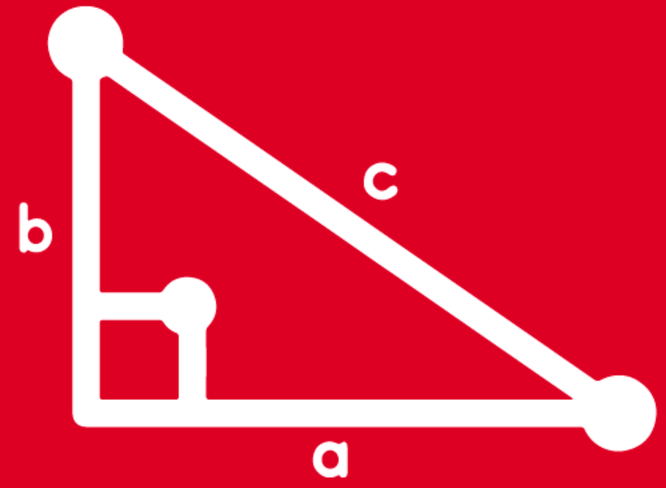
TRIGONOMETRY

Chapter 08
Session I

4th
SECONDARY



Geometría analítica

SACO OLIVEROS

¿Sabías qué….?

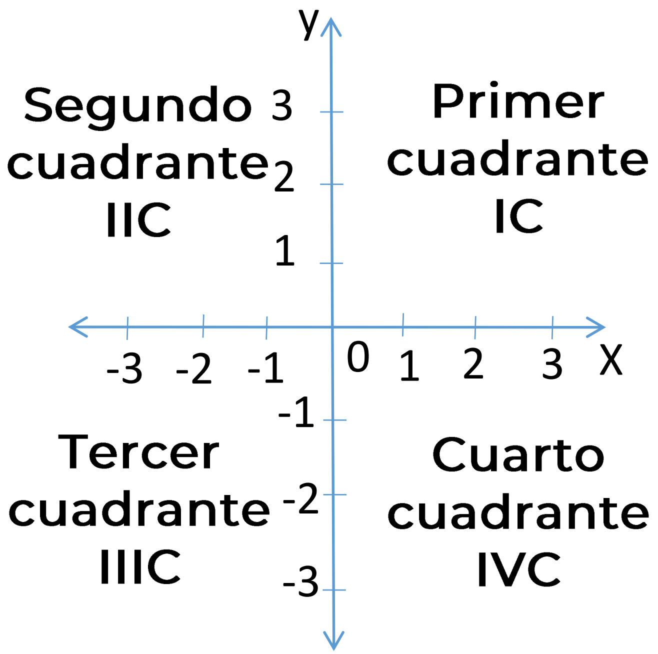
René Descartes y Pierre de Fermat

Durante el siglo XVII surgieron casi todas las disciplinas matemáticas, produciéndose en lo que a geometría se refiere el nacimiento de la geometría analítica.

Sin duda, dos grandes en esta materia y época fueron René Descartes y Pierre de Fermat. Por sus aportes ambos son considerados los padres de la *Geometría analítica*.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Plano cartesiano

