ALGEBRA

Chapter 08

4th

RADICACIÓN

SACO OLIVEROS

HELICO

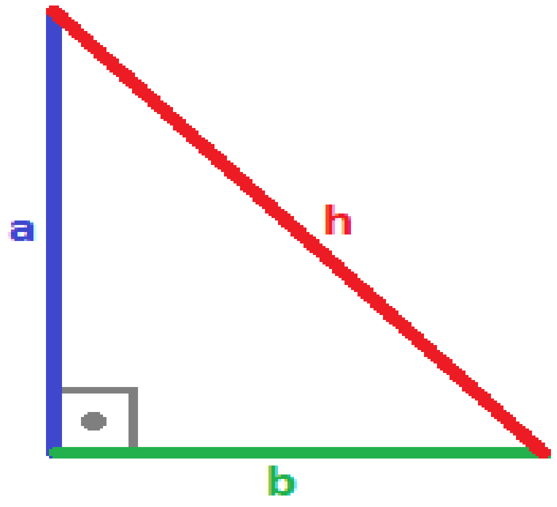
MOTIVATING

SACO OLIVEROS

SABIAS QUE

El gran sabio griego Pitágoras de Samos y sus discípulos, los llamados pitagóricos, estaba dominada por sus ideas filosóficas acerca del número. Decían que el número natural y las proporciones entre números naturales gobernaban todo cuanto existía.
Un descubrimiento hecho por los mismos pitagóricos demostró que esta afirmación era falsa. Descubrieron la existencia de un número que no era natural y tampoco se podía expresar como fracción alguna.
Todo comenzó con el llamado Teorema de Pitágoras. Se llama Teorema a toda afirmación matemática importante que es demostrada de manera rigurosa, irrefutable. El Teorema de Pitágoras afirma que, en todo triángulo rectángulo, el lado mayor, llamado hipotenusa, elevado al cuadrado, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, llamados catetos.
Usando un método muy sencillo, los pitagóricos intentaron encontrar números naturales m,n tales que C=m\n sin lograrlo nunca.

$$\boxed{h^2 = a^2 + b^2}$$



Despejando,

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{h^2 - a^2}$$

HELICO THEORY

CHAPTHE
R 08

SACO OLIVEROS

RADICACIÓN

DEFINICIÓN

Es aquella operación matemática a través de la cual, dados dos elementos (radicando e índice), se calcula un tercer elemento llamado raíz n-ésima del radicando

$$\sqrt[n]{A} = B$$

Donde:

$n \rightarrow es\ el\ indice\ (n \in N) \wedge n \geq 2$

$A \rightarrow es\ el\ radicando$

$B \rightarrow es\ la\ raíz\ n-ésima\ de\ A$

Teoremas

$$\sqrt[n]{A.B} = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n.p]{A^p}$$

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

$$(\sqrt[n]{A})^p = \sqrt[n]{A^p}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[m.n]{A}$$

$$A^p.\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^{p.n}.B}$$

Radicales Simples

Son las expresiones afectadas por un solo radical y en el radicando no hay adición ni sustracción de irracionales

Ejemplo:

$$\sqrt{27}\ ,\ \sqrt[5]{19}\ ,\ \sqrt[10]{208}$$

Radicales Dobles

Se caracterizan porque su radicando se encuentran otros radicales relacionados con las operaciones de adición y sustracción

Ejemplo:

$$\sqrt{5+\sqrt{2}} \quad , \quad \sqrt[3]{3-2\sqrt{3}}$$

Transformación de un radical doble en simple

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$$

Donde:

$$\boxed{C = \sqrt{A^2 - B}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{\frac{10+C}{2}} + \sqrt{\frac{10-C}{2}}$$

Calculemos C

$$C = \sqrt{10^2 - 84} = 4$$

$$\sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{\frac{10+4}{2}} + \sqrt{\frac{10-4}{2}} = \boxed{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

Método Práctico

$$\sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{10+2\sqrt{21}} = \boxed{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

$$7 + 3 \qquad 7 \times 3$$

RACIONALIZACIÓN

Es aquel proceso que permite transformar una fracción con denominador irracional en otra equivalente con denominador racional.

*Tomaremos en cuenta 2 de los casos

Caso 1

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}} = \underbrace{\left(\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}\right)\left(\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}\right)}_{\sqrt[n]{B^m . B^{n-m}}} = \boxed{\frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt[5]{2^2}}\right)\left(\frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}}\right) = \frac{\cancel{2}.\sqrt[5]{2^3}}{\cancel{2}} = \sqrt[5]{2^3}$$

Caso 2

$$\frac{N}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \underbrace{\left(\frac{N}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}}\right)\left(\frac{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}\right)}_{\sqrt{A}^2 - \sqrt{B}^2} = \boxed{\frac{N(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B}}$$

Ejemplo:

$$\frac{10}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \underbrace{\left(\frac{10}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}\right)}_{\sqrt{7}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{\cancel{10}(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{\cancel{5}}$$

$$\boxed{2(\sqrt{7} - \sqrt{2})}$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHE

R 08

SACO OLIVEROS

1. Halle el valor de:

$$K=\frac{\sqrt{200}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{18}-\sqrt{2}}$$

RESOLUCIÓN

$$K=\frac{\sqrt{200}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{18}-\sqrt{2}}$$

$$K=\frac{\sqrt{100.2}+\sqrt{36.2}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{9.2}-\sqrt{2}}$$

