



TRIGONOMETRY

Chapter 23

5th
SECONDARY

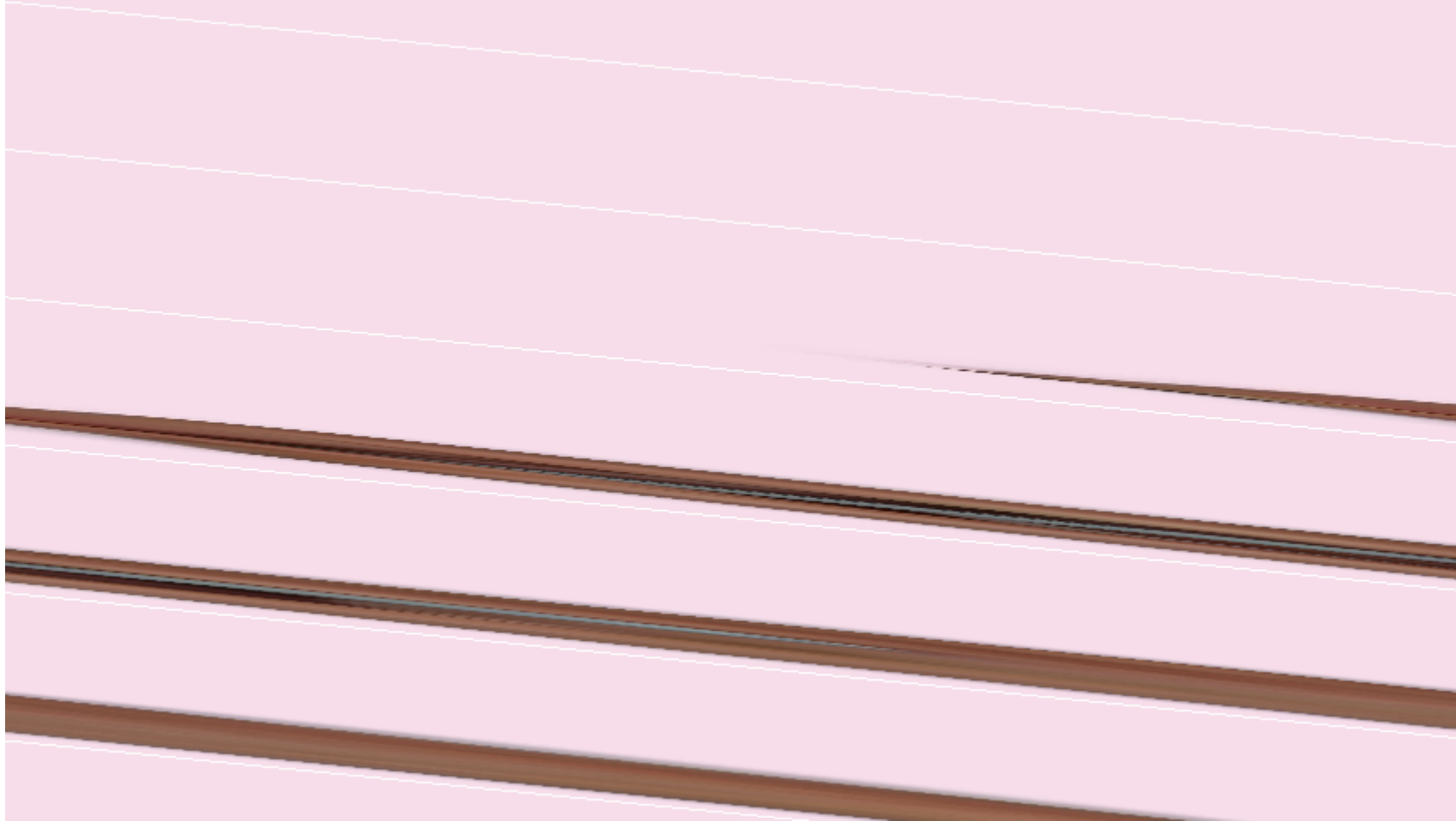
Ecuaciones Trigonométricas



 **SACO OLIVEROS**



Helicomotivación





ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

ECUACION TRIGONOMÉTRICA

ELEMENTAL: $FT(ax + b) = N$

Argumento de la ETE

Donde:

FT : Operador Trigonométrico

x : Variable angular

a, b: Constantes reales ; $a \neq 0$

N : Constante real , el cual pertenece al rango de FT

Ejemplos:

• $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

• $\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$



EXPRESIONES GENERALES:

x_g : **Argumento de la ETE**

V_p : **Valor Principal** ; $k \in \mathbb{Z}$

1. Para el SENO

$$\text{sen}(x_g) = N \Rightarrow x_g = k\pi + (-1)^k V_p$$

2. Para el COSENO

$$\text{cos}(x_g) = N \Rightarrow x_g = 2k\pi \pm V_p$$

3. Para la TANGENTE

$$\tan(x_g) = N \Rightarrow x_g = k\pi + V_p$$

Ejemplo:

Resolver: $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$

Resolución:

- Usar identidad: $\cos(2x) = \frac{1}{2} \dots$ ETE

- Valor Principal: $V_p = \frac{\pi}{3}$

- Expresión General:

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}$$



1. Indique el Valor principal de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a. $\text{sen} x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow V_p = \dots \dots \dots$

b. $\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow V_p = \dots \dots \dots$

c. $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) = 1 \quad \rightarrow V_p = \dots \dots \dots$

Resolución:

a. $V_p = \arcsen(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

b. $V_p = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$

c. $V_p = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$



2. Indique la menor solución positiva de:

$$\tan 3x - \sqrt{3} = 0$$

Resolución:

Del dato : $\tan 3x = \sqrt{3}$... ETE

Luego : $3x = \frac{\pi}{3}$



Recuerda:

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



La menor solución positiva: $x = \frac{\pi}{9}$



3. Indique la menor solución positiva de:

$$\text{sen}x \cdot \text{cos}x = 0,25$$

Resolución:

Multiplicando por 2 :

$$2\text{sen}x \cdot \text{cos}x = 2(0,25)$$

Luego :

$$\text{sen}2x = \frac{1}{2} \dots \text{ETE}$$

Así :

$$2x = \frac{\pi}{6}$$

Recuerda:



$$\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$$



La menor solución positiva es: $x = \frac{\pi}{12}$



4. Calcular la solución general de: $\tan x + \cot x = 4$

Resolución:

$$\tan x + \cot x = 4$$

$$2\csc 2x$$

$$\Rightarrow \csc 2x = 2$$

$$\text{Luego: } \sin 2x = \frac{1}{2} \quad \dots \text{ETE}$$

$$V_p = \arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

La solución general para el seno:

$$X_g = k\pi + (-1)^k \cdot V_p ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + (-1)^k \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right) ; k \in \mathbb{Z}$$



$$x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right) ; k \in \mathbb{Z}$$



5. Calcular la solución general de: $2\cos 2x - \tan 45^\circ = 0$

Resolución:

$$2\cos 2x - \tan 45^\circ = 0$$

$$2\cos 2x - 1 = 0$$

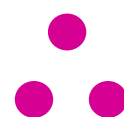
Luego: $\cos 2x = \frac{1}{2}$... ETE

➡ $V_p = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

La solución general para el coseno:

$$X_g = 2k\pi \pm V_p ; k \in \mathbb{Z}$$

➡ $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$



$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$



6. Calcular la segunda solución positiva: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = 0$

Resolución:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = 0$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) = 0$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$

Luego: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \dots$ ETE

$$\Rightarrow V_p = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

La solución general para la tangente:

$$X_g = k\pi + V_p ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Segunda solución positiva para: $k = 1$

$$x = 2(1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{2}$$



7. Indique el número de soluciones para $x \in [0; 2\pi]$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolución:

$$\underbrace{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots \text{ETE}$$

$$\Rightarrow V_p = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

La solución general para el coseno:

$$X_g = 2k\pi \pm V_p ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Para $k = 0; 1; 2$

$$x = \left\{ \frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}; \frac{15\pi}{8} \right\}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{8} ; k \in \mathbb{Z}$$

, $x \in [0; 2\pi]$

Hay 4 soluciones



8. Muchas poblaciones de animales como las de los conejos, fluctúan en períodos cíclicos de 12 años. Supongamos que N es la población de conejos en un tiempo t (en años) y está dado por:

$$N_{(t)} = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

¿Cuál es el menor tiempo para la cual la población de conejos será de 4500?

Resolución:

$$N_{(t)} = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

Dato: $N_{(t)} = 4500$

$$\Rightarrow 4500 = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

$$500 = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \dots \text{ETE}$$



Recuerda:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

La menor solución:

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t = 2$$



$$t = 2 \text{ años}$$