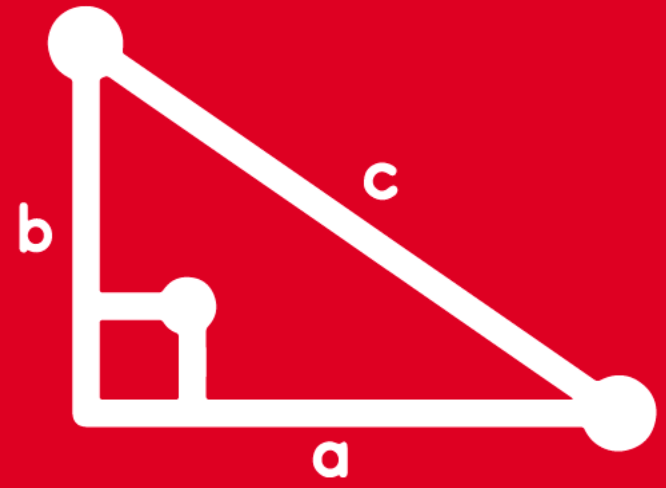
TRIGONOMETRY

Chapter 24

5th
SECONDARY



Resolución de triángulos Oblicuángulos

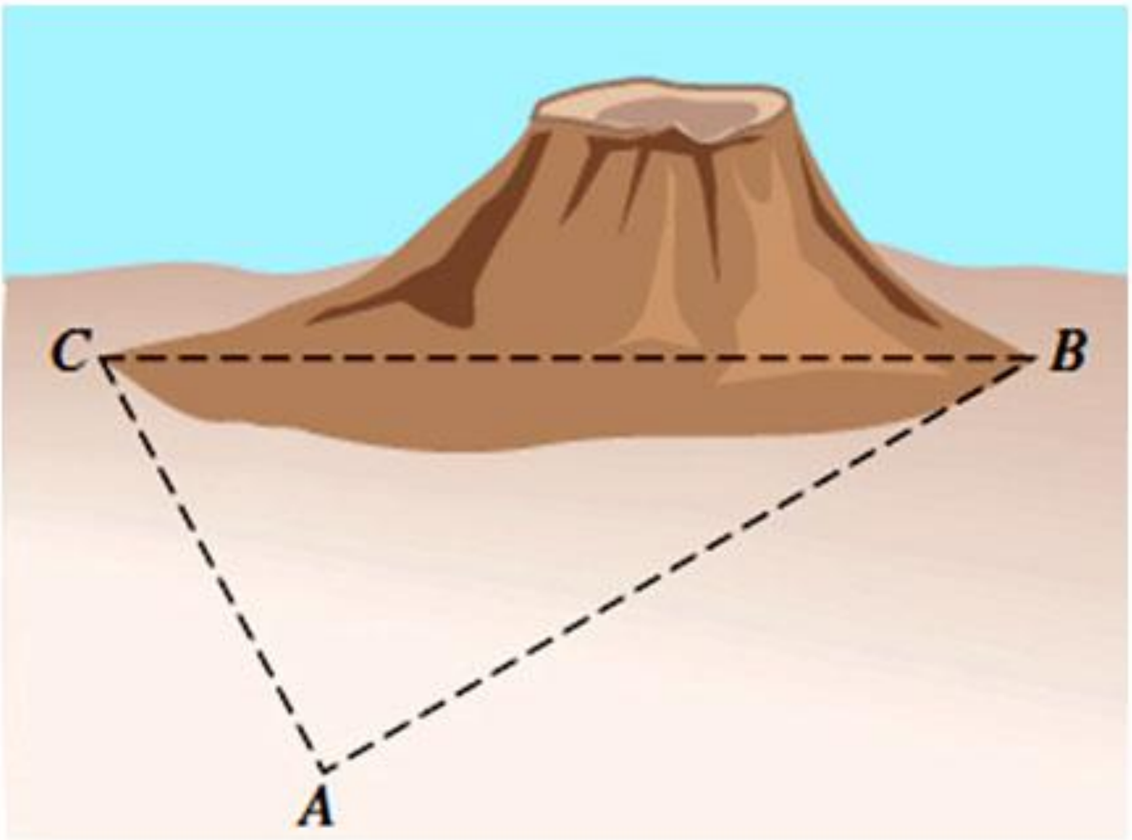
SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

La Ley de senos y Ley de cosenos se usan para calcular los lados y ángulos de un triángulo.

