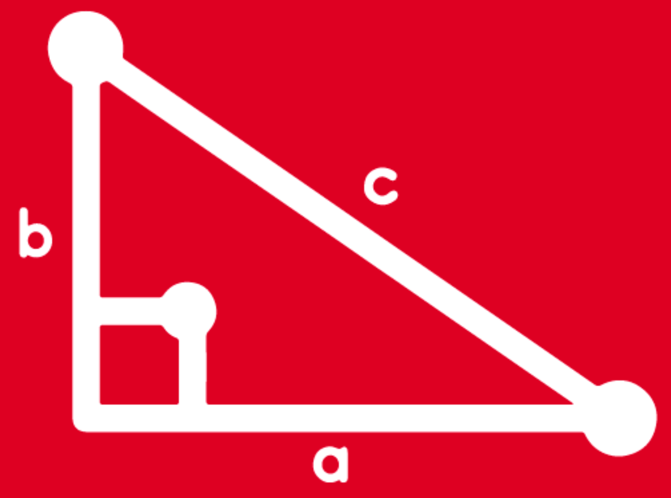
TRIGONOMETRY

Chapter 23
Session II

4th
SECONDARY



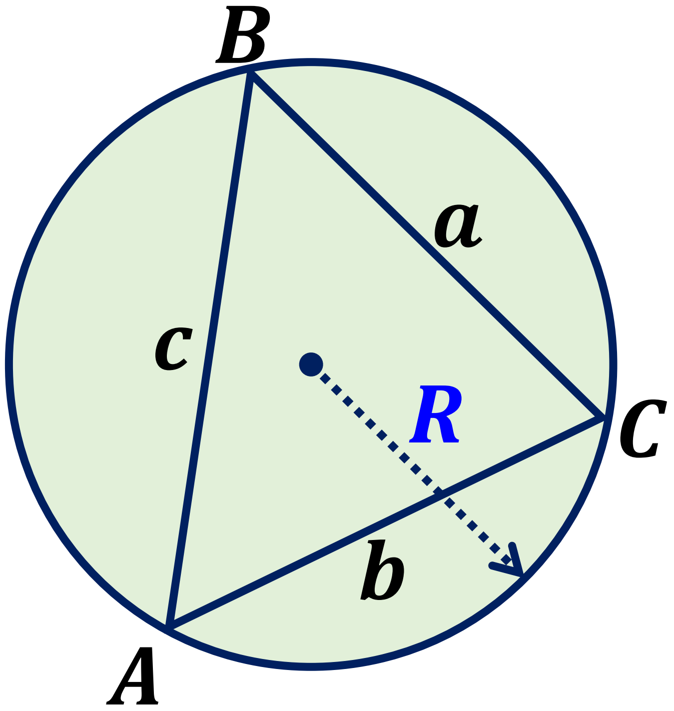
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

SACO OLIVEROS

Chanquillo: Observatorio astronómico de la costa peruana.

Ley de Senos

En todo triángulo se cumple que sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos al cual se oponen siendo la constante de proporcionalidad el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. En el ΔABC, se cumple:

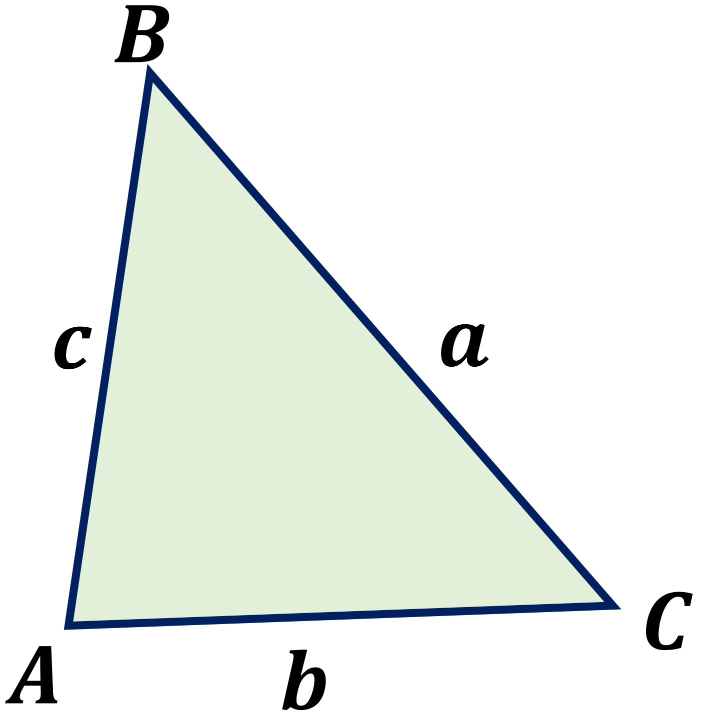


$$a = 2R\,senA$$
$$b = 2R\,senB$$
$$c = 2R\,senC$$

$$senA = \frac{a}{2R}$$
$$senB = \frac{b}{2R}$$
$$senC = \frac{c}{2R}$$

Ley de Cosenos

En todo triángulo se cumple que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de los mismos multiplicados por el coseno del ángulo que forman.



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosA}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cosB}$$

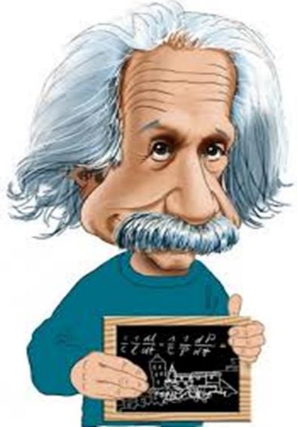
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cosC}$$

1. En un triángulo ABC , reduzca

$$G = \frac{\text{sen}A - \text{sen}B}{\text{sen}C}$$

Si: $a - b = 4$ y $c = 2$

Recordar:



$$senA = \frac{a}{2R}$$

$$senB = \frac{b}{2R}$$

$$senC = \frac{c}{2R}$$

RESOLUCIÓN:

Nos piden:

$$G = \frac{senA - senB}{senC}$$

$$G = \frac{\frac{a}{\cancel{2R}} - \frac{b}{\cancel{2R}}}{\frac{c}{\cancel{2R}}}$$

$$G = \frac{a - b}{c} = \frac{4}{2}$$

$$\boxed{\therefore G = 2}$$

2. En un triángulo ABC, determine la longitud del circunradio si:

$$\frac{a+b}{senA+senB}+\frac{3a}{senA}=24$$

Recordar:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 2RsenA \\ b &= 2RsenB \\ c &= 2RsenC \end{aligned}}$$

RESOLUCIÓN:

$Nos\ piden:\ \dfrac{a+b}{senA+senB}+\dfrac{3a}{senA}=24$

$$\frac{2RsenA+2RsenB}{senA+senB}+\frac{3(2RsenA)}{senA}=24$$

$$\frac{2R\cancel{(senA+senB)}}{\cancel{senA+senB}}+\frac{6R\cancel{senA}}{\cancel{senA}}=24$$

$$2R+6R=24$$

$$8R=24$$

$$\boxed{\therefore R=3}$$

3. En un triángulo ABC, su perímetro es 3m y la longitud de su circunradio es 4 m. Calcule

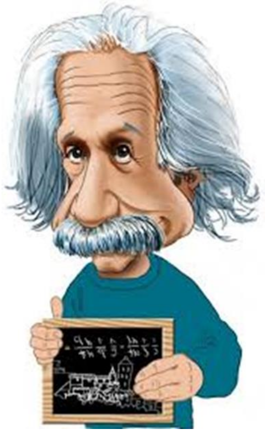
$$M = \text{sen}A + \text{sen}B + \text{sen}C$$

$$\text{sen}A = \frac{a}{2R}$$

$$\text{sen}B = \frac{b}{2R}$$

$$\text{sen}C = \frac{c}{2R}$$

Recordar:



RESOLUCIÓN:

Datos: $a + b + c = 3 \quad ; \; R = 4$

Nos piden:

$$M = senA + senB + senC$$

$$M = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$M = \frac{a+b+c}{2R}$$

$$M = \frac{3}{2(4)} = \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\therefore M = 0{,}375}$$

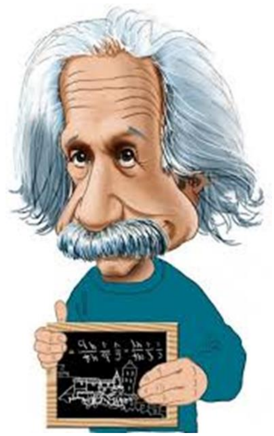
4. En un triángulo ABC, determine la longitud del circunradio si el perime-tro es 25 m y $\text{senA} + \text{senB} + \text{senC} = \frac{5}{4}$

$$senA = \frac{a}{2R}$$

$$senB = \frac{b}{2R}$$

$$senC = \frac{c}{2R}$$

Recordar:



RESOLUCIÓN:

Datos: $a + b + c = 25$

$$senA + senB + senC = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{a+b+c}{2R} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{25}{2R} = \frac{5}{4}$$

$$10\cancel{0} = 1\cancel{0}R$$

$$\therefore R = 10\ \text{m}$$

5. En un triángulo ABC de lados a, b y c; se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$$

Halle la medida del ángulo A

Recordar:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosA}$$

RESOLUCIÓN:

Tenemos: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc}$

$$\cancel{b^2 + c^2} - 2bc.cosA = \cancel{b^2 + c^2} - \sqrt{3}bc$$

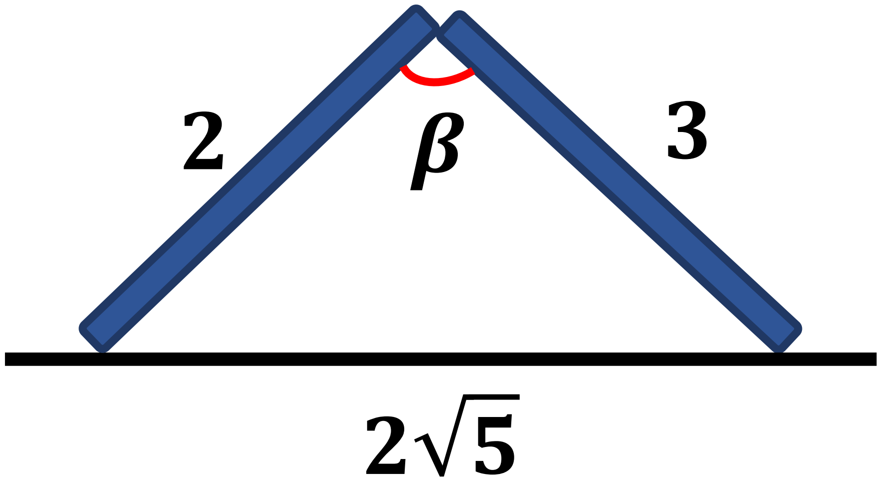
$$-2bc.cosA = -\sqrt{3}bc$$

$$2cosA = \sqrt{3}$$

$$cosA = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\therefore A = 30°}$$

6. Dos barras metálicas se encuentran apoyadas, tal como se muestra en la figura. Si el ángulo que forman las barras en su punto de apoyo es β, calcule $sec\beta$.



RESOLUCIÓN:

Recordar:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosA}$$

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.cos\beta$$

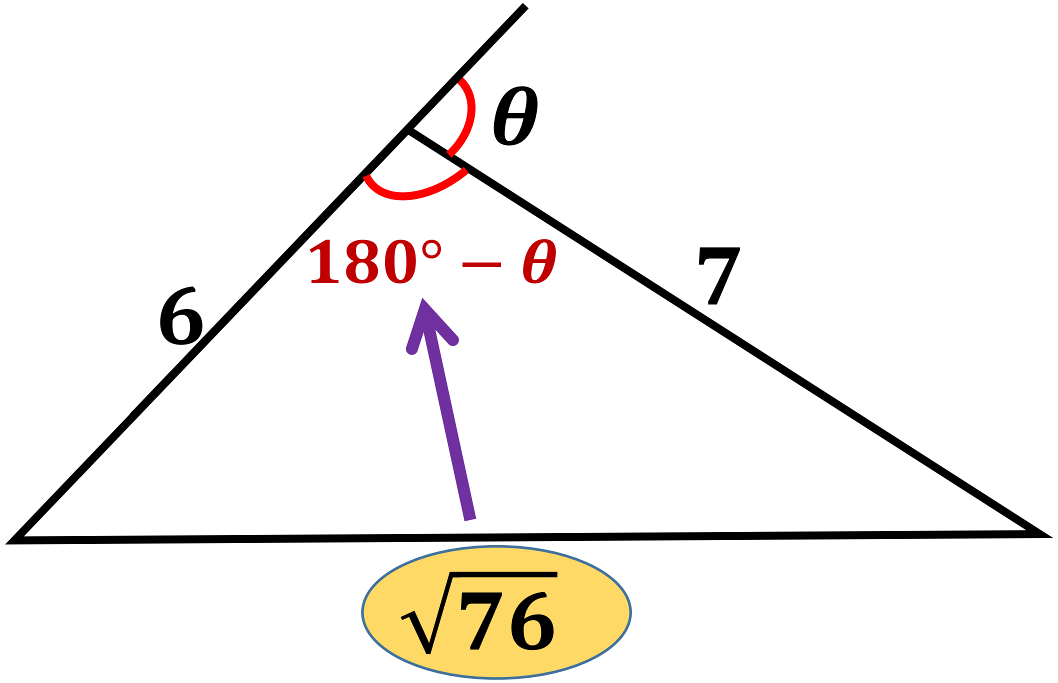
$$20 = 4 + 9 - 12cos\beta$$

$$12cos\beta = -7$$

$$cos\beta = -\frac{7}{12}$$

$$\boxed{\therefore\ sec\beta = -\frac{12}{7}}$$

7. Del gráfico, calcule cosθ.



Recordar:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$

RESOLUCIÓN:

Por ley de cosenos, tenemos:

$$\sqrt{76}^2 = 6^2 + 7^2 - 2.6.7\cos(180° - \theta)$$

$$76 = 36 + 49 - 84\,(-\cos\theta)$$

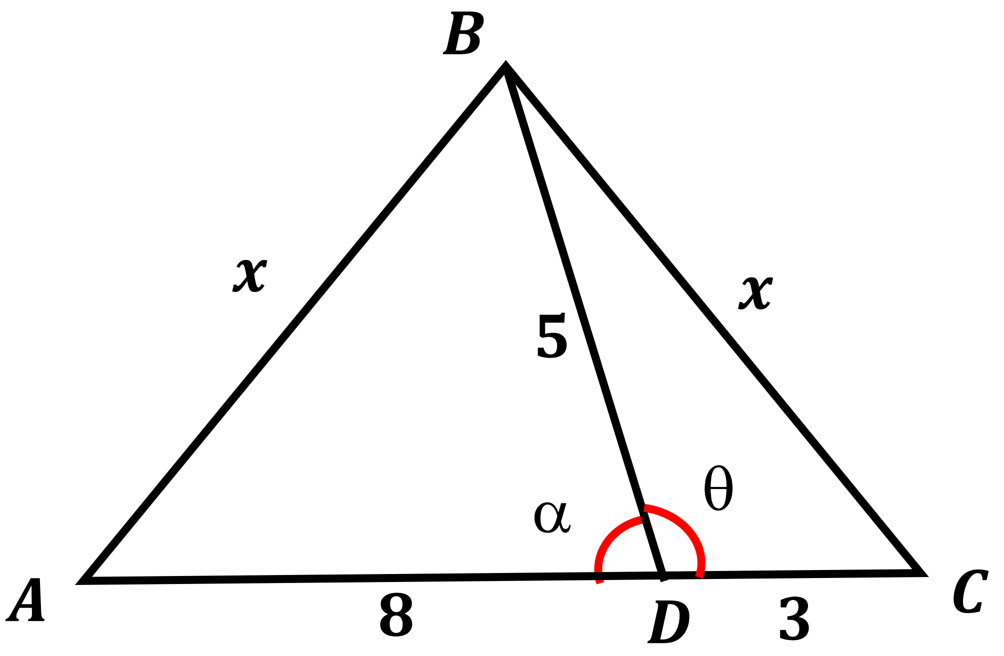
$$76 = 85 + 84(\cos\theta)$$

$$-9 = 84\cos\theta$$

$$-\frac{\cancel{9}}{\cancel{84}} = \cos\theta$$

$$\boxed{\therefore \cos\theta = -\frac{3}{28}}$$

8. Del gráfico, halle el valor de x.



RESOLUCIÓN:

Ley de cosenos en ΔABD:

$$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos\alpha$$

$$x^2 = 89 - 80.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{89 - x^2}{80} \ \ldots \text{(I)}$$

Ley de cosenos en ΔBDC:

$$x^2 = 5^2 + 3^2 - 2.5.3.\cos\theta$$

$$x^2 = 25 + 9 - 30.\cos\theta$$

$$x^2 = 34 - 30.(-\cos\alpha)$$

$$\frac{x^2 - 34}{30} = \cos\alpha \ \ldots \text{(II)}$$

De **(II)** y **(I)**: $\dfrac{x^2-34}{\cancel{30}} = \dfrac{89 - x^2}{\cancel{80}}$

$$8x^2 - 272 = 267 - 3x^2$$

$$\cancel{11}x^2 = \cancel{5}39$$

$$x^2 = 49$$

$$\boxed{\therefore x = 7}$$