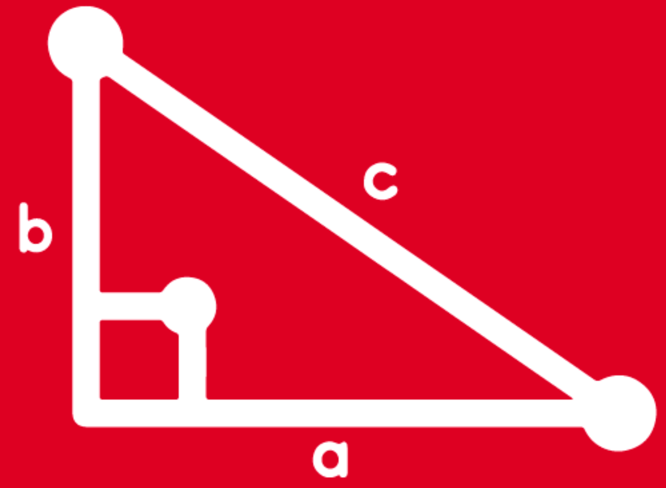
TRIGONOMETRY

Chapter 04 SESSION 2



4th
SECONDARY

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

SACO OLIVEROS

Que se te viene a la mente cuando escuchas la palabra

…RAZÓN

Excelente!!

Una razón es la comparación entre dos cantidades.

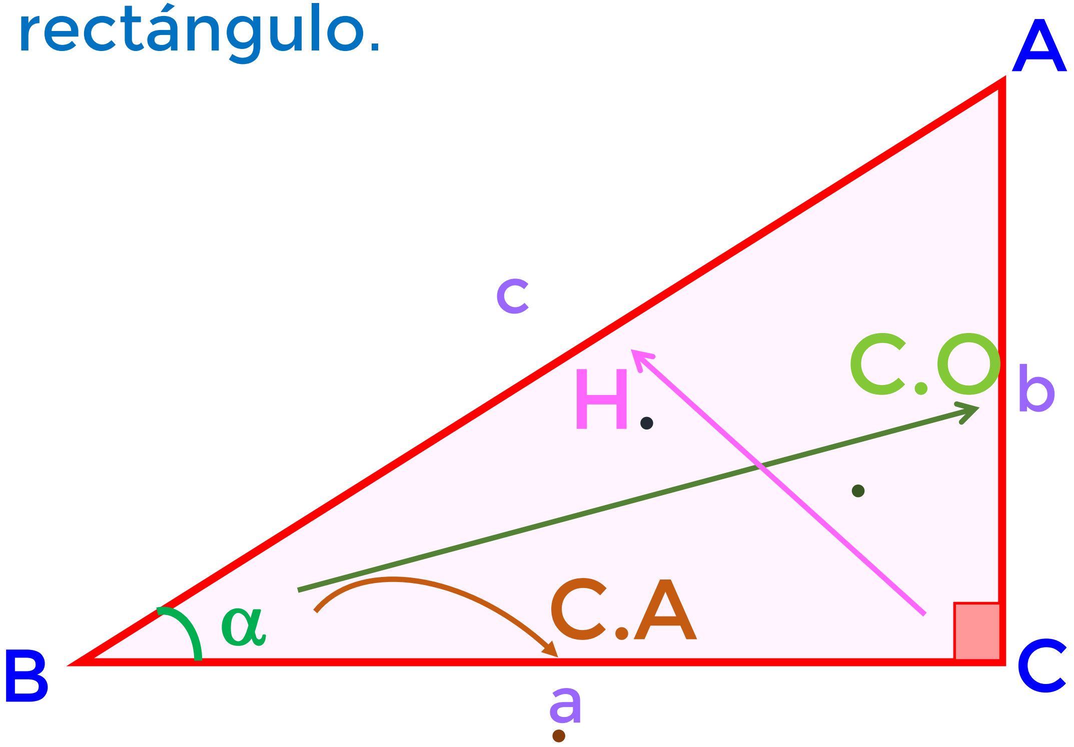
¿Podremos establecer razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?

