ALGEBRA

Chapter
20

4th

FUNCIONES I

SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS

SABIAS QUE

La noción actual de función empezó a desarrollarse en el siglo XIV cuando filósofos escolásticos medievales comenzaron a ver cómo podían medir y representar gráficamente las variaciones de ciertas magnitudes como la velocidad de un cuerpo en movimiento o el cambio de temperatura que experimenta un objeto metálico en diferentes puntos. La persona que quizás influyó en su inicio fue Nicole Oresme (1323-1382), en París. Fue el primero en utilizar diagramas para representar en el plano magnitudes variables, marcando los valores de la variable independiente en una línea recta y los valores de la variable dependiente a lo largo de una recta perpendicular a la primera.
La relación matemática expresada de forma explícita aparece en particular en los trabajos de mecánica de Galileo. En 1667 Gregory define a la función como una cantidad obtenida de las otras cantidades mediante operaciones algebraicas sucesivas o mediante cualquier otra operación que se pueda imaginar (límite)- Esto ayudó a que la matemática avanzara considerablemente y se iniciara una interrelación entre el álgebra, el cálculo y la geometría.

Leibniz (1714) empleó el término función para designar cantidades que dependen de una variable, es decir que se sirve de la palabra para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente o de la subtangente y de la normal. Se debió a él el análisis de los puntos máximos y mínimos de una curva, y crear un método general para obtener la recta tangente a las curvas en un punto determinado.
Podemos decir entonces que la función se originó por el interés en el cambio. Por el tiempo es una variable natural que está constantemente cambiando, aparentemente de modo uniforme; y a medida que el tiempo pasa todas las cosas cambian. Entonces es natural que al hombre se le ocurriera, entre tantos otros inventos, medir cómo y cuánto varía la posición de un objeto que es lanzado hacia arriba a medida que trascurre el tiempo. En la actualidad, es usual encontrar información presentada en forma de gráficos que nos muestran relaciones entre distintas variables, como: la recaudación impositiva en el transcurso de un año, el crecimiento de una población en un período determinado de tiempo, entre otras. Muchas de estas relaciones son funciones, se trabajará con un tipo particular de función: la función lineal.

HELICO THEORY

CHAPTHE

R 20

SACO OLIVEROS

FUNCIONES I

DEFINICIONES PREVIAS

Par Ordenado

Es un conjunto de los elementos a y b con un orden determinado, que se simboliza de la siguiente forma: (a ; b). Donde a es la primera componente y b es la segunda componente .

Ejemplos:

$(1;7)$ $\quad$ $(\frac{1}{2};3)$

Igualdad de pares ordenados

$\boxed{(a;b)=(c;d)}$ $\longleftrightarrow$ $\boxed{(a = c \wedge b = d)}$

TENER EN CUENTA

$\boxed{(a;b)\neq(b;a)}$

Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto producto o producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (a ; b), donde a $\in A$ y b $\in B$.

$\boxed{A \times B = \{(a;b) \in A \times B \ / \ a \in A \ \ y \ \ b \in B\}}$

Ejemplo:

Sea $A = \{2;5\}$ y $B = \{3;4;6\}$

$A \times B = \{(2;3),(2;4),(2;6),(5;3),(5;4),(5;6)\}$

TENER EN CUENTA

$\boxed{A \times B \neq B \times A}$

$\boxed{n(A \times B) = n(A) \times n(B)}$

$\boxed{A^2 = A \times A}$

Relaciones

Una relación R, del conjunto A al conjunto B, es todo subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir R es una relación de A a B si y solo si $R \subset A \times B$.

