ARITHMETIC

Chapter N° 9

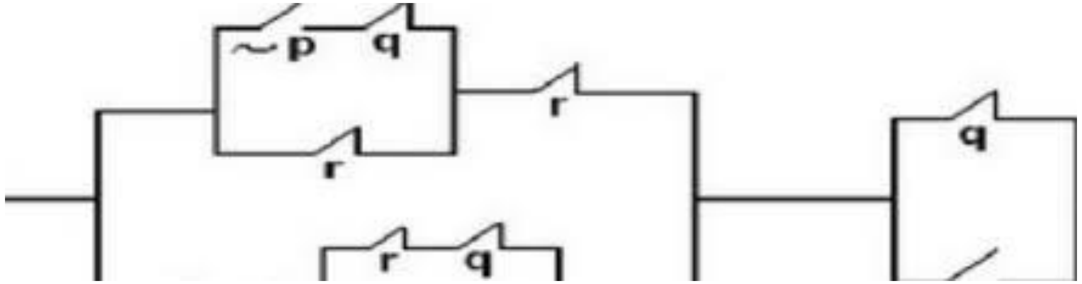
5th Grade of Secondary

Lógica Proposicional

SACO OLIVEROS

El desarrollo de la **Lógica** durante el siglo XX ha hecho revisar las nociones tradicionales del razonamiento. Por ejemplo, los **circuitos del ordenador** contienen millones de **puertos lógicos** conectados entre sí. Cada uno de ellos es un **interruptor lógico**.

Para la elaboración de **circuitos lógicos integrados** es necesario utilizar **circuitos lógicos** que realicen las diversas operaciones internamente en el **sistema binario**; y luego, mediante un **conversor**, expresarlo en el **sistema decimal**.



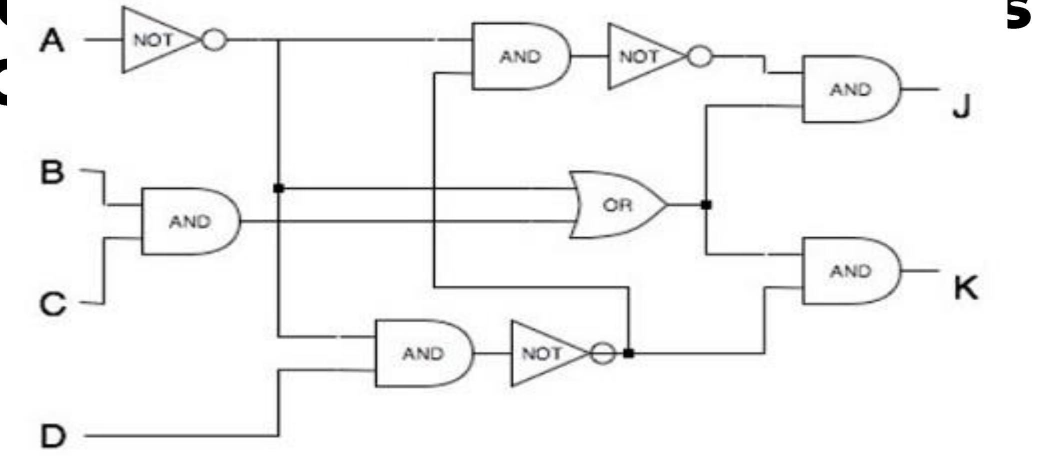
I CA PROPOSICIONAL

¿QUÉ ES LA LÓGICA?

Es aquella ciencia que estudia los métodos del razonamiento. La Lógica sirve de sustento para formalizar las teorías que se plantean en las ciencias matemáticas y naturales mediante e ... erencias válidas.

¿DE QUÉ TRATA LA LÓGICA PROPOSICIONAL?

Es una parte de la Lógica que tiene como objeto de estudio la “PROPOSICIÓN” y la relación existente entre ellas, así como la función que tienen las “VARIABLES PR ... s “CC



NUNCIADO

Es cualquier frase, expresión u oración que se utiliza en el lenguaje común.

Ejemplos:

- Lima es la capital de Perú.
- 32 + 42 = 72
- ¿Cómo te llamas?
- Él es un escritor peruano
- ¡Viva el Perú!
- Ojalá ella me acepte.

POSICIÓN LÓGICA

Es el significado de una expresión aseverativa que se caracteriza por tener un valor veritativo (es decir el significado tiene la posibilidad de ser verdadero (V) o falso (F) pero no ambos a la vez). Se denomina también Enunciado Cerrado.

