



ALGEBRA

Chapter 22

5th of
SECONDARY

FUNCIONES III



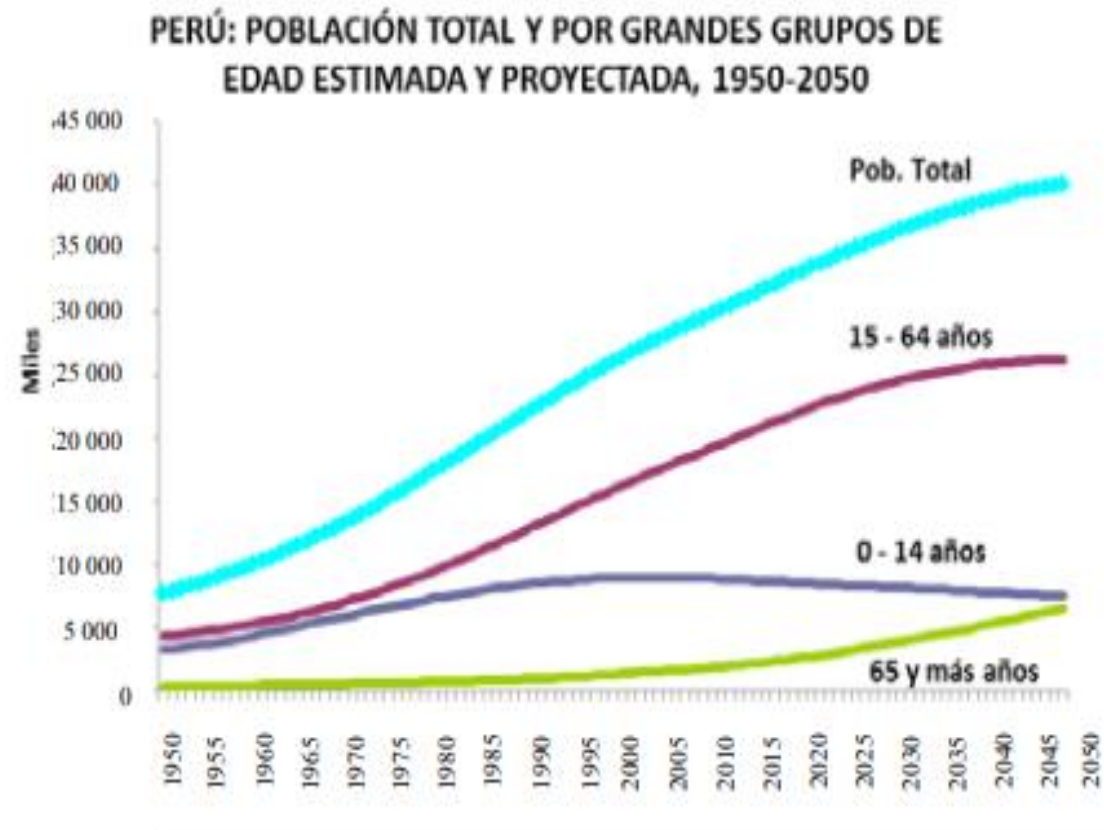
 **SACO OLIVEROS**

HELICOMOTIVATION

¿Cuál será la población en el Perú en el año 2050?

El INEI cuenta con un registro con información de el número de habitantes en **función** de los años, en base al cual se ha podido elaborar el siguiente gráfico:

En el cual se puede apreciar que para el año 2050 seremos aproximadamente **40 millones** de peruanos



Elaboración propia

Fuente: INEI - Estimaciones y Proyecciones de la Población 1950 - 2050

HELICO THEORY


F U N C I O N E S I I I




I) FUNCIÓN

INYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$, diremos que f es **inyectiva** si y sólo si:

$$\underbrace{a \neq b}_p \text{ implica } \underbrace{f(a) \neq f(b)}_q \text{ para todo } a; b \in \text{Dom } f$$


que es equivalente a la siguiente definición:

