ARITHMETIC

Chapter 12

Y+X=

4th
SECONDARY

ESTUDIO DE LOS ENTEROS POSITIVOS II

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

El estudio de los números primos ha despertado la curiosidad de muchos estudiosos por saber cuál es el más grande número primo. A continuación algunos descubrimientos.

- Lucas en 1877 publicó el número $2^{177} - 1$ que tiene 39 cifras.

- Robinson en 1958 publicó los números $81 \times 2^{324} + 1$; $63 \times 2^{326} + 1$; $35 \times 2^{327} + 1$

Cada uno de ellos son números con 100 cifras.

- La Universidad de Illinois (EE. UU.) en 1963 publicó el número $2^{11213} - 1$, que tiene 3376 cifras.

- En 1971, en New York (EE. UU.), se publicó el número primo $2^{19937} - 1$, que tiene 6002 cifras, que fueran calculadas en una computadora.

DESCOMPOSICION CANONICA

Recordemos :

Sea $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)$

Donde : $a \neq b \neq c,\ primos$

$\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{Z}^{+}$

1 Cantidad de divisores

En general:

$$CD_N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$$

2 Suma de divisores

Ejm

$$60 = \underbrace{2^2}_{2^0,\ 2^1,\ 2^2} \times \underbrace{3^1}_{3^0,\ 3^1} \times \underbrace{5^1}_{5^0,\ 5^1}$$

$$SD_{60} = (1 + 2^1 + 2^2)(1 + 3^1)(1 + 5^1)$$

$$SD_{60} = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right) = 168$$

En general:

$$SD_N = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1} - 1}{c - 1}\right)$$

3 Indicador de Euler o función de Euler $[\phi(N)]$

Se denomina indicador de un entero positivo, a la cantidad de números menores que el entero positivo que son PESI con él.

Ejm 1 Números menores a 8

Para 8 $\overbrace{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}$

$8 = 2^3$ PESI con 8

$\rightarrow \phi(8) = 4 = 2^{3-1}(2-1)$

Ejm 2 Números menores a 12

Para 12 : $\overbrace{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11}$

$12 = 2^2 . 3^1$ PESI con 12

$\rightarrow \phi(12) = 4 = 2^{2-1}(2-1)\ 3^{1-1}(3-1)$

En general:

$$\phi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)c^{\theta-1}(c-1)\ldots$$

1

Halle la cantidad de divisores del número 19 600.

Resolución :

$$\begin{array}{r|l} 19600 & 100 = 2^2 x\ 5^2 \\ 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$19600 = 2^4 \times 5^2 \times 7^2$$

$$CD_{19600} = (4+1)(2+1)(2+1)$$

$$CD_{19600} = 5 \times 3 \times 3$$

$$CD_{19600} = 45$$

RPTA:	45

2

¿Cuántos divisores compuestos tiene el número 33 075?

Resolución :

$$CD_{total} = CD_{simples} + CD_{compuestos}$$

33075	3
11025	3
3675	3
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

$$33075 = 3^3 \times 5^2 \times 7^2$$

$$CD_{33075} = (3+1)(2+1)(2+1)$$

$$CD_{33075} = 4 \times 3 \times 3$$

$$CD_{33075} = 36$$

$$CD_{simple} = 4$$

$$CD_{compuestos} = CD_{total} - CD_{simples}$$

$$CD_{compuesto} = 36 - 4$$

$$CD_{compuesto} = 32$$

RPTA: 32

3

Del número 3000, halle:
A: **cantidad de divisores múltiplos de** 20
B: **cantidad de divisores múltiplos de** 75
Dé como respuesta el valor de A + B.

