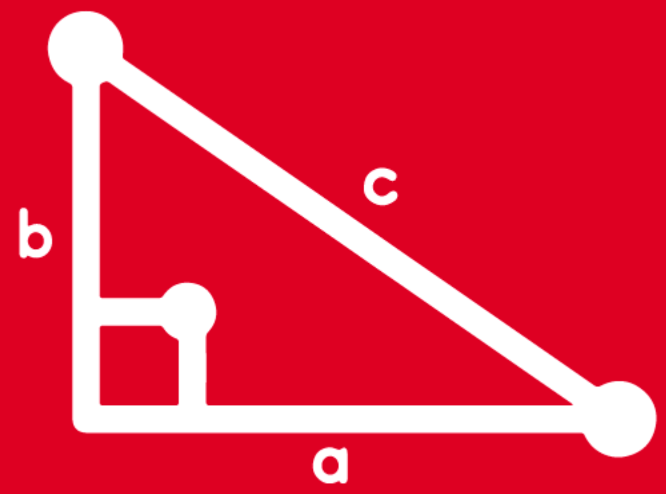
TRIGONOMETRY

Chapter 06
Sesión 1



4th
SECONDARY

Propiedades de las razones trigonométricas

SACO OLIVEROS

MOTIVACIÓN

A principios del siglo XVII, el matemático John Napier inventó los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje.

En el siglo XVIII, el matemático Leonard Euler demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas

Conclusión

- El objetivo de la trigonometría es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de las longitudes de los segmentos que forman los lados de un triángulo con las medidas de las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

TEORIA

Propiedades de las razones trigonométricas

Propiedad recíproca

$$\text{Si}: \alpha = \beta$$

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{sen}\alpha . \csc\beta = 1 \\ \cos\alpha . \sec\beta = 1 \\ \tan\alpha . \cot\beta = 1 \end{gathered}}$$

Ejemplo:

$$sen36°.csc36° = 1$$

$$cos10°.sec10° = 1$$

Propiedad complementaria

$$\text{Si}: \alpha + \beta = 90°$$

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \cot\beta \\ \sec\alpha = \csc\beta \end{gathered}}$$

Ejemplo:

$$sen36° = cos54°$$

$$tan20° = cot70°$$

HELICO-PRACTICE 1

Hallar el valor de θ si:

$$sen(4\theta - 18^0).\csc(2\theta + 10^0) = 1$$

Resolución:

Por propiedad recíproca:

$$\mathbf{4\theta - 18^0 = 2\theta + 10^0}$$

$$\mathbf{2\theta = 28^0}$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = 14^0}$$

HELICO-PRACTICE 2

Hallar el valor de α si:

$$sec(\alpha + 10^0) = \csc(2\alpha + 20^0)$$

Resolución:

Por propiedad complementaria:

$$(\alpha + 10^0) + (2\alpha + 20^0) = 90^0$$

$$3\alpha + 30^0 = 90^0$$

$$3\alpha = 60^0$$

$$\therefore \alpha = 20^0$$

HELICO-PRACTICE 3

Si $sen3x = cos7x$, $efectúe$:

$$E = tan5x + cos6x.csc4x$$

Resolución:

Por propiedad complementaria: $3x + 7x = 90^0$

$$10x = 90^0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 9^0}$$

Reemplazando en lo piden: $E = tan45^0 + \underbrace{cos54^0}.csc36^0$

$$E = 1 + \underbrace{sen36^0.csc36^0}_{1}$$

$$\therefore E = 2$$

HELICO-PRACTICE 4

Efectúe:

$$P = (5sen20^0 + 3cos70^0)(4csc20^0 - 2sec70^0)$$

Resolución:

Por propiedad complementaria:

$$sen20^0 = cos70^0$$
$$csc20^0 = sec70^0$$

$$P = (5\cos 70^\circ + 3\cos 70^\circ)(4\sec 70^\circ - 2\sec 70^\circ)$$

$$P = (8\cos 70^\circ)(2\sec 70^\circ)$$

$$P = 8.2.\underbrace{\cos 70^\circ.\sec 70^\circ}_{1}$$

$$\therefore P = 16$$

HELICO-PRACTICE 5

Si $sen\alpha . sec2\alpha = 1,$

efectúe: A=$cos2\alpha + \sqrt{3}cos\alpha$

Resolución: DATO: $sec2\alpha = \underbrace{\frac{1}{sen\alpha}}$

RECORDAR: $\boxed{csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}}$

$sec2\alpha = csc\alpha$ (RT ángulos complementarios)

Luego: $2\alpha + \alpha = 90^0$ ➡ $\alpha = 30^0$

Reemplazando en lo pedido: $A = \underbrace{\cos 60^{o}}_{\frac{1}{2}} + \sqrt{3}.\underbrace{\cos 30^{o}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ➡ $\therefore A = 2$

HELICO-PRACTICE 6

Si $\tan(x + 20^0) = cot20^0$ y $\sec(\theta + 10) . cos30^0 = 1$
determine: Q = $sen(x - \theta)$

Resolución:

DATO 1: RT ángulos complementarios

$$\tan(x + 20^0) = cot20^0$$

Luego: $x + 20^0 + 20^0 = 90^0$ ➡ $x = 50^0$

DATO 2: RT recíprocas:

$$\sec(\theta + 10^0) . cos30^0 = 1$$

Luego: $\theta + 10^0 = 30^0$ ➡ $\theta = 20^0$

Reemplazando en lo pedido:

Q = $sen(50^0 - 20^0)$

Q = $sen(30^0)$

$$\therefore Q = \frac{1}{2}$$

HELICO-PRACTICE 7

Espacio para el texto las edades de Mitsuo y Nicole están dadas por las siguientes relaciones: Mitsuo x años y Nicole y años.

$\star\ tan2x^0 . tan3x^0 = 1$

$\star\ sen(x+5)^0 = cos(y+10)^0$**.Indique las edades de cada unas de ellas**

Resolución:

Observación:

$\boxed{\text{Si } \tan\alpha . \tan\theta = 1 \Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ}$

DATO 1: $tan2x^0 . tan3x^0 = 1$

Luego: $2x^0 + 3x^0 = 90^0 \Rightarrow \boxed{x = 18}$

DATO 2: RT ángulos complementarios:

$$\operatorname{sen}(x+5)^\circ = \cos(y+10)^\circ$$

Luego: $(x+5)^\circ + (y+10)^\circ = 90^\circ \Rightarrow \boxed{y = 57}$

Mitsuo tiene 18 años y Nicole tiene 57 años

HELICO-PRACTICE 8

Si:

$sen(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)$

$\tan(2\alpha-\beta).\cot(\alpha+2\beta) = 1$

Efectúe: Q = $tan^2(\alpha+\beta) + \csc(\alpha-\beta)$

Resolución:

DATO 1: RT ángulos complementarios

$$sen(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)$$

Luego: $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=90^{\circ} \Rightarrow \boxed{\alpha = 45^{\circ}}$

DATO 2: RT recíprocas:

$$\tan(2\alpha-\beta).\cot(\alpha+2\beta) = 1$$

Luego: $(2\alpha-\beta)=(\alpha+2\beta) \Rightarrow \alpha = 3\beta$

$\Rightarrow \alpha = 3\beta = 45^{0} \Rightarrow \boxed{\beta = 15^{\circ}}$

PIDEN:

$$Q = \tan^2(60^{\circ}) + \csc(30^{\circ})$$

$$Q = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (2)$$

$$\therefore Q = 5$$