ALGEBRA

CHAPTER 3

5th
SECONDARY

PRODUCTOS NOTABLES

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Matemático francés nació en Paris , vivio una infancia con pocos recursos económicos, pero logro superarse por sus dotes académicos

Su primer trabajo fue como ingeniero militar para **Napoleón**, ayudando a construir las defensas en Cherburgo. A los veinticuatro años volvió a París y dos más tarde demostró una conjetura de **Pierre de fermat** que no había podido ser probada por matemáticos tan insignes como **Euler** y Gauss.

Publicó un total de 789 trabajos, entre los temas que abordo destacan:

- Limite y continuidad de una función
- Funciones de variable compleja
- Cálculo integral
- Convergencia de series infinitas
- Ecuaciones diferenciales

Augustin-Louis Cauchy

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

PRODUCTOS NOTABLES

I) Desarrollo de un Binomio al Cuadrado

Trinomio cuadrado perfecto

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLOS:

1) $(5x+3)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + 3^2$
$= 25x^2 + 30x + 9$

2) $(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2$
$= 9x^2 - 24x + 16$

Observación

Identidad de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

II) Diferencia de cuadrados

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo:

$$(3\mathrm{a}+5\mathrm{b})(3a-5b)=9a^2-25b^2$$

III) Identidad de Stevin

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

$$(x+4)(x+6)=x^2+10x+24$$

$$(x+7)(x-9)=x^2-2x-63$$

IV) Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

identidad de cauchy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

V) Suma y diferencia de cubos

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

VI) Desarrollo de un Trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

VII) Identidades condicionales

$$Si : a + b + c = 0$$

$$se\ cumple:$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

Problema 1

Sabiendo que

$$a + b = 5$$

$$a.b = 2$$

Calcular:

$$a^4 + b^4$$

Resolución:

Del dato: $(a+b)^2 = 5^2$

$$a^2 + 2\underbrace{ab}_{2} + b^2 = 25$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = 21}$$

Elevamos al cuadrado nuevamente $(a^2+b^2)^2 = 21^2$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 441$$

$$a^4 + 2\underbrace{(ab)^2}_{4} + b^4 = 441$$

$$a^4 + b^4 = 433$$

$$\boxed{\therefore\ a^4 + b^4 = 433}$$

Problema 2

Si $a + a^{-1} = 2\sqrt{3}$

Calcular:

$$a^6 + a^{-6}$$

Recordar

Desarrollo de un Binomio al cuadrado

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Identidad de cauchy

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

Resolución:

Elevamos al cuadrado $(a + a^{-1})^2 = (2\sqrt{3})^2$

$$a^2 + 2\underbrace{aa^{-1}}_{1} + a^{-2} = 12$$

$$\boxed{a^2 + a^{-2} = 10}$$

Elevamos al cubo $(a^2 + a^{-2})^3 = 10^3$

$$a^6 + a^{-6} + 3\underbrace{a^2a^{-2}}_{1}\underbrace{(a^2 + a^{-2})}_{10} = 1000$$

$$a^6 + a^{-6} = 970$$

$$\boxed{\therefore\ a^6 + a^{-6} = 970}$$

Problema 3

Halle el valor de:

$$P = \sqrt[8]{80(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1}$$

Resolución:

Recordar

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^4-1)(3^4+1)}(3^8+1)(3^{16}+1)+1}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^8-1)(3^8+1)}(3^{16}+1)+1}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^{16}-1)(3^{16}+1)}+1}$$

$$P = \sqrt[8]{3^{32}\cancel{-1}+\cancel{1}}$$

$$P = \sqrt[\cancel{8}]{3^{\cancel{32}}} = 3^4$$

$$\therefore P = 81$$

Problema 4

Simplifique:

$$R = (x-4)(x-6)(x+3)(x+5) - (x^2-x-21)^2 + 90$$

Resolución:

Recordar

Identidad de Stevin

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Desarrollo de un Binomio al cuadrado