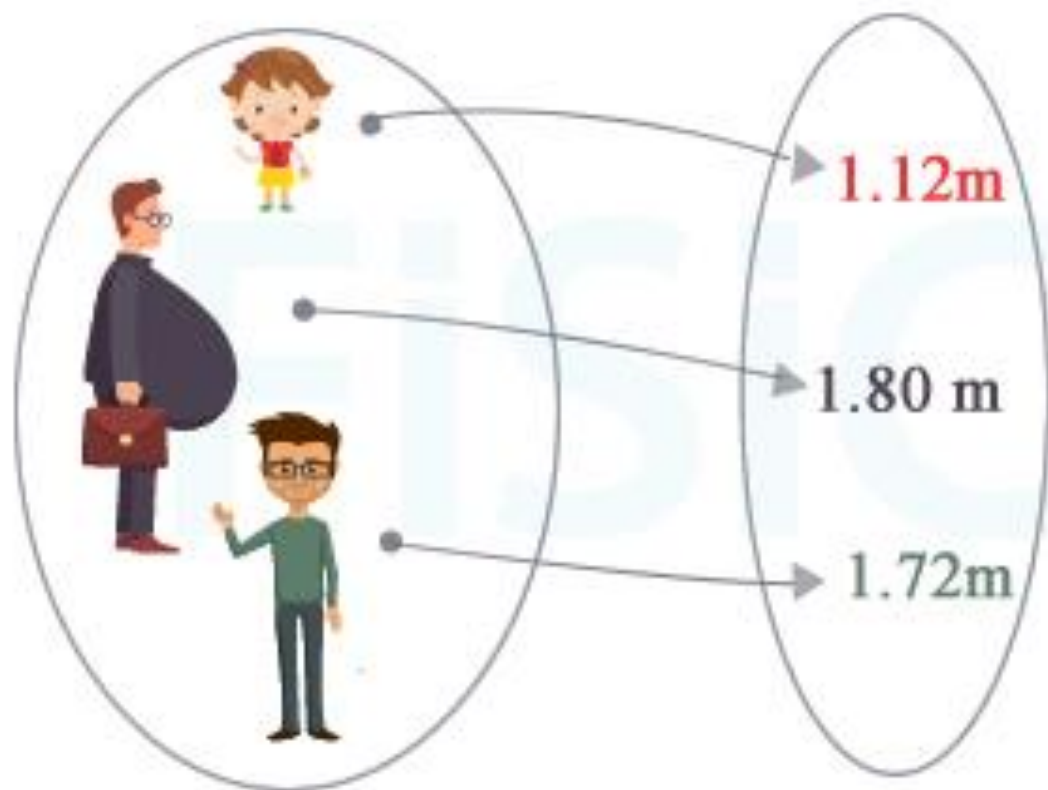
$$\underbrace{f(a) = f(b)}_{\sim q} \text{ implica } \underbrace{a = b}_{\sim p}$$