Aplicamos el teorema

$$\boxed{\sqrt[n]{A.B}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}}$$

$$K=\frac{\sqrt{100}.\sqrt{2}+\sqrt{36}.\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{9}.\sqrt{2}-\sqrt{2}}$$

$$K=\frac{10\sqrt{2}+6\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2.3\sqrt{2}-\sqrt{2}}$$

luego

$$K=\frac{13\cancel{\sqrt{2}}}{5\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{K=\frac{13}{5}}$$

2. Efectúe:

$$P=\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[2n]{5-2\sqrt{6}}$$

RESOLUCIÓN

$$P=\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,.\,\underbrace{\sqrt[2n]{5-2\sqrt{6}}}$$

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[m.n]{A}}$$

$$P=\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[n]{\underbrace{\sqrt[2]{5-2\sqrt{6}}}}$$

Radical Doble
(Método Practico)

$$P=\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[n]{\sqrt[2]{5-2\sqrt{6}}}$$

$3 + 2 \quad 3 \times 2$

$$P=\underbrace{\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,.\,\sqrt[n]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{A.B}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}}$$

$$P=\sqrt[n]{\underbrace{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}}$$

Diferencia de cuadrados

$$P=\sqrt[n]{\cancel{\sqrt{3}}^{\cancel{2}}-\cancel{\sqrt{2}}^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{P=1}$$

3. Indique el valor equivalente de:

$$K = \sqrt{13 + 2\sqrt{40}} + \sqrt{14 - 2\sqrt{45}}$$

RESOLUCIÓN

Aplicamos Método practico de Radical Doble

$$K = \sqrt{13 + 2\sqrt{40}} + \sqrt{14 - 2\sqrt{45}}$$

$$8 + 5 \quad 8 \times 5 \quad 9 + 5 \quad 9 \times 5$$

$$K = \sqrt{8} + \cancel{\sqrt{5}} + \sqrt{9} - \cancel{\sqrt{5}}$$

$$K = 2\sqrt{2} + 3$$

$$\boxed{K = 2\sqrt{2} + 3}$$

4. Determine el valor de:

$$T=\sqrt{8-\sqrt{60}}-\sqrt{12+\sqrt{140}}+\sqrt{10+\sqrt{84}}$$

RESOLUCIÓN

$$T=\sqrt{8-\sqrt{4.15}}-\sqrt{12+\sqrt{4.35}}+\sqrt{10+\sqrt{4.21}}$$

Aplicamos el teorema

$$\boxed{\sqrt[n]{A.B}=\sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{B}}$$

$$T=\sqrt{8-\sqrt{4}\sqrt{15}}-\sqrt{12+\sqrt{4}\sqrt{35}}+\sqrt{10+\sqrt{4}\sqrt{21}}$$

$$T=\sqrt{8-2\sqrt{15}}-\sqrt{12+2\sqrt{35}}+\sqrt{10+2\sqrt{21}}$$

5 + 3 5 x 3 7 + 5 7 x 5 7 + 3 7 x 3

$$T=(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})-(\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{5}})+(\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{3}})$$

$$\boxed{T=0}$$

5. El costo de 1 kilo de arroz (en soles) se obtiene de reducir:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}}-2\sqrt{2}$$

¿Cuál es el costo de un saco de arroz que contiene 25 kilos?

RESOLUCIÓN

$$\sqrt{17+\underbrace{2.6\sqrt{2}}}-2\sqrt{2}$$

$$\boxed{A^{p}.\sqrt[n]{B}=\sqrt[n]{A^{p.n}.B}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17+2\sqrt{2.6^{2}}}-2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17+2\sqrt{72}}-2\sqrt{2}$$

Método practico de Radical Doble

$$9+8 \qquad 9\times 8$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}$$

$$3+\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{2\sqrt{2}}$$

Costo por 1 kilo De arroz $= S/.3$

Costo de 25 kilos de arroz = S/.75

6. Efectúe:

$$E = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$$

RESOLUCIÓN

$$E = \underbrace{\frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$$

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}} = \frac{A.\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}$$

$$E = \frac{5\sqrt[2]{5^{2-1}}}{5} + \frac{3\sqrt[2]{2^{2-1}}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$$

$$E = \frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$$

$$E = \cancel{\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{E = 2\sqrt{2}}$$

7. Racionalice:

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}-\sqrt{7}$$

RESOLUCIÓN

$$\underbrace{\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}}-\sqrt{7}$$

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}=\frac{N(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}}$$

$$\Rightarrow \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}+\frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2}-\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\cancel{3}}+\frac{\cancel{5}(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{\cancel{5}}-\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{2}})+(\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{2}})-\cancel{\sqrt{7}}$$

$$\boxed{\sqrt{5}}$$

8. Luego de reducir:

$$M = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$

Calcule: $\sqrt[3]{5M+4}$

RESOLUCIÓN

$$M = \underbrace{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{\frac{N}{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}} = \frac{N(\sqrt{A}\mp\sqrt{B})}{A-B}}$$

$$M = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5}))(\sqrt{7}+\sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$$

$$M = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{\underbrace{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}_{2}} + \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{\underbrace{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}_{2}}$$

$$M = \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{2}$$

En el numerador usamos Identidad de Legendre

$$M = \frac{\cancel{2}[(\sqrt{7})^2+(\sqrt{5})^2]}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{M = 12}$$

Nos piden

$$\sqrt[3]{5M+4} = \sqrt[3]{5(12)+4}$$

$$\boxed{4}$$