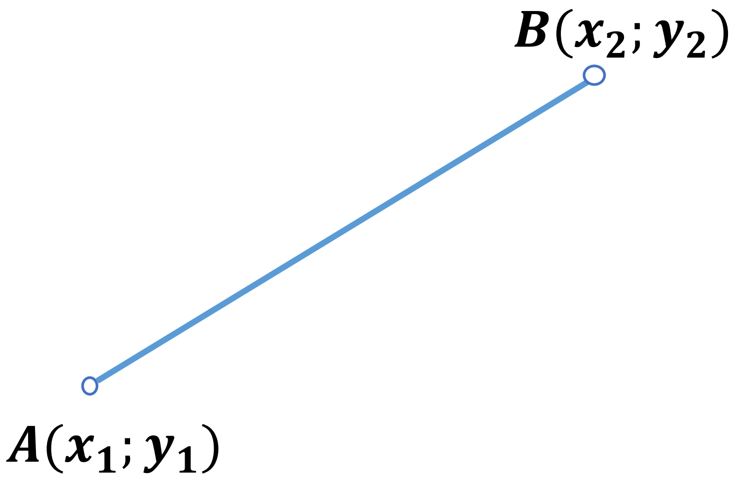


O: origen de coordenadas

X: eje de las abscisas

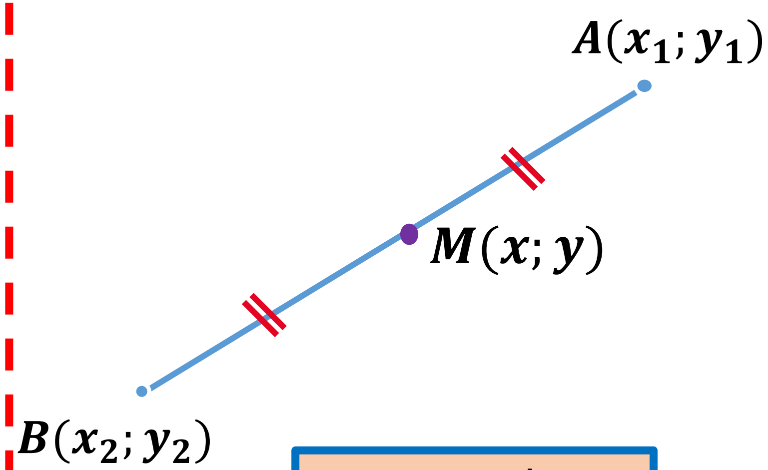
Y: eje de las ordenadas

Distancia entre dos puntos



$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A;B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Coordenadas del punto medio de un segmento

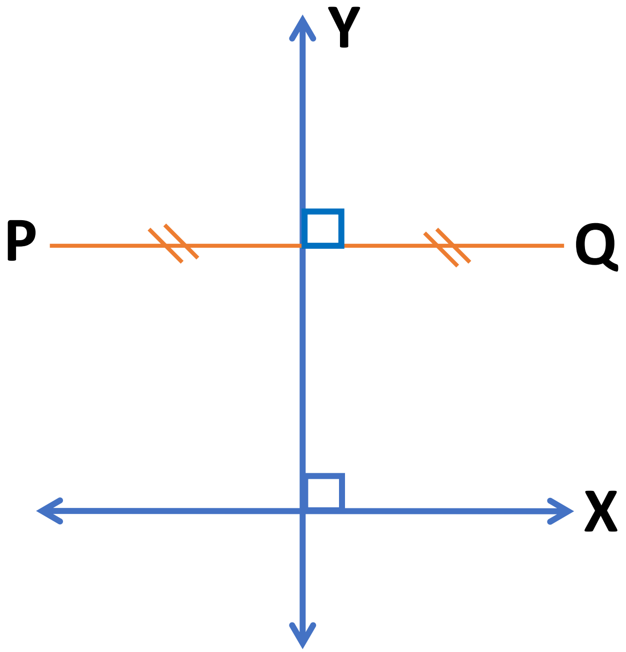


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

PUNTOS SIMÉTRICOS

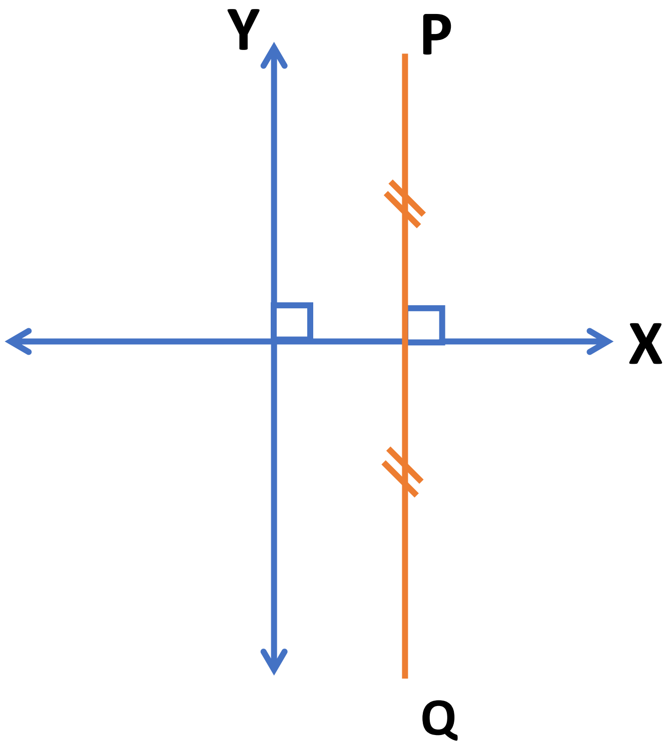
Segmento horizontal



Si Q(x,y), entonces P(-x,y)

"Las ordenadas son iguales y la abscisa cambia de signo."