Ejemplos:

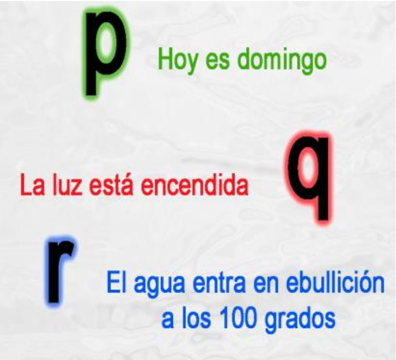
- La luna es un satélite. (V)
- $10 < 8$ (F)
- El camarón es un mamífero. (F)
- El 5 es un número primo. (V)

Observación:

Los enunciados que expresan una exclamación, una interrogación, un deseo, un mandato o una emoción no son proposiciones lógicas.

NOTA:

Generalmente las proposiciones lógicas se representan mediante letras minúsculas del abecedario (..., p, q, r, s, ...) a las cuáles se les denomina “variables proposicionales”.



IUNCIADO ABIERTO

Es aquel enunciado en el que intervienen una o más variables, que admite la posibilidad de convertirse en una proposición lógica, cuando cada variable asume un determinado valor. También se le llama **función proposicional o cuasi proposición**.

Ejemplos:

- Él es un historiador peruano.
- $4x + 3y > 73$

POSICIÓN LÓGICA

CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS

Dependiendo de la cantidad de significados que se expresen las proposiciones lógicas se clasifican en:

- **PROPOSICIÓN SIMPLE O ATÓMICA**
- **PROPOSICIÓN COMPUESTA O MOLECULAR**

PROPOSICIÓN SIMPLE O ATÓMICA

Es aquella que nos expresa una sola idea (puede ser representada por una sola variable proposicional).

Ejemplos:

- p: Mario Vargas Llosa es un escritor peruano.
- q: El conjunto de los número primos es finito.

PROPOSICIÓN COMPUESTA O MOLECULAR

Es aquella que nos expresa más de una idea (contiene al menos un término de enlace) o la negación de una proposición.

Ejemplos:

- El número 17 es primo y tiene do
- Jimmy estudia o trabaja.
- Si es diciembre entonces llegará la Navidad.

CONECTIVOS LÓGICOS

Son aquellos símbolos que reemplazan a los términos de enlace y al adverbio de negación “no”. Se denominan también **operadores lógicos o juntores l**

NOTA

Una operación lógica consiste en: dadas ciertas proposiciones atómicas, obtener proposiciones compuestas y determinar su valor de verdad, que depende únicamente de los valores de verdad de las proposiciones

El cuadro siguiente muestra a las operaciones lógicas con sus respectivos símbolos y significado:

Operaciones Lógicas	Negación	Conjunción	Disyunción Débil	Disyunción Fuerte	Condicional	Bicondicional
Términos de Enlace	no	y	o	O bien … o bien…	Si … entonces …	… si y solo si …
Conectivos Lógicos	$\sim$	$\wedge$	$\vee$	Δ	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Significado	Niega lo que afirma la proposición.	Afirma que se cumplen las dos proposiciones que enlazan.	Asevera la ocurrencia de una de las proposiciones o de ambas.	Asevera la ocurrencia de solo una de las proposiciones pero no de ambas a la vez.	Afirma que la segunda proposición es una consecuencia de la primera.	Equivale a dos condiciones pero en sentidos opuestos.

TABLAS DE VERDAD

Los valores de verdad de una o más proposiciones se pueden esquematizar por medio de una tabla de verdad

Una tabla de verdad es un cuadro de doble entrada que nos permite determinar el valor de verdad de "fórmulas lógicas", considerando las posibles combinaciones entre los valores de verdad de las variables que la componen.

El número de combinaciones que se pueden obtener con los valores de verdad de "n" proposiciones, está dado por "2^n".

Para una proposición

p
V
F

Para dos proposiciones

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para tres proposiciones

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

ANÁLISIS DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

1. LA NEGACIÓN (~)

Son aquellas proposiciones que hacen uso del adverbio de negación "no" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplo: $\underbrace{\text{No es cierto que}}_{\sim}\ \underbrace{\text{Pedro es abogado}}_{p}$.

Tabla de verdad:

p	~p
V	F
F	V

2. CONJUNCIÓN (∧)

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción gramatical "y" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplo:

$\underbrace{\text{Miguel Grau es peruano}}_{p}\ \underset{\wedge}{\text{y}}\ \underbrace{\text{Pablo Neruda es chileno}}_{q}$

2. CONJUNCCIÓN (∧)

Tabla de verd

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Observación

Una proposición conjuntiva será verdadera solo si sus proposiciones componentes son verdaderas; en otros casos, será falsa.

NOTA:

Las palabras "pero", "sin embargo", "además", "no obstante", "a la vez", "aunque", equivalen al conectivo "∧".

