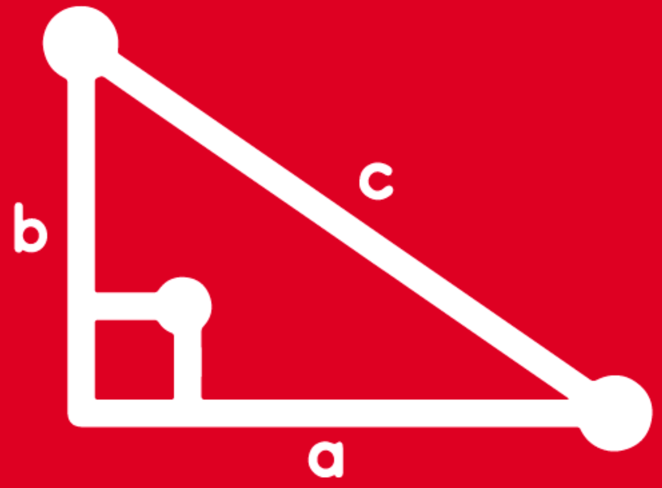
# TRIGONOMETRY

## Tomo 7 y 8
## Session I




**4th**
**SECONDARY**

## Advisory

SACO OLIVEROS

**1.** Siendo $x+5°$ un ángulo agudo, tal que $\operatorname{sen}(x+5°)=\frac{2}{3}$. Calcule $\operatorname{sen}(2x+10°)$.

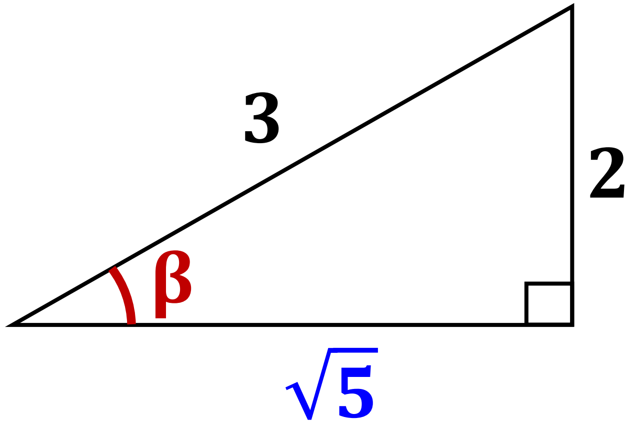
**Resolución**

Por dato: $\operatorname{sen}(x+5°)=\frac{2}{3}=\frac{CO}{H}$

Hacemos: $(x+5°)=\beta$

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Graficamos un Δ rectángulo:




$$\begin{cases}\operatorname{sen}\beta=\frac{2}{3}\\ \cos\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$$

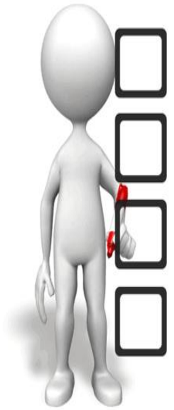
Así: $\operatorname{sen}2\beta=2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

$$\operatorname{sen}(2x+10°)=2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{\operatorname{sen}(2x+10°)=\frac{4\sqrt{5}}{9}}$$

**2.** Determine el valor de

$$E = \frac{\cot^2\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\csc^2 x + \cot^2 x}$$



$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x + \cot x$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \csc x - \cot x$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