Ejemplo:

Un geólogo desea determinar la distancia BC a través de la base del cono de ceniza volcánica . Para ello logra medir las distancias AC y AB obteniendo los valores de 8 km y 10 km respectivamente , además la medida del ángulo BAC es 53°.



¿Podrías calcular la distancia BC pedida?

HELICO THEORY

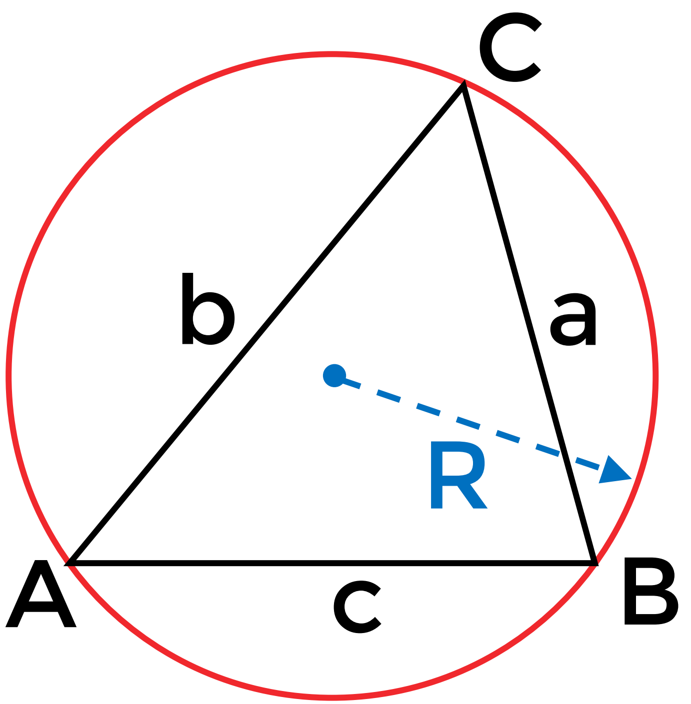
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

A. LEY DE SENOS:

En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$$

R es el circunradio del ΔABC



También:

$a = 2R\text{sen}A$ $\quad$ $b = 2R\text{sen}B$ $\quad$ $c = 2R\text{sen}C$

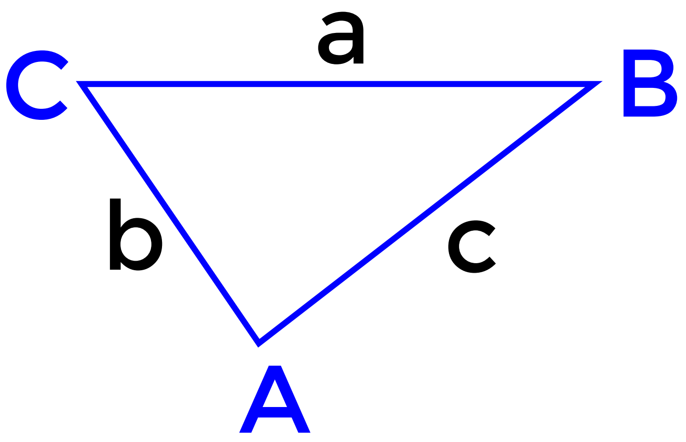
B. LEY DE COSENOS:

En todo triángulo, un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que estos forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \quad \ldots (*)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$



... en la HELICOMOTIVACIÓN

$b = 8$; $c = 10$; $A = 53°$; ¿a?

Usando (*) :

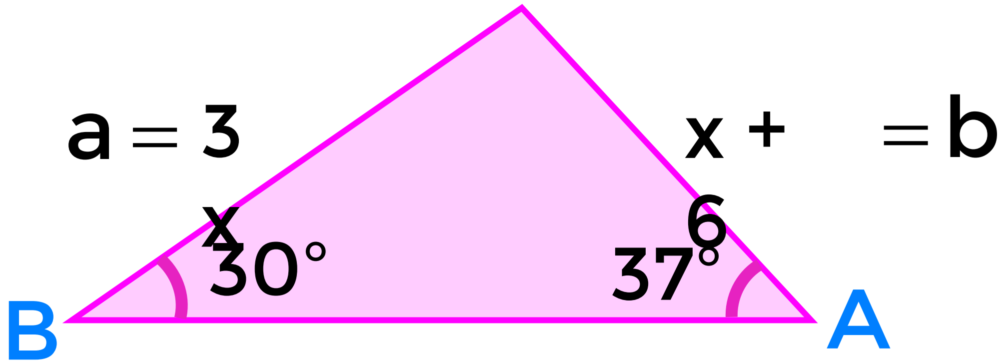
$$a^2 = (8)^2 + (10)^2 - 2(8)(10).\cos 53°$$

$$a^2 = 68 \rightarrow a = \sqrt{68} = 8{,}25$$

$\therefore$ La distancia BC es 8,25km

HELICOPRACTICE 1

De la figura, calcule el valor de x.



