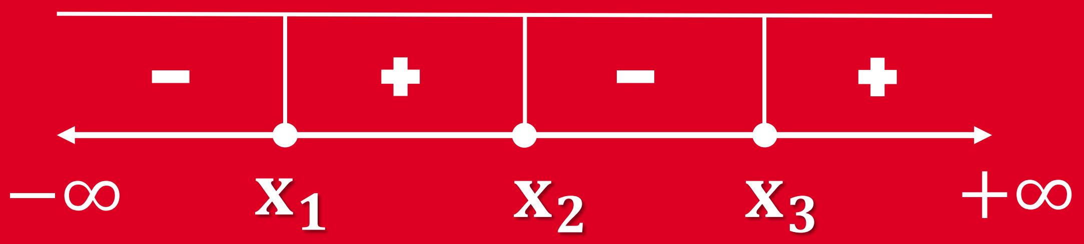
ÁLGEBRA

5th
of Secondary

CHAPTER 17

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \gtrless 0$$



Tema: Inecuaciones irracionales

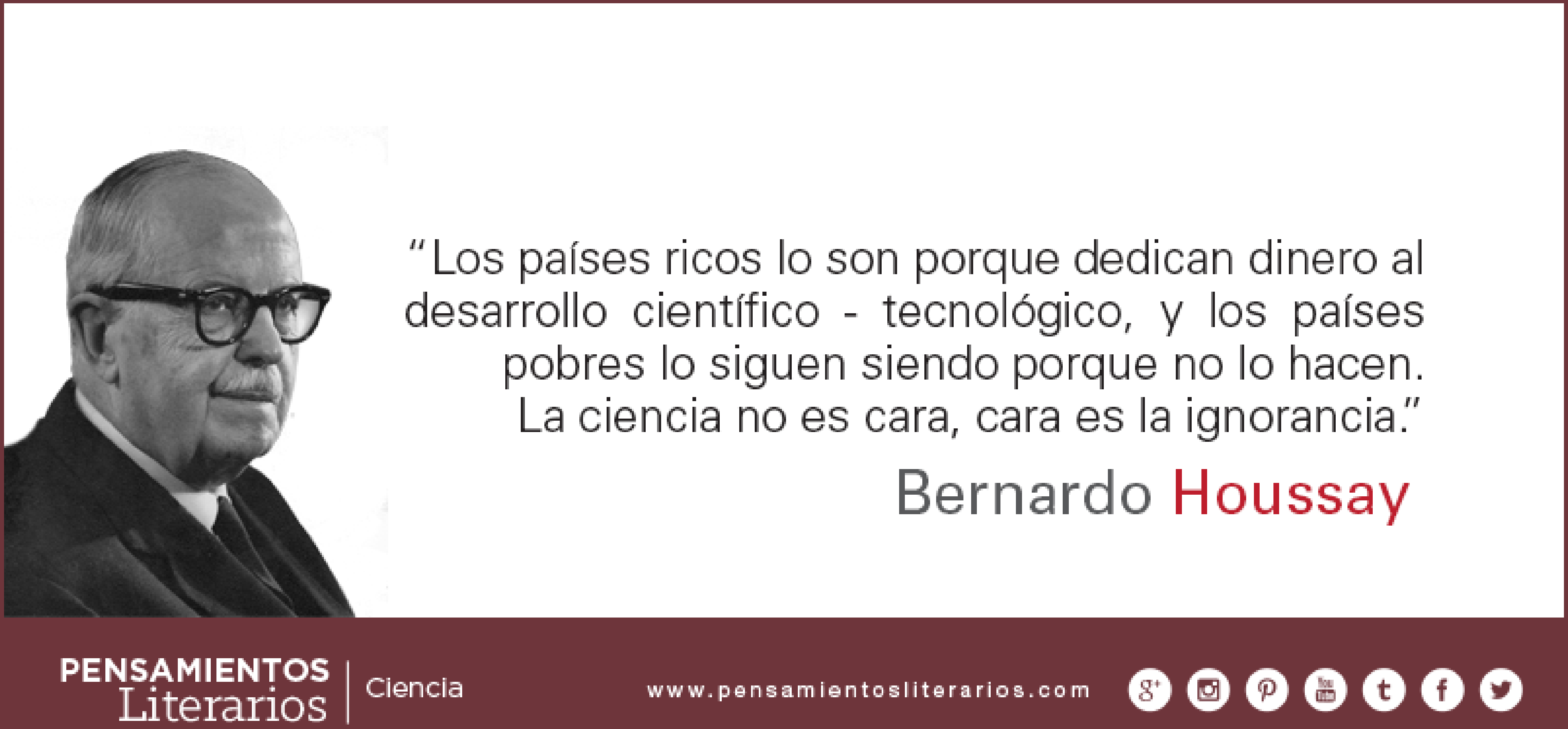
SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

