GEOMETRÍA

Capítulo 19

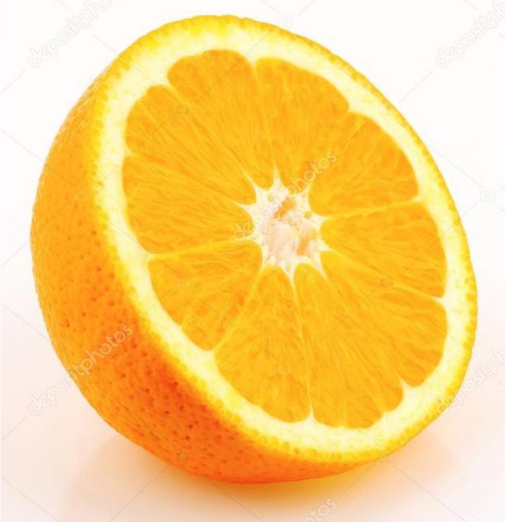
5th
SECONDARY

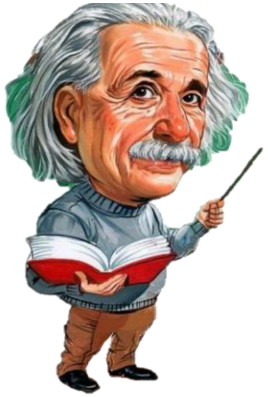
Esfera y teorema de Pappus

SACO OLIVEROS

Helicomotivación

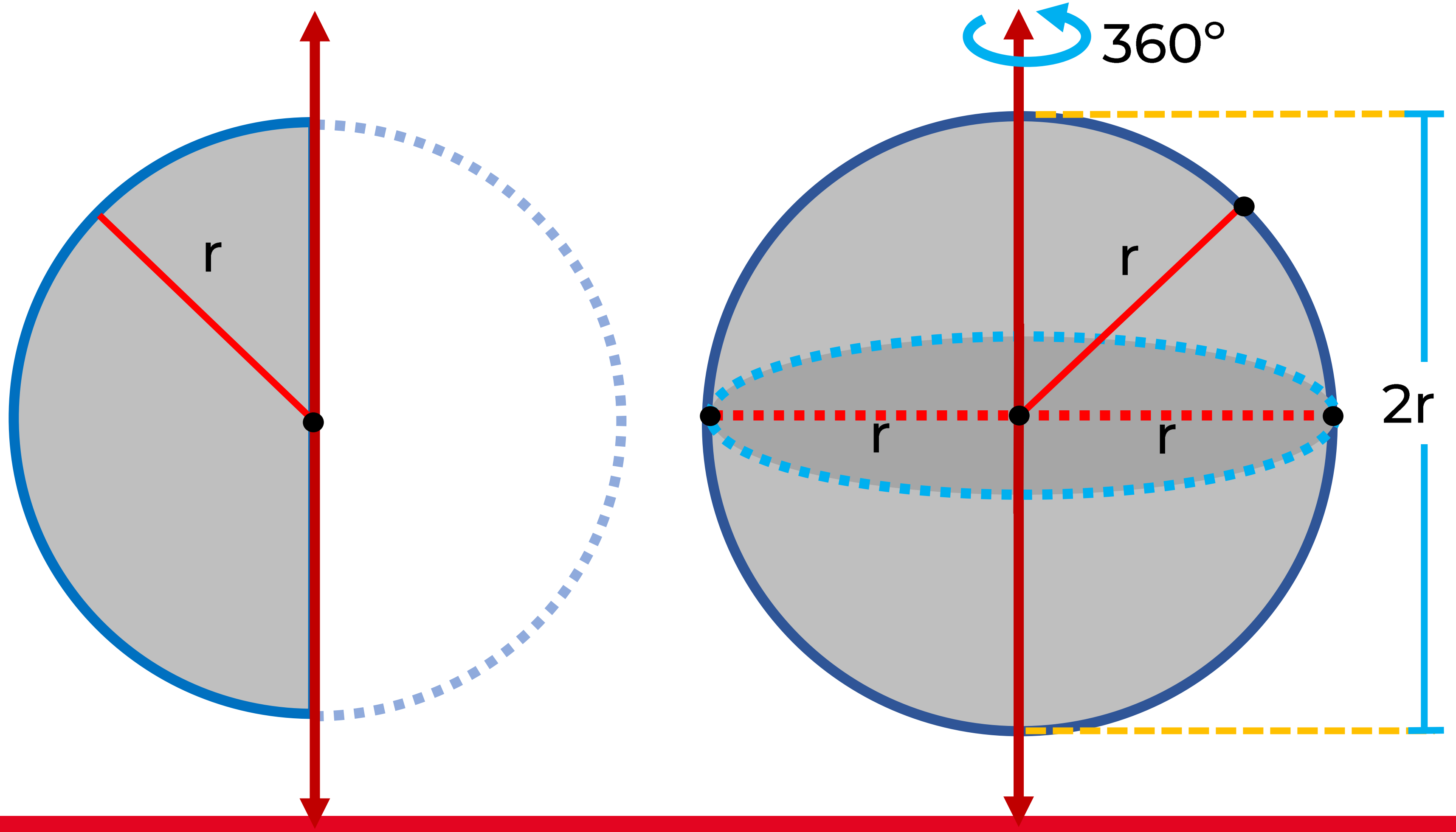
La esfera es la figura que tiene diversas aplicaciones, se diseñan objetos como una billa de acero, un balón de fútbol, un globo terráqueo, se usa en rodamientos, etc. La naturaleza nos brinda frutas de forma esférica, una naranja, el [illegible] una cereza, etc.





