ALGEBRA

Chapter 12

5th of SECONDARY

ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVATION

Helicomotivación

Algunas aplicaciones

- En el campo de la economía se usan las ecuaciones cuadráticas para representar modelos económicos de oferta y demanda
- En el campo de la física para determinar el movimiento parabólico.
- En el ámbito militar lo utilizan en la artillería de cañones para hallar las trayectorias de las balas

HELICO THEORY

ECUACIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Forma General

$$ax + b = 0 \quad , a \neq 0$$

Donde :

- $x: incógnita$
- $a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}$

Resolución de una ecuación

$$ax + b = 0 \leftrightarrow ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore C.S. = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Ejemplo:

Resuelva: $\frac{x-7}{2} = \frac{x+8}{5}$

5x-35 = 2x+16

3x = 51

x=17

$\therefore$ CS={17}

CLASIFICACIÓN SEGÚN SU SOLUCIÓN:

Sea la ecuación paramétrica $\boldsymbol{ax = b}$

Compatible Determinada:

- ✓ Solución única

$$\boxed{\boldsymbol{a \neq 0}}$$

FORMA: $3x = 15$

Compatible Indeterminada:

- ✓ Infinitas soluciones

$$\boxed{\boldsymbol{a = b = 0}}$$

FORMA: $0x = 0$

Incompatible

- ✓ No existe solución

$$\boxed{\boldsymbol{a = 0 \quad \wedge \quad b \neq 0}}$$

FORMA:

$0x = 1$

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Forma general :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

- ✓ x es la incógnita o variable
- ✓ $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
- ✓ Siendo las raíces : $x_1 \wedge x_2$

Resolución de la ecuación :

1.-Por factorización:

- Resolver la ecuación :

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & +2 \end{array}$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$= 0 \qquad = 0$$

$$x = 3 \vee x = -2$$

$$\therefore C.S. = \{-2; 3\}$$

2.- Por la fórmula de Carnot

Siendo las raíces : $x_1 \wedge x_2$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Resolver la ecuación : $\overset{a}{2}x^2 \overset{b}{- 3}x \overset{c}{- 4} = 0$

$$x_{1;2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$\therefore \quad C.S. = \left\{\frac{3+\sqrt{41}}{4}; \frac{3-\sqrt{41}}{4}\right\}$$

DISCRIMINANTE

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ejemplo:

*Halle el discriminante de:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

a= 1 b= -4 c=2

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(2)$$

$$\boxed{\Delta = 8}$$

NATURALEZA DE LAS RAíCES

- CASO I : La ecuación tiene raíces reales y diferentes si:

$$\Delta > 0$$

- CASO II : La ecuación tiene raíces reales e iguales si:

$$\Delta = 0$$

- CASO III : La ecuación tiene raíces complejas y conjugadas si:

$$\Delta < 0$$

PROPIEDAD DE LAS RAÍCES

"x_1" y "x_2" raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ,a \neq 0$$

1.- Suma de Raíces

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

2.- Producto de Raíces

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

3.- Suma de Inversas

$$\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN x

Siendo : "x_1" y "x_2" las raíces de la ecuación cuadrática

$$\boxed{x^2 - (\ x_1 + x_2\ )x + (\ x_1 x_2\ ) = 0}$$

Ejemplo :

Forme la ecuación cuadrática cuyas raíces sean 7 y 3

$$x^2 - (\ 7\ +\ 3\ )x + (\ 7\ )(\ 3\ ) = 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1

Al resolver: $\frac{x-7}{5} - \frac{1+2x}{4} = \frac{6x+2}{4}$

Se tiene como CS=$\left\{\frac{n-44}{36}\right\}$ Calcule: $(n+1)^2$

Resolución

$$20\left(\frac{x-7}{5} - \frac{1+2x}{4}\right) = \left(\frac{6x+2}{4}\right)20$$

$$4x - 28 \quad -5 - 10x = 30x + 10$$

$$-33 - 6x = 30x + 10$$

$$-43 = 36x$$

$$\boxed{\frac{-43}{36} = x}$$

Igualando soluciones

$$\frac{n-44}{36} = \frac{-43}{36}$$

$$\boxed{n = 1}$$

$$\therefore\ (n+1)^2 = \boxed{4}$$

PROBLEMA 2

Si la ecuación en x:

$$\left(\frac{a+1}{3}\right)x-\frac{b}{4}=\frac{3x}{2}-\frac{b-1}{6}$$

Tiene infinitas soluciones. Calcule: T=2(a+b) =2a+2b

Resolución

Agrupando en forma conveniente

$$\left(\frac{a+1}{3}-\frac{3}{2}\right)x=\frac{b}{4}-\frac{b-1}{6}$$

Por propiedad

$$\frac{a+1}{3}-\frac{3}{2}=0$$

Resolviendo

2a+2−9=0

$$\frac{b}{4}-\frac{b-1}{6}=0$$

3b-(2b-2)=0

b= -2

2a=7

2b= -4

SUMANDO OBTENEMOS

∴ T=3

PROBLEMA 3

Si la ecuación: $\frac{2ax^2-3}{x-a} = x-2$

Es de primer grado en x. Halle el valor de x

Resolución

Por Steven obtenemos

$$\boxed{(x-a)(x-2) = x^2-(a+2)x+2a}$$

$$2ax^2-3 = x^2-(a+2)x+2a$$

$$2ax^2-x^2+(a+2)x = 2a+3$$

$$\boxed{(2a-1)}x^2+(a+2)x = 2a+3$$

Por ser de primer grado $2a-1=0$

$$a=\frac{1}{2}$$

Quedaria solamente

$$(a+2)x = 2a+3$$

Reemplazando el valor de a

$$\frac{5}{2}x = 4 \Rightarrow \therefore \boxed{x=\frac{8}{5}}$$

PROBLEMA 4

Resolver:

$$(3x-1)(x+2)+1=(x+2)^2+4x$$

Resolución

POR DISTRIBUTIVA Y EL BINOMIO AL CUADRADO

$$3x^2+6x\ -\mathrm{x}-2\ +1=\ x^2+4x+4\ +4x$$

REDUCIENDO QUEDA

$$2x^2\ -3x\ -5=0$$

$$\begin{array}{cc} 2x & -5 \\ x & 1 \end{array}$$

$$(2x-5)(\mathrm{x}+1)=0$$

=0 =0

$$\boxed{x_1=\frac{5}{2}}\ \vee\ \boxed{x_2=-1}$$

$$\therefore\ \boxed{\mathrm{CS}=\{\frac{5}{2};-1\}}$$

PROBLEMA 5

Obtenga el valor de n si la ecuación:

$$(n+4)x^2-(2n+2)x+n-1=0$$

Tiene raíces iguales

a b c

=-2(n+1)

Resolución

RAICES IGUALES $\Delta = 0$

$$b^2-4ac=0 \rightarrow b^2=4ac$$

$$(\cancel{-2}(n+1))^2=\cancel{4}(n+4)(n-1)$$

$$\cancel{(n)^2}+2(n)(1)+(1)^2=\cancel{n^2}+(-1+4)n+(-1)(4)$$

$$2n+1=3n-4 \rightarrow$$

$\therefore$ $\boxed{n=5}$

PROBLEMA 6

Si x_1 y x_2 son las raices de la ecuación:

$$\underbrace{2}_{a}x^2 - \underbrace{(7n-8)}_{b}x + \underbrace{n+4}_{c} = 0$$

Halle el valor de n^3 si se cumple: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 3$

Resolución

Por dato: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 3$

Por propiedad: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{b}{c}$

reemplazando

$$-\frac{(-(7n-8))}{(n+4)} = 3$$

$$7n - 8 = 3n + 12 \Rightarrow n = 5$$

$\therefore$ $\boxed{n^3 = 125}$

PROBLEMA 7

En el 2003 la edad de la prof. Nelia era 4T; si x_1 y x_2 son las raíces de: $x^2 - 5x + 7 = 0$. Además: T=$\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2-6}$ ¿Cuántos años tiene Nelia?

Resolución

$$\underbrace{\boxed{(x_1+x_2)}}_{5}{}^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2\underbrace{\boxed{x_1x_2}}_{7}$$

$$25 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 14$$

$$11 = x_1{}^2 + x_2{}^2$$

$$\underbrace{\boxed{(x_1+x_2)}}_{5}{}^3 = x_1{}^3 + x_2{}^3 + 3\underbrace{\boxed{x_1x_2}}_{7}\underbrace{\boxed{(x_1+x_2)}}_{5}$$

$$125 = x_1{}^3 + x_2{}^3 + 105$$

$$20 = x_1{}^3 + x_2{}^3$$

Reemplazando en T

$$T = \frac{20}{11-6} = 4$$

EN 2003	EN 2021
16	34

∴ 34 años

PROBLEMA 8

Forme la ecuación de segundo grado si sus raíces son:

$$\underbrace{7+2\sqrt{3}}_{x_1} \; y \; \underbrace{7-2\sqrt{3}}_{x_2}$$

Resolución

Formación: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

Reemplazando datos

$$x^2-\overbrace{\boxed{(7+2\sqrt{3}+7-2\sqrt{3})}}^{=14}x+\overbrace{\boxed{(7+2\sqrt{3})(7-2\sqrt{3})}}^{=49-12=37}=0$$

$\therefore$ $\boxed{x^2-14x+37=0}$