3. DISYUNCIÓN

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción disyuntiva "o" o sus expresiones equivalentes.

A. INCLUSIVA O DÉBIL (V)

Es aquella en la cual se considera las posibles ocurrencias simultáneas o individuales de las proposiciones componentes.

Ejemplo:

$$\underbrace{\text{Humberto es profesor}}_{p} \text{ o } \underbrace{\text{Humberto es comerciante}}_{q}.$$

p V q

Tabla de verdad

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación

Una proposición disyuntiva inclusiva será falsa solo si sus proposiciones componentes son falsas; en otros casos, será verdadera.

B. EXCLUSIVA O FUERTE (Δ)

Es aquella en la cual se excluye la posibilidad de ocurrencia simultánea de ambas proposiciones componentes.

Ejemplo:

$\underbrace{\text{O la puerta está abierta}}_{p}$ Δ $\underbrace{\text{o la puerta está cerrada.}}_{q}$

Tabla de verdad

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observación

Una proposición disyuntiva exclusiva es **verdadera** solo si sus proposiciones componentes tienen diferente valor veritativo, caso contrario es **falsa**.

4. CONDICIONAL (→)

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción condicional "si...entonces" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplo:

Si pago la entrada entonces ingreso al cine.

$$\underbrace{\text{Si pago la entrada}}_{p} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\text{ingreso al cine}}_{q}$$

Observación

Una proposición condicional es falsa solo si su antecedente es verdadero y su consecuente es falso, caso contrario es verdadera.

Tabla de verdad

DONDE:

p: ANTECEDENTE

q: CONSECUENTE

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

¡Tenga en cuenta!

Las expresiones "p es suficiente para que q" y "q es necesario para que p" son equivalentes a "p →q".

NOTA:

Cuando en un párrafo se encuentran las palabras "porque", "puesto que", "ya que", "siempre que", "cuando", "si", "cada vez que", "dado que", estos términos también son conectivos condicionales. Se caracterizan porque después de cada uno de ellos está el antecedente.

Ejemplo: **$\underbrace{\text{Juan ingresó a la UNI}}_{r}$ puesto que se $\underbrace{\text{prepar}}_{s}$**

Se denota: s →r

DONDE:

s: ANTECEDENTE

r: CONSECUENTE

5. BICONDICIONAL (↔)

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción compuesta "si y solo si" o sus expresiones equivalentes.

Ejemplo:

Un ángulo es recto si y solo si su medida es 90°.

$$\underbrace{\text{Un ángulo es recto}}_{p} \quad \text{si y solo si} \quad \underbrace{\text{su medida es 90°}}_{q}$$

$$p \leftrightarrow q$$

Observación

La proposición bicondicional es verdadera en el caso que las proposiciones que la conforman tengan el mismo valor de verdad, caso contrario, será falsa.

Tabla de verdad

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

Llamada también **formalización de proposiciones**, implica la transformación de proposiciones y conjunciones gramaticales expresadas en el lenguaje natural en un lenguaje artificial llamado lenguaje simbolizado o formalizado.

Ejemplo 1: Simbolice la siguiente proposición:

Si estudio mucho y asisto a clases, entonces, no reprobaré el examen.

p q r

Identificando las proposiciones simples:

p: Estudio mucho.

q: Asisto a clases.

r: Reprobaré el examen.

Simbolizando $(p \wedge q)$ $\sim r$

ES UN ESQUEMA MOLECULAR CONDICIONAL

1. Dadas las proposiciones:
p : MCM(20, 12) = 20
q : 4 + 5 × 2 = 18
r : $\sqrt{11} > \sqrt{12}$
indique el valor de verdad en (~r ∨ ~q) Δ (p → ~q).

Resolución

De las proposiciones:

p : MCM(20, 12) = 60

p ≡ F

q : 4 + 5 × 2 = 4 + 10 = 14

q ≡ F

r : $\sqrt{11} > \sqrt{12}$

r ≡ F

Dato: (~r ∨ ~q) Δ (p → ~q)

F F F F

Reemp: (V ∨ V) Δ (F → V)

V Δ V

F

∴ Falso

2. Al desarrollar $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \,\Delta\, p)$ mediante la tabla de verdad, ¿Cuántos falsos (F) aparecen en la matriz principal?