la cual usaremos
en los ejercicios

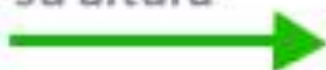


Función inyectiva



A cada persona
su altura

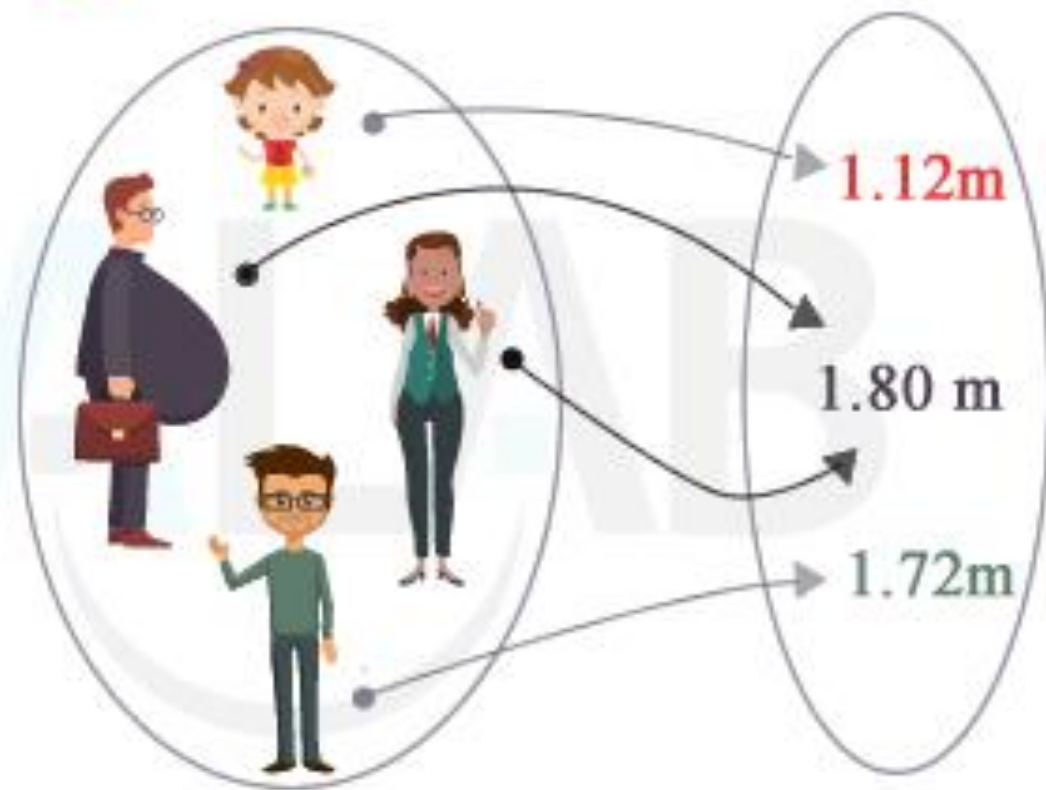
Dominio



Recorrido



Función no inyectiva



A cada persona
su altura


Dominio



Recorrido

FORMA PRÁCTICA DE IDENTIFICAR UNA FUNCIÓN INYECTIVA


Sea $F = \{(1; 3), (4; 6), (0; 8), (3; 6)\}$



porque en $(4; 6)$
y $(3; 6)$ se repite
el **6** dos veces

F **no** es inyectiva

Sea $G = \{(6; 7), (0; 2), (2; 8), (1; 1), (3; 5), (9; 3)\}$



G **si** es inyectiva,

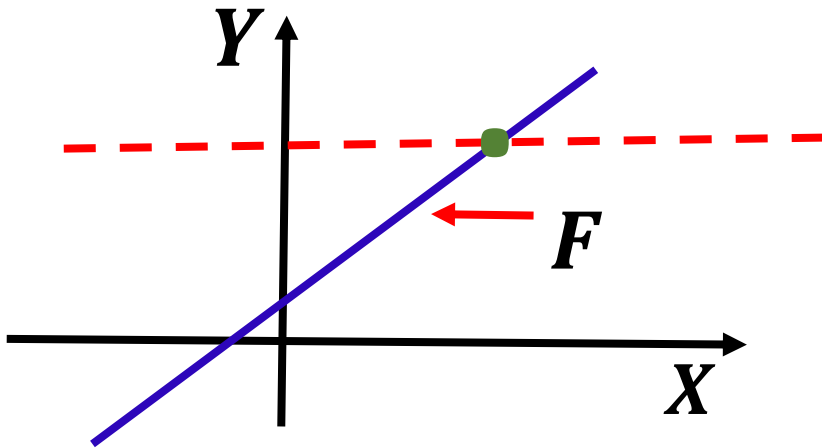
ninguno de las segundos componentes **se repite**

OBSERVACIÓN

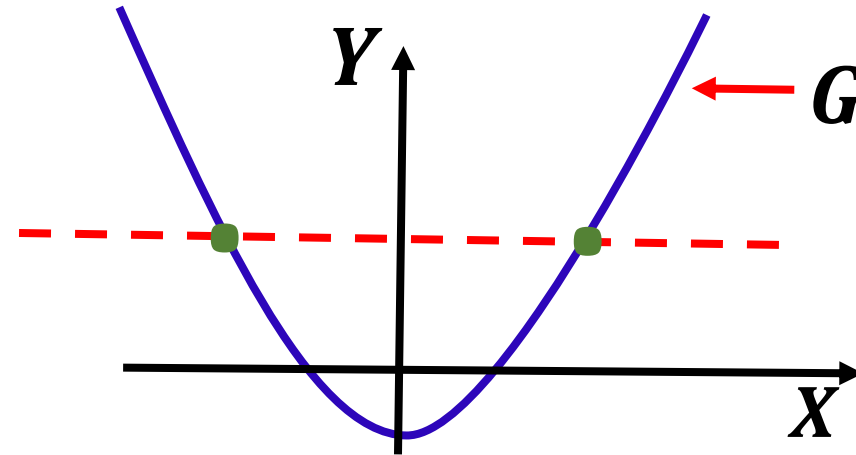
N

Para gráficas de funciones,
se dirá que **una gráfica** es **inyectiva**

si al trazar una recta horizontal lo corta sólo en **un punto**.



