ALGEBRA

Chapter 15

3th

SECONDARY

Números Complejos

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Benoit Mandelbrot *publicó en 1975 su primer ensayo sobre fractales.*

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Su dimensión es fraccionaria.

Su construcción se basa en la iteración de un número complejo, es decir se hace una operación y ésta se repite con el resultado….

$z \rightarrow z^2 + C$ (conjunto de Mandelbrot).

NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IMAGINARIA (i):

$i = \sqrt{-1}$; se llama unidad imaginaria $\rightarrow$ $\boxed{i^2 = -1}$

Ejemplos:

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3i$
- $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5i$
- $\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$

POTENCIAS DE (i):

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

Ejemplo:

$$i^{254} = \left(i^4\right)^{63} . i^2 = 1(-1) = -1$$

Teorema:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \ \ldots \ldots + i^{4k} = 0$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z es un par ordenado de números reales a y b, escrito como:

$$z = (a, b)$$

El conjunto de números complejos se denota por C:

$$\boxed{C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}}$$

a es la parte real de z: $Re(z): a$

b es la parte imaginaria de z: $Im(z): b$

FORMA BINOMIAL DE Z:

Un número complejo $z = (a, b)$ se escribe comúnmente como:

$$\boxed{z = a + bi \ / \ i = \sqrt{-1}}$$

$i = \sqrt{-1}$; se llama unidad imaginaria

a es la parte real de z: $Re(z): a$

b es la parte imaginaria de z: $Im(z): b$

$$\boxed{i = (0, 1)}$$

PROPIEDADES:

$$z = a + bi \ / \ i = \sqrt{-1}$$

✓ Si $a = 0$, $b = 0$, se dice que Z es un COMPLEJO NULO $\Rightarrow$ $\boxed{z = (0,0) = 0}$

✓ Si $a = 0$, se dice que Z es un IMAGINARIO PURO $\Rightarrow$ $\boxed{z = (0,b) = bi}$

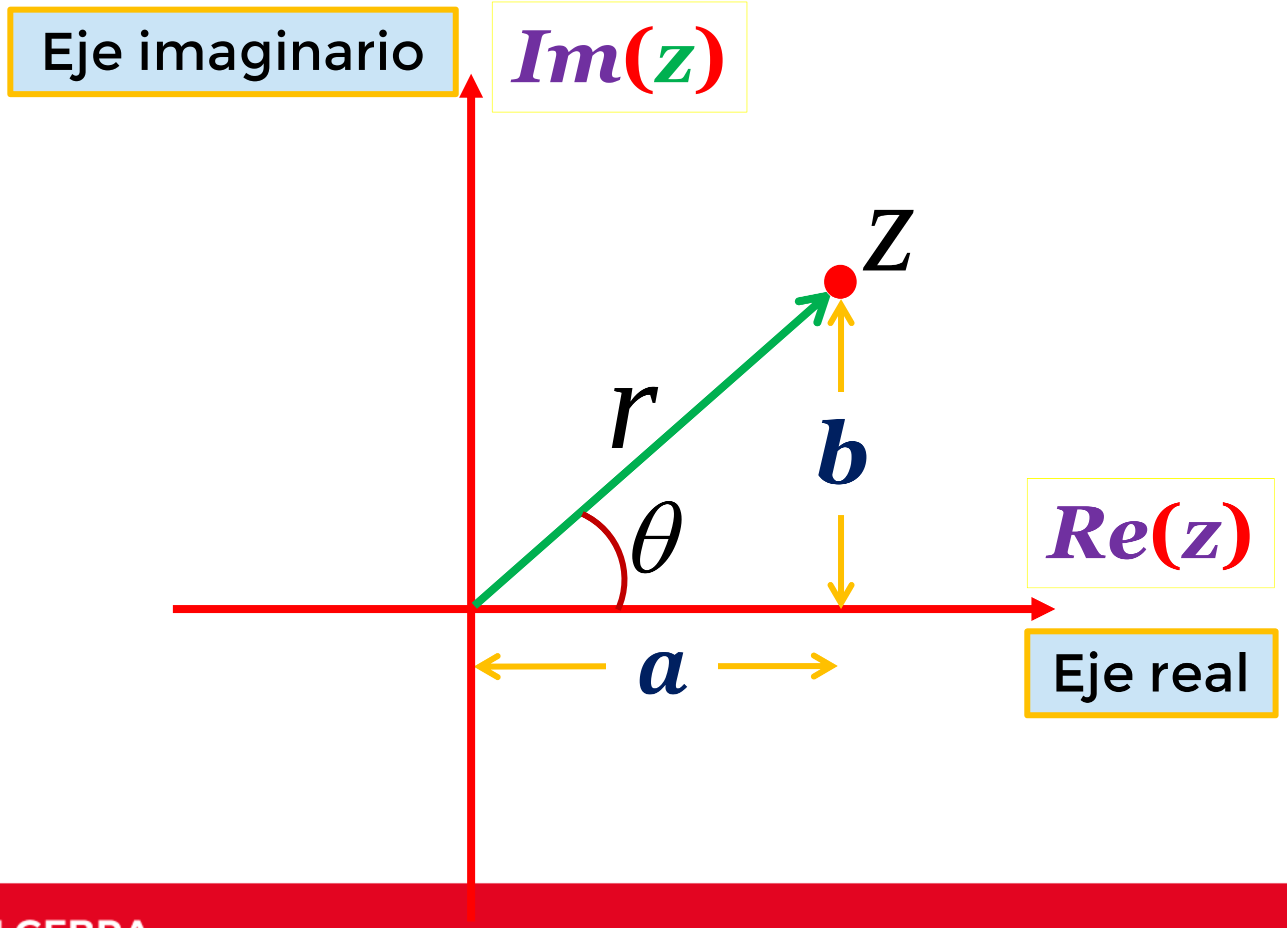
✓ Si $b = 0$, Z se comporta como un NÚMERO REAL $\Rightarrow$ $\boxed{z = (a,0) = a}$