MOTIVATING| STRATEGY



HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

INECUACIONES IRRACIONALES

1) INECUACIÓN IRRACIONAL

Son aquellas inecuaciones que en algunos de sus miembros contienen radicales con índice par o impar.

Ejemplos

- $\sqrt{x-5} < 3$
- $\sqrt[3]{x-4}\,\sqrt[7]{x+2} \geq 1$

a) SI LOS ÍNDICES DE LOS RADICALES SON IMPARES

Para su resolución no se requiere hacer restricciones a su incógnita.

Ejemplo

Resuelva:

$$\sqrt[3]{1-x^2} < 1-x$$

Elevando al cubo:

$$\cancel{1}-x^2 < \cancel{1}-3x+3x^2-x^3$$

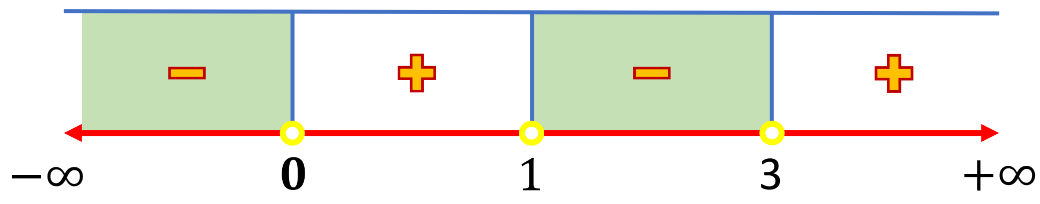
$$x^3-4x^2+3x < 0$$

$$x\,(x^2-4x+3)$$

$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad x\,(x-3)\,(x-1) < 0$$

Puntos críticos:
$$\begin{cases} x = 0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$



$$\therefore\ C.S = <-\infty;0> \cup <1;3>$$

B) SI LOS ÍNDICES DE LOS RADICALES SON PARES

Para su resolución se requiere hacer restricciones a su incógnita.

Ejemplo

Resuelva:

$$\sqrt{x-1} \leq 3$$

Restringiendo: $x-1 \geq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \geq 1}$ ... (α)

Elevando al cuadrado:

$$\sqrt{x-1} \leq 3$$

$\Rightarrow$ $x-1 \leq 9$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \leq 10}$ ... (β)

Intersectando (α) y (β):

$$1 \leq x \leq 10$$

CS = [1;10]

Ejemplo

Resuelva:

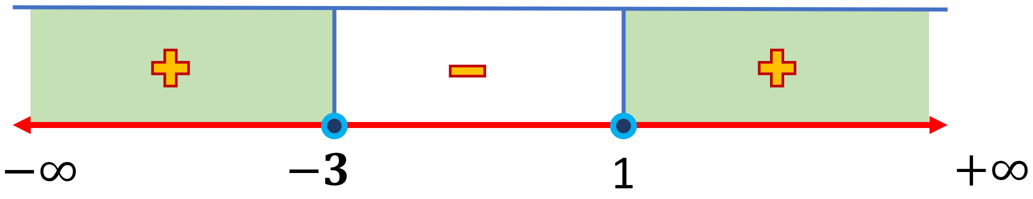
$$\underbrace{\sqrt{x^2+2x-3}}_{+} > \underbrace{-2}_{-}$$

