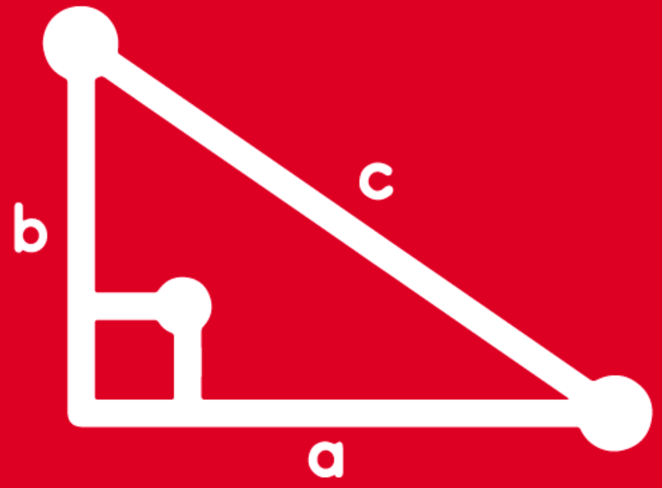
TRIGONOMETRY

Chapter 17
Session I



4th
SECONDARY

Identidades Trigonométricas Auxiliares

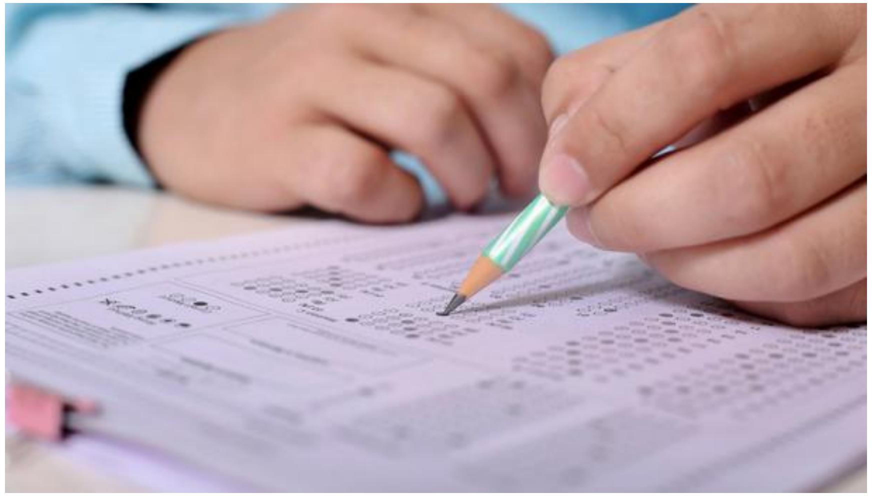
SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Hemos aprendido con éxito las identidades trigonométricas fundamentales.

Pero, ¿qué sucederá cuando nos encontremos en un examen de admisión, con ejercicios mucho mas complejos?

Un examen de admisión consta de 100 preguntas, y el tiempo para desarrollarlo es en un máximo de tres horas, eso nos da un tiempo aproximado de un minuto y medio por pregunta.



Las identidades trigonométricas auxiliares, se usan para agilizar el procedimiento.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

- ✓ $\tan x + \cot x = \sec x . \csc x$
- ✓ $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x . \csc^2 x$
- ✓ $sen^4 x + \cos^4 x = 1 - 2sen^2 x . \cos^2 x$
- ✓ $sen^6 x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2 x . \cos^2 x$

- ✓ $(1+senx+cosx)^2=2(1+senx).(1+cosx)$
- ✓ $(1-senx+cosx)^2=2(1-senx).(1+cosx)$
- ✓ $(1+senx-cosx)^2=2(1+senx).(1-cosx)$
- ✓ $(1-senx-cosx)^2=2(1-senx).(1-cosx)$

$$\frac{cosx}{1+senx}=\frac{1-senx}{cosx} \qquad \frac{cosx}{1-senx}=\frac{1+senx}{cosx}$$

$$\frac{senx}{1+cosx}=\frac{1-cosx}{senx} \qquad \frac{senx}{1-cosx}=\frac{1+cosx}{senx}$$

