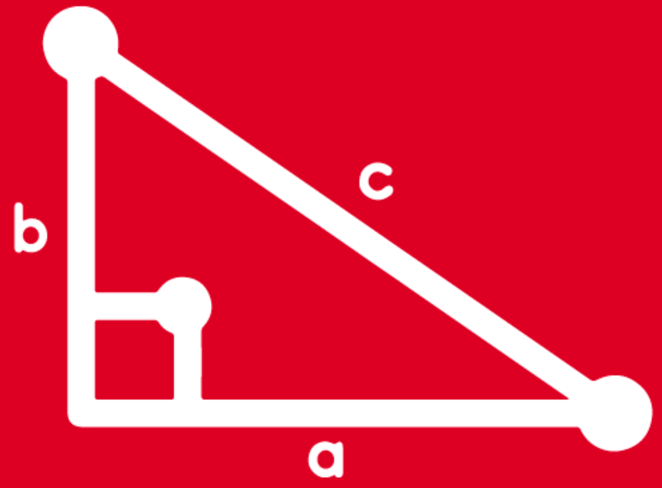
TRIGONOMETRY

Chapter 09
Sesión 01



4th
SECONDARY

Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal

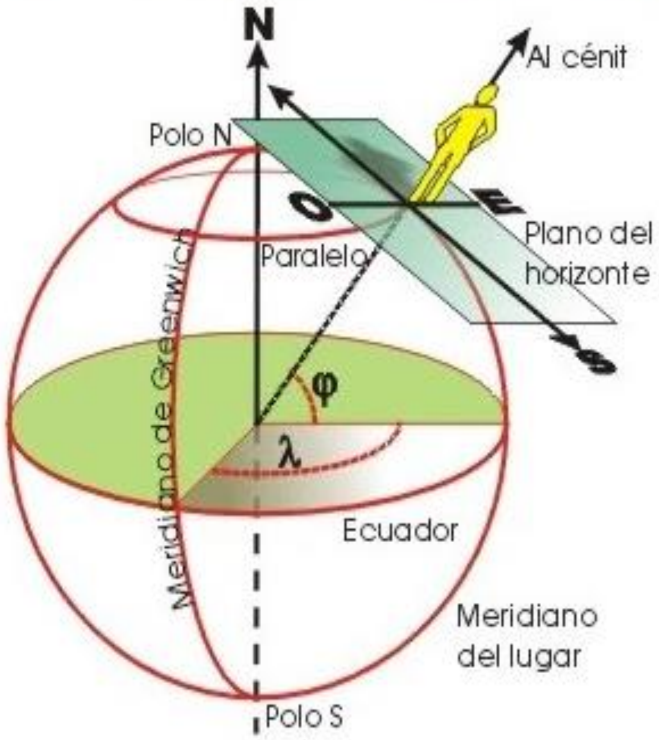
SACO OLIVEROS

MOTIVACIÓN

COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Determinan la posición del observador sobre la superficie terrestre. Aunque sabemos que la Tierra está achatada por los polos vamos a suponer, en primera aproximación, que es una esfera perfecta. Un punto cualquiera de la esfera terrestre queda determinado por dos coordenadas geográficas: la longitud y la latitud.

