



# TRIGONOMETRY

## Chapter 21

**5th**  
SECONDARY

**FUNCIONES**  
**TRIGONOMÉTRICAS II**



 **SACO OLIVEROS**



## FENÓMENOS PERIÓDICOS

Son aquellos que se repiten en el tiempo de forma idéntica; entre ellos podemos mencionar al movimiento de rotación de la tierra, el péndulo, la corriente alterna, la luz, las mareas, el ciclo económico, la temperatura, los latidos del corazón, etc.

Para un mejor estudio de estos fenómenos, se usan a **las funciones trigonométricas** para crear los modelos de dichos fenómenos.

### Ejemplo:

En un pueblo de la sierra, la temperatura en grados centígrados, puede calcularse por:

$$T(t) = 16 - 7\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

Donde  $t$  está en horas y  $t = 0$  corresponde a la medianoche.

¿Cuál es la temperatura a las 4pm?



**Rpta:**

**19,5°C**

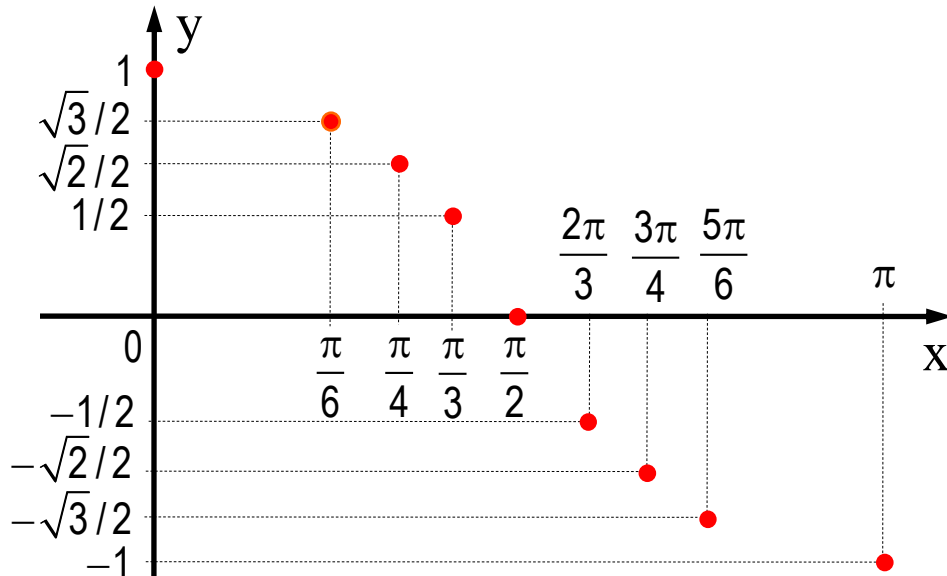


# FUNCIÓN COSENO:

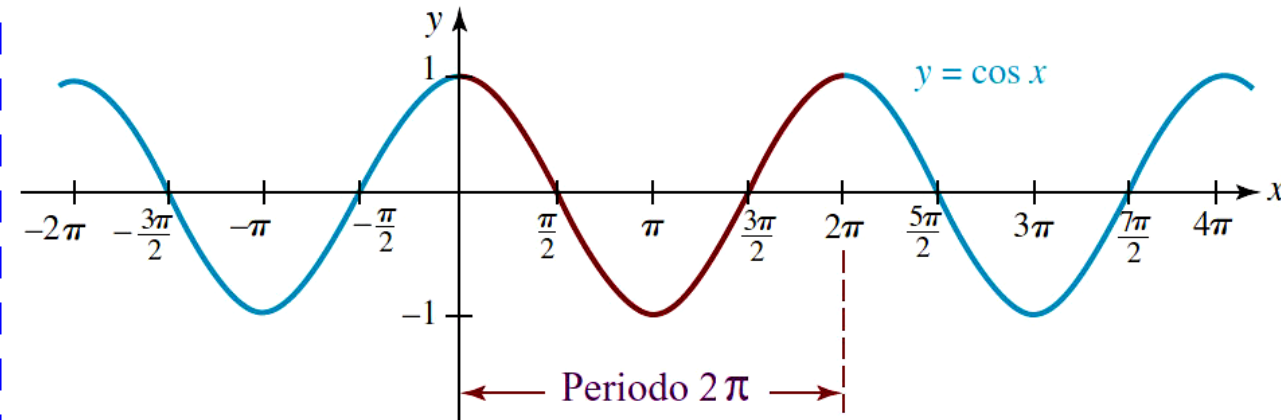
$$F = \{(x; y) / y = \cos x ; x \in \mathbb{R}\}$$

