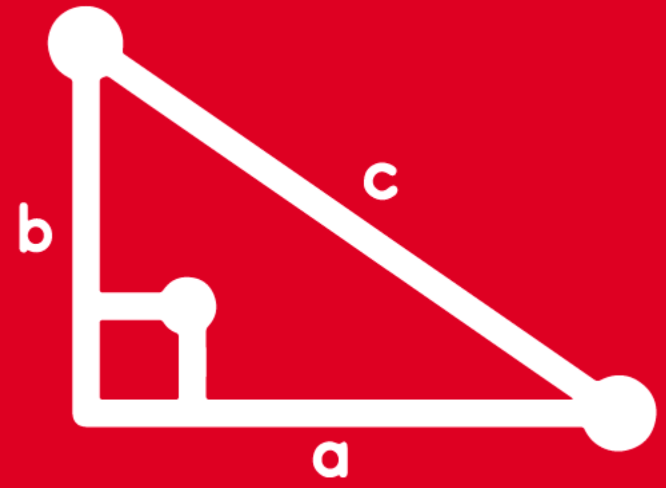
TRIGONOMETRY

Chapter 18
Session 2



4th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

SACO OLIVEROS

APORTES DE LOS ÁRABES A LA MATEMÁTICA

- "Los árabes adoptaron y desarrollaron la trigonometría hindú"
- ***Al-Battani (astrónomo) siglo IX*** fue el primero que aplicó el álgebra a la trigonometría.
- ***En el siglo X*** hicieron su aparición la **secante y la cosecante.**
- ***Las funciones seno y coseno*** fueron incorporadas de los hindúes.
- ***Las funciones tangente y cotangente*** sí son de origen árabe.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

Identidades para suma de ángulos

- ✓ $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x.\cos y + \cos x.\operatorname{sen}y$
- ✓ $\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$
- ✓ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x.\tan y}$

Identidades para diferencia de ángulos

- ✓ $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}x.\cos y - \cos x.\operatorname{sen}y$
- ✓ $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$
- ✓ $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x.\tan y}$

Identidades Auxiliares(para dos ángulos)

- ✓ $\operatorname{sen}(x+y).\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}^2y$
- ✓ $\cos(x+y).\cos(x-y) = \cos^2x - \operatorname{sen}^2y$
- ✓ $\tan x + \tan y + \tan(x+y).\tan x.\tan y = \tan(x+y)$
- ✓ $\tan x - \tan y - \tan(x-y).\tan x.\tan y = \tan(x-y)$

Identidades Auxiliares(para tres ángulos)

A. $\text{Si}: x + y + z = 180°$

- $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$
- $\cot x . \cot y + \cot y . \cot z + \cot x . \cot z = 1$

B. $\text{Si}: x + y + z = 90°$

- $\cot x + \cot y + \cot z = \cot x . \cot y . \cot z$
- $\tan x . \tan y + \tan y . \tan z + \tan x . \tan z = 1$

HELICOPRACTICE 1

Si $\theta \in IC$, reduzca : $E = \sqrt{\cos(\theta+\alpha).\cos(\theta-\alpha)+sen^2\alpha}$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\cos(x+y).\cos(x-y) = \cos^2x - sen^2y$$

Nos piden:

$$E = \sqrt{\underbrace{\cos(\theta+\alpha).\cos(\theta-\alpha)}_{} + sen^2\alpha}$$

$$E = \sqrt{\cos^2\theta - \cancel{sen^2\alpha} + \cancel{sen^2\alpha}}$$

$$E = \sqrt{\cos^2\theta}$$

$$E = |\cos\theta| \qquad \boxed{\theta \in IC}$$

$$\boxed{\therefore E = \cos\theta}$$

HELICOPRACTICE 2

Reduzca: $M = \text{sen}(37°+x).\text{sen}(37°-x)-\cos^2 x$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\text{sen}(x+y).\text{sen}(x-y) = \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y$$

Nos piden reducir:

$$M = \underbrace{\text{sen}(37° + x).\,\text{sen}(37° - x)} - \cos^2 x$$

$$M = \textbf{sen}^2\mathbf{37°} - \textbf{sen}^2\mathbf{x} - \cos^2 x$$

$$M = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \underbrace{(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}_{\mathbf{1}}$$

$$M = \frac{9}{25} - 1$$

$$M = \frac{9-25}{25}$$

$$\therefore M = -\frac{16}{25}$$

HELICOPRACTICE 3

Reduzca: $E = \tan 33° + \tan 20° + \frac{4}{3}.\tan 33°.\tan 20$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\tan x + \tan y + \tan(x+y).\tan x.\tan y = \tan(x+y)$$

Nos piden reducir:

$$E = \tan 33° + \tan 20° + \underset{\uparrow \atop \tan(33° + 20°)}{\frac{4}{3}}.\tan 33°.\tan 20°$$

Luego:

$$E = \tan(33° + 20°)$$

$$E = \tan 53°$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{4}{3}}$$

HELICOPRACTICE 4

Reduzca: M = √3tan80° – √3tan20° – 3tan80°.tan20°

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\tan x + \tan y + \tan(x+y).\tan x.\tan y = \tan(x+y)$$