F es inyectiva



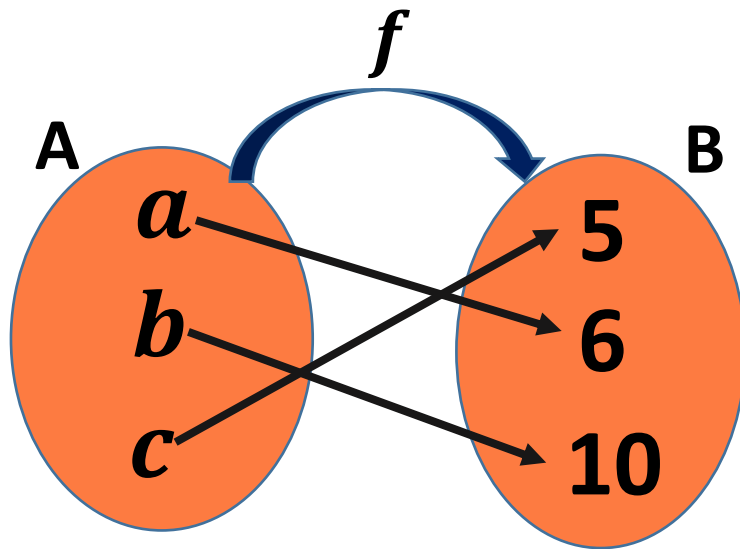
G no es inyectiva

II) FUNCIÓN



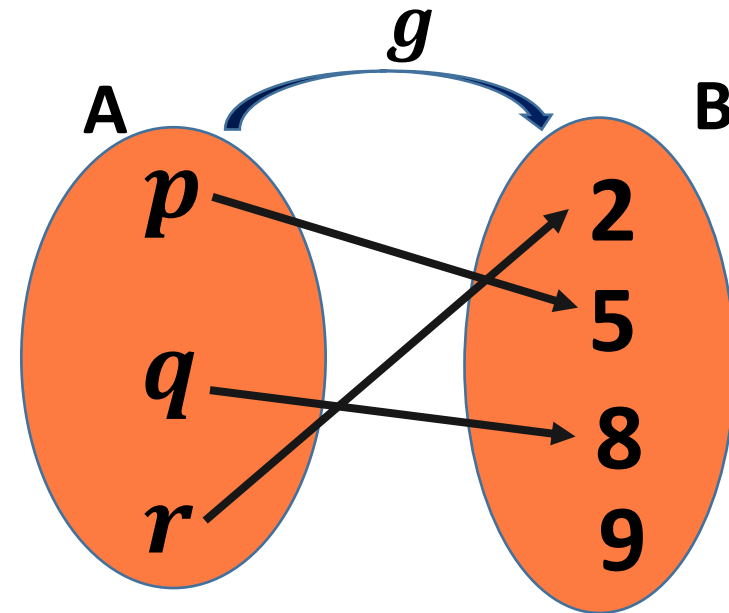
SOBREYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$, diremos que f es **sobreyectiva** si y sólo si: $Rang(f) = B$



f es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) = B$$



g **no** es sobreyectiva, pues:

$$Rang(g) \neq B$$

III) FUNCIÓN



BIYECTIVA

La función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si y sólo si f es **inyectiva** y **sobreyectiva**

IV) FUNCIÓN

INVERSA

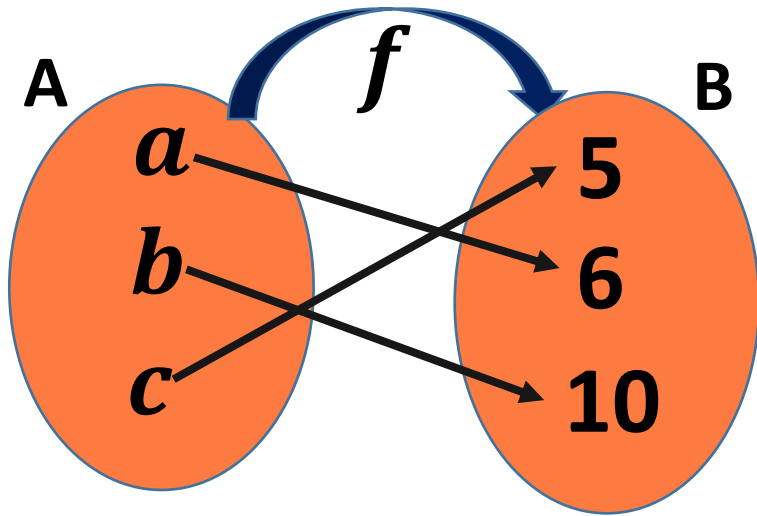
Si $f: A \rightarrow B$ es una función **biyectiva**, entonces existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ llamada **inversa de f** , definida por la condición $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

