ALGEBRA

Chapter 21

3th
SECONDARY

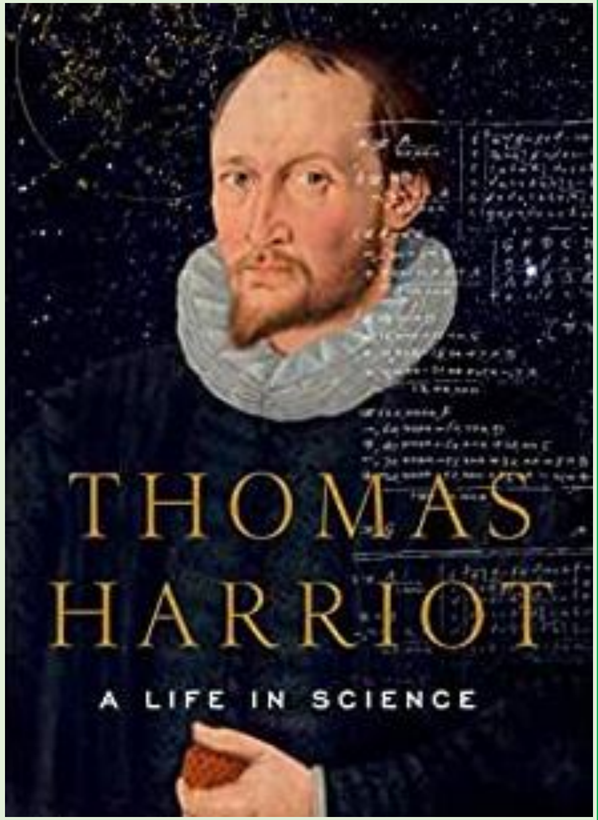
INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Fue ...
ciudad de Oxford en el año 1560 y falleció el 2 de julio de 1621 en Londres. Fue el creador de notaciones y símbolos que se utilizan en álgebra tales como: > (mayor que) y < (menor que). Además observó los satélites de Júpiter y las manchas solares.

La vida de Thomas Harriot sobresale notablemente en diferentes campos. Viaja a las Américas y realiza un trabajo etnográfico; en la astronomía observa la luna y dibuja mapas de sus descubrimientos; además se convierte en un matemático prolífico y se le atribuye la teoría de la refracción.



INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una inecuación de segundo grado con una incógnita (ecuación cuadrática), es aquella desigualdad condicional que reducida a su más simple expresión tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad ax^2 + bx + c \leq 0$$

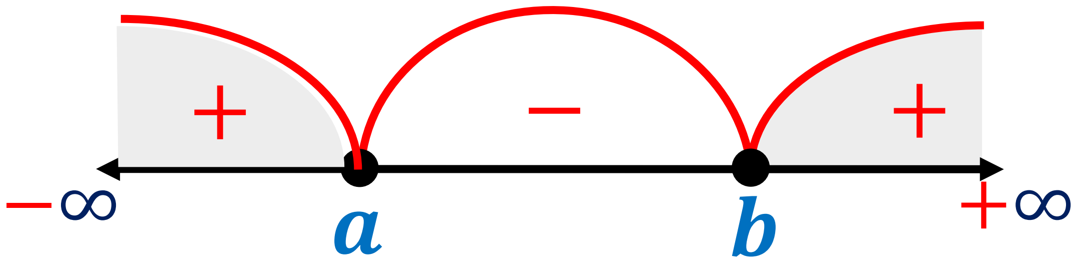
$$, a \neq 0$$

Para su resolución utilizaremos el criterio de los PUNTOS CRÍTICOS.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

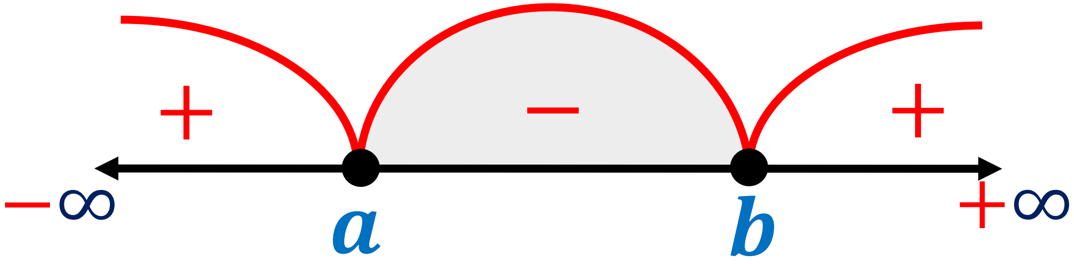
La solución de la inecuación de segundo grado depende del sentido de la desigualdad.

