ALGEBRA

Chapter 13

4th
SECONDARY

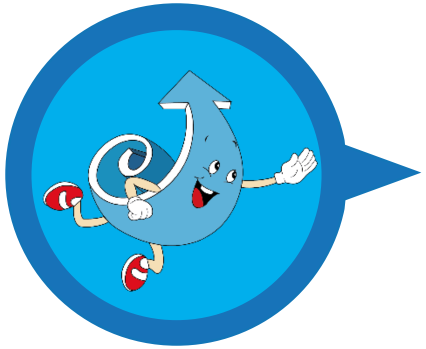
ECUACIONES CUADRÁTICAS

SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS



Algunas aplicaciones

- En el campo de la economía usan las ecuaciones cuadráticas para representar modelos económicos de oferta y demanda
- En el campo de la física para determinar el movimiento parabólico.
- En el ámbito militar lo utilizan en la artilleria de cañones para hallar las trayectorias de las balas

HELICO THEORY

CHAPTHER 13

SACO OLIVEROS

ECUACIÓN CUADRÁTICA

I) DEFINICIÓN

Denominada también Ecuación de Segundo Grado; es aquella ecuación cuya forma general es :

$ax^2 + bx + c = 0$ con a≠0 y a,b,c ϵ R

$* \ 2x^2 + 7x + 6 = 0$ ➡ ***a*=2** ***b*=7** ***c*=6**

$* \ x^2 - 9x + 8 = 0$ ➡ ***a*= 1** ***b*= -9** ***c*= 8**

A) Discriminante (Δ)

Se llama así a la expresión: "b^2-4ac"

➔ Se cumplirá: $\Delta = b^2 - 4ac$

Ejemplo:

* Calcule la discriminante de: $x^2 - 4x + 2 = 0$

Resolución

$a = 1$ $b = -4$ $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(2)$

$\boxed{\Delta = 8}$

B) NATURALEZA DE LAS RAÍCES

La naturaleza de las raíces "x_1" y "x_2" de $ax^2+bx+c=0$ viene caracterizada por el valor que asume la discriminante (*Δ*)

* ***Δ>0*** ➡ **La ecuación presenta raíces reales y diferentes**
* ***Δ=0*** ➡ **La ecuación presenta raíces reales e iguales (raíz única)**
* ***Δ<0*** ➡ **La ecuación presenta raíces imaginarias y conjugadas**

C) TEOREMA DE CARDANO VIETE

Sean "x_1" y "x_2" las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se cumplirá:

Suma de Raíces

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

Producto de Raíces

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Ejemplo

Sea $2x^2 + 5x + 1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-5}{2} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D) FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

Si conocemos las raíces "x_1" y "x_2" , entonces podemos conocer su ecuación cuadrática reemplazando en:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Donde: S= $x_1 + x_2$ y P= $x_1 . x_2$

Ejemplo :

Forme la ecuación cuadrática cuyas raíces son 7 y 3

S= $x_1 + x_2 = 10$

P= $x_1 . x_2 = 21$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

PROPIEDADES AUXILIARES

Si $ax^2 + bx + c = 0$, ésta ecuación tendrá:

Raíces Simétricas

$$b = 0$$

Raíces Recíprocas

$$a = c$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 13

SACO OLIVEROS

Problema 1

Al resolver: $(x+3)^2+(x+2)^2=x^2+4$
indique la mayor raíz.

Resolución

$sabemos: (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$x^2+6x+9+\cancel{x^2}+4x+\cancel{4}=\cancel{x^2}+\cancel{4}$$

$$x^2+10x+9=0$$

$$(x+9)(x+1)=0$$

$$x+9=0 \quad V \quad x+1=0$$

$$x=-9 \quad V \quad x=-1$$

$\boxed{la\ mayor\ raíz\ es\ -1}$

Problema 2

Resuelva: $x - \sqrt{x + 37} = 5$

Resolución

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x - 5 = \sqrt{x + 37}$$

elevamos al cuadrado:

$$x^2 - 10x + 25 = x + 37$$

$$x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$(x - 12)(x + 1) = 0$$

$$x = -1 \quad V \quad x = 12$$

reemplazamos ambos valores en la ecuación original:

Si $x = -1$ ➡ $\cancel{-7 = 5}$

Si $x = 12$ ➡ $5 = 5$

➡ $C.S = \{12\}$

PROBLEMA 3

Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 4 = 0$ Halle el valor de:

T= $x_1^2 + x_2^2 + x_1^3 + x_2^3$

Resolución

$$\overset{+}{x^2} \overset{-}{-} 3x \overset{+}{+} 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{1} = 3$$

$$x_1 . x_2 = \frac{4}{1} = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 3^2 - 2(4) = \boxed{1}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 3^3 - 3(4)(3) = \boxed{-9}$$

$$T = 1 - 9 = \boxed{-8}$$

PROBLEMA 4

Halle el valor de m en la ecuación:
$7x^2 - mx + 5 = 0$, si sus raíces son
$x_1\ y\ \ x_2$
que cumplen: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$

Resolución

$$Piden: \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 4$$

$$Sea: \overset{+}{7}x^2 \overset{-}{-} mx \overset{+}{+} 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \boxed{\frac{m}{7}}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \boxed{\frac{5}{7}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{5} = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 20}$$

PROBLEMA 5

El número de viajes a Europa que realiza Juan está dado por 4k, donde k está dado por la ecuación $(k+3)x^2 - 12x + 9 = 0$ cuyas raíces son iguales ¿ Cuántos viajes realiza Juan?

Resolución

Recordar:

- $ax^2 + bx + c = 0$
- $\Delta = 0$
- $\Delta = b^2 - 4ac$

Raíces iguales se cumple:

$$\underbrace{(k+3)x^2}_{a} \underbrace{-12x}_{b} \underbrace{+9}_{c} = 0$$

$\Delta = 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 = 4ac$$

$$(-12)^2 = 4(k+3)(9)$$

$$\overset{36}{\cancel{144}} = \overset{9}{\cancel{36}}(k+3)$$

$$4 = k + 3$$

$$k = 1$$

piden:4k= 4 viajes

Rpta 4 *viajes*

PROBLEMA 6

Forme la ecuación de segundo grado cuyas
Raíces son: $8+\sqrt{11}$ y $8-\sqrt{11}$

Recordar:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

DONDE:

S= $x_1 + x_2$
P= $x_1 x_2$

Sea:

$$x_1 = 8+\sqrt{11}$$
$$x_2 = 8-\sqrt{11}$$

+

S= $x_1 + x_2$

$$= 8+8 = 16$$

$P = x_1 \cdot x_2$

$$= (8+\sqrt{11})(8-\sqrt{11})$$
$$= (8)^2 - (\sqrt{11})^2$$
$$= 64 - 11$$
$$= 53$$

remplazando en:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Rpta:

$$x^2 - 16x + 53 = 0$$

PROBLEMA 7

Si la ecuación: $(2m-5)x^2+(2m-8)x+3m-4=0$

Para qué valores de m las raíces de la ecuación son recíprocas y simétricas respectivamente

Resolución

Recordar:

Si: $ax^2+bx+c=0$

- Raíces simétricas

$$b=0$$

- Raíces recíprocas

$$a=c$$

$$\underbrace{(2m-5)}_{a}x^2+\underbrace{(2m-8)}_{b}x+\underbrace{3m-4}_{c}=0$$

Raíces simétricas

$$b=0$$

$$2m-8=0$$

$$2m=8$$

$$m=4$$

Raíces recíprocas

$$a=c$$

$$2m-5=3m-4$$

$$-1=m$$

Valores de m=$\{-1,4\}$

Rpta:

Valores de m=$\{-1,4\}$

PROBLEMA 8

Sean x_1, x_2 las raíces de la ecuación:

$$3x^2 + 7x + 2k = 0$$

$Calcule\ k, si\ \ (x_1+3)(x_2+3) = 6$

Resolución

Recordar

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$\underbrace{3x^2}_{a} + \underbrace{7x}_{b} + \underbrace{2k}_{c} = 0$$

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-7}{3}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2k}{3}$

Del dato:

$(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 6$

$x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2 + 9 = 6$

$x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = -3$

$\frac{2k}{3} + 3\left(\frac{-7}{3}\right) = -3$

$\frac{2k - 21}{3} = -3$

$2k - 21 = -9$

$2k = 12$

Rpta: $k = 6$