Tabulando algunos valores para x e y :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
y = cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



Tabulando mas valores y uniendo con una curva dichos puntos, tenemos :



**Dominio :**  $\text{Dom } F \in \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R}$

**Rango :**  $\text{Ran } F \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

**Periodo :**  $T = 2\pi$

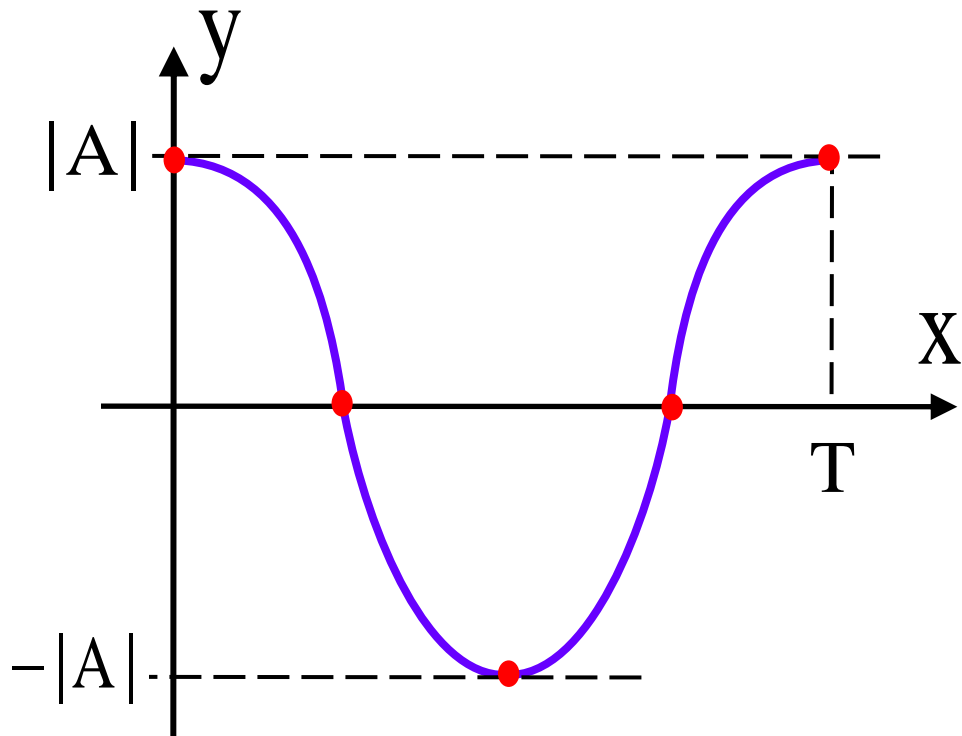
**Es una función par:**  $\cos(-x) = \cos x$

Gráfica simétrica respecto al eje de ordenadas.