$$(x-a)(x-b) \geq 0$$



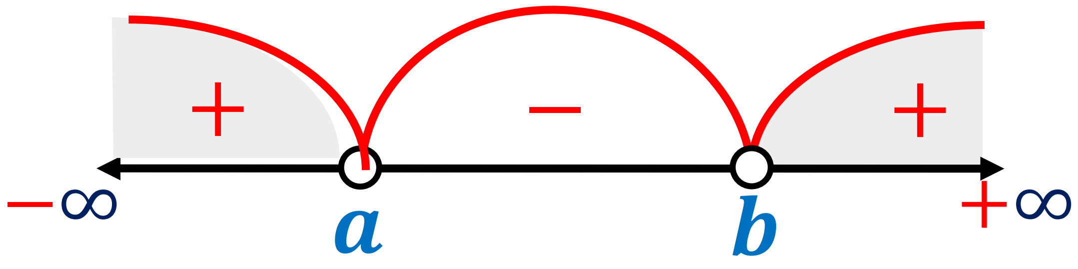
$$x \in \langle -\infty; a] \cup [b; +\infty\rangle$$

$$(x-a)(x-b) \leq 0$$



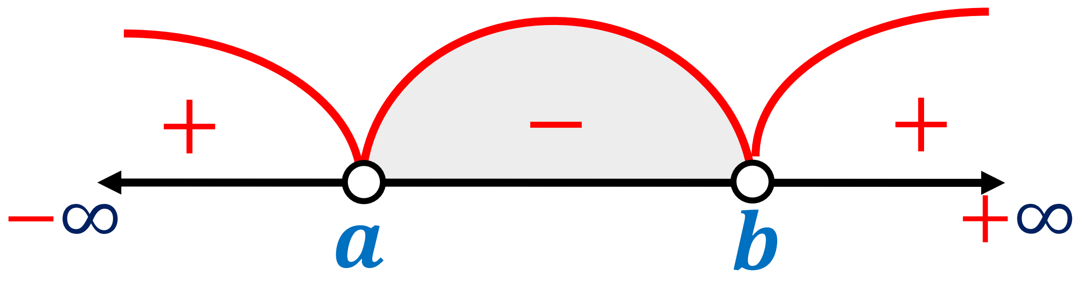
$$x \in [a; b]$$

$$(x-a)(x-b)>0$$



$$x \in \langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; +\infty\rangle$$

$$(x-a)(x-b)<0$$



$$x \in \langle a; b\rangle$$

REGLA PRÁCTICA:

Puntos críticos abiertos	Puntos críticos cerrados	
$<$	$\leq$	$-$
$>$	$\geq$	$+$

PROPIEDAD:

Para que $ax^2 + bx + c > 0 \;,\; \forall x \in \mathbb{R}$

se debe cumplir: $\boxed{a > 0 \quad \wedge \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0}$

Problema 1

Resuelva

$$3x^2 + 10x + 1 \geq 3x + 7$$

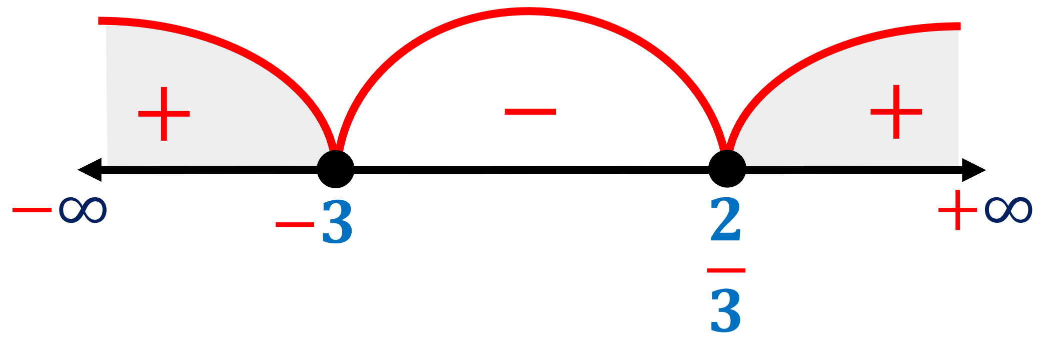
Resolución:

$$3x^2 + 10x + 1 \geq 3x + 7$$

$$3x^2 + 7x - 6 \geq 0$$

$$\begin{array}{cc} 3x & -2 \\ x & +3 \end{array}$$

$$(3x - 2)(x + 3) \geq 0$$



$$\therefore\ x \in \langle -\infty; -3] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right\rangle$$

