

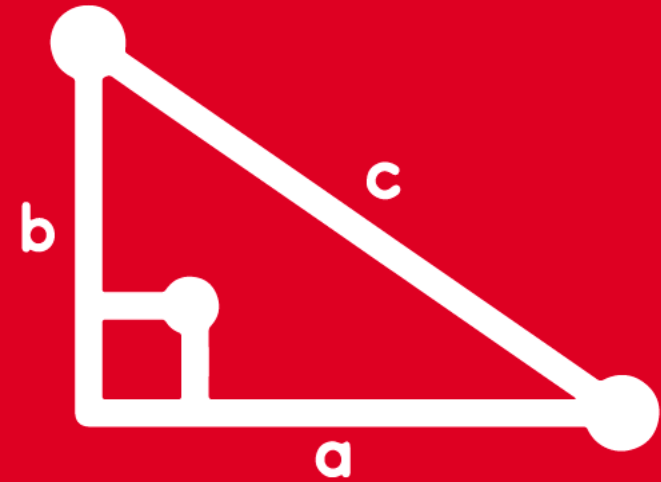


TRIGONOMETRY

Chapter 18

Session 2

4th
SECONDARY



IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS
DE ÁNGULO COMPUESTO

 **SACO OLIVEROS**



APORTES DE LOS ÁRABES A LA MATEMÁTICA

- “Los árabes adoptaron y desarrollaron la trigonometría hindú”
- ***Al-Battani (astrónomo) siglo IX*** fue el primero que aplicó el álgebra a la trigonometría.
- ***En el siglo X*** hicieron su aparición la **secante** y la **cosecante**.
- ***Las funciones seno y coseno*** fueron incorporadas de los hindúes.
- ***Las funciones tangente y cotangente*** sí son de origen árabe.





Identidades para suma de ángulos

✓ $\text{sen}(x + y) = \text{sen}x \cdot \text{cos}y + \text{cos}x \cdot \text{sen}y$

✓ $\text{cos}(x + y) = \text{cos}x \cdot \text{cos}y - \text{sen}x \cdot \text{sen}y$

✓ $\text{tan}(x + y) = \frac{\text{tan}x + \text{tan}y}{1 - \text{tan}x \cdot \text{tan}y}$

Identidades para diferencia de ángulos

✓ $\text{sen}(x - y) = \text{sen}x \cdot \text{cos}y - \text{cos}x \cdot \text{sen}y$

✓ $\text{cos}(x - y) = \text{cos}x \cdot \text{cos}y + \text{sen}x \cdot \text{sen}y$

✓ $\text{tan}(x - y) = \frac{\text{tan}x - \text{tan}y}{1 + \text{tan}x \cdot \text{tan}y}$





Identidades Auxiliares(para dos ángulos)

$$✓ \textit{sen}(x + y) \cdot \textit{sen}(x - y) = \textit{sen}^2 x - \textit{sen}^2 y$$

$$✓ \textit{cos}(x + y) \cdot \textit{cos}(x - y) = \textit{cos}^2 x - \textit{sen}^2 y$$

$$✓ \textit{tan} x + \textit{tan} y + \textit{tan}(x + y) \cdot \textit{tan} x \cdot \textit{tan} y = \textit{tan}(x + y)$$

$$✓ \textit{tan} x - \textit{tan} y - \textit{tan}(x - y) \cdot \textit{tan} x \cdot \textit{tan} y = \textit{tan}(x - y)$$





Identidades Auxiliares(para tres ángulos)

A. Si $x + y + z = 180^\circ$

➤ $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$

➤ $\cot x \cdot \cot y + \cot y \cdot \cot z + \cot x \cdot \cot z = 1$

B. Si $x + y + z = 90^\circ$

➤ $\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$

➤ $\tan x \cdot \tan y + \tan y \cdot \tan z + \tan x \cdot \tan z = 1$





1. Si $\theta \in IC$, reduzca : $E = \sqrt{\cos(\theta + \alpha) \cdot \cos(\theta - \alpha) + \text{sen}^2 \alpha}$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2 x - \text{sen}^2 y$$