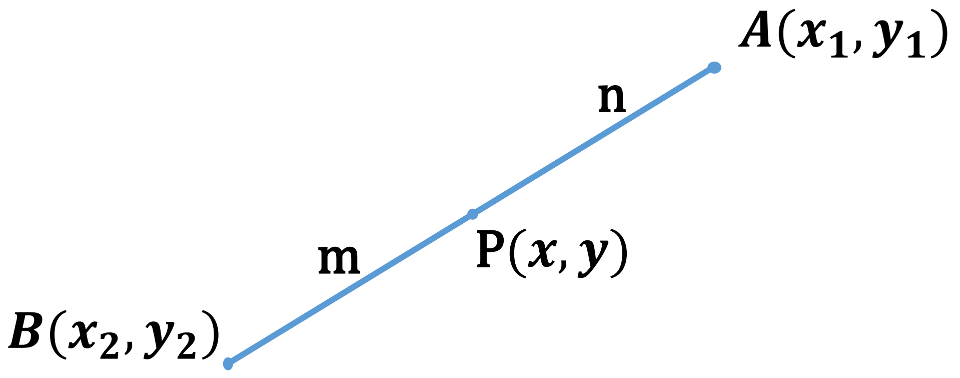
Segmento vertical



Si P(x,y), entonces Q(x,-y)

"Las abscisas son iguales y la ordenada cambia de signo."

División de un segmento en una razón dada

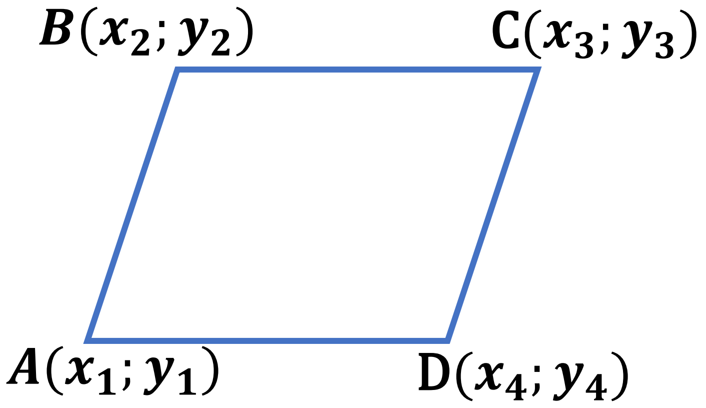


$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{m + n}$$

$$y = \frac{my_1 + ny_2}{m + n}$$

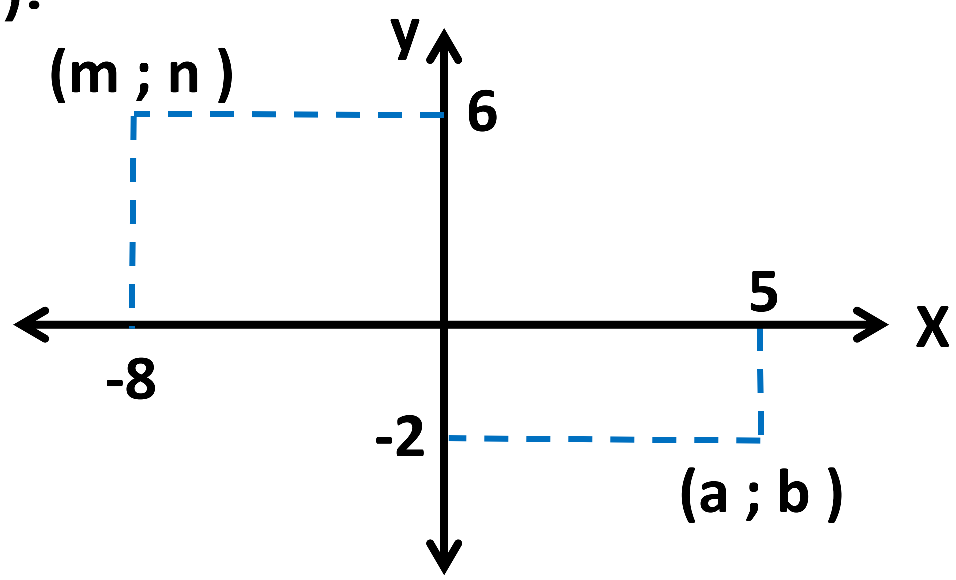
Aplicaciones

ABCD es un paralelogramo



$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$
$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

1. Del gráfico, efectúe $K = (m + n)(a-b)$.



RESOLUCIÓN:

1. Identificamos los valores de (m ; n):

$(m ; n) = (-8 ; 6)$ por lo tanto: $m = -8$
$n = 6$

2. Identificamos los valores de (a ; b)

$(a ; b) = (5 ; -2)$ por lo tanto: $a = 5$
$b = -2$

3. Reemplazamos los valores de m, n, a y b:

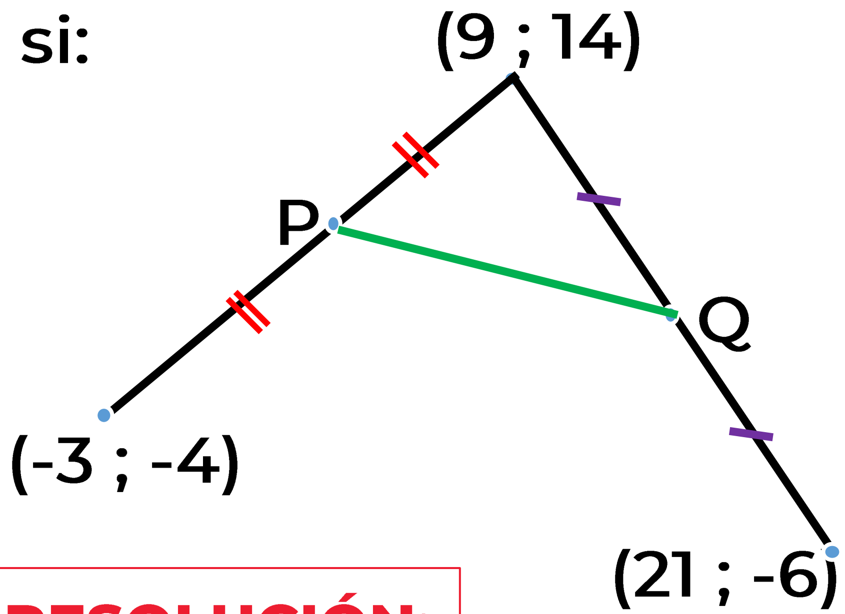
$$K = (m + n)(a-b)$$

$$K = (-8+6)(5-(-2))$$

$$K = (-2)(7)$$

$$\therefore \boxed{K = -14}$$

2. Del gráfico, halle la longitud del segmento $\overline{PQ}$ si:



RESOLUCIÓN:

1. Si P es punto medio de las coordenadas (9; 14) y (-3; -4):

$$P\left(\frac{9+(-3)}{2};\frac{14+(-4)}{2}\right) \Rightarrow P(3;5)$$

2. Hacemos lo mismo con Q porque también es punto medio de las coordenadas (9; 14) y (21; -6):

$$Q\left(\frac{9+(21)}{2};\frac{14+(-6)}{2}\right) \Rightarrow Q(15;4)$$

3. Teniendo las coordenadas de $\overline{PQ}$, hallaremos su distancia: P= (3; 5) y Q= (15; 4)

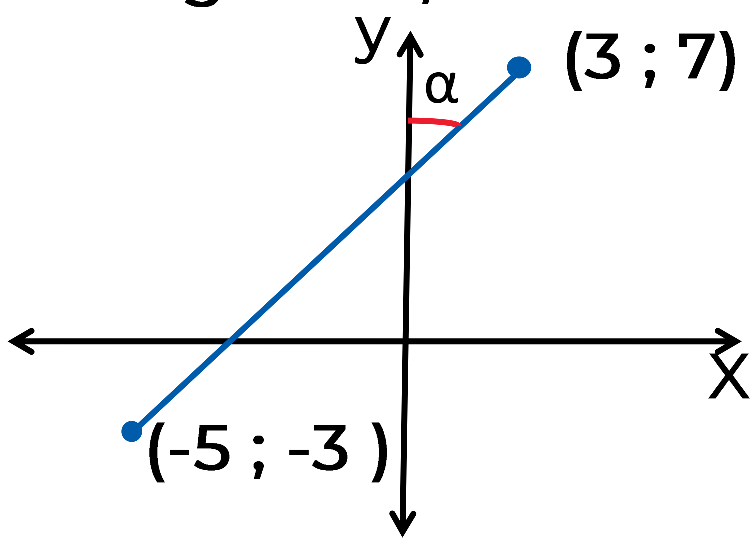
$$d\,(P;Q) = \sqrt{(15-3)^2+(4-5)^2}$$

$$d\,(P;Q) = \sqrt{12^2+(-1)^2}$$

$$d\,(P;Q) = \sqrt{144+1}$$

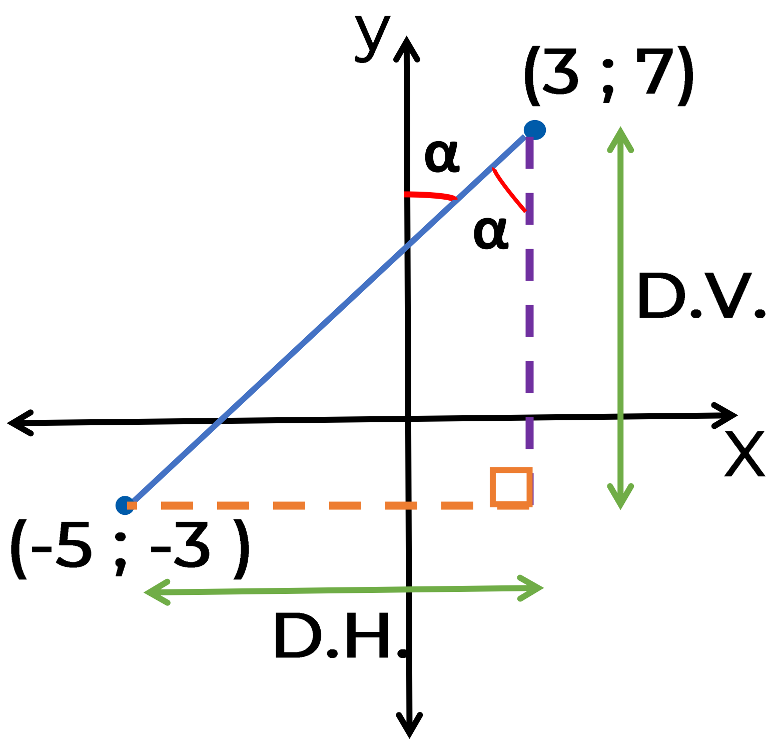
$$\therefore\ \boxed{d\,(P;Q) = \sqrt{145}}$$

3. Del gráfico, calcular $\tan\alpha$ si:



RESOLUCIÓN:

1. Con las coordenadas del gráfico, se construye un triángulo rectángulo:

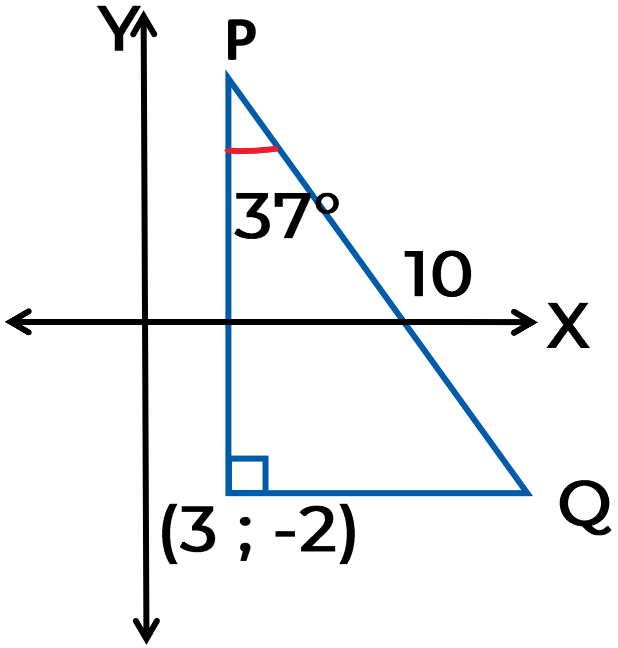


2. A partir del gráfico construido, calculamos la tan α:

$$\tan\alpha = \frac{D.H.}{D.V.} = \frac{3-(-5)}{7-(-3)} = \frac{8}{10}$$

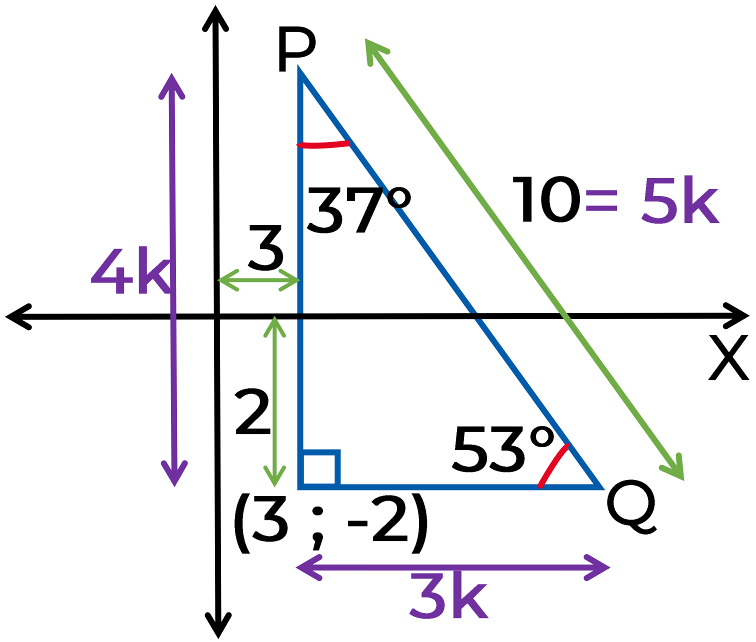
$$\therefore \boxed{\tan\alpha = \frac{4}{5}}$$

