ALGEBRA

Chapter 15

4th
SECONDARY

Matrices y determinantes

SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS

La edad de Pedro es 5T años; donde T esta dado por el resultado de hallar la determinante de:

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

¿Cuál será la edad de Carla dentro de 3 años?

RPTA: 18 años

HELICO THEORY

CHAPTHER 15

SACO OLIVEROS

MATRICES Y DETERMINANTES

I) MATRICES

Es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en filas y Columnas cuya forma general es:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas(vertical)}} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Filas(horizontal)}$$

nm

El orden de la matriz A es nm

EJEMPLOS

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

filas

columnas

$a_{11} = 6$ $a_{12} = 0$

$a_{21} = 3$ $a_{22} = 2$

$a_{31} = 9$ $a_{32} = 1$

La matriz A es de orden: $3x2$

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{1x3}$$

filas

columnas

$a_{11} = -9$ $a_{12} = 1$ $a_{13} = 3$

La matriz B es de orden: $1x3$

II) MATRICES CUADRADAS

Son aquellas matrices que tienen el mismo número de filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

DIAGONAL PRINCIPAL

DIAGONAL PRINCIPAL

III) TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

ES LA SUMA DE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPAL

TRAZ(A)= 13

TRAZ(B)= 12

HEL

IV) IGUALDAD DE MATRICES

PODEMOS IGUALAR MATRICES DEL MISMO ORDEN

EJEMPLO

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a+2 & 3b \\ c-1 & 4d \end{pmatrix}_{2x2}$$

Si A=B ,entonces:

a+2=10 ➡ $\boxed{a=8}$

3b=9 ➡ $\boxed{b=3}$

c-1=3 ➡ $\boxed{c=4}$

4d=8 ➡ $\boxed{d=2}$

V) OPERACIONES CON MATRICES

*SUMAS Y RESTAS DE MATRICES

DEBEN SER MATRICES DEL MISMO ORDEN

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

*PRODUCTOS DE MATRICES

Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{nxp}$ $\Rightarrow$ $\boxed{AB = (c_{ij})_{mxp}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectuando:

$2x4 + 3x3 = 17$

2x2+3x-1=1

1x4-1x3=1

1x2-1x-1=3

VI) DETERMINANTES

Se pueden calcular solamente para matrices cuadradas:

Para orden 2x2

Sea: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$

$|A| = 5 - 42 = \boxed{-37}$

Para orden 3x3

Sea: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} = (12+4+4) - (2+12+8)$$

$$\boxed{|A| = -2}$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 15

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1

Calcule el orden de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$$

2 filas

3 columnas

es de orden $2x3$

$$B=\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{4x1}$$

4 filas

1 columna

es de orden $4x1$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

2 filas

2 columnas

es de orden $2x2$

PROBLEMA 2

Dadas las matrices:

A=$\begin{pmatrix} x+3y & 7 \\ 2z-1 & x-y \end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Si A = B Calcule: x+y+z

Resolución

$\boxed{A = B}$

$$\begin{pmatrix} x+3y & 7 \\ 2z-1 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+3y &= 20 \\ x-y &= 4 \end{aligned} \quad (-)$$

$$4y = 16$$

$y = 4$ ➡ $x = 8$

además:

$$2z - 1 = 5$$

➡ $z = 3$

luego: $x + y + z = \boxed{15}$

PROBLEMA 3

Sean las matrices: P=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Además: A=3P+5Q. Calcule: Traz(A)

Resolución

$$\boxed{A = 3P + 5Q}$$

$$A = 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 28 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Traz}(A) = -6 + 29 = \boxed{23}$$

PROBLEMA 4

Sean las matrices: A=$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Calcule: Traz(AB)

Resolución

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$Efectuando$:

5x2-3x3=1 $\quad 5x4 - 3x1 = 17$

2x2-4x3=-8 $\quad$ 2x4-4x1=4

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traz(AB)} = 1+4 = \boxed{5}$$

PROBLEMA 5

Efectúe: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

$$= 5(6) - 7(3) + 3(2) - 5(-1) + 8(-2) - 4(1)$$

$$= 30 - 21 + 6 + 5 - 16 - 4$$

$$= 9 + 11 - 20$$

$$= 0$$

Rpta 0

PROBLEMA 6

El profesor GARCIA va al gimnasio k veces al mes para aumentar su masa muscular, en vista de malos resultados su entrenador personal le recomienda ir (2k+2) veces al mes, donde k es el resultado de: $k = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ¿ Cuántas veces fue al gimnasio al tercer mes de la recomendación?

Resolución

$$
\begin{array}{ccccc} & & & c_1 & c_2 \end{array}
$$

$$
: \; \boldsymbol{k} = - \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right.
$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$K = -[\, 3(1)(1) + 2(2)(2) + 5(1)(4) - 2(1)(5) - 4(2)(3) - 2(1)(1)]$$

$$K = -[\, 3 + 8 + 20 - (10 + 24 + 2)]$$

$$K = -[\, 31 - (36)]$$

$$K = -[\, -5]$$

$$K = 5$$

Luego

$$(2k + 2) = 12 \; al \; mes$$

Rpta: 3meses= 36

PROBLEMA 7

Halle el valor de x:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & c_1 & c_2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & x & -2 & 1 & x \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ - & - & - & + & + & + \end{array} = 2$$

$3(x)(-1)+(-2)(-2)(-1)+(1)(1)(2)$-((-1)(x)(1)+2(-2)(3)+(-1)(1)-2)=2

$-3x$-4+2-(-x-12+2)=2

$-3x$-2-(-x-10)=2

$-3x$-2+x+10=2

$-2x+8=2$

$x=3$

Rpta: 3

PROBLEMA 8

Halle el valor de

$P=\frac{a+c}{8b}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Resolución

$$\begin{array}{ccccc} & & & c_1 & c_2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ a & b & c & a & b \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \\ - & - & - & + \; + \; + & \end{array} = 0$$

$2(b)(7)+3(c)(5)+4(a)(6)-\left((5)(b)(4)+6(c)(2)+7(a)(3)\right)=0$

$14b+15c+24a-(20b+12c+21a)=0$

$-6b+3c+3a=0$ → $3c+3a=6b$

$3c+3a=6b$

$3(c+a)=6b$

$a+c=2b$

piden: el valor de $P=\frac{a+c}{8b}$

$remplazando;\ p=\frac{\cancel{2}b}{\cancel{8}b}$

El valor de P es $=\frac{1}{4}$