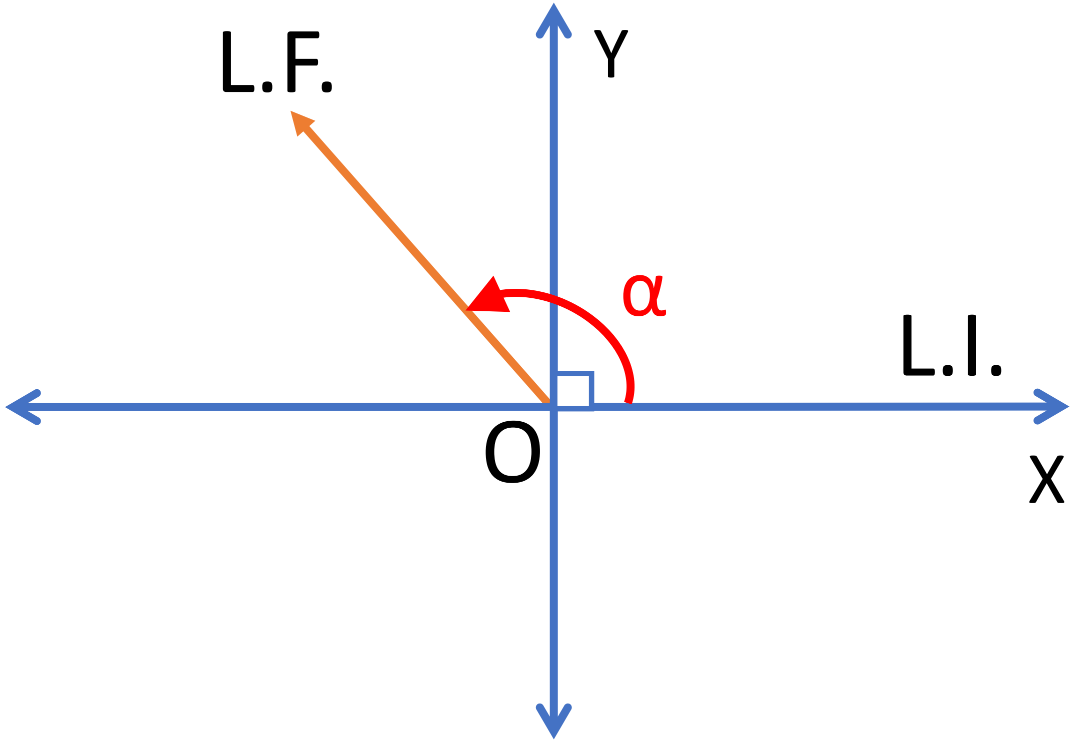
Cualquier plano paralelo al del ecuador, comprendido entre los polos norte, N, y sur, S, corta a la esfera en una circunferencia denominada paralelo. Las infinitas esferas que pasan por los polos N y S son los meridianos terrestres.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