Resolución:

Ley de Senos:

$$\boxed{\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{\text{sen}37^0} = \frac{x+6}{\text{sen}30^0}$$

$$\Rightarrow 3x.\,\text{sen}30° = (x+6).\,\text{sen}37°$$

$$\Rightarrow \cancel{3}x.\frac{1}{2} = (x+6).\frac{\cancel{3}}{5}$$

$$\Rightarrow 5x = 2(x+6)$$

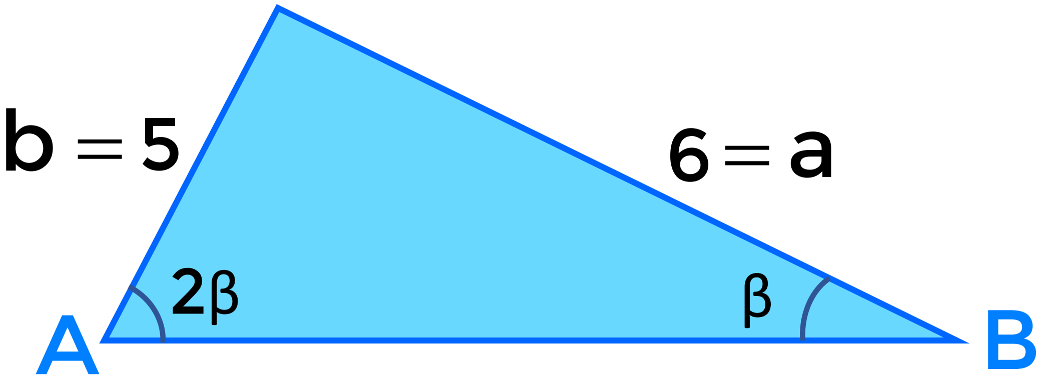
$$\Rightarrow 5x = 2x + 12$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$\boxed{\therefore\ x = 4}$$

HELICOPRACTICE 2

De la figura, calcule $T = \sec(\beta + 7°)$



Resolución:

Ley de senos :

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}} \Rightarrow \frac{6}{sen2\beta} = \frac{5}{sen\beta}$$

Usando Identidad Ángulo doble :

$$\frac{6}{2\cancel{sen\beta}\cos\beta} = \frac{5}{\cancel{sen\beta}}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2\cos\beta} = 5 \quad \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \beta = 53°$$

Piden: $T = \sec(\beta + 7°)$

$$\Rightarrow T = \sec(53° + 7°) = \sec 60°$$

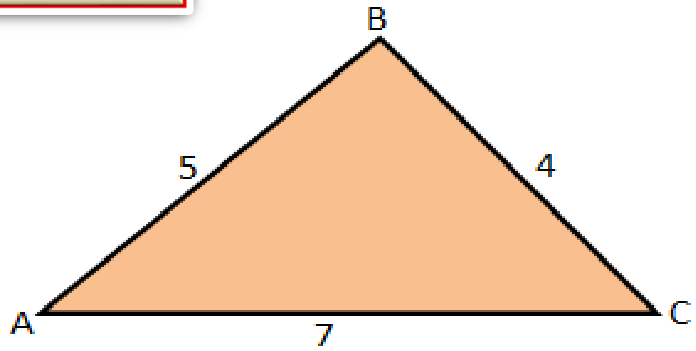
$$\boxed{\therefore T = 2}$$

HELICOPRACTICE 3

En un triángulo ABC, se cumple AB = 5u, BC = 4u y AC = 7u. Calcule el valor de la expresión:

$$E=\frac{senB(senA+senC)}{sen^2B}$$

Resolución



Ley de senos :

$$\frac{4}{senA}=\frac{7}{senB}=\frac{5}{senC}=2R$$

$$senA=\frac{4}{2R}\ ;\ senB=\frac{7}{2R}\ ;\ senC=\frac{5}{2R}$$

Reemplazando en E :