Ejemplo:

Sea $A = \{2 ; 5 ; 7\}$ y $B = \{3 ; 4\}$

$$R = \{(x ; y) \in A \times B \;/ x + y > 8\}$$

$$A \times B = \{(2 ; 3), (2 ; 4), (5 ; 3), (5 ; 4), (7 ; 3), (7 ; 4)\}$$

$$\boxed{R = \{(5 ; 4), (7 ; 3), (7 ; 4)\}}$$

Dominio de una Relación

Son todas las primeras componentes que definen la Relación. { Dom(R) o DomR}

Rango de una Relación (imagen)

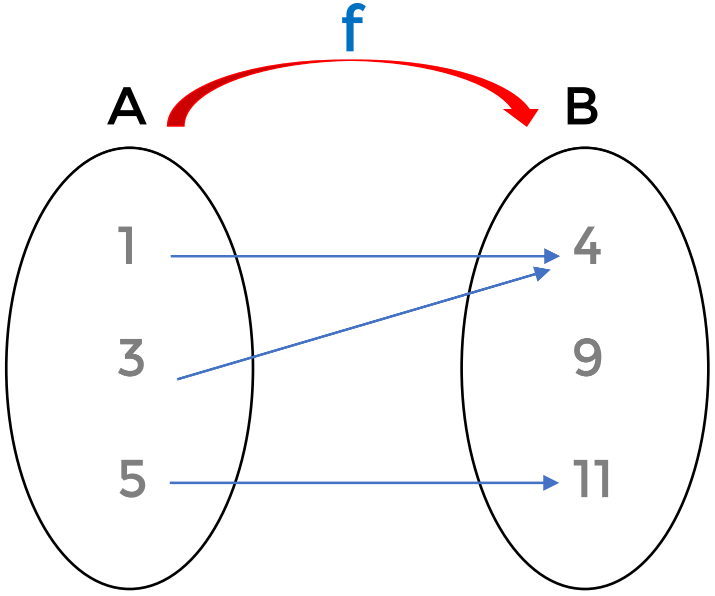
Son todas las segundas componentes que definen la Relación. { Ran(R) o RanR}

Tomando el ejemplo anterior

$\boxed{Dom(R) = \{5 ; 7\}}$ $\boxed{Ran(R) = \{3 ; 4\}}$

FUNCIÓN

Dados dos conjuntos A y B no vacíos ,una función F es aquella correspondencia de $F : A \rightarrow B$ tal que para algún elemento $x \in A$ le corresponde a lo más , un elemento $y \in B$.



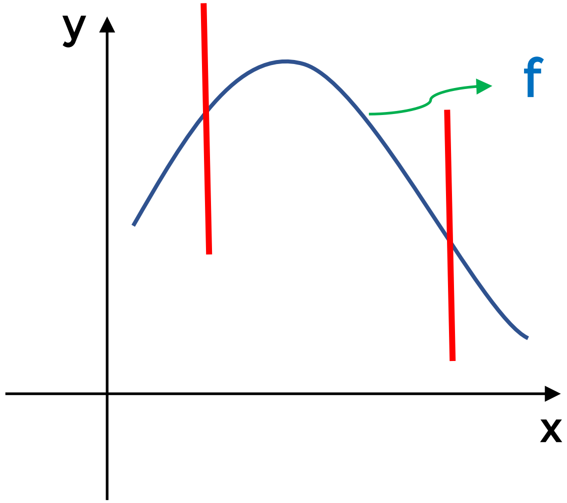
f ES UNA FUNCION

$f = \{ (1;4), (3;4), (5;11) \}$

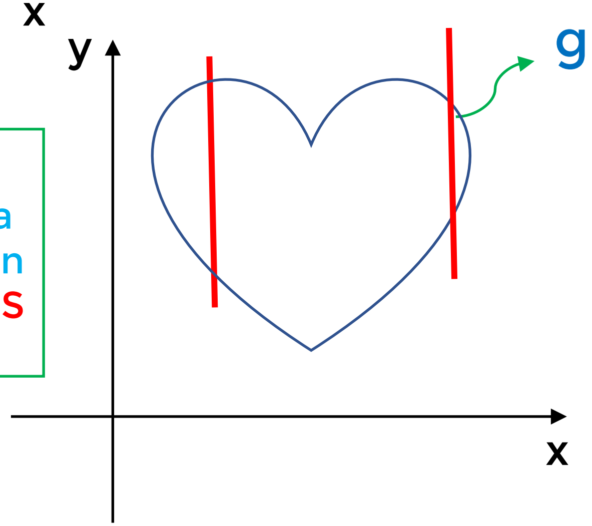
Además:

