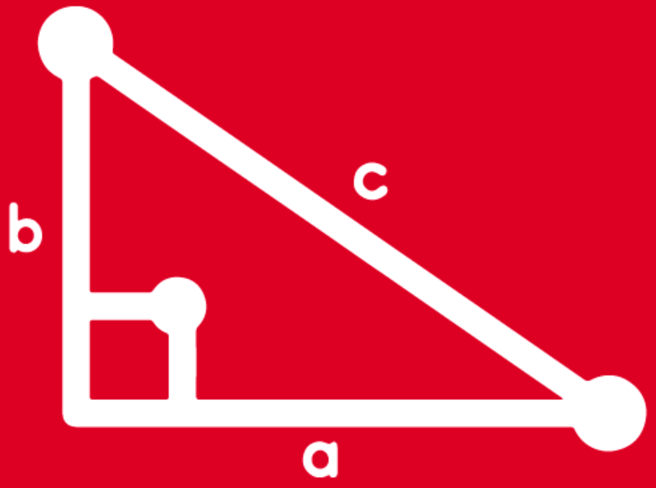
TRIGONOMETRY

Chapter 15



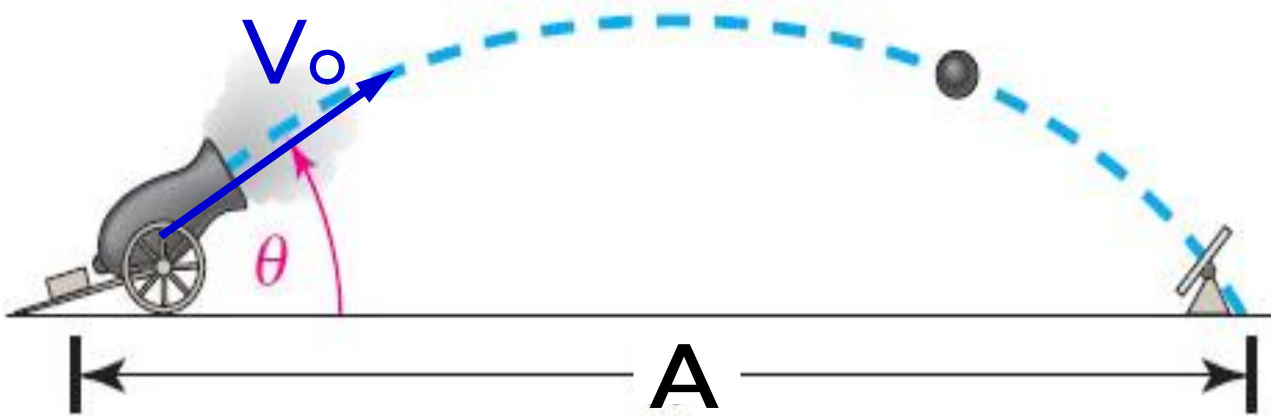
5th
SECONDARY

Identidades trigonométricas del ángulo doble

SACO OLIVEROS

Un objeto se dispara hacia arriba con un ángulo " θ " respecto de la horizontal, con una velocidad inicial de " V_o " metros por segundo.
Ignorando la resistencia del aire, el alcance " A " en metros, está dado por:

$= \_\_\_ \qquad \theta$



Pregunta:

Calcule el ángulo " θ ", de disparo para una velocidad inicial de $V_o = 25$ metros por segundo y un alcance de $A = 50$ metros.

