



TRIGONOMETRY

Chapter 20 Sesión 2

4th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGOMÉTRICAS
DEL ÁNGULO TRIPLE



 **SACO OLIVEROS**

Flavio Vega Villanueva



Nació en Carhuaz, Áncash, Perú, el 10 de abril de 1915 y falleció en Lima el 10 de enero del 2011. Fue un matemático y profesor peruano. Se desempeñó durante varias décadas como catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, en la Facultad de Ciencias.

Fue el decimosexto decano de la Facultad de Ciencias de San Marcos, Modernizó la enseñanza de las ciencias básicas, es decir, matemática, física y biología.

Fue miembro fundador y primer secretario de la Sociedad Matemática Peruana (SMP). Fue también miembro de la Asociación Peruana de Computación e Informática y del Colegio de Matemáticos del Perú.





Identidades para el ángulo triple.

$$\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x$$

$$\text{cos}3x = 4\text{cos}^3x - 3\text{cos}x$$

$$\text{tan}3x = \frac{3\text{tan}x - \text{tan}^3x}{1 - 3\text{tan}^2x}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\text{sen}3x = \text{sen}x(2\text{cos}2x+1)$$

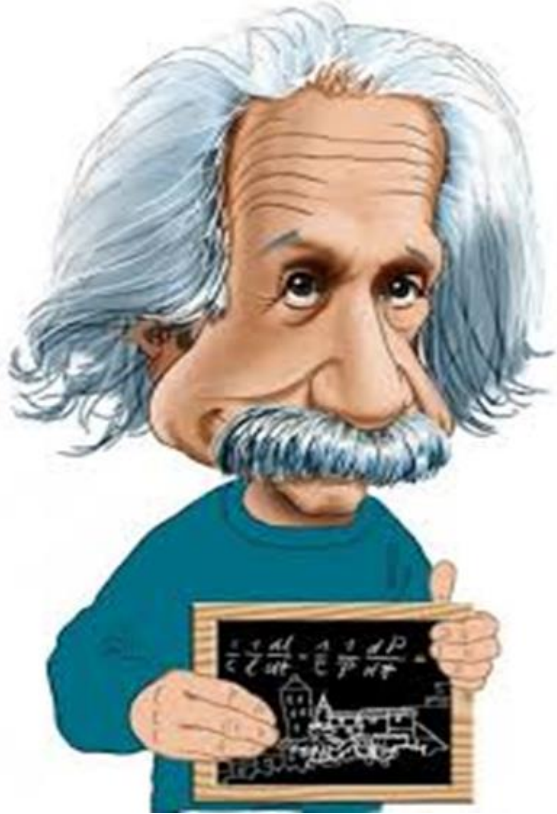
$$\text{cos}3x = \text{cos}x(2\text{cos}2x-1)$$





1. Si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, calcule $\cos 3\alpha$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$



RESOLUCIÓN

Tenemos: $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$$\cos 3\alpha = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 - \cancel{3}\left(\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{3}}\right)$$

$$\cos 3\alpha = 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right) - \sqrt{2}$$

$$\cos 3\alpha = \frac{8\sqrt{2} - 27\sqrt{2}}{27}$$

$$\therefore \cos 3\alpha = -\frac{19\sqrt{2}}{27}$$

2. Si $3\operatorname{sen}\alpha - 1 = 0$,
calcule $27\operatorname{sen}3\alpha$

$$\operatorname{sen}3x = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3x$$



RESOLUCIÓN



Por dato: $3\operatorname{sen}\alpha - 1 = 0$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$$

Sabemos: $\operatorname{sen}3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$

$$\operatorname{sen}3\alpha = \cancel{3}\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\operatorname{sen}3\alpha = 1 - \frac{4}{27} \rightarrow \operatorname{sen}3\alpha = \frac{23}{27}$$

Nos piden: $E = 27\operatorname{sen}3\alpha$

$$E = \cancel{27}\left(\frac{23}{\cancel{27}}\right)$$

$$\therefore E = 23$$



3. Si $\tan\theta = \frac{1}{2}$
calcule $\tan 3\theta$

Recordar:

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$



RESOLUCIÓN

Reemplazamos $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$$\tan 3\theta = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{11}{8}}{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \tan 3\theta = \frac{11}{2}$$





4. Si $m = 4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ$

$n = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$

Calcule $m^2 + n^2$

RESOLUCIÓN

$$m = \underbrace{4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ}_{\cos 3(15^\circ)}$$

$$\cos 3(15^\circ)$$

$$m = \cos 45^\circ \quad \rightarrow \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n = \underbrace{3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ}_{\sin 3(10^\circ)}$$

$$\sin 3(10^\circ)$$

$$n = \sin 30^\circ \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{2}$$

Nos piden:

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$m^2 + n^2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = \frac{3}{4}$$





5. Simplifique

$$M = 8\cos^3\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 6\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) +$$