$$E=\frac{\frac{7}{2R}\left(\frac{4}{2R}+\frac{5}{2R}\right)}{\left(\frac{5}{2R}\right)^2}\Rightarrow E=\frac{\frac{63}{\cancel{4R^2}}}{\frac{25}{\cancel{4R^2}}}$$

$$\therefore\ E=\frac{63}{25}$$

HELICOPRACTICE 4

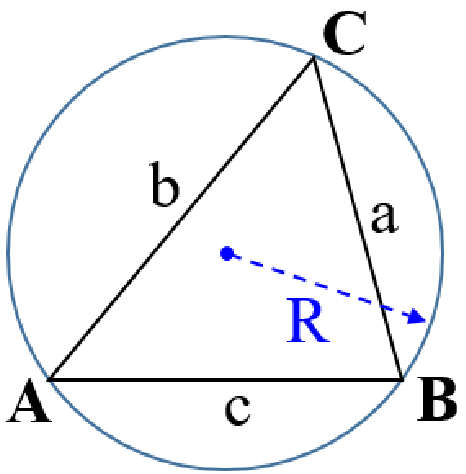
Calcule la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC si:

$$\frac{2a}{\text{sen}A}+\frac{3b}{\text{sen}B}-\frac{c}{\text{sen}C}=16\text{m}$$

Resolución

Ley de senos:

$$a = 2RSenA$$
$$b = 2RSenB$$
$$c = 2RSenC$$



En el DATO :

$$\frac{2(2R\cancel{\text{sen}A})}{\cancel{\text{sen}A}}+\frac{3(2R\cancel{\text{sen}B})}{\cancel{\text{sen}B}}-\frac{2R\cancel{\text{sen}C}}{\cancel{\text{sen}C}}=16\text{m}$$

$\Rightarrow 2(2R)+3(2R)-(2R)=16\text{m}$

$\Rightarrow 8R=16\text{m}$

$\Rightarrow R=2\text{m}$

piden :

Longitud de la circunferencia circunscrita

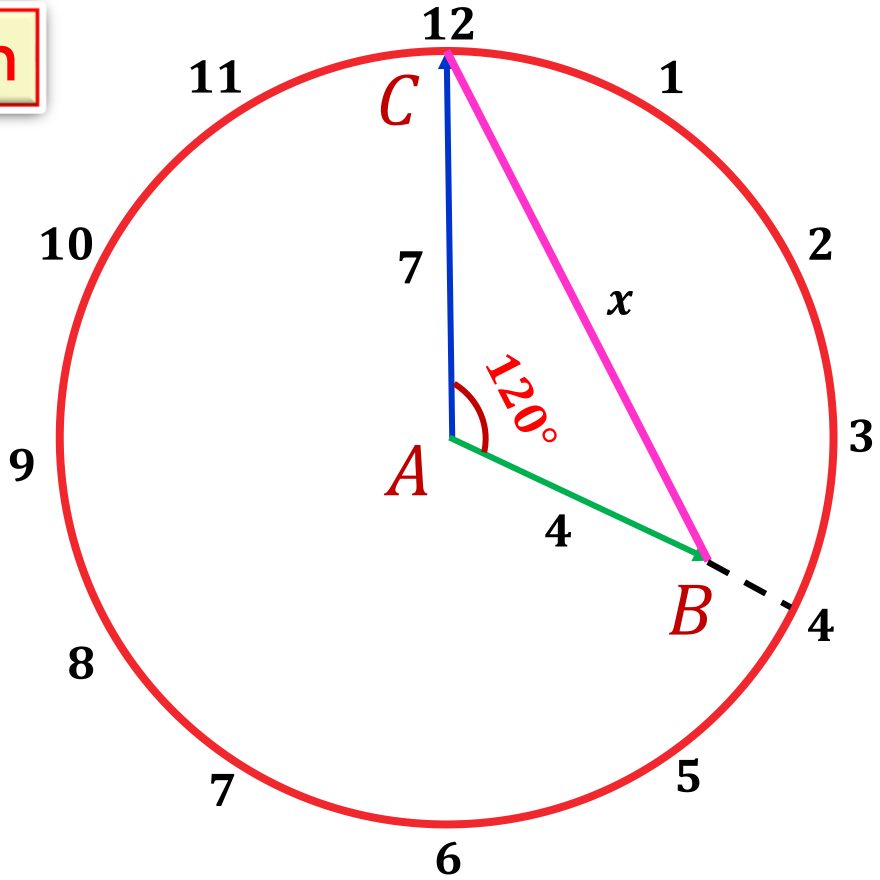
$L_{\odot}=2\pi R \Rightarrow L_{\odot}=2\pi(2)$

$$\therefore\ L_{\odot}=4\pi\text{m}$$

HELICOPRACTICE 5

Las manecillas de un reloj (horario y minutero) miden 4 cm y 7 cm respectivamente. Calcule la distancia entre sus puntas a las 4 de la tarde.