... ¿Qué opinas?

Para aclarar tus ideas, Veamos

Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

Es el cociente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.



Teorema de Pitágoras

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Luego:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto al } \measuredangle\, \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{C.O.}{H.}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente al } \measuredangle\, \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{C.A.}{H.}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto al } \measuredangle\, \alpha}{\text{cateto adyacente al } \measuredangle\, \alpha} = \frac{C.O.}{C.A.}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cateto adyacente al } \measuredangle\, \alpha}{\text{cateto opuesto al } \measuredangle\, \alpha} = \frac{C.A.}{C.O.}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al } \measuredangle\, \alpha} = \frac{H.}{C.A.}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al } \measuredangle\, \alpha} = \frac{H.}{C.O.}$$

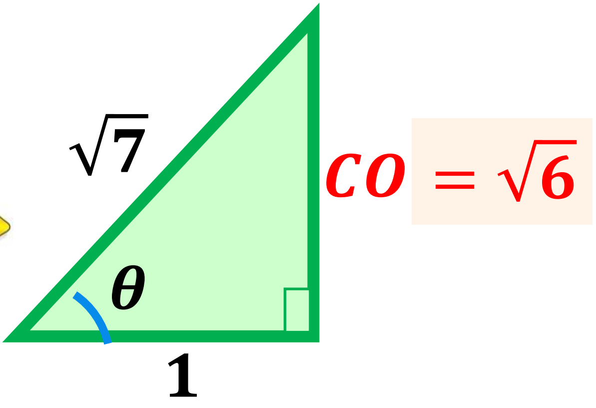
1. Si $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, siendo "$\theta$" un ángulo agudo, efectúe

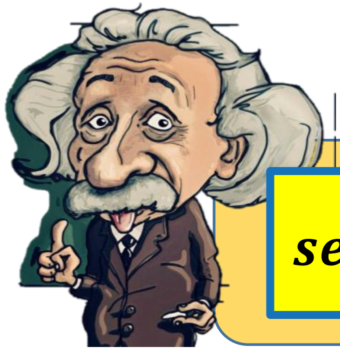
$$E = \sec^2\theta + \sqrt{42}\,\text{sen}\,\theta$$

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{CA}{H}$$





Recordar:

$$sen\theta = \frac{CO}{H} \qquad cos\theta = \frac{CA}{H} \qquad sec\theta = \frac{H}{CA}$$

Teorema de Pitágoras:

$$(CO)^2 + (1)^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$(CO)^2 + 1 = 7$$

$$(CO)^2 = 6 \Rightarrow CO = \sqrt{6}$$

Piden:

$$E = \sec^2\theta + \sqrt{42}\,\text{sen}\,\theta$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{7}}{1}\right)^2 + \sqrt{42} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)$$

$$E = 7 + \sqrt{6}\cancel{\sqrt{7}} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{\cancel{\sqrt{7}}}\right)$$

$$E = 7 + 6$$

$$\therefore E = 13$$

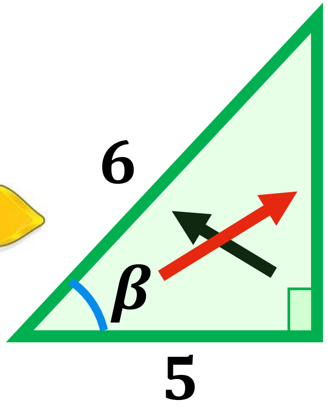
2. Si $\sec\beta = 1{,}2$; siendo "β" un ángulo agudo, efectúe

$$L = \sqrt{11}(\cot\beta + \csc\beta)$$

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$\sec\beta = \frac{6}{5} = \frac{H}{CA}$$



$$CO = \sqrt{11}$$

Recordar:

$$\cot\theta = \frac{CA}{CO} \qquad \sec\theta = \frac{H}{CA} \qquad \csc\theta = \frac{H}{CO}$$

