



ALGEBRA

Chapter 13

1st
SECONDARY

Productos notables I



 **SACO OLIVEROS**



TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Demostración Geométrica.

Consideramos un cuadrado que es dividido en cuatro partes, de tal manera que la longitud de su lado es “a+b”

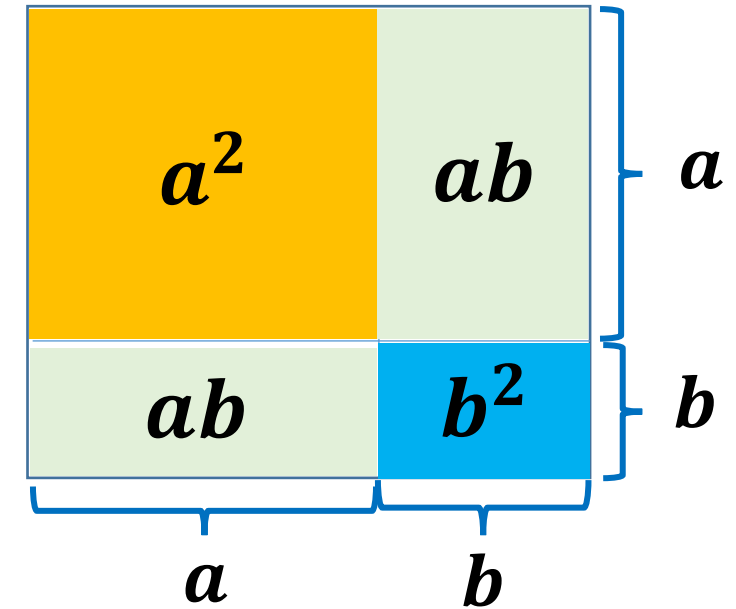
El área del cuadrado es:

$$\text{lado}^2 = (a + b)^2 \dots\dots(1)$$

Si calculamos las áreas de las cuatro partes que forman el cuadrado por separado obtenemos

Sumando las áreas obtenemos

$$\text{Área} = a^2 + ab + ab + b^2 \dots\dots(2)$$



Las áreas son iguales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



PRODUCTOS NOTABLES

I.- TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} & (2x + 3y)^2 \\ & \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ & = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \\ & = 4x^2 + 12xy + 9y^2 \end{aligned}$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} & (m - 5n)^2 \\ & \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ & = (m)^2 - 2(m)(5n) + (5n)^2 \\ & = m^2 - 10mn + 25n^2 \end{aligned}$$



II.- IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 \equiv 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4ab$$

Ejemplos

$$\begin{aligned} (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 &= 2(\sqrt{7}^2 + \sqrt{3}^2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x + 1)^2 - (3x - 1)^2 &= 4(3x)(1) \\ &= 12x \end{aligned}$$

**PROBLEMA 1:**

Desarrolle cada uno de los productos notables:

$$\text{a)} (3m^3 + 4)^2$$

$$\text{b)} (2x^2 - 7)^2$$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{a)} (3m^3 + 4)^2 &= (3m^3)^2 + 2(3m^3)(4) + (4)^2 \\ &= 9m^6 + 24m^3 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} (2x^2 - 7)^2 &= (2x^2)^2 - 2(2x^2)(7) + (7)^2 \\ &= 4x^4 - 28x^2 + 49 \end{aligned}$$



PROBLEMA 2:

Reduzca

$$M = (2x + 3)^2 - 12x - 4x^2$$

RESOLUCIÓN:

$$M = \underbrace{(2x + 3)^2} - 12x - 4x^2$$

$$M = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 - 12x - 4x^2$$

$$M = \cancel{4x^2} + \cancel{12x} + 9 - \cancel{12x} - \cancel{4x^2}$$

$$M = 9$$



PROBLEMA 3:

Reduzca

$$P = \frac{(a + 4)^2 - (a - 4)^2}{8a} - 1$$

RESOLUCIÓN: Usaremos la identidad de Legendre

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4ab$$

$$(a + 4)^2 - (a - 4)^2 = 4(a)(4) = 16a$$

Reemplazamos

$$P = \frac{16a}{8a} - 1$$

$$P = 1$$



PROBLEMA 4:

Reduzca

$$M = \frac{(7\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (7\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{7\sqrt{10}} + 2$$

RESOLUCIÓN: Usaremos la identidad de Legendre

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4ab$$

$$(7\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (7\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 4(7\sqrt{5})(\sqrt{2}) = 28\sqrt{10}$$

Reemplazamos

$$M = \frac{28\sqrt{10}}{7\sqrt{10}} + 2$$

$$M = 6$$



PROBLEMA 5:

Reduzca

$$A = \frac{(\sqrt{11} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{11} - \sqrt{2})^2}{4}$$

RESOLUCIÓN

Usaremos la identidad de Legendre

:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4ab$$

$$(\sqrt{11} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{11} - \sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{11})(\sqrt{2}) = 4\sqrt{22}$$

Reemplazamos

$$A = \frac{4\sqrt{22}}{4}$$

$$A = \sqrt{22}$$

**PROBLEMA 6:**

Si $a + b = 6$
 $ab = 4$

Efectúe $T = \sqrt{a^2 + b^2 + 21}$

RESOLUCIÓN: Usaremos el trinomio cuadrado perfecto


$$\underbrace{(a + b)}^2 = a^2 + \underbrace{2ab} + b^2$$

Reemplazamos

$$6^2 = a^2 + 2(4) + b^2$$

$$36 = a^2 + 8 + b^2$$

$$28 = a^2 + b^2$$


$$T = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2}_{28} + 21} = \sqrt{28 + 21} = 7$$



PROBLEMA 7

Reduzca , si:

$$x + x^{-1} = 7$$

Calcule $x^2 + x^{-2}$

RESOLUCIÓN: Usaremos el trinomio cuadrado perfecto

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Reemplazamos $(x + x^{-1})^2 = x^2 + 2(x)(x^{-1}) + (x^{-1})^2$

$$(7)^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$$

$$49 = x^2 + 2 + x^{-2}$$


$$x^2 + x^{-2} = 47$$



PROBLEMA 8

Los alumnos de Saco Oliveros, Rubén, Carmen y Rosa, al resolver el ejercicio:

Si , $m - n = 5$; $mn = 7$, calcule $m^2 + n^2$

Obtienen los resultados 39; 25 y 49 , respectivamente. ¿Quien obtuvo el resultado correcto?

RESOLUCIÓN: Usaremos el trinomio cuadrado perfecto

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\underbrace{(m - n)^2}_{(5)^2} = m^2 - 2 \underbrace{(m)(n)}_{(7)} + (n)^2$$

$$(5)^2 = m^2 - 2(7) + n^2$$

$$25 = m^2 - 14 + n^2$$

$$m^2 + n^2 = 39$$

Rubén es correcto



PROBLEMA 1

$$a) (3m^3 + 4)^2 = (3m^3)^2 + 2(3m^3)(4) + 4^2$$

$$= 9m^6 + 24m^3 + 16$$

$$b) (2x^2 - 7)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)(7) + 7^2$$

$$= 4x^4 - 28x^2 + 49$$

PROBLEMA 2

Desarrollamos el Producto Notable

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2$$

$$= 4x^2 + 12x + 9$$

Reemplazamos:

$$M = 4x^2 + 12x + 9 - 12x - 4x^2$$

Rpta: $M = 9$

PROBLEMA 4

Usamos la identidad de Legendre

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4ab$$

$$(a + 4)^2 - (a - 4)^2 = 4(a)(4) = 16a$$

Reemplazamos:

$$P = \frac{16a}{8a} - 1$$

Rpta: $P = 1$

Usamos la identidad de Legendre

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 \equiv 4ab$$

$$(7\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (7\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 4(7\sqrt{5})(\sqrt{2}) = 28\sqrt{10}$$

Reemplazamos:

$$M = \frac{28\sqrt{10}}{7\sqrt{10}} + 2$$

Rpta: $M = 6$