Problema 2

Obtenga el conjunto solución de

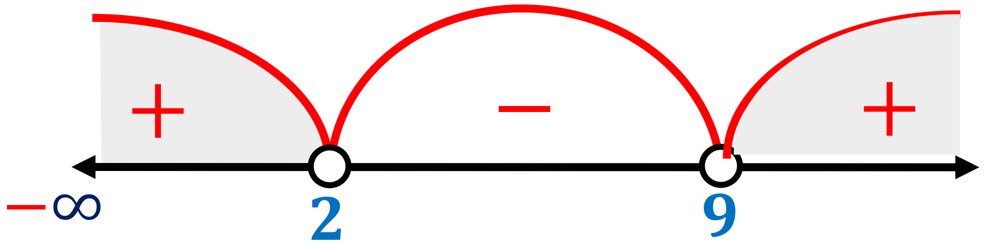
$$x^2 - 11x + 18 > 0$$

Resolución:

$$x^2 \underline{- 11x} + 18 > 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -2 \\ x & -9 \end{array}$$

$$(x-2)(x-9) > 0$$



$$\therefore \quad x \in \langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 9; +\infty\rangle$$

Problema 3

Halle el conjunto solución de

$$(x+6)(2x+3) > (x+6)(x+2)$$

Resolución:

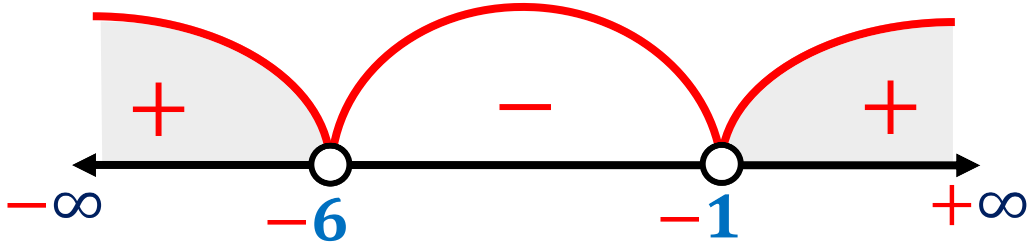
$$(x+6)(2x+3) > (x+6)(x+2)$$

$$2x^2 + 3x + 12x + 18 > x^2 + 8x + 12$$

$$x^2 + 7x + 6 > 0$$

$$\begin{array}{ll} x & +6 \\ x & +1 \end{array}$$

$$(x+6)(x+1) > 0$$



$$\therefore \; x \in \langle -\infty; -6 \rangle \cup \langle -1; +\infty \rangle$$

Problema 4

Determine el conjunto solución de la inecuación

$$(3x-2)^2 \geq (2x-3)^2$$

Resolución:

$$(3x-2)^2 \geq (2x-3)^2$$

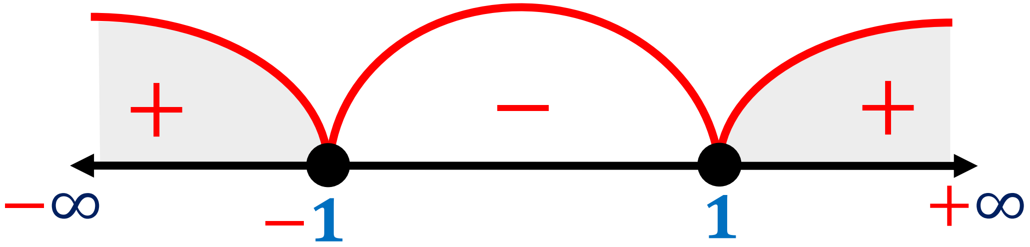
$$9x^2 \cancel{-12x} + 4 \geq 4x^2 \cancel{-12x} + 9$$

$$5x^2 - 5 \geq 0$$

$$5(x^2-1) \geq 0$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$(x+1)(x-1) \geq 0$$