ESFERA

Definición.- Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira 360° alrededor de la recta que contiene a su diámetro.

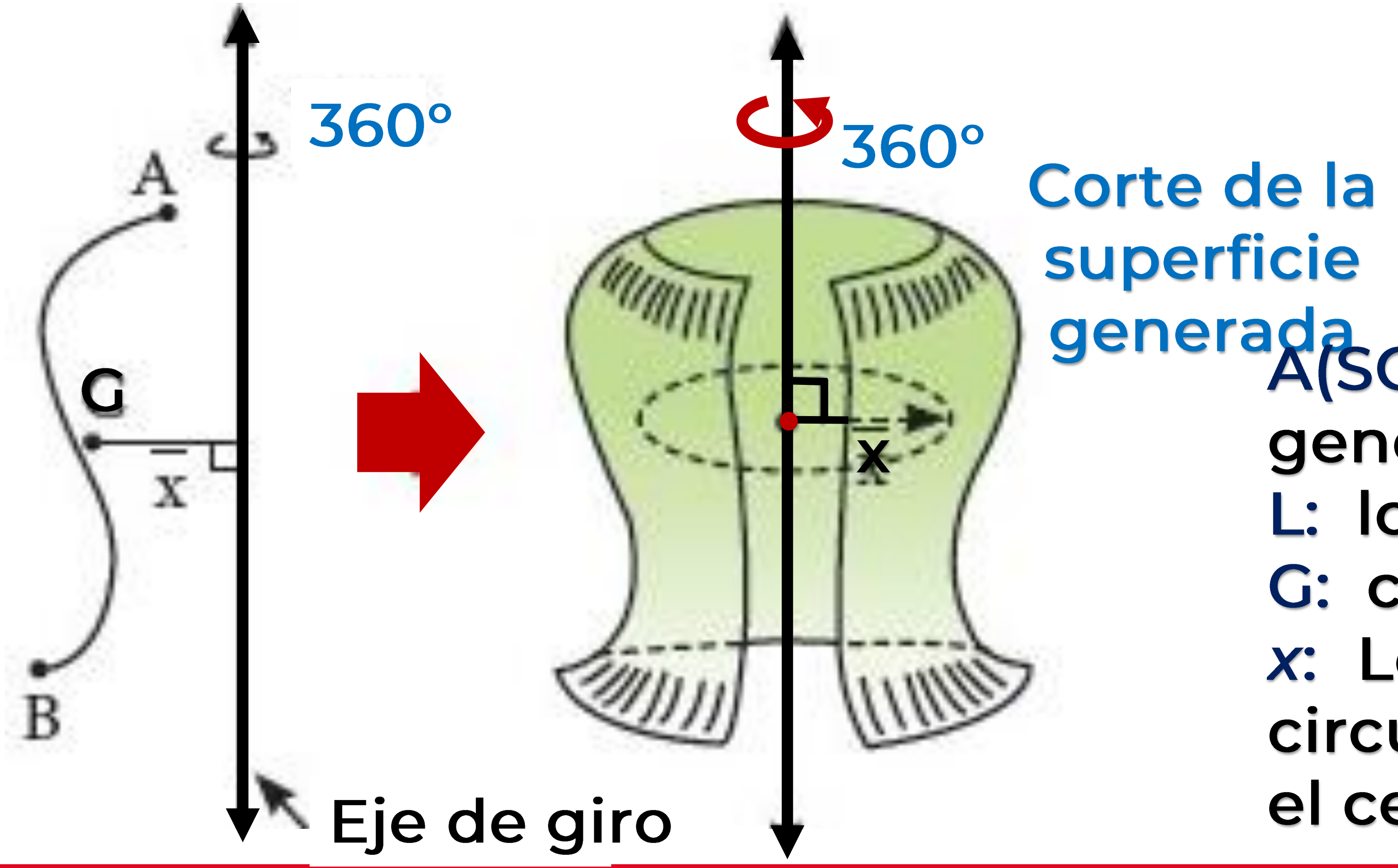


$$V(esf) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A(sup.esf) = 4\pi r^2$$

Superficie de revolución

Es la superficie generada por una línea plana al girar 360° alrededor de una recta coplanar y no secante a dicha línea.