# OBSERVACIÓN:

Sea la función :  $y = A \cdot \cos Bx$

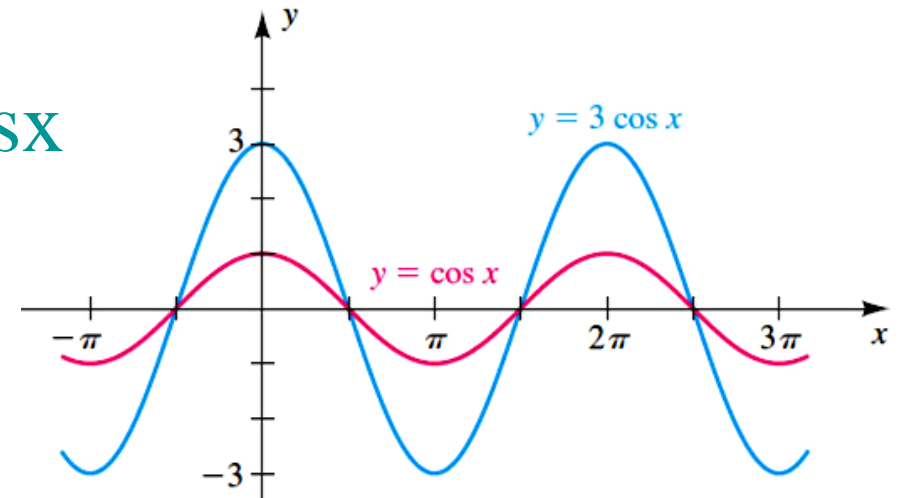
➡ Amplitud :  $|A|$  ; Período :  $T = \frac{2\pi}{|B|}$



## Ejemplos:

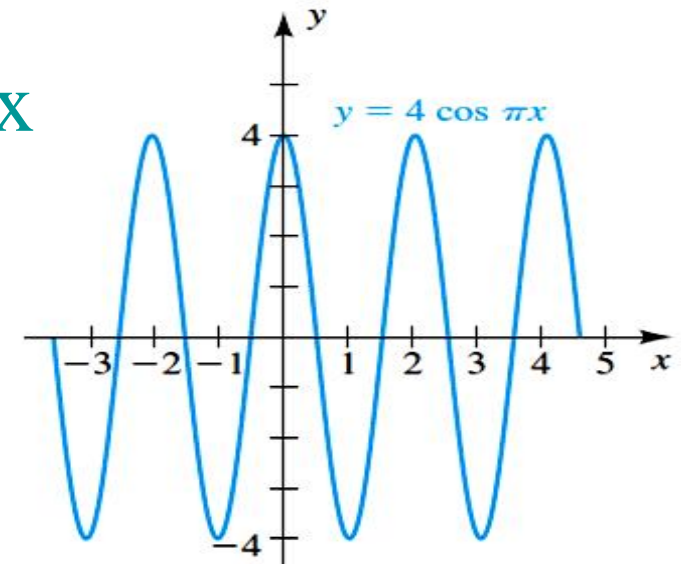
•  $y = 3 \cos x$

$$\begin{cases} |A| = 3 \\ T = 2\pi \end{cases}$$



•  $y = 4 \cos \pi x$

$$\begin{cases} |A| = 4 \\ T = 2 \end{cases}$$





# HELICOPRACTICE 1

Halle el rango de la función  $f(x) = 2\cos x - 3$

RESOLUCIÓN:

Se sabe que:  $-1 \leq \cos x \leq 1$

Ahora le damos la forma de la función  $f$ :

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \dots \dots (x^2)$$

$$-2 \leq 2 \cos x \leq 2 \dots \dots (-3)$$

$$-5 \leq \underbrace{2 \cos x - 3}_{f(x)} \leq -1$$

$$\text{Ran } f = [-5; -1]$$





# HELICOPRACTICE 2

Halle el rango de la función  $g(x) = 4 \cos^2 x - 3$

**RESOLUCIÓN:**

Se sabe que:  $-1 \leq \cos x \leq 1$

Ahora le damos la forma de la función  $f(x)$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \dots \dots (\ )^2$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \dots \dots (x^4)$$

