MATHEMATICAL REASONING

Chapter 18

4th

SECONDA
RY

SERIES II

SACO OLIVEROS

SERIE NUMÉRICA II

SERIE GEOMÉTRICA

Es la adición indicada de los términos de una Sucesión Geométrica. Esta serie puede ser Finita o Infinita.

Por Ejemplo

Calcule el valor de la serie:

$$S = \underset{1°}{2} + \underset{2°}{6} + \underset{3°}{18} + \underset{\dots}{\cdots} + \underset{6°}{486}$$

$$S = \underset{1°}{2} + \underset{2°}{\cancel{2 \times 3^1}} + \underset{3°}{\cancel{2 \times 3^2}} + \cancel{\cdots} + \underset{6°}{\cancel{2 \times 3^5}}$$

$$3S = \cancel{2 \times 3^1} + \cancel{2 \times 3^2} + \cancel{2 \times 3^3} + \cancel{\cdots} + 2 \times 3^6$$

$$(3-1)S = 2 \times 3^6 - 2$$

$$(3-1)S = 2 \times (3^6 - 1)$$

$$\rightarrow S = \frac{2 \times (3^6 - 1)}{(3-1)} = 728$$

SERIE NUMÉRICA II

SERIE GEOMÉTRICA FINTA

EN GENERAL

$$Sn = \frac{t_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

Donde, t_1 : Primer sumando

q : Razón geométrica

n : Cantidad de sumandos

SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINTA

EN GENERAL

$$Sl_{ímite} = \frac{t_1}{1 - q}$$

Donde, q : Razón geométrica

$0 < |q| < 1$

SERIE NUMÉRICA II

SERIE DE PRODUCTOS

PRODUCTOS BINARIOS

$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

PRODUCTOS TERNARIOS

$$S_n = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

SERIE NUMÉRICA II

SERIE DE INVERSAS DE PRODUCTOS

INVERSA DE PRODUCTOS BINARIOS

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

INVERSA DE PRODUCTOS TERNARIOS

$$S_n = \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times (n+1)\times (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

PROBLEMA 1

Daniel está practicando para su examen de Razonamiento Matemático y encuentra este problema propuesto en su libro. Halle el valor de P.

$$P = \overbrace{3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \cdots}^{50\ sumandos}$$

Si Daniel demoró unos minutos en resolver el problema exitosamente, podría decir usted, ¿Cuál fue la respuesta que dio Daniel?

Resolución

$$M = \underbrace{3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \cdots}_{50\ sumandos}$$

$\times 2 \quad \times 2$

RECUERDA

$$S = t_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$$

$$M = 3\left(\frac{2^{50} - 1}{2 - 1}\right)$$

$$M = 3(2^{50} - 1)$$

$\therefore\ 3(2^{50} - 1)$

PROBLEMA 2

Halle el valor de M

$$M = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2016}$$

Resolución

$$T = \underbrace{2^0 + 2^1}_{2^2 - 1} + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2016}$$

$$\underbrace{2^2 - 1 + 2^2}_{2^3 - 1} + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2016}$$

$$\underbrace{2^3 - 1 + 2^3}_{2^4 - 1} + 2^4 + \ldots + 2^{2016}$$

$$\underbrace{2^4 - 1 + 2^4}_{2^5 - 1} + \ldots + 2^{2016}$$

$$\underbrace{2^5 - 1 \qquad\qquad}_{2^{2017} - 1}$$

$$\therefore \quad 2^{2017} - 1$$

PROBLEMA 3

Halle el valor de N: $N = 2 + 6 + 12 + \cdots + 110$

Resolución

$$N = 2 + 6 + 12 + \ldots + 110$$

$$N = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 10 \times 11$$

$$N = \frac{10 \times 11 \times 12}{3}$$

RECUERDA

$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$N = 440$$

$\therefore$ 440

PROBLEMA 4

Luis está ayudando a su hermano Juan en su tarea semanal. Juan le pregunta a Luis por este problema: Halle el valor de T.

$$T = \underbrace{6 + 24 + 60 + 120 + \ldots}_{20 \text{ sumandos}}$$

Si Luis al resolver el problema se equivoca por 5 unidades más, podría decir usted, ¿cuál es la respuesta que halló Luis?

RECUERDA

$$S_n = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) \times (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Resolución

$$T = 6 + 24 + 60 + 120 + \ldots$$

$$T = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \ldots$$

$$T = \frac{20(21)(22)(23)}{4} = 53130$$

$\therefore$ *Luis:* 53135

PROBLEMA 5

Para un examen de admisión a la Universidad Mayor de San Marcos, uno de los ingenieros propuso el siguiente problema de suma límite descendente:

Halle el valor de M: $M = 8 + 4 + 2 + 1 + \cdots + \infty$

Podría usted decir, ¿cuál es el valor de M?

Resolución

$$M = 8 \underbrace{+}_{\times\frac{1}{2}} 4 \underbrace{+}_{\times\frac{1}{2}} 2 \underbrace{+}_{\times\frac{1}{2}} 1 + \cdots + \infty$$

RECUERDA

$$S_{límite} = \frac{t_1}{1-q}$$

$$t_1 = 8 \qquad q = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \ 16$$

PROBLEMA 6

Halle el valor de N. $N = 24 - 8 + \frac{8}{3} - \frac{8}{9} + \frac{8}{27} - \cdots \infty$

Resolución

$$N = \underbrace{24 - 8}_{\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \underbrace{+ \frac{8}{3}}_{\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \underbrace{- \frac{8}{9}}_{\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \underbrace{+ \frac{8}{27}}_{\times\left(-\frac{1}{3}\right)} - \cdots \infty$$

$t_1 = 24$ $q = -\frac{1}{3}$

RECUERDA

$$S_{límite} = \frac{t_1}{1-q}$$

$$N = \frac{24}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{24}{\frac{4}{3}} = 18$$

$\therefore$ 18

PROBLEMA 7

Halle el valor de N. $N = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{930}$

Resolución

$$N = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{930}$$

$$N = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{30 \times 31}$$

RECUERDA

$$S_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$N = \frac{30}{31}$$

$\therefore 30/31$

PROBLEMA 8

Halle el valor de T. $T = \frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \cdots + \frac{1}{58\times 61}$

Resolución

$$T = \frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \cdots + \frac{1}{58\times 61}$$

Multiplicamos por 3 a ambos términos (numerador y denominador):

$$T = \frac{3}{3}\left(\frac{1}{1\times 4} + \frac{1}{4\times 7} + \frac{1}{7\times 10} + \cdots + \frac{1}{58\times 61}\right)$$

$$T = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{1\times 4} + \frac{3}{4\times 7} + \frac{3}{7\times 10} + \cdots + \frac{3}{58\times 61}\right)$$

$$T = \frac{1}{3}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{58}} - \frac{1}{61}\right)$$

$$T = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{61}\right) = \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancelto{20}{60}}{61}\right)$$

$$T = \frac{20}{61}$$

$\therefore$ $20/61$