Nos piden:

$$E = \sqrt{\underbrace{\cos(\theta + \alpha) \cdot \cos(\theta - \alpha)} + \text{sen}^2 \alpha}$$

$$E = \sqrt{\cos^2 \theta - \cancel{\text{sen}^2 \alpha} + \cancel{\text{sen}^2 \alpha}}$$

$$E = \sqrt{\cos^2 \theta}$$

$$E = |\cos \theta|$$

$$\theta \in IC$$

$$E = \cos \theta$$





2. Reduzca: $M = \sin(37^\circ + x) \cdot \sin(37^\circ - x) - \cos^2 x$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\sin(x + y) \cdot \sin(x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$



Nos piden reducir:

$$M = \underbrace{\sin(37^\circ + x) \cdot \sin(37^\circ - x)} - \cos^2 x$$

$$M = \sin^2 37^\circ - \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$M = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1$$

$$M = \frac{9}{25} - 1$$

$$M = \frac{9 - 25}{25}$$



$$M = -\frac{16}{25}$$



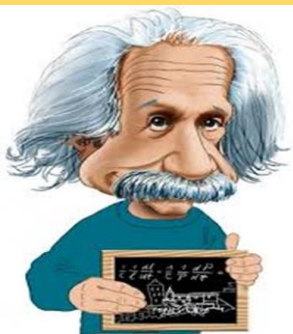


3. Reduzca: $E = \tan 33^\circ + \tan 20^\circ + \frac{4}{3} \cdot \tan 33^\circ \cdot \tan 20^\circ$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\tan x + \tan y + \tan(x + y) \cdot \tan x \cdot \tan y = \tan(x + y)$$



Nos piden reducir:

$$E = \tan 33^\circ + \tan 20^\circ + \frac{4}{3} \cdot \tan 33^\circ \cdot \tan 20^\circ$$



$$\tan(33^\circ + 20^\circ)$$

$$E = \tan(33^\circ + 20^\circ)$$

$$E = \tan 53^\circ$$

$$E = \frac{4}{3}$$



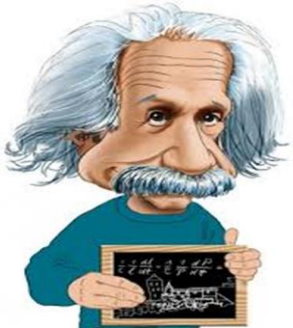


4. Reduzca: $M = \sqrt{3}\tan 80^\circ - \sqrt{3}\tan 20^\circ -$
 $3\tan 80^\circ \cdot \tan 20^\circ$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\tan x + \tan y + \tan(x + y) \cdot \tan x \cdot \tan y = \tan(x + y)$$



Nos piden reducir:

$$M = \sqrt{3}\tan 80^\circ - \sqrt{3}\tan 20^\circ - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\tan 80^\circ \cdot \tan 20^\circ$$

Factorizamos $\sqrt{3}$

$$M = \sqrt{3}[\tan 80^\circ - \tan 20^\circ - \sqrt{3}\tan 80^\circ \cdot \tan 20^\circ]$$

\uparrow
 $\tan(80^\circ - 20^\circ)$

$$M = \sqrt{3}[\tan(80^\circ - 20^\circ)]$$

$$M = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\boxed{M = 3}$$





5. En el triángulo ABC se cumple que $\tan B = \frac{2}{3}$ y $\tan C = 4$, calcular $\tan A$

RESOLUCIÓN

Como ABC es un triángulo, entonces:

$$A + B + C = 180^\circ$$

Recordar:

Si: $A + B + C = 180^\circ$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$



Se cumple:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$\tan A + \frac{2}{3} + 4 = \tan A \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$$