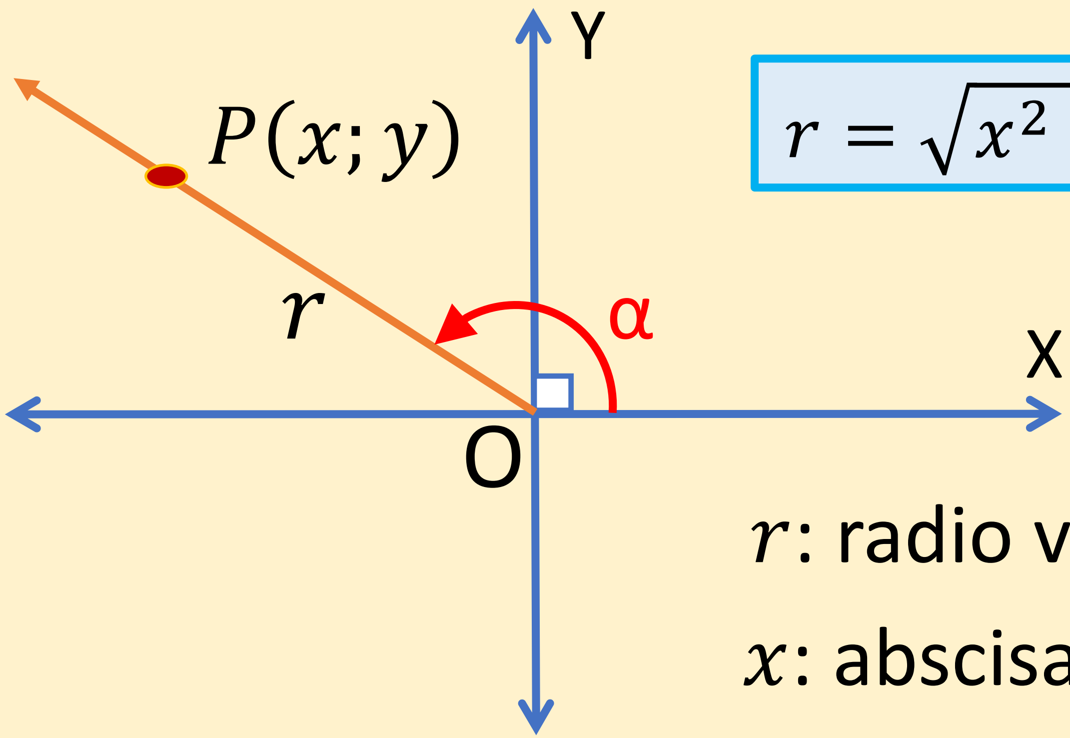
Ángulo en posición normal

Es aquel ángulo trigonométrico ubicado sobre el plano cartesiano, en donde su vértice coincide con el origen de coordenadas, su lado inicial está en el semieje positivo de las abscisas y el lado final está sobre cualquier cuadrante o sobre algún semieje.



O: origen de coordenadas
L.I.: Lado Inicial
L.F.: Lado Final

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r: radio vector

x: abscisa

y: ordenada

$$sen\alpha = \frac{ordenada}{radio\ vector} = \frac{y}{r}$$

$$cos\alpha = \frac{abscisa}{radio\ vector} = \frac{x}{r}$$

$$tan\alpha = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x}$$

$$cot\alpha = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

$$sec\alpha = \frac{radio\ vector}{abscisa} = \frac{r}{x}$$

$$csc\alpha = \frac{radio\ vector}{ordenada} = \frac{r}{y}$$

PROBLEMA – 1

Si el punto $P(-1;3)$ pertenece al lado final de un ángulo en posición normal θ, halle el valor de $G = \operatorname{sen}\theta . \cos\theta$

Resolución:

Del punto P, tenemos:

$x = -1 \; ; y = 3$

Luego: $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}$$

$$\boxed{r = \sqrt{10}}$$

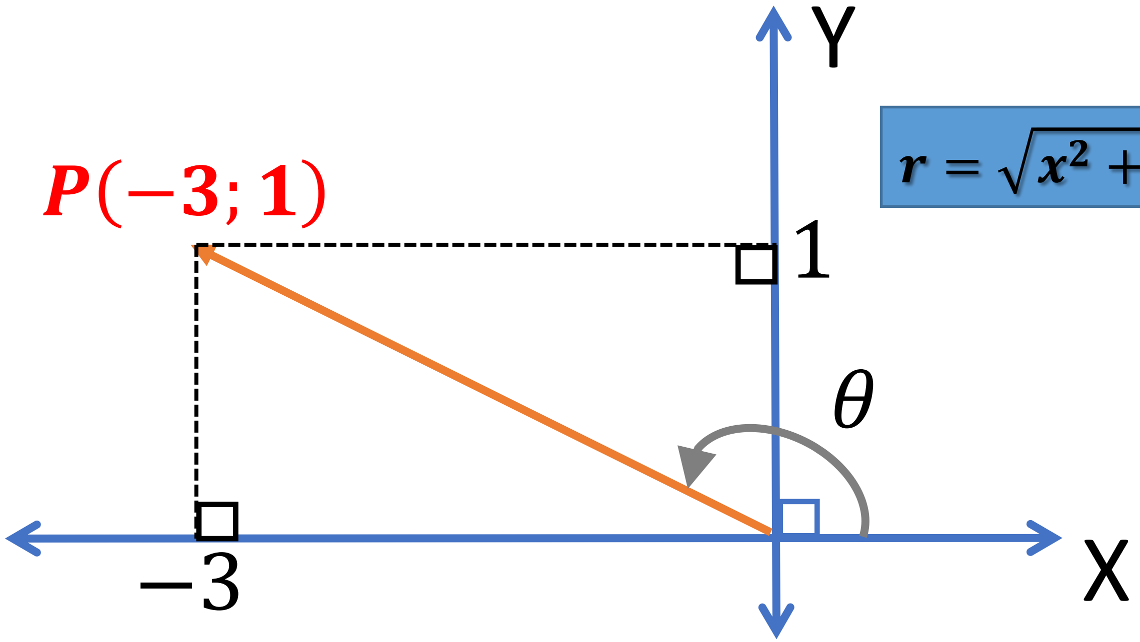
Piden : $G = sen\theta . cos\theta$

$$G = \frac{3}{\sqrt{10}} . \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \boxed{G = -\frac{3}{10}}$$

