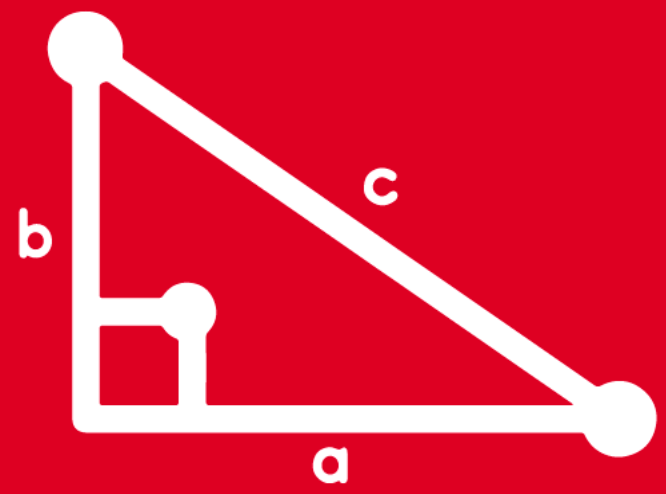
TRIGONOMETRY

CHAPTER 8



3th

SECUNDARY

Propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo

SACO OLIVEROS

MOTIVATING | STRATEGY

I) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE UN ÁNGULO AGUDO (RTR)

Para un mismo ángulo agudo α se cumple :

$\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = \frac{\cancel{CO}}{\cancel{H}} \cdot \frac{\cancel{H}}{\cancel{CO}} = 1$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = \frac{\cancel{CA}}{\cancel{H}} \cdot \frac{\cancel{H}}{\cancel{CA}} = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{\cancel{CO}}{\cancel{CA}} \cdot \frac{\cancel{CA}}{\cancel{CO}} = 1$

Definición de RTR

Si $0° < \alpha < 90°$

$\Updownarrow$

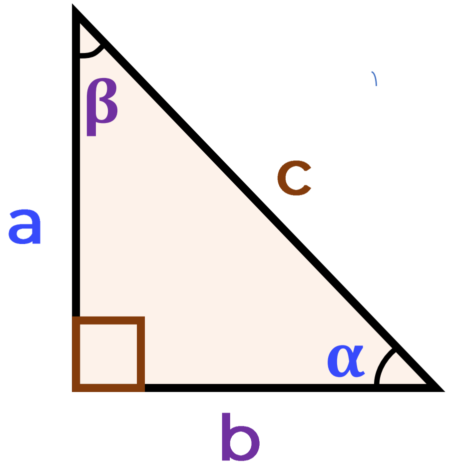
$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \\ \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \\ \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \end{array}\right.$

Ejemplo:

$$E = \frac{7\operatorname{sen}35°\csc35° - 3\tan49°\cot49°}{2\cos62°\sec62°} = \frac{7(1) - 3(1)}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS (CO – RT)

En un triángulo rectángulo, los catetos se consideran opuestos ó adyacentes, según sea el ángulo agudo de referencia .



∡	CO	CA	H
α	a	b	c
β	b	a	c

Luego se cumple:

Como $\alpha + \beta = 90°$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta$$

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\,\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \cot\beta \\ \sec\alpha = \csc\beta \end{array} \right\}}_{\text{CO – RT}}$$

Ejemplos :

$\text{sen}35° = \cos55°$; porque: $35° + 55° = 90°$

$\tan(a + 42°) = \cot(48° - a)$

Porque: $\cancel{a} + 42° + 48° - \cancel{a} = 90°$

1) Escriba verdadero (V) ó falso (F) según corresponda.

a) $\text{sen}10°.\ \csc 80° = 1$ (F)

b) $\tan(2x - 5°) . \cot(2x - 5°) = 1$ (V)

c) $\cos 40° = \text{sen}50°$ (V)

d) $\sec(70° - y) = \csc(20° + y)$ (V)

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de RTR

Si $0° < \alpha < 90°$

$\text{sen}\alpha . \csc\alpha = 1$

$\cos\alpha . \sec\alpha = 1$

$\tan\alpha . \cot\alpha = 1$

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\sec\alpha = \csc\beta$

CO – RT

Luego :

a) $10° \neq 80°$ ⇨ por RTR es falso

b) $2x - 5° = 2x - 5°$ ⇨ por RTR es verdadero

c) $40° + 50° = 90°$ ⇨ por CO - RT es verdadero

d) $70° - \cancel{y} + 20° + \cancel{y} = 90°$ ⇨ por CO - RT es verdadero

2) Halle el valor de x si :

$$\operatorname{sen}(2x + 5^\circ) \cdot \csc(3x - 15^\circ) = 1$$

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de RTR

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \\ \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \\ \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \end{cases}$$

Luego :

Por RTR, igualamos las medidas angulares :

$$2x + 5^\circ = 3x - 15^\circ$$

$$5^\circ + 15^\circ = 3x - 2x$$

$$\therefore \quad x = 20^\circ$$

3) Halle el valor de x si :

$\tan(x - 10^{o}) = \cot(2x + 10^{o})$

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\,\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \cot\beta \\ \sec\alpha = \csc\beta \end{array} \right.$$

CO – RT

Luego :

Por CO - R T :

$$x - \cancel{10°} + 2x + \cancel{10°} = 90^{0}$$

$$3x = 90^{0}$$

$$\therefore \quad x = 30°$$

4) Sabiendo que:

$\tan 3x \cdot \cot(x + 40^\circ) = 1$,

calcule $\cos 3x$.