$$\tan A + \frac{14}{3} = \frac{8}{3} \tan A$$

Multiplicar por 3

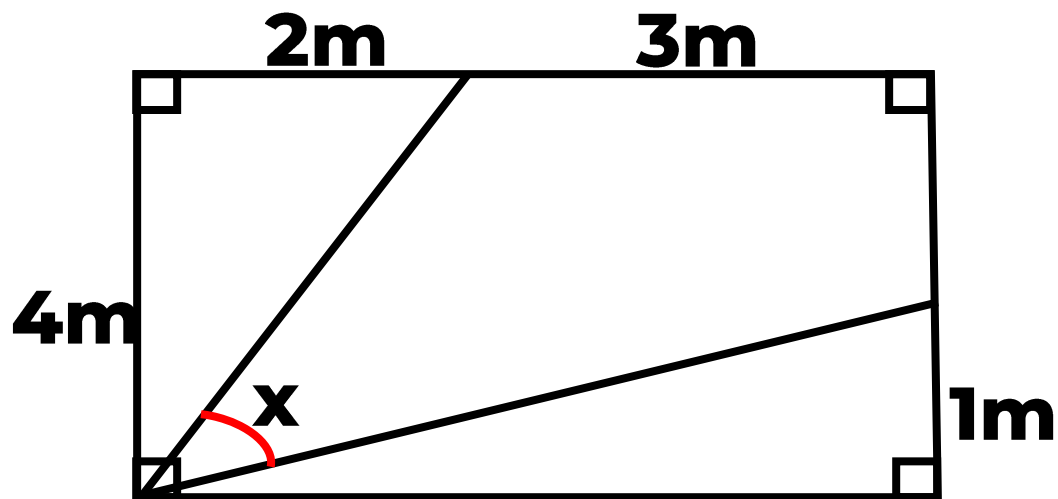
$$3 \tan A + 14 = 8 \tan A$$

$$14 = 5 \tan A$$

$$\tan A = \frac{14}{5}$$



6. A partir del gráfico, determine el valor de $\tan x$

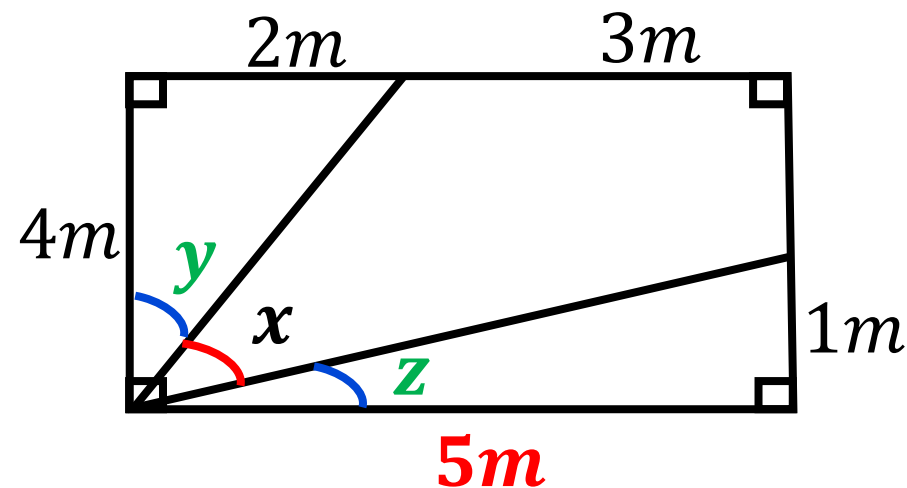
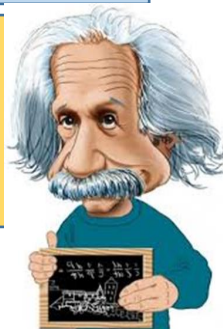


RESOLUCIÓN

Recordar:

Si: $x + y + z = 90^\circ$

$$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$$

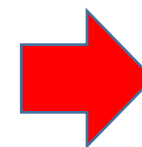


$$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$$

$$\cot x + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \cot x \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{1}$$

