ALGEBRA

Chapter 13

2th

Session II

LEYES DE EXPONENTES PARA LA POTENCIACIÓN

SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATING

SACO OLIVEROS

HELICO RETO

¿ESTAS LISTO PARA UN RETO?

¿Puedes hallar el cociente notable de la siguiente división en 15 segundos?

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

15

"NUNCA he encontrado una persona tan ignorante que no se pueda aprender algo de ella"

Galileo Galilei

Rpta: $x + y$

HELICO THEORY

CHAPTHER 13

SACO OLIVEROS

COCIENTE NOTABLE

FORMA GENERAL:

Sea la división

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q}$$

genera un cociente notable (CN) cuando se cumple:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = n \qquad ; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

donde n es el número de términos del CN.

I. Si la división es exacta $[R(x,y) \equiv 0]$ se cumple:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} = Q(x,y)$$

II. Si la división es inexacta $[R(x,y) \not\equiv 0]$ se cumple:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} = Q(x,y) + \frac{R(x,y)}{x^p \pm y^q}$$

Consideramos CN a los originados por divisiones exactas.

CASO I: $\dfrac{x^a - y^b}{x^p - y^q}$; $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

Ejemplos:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$n = \frac{5}{1} \Rightarrow \boxed{n = 5\ términos}$$

$$\frac{x^{16} - y^{24}}{x^2 - y^3} = x^{14} + x^{12}y^3 + x^{10}y^6 + x^8y^9 + x^6y^{12} + x^4y^{15} + x^2y^{18} + y^{21}$$

$$n = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} \Rightarrow \boxed{n = 8\ términos}$$

CASO II:

$$\boxed{\frac{x^a - y^b}{x^p + y^q} \quad ; \quad (\forall n\ par, n \geq 2)}$$

Ejemplos:

$$\frac{x^{35} - y^{28}}{x^5 + y^4} = x^{30} - x^{25}y^4 + x^{20}y^8 - x^{15}y^{12} + x^{10}y^{16} - x^5y^{20} + y^{24}$$

$$n = \frac{35}{5} = \frac{28}{4} \Longrightarrow \boxed{n = 7\ términos}$$

$$\frac{x^{36} - y^{12}}{x^6 + y^2} = x^{30} - x^{24}y^2 + x^{18}y^4 - x^{12}y^6 + x^6y^8 - y^{10}$$

$$n = \frac{36}{6} = \frac{12}{2} \Longrightarrow \boxed{n = 6\ términos}$$

CASO III: $\dfrac{x^a + y^b}{x^p + y^q}$; $(\forall n\ impar)$

Ejemplos:

$$\frac{x^{21} + y^{42}}{x^3 + y^6} = x^{18} - x^{15}y^6 + x^{12}y^{12} - x^9y^{18} + x^6y^{24} - x^3y^{30} + y^{36}$$

$$n = \frac{21}{3} = \frac{42}{6} \Longrightarrow \boxed{n = 7\ términos}$$

$$\frac{x^{45} + 1}{x^5 + 1} = x^{40} - x^{35} + x^{30} - x^{25} + x^{20} - x^{15} + x^{10} - x^5 + 1$$

$$n = \frac{45}{5} \Longrightarrow \boxed{n = 9\ términos}$$

TÉRMINO DE LUGAR k:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} \quad ; \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = n \quad ; \quad (\forall n \geq 2 \quad ; \quad n \in \mathbb{N})$$

$$\boxed{T_k = \pm (x^p)^{n-k} (y^q)^{k-1}}$$

TÉRMINO CENTRAL:

I. *Cuando el valor de n es impar:*

$$T_C = T_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Rightarrow k = \left(\frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{T_C = \pm\left(x^p . y^q\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

II. *Cuando el valor de n es par:*

$$Lugar\left(T_{C_1}\right) = \left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow k = \left(\frac{n}{2}\right) \in \mathbb{N}$$

$$Lugar\left(T_{C_2}\right) = \left(\frac{n+2}{2}\right) \Rightarrow k = \left(\frac{n+2}{2}\right) \in \mathbb{N}$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 13

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1

*Calcule el valor de **b** en*

$$\frac{x^{b} - y^{15}}{x^{2} - y^{3}}$$

Si genera un cociente notable.

Resolución:

Si genera un C.N entonces se cumple que:

$$\frac{b}{2} = \frac{15}{3} = n(\#\ términos\ del\ C.N)$$

$$\frac{b}{2} = 5$$

$$\rightarrow b = 10$$

Rpta: $\boxed{b = 10}$

PROBLEMA 2

Obtenga el valor de $\boldsymbol{a}$ en el siguiente cociente notable

$$\frac{x^{a-3}-y^{a+1}}{x^{3}-y^{4}}$$

Resolución:

Si genera un C.N entonces se cumple que:

$$\frac{a-3}{3}=\frac{a+1}{4}=n\,(\#\ \text{términos del C.N})$$

$$4(a-3)=3(a+1)$$

$$4a-12=3a+3$$

$$4a-3a=3+12$$

$$\therefore\ a=15$$

Rpta: $\boxed{a=15}$

PROBLEMA 3

Determine el **término central** en el cociente notable de:

$$\frac{x^{13} - y^{13}}{x^{1} - y}$$

Resolución:

Si genera un C.N entonces se cumple que:

$$Lugar(Tc) = \frac{n+1}{2}$$

$$n(\#\ términos\ del\ C.N) = \frac{13}{1} = 13$$

$$Lugar(Tc) = \frac{13+1}{2} = 7 \rightarrow k = 7$$

Entonces el Término General (T_k)

$$t_k = (signo)(x^1)^{n-k}(y^1)^{k-1}$$

$$t_7 = (x^1)^{13-7}(y^1)^{7-1}$$

$$t_7 = (x^1)^{6}(y^1)^{6}$$

Estamos en el 1^{er} caso de C.N

El signo siempre es +, así k sea PAR o IMPAR

Rpta: $Tc = x^6y^6$

PROBLEMA 4

Indique el número de términos del cociente notable.

$$\frac{x^{n-4} - y^{n+3}}{x^{5} - y^{6}}$$

Resolución:

Si genera un C.N entonces se cumple que:

$$\frac{n-4}{5} = \frac{n+3}{6} = n(\text{\# términos del C.N})$$

$$6(n-4) = 5(n+3)$$

$$6n - 24 = 5n + 15$$

$$6n - 5n = 15 + 24$$

$$\rightarrow n = 39$$

$$\frac{\quad}{\quad} = (\text{\# términos})$$

$$\frac{+3}{6} = n$$

Rpta: $\boxed{(\text{\#términos})n = 7}$

PROBLEMA 5

Calcule el grado absoluto del término central del siguiente cociente notable.

$$\frac{x^{n+7} - y^{n-4}}{x^{3} - y^{2}}$$

Resolución:

Si genera un C.N entonces se cumple que:

$$\frac{n+7}{3} = \frac{n-4}{2} = n \quad 11\ (\#\ \text{términos del C.N})$$

$$2(n+7) = 3(n-4)$$

$$2n + 14 = 3n - 12$$

$$14 + 12 = 3n - 2n$$

$$\rightarrow n = 26$$

$$Lugar(Tc) = \frac{n+1}{2}$$

$$Lugar(Tc) = \frac{11+1}{2} = 6$$

$$\rightarrow k = 6$$

Entonces el Término General (T_k)

$$t_k = (signo)(x^3)^{n-k}(y^2)^{k-1}$$

Estamos en el 1^{er} caso de C.N

El signo siempre es $+$, así k sea PAR o IMPAR

$$t_7 = (x^3)^{11-6}(y^2)^{6-1}$$

$$t_7 = (x^3)^{5}(y^2)^{5}$$

$$t_7 = x^{15}y^{10}$$

Rpta: $GA = 25$

PROBLEMA 6

Indique el grado del término central del cociente notable y él te indicará lo que gastó diariamente, en soles, María en el colegio Saco Oliveros.

$$\frac{x^{27}-y^{36}}{x^{3}-y^{4}}$$

¿Cuánto gastó diariamente?

Resolución:

Si genera un C.N entonces se cumple que:

$$\frac{27}{3}=\frac{36}{4}=n \quad (\#\ \text{términos del C.N})$$

$$n = 9$$

$$Lugar(Tc)=\frac{n+1}{2}$$

$$Lugar(Tc)=\frac{9+1}{2}=5 \rightarrow k=5$$

Entonces el Término General (T_k)

$$t_k=(signo)(x^3)^{n-k}(y^4)^{k-1}$$

Estamos en el 1er caso de C.N

El signo siempre es +, así k sea PAR o IMPAR

$$t_5=(x^3)^{9-5}(y^4)^{5-1}$$

$$t_5=(x^3)^{4}(y^4)^{4}$$

$$t_5=x^{12}y^{16}$$

Rpta: $GA=28$

PROBLEMA 7

Luego de obtener cada cociente notable

$$A=\frac{x^4-1}{x-1}\;;\;B=\frac{x^4-1}{x+1}\;;\text{ Determine A-B}$$

Resolución:

CASO I

$$A=\frac{x^4-1}{x-1}=x^{4-1}+x^{4-2}.1+x^{4-3}.1^2+x^{4-4}.1^3$$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}.y+x^{n-3}.y^2+x^{n-4}.y^3+\dots+y^{n-1}$$

$$A=x^3+x^2+x^1+1$$

CASO II

$$B=\frac{x^4-1}{x+1}=x^{4-1}-x^{4-2}.1+x^{4-3}.1^2-x^{4-4}.1^3$$

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}.y+x^{n-3}.y^2-x^{n-4}.y^3+\dots-y^{n-1}$$

$$B=x^3-x^2+x^1-1$$

$$A-B \qquad\qquad -(\qquad\qquad)$$

$$A-B=\cancel{x^3}+x^2+\cancel{x}+1-\cancel{x^3}+x^2-\cancel{x}+1$$

Rpta: $\boxed{A-B=2x^2+2}$

PROBLEMA 8

Reduzca

$$T=\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

Resolución:

CASO I

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}.y+x^{n-3}.y^2+x^{n-4}y^3+\cdots+y^{n-1}$$

$$A=\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{x^{8-1}+x^{8-2}.1+x^{8-3}.1^2+x^{8-4}.1^3+\cdots+1}{x^{4-1}+x^{4-2}.1+x^{4-3}.1^2+x^{4-4}.1^3}$$

$$A=\frac{\dfrac{x^8-1}{x-1}}{\dfrac{x^4-1}{x-1}}=\frac{(x^8-1)\cancel{(x-1)}}{(x^4-1)\cancel{(x-1)}}=\frac{(x^4)^2-1}{x^4-1}=\frac{(x^4+1)\cancel{(x^4-1)}}{\cancel{x^4-1}}$$

Diferencia de cuadrados

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Rpta: $\boxed{A=x^4+1}$