Resolución:

Rpta: $\theta = \_\_\_$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Para el seno :

$$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$$

Para el coseno :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Para la tangente :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Ejemplos:

- $=$
- $\alpha = \quad \alpha - \quad \alpha$
- $\dfrac{\quad}{-} =$

1. Si $\quad \alpha = - \quad \alpha \in \quad$, calcule: $\quad \alpha$

RESOLUCIÓN

Dato:

$$\cot\alpha = \frac{1}{3} = \frac{x}{y}$$

Como $\alpha \in IIIC$

$$x = -1 \ ; \quad y = -3$$

Radio Vector:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{10}$$

Piden:

$$\mathrm{sen}2\alpha = 2\underbrace{\mathrm{sen}\alpha}_{\frac{y}{r}}.\underbrace{\cos\alpha}_{\frac{x}{r}}$$

$$\mathrm{sen}2\alpha = 2\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{6}{10}$$

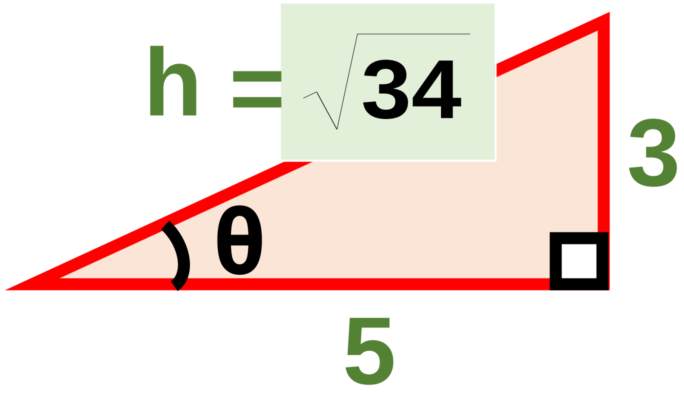
$$\therefore \ \boxed{\mathrm{sen}2\alpha = \frac{3}{5}}$$

2. Si θ es un ángulo y se cumple que: $\frac{}{\theta} = \frac{}{\theta}$

Calcule: θ

RESOLUCIÓN

Dato: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{3}{5}$



Piden:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2$$

$$\cos 2\theta = \left(\frac{25}{34}\right) - \left(\frac{9}{34}\right) = \frac{16}{34}$$

$$\therefore \boxed{\cos 2\theta = \frac{8}{17}}$$

3. En el siguiente cuadro se observa el tamaño de las carpetas de música que Camila tiene almacenada en su memoria de USB.

Carpeta	Tamaño (GB)
Pop	A
Cumbia	B

Donde:

$$= \quad \sqrt{}$$

$$= \frac{\sqrt{}}{- \quad {}^{2}}$$

Indicar cual de las carpetas tiene el mayor tamaño.

RESOLUCIÓN

Recordar las identidades

$$\sin 2x = 2\,\mathrm{sen}x\cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

- $A = 6\sqrt{2}.\ 2.\mathrm{sen}22°30'.\cos 22°30'$

$\Rightarrow A = 6\sqrt{2}\ \mathbf{sen45°} = 6\sqrt{2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{A = 6}$

- $B = 5\sqrt{3}.\dfrac{2\tan 15°}{1-\tan^2 15°}$

$\Rightarrow B = 5\sqrt{3}\ \mathbf{tan30°} = 5\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{B = 5}$

$\therefore$ La carpeta de mayor tamaño es POP

4. Reduzca: $= \frac{+ \qquad\qquad -}{\cdot}$

RESOLUCIÓN

Recordar las identidades

$$\boxed{\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$M = \frac{(\cos 20° + \operatorname{sen}20°)(\cos 20° - \operatorname{sen}20°)}{\operatorname{sen}25°.\cos 25°}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2\overbrace{(\cos^2 20° - \operatorname{sen}^2 20°)}^{\cos 40°}}{\underbrace{2\operatorname{sen}25°.\cos 25°}_{\operatorname{sen}50°}} \Rightarrow M = \frac{2\cos 40°}{\operatorname{sen}50°} \Rightarrow M = \frac{2\cancel{\operatorname{sen}50°}}{\cancel{\operatorname{sen}50°}}$$

$$\therefore \boxed{M = 2}$$

5. Demuestre que la expresión: $= \dfrac{\theta + \quad \theta}{\theta - \quad \theta} - \dfrac{\theta - \quad \theta}{\theta + \quad \theta}$