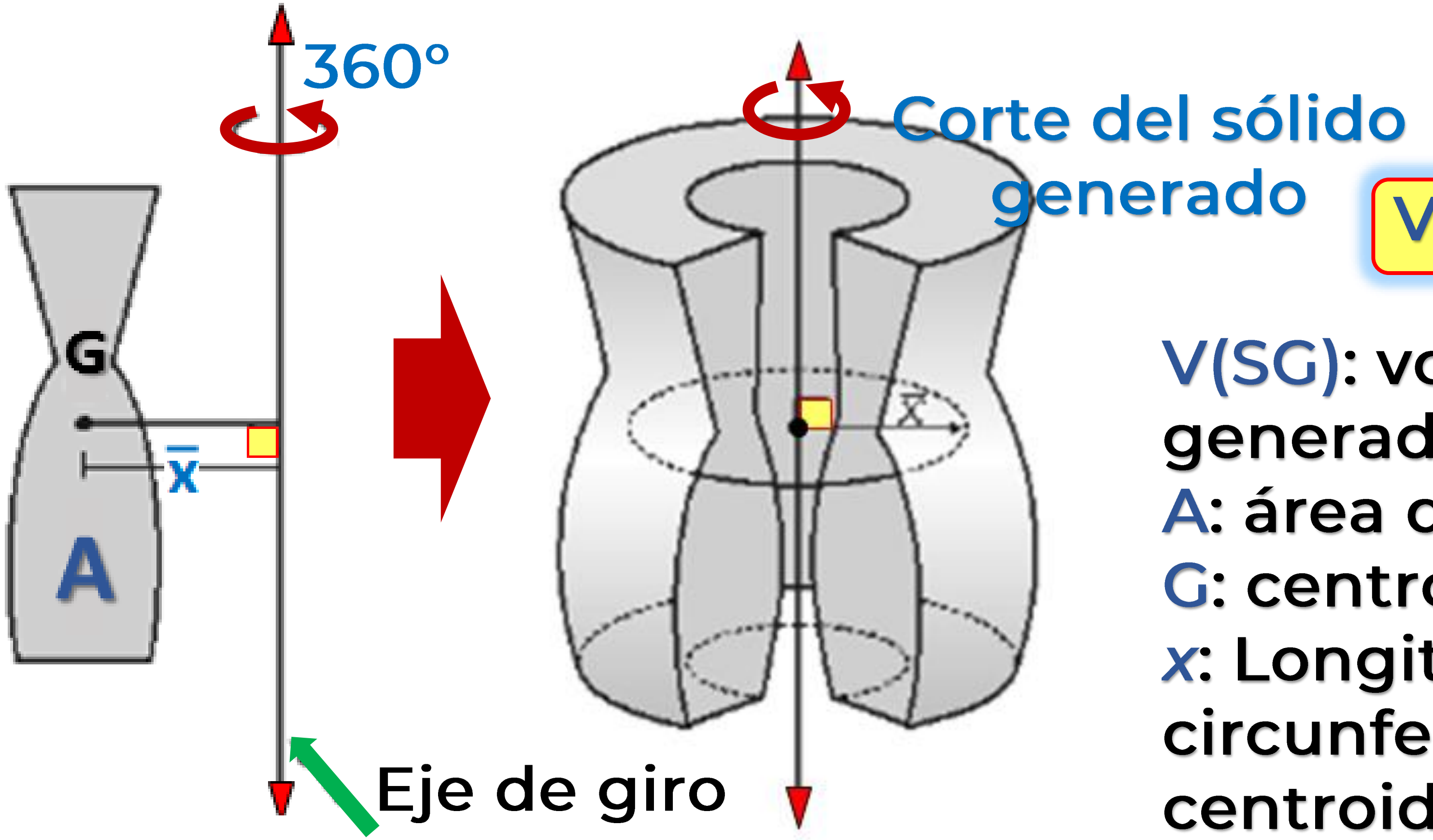


$$\boxed{A(SG) = 2\pi(x)L}$$

A(SG): área de la superficie generada.
L: longitud de la línea AB.
G: centroide de la línea AB.
x: Longitud del radio de la circunferencia descrita por el centroide.

Sólido de revolución

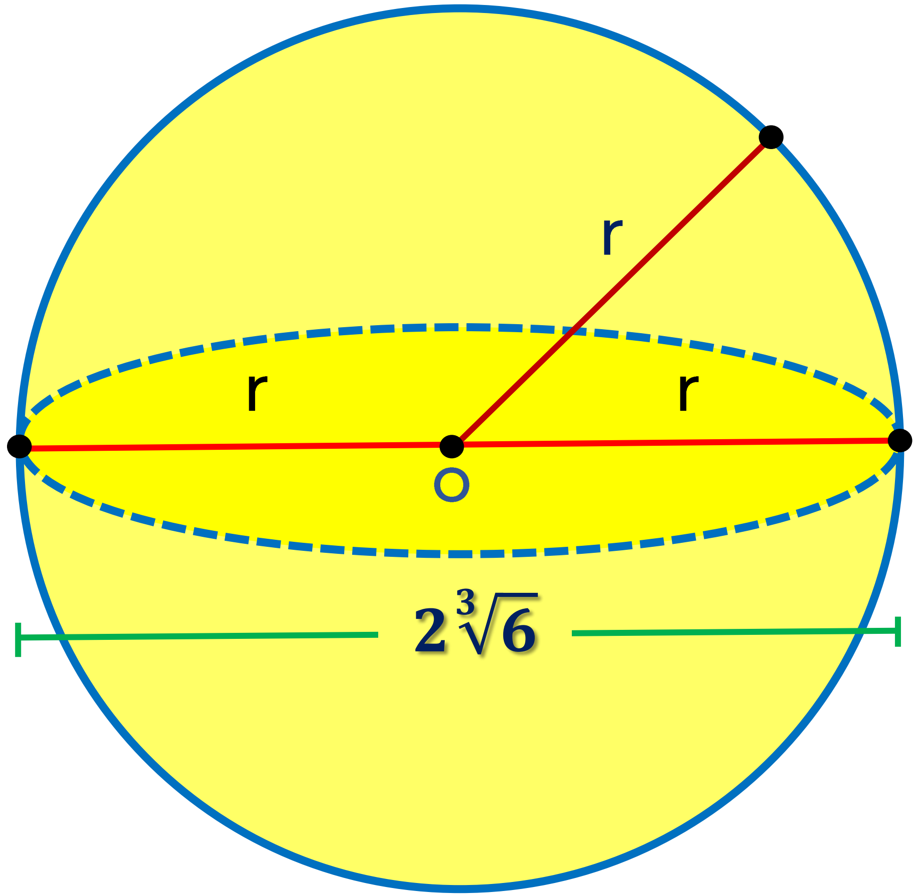
Es el sólido generado por una región plana al girar 360° alrededor de una recta coplanar y no secante a dicha región.



$$V(SG) = 2.\pi.(x).A$$

V(SG): volumen del sólido generado.
A: área de la región.
G: centroide de la región plana.
x: Longitud del radio de la circunferencia descrita por el centroide.