Como: $\underbrace{+ \quad > \quad -}_{\text{Para todo x en R}}$

Sólo restringimos: $x^2+2x-3 \geq 0$

$\Rightarrow \quad (x+3)(x-1) \geq 0$

Puntos críticos: $\begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$



$\therefore \text{C.S} = \langle -\infty; -3] \cup [1; +\infty \rangle$

Ejemplo

Resuelva:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{+} < \underbrace{-7}_{-}}_{\text{ABSURDO!!}}$$

Luego:

$CS = \emptyset$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

Se tienen los siguientes:

Puede ser cualquier desigualdad

1) Si $(x-a)^{2k+1}(x-b)^{2k+1} \geq 0$

$$\boxed{(x-a)\,(x-b) \geq 0}$$

2) Si $\sqrt[2k+1]{(x-a)}\,.\,\sqrt[2k+1]{(x+b)} > 0$

$$\boxed{(x-a)\,(x+b) > 0}$$

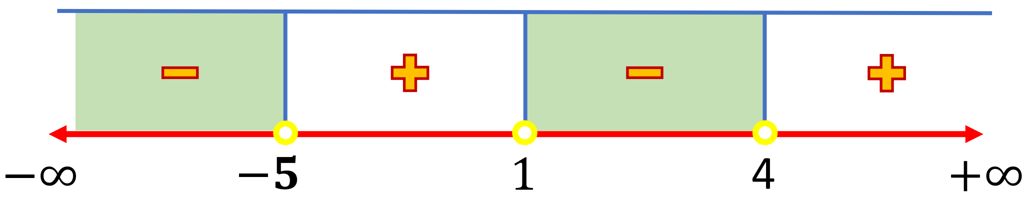
EJEMPLOS APLICATIVOS

1) Resuelva:

$$\sqrt[3]{x+5}\,.\,\sqrt[7]{x-1}\,.\,\sqrt[15]{x-4} < 0$$

Por teorema:

$$\Rightarrow \quad (x+5)(x-1)(x-4) < 0$$



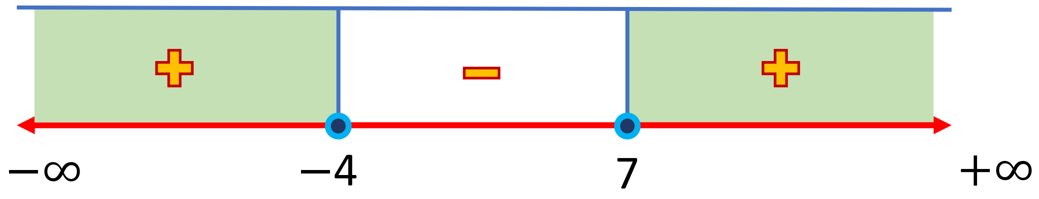
$$\therefore \ C.S = \langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$$

2) Resuelva:

$$(x+4)^{17}.(x-7)^{23} \geq 0$$

Por teorema:

$$\Rightarrow \quad (x+4)(x-7) \geq 0$$



$$\therefore \ C.S = \langle -\infty; -4] \cup [7; +\infty \rangle$$

HELICO

PRACTICE

1. **Resuelva:**

$$\sqrt[7]{x+\sqrt[3]{1-x^2}}<1$$

Solución :

Elevando a la séptima :

$$x+\sqrt[3]{1-x^2}<1$$

$$\sqrt[3]{1-x^2}<1-x$$

Elevando al cubo :