RESOLUCIÓN

Recordar: $\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$

Tenemos:

$$M = 8\cos^3 40^\circ - 6\cos 40^\circ + 1$$

Factorizamos 2

$$M = 2 \underbrace{[4\cos^3 40^\circ - 3\cos 40^\circ]}_{\cos 3(40^\circ)} + 1$$

$$M = 2[\cos 120^\circ] + 1$$

$$M = 2[-\cos 60^\circ] + 1$$

$$M = 2\left[-\frac{1}{2}\right] + 1 = -1 + 1$$

$$\therefore M = 0$$





6. Simplifique

$$E = \frac{\cos^3 x}{\cos x} + 1$$

$$\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)$$



RESOLUCIÓN

Nos piden simplificar:

$$E = \frac{\cos^3 x}{\cos x} + 1$$

$$E = \frac{\cancel{\cos x}(2\cos 2x - 1)}{\cancel{\cos x}} + 1$$

$$E = 2\cos 2x \cancel{- 1} \cancel{+ 1}$$

$$\therefore E = 2\cos 2x$$





7. Simplifique

$$A = \frac{\text{sen}3x - \text{sen}x}{\cos2x}$$

$$\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos2x + 1)$$



RESOLUCIÓN

Nos piden simplificar:

$$A = \frac{\text{sen}3x - \text{sen}x}{\cos2x}$$

$$A = \frac{\text{sen}x(2\cos2x + 1) - \text{sen}x}{\cos2x}$$

*Fact ...
senx*

$$A = \frac{\text{sen}x(2\cos2x + \cancel{1} - \cancel{1})}{\cos2x}$$

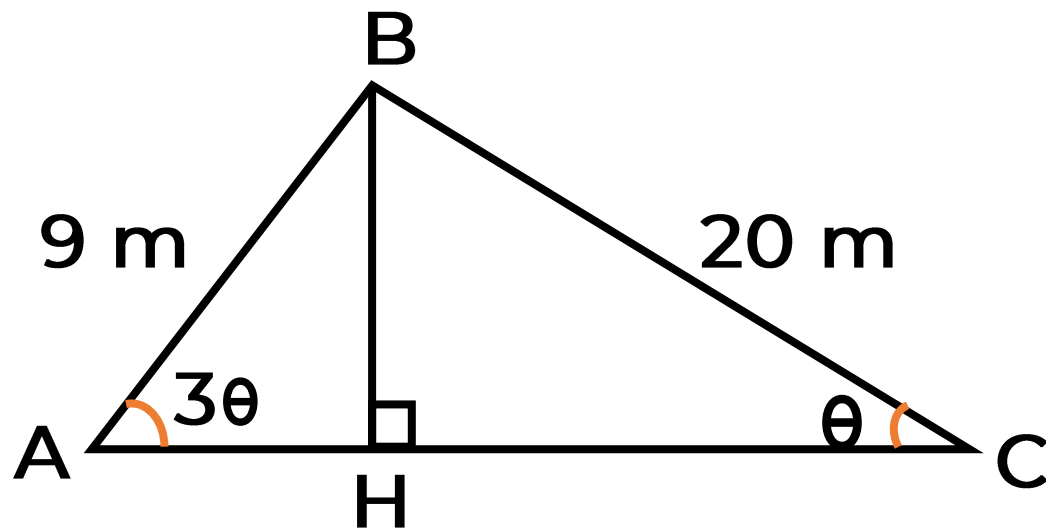
$$A = \frac{\text{sen}x(2\cancel{\cos2x})}{\cancel{\cos2x}}$$

$$\therefore A = 2\text{sen}x$$

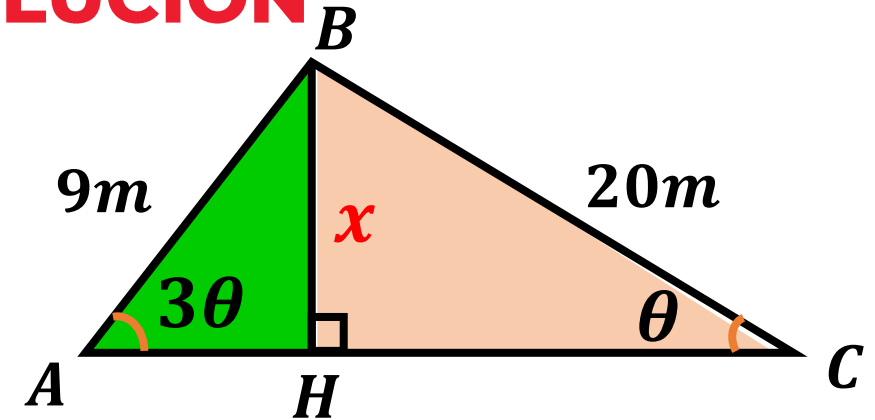




- 8.** Se construye un minimarket sobre un terreno que tiene la forma de un triángulo ABC, tal como se muestra en la figura. Determine el valor de $\cos 2\theta$.



RESOLUCIÓN



$$\text{sen} 3\theta = \text{sen} \theta (2 \cos 2\theta + 1)$$

$$\frac{x}{9} = \frac{x}{20} (2 \cos 2\theta + 1)$$

$$20 = 9 (2 \cos 2\theta + 1)$$

$$20 = 18 \cos 2\theta + 9$$

$$11 = 18 \cos 2\theta$$

$$\frac{11}{18} = \cos 2\theta$$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{11}{18}$$