1. Calcule el volumen de una esfera de diámetro $2\sqrt[3]{6}$.



Resolución

- Calcule el volumen V de la esfera

Teorema: $V = \frac{4}{3}\pi . r^3$ ... (1)

- Dato: $\cancel{2}r = \cancel{2}\sqrt[3]{6}$

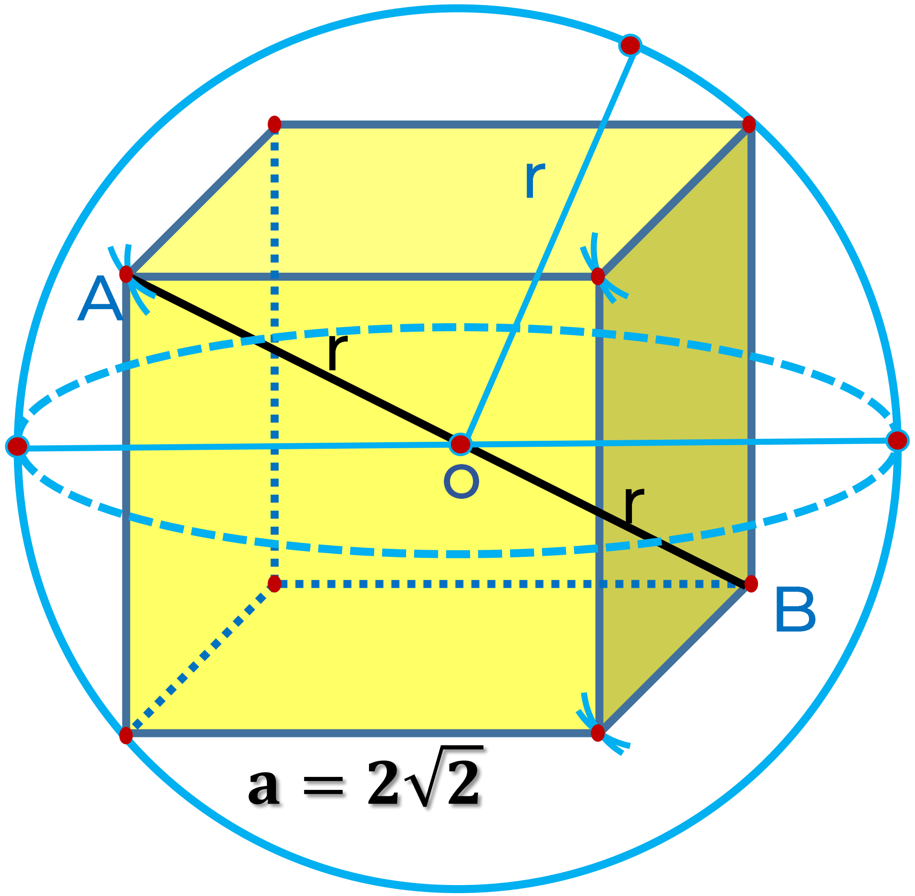
$r = \sqrt[3]{6}$ ... (2)

- Reemplazando 2 en 1.

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt[3]{6})^3$$

$$\boxed{V = 8\pi\ u^3}$$

2. Calcule el área de la superficie esférica circunscrita al cubo de arista $2\sqrt{2}$.



Resolución

- Calcule $A_{(sup.\ esf)}$

  Teorema: $A_{(sup.esf.)} = 4\pi r^2$... (1)

- En el hexaedro regular:

$$2r = a\sqrt{3}$$

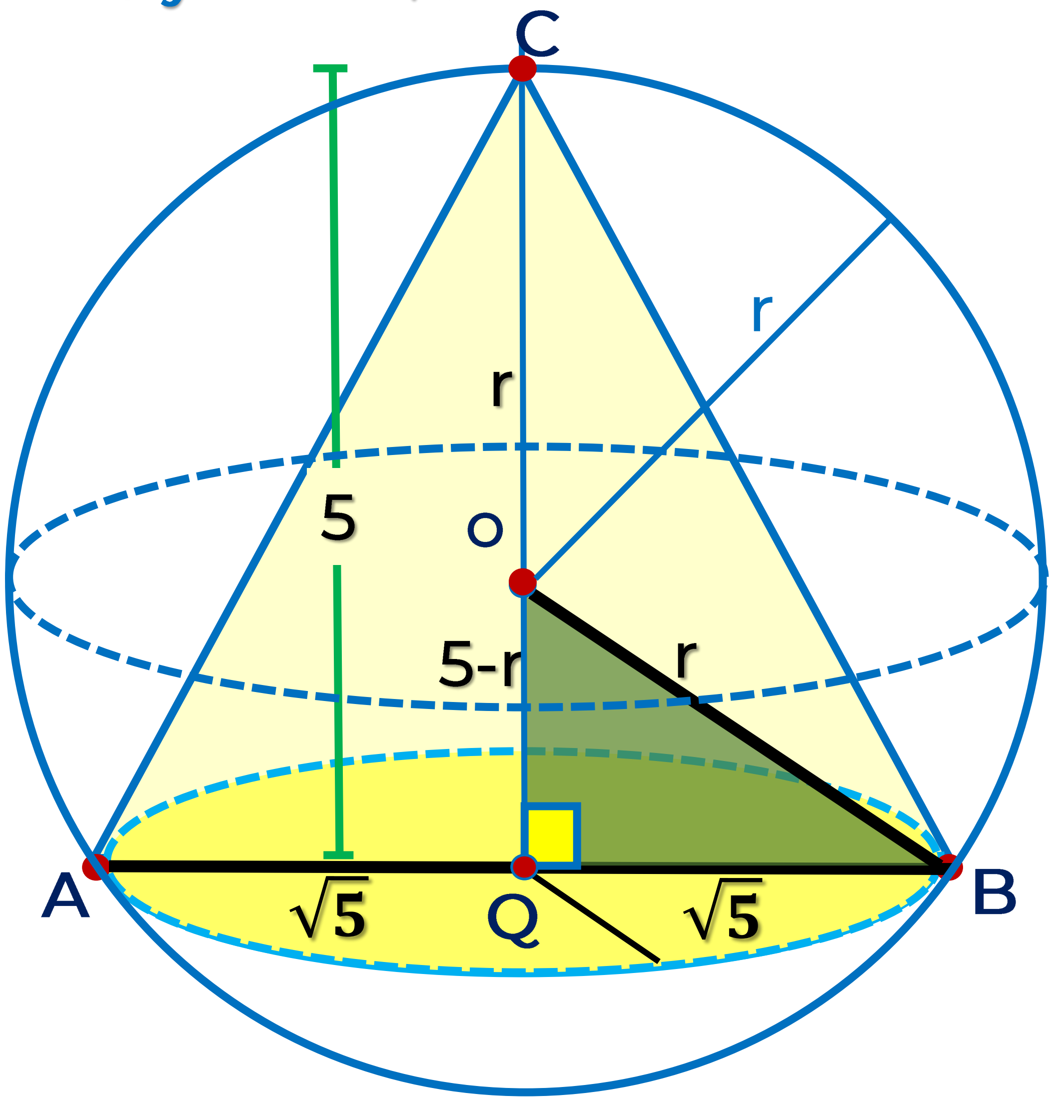
$$2r = \overbrace{(2\sqrt{2})}\sqrt{3} \qquad 2r = 2\sqrt{6}$$

$$r = \sqrt{6} \qquad ... (2)$$

- Reemplazando 2 en 1. $A_{(sup.esf.)} = 4\pi(\sqrt{6})^2$

$$\boxed{A_{(sup,esf.)} = 24\pi\ u^2}$$

3. Calcule el volumen de la esfera circunscrita al cono circular recto mostrado de altura 5 y radio $\sqrt{5}$.



Resolución

- Calcule el volumen V de la esfera

Teorema: $V = \frac{4}{3}\pi . r^3$ ... (1)

- $\triangle$ OQB: T. de Pitágoras

$$r^2 = (5-r)^2 + (\sqrt{5})^2$$

$$\cancel{r^2} = 25 - 10r + \cancel{r^2} + 5$$

$10r = 30$

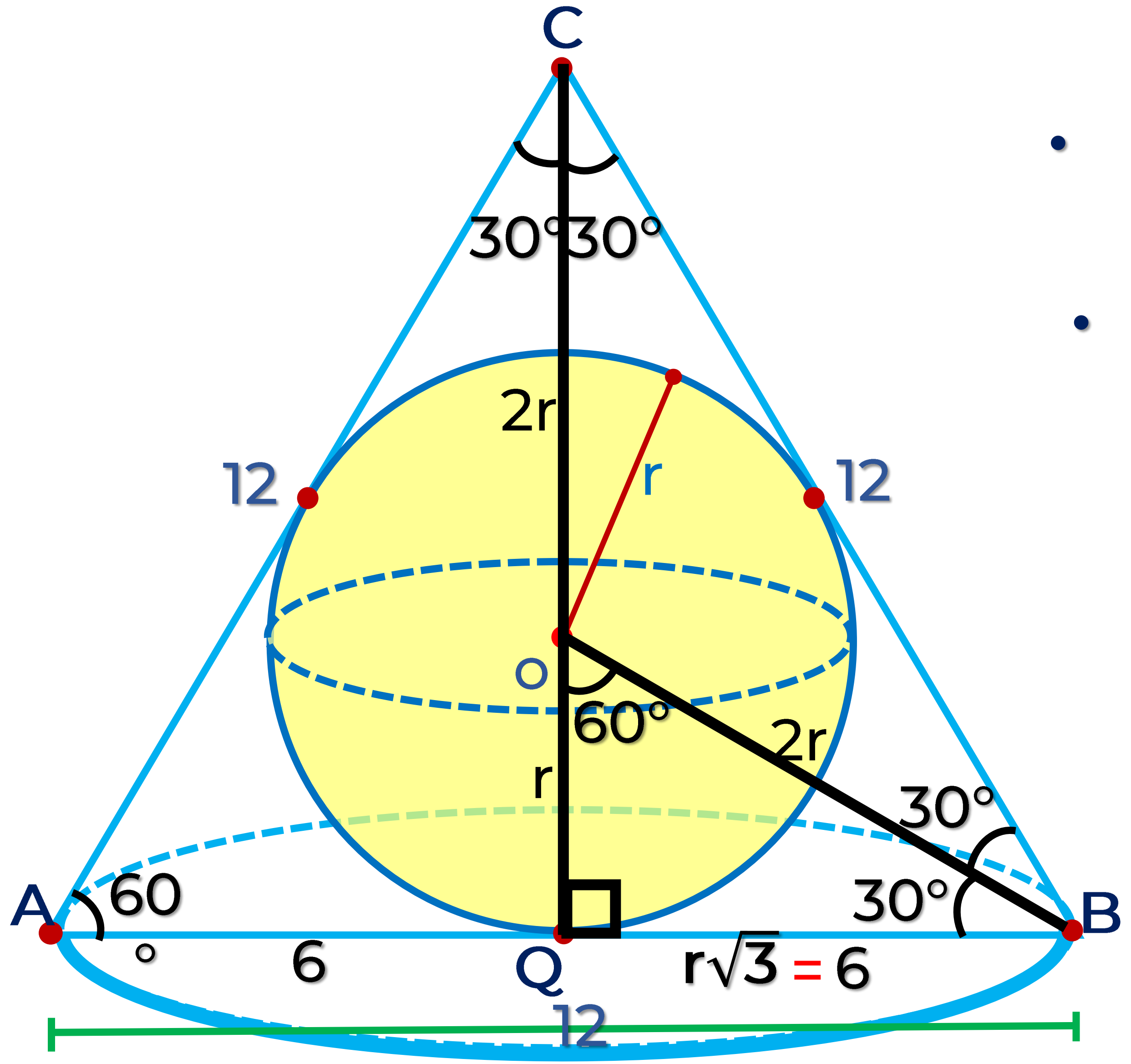
$r = 3$ ... (2)