$\boxed{f(1) = 4}$ $\boxed{f(3) = 4}$ $\boxed{f(5) = 11}$

Si tenemos una gráfica en el plano cartesiano



Si al trazar segmentos verticales intersectando a f, lo hacen en un solo punto entonces f ES FUNCION



Si al trazar segmentos verticales intersectando a g, lo hacen en mas de un punto entonces g NO ES FUNCION

HELICO PRACTICE

CHAPTHE
R 20

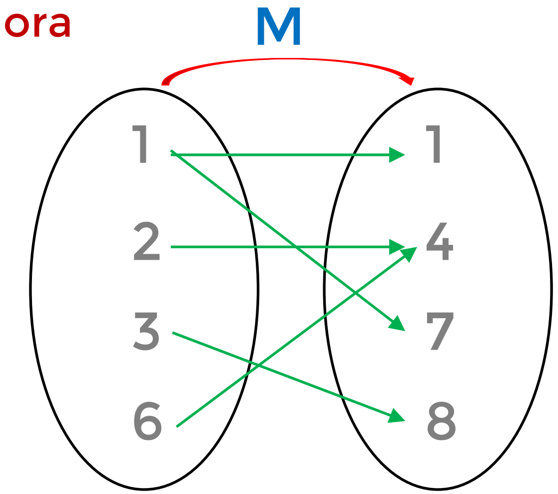
1. Se tiene el conjunto :
M={(1;1),(2;4),(6;4),(1;7),(3;8)} Calcule:
I. Dominio y Rango de M
II.¿M es Función? Justifique gráficamente

RESOLUCIÓN

Dom(M) = { 1 ; 2 ; 3 ; 6 }

Ran(M) = { 1 ; 4 ; 7 ; 8 }

Ahora



Como el elemento 1 tiene dos imágenes

M no es función

RECORDAR

Dominio de una Relación
Son todas las primeras componentes que definen la Relación. { Dom(R) o DomR}

Rango de una Relación (imagen)
Son todas las segundas componentes que definen la Relación. { Ran(R) o RanR}

2. Si $A = \{2 ; 3 ; 4\}$ $B = \{1 ; 5\}$. Halle el número de elementos de:

$R = \{(a ; b) \in A \times B \;/\; a > b\}$

RESOLUCIÓN

$R = \{ (a ; b) \in A \times B \;/ a > b \}$

$A \times B = \{ (2 ; 1) , (2 ; 5) , (3 ; 1) , (3 ; 5) , (4 ; 1) , (4 ; 5) \}$

Los pares ordenados $(a ; b)$ donde $a > b$

$\boxed{R = \{ (2 ; 1) , (3 ; 1) , (4 ; 1) \}}$

El número de elementos de R es 3

3. Si el siguiente conjunto:
H={(5;b-8),(6;a+1),(4;7),(5;2b-9),(6;3a-3)}
es una función. Calcule: a + b

RESOLUCIÓN

Como H es función

$$(5; b-8) = (5; 2b-9)$$

$$\Rightarrow \quad b - 8 = 2b - 9$$

$$\boxed{b = 1}$$

Como H es función

$$(6; a+1) = (6; 3a-3)$$

$$\Rightarrow \quad a + 1 = 3a - 3$$

$$\boxed{a = 2}$$

Nos piden

$$\boxed{a + b = 3}$$

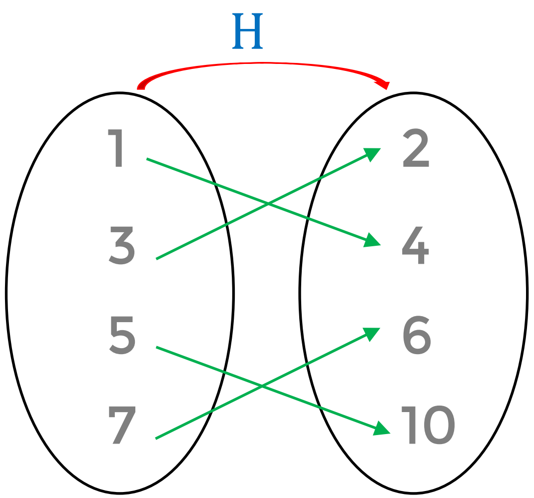
RECORDAR

H será función H : A → B si y solo si para un elemento x ϵ A le corresponde a lo más , un elemento y ϵ B.