## Resolución

Por identidades del ángulo mitad:

$$E = \frac{(\csc x + \cot x)^2 + (\csc x - \cot x)^2}{\csc^2 x + \cot^2 x}$$

Por identidad de Legendre:

$$E = \frac{2\cancel{(\csc^2 x + \cot^2 x)}}{\cancel{\csc^2 x + \cot^2 x}}$$

$$\therefore \boxed{E = 2}$$

## 3. Reduzca

$$T = \frac{\cos 3x + \cos x}{\cos 2x}$$

$$\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$$

**Resolución**

Por identidad del ángulo triple:

$$T = \frac{\cos x(2\cos 2x - 1) + \cos x}{\cos 2x}$$

$$T = \frac{2\cos x \cdot \cos 2x \cancel{- \cos x} \cancel{+ \cos x}}{\cos 2x}$$

$$T = \frac{2\cos x \cdot \cancel{\cos 2x}}{\cancel{\cos 2x}}$$

$$\therefore \boxed{T = 2\cos x}$$

# 4. Determine

$$P = (\text{sen}70° - \text{sen}20°)\csc 25°$$

**Resolución**

$$\text{senA} - \text{senB} = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Transformando a producto:

$$P = 2\cos\left(\frac{70° + 20°}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{70° - 20°}{2}\right)\csc 25°$$

$$P = 2\cos 45° \cdot \underbrace{\text{sen}25° \cdot \csc 25°}_{1}$$

$$P = \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)$$

$$\therefore \boxed{P = \sqrt{2}}$$

**5.** Julio va al mercado y compra (A) kg de papa, (B) kg de camotes y (C) kg de yuca. Si efectuamos la siguiente identidad: $\operatorname{sen}7x\cos x - \operatorname{sen}6x\cos 2x = A\operatorname{sen}(Bx)\cos(Cx)$ podremos saber los valores de A, B y C. Calcule la cantidad total de kilogramos que compró Julio.

**Resolución**

Transformando trigonométricamente el 1er miembro:

$$\underbrace{\frac{2\operatorname{sen}7x\cos x - 2\operatorname{sen}6x\cos 2x}{2}}_{A\operatorname{sen}(Bx)\cos(Cx)} = \underbrace{\frac{\cancel{\operatorname{sen}8x} + \operatorname{sen}6x - (\cancel{\operatorname{sen}8x} + \operatorname{sen}4x)}{\cancel{2}}}_{\operatorname{sen}x\cdot\cos 5x}$$

$$\cancel{2}\operatorname{sen}x\cdot\cos 5x$$

| | |
|---|---|
| A | 1 |
| B | 1 |
| C | 5 |

$\Rightarrow$ Cantidad de kg: $1 + 1 + 5 = 7$

$\therefore$ **Julio compró en total 7 kg**

**6.** Sea la función f definida por $f(x) = 2sen^2x + 3cos^2x$. Determine el rango de la función.

**Resolución**

Dando forma a f(x):

$$f(x) = 2\underbrace{(sen^2x + cos^2x)}_{1} + cos^2x$$

$$f(x) = 2 + cos^2x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq cos^2x \leq 1} \; \ldots (*)$$

De (*):