- Reemplazando 2 en 1.

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$\boxed{V = 36\pi\ u^3}$$

4. Calcule el área de la superficie esférica inscrita en el cono equilátero mostrado.



Resolución

- Calcule: $A_{(sup.esf.)}$

Teorema: $A_{(sup.esf.)} = 4\pi r^2$ ... (1)

- ◺OQB: Notable de 30° y 60°

$$r\sqrt{3} = 6$$

$$r = \frac{\cancel{6}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\underbrace{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}_{\cancel{3}}$$

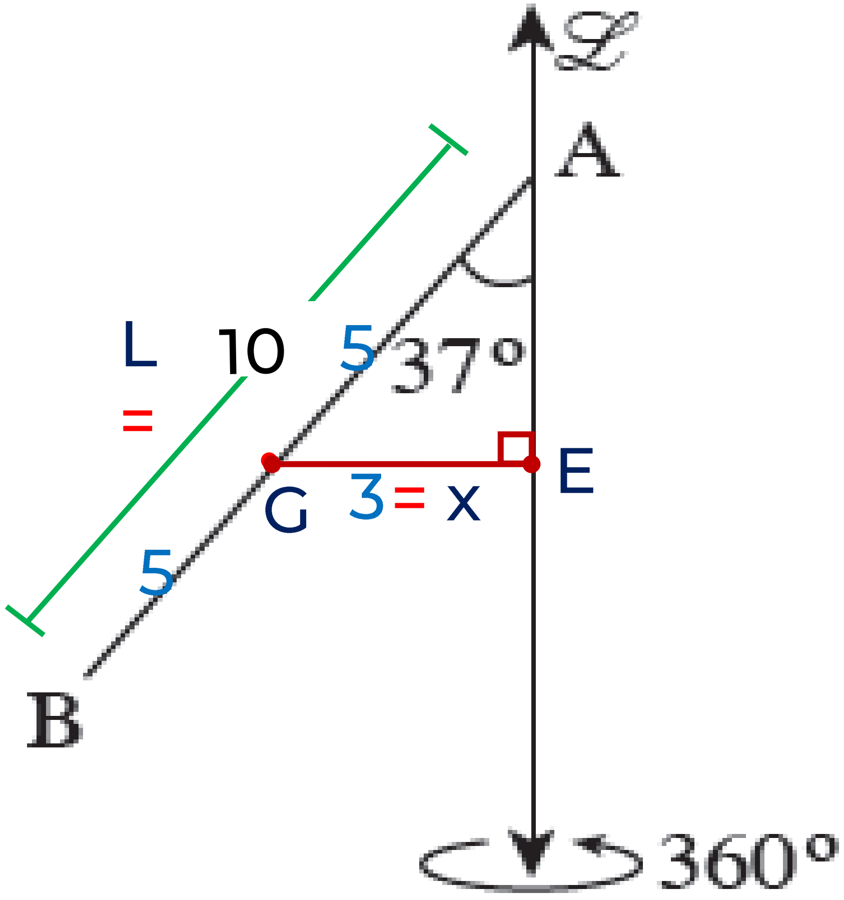
$$r = 2\sqrt{3}$$ ...(2)

- Reemplazando 2 en 1.

$A_{(sup.esf.)} = 4\pi(2\sqrt{3})^2$

$$\boxed{A_{(sup.esf.)} = 48\pi\ u^2}$$

5. Calcule el área de la superficie generada por el $\overline{AB}$ al girar 360° alrededor de la recta L.



Resolución

- Calcule: $A_{(SG)}$

  Teorema: $A_{(SG)} = 2\pi.x.L$

- G: Punto medio del $\overline{AB}$.