Resolución



Ley de Cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$x^2 = 7^2 + 4^2 - 2(7)(4)\cos 120°$$

$$x^2 = 49 + 16 - 56\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 65 + 28$$

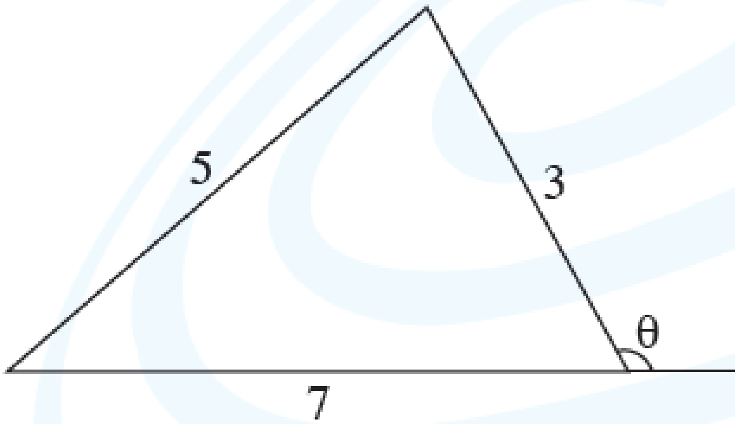
$$x^2 = 93$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{93}$$

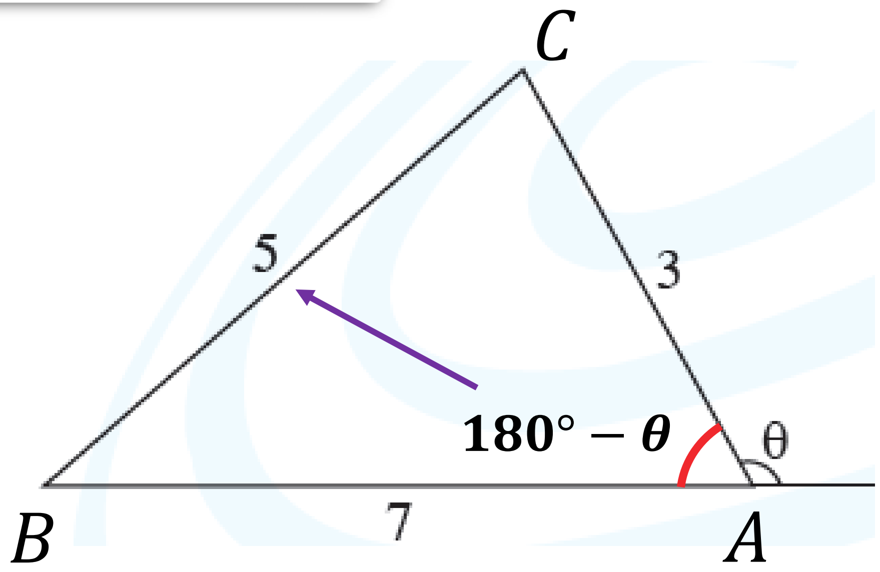
$$\therefore x = \sqrt{93}\text{cm}$$

HELICOPRACTICE 6

Del gráfico, calcule secθ.