Resolución :

$$3000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \ldots \quad (\text{D.C})$$

Hallar A

$$3000 = \cancel{2^2 \times 5^1}\,\underbrace{(2^1 \times 3^1 \times 5^2)}$$

$$A = CD_{3000\overset{\circ}{20}} = (1+1)(1+1)(2+1)$$

$$A = 12$$

Hallar B

$$3000 = \cancel{5^2 \times 3^1}\,\underbrace{(2^3 \times 5^1)}$$

$$B = CD_{3000\overset{\circ}{75}} = (3+1)(1+1)$$

$$B = 8$$

$$\therefore \quad A + B = 20$$

RPTA: 20

4

Calcule la suma de divisores del número 980.

Resolución :

$$SD_N = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1}-1}{c-1}\right)$$

$$980 = 98 \times 10$$

$$980 = 2 \times 7^2 \times 2 \times 5$$

$$980 = 2^2 \times 5^1 \times 7^2$$

$$SD_{980} = \left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)\left(\frac{7^{2+1}-1}{7-1}\right)$$

$$SD_{980} = 7 \times 6 \times 57$$

$$SD_{980} = 2394$$

RPTA: 2394

5

Halle el menor número que posee 55 divisores. Dé como respuesta la cifra de mayor orden.

Resolución :

$Sea\ el\ menor\ \ número$:

$$N = 2^{a} x\ 3^{b} \quad \text{...D.C}$$

$$CD_{(N)} = (a+1)\,(b+1) = 55$$

4	10
10	4

$a = 3\,, b = 9 \Longrightarrow N = 2^{4}\ x\ 3^{10} = 944784$

$a = 9\,, b = 3 \Longrightarrow N = 2^{4}\ x\ 3^{10} = \boxed{82944}$

$\therefore\ Cifra\ de\ mayor\ orden\ es\ \ 8$

RPTA: 8

6

Si 686^n **tiene** 96 **divisores, halle el valor de** n**.**

Resolución :

$$686^n = (2^1 . 7^3)^n$$

$$686^n = 2^n \times 7^{3n}$$ ...D.C

$$CD(686^n) = (n+1)(3n+1) = 96$$

$$(n+1)(3n+1) = (5+1)(3 . 5+1)$$

$\therefore\ n = 5$

RPTA: 5

7

Si $15^n \times 55^{n+1}$ tiene 500 divisores compuestos, halle el valor de n.

Resolución :

$$N = 15^n . 55^{n+1}$$

$$N = (3^1 . 5^1)^n (5^1 . 11^1)^{n+1}$$

$$N = 3^n \times 5^n \times 5^{n+1} \times 11^{n+1}$$

$$N = 3^n \times 5^{2n+1} \times 11^{n+1}$$ ...D.C

$$CD_{totales} = CD_{simples} + CD_{compuestos}$$

$$(n+1)(2n+2)(n+2) = 4 + 500$$

$$(n+1)(2)(n+1)(n+2) = 504$$

$$(2)(n+1)^2(n+2) = 504$$

$$(n+1)^2(n+2) = 252$$

$$(n+1)^2(n+2) = (5+1)^2(5+2)$$

$$\therefore n = 5$$

RPTA: 5

8

En el último Concurso Nacional de Matemáticas una de las preguntas de la evaluación; era conocer si al aumentar una cierta cantidad de ceros a un número, este se modificaba en cuánto a su cantidad de divisores siendo la pregunta: ¿Cuántos ceros son necesarios colocar a la derecha del número 9 **para que el resultado tenga** 239 **divisores compuestos?**

Resolución :

$Sea\ el\ número$:

$$N = \underbrace{900\ldots000}_{"n"\,ceros}$$

$$N = 9 \times 10^n$$

$$= 3^2 \times (2^1 \cdot 5^1)^n$$

$$N = 2^n \times 3^2 \times 5^n \quad \text{...D.C}$$

$$CD_{totales} = CD_{simples} + CD_{compuestos}$$

$$(n+1)(2+1)(n+1) = 4 + 239$$

$$(3)\ (n+1)^2 = 243$$

$$(n+1)^2 = 81$$

$$(n+1) = 9$$

$$n = 8$$

$\therefore$ RPTA: 8 ceros