Se reduce a: θ

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

$$E = \frac{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 - (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2}{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}$$

Recordar las identidades

$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

$$E = \frac{4\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow E = \frac{2.2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow E = \frac{2\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\therefore \boxed{E = 2\tan 2\theta}$$

6. Calcule sen2x, si se cumple que: $\left(\frac{\pi}{} - \quad\right) = \frac{}{\sqrt{}}$

RESOLUCIÓN

Dato: $\operatorname{sen}(45° - x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Desarrollando:

$\Rightarrow \operatorname{sen}45° \cos x - \cos 45° \operatorname{sen}x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \operatorname{sen}x) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\Rightarrow \cos x - \operatorname{sen}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Recordar las identidades

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Elevando al cuadrado:

$$\underbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}_{1} - \underbrace{2\cos x \operatorname{sen}x}_{\operatorname{sen}2x} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}2x = \frac{2}{3}}$$

7. Sabiendo que $= \frac{\pi}{}$, determine el valor de:

$=$ $-$

RESOLUCIÓN

Dato: $E = senxcos^5x - cosxsen^5x$

$E = senxcosx(cos^4x - sen^4x)$

$E = senxcosx\underbrace{(cos^2x + sen^2x)}_{1}\underbrace{(cos^2x - sen^2x)}_{cos2x}$

$\Rightarrow 2E = \underbrace{2senxcosx}_{sen2x}cos2x$

$2E = sen2xcos2x$

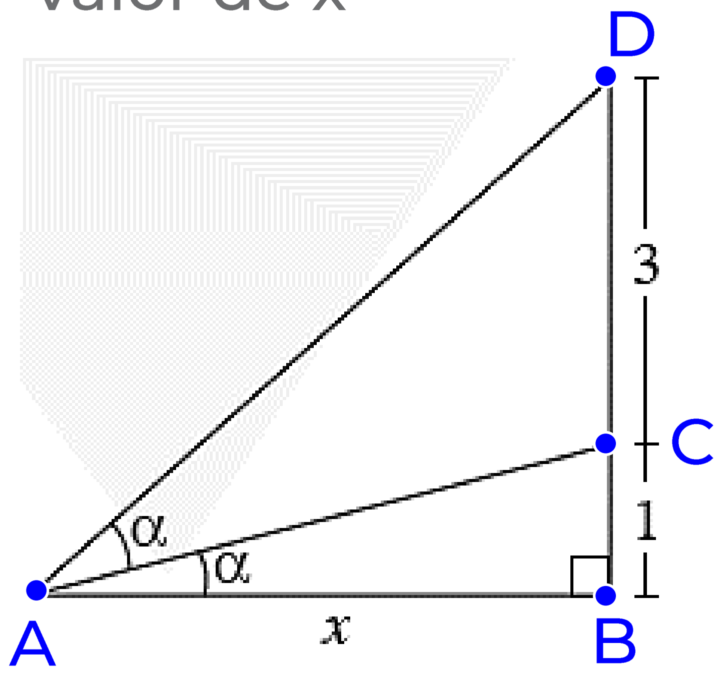
$4E = \underbrace{2sen2xcos2x}_{sen4x}$

$\Rightarrow E = \frac{1}{4}sen(4x)$

Usando dato:

$E = \frac{1}{4}sen(60°)$ $\therefore$ $\boxed{E = \frac{\sqrt{3}}{8}}$

8. Del gráfico, calcule el valor de x



Recuerda la identidad

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

RESOLUCIÓN

$\triangle$ABC: $\tan\alpha = \frac{1}{x}$

$\triangle$ABD: $\tan 2\alpha = \frac{4}{x}$

$$\Rightarrow \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow 2 = 4\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1-\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 2$$

$$\therefore \boxed{x = \sqrt{2}}$$