_2 . x_3 = -10$$

luego $10 . x_3 = -10$

$$x_3 = -1$$

Remplazando:

- $x_1 + x_2 + x_3 = -a$

  $5+2-1 = -a$

  $-6 = a$

- $x_1 . x_2 + x_2 . x_3 + x_3 . x_1 = b$

  $(5)(2) + (2)(-1) + (5)(-1) = b$

  $10 - 2 - 5 = b$

  $3 = b$

piden: $a + b$:

$a + b = -6+3$

rpta $a + b = -3$

PROBLEMA 8

Siendo a, b y c las raíces de: $2x^3+3x-12=0$

Efectúe: P=$ab(a+b)^3+ac(a+c)^3+bc(b+c)^3$

Resolución

$$\overset{+}{2}x^3+\overset{-}{0}x^2+\overset{+}{3}x-\overset{-}{12}=0$$

a+b+c=0

ab+bc+ca= $\frac{3}{2}$

abc= $\frac{12}{2}=6$

Recordar: Si a+b+c=0

$$\boxed{a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)}$$

del Dato: P=$ab(-c)^3+ac(-b)^3+bc(-a)^3$

P=$-abc^3-acb^3-bca^3$

$$\boxed{P=-abc(c^2+b^2+a^2)}$$

Hallamos: $c^2+b^2+a^2$

$$a^2+b^2+c^2=-\cancel{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right)$$

$$\boxed{-3}$$

Remplazamos

P= $(-6)(-3)$

$$\boxed{rpta\ P=18}$$