Teorema de Pitágoras:

$$(CO)^2 + (5)^2 = (6)^2$$

$$(CO)^2 + 25 = 36$$

$$(CO)^2 = 11 \Rightarrow CO = \sqrt{11}$$

Piden:

$$L = \sqrt{11}(\cot\beta + \csc\beta)$$

$$L = \cancel{\sqrt{11}} \times \left(\frac{5}{\cancel{\sqrt{11}}} + \frac{6}{\cancel{\sqrt{11}}}\right)$$

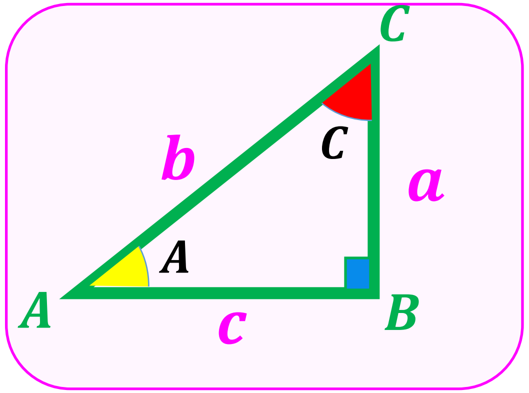
$$L = 5 + 6$$

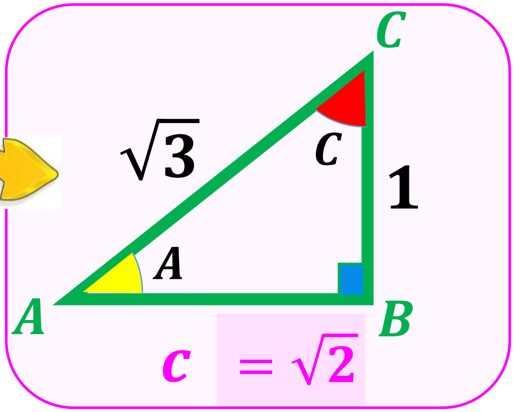
$$\boxed{\therefore L = 11}$$

3. En el triángulo rectángulo (m∡B=90°) se cumple que $\dfrac{\text{sen}\,A}{\sec C}=\dfrac{1}{3}$, efectúe

$$E=\sqrt{3}\csc A+\tan^2 C$$

RESOLUCIÓN:





Del dato: $\dfrac{sen\,A}{sec\,C}=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Teorema de Pitágoras:

$$(c)^2+(1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$(c)^2+1=3$$

$$(c)^2=2 \Rightarrow c=\sqrt{2}$$

Piden:

$$E=\sqrt{3}\csc A+\tan^2 C$$

$$E=\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2$$

$$E=3+2$$

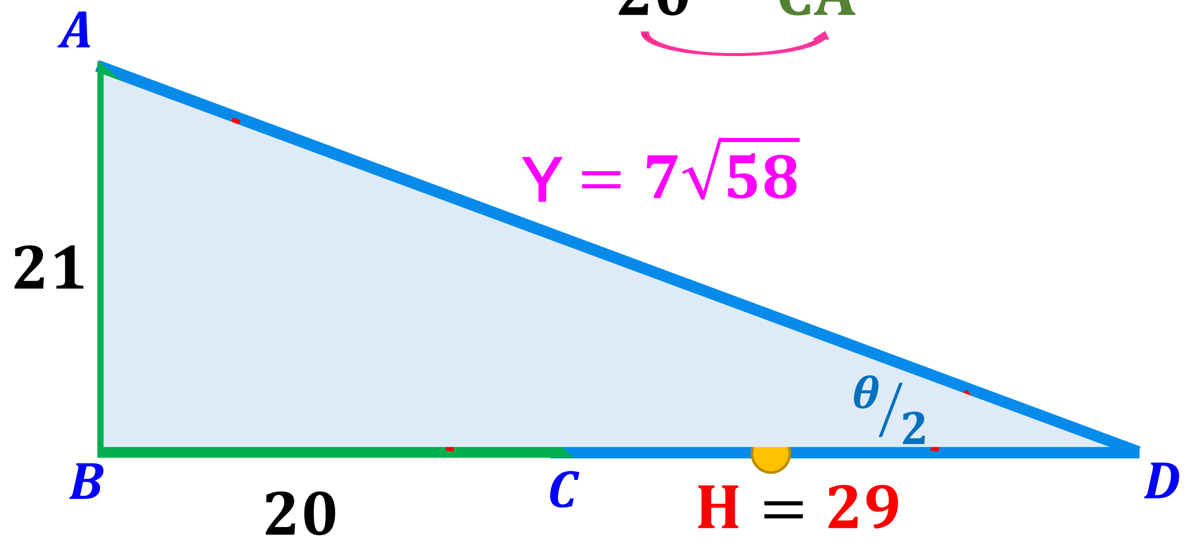
$$\boxed{\therefore E=5}$$

4. Si $\tan\theta = \dfrac{21}{20}$, donde θ es un ángulo agudo, efectúe

$$Q=\sqrt{58}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

RESOLUCIÓN:

Del dato: $\tan\theta = \dfrac{21}{20} = \dfrac{CO}{CA}$



En el ΔABC (Por el Teorema de Pitágoras)

$$(H)^2 = (21)^2 + (20)^2$$

$$(H)^2 = 441 + 400$$

$$H = \sqrt{841} \Rightarrow H = 29$$

En el ΔABD (Por el Teorema de Pitágoras)

$$(Y)^2 = (21)^2 + (49)^2$$

$$(Y)^2 = 441 + 2401$$

$$Y = \sqrt{2842} \Rightarrow Y = 7\sqrt{58}$$

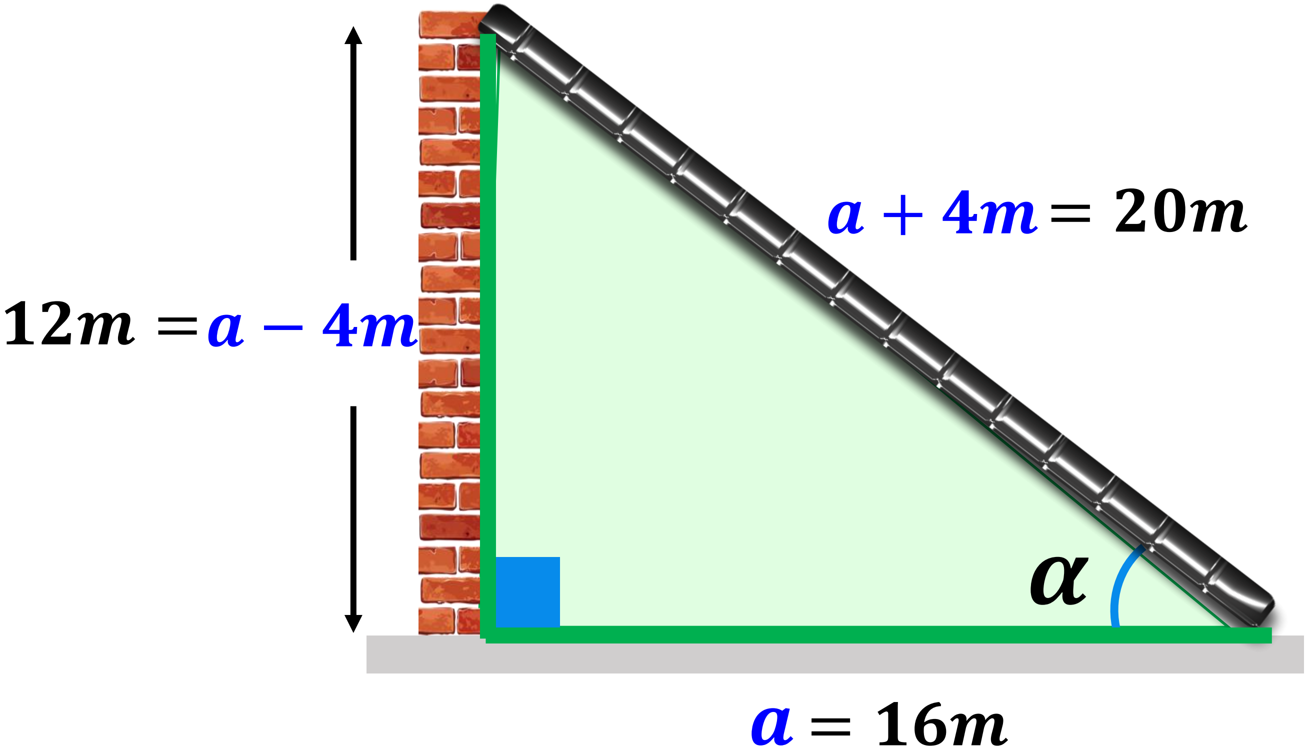
Piden:

$$Q = \sqrt{58}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$Q = \cancel{\sqrt{58}} \times \left(\frac{49}{7\cancel{\sqrt{58}}}\right)$$

$$\therefore Q = 7$$

5. Una barra metálica descansa sobre una pared lisa, tal como se muestra en la figura. Calcule el producto del coseno y la tangente de α.



RESOLUCIÓN:

Recordar:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$(a)^2 + (a-4)^2 = (a+4)^2$$

$$(a)^2 = (a+4)^2 - (a-4)^2$$

$$(\cancel{a})^2 = 4(\cancel{a})(4) \Rightarrow a = 16$$

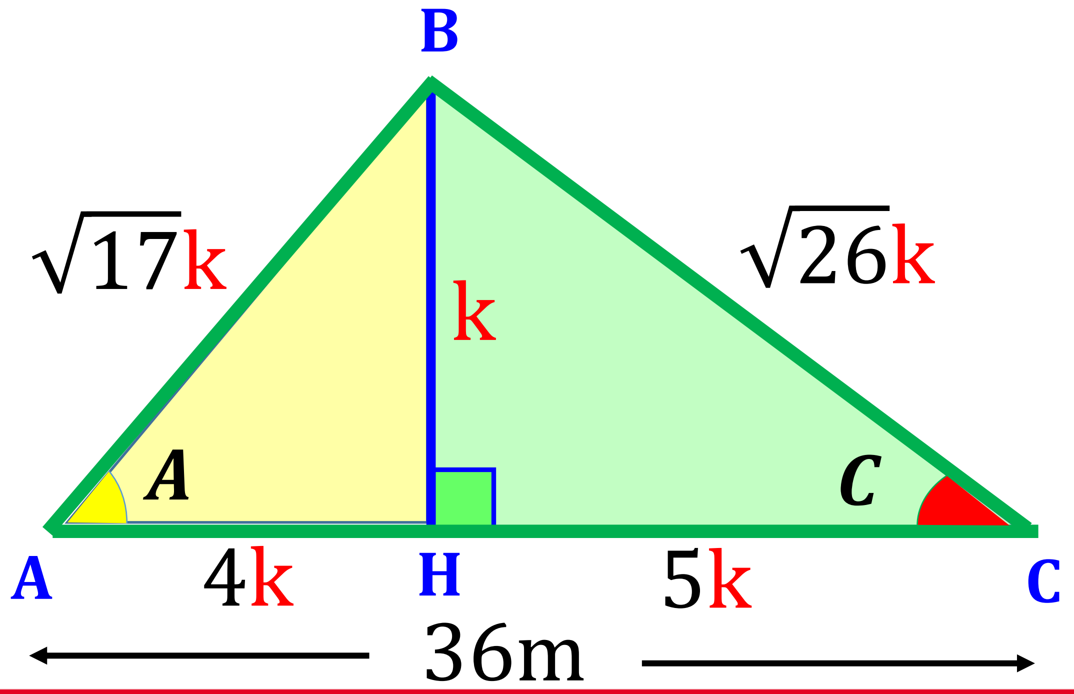
Piden:

$$\cos\alpha \cdot \tan\alpha = \left(\frac{\cancel{16}}{\cancel{20}_{5}}\right) \times \left(\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{16}}\right)$$

$$\therefore \cos\alpha \cdot \tan\alpha = \frac{3}{5}$$

6. Ramiro heredó un terreno en forma de triángulo ABC, donde AC=36m, $\csc A = \sqrt{17}$ y $\csc C = \sqrt{26}$. ¿Cuál es el área de dicho terreno?

RESOLUCIÓN:



Del dato:

En el ΔAHB:

$$\csc A = \frac{\sqrt{17}k}{1k}$$

Por el Teorema de Pitágoras

$$(AH)^2 + (k)^2 = (\sqrt{17}k)^2$$

$$(AH)^2 + k^2 = 17k^2$$

$$(AH)^2 = 16k^2$$

$$AH = 4k$$

En el ΔBHC:

$$\csc C = \frac{\sqrt{26}k}{1k}$$

Por el Teorema de Pitágoras

$$(HC)^2 + (k)^2 = (\sqrt{26}k)^2$$

$$(HC)^2 + k^2 = 26k^2$$

$$(HC)^2 = 25k^2$$

$$HC = 5k$$

Del gráfico, se observa que:

$$9k = 36m \quad \Rightarrow \quad k = 4m$$

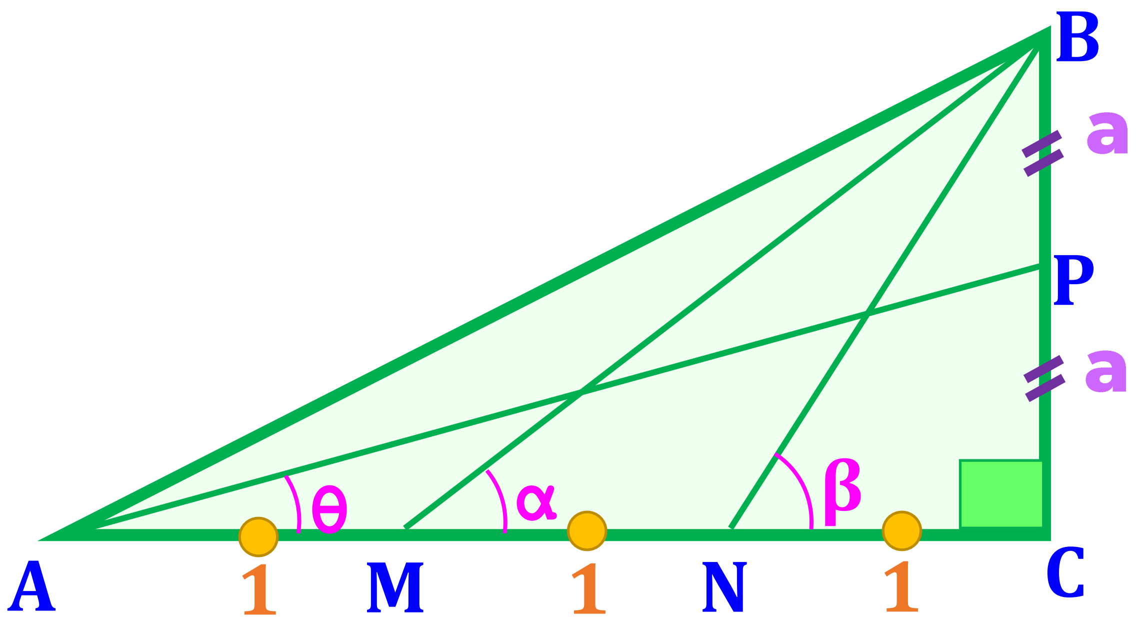
Calculando el área del terreno:

$$\mathbb{A} = \frac{36 \times k}{2} = \frac{36 \times (4)}{2}$$

$$\therefore \mathbb{A} = 72m^2$$

7. Del gráfico, efectúe

B = (tan α + tan β) cot θ



Recordar:

$$\tan\theta = \frac{CO}{CA} \qquad \cot\theta = \frac{CA}{CO}$$

RESOLUCIÓN:

Sea

$BP = PC = a$

$AM = MN = NC = 1$

Piden:

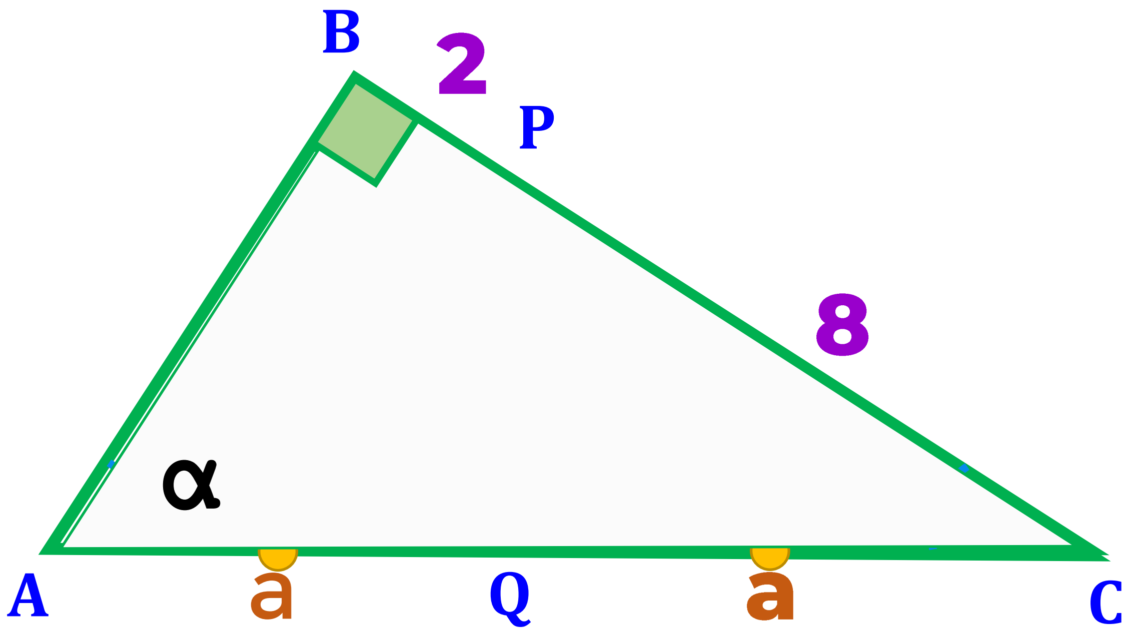
$\mathbf{B} = (\tan\alpha + \tan\beta)\cot\theta$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} + \frac{2a}{1}\right) \times \left(\frac{3}{a}\right)$$

$$\mathbf{B} = (3\cancel{a}) \times \left(\frac{3}{\cancel{a}}\right)$$

$\therefore \mathbf{B = 9}$

8. Del gráfico, calcule **sen** α si
AQ = QC



RESOLUCIÓN:

Sea $AQ = QC = a$

Piden: $\operatorname{sen}\alpha$

En el ΔABC: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{10}{2a} = \dfrac{5}{a} \quad \cdots (1)$

En el ΔPQC: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{8} \quad \cdots (2)$

Igualando (2) y (1)

$$\frac{a}{8} = \frac{5}{a} \Rightarrow a^2 = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} \Rightarrow a = 2\sqrt{10}$$

Reemplazando en (2)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{8}$$

$$\boxed{\therefore\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}}$$