4. Del gráfico, determine las coordenadas de los puntos P y Q.



RESOLUCIÓN:

1. Determinamos P y Q utilizando el triángulo notable de 37° y 53°:



$5k = 10$

$\boxed{k = 2}$

Reemplazando k:

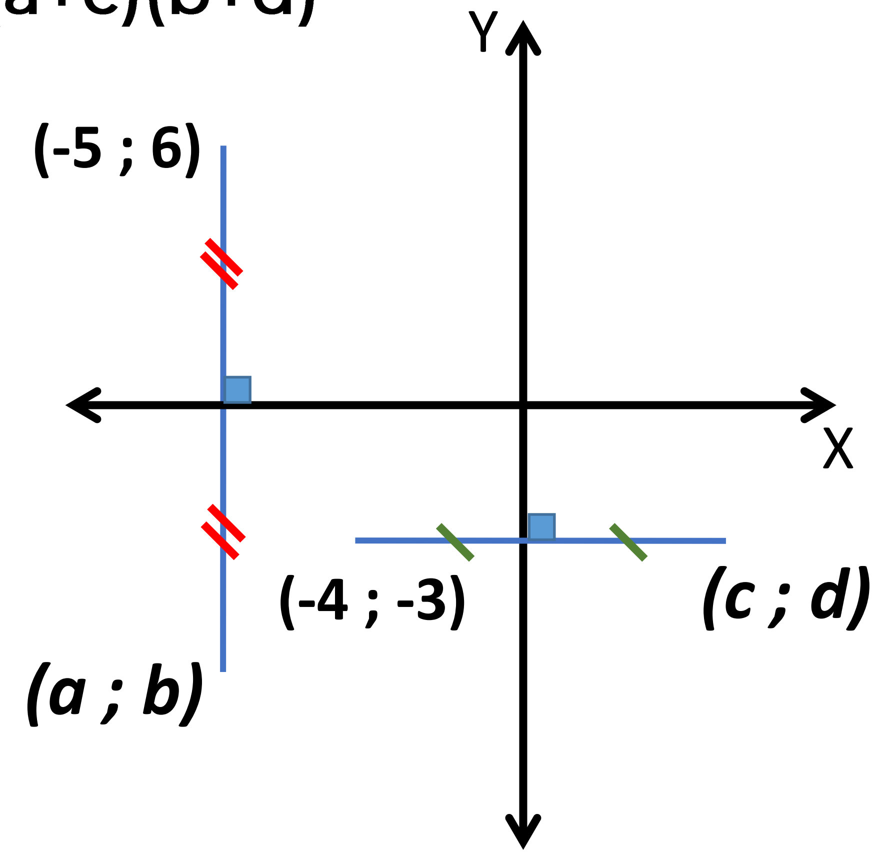
$3k = 3(2) = 6$
$4k = 4(2) = 8$

2. Del gráfico construido se puede hallar las coordenadas de P y Q :

P = (x;y) = (3; 8-2) = (3; 6) → **P (3; 6)**

Q = (x;y) = (6+3; -2) = (9; -2) → **Q (9; -2)**

5. Del gráfico, efectúe K = (a+c)(b+d)



RESOLUCIÓN:

1. Puntos simétricos por segmento vertical:

$$(a;b) = (-5;-6) \quad \begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \end{cases}$$