$$0 \leq 4\cos^2 x \leq 4 \dots \dots (-3)$$

$$-3 \leq \underbrace{4\cos^2 x - 3}_{g(x)} \leq 1$$

$$\text{Ran } g = [-3; 1]$$





# HELICOPRACTICE 3

Calcule  $T_1 + T_2$ , siendo  $T_1$  y  $T_2$  periodos de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente, donde:

$$f(x) = 3\cos(2x)$$

$$g(x) = 5\cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

## RESOLUCIÓN:

➤ Para  $f(x)$

$$T_1 = \frac{2\pi}{|B|} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

➤ Para  $g(x)$

$$T_2 = \frac{2\pi}{|B|} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

➤ Lo pedido:  $T_1 + T_2$

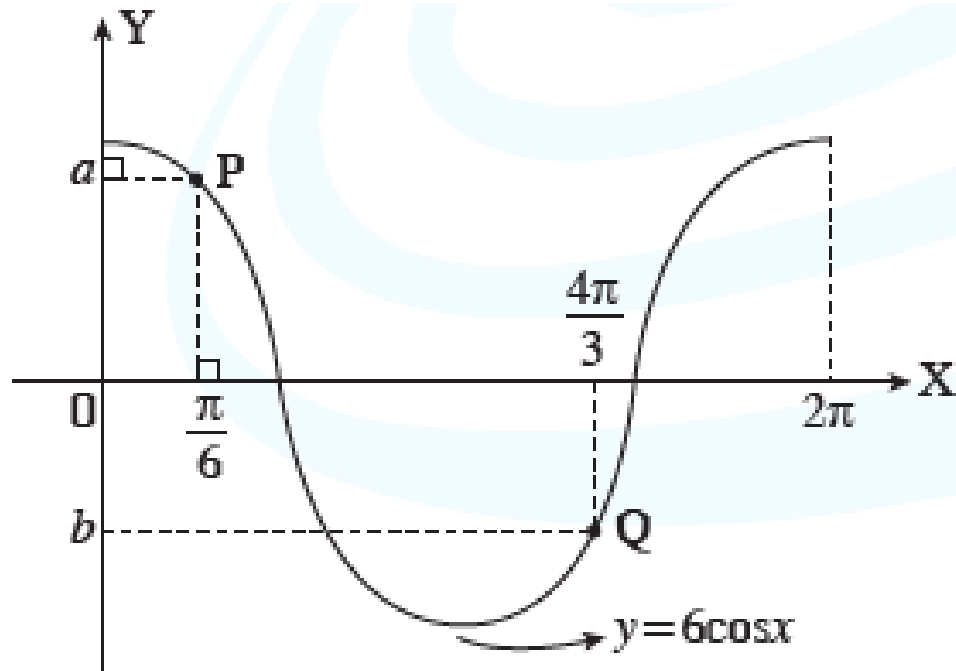
$$\therefore T_1 + T_2 = 9\pi$$





# HELICOPRACTICE 4

Del gráfico, calcule a.b



**RESOLUCIÓN:**

Sea :  $f(x) = y = 6 \cos x$

$$P\left(\frac{\pi}{6}; a\right) \in f$$

$$\Rightarrow a = 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow a = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

$$Q\left(\frac{4\pi}{3}; b\right) \in f$$

$$\Rightarrow b = 6 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow b = 6\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b = -3$$

NOS PIDEN:

$$a.b = (3\sqrt{3})(-3)$$

$$a.b = -9\sqrt{3}$$

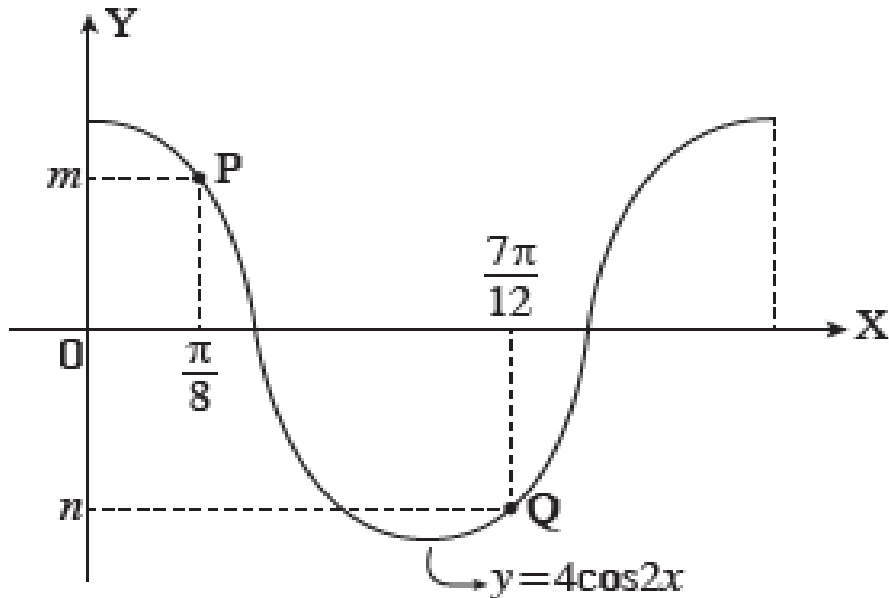






# HELICOPRACTICE 5

Del gráfico, calcule m.n



**RESOLUCIÓN:**

Sea:  $f(x) = y = 4 \cos 2x$

$$P\left(\frac{\pi}{8}; m\right) \in f$$

$$\Rightarrow m = 4 \cos\left(\frac{2 \times \pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow m = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow m = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow m = 2\sqrt{2}$$

$$Q\left(\frac{7\pi}{12}; n\right) \in f$$

$$\Rightarrow n = 4 \cos\left(\frac{2 \times 7\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow n = 4 \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow n = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow n = -2\sqrt{3}$$

NOS PIDEN:

$$m.n = (2\sqrt{2})(-2\sqrt{3})$$

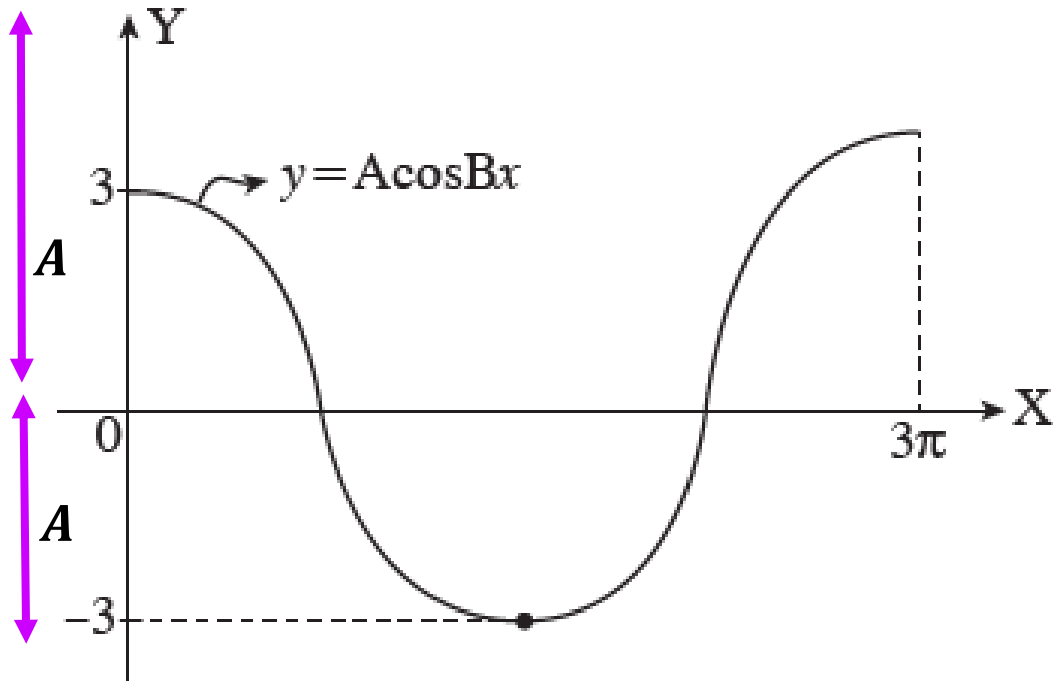
$$m.n = -4\sqrt{6}$$





# HELICOPRACTICE 6

Del gráfico, calcule  $A + B$ .



**RESOLUCIÓN:**

*Calculamos A de la gráfica:*

→  $A = 3$

Sea la función:  $f(x) = y = A \cos Bx$

*Periodo de la función*

→  $T = \frac{2\pi}{B}$

$$3\pi = \frac{2\pi}{B}$$

$$B = \frac{2}{3}$$

*Piden:*

$$A + B = 3 + \frac{2}{3}$$

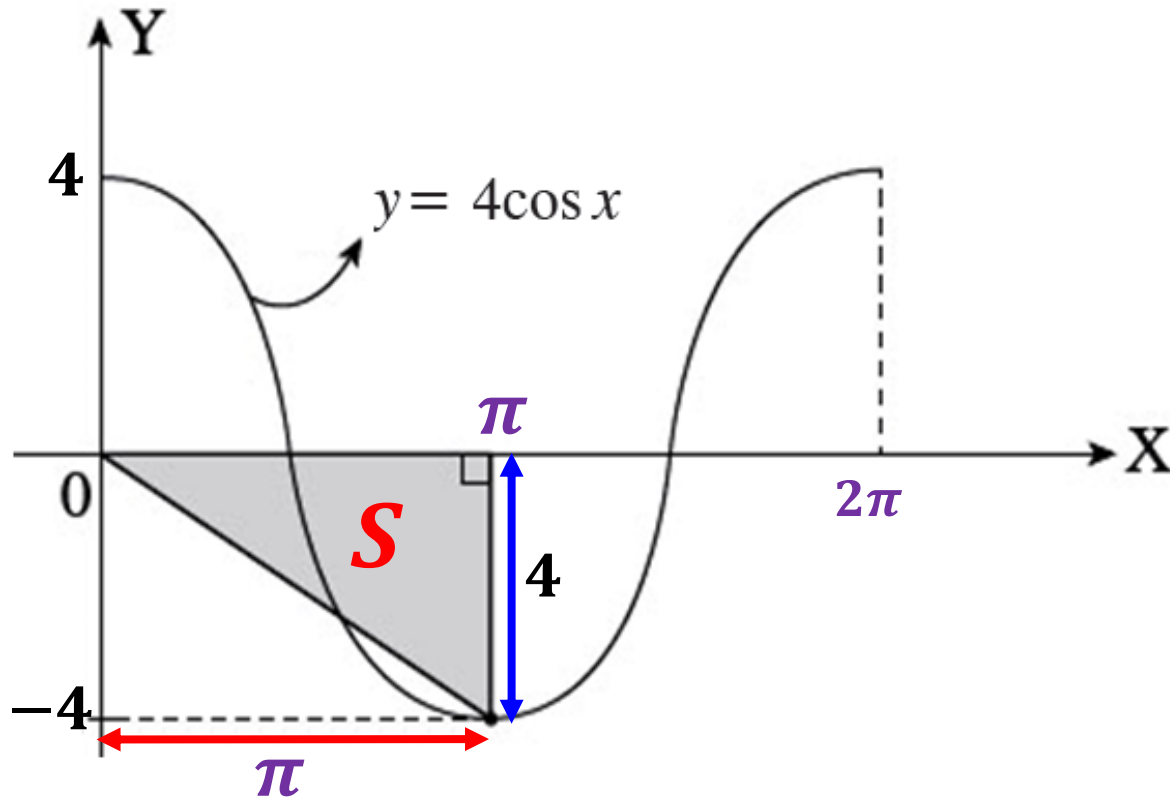
$$\therefore A + B = \frac{11}{3}$$





# HELICOPRACTICE 7

Del gráfico, determine el área de la región sombreada



## RESOLUCIÓN:

Sea la función:  $f(x) = y = 4 \cos x$

Periodo de la función

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{B} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{1} \longrightarrow T = 2\pi$$