PROBLEMA – 2

A partir del gráfico, obtenga el valor de $Q = \csc^2\theta - 3\tan\theta + \cot\theta$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Resolución:

Del gráfico tenemos: $x = -3$; $y = 1$

Luego:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

Piden :

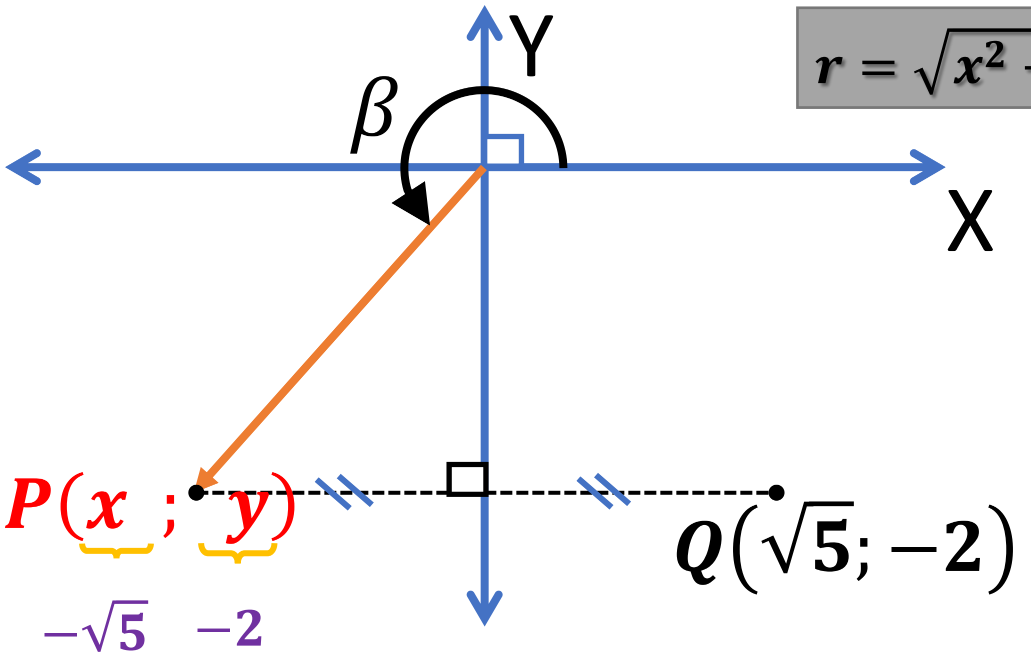
$$Q = \left(\frac{\sqrt{10}}{1}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{-3}\right) + \left(\frac{-3}{1}\right)$$

$$Q = 10 + 1 - 3$$

$$\therefore \boxed{Q = 8}$$

PROBLEMA – 3

A partir del gráfico, efectúe $P = \sqrt{5}\cos\beta - \text{sen}\beta$



$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Resolución:

- El punto P y Q son simétricos respecto al eje Y entonces: $x = -\sqrt{5}$; $y = -2$

- Calculando el radio vector:

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2 + (-2)^2} = 3$$

- Piden :