2. Puntos simétricos por segmento horizontal:

$$(c;d) = (4;-3) \quad \begin{cases} c = 4 \\ d = -3 \end{cases}$$

3. Piden:

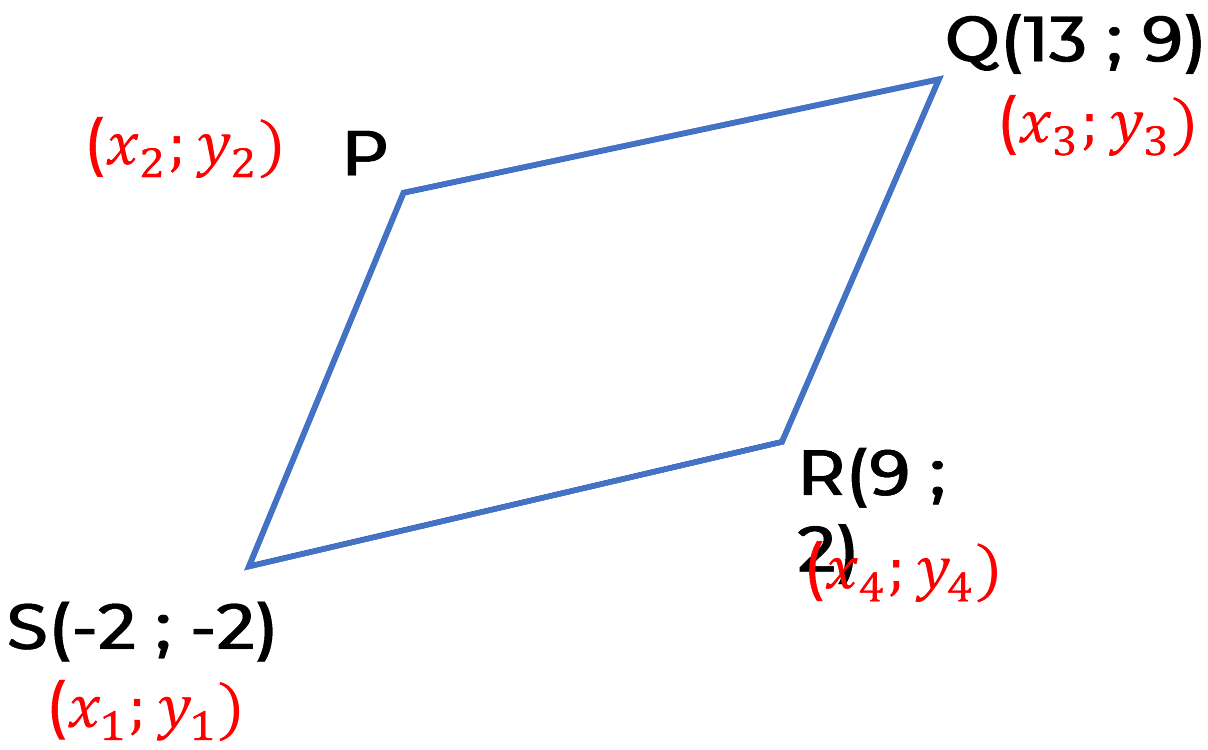
$$k = (a+c)(b+d)$$

$$k = (-5+4)(-6+(-3))$$

$$k = (-1)\,(-9)$$

$$\boxed{\therefore k = 9}$$

6. Del gráfico, determine las coordenadas de P si PQRS es un paralelogramo.



RESOLUCIÓN:

1. En todo paralelogramo se cumple:

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4$$

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4$$

2. Calculamos las coordenadas de P:

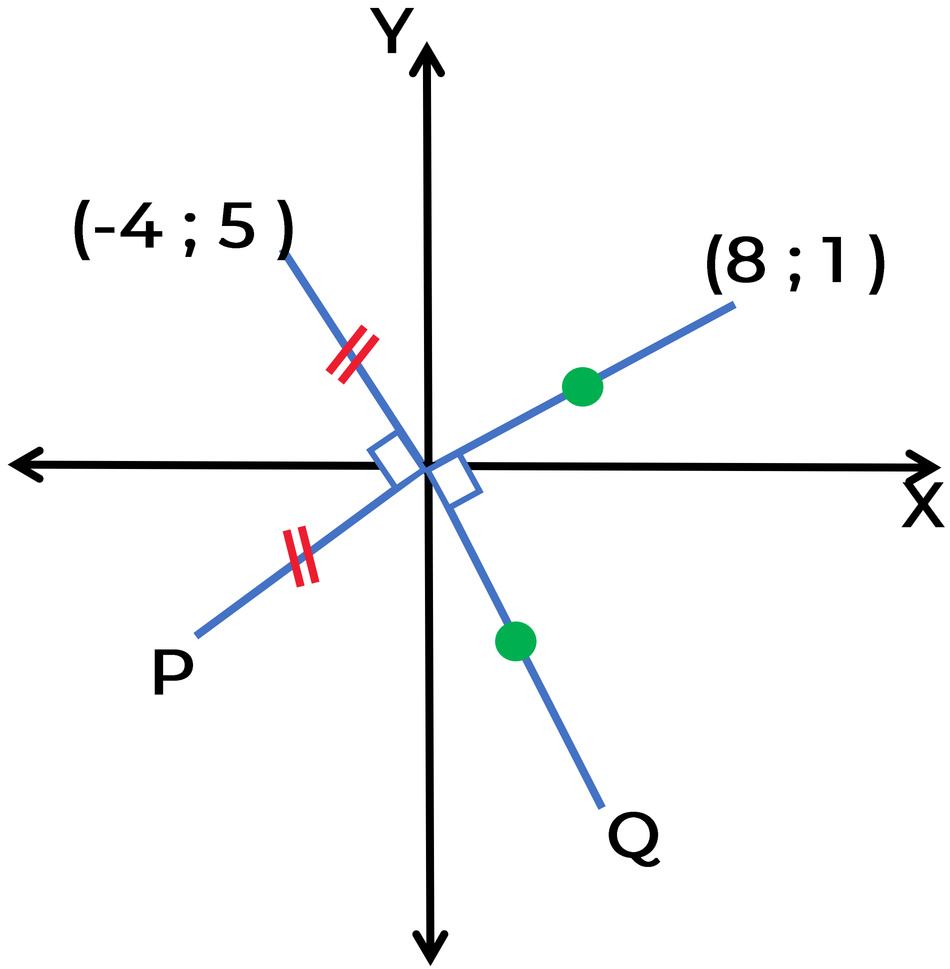
$$-2 + 13 = x_2 + 9 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2}$$