Amplitud:

$$A = 4$$

Calculando el área

$$S = \frac{(\pi) \cdot (4)}{2}$$

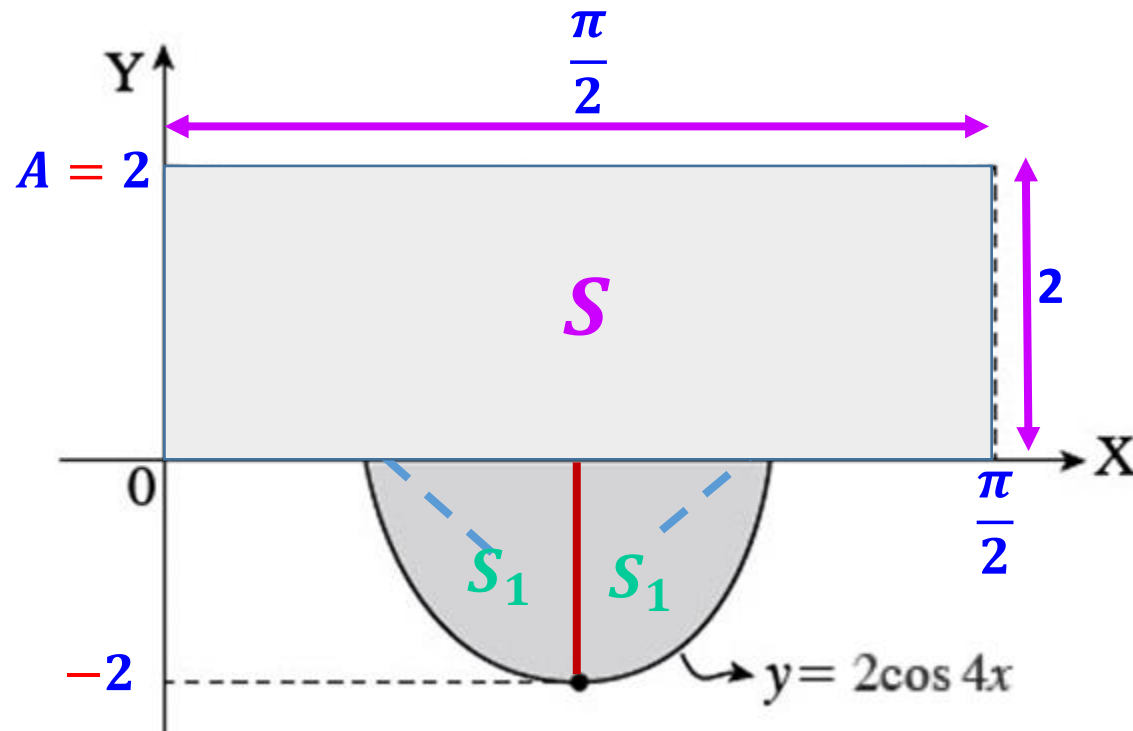
$$\therefore S = 2\pi$$





# HELICOPRACTICE 8

El siguiente gráfico muestra las ondas emitidas por un teléfono móvil. Determine el área de la región sombreada.



## RESOLUCIÓN:

Sea la función:  $f(x) = y = 2 \cos 4x$

Periodo de la función

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{B} \rightarrow T = \frac{2\pi}{4} \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

Amplitud:

$$A = 2$$

Calculando el área

$$S = \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 2$$

$$\therefore S = \pi u^2$$