  AG = BG = 5

- Se traza $\overline{GE} \perp \overleftrightarrow{L}$

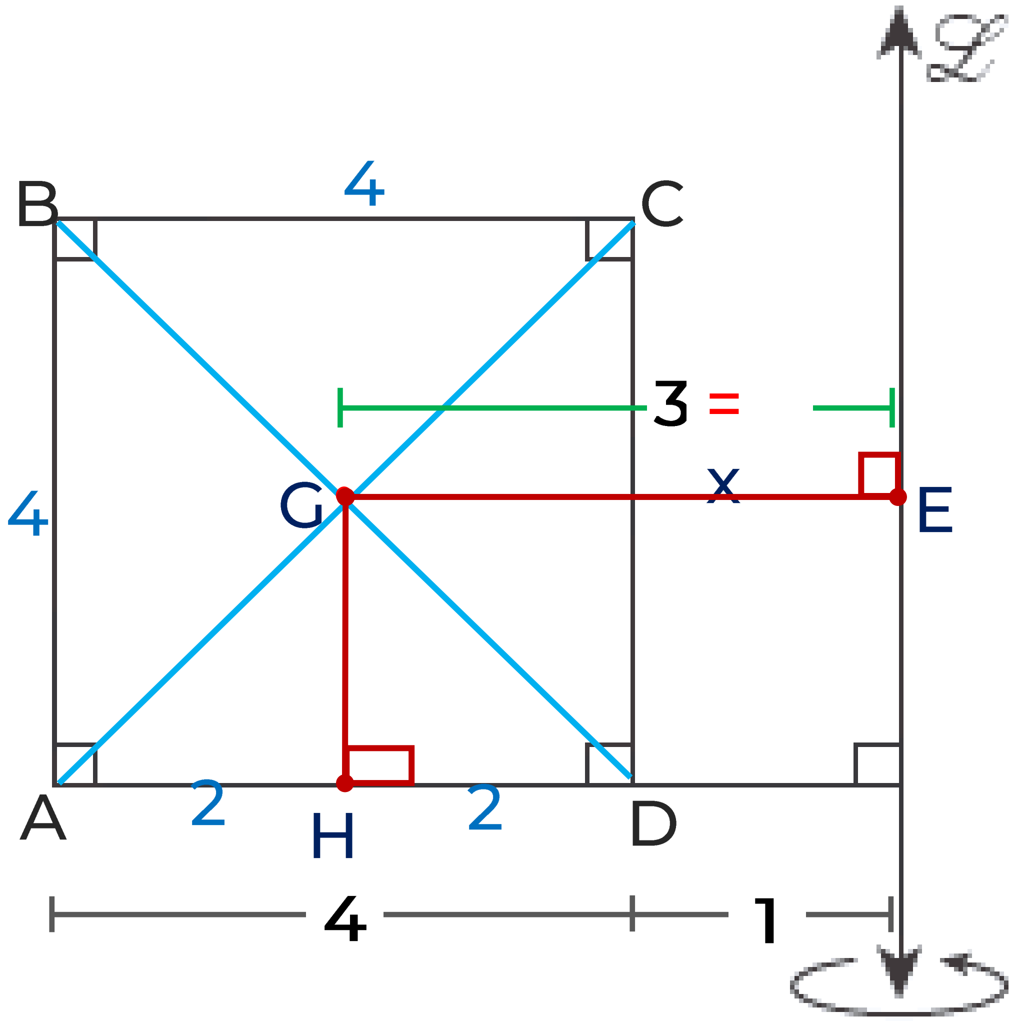
- ◺AEG: Notable de 37° y 53°

- Reemplazando:

  $A_{(SG)} = 2\pi.3.10$

  $\boxed{A_{(SG)} = 60\pi\ u^2}$

6. Calcule el área de la superficie generada por el cuadrado al girar 360° alrededor de la recta L.



Resolución

- Calcule: $A_{(SG)}$

$$A_{(SG)} = 2\pi.x.L$$

- En el cuadrado ABCD:

$$L = 4 + 4 + 4 + 4$$

$$L = 16$$

- Se traza $\overline{GH} \perp \overline{AD}$

$$AH = HD = 2$$

- Se traza $\overline{GE} \perp \overleftrightarrow{L}$

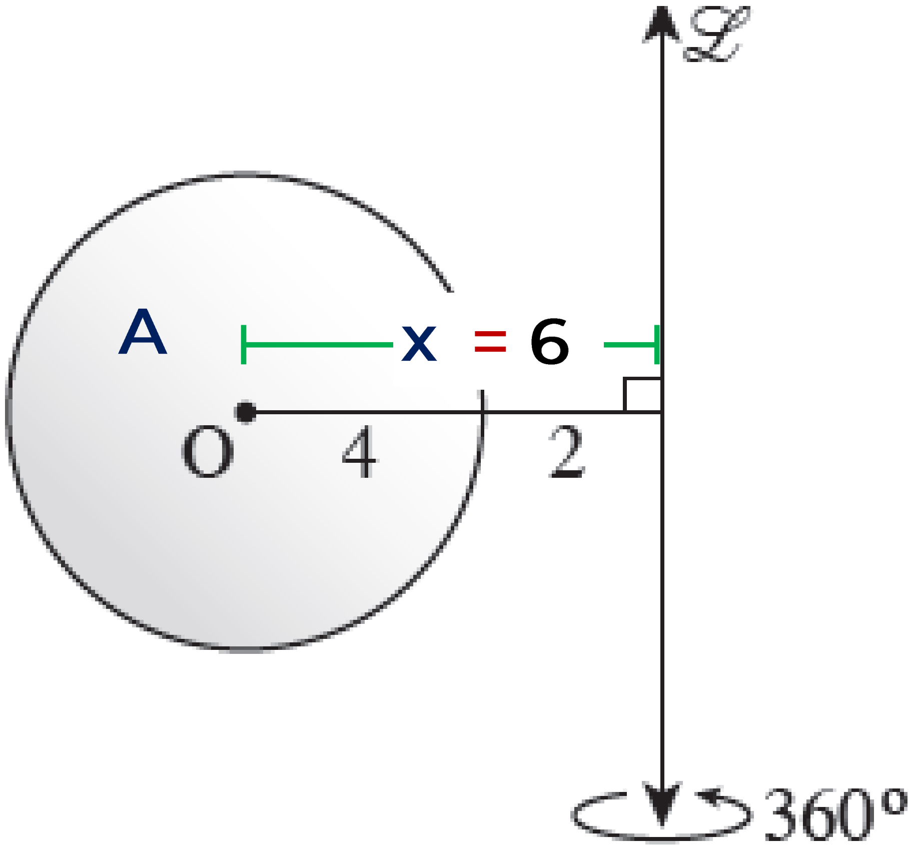
$$GE = 3$$

- Reemplazando al teorema.