$$-2 + 9 = y_2 + 2 \Rightarrow \boxed{y_2 = 5}$$

3. Finalmente:

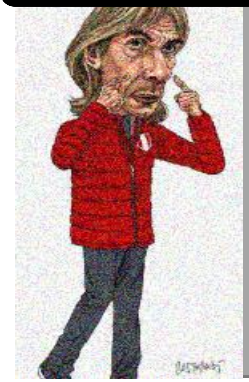
$$\therefore P(2; 5)$$

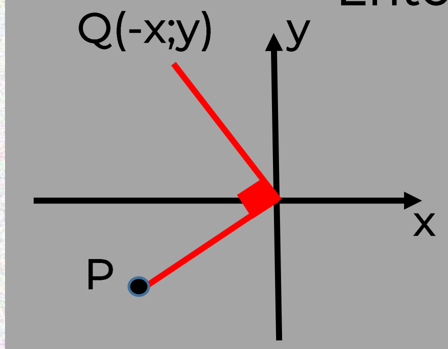
7. Del gráfico, determine las coordenadas de P y Q.



RESOLUCIÓN:

OBSERVACIÓN:





Entonces: P(-y ; -x)

"Los signos de las coordenadas de P se adecuan de acuerdo al cuadrante"

Finalmente:

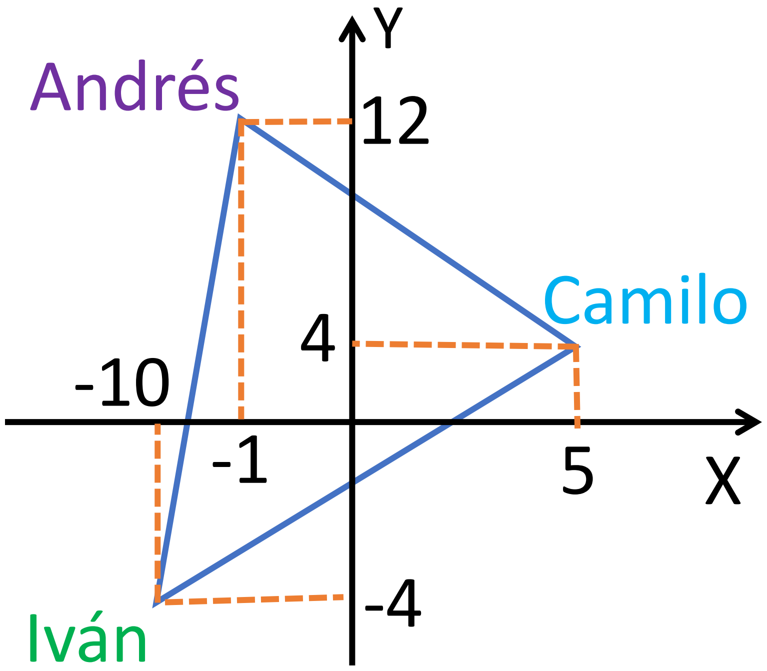
P(−5 ; −4)

Q(1 ; −8)

8. Andrés, Camilo e Iván se encuentran ubicados tal y como se muestra en el plano cartesiano.

a. Determine la distancia entre Andrés y Camilo.

b. Determine la distancia entre Camilo e Iván.



RESOLUCIÓN:

1. Establecemos las coordenadas :

Andrés = (-1;12) Iván = (-10,-4) Camilo = (5;4)

2. Respondemos:

a. Distancia entre Andrés y Camilo:

$$D_1 = \sqrt{(-1-5)^2 + (12-4)^2}$$

$$D_1 = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$$

$$\boxed{D_1 = 10}$$

b. Distancia entre Camilo e Iván:

$$D_2 = \sqrt{(5-(-10))^2 + (4-(-4))^2}$$

$$D_2 = \sqrt{(15)^2 + (8)^2}$$

$$\boxed{D_2 = 17}$$