Nos piden reducir:

$$M = \sqrt{3}\tan 80° - \sqrt{3}\tan 20° - \boldsymbol{\sqrt{3}.\sqrt{3}\tan 80°.\tan 20°}$$

Factorizamos $\sqrt{3}$

$$M = \sqrt{3}[\tan 80° - \tan 20° - \underbrace{\sqrt{3}}_{\tan(80° - 20°)}\tan 80°.\tan 20°]$$

Luego:

$$M = \sqrt{3}[\tan(80° - 20°)]$$

$$M = \sqrt{3}.\sqrt{3}$$

$$\boxed{\therefore\ M = 3}$$

HELICOPRACTICE 5

En el triángulo ABC se cumple que $\tan B = \frac{2}{3}$ y $\tan C = 4$; calcular tanA

RESOLUCIÓN

Como ABC es un triángulo, entonces:

$$A + B + C = 180°$$

Recordar:

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$$

Se cumple:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$$

$$\tan A + \frac{2}{3} + 4 = \tan A . \frac{2}{3} . 4$$

$$\tan A + \frac{14}{3} = \frac{8}{3} \tan A$$

Multiplicar por 3

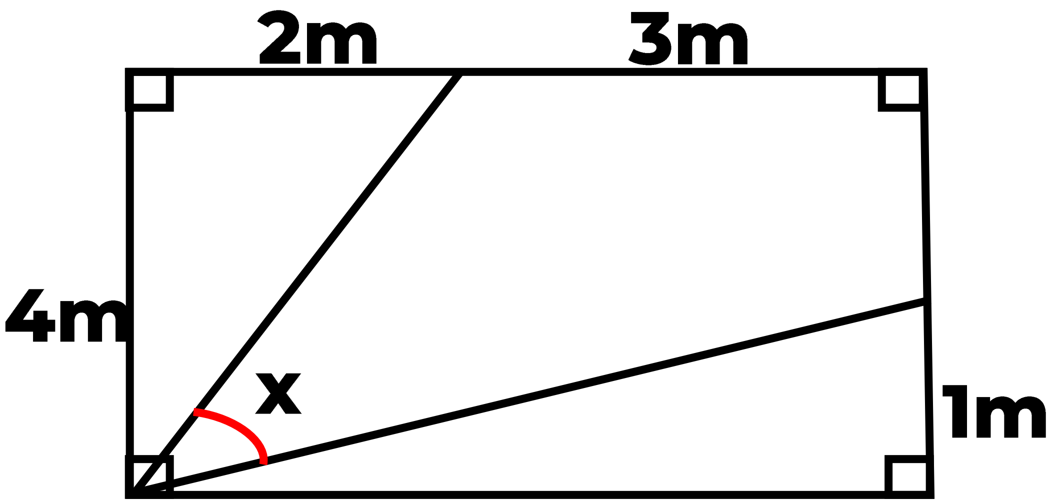
$$3\tan A + 14 = 8\tan A$$

$$14 = 5\tan A$$

$$\therefore \tan A = \frac{14}{5}$$

HELICOPRACTICE 6

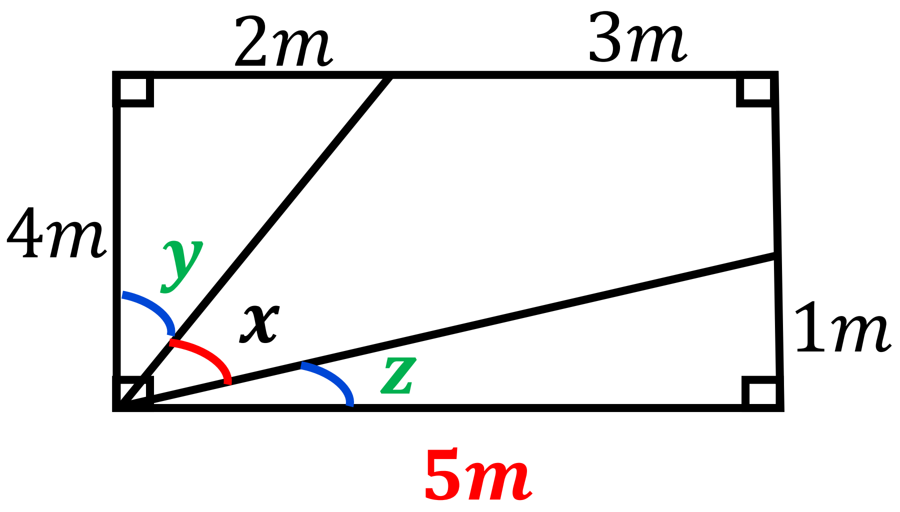
A partir del gráfico, determine el valor de tanx



RESOLUCIÓN

Recordar: $\text{Si}: x + y + z = 90°$

➤ $\cot x + \cot y + \cot z = \cot x . \cot y . \cot z$



$$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x . \cot y . \cot z$$

$$\cot x + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \cot x . \frac{4}{2} . \frac{5}{1}$$