Resolución :

Desarrollando la tabla de verdad:

p	q	(p	∧	q)	→	(~q	Δ	p)
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	F	F	V	V	V	F

Piden: # falsos = 0

$\therefore$ 0 Falsos

3. Si la proposición compuesta $(\sim q \wedge t) \to (p \vee \sim r)$ es falsa, determine el valor de verdad en $(\sim t \,\Delta\, \sim p) \leftrightarrow (r \to q)$

Resolución

Del dato tenemos:

$$\underbrace{(\underset{F}{\sim q} \wedge \underset{V}{t})}_{V} \to \underbrace{(\underset{F}{p} \vee \underset{V}{\sim r})}_{F} \equiv F$$

F V F V

V V F F

V F

Entonces:

$q \equiv F$ $t \equiv V$ $p \equiv F$ $r \equiv V$

Piden: $(\sim t \,\Delta\, \sim p) \leftrightarrow (r \to q)$

V F V F

Reemplazando: $(F \,\Delta\, V) \leftrightarrow F$

$$\underbrace{V \leftrightarrow F}_{F}$$

$\therefore$ **Falso**

4. Si:

p : Diego compra pan.

q : Diego ingresa al colegio.

r : Diego se levanta temprano.

Simbolice:

"Si Diego se levanta temprano y no compra pan implica que no podrá ingresar al colegio, pero que haya comprado el pan es condición necesaria y suficiente para que se haya levantado temprano".

Resolución

"Si Diego se levanta temprano y no compra pan implica que no podrá ingresar al colegio, pero que haya comprado el pan es condición necesaria y suficiente para que se haya levantado temprano".

Donde:

$$\therefore \left[(r \wedge \sim p) \rightarrow \sim q\right] \wedge (p \leftrightarrow r)$$

5. **Indique si la siguiente fórmula lógica es tautología, contradicción o contingencia**

$$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \,\Delta\, p)$$

Resolución

Desarrollando la tabla de verdad:

p	q	(~p	∨	q)	↔	(~q	Δ	p)
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V	F

∴ **Es una contingencia**

6. **¿Cuántas de las siguientes proposiciones son falsas?**

$(7! = 5040) \rightarrow (6^0 = 0)$

$(7 > 8)\ \Delta\ (3 + 4 \times 9 = 63)$

$(5^0 + 7^0 = 2) \vee (\text{MCD}(7, 9) = 1)$

$(8 + 3 = 11) \leftrightarrow (\text{MCM}(8, 6) = 12)$

$(5 \times 4 = 8 + 12) \vee (5! = 120)$

Resolución

Del dato tenemos:

- $\underbrace{(7! = 5040)}_{V} \rightarrow \underbrace{(6^0 = 0)}_{F} \equiv F$

- $\underbrace{(7 > 8)}_{F}\ \Delta\ \underbrace{(3 + 4 \times 9 = 63)}_{F} \equiv F$

- $\underbrace{(5^0 + 7^0 = 2)}_{V} \vee \underbrace{(\text{MCD}(7, 9) = 1)}_{V} \equiv V$

- $\underbrace{(8 + 3 = 11)}_{V} \leftrightarrow \underbrace{(\text{MCM}(8, 6) = 12)}_{F} \equiv F$

- $\underbrace{(5 \times 4 = 8 + 12)}_{V} \vee \underbrace{(5! = 120)}_{V} \equiv V$

 # 3 Falsos

7. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- Si $\sqrt{3} < \sqrt{2}$, entonces 4 es un número par.
- $A = \{x / x \in \mathbb{N}, 7 < x < 9\}$ es un conjunto unitario si y solo si 3 + 7 × 4 igual a 40.
- El almirante Miguel Grau nació en Japón o Mario Vargas Llosa nació en Perú.

Resolución

Del dato tenemos:

- $\underbrace{\text{Si } \sqrt{3} < \sqrt{2}}_{F} \rightarrow \underbrace{\text{4 es un número par}}_{V} \equiv$ V
- $\underbrace{A = \{x / x \in \mathbb{N}, 7 < x < 9\} \text{ es un conjunto unitario}}_{V} \leftrightarrow \underbrace{3 + 7 \times 4 \text{ igual a } 40}_{F} \equiv$ F
- $\underbrace{\text{El almirante Miguel Grau nació en Japón}}_{F} \vee \underbrace{\text{Mario Vargas Llosa nació en Perú}}_{V} \equiv$ V

$\therefore$ $\boxed{\text{V F V}}$

8. Enrique, estudiante del colegio Apeiron, decide ir al teatro con la condición de que obtenga por lo menos 2 falsos en la matriz principal del desarrollo:

$(\sim p \rightarrow q) \vee (\sim q \, \Delta \, p)$

Indique si Enrique llego a ir al teatro.

Resolución

Desarrollando la tabla de ver

p	q	$(\sim p \rightarrow q)$			$\vee$	$(\sim q \, \Delta \, p)$		
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V	V	F

$\therefore$ es tautología

$\therefore$ no va al teatro