IGUALDAD DE COMPLEJOS:

Si: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} \wedge \boxed{y_1 = y_2}$

EL PLANO COMPLEJO
(PLANO z, DE ARGAND O DE GAUSS):

$$\boxed{z = (a, b) = a + bi \;/\; i = \sqrt{-1}}$$



Módulo:

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Argumento:

$$\boxed{\theta = Arg(z) = arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

PROPIEDADES :

$$z = a + bi \;/\; i = \sqrt{-1}$$

➤ Conjugado de Z:

$$\boxed{\overline{z} = a - bi}$$

➤ Opuesto de Z:

$$\boxed{op(z) = z^* = -a - bi}$$

OPERACIONES BÁSICAS :

Sean: $z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

- Adición:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}$$

- Multiplicación:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$\boxed{z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

- División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i}$$

Problema 1

HELICO PRACTICE

Efectúe

$M = \sqrt{-49} + \sqrt{-1}$

$$M = \sqrt{49}.\sqrt{-1} + \sqrt{100}.\sqrt{-1} + \sqrt{9}.\sqrt{-1} + 5\sqrt{144}.\sqrt{-1}$$

$$M = 7i + 10i + 3i + 5.12i$$

$$M = 7i + 10i + 3i + 60i$$

$$\therefore \quad M = 80i$$

Recordemos:

UNIDAD IMAGINARIA:

$$i = \sqrt{-1}$$

Problema 2

Siendo $i = \sqrt{-1}$

Calcule

$$P = i^{79} + i^{99} - i^{51} + i^{82} + i^{41}$$

Recordemos:

POTENCIAS DE i:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

Resolución:

$$P = i^{79} + i^{99} - i^{51} + i^{82} + i^{41}$$

- $i^{79} = i^{76+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{99} = i^{96+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{51} = i^{48+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{82} = i^{80+2} = i^{4k+2} = -1$
- $i^{41} = i^{40+1} = i^{4k+1} = i$

$$P = (-i) + (-i) - (-i) + (-1) + (i)$$

$$P = -i - i + i - 1 + i$$

$$\boxed{\therefore\ P = -1}$$

Problema 3

Reduzca

$$F = \frac{3i^{259} + 5i^{3593}}{20i^{4775} + 4i^{8749}}; \quad (i = \sqrt{-1})$$

Recordemos:

POTENCIAS DE i:

$$\boxed{i^{4k} = 1}$$

$$\boxed{i^{4k+1} = i}$$

$$\boxed{i^{4k+2} = -1}$$

$$\boxed{i^{4k+3} = -i}$$

Resolución:

$$F = \frac{3i^{259} + 5i^{3593}}{20i^{4775} + 4i^{8749}}$$

- $i^{59} = i^{56+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{93} = i^{92+1} = i^{4k+1} = i$
- $i^{75} = i^{72+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{49} = i^{48+1} = i^{4k+1} = i$

$$F = \frac{3(-i) + 5(i)}{20(-i) + 4(i)} = \frac{2\cancel{i}}{-16\cancel{i}}$$

$$\boxed{\therefore \; F = -\frac{1}{8}}$$

Problema 4

Si

$$z_1 = 4 + 7i$$
$$z_2 = -2 + 3i$$
$$z_3 = 2 - 5i$$

Efectúe

$$z = z_1 + \bar{z}_2 + z_3^*$$

Recordemos:

Sea: $z = a + bi$

Conjugado de z:

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Opuesto de z:

$$\boxed{z^* = -a - bi}$$

Resolución:

$$z = z_1 + \bar{z}_2 + z_3^*$$

$$z = (4 + 7i) + (-2 - 3i) + (-2 + 5i)$$

$$z = \cancel{4} + 7i - \cancel{2} - 3i - \cancel{2} + 5i$$

$$\boxed{\therefore \quad z = 9i}$$

Problema 5

Si $z_1 = 5 - 2i$
$z_2 = -3 + 2i$

al efectuar

$$T = \bar{z}_1 . z_2^* + 1 + 4i$$

cuyo valor de T en soles es el precio de un galón de pintura para pintar 2 pizarras; ¿cuánto costará pintar 40 pizarras?

Recordemos:

Sea: $z = a + bi$

Conjugado de z:

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Opuesto de z:

$$\boxed{z^* = -a - bi}$$

Resolución:

$$T = \bar{z}_1 . z_2^* + 1 + 4i$$

$$T = (5 + 2i)(3 - 2i) + 1 + 4i$$

$$T = 15 - 10i + 6i - 4\underbrace{i^2}_{(-1)} + 1 + 4i$$

$$T = 15 - \cancel{10i} + \cancel{6i} + 4 + 1 + \cancel{4i}$$

$$\boxed{T = 20}$$ (Precio de 1 galón de pintura en soles).

Para pintar 40 pizarras se requieren 20 galones.

∴ Pintar 40 pizarras costará $20 \times 20 = S/.\,400$

Problema 6

Efectúe

$$P=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\quad;(i=\sqrt{-1})$$

Recordemos:

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (Binomio al cuadrado):

$$\boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Resolución:

$$P=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$$

$$P=\frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$P=\frac{(1+2i+i^2)-(1-2i+i^2)}{1-i^2}$$

$$P=\frac{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}-\cancel{1}+2i-\cancel{i^2}}{1-i^2}$$

$$i^2 \rightarrow -1$$

$$P=\frac{4i}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ P=2i}$$

Problema 7

Luego de efectuar

$$z = \frac{5(1+i)}{2-i} + 2 + i$$

Calcule $|z|$

Recordemos:

Sea: $z = a + bi$

MÓDULO DE z:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Resolución:

$$z = \frac{5(1+i)}{2-i} + 2 + i$$

$$z = \frac{5(1+i)}{(2-i)} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} + 2 + i$$

$$z = \frac{5(2+i+2i+i^2)}{4-i^2} + 2 + i$$

$$z = \frac{5(2+i+2i-1)}{4+1} + 2 + i$$

$$z = \frac{\cancel{5}(1+3i)}{\cancel{5}} + 2 + i$$

$$z = 1 + 3i + 2 + i$$

$$\boxed{z = 3 + 4i}$$

Nos piden: $|z|$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$|z| = \sqrt{25}$$

$$\boxed{\therefore\ |z| = 5}$$

Problema 8

Siendo $z_1 = 2 + i$

$z_2 = 3 - 2i$

Calcule

$$T = z_1^2 + z_2^2$$

Señale $Im(T)$

Recordemos:

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO
(Binomio al cuadrado):

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Resolución:

Cálculo de z_1^2:

$$z_1^2 = (2 + i)^2$$

$$z_1^2 = 4 + 4i + i^2$$

$$z_1^2 = 4 + 4i - 1$$

$$\boxed{z_1^2 = 3 + 4i}$$

Cálculo de z_2^2:

$$z_2^2 = (3 - 2i)^2$$

$$z_2^2 = 9 - 12i + 4i^2$$

$$z_2^2 = 9 - 12i - 4$$

$$\boxed{z_2^2 = 5 - 12i}$$

$$T = z_1^2 + z_2^2$$

$$T = 3 + 4i + 5 - 12i$$

$$\boxed{T = 8 - 8i}$$

$$\boxed{\therefore \quad Im(T) = -8}$$