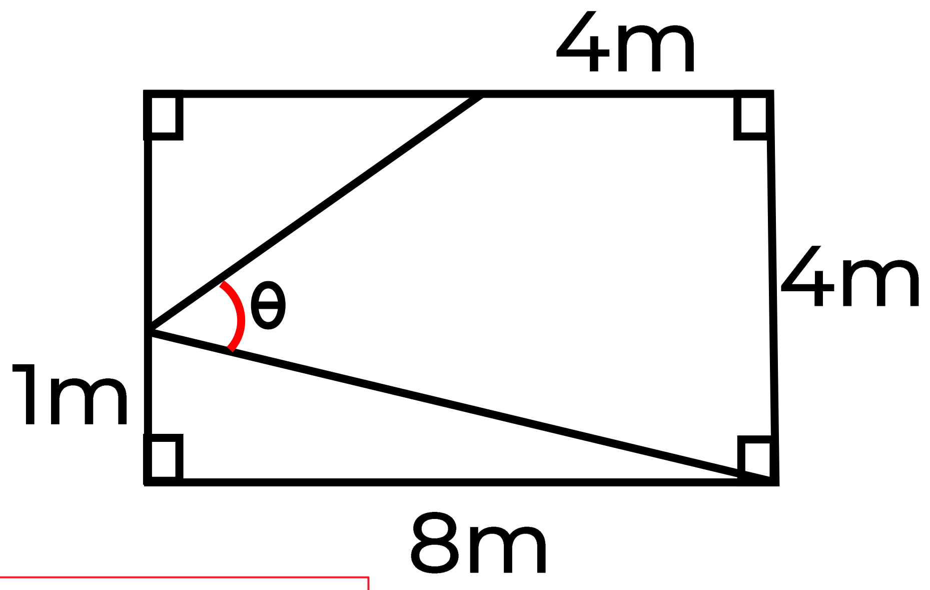
$$\cot x + 7 = 10 \cot x$$

$$\cot x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \tan x = \frac{9}{7}$$

HELICOPRACTICE 7

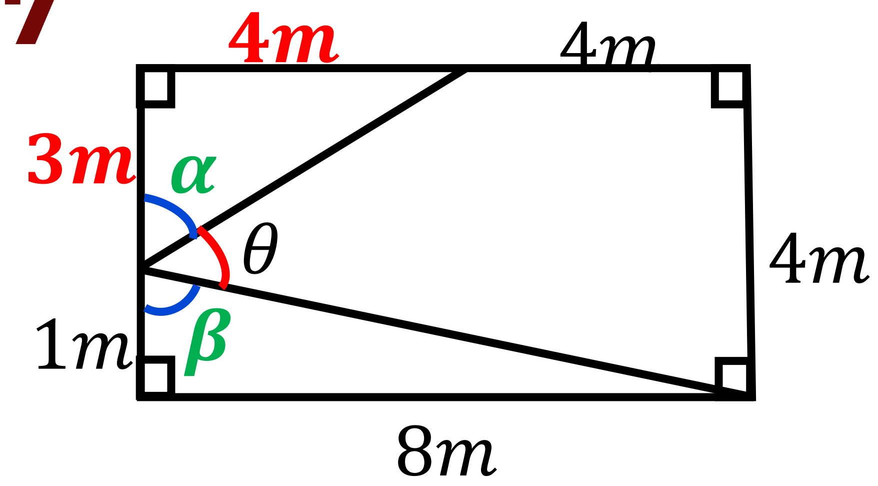
Del gráfico, determine cotθ



RESOLUCIÓN

Recordar: $\text{Si}: x + y + z = 180°$

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$$



$$\tan\alpha + \tan\theta + \tan\beta = \tan\alpha . \tan\theta . \tan\beta$$

$$\frac{4}{3} + \tan\theta + \frac{8}{1} = \frac{4}{3} . \tan\theta . \frac{8}{1}$$

$$\frac{28}{3} + \tan\theta = \frac{32}{3} . \tan\theta$$

x 3: $28 + 3\tan\theta = 32\tan\theta$

$$29\tan\theta = 28 \Rightarrow \tan\theta = \frac{28}{29}$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{29}{28}$$

HELICOPRACTICE 8

Al copiar de la pizarra la expresión

tan30°+tan70°+tan80°; un estudiante cometió un error y escribió tan70°.tan80°. Calcule la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el alumno.

RESOLUCIÓN

Recordar: $\mathrm{Si}: x+y+z=180°$

$$\boxed{\tan x+\tan y+\tan z=\tan x.\tan y.\tan z}$$

Nos piden la razón entre ellos:

$$R=\frac{\tan 30°+\tan 70°+\tan 80°}{\tan 70°.\tan 80°}$$

$$R=\frac{\tan 30°.\cancel{\tan 70°}.\cancel{\tan 80°}}{\cancel{\tan 70°}.\cancel{\tan 80°}}$$

$$R=\tan 30°$$

$$\boxed{\therefore R=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$