PROPIEDAD:

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$$

$$\text{Ran}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$$

Ejemplo de función inversa



$$\text{Dom } f = \{a; b; c\}$$

$$\text{Ran } f = \{6; 10; 5\}$$

$$f = \{(a; 6), (b; 10), (c; 5)\}$$

f es Inyectiva y f es Sobreyectiva

→ f es Biyectiva → existe f^{-1}

$$f^{-1} = \{(6; a), (10; b), (5; c)\}$$

Además se observa:

$$\text{Dom}(f^{-1}) = \{5; 6; 10\} = \text{Ran } f$$

$$\text{Ran}(f^{-1}) = \{a; b; c\} = \text{Dom } f$$

V) ÁLGEBRA DE



FUNCIONES

Sean f y g funciones, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ existen si y sólo si $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$

PROPIEDAD

S

$$f + g = \{(x; f(x) + g(x)) / x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

$$f - g = \{(x; f(x) - g(x)) / x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

$$f \cdot g = \{(x; f(x)g(x)) / x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

Ejemplo de álgebra de funciones



Sean $F = \{(-1; -2), (0; 0), (1; 2), (2; 4), (4; 6)\}$
 $G = \{(-1; -3), (1; 3), (4; 12), (6; 18)\}$ Halle: $F + G$

Resolución

Paso 1: $Dom(F) \cap Dom(G) = \{-1; 1; 4\}$

Paso 2:

$$F + G = \{(-1; F(-1) + G(-1)), (1; F(1) + G(1)), (4; F(4) + G(4))\}$$

$$F + G = \{(-1; -2 + -3), (1; 2 + 3), (4; 6 + 12)\}$$

$$F + G = \{(-1; -5), (1; 5), (4; 18)\}$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1 Sean las funciones



$$F = \{(5; 1), (0; 2), (-2; 1), (3; 4)\}$$

$$G = \{(2; 9), (3; 4), (4; 8), (0; 5)\} \text{ ¿} F \text{ y } G \text{ son inyectivas?}$$

Resolución

$$F = \{(\cancel{5}; 1), (\cancel{0}; 2), (\cancel{-2}; 1), (\cancel{3}; 4)\}$$

1 2 1 4

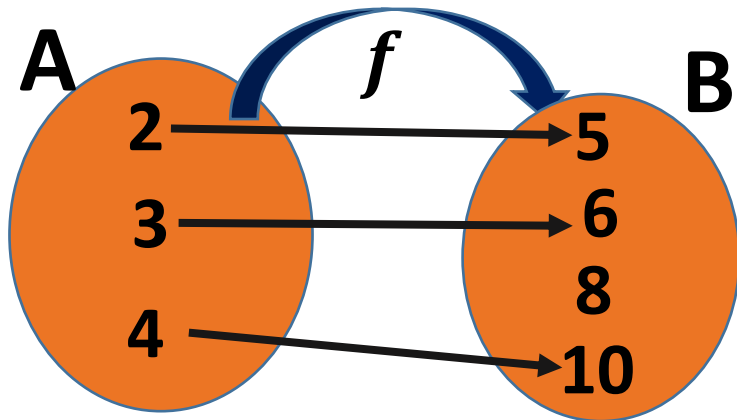
∴ **F no es inyectiva**

$$G = \{(\cancel{2}; 9), (\cancel{3}; 4), (\cancel{4}; 8), (\cancel{0}; 5)\}$$

9 4 8 5

∴ **G es inyectiva:**

PROBLEMA 2 Sean las funciones:



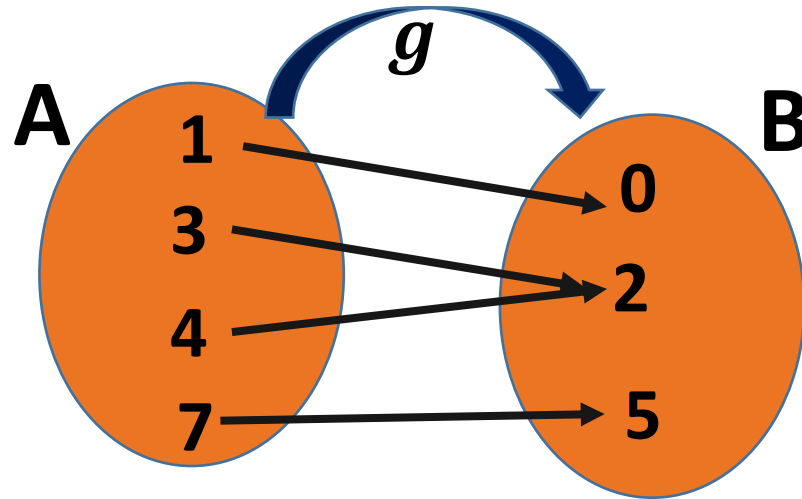
¿ f y g son sobreyectivas?

Resolución

$$\{5; 6; 10\} \neq \{5; 6; 8; 10\}$$

$$\text{Ran}(f) \neq B$$

∴ **f no es Sobreyectiva**



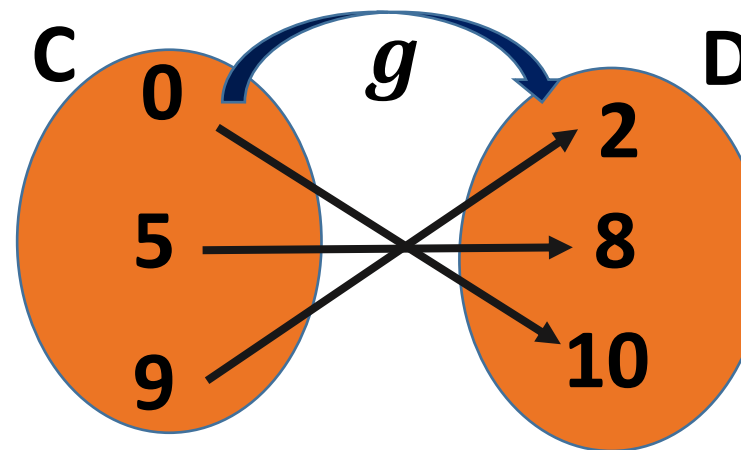
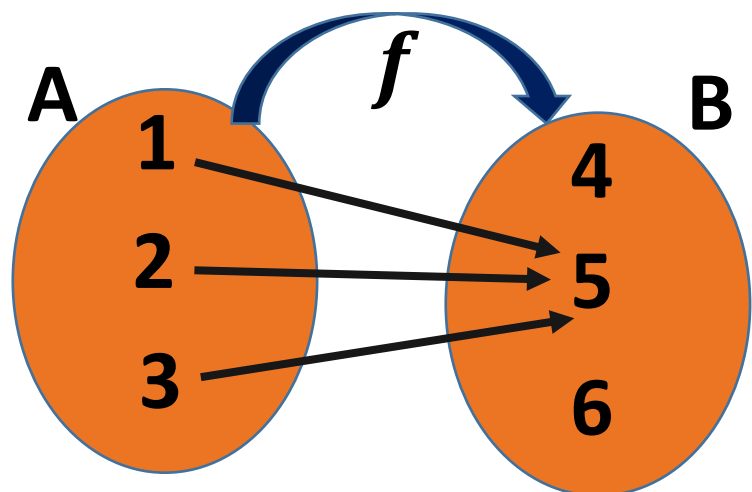
$$\{0; 2; 5\} = \{0; 2; 5\}$$

$$\text{Ran}(g) = B$$

∴ **g es Sobreyectiva**

PROBLEMA 3

Sean las funciones:



¿ f y g son biyectivas?

