ALGEBRA

Chapter 18

3th
SECONDARY

MATRICES Y DETERMINANTES

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Lucas, Tom y Herry fueron a una tienda y compraron lo siguiente:

1. *Lucas compró dos bocadillos, un refresco y un pastel.*
2. *Tom se llevó un bocadillo, un refresco y un pastel.*
3. *Herry compró un bocadillo y un refresco.*

Estos datos se pueden agrupar en una matriz:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Lucas} \\ \longrightarrow \text{Tom} \\ \longrightarrow \text{Herry} \end{array} \end{array}$$

HELICO THEORY

¿QUÉ ES UNA MATRIZ?

Es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas. Dichos elementos están encerrados por corchetes o paréntesis.

Ejemplos:

filas

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 14 \\ 12 & -8 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 4 & 3 \\ 15 & 45 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

columnas

MATRIZ CUADRADA:

Es aquella matriz que tiene igual número de filas y columnas.

Ejemplos:

diagonal secundaria

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

diagonal principal

diagonal secundaria

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

diagonal principal

DETERMINANTES

El determinante es una función que aplicada a una MATRIZ CUADRADA, nos proporciona un número real. Su notación es la siguiente:

$$Det(A) = |A|$$

Cálculo de determinantes:

- Determinante de una matriz de orden 1:

Sea A una matriz de orden uno, $A = [a_{11}]$

$$Det(A) = |a_{11}| = a_{11}$$

Determinante de una matriz de orden 2:

Sea A una matriz de orden dos, su determinante se define como la diferencia del producto de los elementos de la diagonal principal con el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Esto es:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{Det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb}$$

Determinante de una matriz de orden 3:

Se obtiene por la llamada regla de SARRUS. Consiste en repetir las dos primeras columnas a continuación de la matriz, sumar los productos de las diagonales principales y restar los productos de las diagonales secundarias.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow Det(A) = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ m & n \\ x & y \end{matrix}$$

$$Det(A) = (\ anz + bpx + cmy\ ) - (\ xnc + ypa + zmb\ )$$

HELICO

PRACTICE

Problema 1

Calcule

$$M=\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}$$

Resolución:

$$M=\begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}$$

$$M=(3)(7)-(2)(5)+(2)(5)-(1)(3)$$

$$M=21-10+10-3$$

$$\boxed{\therefore\ M=18}$$

Problema 2

Luego de efectuar:

$$P = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

El valor de 3P + 2

Resolución:

$$P = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$P = (3)(2) - (7)(-1) - [(5)(-2) - (4)(1)]$$

$$P = 6 + 7 - [-10 - 4]$$

$$P = 13 + 14$$

$$\boxed{P = 27}$$

Nos piden: $3P + 2 = 3(27) + 2$

$$\boxed{\therefore \quad 3P + 2 = 83}$$

Problema 3

Efectúe:

$$L = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$L = 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$L = 3[(1)(5) - (3)(-2)] + 2[(-1)(-2) - (3)(-1)]$$

$$L = 3[5 + 6] + 2[2 + 3]$$

$$L = 33 + 10$$

$$\boxed{\therefore \; L = 43}$$

Problema 4

Determine el valor de:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

$$M = (-1 + 36 + 20) - (-20 + 6 + 6)$$

$$M = (55) - (-8)$$

$$\boxed{\therefore \quad M = 63}$$

Problema 5

Calcule

$$P = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$P = \left|\begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{matrix}$$

$$P = (6 + 2 + 20) - (1 - 15 - 16)$$

$$P = (28) - (-30)$$

$$\boxed{\therefore \quad P = 58}$$

Problema 6

Calcule el valor de x en la Ecuación:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3x - 2 = x - 10$$

$$2x = -8$$

$$\boxed{\therefore \quad x = -4}$$

Problema 7

Luego de resolver:

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \; ; \; x > 0$$

El valor de x representa la cantidad de alumnos desaprobados en el examen bimestral del curso de Álgebra; en el 3° A. Si el aula tiene 48 estudiantes. ¿Cuántos estudiantes han aprobado?

Resolución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$x^2 - 3 = 18 - 12$$

$$x^2 = 9$$

$$\boxed{x = \pm 3}$$

Cantidad de alumnos desaprobados: 3

$\therefore$ *aprobaron 45 estudiantes.*

Problema 8

Determine el valor de X en:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -17$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & x \\ 2 & 1 \end{matrix} = -17$$

$$(4x + 2 + 3) - (6x + 2 + 2) = -17$$

$$4x + 5 - 6x - 4 = -17$$

$$-2x = -18$$

$$\boxed{\therefore \quad x = 9}$$