Resolución



Ley de Cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$5^2 = 3^2 + 7^2 - 2(3)(7)\cos(180° - \theta)$$

$$25 = 9 + 49 - 42(-\cos\theta)$$

$$25 = 58 + 42\cos\theta$$

$$-33 = 42\cos\theta$$

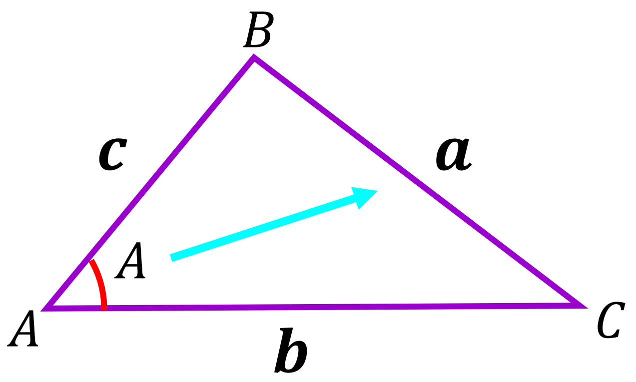
$$\cos\theta = -\frac{33}{42} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{11}{14}$$

$$\therefore \sec\theta = -\frac{14}{11}$$

HELICOPRACTICE 7

Halle la medida del ángulo A en un triángulo ABC, de lados a, b y c; si se cumple $(a-b)(a+b)=c^2+\sqrt{3}bc$

Resolución



Dato:

$$(a+b)(a-b)=c^2+\sqrt{3}bc$$

$$a^2-b^2=c^2+\sqrt{3}bc$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc\ldots(\mathrm{I})$$

Ley de cosenos:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A}\ldots(\mathrm{II})$$

$si: x+y=180°$

$\cos x=-\cos y$

Igualando (I) y (II):

$$\cancel{b^2+c^2}+\sqrt{3}bc=\cancel{b^2+c^2}-2bc.\cos A$$

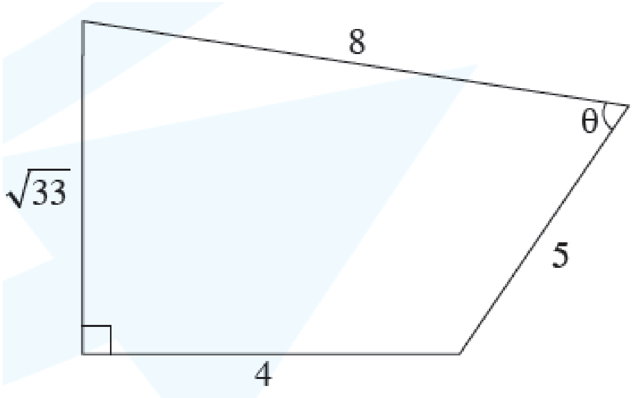
$$\Rightarrow \sqrt{3}\cancel{bc}=-2\cancel{bc}.\cos A$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}=-2\cos A \quad \Rightarrow \cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

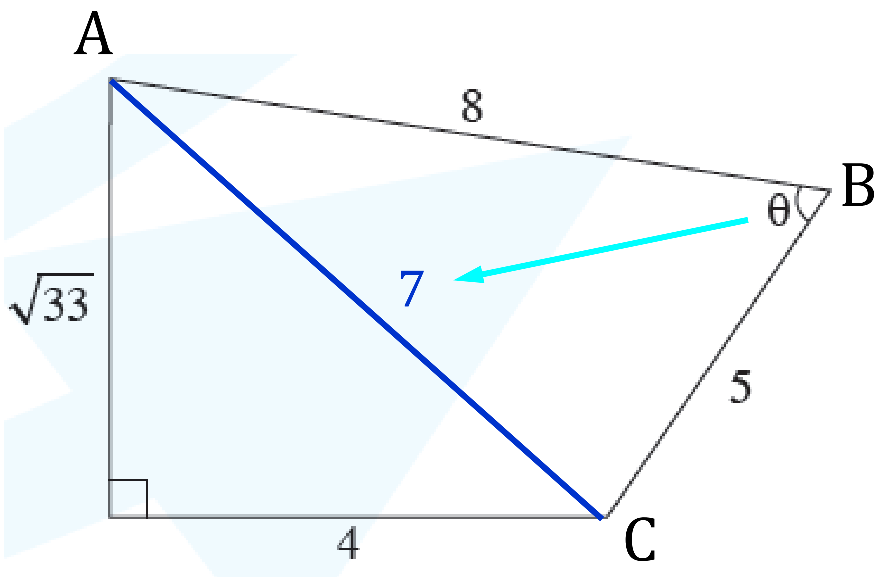
$$\boxed{\therefore A=150°}$$

HELICOPRACTICE 8

De la figura, calcule cosθ.



Resolución



Δ ABC: Ley de Cosenos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5)(8)\cos\theta$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + 25 - 80\cos\theta$$

$$\Rightarrow 80\cos\theta = 40$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{40}{80}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$$