$$0 \leq cos^2x \leq 1$$

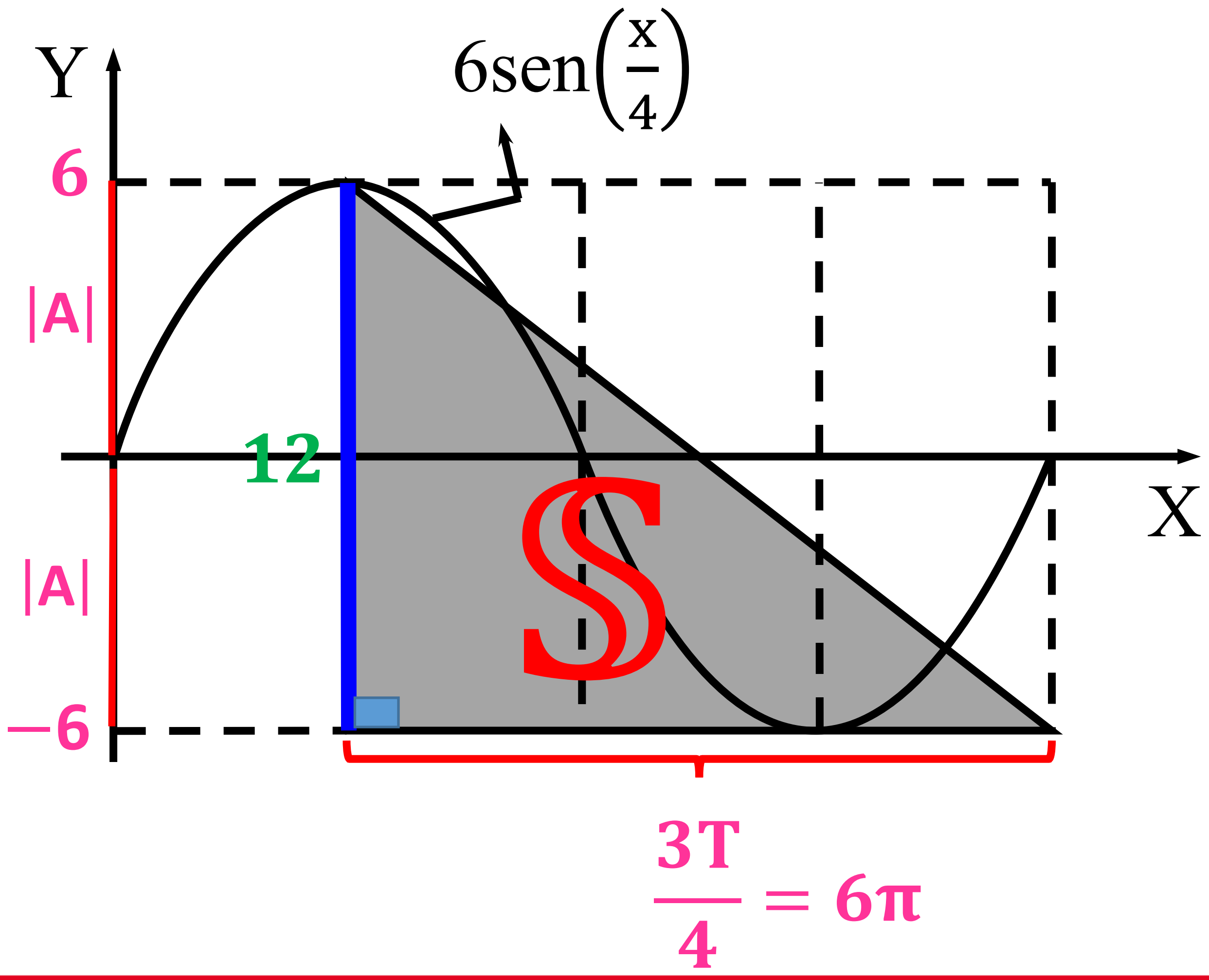
+2

$$2 \leq \underbrace{2 + cos^2x}_{} \leq 3$$

$$2 \leq f(x) \leq 3$$

$$\therefore \boxed{\text{Ranf} = [2;3]}$$

**7.** Del gráfico mostrado, calcule el área de la región sombreada.




**Resolución**

De la figura: $\boxed{A = 6}$

Sea la función: $f(x) = 6\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$ B

El periodo (T): $\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

Piden $\mathbb{S}$: $\mathbb{S} = \frac{(6\pi)(12)}{2}$

$\therefore \boxed{\mathbb{S} = 36\pi\ u^2}$

**8.** En un triángulo ABC, de lados a, b y c, simplifique:

$$W = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \cos A$$

**Resolución**

**Ley de cosenos**

$$\boxed{2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2}$$

$$\boxed{2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2}$$

Reemplazando en lo pedido:

$$W = \frac{\boxed{\cancel{2bc}\cos A}}{\cancel{2bc}} + \frac{\boxed{\cancel{2ab}\cos C}}{\cancel{2ab}} - \cos A$$

Así: $W = \cancel{\cos A} + \cos C \cancel{- \cos A}$

$$\therefore \boxed{\mathbf{W = \cos C}}$$

**9.** En un triángulo ABC se cumple que $m\measuredangle C = 143°$ y además $a = 7b$. Calcule $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