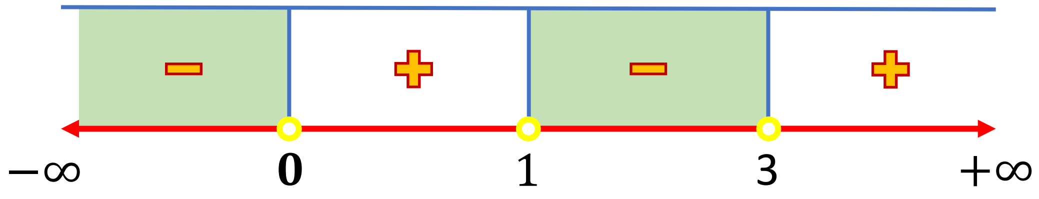
$$1-x^2 < 1-3x+3x^2-x^3$$

$$x^3-4x^2+3x<0$$

$$x(x^2-4x+3)<0$$

$$x(x-1)(x-3)<0$$

Puntos críticos: $\begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$



$$\therefore \text{C.S} = <-\infty;0> \cup <1;3>$$

2. Resuelva:

$$\sqrt{x-2}-3<0$$

Solución :

$$\sqrt{x-2}<3$$

- Restringiendo: $x-2\geq 0$

$$\boxed{x\geq 2} \quad \dots(\alpha)$$

- Elevamos al cuadrado:

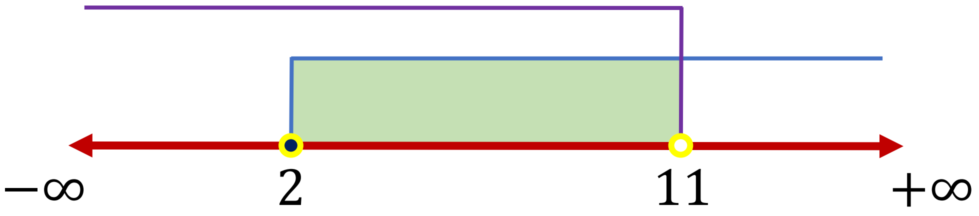
$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2<3^2$$

$$x-2<9$$

$$\boxed{x<11} \quad \dots(\beta)$$

Intersectando (α) y (β):

$$2\leq x<11$$



$\therefore$ CS = [2;11>

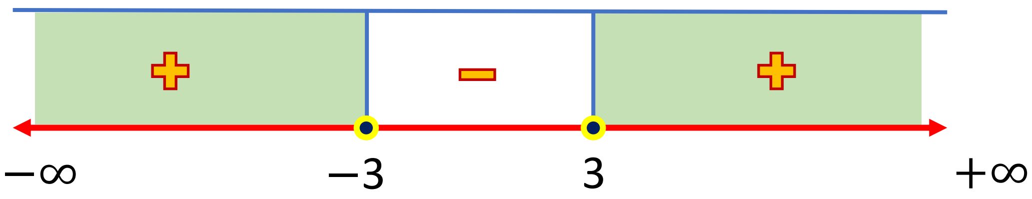
3. Halle el conjunto solución de la inecuación:

$$\sqrt{x^2-9} < 4$$

Solución :

- Restringiendo: $x^2 - 9 \geq 0$

$$(x+3)(x-3) \geq 0 \quad \ldots (\alpha)$$

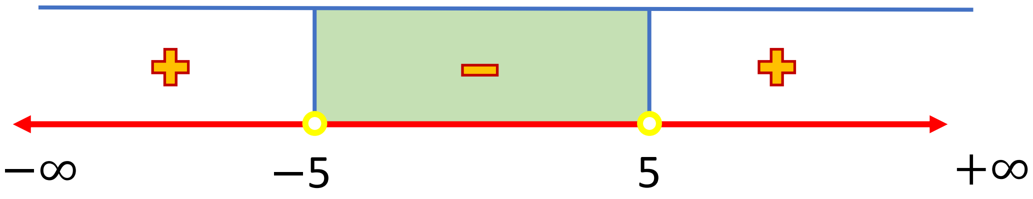


- Elevando al cuadrado la inecuación inicial:

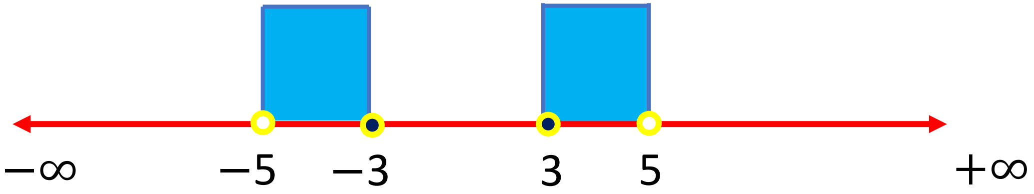
$$\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2 < 4^2$$

$$x^2 - 9 < 16 \Rightarrow x^2 - 25 < 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-5) < 0 \quad \ldots (\beta)$$



Intersectando (α) y (β):



$$\therefore C.S = <-5;-3] \cup [3;5>$$

4. **Halle el conjunto solución en**

$$(x-2)^{13}(x+5)^{19}(x-3)^{23} > 0$$

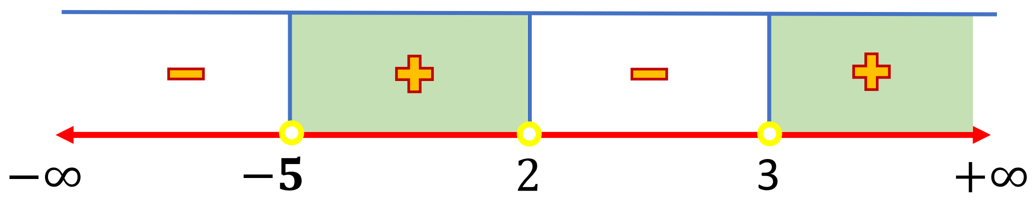
Solución :

Por teorema:

$$(\mathbf{x}-\mathbf{2})(\mathbf{x}+\mathbf{5})(\mathbf{x}-\mathbf{3}) > \mathbf{0}$$

Puntos críticos:

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$



$$\therefore \text{C.S} = \langle -5;2 \rangle \cup \langle 3;+\infty \rangle$$

5. La edad de José hace 15 años es igual a la suma de valores enteros positivos que se obtiene de resolver la siguiente inecuación:

$$\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[15]{x+5}\cdot\sqrt[21]{x-9}<0$$

Si Manuel; el hermano mayor de José, tiene 60 años. ¿Cuántos años de diferencia hay entre José y Manuel?

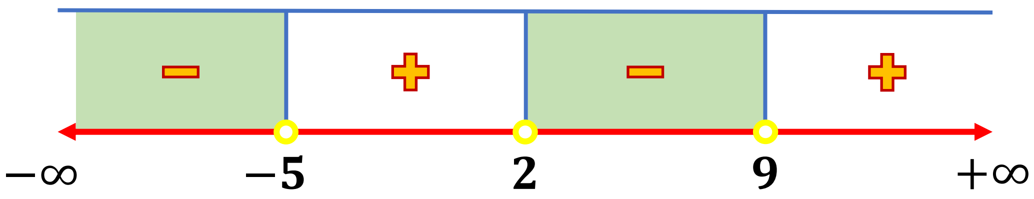
Solución :

Por teorema:

$$(x-2)(x+5)(x-9)<0$$

PUNTOS CRÍTICOS

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ x-9=0 \Rightarrow x=9 \end{cases}$$



$$C.S=\langle-\infty;-5\rangle\cup\langle 2;9\rangle$$

Edad de José Hace 15 años $=3+4+5+6+7+8=33$

Edad actual de José $=33+15=48$ años

∴La diferencia de edades es 12 años

6. Resuelva la inecuación:

$$\sqrt{x^2+4x-21} > -12$$

Solución :

$$\underbrace{\sqrt{\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}-21}}_{\text{POSITIVO}} > \underbrace{-12}_{\text{NEGATIVO}}$$

Bastaría probar que:

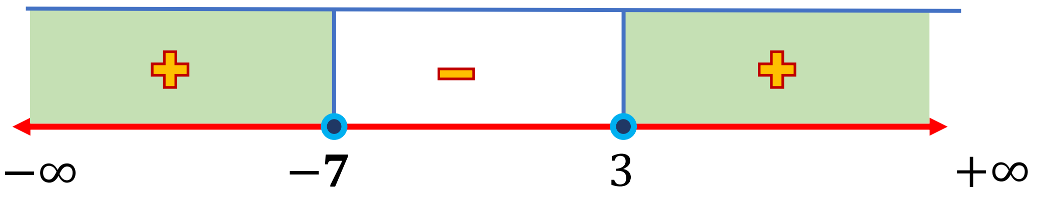
$$\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}-21 \geq 0$$

$$(\mathbf{x}+7)(\mathbf{x}-3) \geq 0$$

PUNTOS CRÍTICOS

$$\begin{cases} x+7=0 \Rightarrow x=-7 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Graficando :



$$\therefore \text{C.S} = \langle -\infty; -7] \cup [3; +\infty \rangle$$

7. Resuelva: la inecuación

$$\sqrt{4-x} \leq \sqrt{2x-6}$$

Solución :

i. $4 - x \geq 0$

$\boxed{4 \geq x}$ ... (α)

ii. $2x - 6 \geq 0$

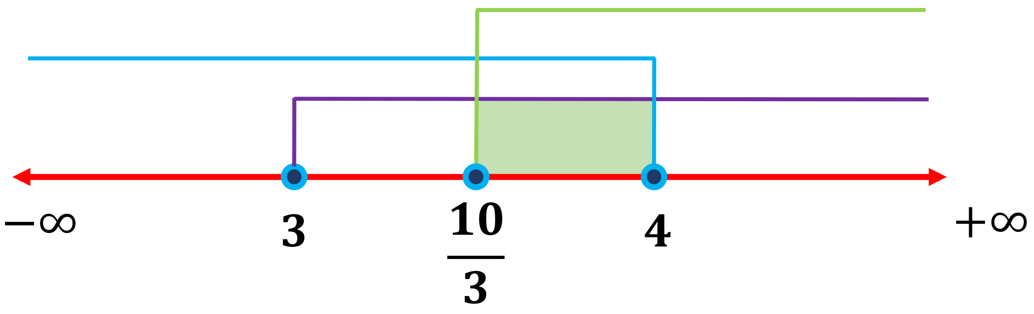
$\boxed{x \geq 3}$ ... (β)

$$\left(\sqrt{4-x}\right)^2 \leq \left(\sqrt{2x-6}\right)^2$$

$$4 - x \leq 2x - 6$$

$\boxed{\frac{10}{3} \leq x}$ ... (γ)

Graficando e intersectando (α) , (β) y (γ):



$$\therefore \text{C.S} = \left[\frac{10}{3}; 4\right]$$

8. Resuelva:

$$\frac{(x+8)^{\cancel{7}}\ (x-5)^8}{\sqrt[\cancel{5}]{x-3}\ .\ \sqrt[4]{x+2}} \le 0$$

Solución :

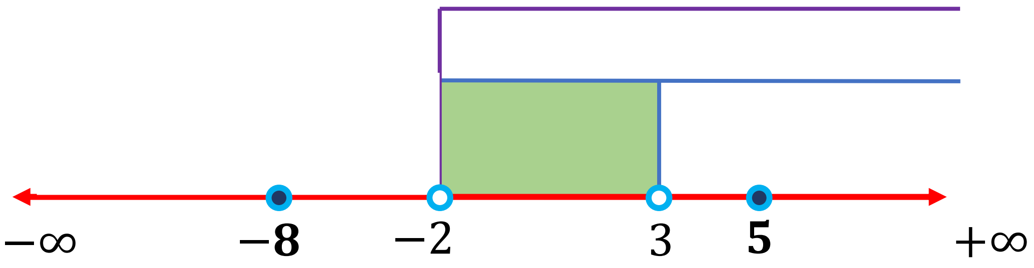
RESTRICCIÓN:

i. $x = 5$

ii. $x + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$

Por teorema, obtenemos :

$$\frac{x+8}{x-3} \le 0$$



$\therefore$ C.S $= <-2;3> \cup \{5\}$