$$A_{(SG)} = 2\pi.3.16$$

$$\boxed{A_{(SG)} = 96\pi\ u^2}$$

7. Calcule el volumen del sólido generado por el círculo al girar 360° alrededor de la recta L. (O es centro).



Resolución

- Calcule: $V_{(SG)}$

  Teorema: $V_{(SG)} = 2\pi.x.A$

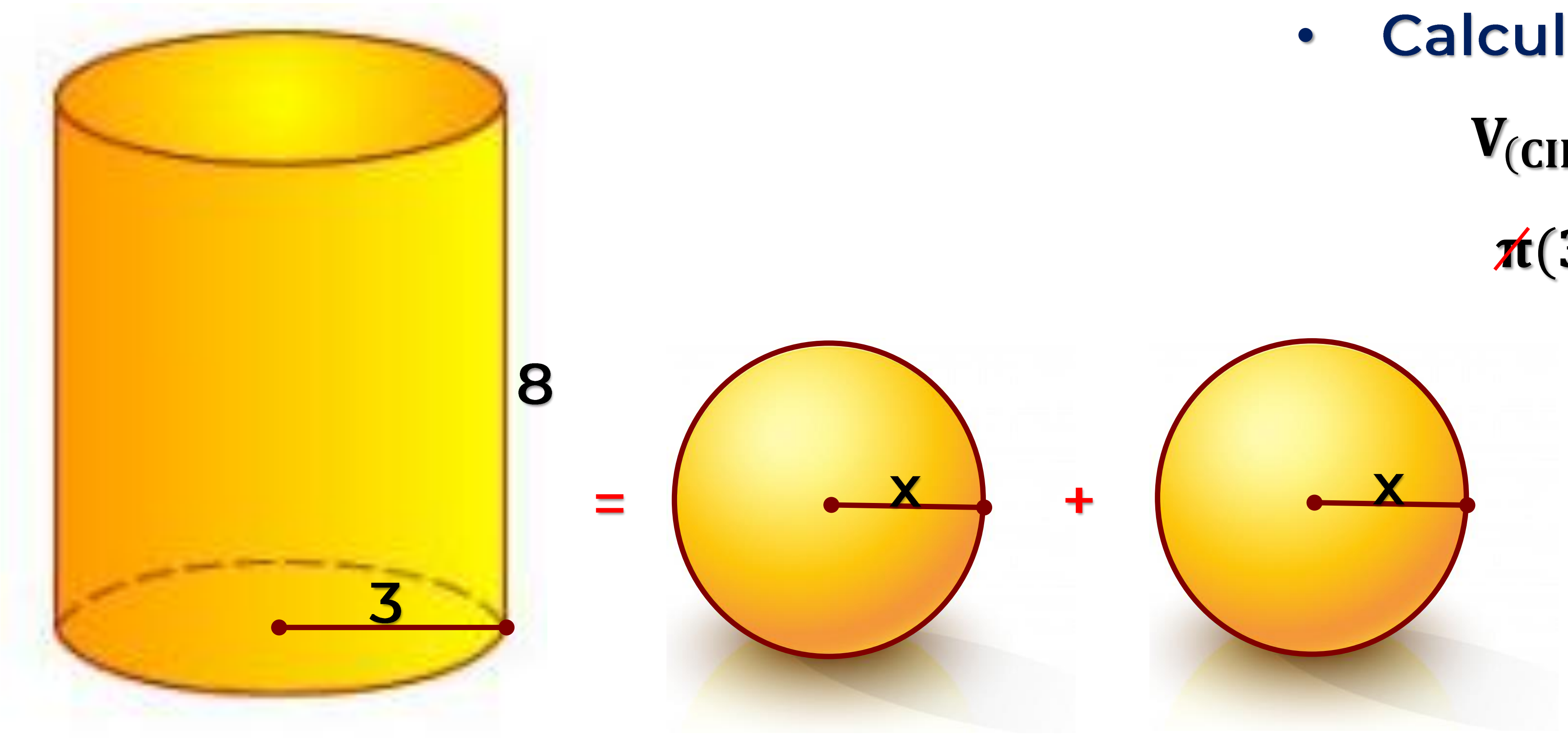
- Reemplazando:

$$V_{(SG)} = 2\pi\ (6)(\pi.4^2)$$

$$V_{(SG)} = 2\pi.(6)(16\pi)$$

$$\boxed{V_{(SG)} = 192\pi^2\ u^3}$$

8. Una pieza metálica tiene forma de cilindro circular recto de radio 3 y altura 8. Luego se funde para construir dos esferas de radio de longitud *x*. Halle el valor de *x*.



Resolución

- Calcule: x

$$V_{(CIL)} = 2V_{(ESF)}$$

$$\cancel{\pi}(3)^2.\cancel{8} = \cancel{2}.\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}(x)^3$$

$$3^3 = x^3$$

$$\boxed{3 = x}$$