**Resolución**

Del dato: $\boxed{a = 7b}$

Por Ley de tangentes:

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}}$$

Reemplazando:

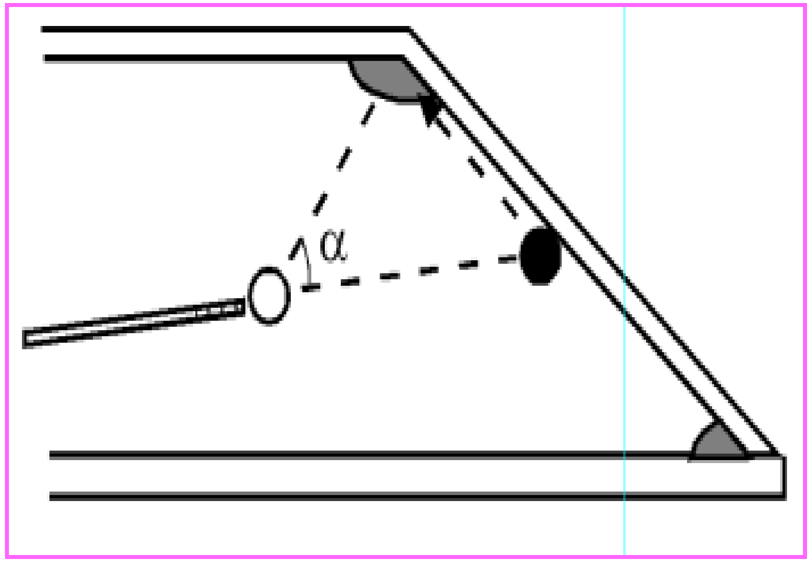
$$\frac{7b+b}{7b-b} = \frac{\tan\left(\frac{180°-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \tan\left(\frac{180°-143°}{2}\right)$$

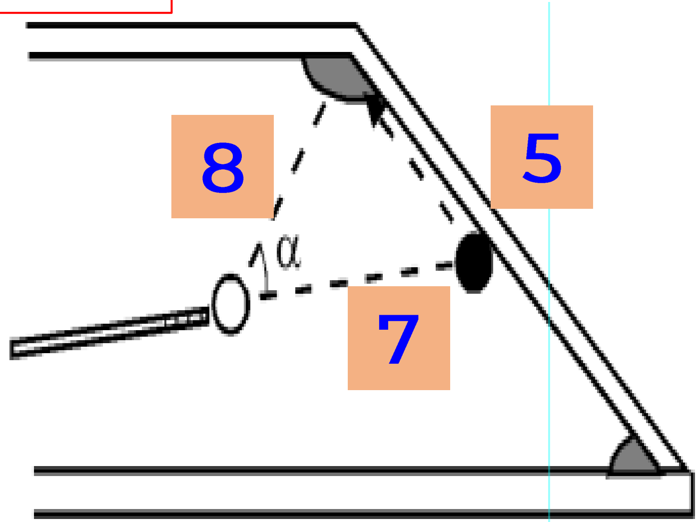
Así: $\frac{4}{\cancel{3}}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \tan\frac{37°}{2} \quad \frac{1}{\cancel{3}}$

$$\therefore \quad \boxed{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{1}{4}}$$

**10.** La bola blanca se encuentra a 80 cm, del hoyo y la negra a 50 cm. Si al golpear la bola blanca con el taco recorre 70 cm hasta chocar con la bola negra, luego esta bola cae al hoyo. Calcule $\cos\alpha$.




## Resolución




Aplicando la Ley de cosenos:

$$5^2 = 8^2 + 7^2 - 2(8)(7)\cos\alpha$$

$$2(\cancel{8}^{1})(7)\cos\alpha = \cancel{88}^{11}$$

$$\therefore \boxed{\cos\alpha = \frac{11}{14}}$$