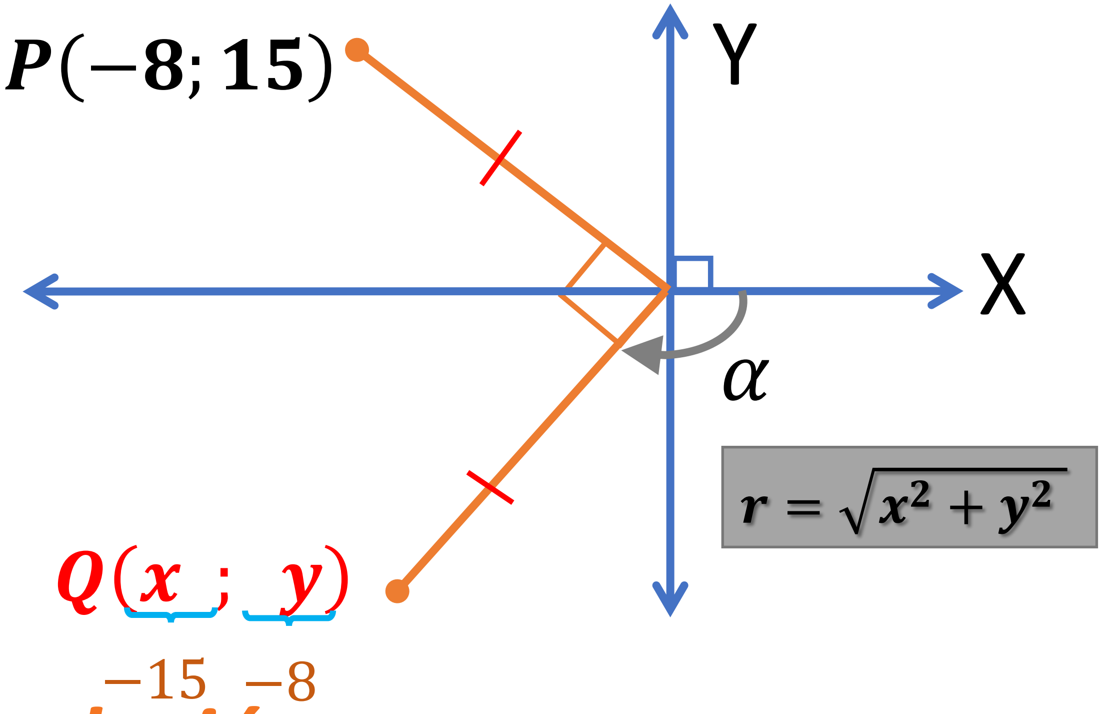
$$P = \sqrt{5}.\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - \left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$P = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$\boxed{\therefore P = -1}$$

PROBLEMA – 4

En el gráfico se muestra el ángulo en posición normal α. Obtenga el valor de $W = csc\alpha + cot\alpha$



Resolución:

- El punto P y Q son ortogonales entonces: $\mathbf{Q(-15;-8)}$.

- $x = -15 \,;\, y = -8$
- Calculando radio vector :

$$r = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = 17$$

- Piden :

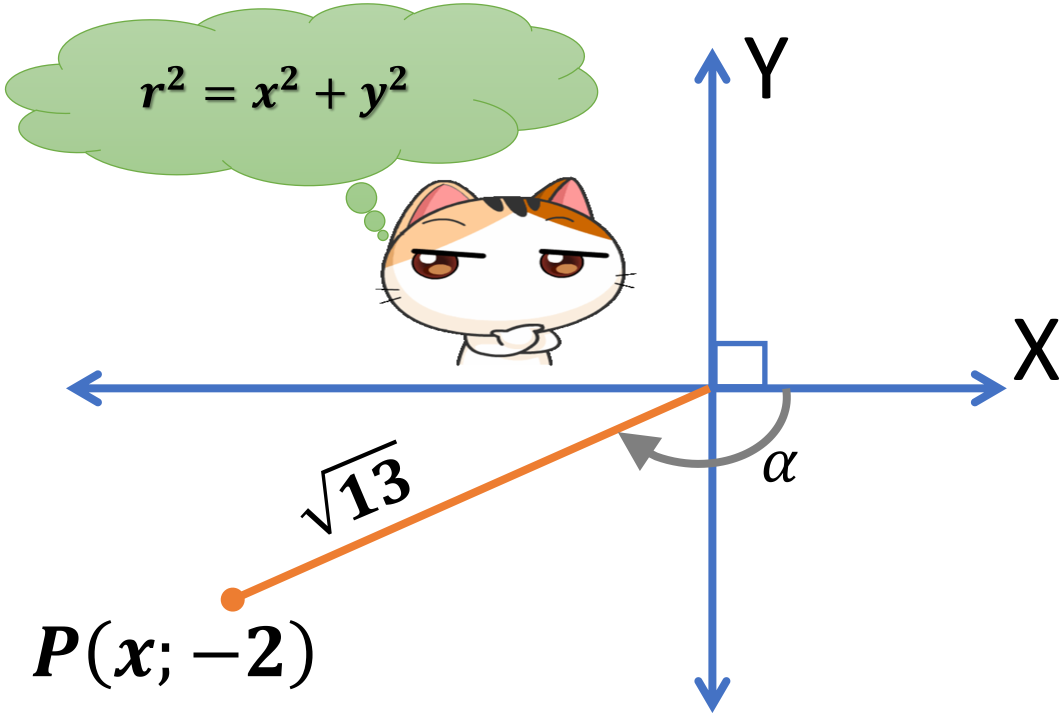
$$W = \left(\frac{17}{-8}\right) + \left(\frac{-15}{-8}\right)$$

