MATHEMATICAL REASONING

Chapter 16

4th
SECONDARY

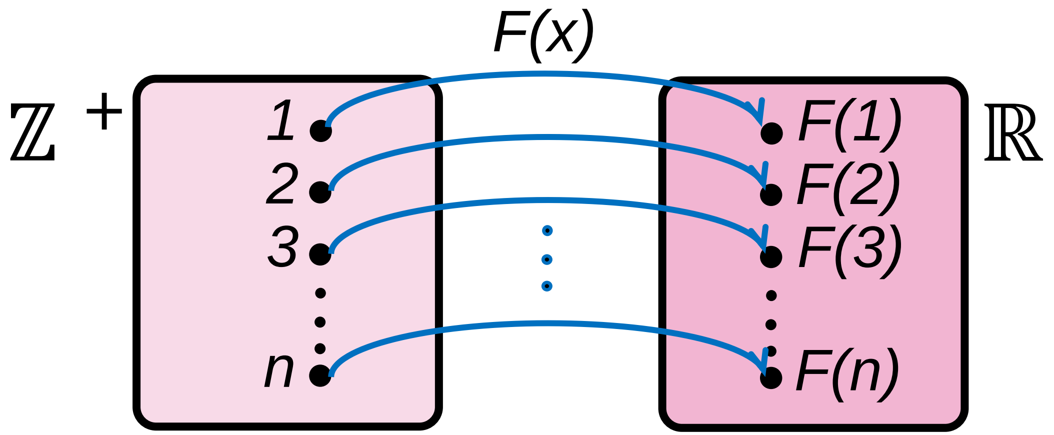
SUCESIONES

SACO OLIVEROS

SUCESIÓN NUMÉRICA

DEFINICIÓN

Es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y cuyo rango es un conjunto arbitrario:



De donde:

1°	2°	3°	4°	…	n°
t_1;	t_2;	t_3;	t_4;	…;	t_n

Ejemplos

- 3 ; 6 ; 9 ; 12 ;15 ; ....
- 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; ....
- 5 ; 6 ; 8 ; 11 ; 15 ; ....

SUCESIÓN NUMÉRICA

SUCESIONES NUMÉRICAS NOTABLES

❑ SUCESIÓN LINEAL

Llamada también Sucesión Polinomial de 1er Orden o progresión aritmética (P.A.). Se caracteriza por tener razón (r) constante y se calcula cómo la diferencia de 2 términos consecutivos.

Analicemos *La siguiente sucesión:*

$$\begin{array}{cccccccc} & 1° & 2° & 3° & 4° & \ldots & n° \\ 2; & 5; & 8; & 11; & 14; & \ldots & t_n \\ & +3 & +3 & +3 & +3 & & \end{array}$$

razón aritmética

Se observa que el término anterior al primero (t_0) *es igual a:* $t_0 = 5 - 3 = 2$

SUCESIÓN NUMÉRICA

Además:

$t_1 = 3(1) + 2 = 5$

$t_2 = 3(2) + 2 = 8$

$t_3 = 3(3) + 2 = 11$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$t_n = \underbrace{3}_{\text{razón}}\, n + \underbrace{2}_{t_0}$

EN GENERAL

$$\boxed{\rightarrow \ t_n = rn + t_0}$$

Ejemplo 1

Calcula el término enésimo en:

	1°	2°	3°	4°	5°	...
−1	4;	9;	14;	19;	24;	...

+5 +5 +5 +5

$t_n = 5n + (-1)$

$\rightarrow t_n = 5n - 1$

SUCESIÓN NUMÉRICA

SUCESIONES NUMÉRICAS NOTABLES

❑ SUCESIÓN CUADRÁTICA

Llamada también Sucesión Polinomial de 2do Orden. Su término enésimo tiene la forma de un polinomio de 2do. grado.

$$\boxed{\rightarrow\ t_n = An^2 + Bn + C}$$

Es decir:

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & & & 1° & 2° & 3° & 4° & 5° & \ldots \\
\boldsymbol{C} = & t_0; & & t_1; & t_2; & t_3; & t_4; & t_5; & \ldots \\
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = & & +m & +a & +b & +c & +d & & \\
\boldsymbol{2A} = & & & +r & +r & +r & +r & &
\end{array}$$

$$\boxed{A = \frac{r}{2}}\ ;\ \boxed{B = m - A}\ ;\ \boxed{C = t_0}$$

SUCESIÓN NUMÉRICA

SUCESIONES NUMÉRICAS NOTABLES

❑ SUCESIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo 2

Calcula el término de lugar 20 en:

1°	2°	3°	4°	5°	...
5;	11;	19;	29;	41;	...

Resolución

		1°	2°	3°	4°	5°	...
$C =$	1;	5;	11;	19;	29;	41;	...
$A + B =$	+4	+6	+8	+10	+12		
$2A =$	+2	+2	+2	+2			

$$A = \frac{2}{2} = 1 \; ; \; B = 4 - A = 3 \; ; \; C = 1$$

$$\rightarrow \; t_n = n^2 + 3n + 1$$

$$t_{20} = 461$$

SUCESIÓN NUMÉRICA

SUCESIONES NUMÉRICAS NOTABLES

❑ SUCESIÓN GEOMÉTRICA (P.G)

Es una sucesión de números tal que cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo llamado razón de la progresión.

1° 2° 3° 4° 5° ...

$$t_1; \quad t_2; \quad t_3; \quad t_4; \quad t_5; \ldots$$

$\times q \quad \times q \quad \times q \quad \times q$

$$t_1; \quad t_1 \times q; \quad t_1 \times q^2; \quad t_1 \times q^3; \quad t_1 \times q^4; \ldots$$

$$\boxed{t_n = t_1 q^{n-1}}$$

donde, q: *razón*; t_1: *primer término*

PROBLEMA 1

Determina el término enésimo en la sucesión:

$$9 \,;\, 16 \,;\, 23 \,;\, 30 \,;\, 37 \,;\ \ldots$$

Resolución

Nos piden calcular el término enésimo.

1° 2° 3° 4° 5° ...

$$2 \quad 9;\ 16;\ 23;\ 30;\ 37;\ldots$$

+7 +7 +7 +7

$$t_n = 7n + (2)$$

$$\therefore\ 7n + 2$$

PROBLEMA 2

Roxana está resolviendo su helicotarea semanal, y tiene dificultad con este problema:
Determine la ley de formación de:

3 ; 8 ; 15 ; 24 ; 35 ; ...

Si después de algunos minutos pudo resolver el problema, podría decir usted, ¿cuál fue su respuesta?

Resolución

Nos piden calcular la ley de formación.

1° 2° 3° 4° 5° ...

$$C = 0;\ 3;\ 8;\ 15;\ 24;\ 35;\ \ldots$$

$$A + B = +3\quad +5\quad +7\quad +9\quad +11$$

$$2A = +2\quad +2\quad +2\quad +2$$

$$A = 1 \qquad B = 2 \qquad C = 0$$

$$\boxed{t_n = An^2 + Bn + C}$$

$$\rightarrow t_n = 1n^2 + 2n + 0$$

$$\therefore\ n^2 + 2n$$

PROBLEMA 3

Halle el número de términos en la sucesión:

6; 11; 16; 21; . . . ; 201

Resolución

Nos piden calcular el número de términos.

	1°	2°	3°	4°	...	n°
1	6;	11;	16;	21;...;		201
		+5	+5	+5		

$$t_n = 5n + 1 = 201 \quad \rightarrow n = 40$$

También :

1°	2°	3°	4°	...	40°	
$\times 5$	$\times 5$	$\times 5$	$\times 5$			$\div 5$
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$			-1
6;	11;	16;	21;	...;	201	

$\therefore$ 40 términos

PROBLEMA 4

Halle el número de términos en la sucesión:

4; 7; 12; 19; 28; ... ;903

$$t_n = An^2 + Bn + C$$

Resolución

Nos piden calcular el número de términos.

