ALGEBRA

Chapter 1

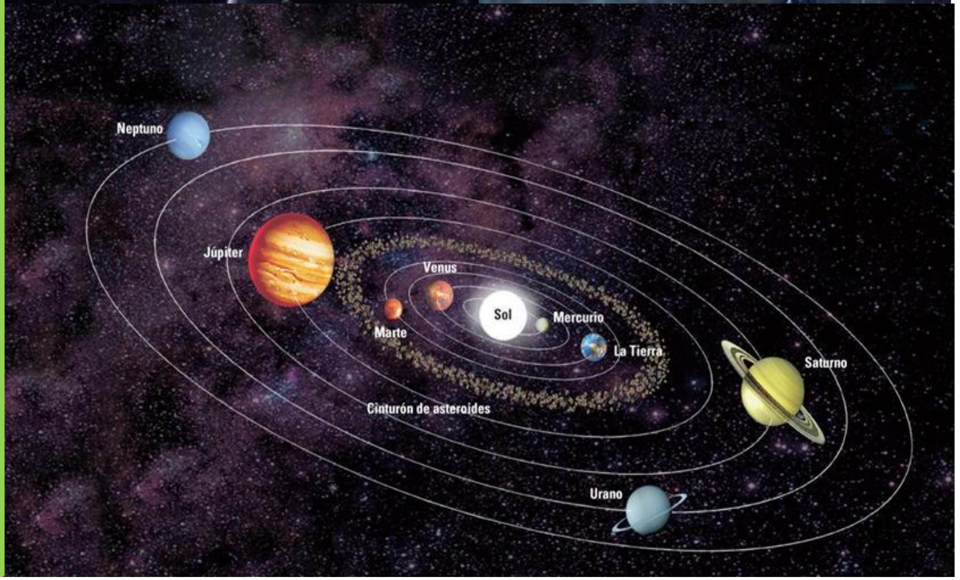
3th
SECONDARY

Leyes de exponentes I

SACO OLIVEROS

¿Qué es un año luz?

La cosa más rápida que conocemos es la luz, la cual viaja a una velocidad de 300,000 kilómetros por segundo en el espacio vacío. Para tener una idea de qué tan rápido es esto, ¡la luz puede viajar siete veces alrededor de la Tierra en un segundo! Los astrónomos usan la velocidad de la luz para medir qué tan lejos están los objetos en el espacio. Ellos usan una unidad llamada año-luz. Un año-luz es la distancia que la luz puede viajar en un año. En un año la luz viaja aproximadamente 5'880,000'000,000 millas o 9'460,000'000,000 kilómetros. Esta distancia es 1 año-luz. Por ejemplo, la estrella más cercana a nosotros está aproximadamente a 4.3 años-luz de distancia. Nuestra galaxia, la Vía Láctea, tiene aproximadamente 150,000 años luz de diámetro y la galaxia grande más cercana, Andrómeda, está a 2.3 millones de años luz de distancia.



LEYES DE EXPONENTES I

¿QUÉ ES LA POTENCIACIÓN?

Es una operación matemática que consiste en determinar una expresión llamada potencia, a partir de otras dos expresiones llamadas base y exponente.

$$b^n = P$$

Donde:

- $b \Longrightarrow$ *base*
- $n \Longrightarrow$ *exponente*
- $P \Longrightarrow$ *potencia*

EXPONENTE NATURAL:

$$a^n = \begin{cases} a\,; & \text{si } n = 1 \\ \underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{n \text{ veces}}\,; & \text{si } n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \end{cases}$$

EXPONENTE CERO:

$$\boxed{b^0 = 1} \quad ; b \neq 0$$

EXPONENTE NEGATIVO:

$$\boxed{b^{-n} = \frac{1}{b^n}} \quad ; b \neq 0$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n} \quad ; a \neq 0 \; ; b \neq 0$$

TEOREMAS:

1. Multiplicación de bases iguales:

$$a^m . a^n = a^{m+n} \quad ; a \in \mathbb{R}$$

2. División de bases iguales:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3. Potencia de potencia:

$$((a^m)^n)^p = a^{mnp} \quad ; a \in \mathbb{R}$$

4. Potencia de una multiplicación:

$$(a^m . b^n)^k = a^{mk} . a^{nk} \quad ; a, b \in \mathbb{R}$$

5. Potencia de una división:

$$\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^k = \frac{a^{mk}}{b^{nk}} \quad ; b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Problema 1

Efectúe

$$S=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}}$$

RECORDEMOS:

Exponente negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

HELICO | PRACTICE

Resolución:

$$S=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}}$$

$$S=\frac{2^3+5^2+3^1}{6^1}$$

$$S=\frac{8+25+3}{6}$$

$$S=\frac{36}{6}$$

$$\boxed{\therefore\quad S=6}$$

Problema 2

A qué es igual

$$E = \frac{2^{(-3)^{2^2}} . 2^{-3^{2^2}} . 2^{3^2}}{(2^3)^{2^2} . 2^{-3}}$$

RECORDEMOS:

Potencia de potencia:

$$\left((a^m)^n\right)^p = a^{mnp}$$

Multiplicación de bases iguales:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Resolución:

$$E = \frac{2^{(-3)^{2^2}} . 2^{-3^{2^2}} . 2^{3^2}}{(2^3)^{2^2} . 2^{-3}}$$

$$E = \frac{2^{(-3)^4} . 2^{-3^4} . 2^9}{(2^3)^4 . 2^{-3}}$$

$$E = \frac{2^{81} . 2^{-81} . 2^9}{2^{12} . 2^{-3}}$$

$$E = \frac{2^9}{2^9}$$

$$\boxed{\therefore \quad E = 1}$$

Problema 3

Simplifique

$$T = \frac{4^{2m+3}.8^{m+2}}{128^{m+1}}$$

RECORDEMOS:

Potencia de potencia:

$$\boxed{((a^m)^n)^p = a^{mnp}}$$

Multiplicación de bases iguales:

$$\boxed{a^m.a^n = a^{m+n}}$$

División de bases iguales:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Resolución:

$$T = \frac{4^{2m+3}.8^{m+2}}{128^{m+1}}$$

$$T = \frac{\left(2^2\right)^{2m+3}.\left(2^3\right)^{m+2}}{\left(2^7\right)^{m+1}}$$

$$T = \frac{2^{4m+6}.2^{3m+6}}{2^{7m+7}}$$

$$T = \frac{2^{7m+12}}{2^{7m+7}}$$

$$T = 2^5$$

$$\boxed{\therefore \quad T = 32}$$

SACO OLIVEROS

Problema 4

Reduzca

$$Q = \frac{2^{n+5} - 2^{n+4} + 2^{n+2}}{2^{n+3} + 2^{n+1}}$$

RECORDEMOS:

Multiplicación de bases iguales:

$$\boxed{a^{m+n} = a^m . a^n}$$

Resolución:

$$Q = \frac{2^{n+5} - 2^{n+4} + 2^{n+2}}{2^{n+3} + 2^{n+1}}$$

$$Q = \frac{2^n . 2^5 - 2^n . 2^4 + 2^n . 2^2}{2^n . 2^3 + 2^n . 2^1}$$

$$Q = \frac{\cancel{2^n}\left(2^5 - 2^4 + 2^2\right)}{\cancel{2^n}\left(2^3 + 2^1\right)}$$

$$Q = \frac{2^5 - 2^4 + 2^2}{2^3 + 2^1}$$

$$Q = \frac{32 - 16 + 4}{8 + 2}$$

$$Q = \frac{20}{10}$$

$$\boxed{\therefore \quad Q = 2}$$

Problema 5

El profesor Pedro le dice a Jaime; "El valor reducido de la expresión

$$E = \frac{81^2 . 45^4}{27^4 . 625}$$

representa la edad de mi padre". ¿Cuál es la edad del padre de Pedro?

RECORDEMOS:

Potencia de potencia:

$$((a^m)^n)^p = a^{mnp}$$

Multiplicación de bases iguales:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

División de bases iguales:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Resolución:

$$E = \frac{81^2 . 45^4}{27^4 . 625}$$

$$E = \frac{(3^4)^2 . (3^2 . 5)^4}{(3^3)^4 . 5^4}$$

$$E = \frac{3^8 . 3^8 . \cancel{5^4}}{3^{12} . \cancel{5^4}}$$

$$E = \frac{3^{16}}{3^{12}}$$

$$E = 3^4$$

$$\boxed{E = 81}$$

∴ *El padre de Pedro tiene 81 años.*

SACO OLIVEROS

Problema 6

Simplifique

$$E=\left\{\left[m^{-6}.\left(m^{3}\right)^{4}\right]^{2}.m^{-7}\right\}^{2}.m^{-10}\ ,\ m\neq 0$$

Resolución:

$$E=\left\{\left[m^{-6}.\left(m^{3}\right)^{4}\right]^{2}.m^{-7}\right\}^{2}.m^{-10}$$

$$E=\left\{\left[m^{-6}.m^{12}\right]^{2}.m^{-7}\right\}^{2}.m^{-10}$$

$$E=\left\{\left[m^{6}\right]^{2}.m^{-7}\right\}^{2}.m^{-10}$$

$$E=\left\{m^{12}.m^{-7}\right\}^{2}.m^{-10}$$

$$E=\left\{m^{5}\right\}^{2}.m^{-10}$$

$$E=m^{10}.m^{-10}$$

$$E=m^{0}$$

$$\boxed{\therefore\ \ E=1}$$

RECORDEMOS:

Potencia de potencia:

$$\boxed{\left(\left(a^{m}\right)^{n}\right)^{p}=a^{mnp}}$$

Multiplicación de bases iguales:

$$\boxed{a^{m}.a^{n}=a^{m+n}}$$

Problema 7

Siendo $2^{-x} = \frac{1}{3}$, evalúe

$$T = 8^x + 4^x + 2^x$$

RECORDEMOS:

Exponente negativo:

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Resolución:

Sea: $2^{-x} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{2^x} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{2^x = 3}$$

Nos piden:

$$T = 8^x + 4^x + 2^x$$

$$T = \left(2^3\right)^x + \left(2^2\right)^x + 2^x$$

$$T = (2^x)^3 + (2^x)^2 + 2^x$$

$$T = (3)^3 + (3)^2 + 3$$

$$T = 27 + 9 + 3$$

$$\boxed{\therefore\ T = 39}$$

Problema 8

Sabiendo que $\boxed{x^x = 3}$, halle el valor de la expresión

$$R = x^{2x^{x+1}}$$

RECORDEMOS:

Multiplicación de bases iguales:

$$\boxed{a^{m+n} = a^m . a^n}$$

Potencia de potencia:

$$\boxed{a^{mn} = (a^m)^n}$$

Resolución:

$$R = x^{2x^{x+1}}$$

$$R = x^{2x^x . x}$$

$$R = x^{x . 2x^x}$$

$$R = (x^x)^{2x^x}$$

$$R = (3)^{2.3}$$

$$R = 3^6$$

$$\boxed{\therefore \quad R = 729}$$