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Multiplicamos convenientemente:

$$R = \underbrace{(x-4)(x+3)}\underbrace{(x-6)(x+5)} - (x^2-x-21)^2 + 90$$

$$R = (x^2 - x - 12)(x^2 - x - 30) - (x^2-x-21)^2 + 90$$

Hacemos: $x^2 - x = m$

$$R = \underbrace{(m-12)(m-30)} - (m-21)^2 + 90$$

$$R = \cancel{m^2} - \cancel{42m} + 360 - (\cancel{m^2} - \cancel{42m} + 441) + 90$$

$$R = 360 - 441 + 90$$

$$\therefore R = 9$$

Problema 5

Jaimito le pregunta a su abuelo por su edad y este le contesta: “Si reduces:

$$M=\frac{(x+5)(x^2-5x+25)-(x-4)(x^2+4x+16)}{3}$$

obtendrás mi edad hace 20 años”.¿Cuál es la edad del abuelo de Jaimito?

Resolución:

Recordar

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$M=\frac{\boxed{(x+5)(x^2-5x+5^2)}-\boxed{(x-4)(x^2+4x+4^2)}}{3}$$

$$M=\frac{(\cancel{x^3}+5^3)-(\cancel{x^3}-4^3)}{3}$$

$$M=\frac{125+64}{3}=63$$

$\therefore$ *La edad del abuelo es* $63+20=83$ *años*

Problema 6

Dé el valor de:

J=$(1+x)(1-x+x^2)(1-x)(1+x+x^2)(1+x^6+x^{12})$

si x=$\sqrt[9]{3}$

Resolución:

Recordar

Suma y diferencia de cubos

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Diferencia de cuadrados

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$J=\underbrace{(1+x)(1-x+x^2)}\underbrace{(1-x)(1+x+x^2)}(1+x^6+x^{12})$$

$$J=\underbrace{(1+x^3)(1-x^3)}(1+x^6+x^{12})$$

$$J=\underbrace{(1-x^6)(1+x^6+x^{12})}$$

$$J=(1-x^{18})$$

$$J=1-\sqrt[9]{3}^{18}=1-3^2$$

$$\therefore J=-8$$

Problema 7

Si: a=$\sqrt{5}+\sqrt{3}-1$ b=$1-\sqrt{3}$ c=$-\sqrt{5}$

Reduzca: $M=\dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{12abc(ab+bc+ac)}$

Resolución:

Recordar

Si a+b+c=0

Se cumple:

$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\left.\begin{aligned} a &= \cancel{\sqrt{5}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{1} \\ b &= \cancel{1}-\cancel{\sqrt{3}} \\ c &= -\cancel{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} +$$

$$\boxed{a+b+c=0}$$

$$M=\frac{\boxed{(a^3+b^3+c^3)}\boxed{(a^2+b^2+c^2)}}{12abc(ab+bc+ac)}$$

$$M=\frac{(3\cancel{abc})(-2\cancel{(ab+bc+ac)})}{12\cancel{abc}\cancel{(ab+bc+ac)}}$$

$$M=\frac{-6}{12}$$

$$\boxed{\therefore M=-\frac{1}{2}}$$

Problema 8

Si se sabe que: $a+b+c=12$ y $ab+bc+ac=60$

Halle el valor de:

$$R=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$$

Resolución:

$$R=\underbrace{(a+b)^2}+\underbrace{(a+c)^2}+\underbrace{(b+c)^2}$$

$$R=a^2+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2+b^2+2bc+c^2$$

Reduciendo términos:

$$R=2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$R=2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+ac+bc)$$

Cálculo de $a^2+b^2+c^2$

Desarrollo de un Trinomio al cuadrado

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)}$$

$$12^2=a^2+b^2+c^2+2(60)$$

$$\boxed{24=a^2+b^2+c^2} \quad \ldots(\alpha)$$

Reemplazando α *en* R:

$$R=2(24)+2(60)$$

$$R=48+120$$

$$\boxed{\therefore R=168}$$