1° 2° 3° 4° 5° ... n°

$$C = 3;\ 4;\ 7;\ 12;\ 19;\ 28;\ \ldots;903$$

$$A + B = +1\quad +3\quad +5\quad +7\quad +9$$

$$2A = +2\quad +2\quad +2\quad +2$$

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = 3$$

$$\rightarrow t_n = 1n^2 + 0n + 3 = 903$$

$$n^2 + 3 = 903$$

$$n = 30$$

$\therefore$ 30 *términos*

PROBLEMA 4 (Otro modelo de desarrollo)

Halle el número de términos en la sucesión:

4; 7; 12; 19; 28; ... ;903

Resolución

Determinando el número de términos intuitivamente.

1°	2°	3°	4°	5°	...	n°
$(1)^2+3$	$(2)^2+3$	$(3)^2+3$	$(4)^2+3$	$(5)^2+3$	...	$(30)^2+3$
4;	7;	12;	19;	28;	...	;903

$\therefore$ 30 *términos*

PROBLEMA 5

En un examen mensual se propone a los alumnos de 4.° año el siguiente problema:

Determine el término n-ésimo en

S: 2; 6; 18; 54; ...

Resolución

Piden calcular el término enésimo de la sucesión geométrica.

1°	2°	3°	4°	5°	...
2;	6;	18;	54;	162;	...
2;	2×3;	2×3^2;	2×3^3;	2×3^4;	...

$\times 3$ $\times 3$ $\times 3$ $\times 3$

$$\rightarrow t_n = 2\times3^{n-1}$$

$\therefore$ $2\times3^{n-1}$

PROBLEMA 6

Un comerciante inicia sus actividades vendiendo el primer día una caja de chocolates, el segundo día 3 cajas, el tercero 6 cajas, el cuarto 10 cajas y el quinto 15 cajas, y así sucesivamente.

¿Cuántas cajas vendió el día 20?

Resolución

Determinar el número de cajas de chocolate en el vigésimo día.

1°día	2°día	3°día	4°día	...	n°día
1;	3;	6;	10;	...	t_n
$\frac{1\times 2}{2}$	$\frac{2\times 3}{2}$	$\frac{3\times 4}{2}$	$\frac{4\times 5}{2}$	...	$\frac{n(n+1)}{2}$

$$\rightarrow\ t_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$t_{20}=\frac{20(21)}{2}$$

$\therefore$ 210 chocolates

PROBLEMA 7

Un niño vende boletos de cierta lotería. El primer día vendió 2 boletos, el segundo día 5 boletos, el tercer día 4 boletos más que el segundo día, el cuarto día el doble de lo que vendió el tercer día menos 4 boletos; y así sucesivamente. ¿En qué día vendió 230 boletos?

Resolución

Nos piden calcular el número de términos.

$$\begin{array}{lllllllll} & & 1° & 2° & 3° & 4° & 5° & ... & n° \\ C = & 0; & 2; & 5; & 9; & 14; & 20; & ...; & 230 \\ A+B = & & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & & \\ 2A = & & & +1 & +1 & +1 & +1 & & \end{array}$$

$A = 1/2 \quad B = 3/2 \quad C = 0$

$$\rightarrow t_n = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} = 230$$

$$n^2 + 3n = 460$$

$$n = 20$$

$\therefore$ 20 *términos*

PROBLEMA 8

Halle el término de lugar 30 en la siguiente sucesión numérica:

2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ; ...

Resolución

Piden calcular el término 30 de la sucesión cuadrática.

$$\begin{array}{cccccc} 1° & 2° & 3° & 4° & \dots & n° \\ \underbrace{2;}_{(1\text{x}2);} & \underbrace{6;}_{(2\text{x}3);} & \underbrace{12;}_{(3\text{x}4);} & \underbrace{20;}_{(4\text{x}5);} & \dots & \underbrace{t_n}_{n(n+1)} \end{array}$$

$$\rightarrow\ t_n = n(n+1)$$

$$t_{30} = 30(31)$$

$$t_{30} = 930$$

$\therefore$ 930 *términos*