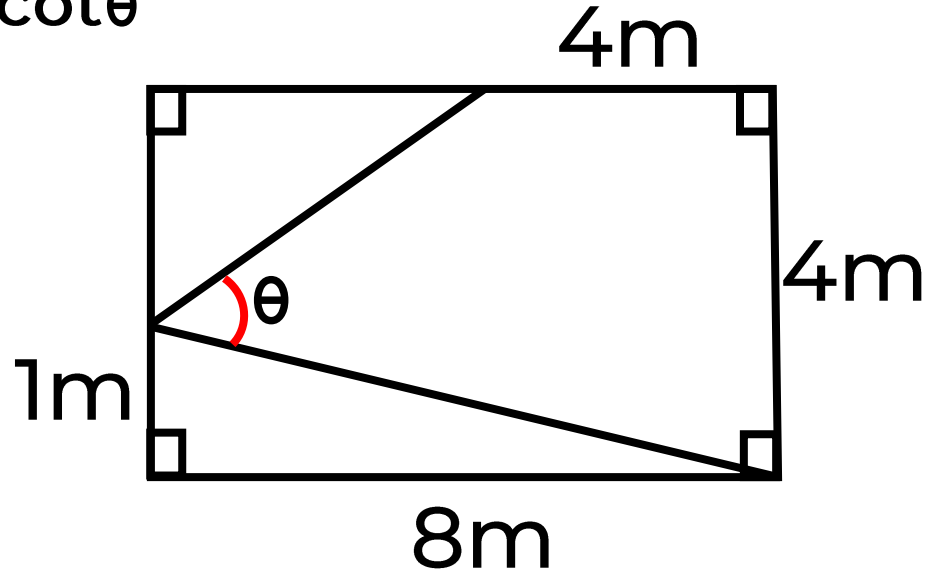
$$\cot x + 7 = 10 \cot x$$

$$\frac{7}{9} = \cot x$$



$$\tan x = \frac{9}{7}$$

7. Del gráfico, determine $\cot\theta$

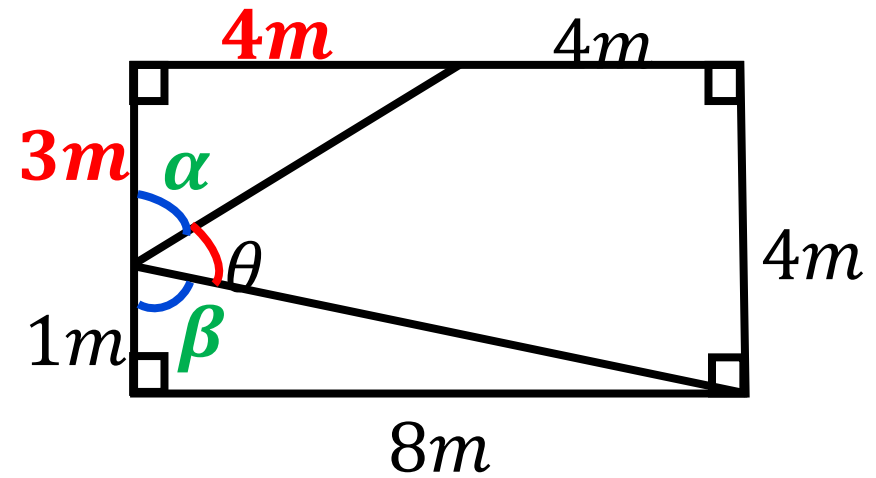


RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\text{Si: } \alpha + \theta + \beta = 180^\circ$$

$$\tan\alpha + \tan\theta + \tan\beta = \tan\alpha \cdot \tan\theta \cdot \tan\beta$$



$$\tan\alpha + \tan\theta + \tan\beta = \tan\alpha \cdot \tan\theta \cdot \tan\beta$$

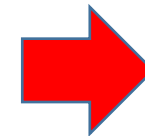
$$\frac{4}{3} + \tan\theta + \frac{8}{1} = \frac{4}{3} \cdot \tan\theta \cdot \frac{8}{1}$$

$$\frac{28}{3} + \tan\theta = \frac{32}{3} \cdot \tan\theta$$

Multiplicar por
3

$$28 + 3\tan\theta = 32\tan\theta$$

$$\frac{28}{29} = \tan\theta$$



$$\frac{29}{28} = \cot\theta$$



- 8.** Al copiar de la pizarra la expresión $\tan 30^\circ + \tan 70^\circ + \tan 80^\circ$; un estudiante cometió un error y escribió $\tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ$. Calcule la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el alumno.

RESOLUCIÓN

Recordar:

Si: $x + y + z = 180^\circ$

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$



Nos piden la razón entre ellos:

$$R = \frac{\tan 30^\circ + \tan 70^\circ + \tan 80^\circ}{\tan 70^\circ \cdot \tan 80^\circ}$$

$$R = \frac{\cancel{\tan 30^\circ} \cdot \cancel{\tan 70^\circ} \cdot \cancel{\tan 80^\circ}}{\cancel{\tan 70^\circ} \cdot \cancel{\tan 80^\circ}}$$

$$R = \tan 30^\circ$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