$$W = \frac{2}{-8}$$

$$\therefore W = -\frac{1}{4}$$

PROBLEMA – 5

A partir del gráfico, efectúe: $\mathbf{M = \sqrt{13}(sen\alpha - cos\alpha)}$



Resolución:

- Del gráfico tenemos:

- Hallando “x”:

$$(x)^2 + (-2)^2 = (\sqrt{13})^2$$
$$(x)^2 + 4 = 13$$
$$(x)^2 = 9$$
$$x = \pm 3 \rightarrow \alpha \in IIIC$$
$$\boxed{x = -3}$$

- Piden :

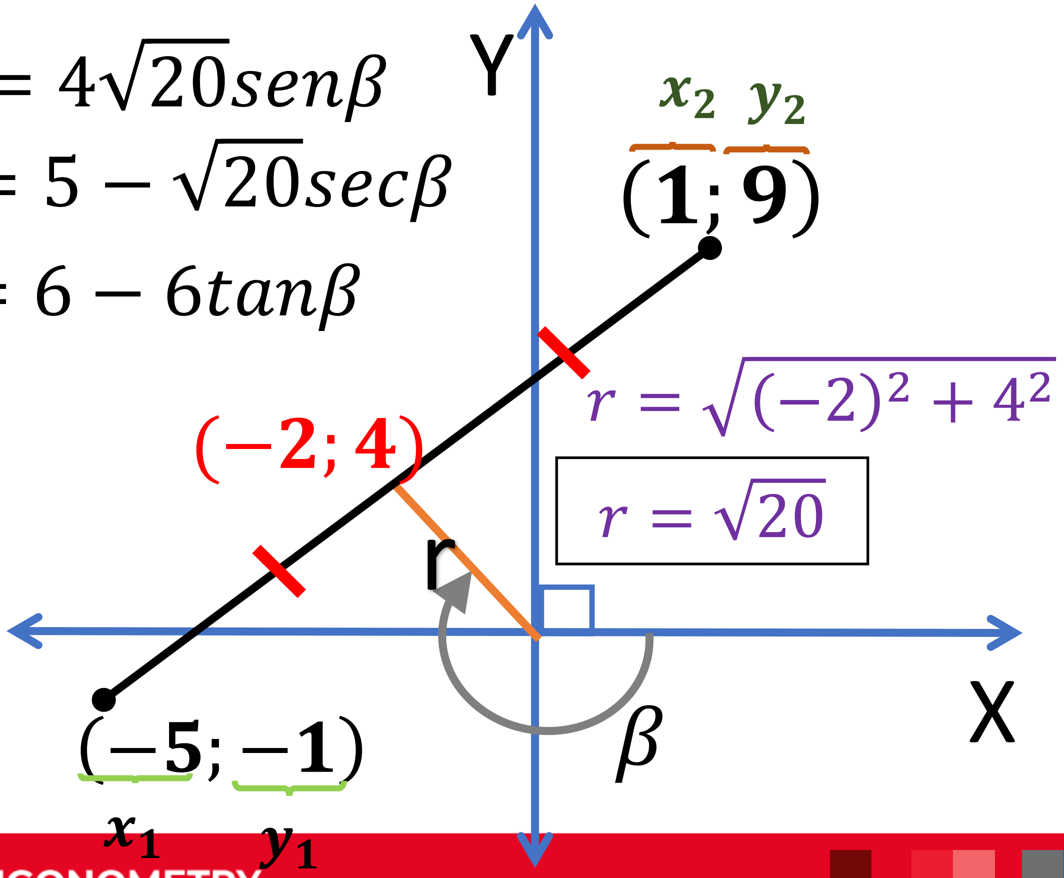
$$M = \cancel{\sqrt{13}}\left(\frac{-2}{\cancel{\sqrt{13}}} - \frac{-3}{\cancel{\sqrt{13}}}\right)$$