Igualdad de pares ordenados

$$\boxed{(a; b) = (c; d)} \longleftrightarrow \boxed{(a = c \wedge b = d)}$$

4. Si:



Calcular: $M = \dfrac{H(5) + H(7)}{H(1).H(3)}$

RESOLUCIÓN

Reemplazando

$$\mathbf{M} = \frac{10 + 6}{4.2}$$

$$\boxed{M = 2}$$

5. Sea la función: M={(1;8),(2;-3),(5;1),(7;-2),(4;2)}

Calcular: $$Q = \frac{M(2) + M(1) + M^2(7)}{M(4) + M(5)}$$

RECORDAR

$f = \{ (1 ; 4) , (3 ; 4) , (5 ; 11) \}$

$\boxed{f(1) = 4}$ $\boxed{f(3) = 4}$ $\boxed{f(5) = 11}$

RESOLUCIÓN

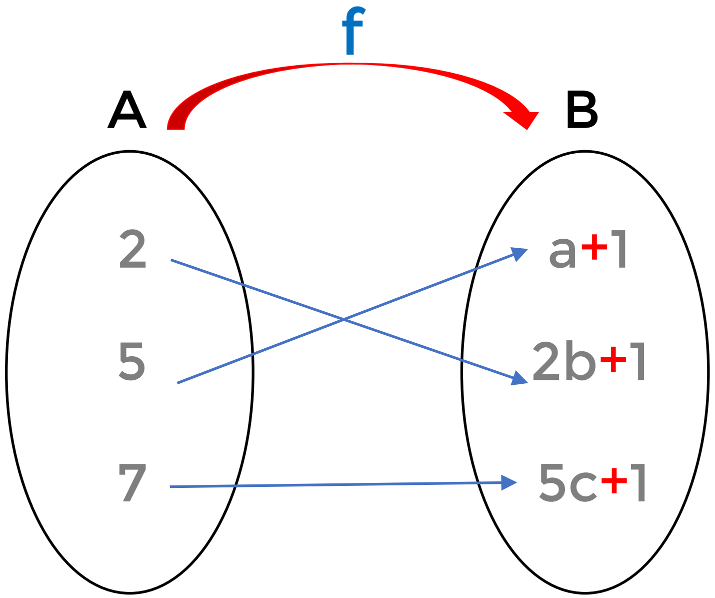
Reemplazando

$$Q = \frac{(-3) + (8) + (-2)^2}{(2) + (1)}$$

$$Q = \frac{9}{3}$$

$$\boxed{Q = 3}$$

6. La edad de Carlos es 2T años; donde T está dado por el resultado del siguiente problema:
Sea la función:
$f(x) = 3x$ Calcule: $T = a + b + c$
¿Qué edad tendrá Carlos dentro de 8 años?



RESOLUCIÓN

Sabemos que: $f(x) = 3x$

$f(2) = 6$ $\quad$ $f(5) = 15$ $\quad$ $f(7) = 21$

En el gráfico

$f(2) = 2b + 1$ $\quad$ $f(5) = a + 1$ $\quad$ $f(7) = 5c + 1$

$2b + 1 = 6$ $\quad$ $a + 1 = 15$ $\quad$ $5c + 1 = 21$

$b = \frac{5}{2}$ $\quad$ $a = 14$ $\quad$ $c = 4$

$T = \frac{41}{2}$

La edad de Carlos es 49 años

7. Si:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1; \text{ si } & x < -1 \\ 4; \text{ si } -1 \leq x < 5 \\ -x + 2; \text{ si } & x \geq 5 \end{cases}$$