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de RTR

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$\Updownarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \\ \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1 \\ \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \end{array} \right\}$$

Luego :

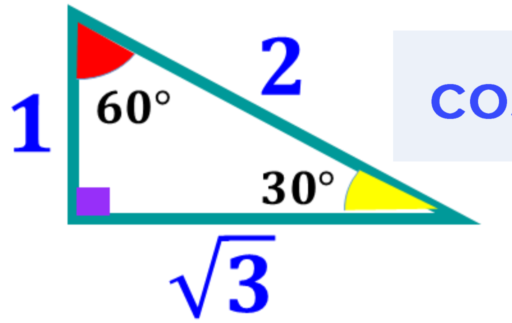
Por RTR , igualamos las medidas angulares :

$$3x = x + 40^\circ$$

$$2x = 40^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

Recordamos :



$\cos\theta = \dfrac{CA}{H}$

Piden : $\cos 3x = \cos 3(20^\circ) = \cos 60^\circ$

$$\therefore \quad \cos 3x = \frac{1}{2}$$

5) Sabiendo que:

$$\text{sen}(\alpha + 5^o) = \cos(2\alpha + 40^o)$$

calcule sen2α .

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\sec\alpha = \csc\beta$

CO – RT

Luego :

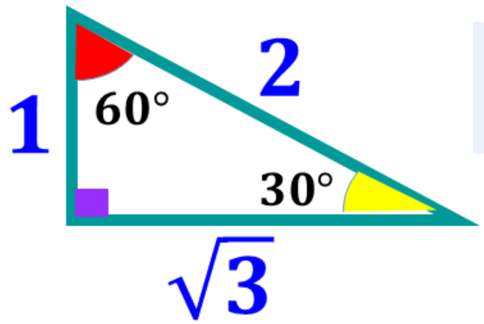
Por CO - RT :

$$\alpha + 5° + 2\alpha + 40° = 90^0$$

$$3\alpha = 45^0$$

$$\alpha = 15^0$$

Recordamos que :



$\text{sen}\alpha = \frac{CO}{H}$

Piden : $\text{sen}2\alpha = \text{sen}2(15^0) = \text{sen}30^0$

$$\therefore \quad \text{sen}2\alpha = \frac{1}{2}$$

6) Las edades de Mitsumo y Nicole, están dadas por las siguientes relaciones :

⊗ Mitsumo tiene x años .

⊗ Nicole tiene y años .

Donde : $\tan 2x° \cdot \cot 3y° = 1$;

$\cos x° = \operatorname{sen}(x + 30)°$

Indique la edad de cada una de ellas .

RESOLUCIÓN

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\Updownarrow$

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\sec\alpha = \csc\beta$

CO – RT

Definición de RTR

Si $0° < \alpha < 90°$

$\Updownarrow$

$\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Por CO - RT :

$\cos x° = \operatorname{sen}(x + 30)°$

$x\cancel{°} + (x + 3\cancel{0})° = \cancel{9}0°$

$2x = 60 \Rightarrow x = 30$

Por RTR :

$\tan 2x° \cdot \cot 3y° = 1$

$2x\cancel{°} = 3y\cancel{°}$

$2(30) = 3y \Rightarrow y = 20$

∴ Mitsumo tiene 30 años
Nicole tiene 20 años

7) **Calcule A + B si :**

$$A = (4\,\text{sen}2° + 3\cos 88°)\csc 2°$$

$$B = \frac{2\,\text{sen}10°}{\cos 80°} + \frac{3\tan 14°}{\cot 76°}$$

RESOLUCIÓN

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\sec\alpha = \csc\beta$

CO – RT

Definición de RTR

Si $0° < \alpha < 90°$

$\text{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

Por CO - RT :

$2° + 88° = 90^0 \Rightarrow \text{sen}2^0 = \cos 88^0$

$10° + 80° = 90^0 \Rightarrow \text{sen}10^0 = \cos 80^0$

$14° + 76° = 90^0 \Rightarrow \tan 14^0 = \cot 76^0$

Luego reemplazamos en A y B :

$A = (4\,\text{sen}2° + 3\,\text{sen}2°)\csc 2°$

$A = 7\,\text{sen}2° \cdot \csc 2^0 = 7(1) = 7$

$$B = \frac{2\,\cancel{\text{sen}10°}}{\cancel{\text{sen}10^0}} + \frac{3\,\cancel{\tan 14°}}{\cancel{\tan 14^0}} = 2 + 3 = 5$$

Piden : $A + B = 7 + 5$

$\therefore\ A + B = 12$

8) Para un ángulo agudo α se tiene

que : $\tan\alpha = \dfrac{2\,\text{sen}40° + \cos50°}{\cos50° + \text{sen}40°}$

Efectúe $M = \sqrt{13}\,(\,\text{sen}\alpha + \cos\alpha\,)$

RESOLUCIÓN

Definición de CO – RT

Si $0° < \alpha < 90°$; $0° < \beta < 90°$

$\alpha + \beta = 90°$

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\sec\alpha = \csc\beta$

CO – RT

$\text{sen}\alpha = \dfrac{CO}{H}$

$\cos\alpha = \dfrac{CA}{H}$

Por CO - RT :

$40° + 50° = 90° \Rightarrow \text{sen}40° = \cos50°$

Luego reemplazamos en el dato :

$$\tan\alpha = \frac{2\,\text{sen}40° + \text{sen}40°}{\text{sen}40° + \text{sen}40°} = \frac{3\,\cancel{\text{sen}40°}}{2\,\cancel{\text{sen}40°}}$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{2} = \frac{CO}{CA} \Rightarrow H^2 = (\,2\,)^2 + (\,3\,)^2$$

$$H = \sqrt{13}$$

Piden : $M = \sqrt{13}\,(\,\text{sen}\alpha + \cos\alpha\,)$

$$M = \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \cancel{\sqrt{13}}\left(\frac{5}{\cancel{\sqrt{13}}}\right)$$

$\therefore\ M = 5$