1. Simplifique :

$$G=\frac{1}{3}\left(sen^6\theta+cos^6\theta\right)-\frac{1}{2}\left(sen^4\theta+cos^4\theta\right)$$

RESOLUCIÓN:

$$sen^6x+\cos^6x=1-3sen^2x\cos^2x$$

$$sen^4x+\cos^4x=1-2sen^2x\cos^2x$$

$$G=\frac{1}{3}\underbrace{\left(sen^6\theta+\cos^6\theta\right)}-\frac{1}{2}\underbrace{\left(sen^4\theta+\cos^4\theta\right)}$$

$$G=\frac{1}{3}\left(1-3sen^2\theta.cos^2\theta\right)-\frac{1}{2}\left(1-2sen^2\theta.cos^2\theta\right)$$

$$G=\frac{1}{3}-\cancel{sen^2\theta.\cos^2\theta}-\frac{1}{2}+\cancel{sen^2\theta.\cos^2\theta}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore G=-\frac{1}{6}}$$

2. Simplifique: $E = \dfrac{(sec^2x + csc^2x)\,cosx}{tanx + cotx}$

RESOLUCIÓN:

$$E = \frac{(\sec^2 x + \csc^2 x).\cos x}{\tan x + \cot x}$$

$$sec^2x + csc^2x = sec^2x.csc^2x$$

$$tanx + cotx = secx.cscx$$

$$cosx.secx = 1$$

$$E = \frac{(\sec^{\cancel{2}} x.\csc^{\cancel{2}} x).\cos x}{\cancel{\sec x}.\cancel{\csc x}}$$

$$E = \underbrace{secx.cscx.cosx}_{1}$$

$$\therefore E = cscx$$

3. Simplifique: $A = \dfrac{secx.cscx - tanx}{secx.cscx - cotx} - cot^2x$

RESOLUCIÓN:

$secx.cscx = tanx + cotx$

$\dfrac{1}{tanx} = cotx$

$$A = \frac{\mathbf{secx.cscx} - \mathrm{tanx}}{\mathbf{secx.cscx} - \mathrm{cotx}} - \cot^2 x$$

$$A = \frac{\cancel{tanx} + cotx \cancel{- \mathrm{tanx}}}{tanx + \cancel{cotx} \cancel{- \mathrm{cotx}}} - \cot^2 x$$

$$A = \frac{cotx}{tanx} - \cot^2 x \;\Rightarrow\; A = cotx.\underbrace{\frac{1}{tanx}}_{\mathrm{cotx}} - \cot^2 x \Rightarrow A = \cot^2 x - \cot^2 x$$

$$\boxed{\therefore A = 0}$$

4. Reduzca :

$$G = \frac{(1+senx-cosx)^2}{3(1-cosx)} - \frac{2senx}{3}$$

RESOLUCIÓN:

$$(1 + senx - cosx)^2 = 2(1 + senx).(1 - cosx)$$

$$G = \frac{(1 + senx - cosx)^2}{3(1 - cosx)} - \frac{2senx}{3}$$

$$G = \frac{2(1 + senx).\cancel{(1 - cosx)}}{3\cancel{(1 - cosx)}} - \frac{2senx}{3} \Rightarrow G = \frac{2(1 + senx) - 2senx}{3}$$

$$G = \frac{2 + \cancel{2senx} - \cancel{2senx}}{3}$$

$$\boxed{\therefore G = \frac{2}{3}}$$

5. Si: $tan\theta + cot\theta = \sqrt{7}$, efectué:

$$P = sec^2\theta + csc^2\theta$$

RESOLUCIÓN:

$$tanx + cotx = secx.cscx$$

$$sec^2x.csc^2x = sec^2x + csc^2x$$

$Del\ dato:$

$$\underbrace{tan\theta + cot\theta} = \sqrt{7}$$

$$sec\theta.csc\theta = \sqrt{7}$$

$Elevamos\ al\ cuadrado:$

$$\underbrace{\sec^2\theta\,.\csc^2\theta} = 7$$

$$\underbrace{\sec^2\theta + \csc^2\theta}_{P} = 7$$

$$\therefore P = 7$$

6. Si: $sec^2x + csc^2x = 7$, Reduzca: $E = (sec^2x + tan^2x)(csc^2x + cot^2x)$

RESOLUCIÓN:

Del dato $\underbrace{\sec^2 x}_{} + \underbrace{\csc^2 x}_{} = 7$

$1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x = 7 \rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 5$

Piden: $E = (\underbrace{\sec^2 x}_{} + \tan^2 x)(\underbrace{\csc^2 x}_{} + \cot^2 x)$

$E = (1 + \tan^2 x + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x + cot^2 x)$

$E = (1 + 2\tan^2 x)(1 + 2\cot^2 x)$

$E = 1 + 2\tan^2 x + 2\cot^2 x + 4\underbrace{\tan^2 x . \cot^2 x}_{}$

$E = 1 + 2\underbrace{(\tan^2 x + \cot^2 x)}_{5} + 4.1$

$sec^2x = 1 + tan^2x$
$csc^2x = 1 + cot^2x$
$tan^2x . cot^2x = 1$

$\therefore E = 15$

7. Si $senx.cosx = \frac{\sqrt{2}}{4}$, reduzca:

$$P = sen^2x(1 + sen^2x) + cos^2x(1 + cos^2x)$$

RESOLUCIÓN:

Del dato: $\text{senx.cosx} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Elevamos al cuadrado:

$$sen^2x.\cos^2 x = \frac{\cancel{2}}{\cancel{16}} = \frac{1}{8}$$

$$sen^4x + \cos^4 x = 1 - 2sen^2x\cos^2 x$$

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Piden:

$$P = \text{sen}^2\text{x}(1 + \text{sen}^2\text{x}) + \cos^2\text{x}(1 + \cos^2\text{x})$$

$$P = \text{sen}^2\text{x} + \text{sen}^4\text{x} + \cos^2 x + \cos^4 x$$

$$P = \underbrace{sen^4x + \cos^4 x}+sen^2x + \cos^2 x$$

$$P = 1 - 2\underbrace{sen^2x.\cos^2 x} + \underbrace{sen^2x + \cos^2 x}$$

$$P = 1 - \cancel{2}.\left(\frac{1}{\cancel{8}_{4}}\right) + 1$$

$$P = 2 - \frac{1}{4}$$

$$\therefore P = \frac{7}{4}$$

8. El gasto diario de Kelly en pasajes es de S/ $(6Atanx)$. ¿Cuál será el gasto total a la semana? Si se sabe que: $A = \frac{senx}{1-cosx} - cscx$

$$\frac{senx}{1-cosx} = \frac{1+cosx}{senx}$$

$$cscx = \frac{1}{senx}$$

$$\frac{cosx}{senx} = cotx$$

$$tanx.cotx = 1$$

RESOLUCIÓN:

$$A = \frac{senx}{1-cosx} - cscx$$

$$A = \frac{1+cosx}{senx} - \frac{1}{senx}$$

$$A = \frac{\cancel{1} + cosx - \cancel{1}}{senx}$$

$$A = \frac{cosx}{senx}$$

$$A = cotx$$

Lo que gasta kelly a diario:

$$6.A.tanx = 6.\underbrace{cotx.tanx}_{1} = \boxed{6}$$

Kelly gasta 42 soles en pasajes a la semana


HAY UNA FUERZA
MOTRIZ
MÁS PODEROSA
QUE EL VAPOR,
LA ELECTRICIDAD Y
LA ENERGÍA ATÓMI
LA VOLUNTA
Albert Einstein