Calcule:

$$M = \frac{f(0) + f(-3) - f(9)}{3}$$

RESOLUCIÓN

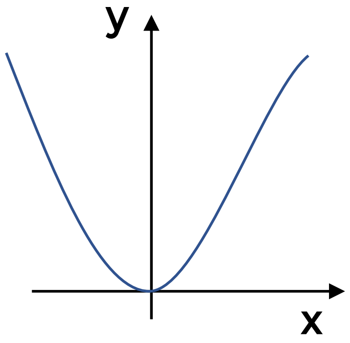
Reemplazando

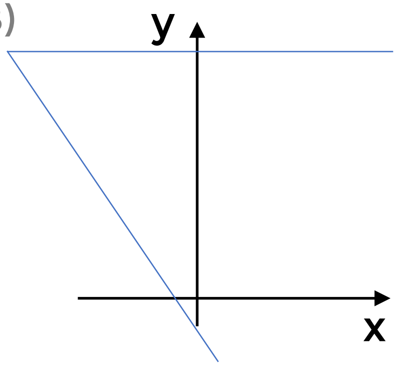
$$M = \frac{4 + (-5) - (-7)}{3}$$

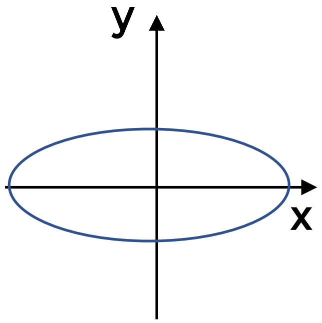
$$M = \frac{6}{3}$$

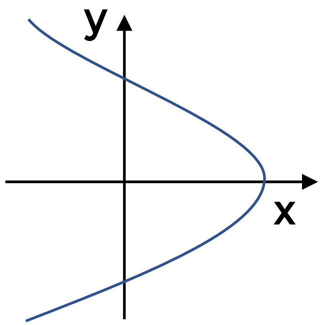
$$\boxed{M = 2}$$

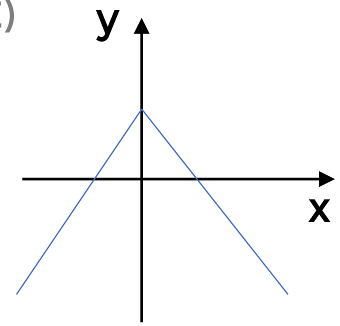
8. ¿Cuál(es) representa(n) una función?

A)


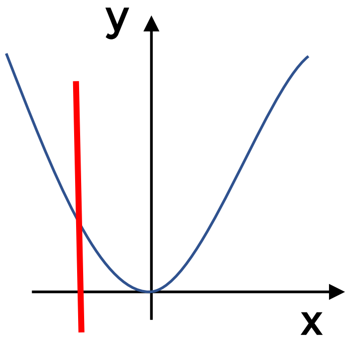
B)


C)


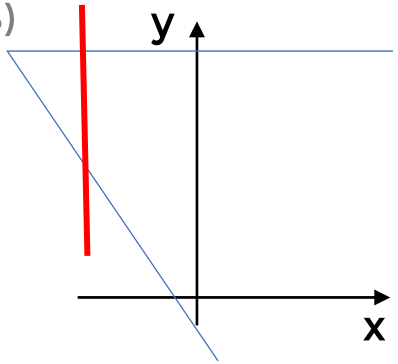
D)


E)


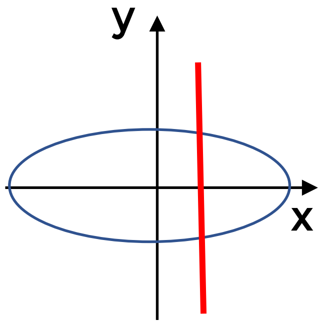
RESOLUCIÓN

A)


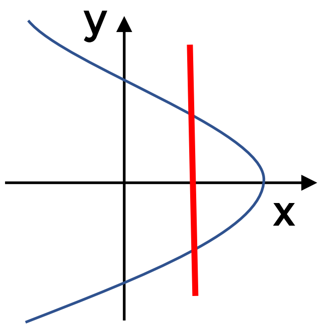
ES FUNCIÓN

B)


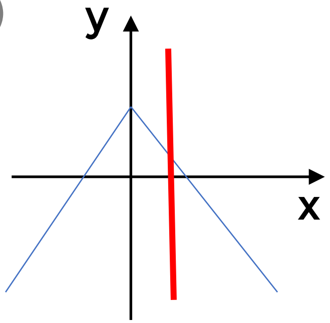
NO ES FUNCIÓN

C)


NO ES FUNCIÓN

D)


NO ES FUNCIÓN

E)


ES FUNCIÓN