$$\boxed{\therefore Q = 1}$$

PROBLEMA – 6

Jaime ha rendido sus exámenes de Geometría, Álgebra y RM obteniendo las notas A, B y C, respectivamente. Si para obtener dichos valores se tiene que resolver el siguiente ejercicio, ¿en cuál de los cursos obtuvo la mayor calificación?

$$A = 4\sqrt{20}sen\beta$$
$$B = 5 - \sqrt{20}sec\beta$$
$$C = 6 - 6tan\beta$$



Resolución:

- Calculamos las coordenadas el punto medio:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5+1}{2} \Rightarrow x = -2$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-1+9}{2} \Rightarrow y = 4$$

- Piden:

$$A = 4\cancel{\sqrt{20}}\left(\frac{\mathbf{4}}{\cancel{\sqrt{20}}}\right) = 16$$

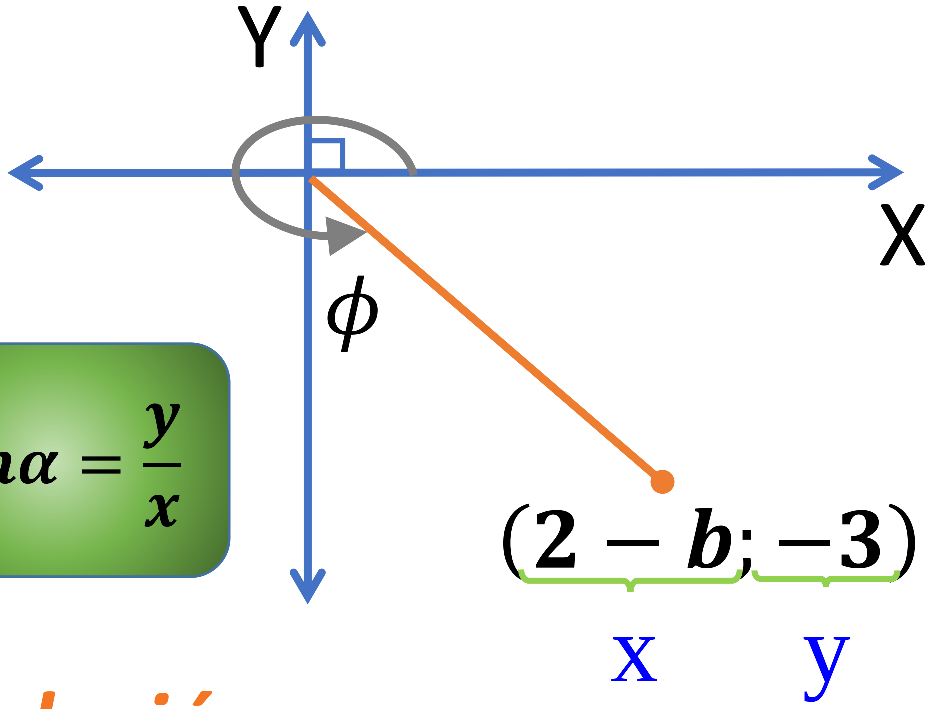
$$B = 5 - \sqrt{20}\left(\frac{\sqrt{20}}{-2}\right) = 5 - \frac{20}{-2} = 15$$

$$C = 6 - \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{4}{\cancel{-2}}\right) = \boxed{18}$$