$$\therefore \quad x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

Problema 5

Resuelva

$$x^2 \leq 10x$$

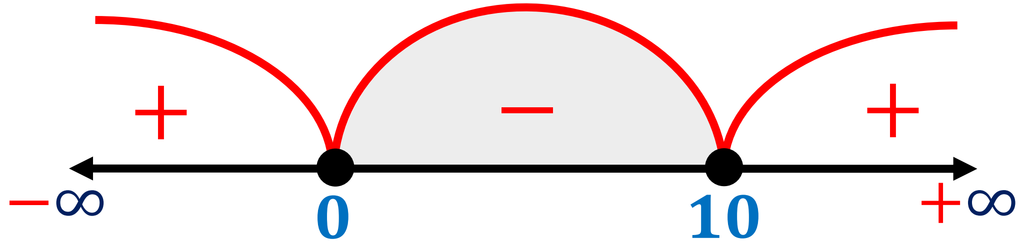
sabiendo que la suma de los valores enteros de x representa la edad del profesor Victor. Si dentro de 25 años se jubilará el profesor, ¿a los cuántos años se jubilará?

Resolución:

$$x^2 \leq 10x$$

$$x^2 - 10x \leq 0$$

$$x(x-10) \leq 0$$



$$\boxed{x \in [0;10]}$$

Edad del profesor Victor:

$$0+1+2+\ \dots\ +8+9+10 = \frac{10\times 11}{2} = \boxed{55 \text{ años}}$$

∴ *El profesor Victor se jubilará a los 80 años.*

Problema 6

Calcule el conjunto solución de

$$\frac{x^2-8}{4}+\frac{x(x+2)}{2}\leq 3$$

Resolución:

$$\cancel{4}\left(\frac{x^2-8}{\cancel{4}}\right)+\cancel{4}\left(\frac{x(x+2)}{\cancel{2}}\right)\leq 4(3)$$

$$mcm(4,2)=4$$

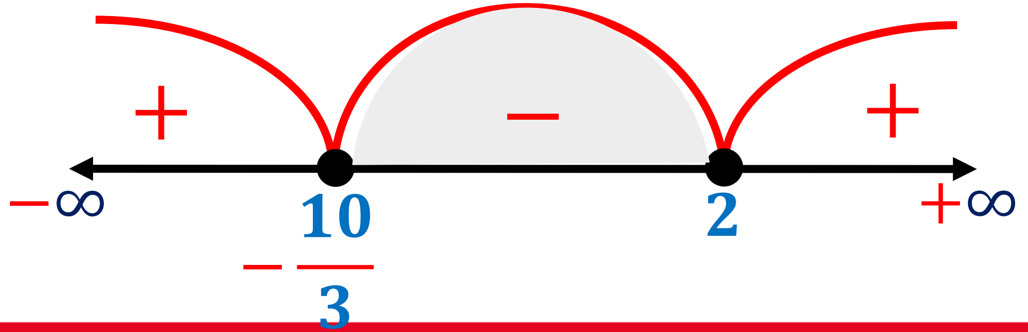
$$(x^2-8)+2x(x+2)\leq 12$$

$$x^2-8+2x^2+4x\leq 12$$

$$3x^2\underline{+4x}-20\leq 0$$

$$\begin{array}{lr} 3x & +10 \\ x & -2 \end{array}$$

$$(3x+10)(x-2)\leq 0$$



$$\therefore\ x\in\left[-\frac{10}{3};2\right]$$

Problema 7

Determine el menor valor entero de m que verifica a

$$2x^2 - 12x - 7 > -m \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$

RECUERDA:

Para que $ax^2 + bx + c > 0 \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$

se debe cumplir:

$$\wedge \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Resolución:

$$2x^2 - 12x - 7 > -m \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 12x + (m - 7) > 0$$

positivo

Calculando el discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(m - 7) < 0$$

$$144 - 8m + 56 < 0$$

$$200 < 8m$$

$$25 < m$$

$$\boxed{m > 25}$$

$$\boxed{\therefore \quad m_{mín} = 26}$$

Problema 8

Obtenga el mínimo valor entero de b si se cumple que

$$x^2 - 4x + 2b > 0 \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$

RECUERDA:

Para que $ax^2 + bx + c > 0$ $,\forall x \in \mathbb{R}$

se debe cumplir:

$$\wedge \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Resolución:

$$1x^2 - 4x + 2b > 0 \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$

positivo

Calculando el discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(2b) < 0$$

$$16 - 8b < 0$$

$$16 < 8b$$

$$2 < b$$

$$\boxed{b > 2}$$

$$\therefore \quad b_{mín} = 3$$