Resolución

$$f = \{(\cancel{1; 5}), (\cancel{2; 5}), (\cancel{3; 5})\}$$

f no es inyectiva:



f no es biyectiva

$$g = \{(\cancel{0; 10}), (\cancel{5; 8}), (\cancel{9; 2})\}$$

g es

$Ran\ g = \{10, 8, 2\}$ inyectiva:

$Ran\ g = D$

$$D = \{2; 8; 10\}$$

g es Sobreyectiva:



g es biyectiva

PROBLEMA 4 Sean $A=\{0;4;8;10\}$ $B=\{3;5;9;12\}$ y las funciones $f:A \rightarrow B$ y $g:A \rightarrow B$ tal que:

$f=\{(0;5),(4;3),(8;12),(10;9)\}$ $g=\{(8;12),(10;3),(0;5),(4;12)\}$

¿Existen f^{-1} y g^{-1} ? En caso existan, halle sus respectivos dominios y rangos

Resolución

f es inyectiva

f es Sobreyectiva $\Rightarrow f$ es biyectiva

\Rightarrow existe f^{-1}

$$f^{-1} = \{(5;0), (3;4), (12;8), (9;10)\}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(f^{-1}) = \{5;3;12;9\}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f^{-1}) = \{0;4;8;10\}$$

g no es inyectiva
"se repite el 12"

g no es Sobreyectiva
"falta el 9"

$\Rightarrow g$ no es biyectiva

\Rightarrow no existe g^{-1}



PROBLEMA 5 Dadas las funciones:

$$f = \{(-3; 2), (0; 0), (2; 4), (3; -1), (4; 3)\}$$
$$g = \{(2; 0), (3; 4), (4; 7), (6; 2)\}. \text{ Halle } f + g$$

Resolución

Hallamos el Dominio

$$\text{Dom } f = \{-3; 0; 2; 3; 4\}$$

$$\text{Dom } g = \{2; 3; 4; 6\}$$

$$\text{Dom}(f + g) = \{2; 3; 4\}$$

El álgebra de funciones

$$f + g = \{(2, \overset{4+0}{f(2)+g(2)}); (3, \overset{-1+4}{f(3)+g(3)}); (4, \overset{3+7}{f(4)+g(4)})\}$$

$$\therefore f + g = \{(2; 4); (3; 3); (4; 10)\}$$

PROBLEMA 6 Dadas las funciones:



$$f = \{(1; 2), (2; 5), (3; 4), (4; 1)\}$$

$$g = \{(0; 2), (1; 0), (2; 1), (-1; 3)\}. \text{ Halle } f - g$$

Resolución

Hallamos el Dominio

$$\text{Dom } f = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$\text{Dom } g = \{0; 1; 2; -1\}$$

$$\text{Dom } (f - g) = \{1; 2\}$$

El álgebra de funciones

$$f - g = \{(1, \overset{2-0}{f(1) - g(1)}); (2, \overset{5-1}{f(2) - g(2)})\}$$

$$\therefore f - g = \{(1; 2); (2; 4)\}$$

PROBLEMA 7 Halle $f \cdot g$ y $Ran(f \cdot g)$. Dadas:



$$f = \{(1; 4), (4; 5), (2; 3), (3; 2)\}$$

$$g = \{(0; 2), (1; 2), (2; -1), (3; 0), (5; 2)\}$$

Resolución

Hallamos el Dominio

$$Dom f = \{1; 4; 2; 3\}$$

$$Dom(f \cdot g) = \{1; 2; 3\}$$

$$Dom g = \{0; 1; 2; 3; 5\}$$

El álgebra de funciones

$$f \cdot g = \{(1; \overset{4 \cdot 2}{f(1) \cdot g(1)}); (2; \overset{3 \cdot (-1)}{f(2) \cdot g(2)}); (3; \overset{2 \cdot 0}{f(3) \cdot g(3)})\}$$

$$f \cdot g = \{(1; 8); (2; -3); (3; 0)\} \quad \therefore Ran(f \cdot g) = \{8; -3; 0\}$$

PROBLEMA 8 Si Javier compra “a” hamburguesas al costo de “b” soles cada una, donde a y b se obtienen de la función inyectiva :
 $F = \{(4a - 1; 5), (3b - 7; 8), (11; 5), (23; 8), (10; 1), (8; 2)\}$, ¿Cuánto gastó Javier por dicha compra?

Resolución

Observación:

Si: $(b; a)$ y $(c; a) \in \text{Funcion Inyectiva} \rightarrow b = c$

$$(4a - 1; 5) = (11; 5) \quad \rightarrow 4a - 1 = 11 \quad \rightarrow a = 3$$

$$(3b - 7; 8) = (23; 8) \quad \rightarrow 3b - 7 = 23 \quad \rightarrow b = 10$$

Javier compra: $a = 3$ hamburguesas
 $b = 10$ soles cada una

\therefore Gasto Total es: 30 soles