Obtuvo mayor calificación en RM

PROBLEMA – 7

Del gráfico, si $\tan\phi = -\frac{3}{4}$, efectúe $R = b^3 - b^2$



$$tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Resolución:

- Del gráfico:

$$\tan\emptyset = \frac{-3}{2-b} \; \dots (i)$$

- Del dato:

$$\tan\emptyset = -\frac{3}{4} \; \dots (ii)$$

- Igualamos $(i) = (ii)$

$$\frac{\cancel{-}3}{2-b} = \frac{\cancel{-}3}{4}$$

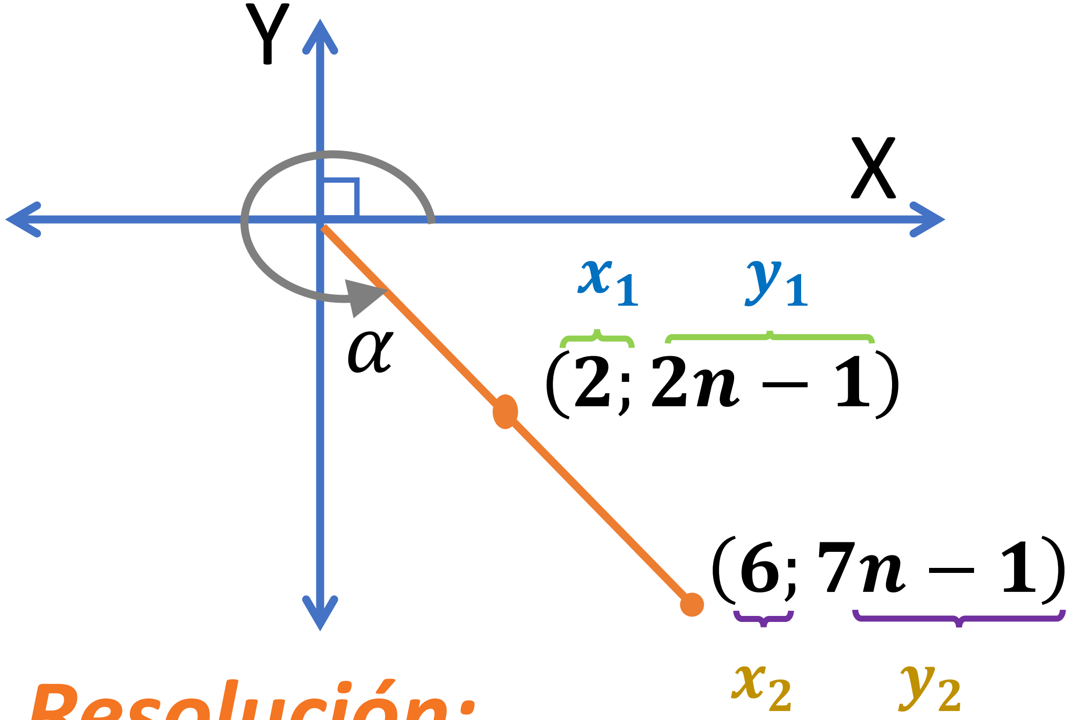
$$2 - b = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -2}$$

- Piden:

$$R = (-2)^3 - (-2)^2 \qquad \therefore \boxed{R = -12}$$

PROBLEMA – 8

A partir del gráfico, efectúe: $E = \sqrt{29}(sen\alpha + cos\alpha)$



Resolución:

- Observamos del gráfico:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2n-1}{2} = \frac{7n-1}{6}$$

- Igualamos:

$$6(2n-1) = 2(7n-1)$$

$$12n - 6 = 14n - 2$$

$$-4 = 2n$$

$$\boxed{n = -2} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \mathbf{y = -5} \end{cases}$$

- Calculando radio vector:

$$r = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} \Rightarrow \boldsymbol{r = \sqrt{29}}$$

- Piden:

$$E = \cancel{\sqrt{29}}\left(\frac{-5}{\cancel{\sqrt{29}}} + \frac{2}{\cancel{\sqrt{29}}}\right)$$

$$\therefore \boxed{E = -3}$$