ARITHMETIC

Chapter 15

5th
SECONDARY

Divisibilidad I

SACO OLIVEROS

Teorema: La suma de dos impares consecutivos es un múltiplo de 4.

¿Seguro que es verdad? Probemos algunos casos

$1 + 3 = 4$, $3 + 5 = 8$, $5 + 7 = 12$, $19 + 21 = 40$, $157 + 159 = 316$, ...

¿Cómo demostrarlo con dos impares consecutivos cualesquiera?

Los números pares son múltiplos de dos; son de la forma $2n$.

Cada número impar es el siguiente de un número par: es de la forma $2n+1$.

El siguiente del número impar $2n + 1$ es el número par $2n + 2$, cuyo siguiente es el número impar $(2n+2) + 1 = 2n + 3$.

La suma de dos impares consecutivos es:

$(2n + 1) + (2n + 3) = 2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4$

Esta suma es un múltiplo de 4 puesto que $4n + 4 = 4(n + 1)$.

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

En general:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline 0 & k \end{array}$$

Donde:

$$\boxed{A = B \times k}$$

$A \in Z;\ B \in Z^{+};\ k \in Z$

Módulo

Notación:

$$\boxed{A = \overset{\circ}{B} = \overline{\overset{\circ}{B}} = Bk}$$

"A es múltiplo de B"

"A es divisible entre B"

"B es divisor de A"

"B es factor de A"

Para números no divisibles

Por defecto

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline r_d & k \end{array}$$

$$A = Bk + r_d$$

$$A = \overset{\circ}{B} + r_d$$

Por exceso

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline r_e & (k+1) \end{array}$$

$$A = B(k+1) - r_e$$

$$A = \overset{\circ}{B} - r_e$$

Donde:

$$A = \overset{\circ}{B} + r_d = \overset{\circ}{B} - r_e$$

Ejm

$$\begin{array}{l|l} 39 & 5 \\ \hline 4 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 39 & 5 \\ \hline 1 & (7+1) \end{array}$$

$$39 = 5x7 + 4 \qquad 39 = 5x8 - 1$$

$$39 = \overset{\circ}{5} + 4 \qquad 39 = \overset{\circ}{5} - 1$$

Donde:

$$\overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1$$

Principios fundamentales

- $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \ldots + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
- $\overset{\circ}{n}^{k} = \overset{\circ}{n},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}^{+}$
- $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
- $\overset{\circ}{n}k = \overset{\circ}{n}$
- Si $23\overset{\circ}{a} = 5 \rightarrow \overset{\circ}{a} = 5$, Observación: $23 \neq \overset{\circ}{5}$
- $(\overset{\circ}{n} + r)^{k} = \overset{\circ}{n} + r^{k}$
- $(\overset{\circ}{n} - r)^{k} = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^{k} \leftrightarrow \text{k: par} \\ \overset{\circ}{n} - r^{k} \leftrightarrow \text{k: impar} \end{cases}$
- $(\overset{\circ}{n} + a)(\overset{\circ}{n} + b)\ldots(\overset{\circ}{n} + p) = \overset{\circ}{n} + a \times b \times \ldots \times p$

- Si un numero es múltiplo de cierto módulo, será múltiplo de cualquiera de los divisores de dichos números

- Si un numero es múltiplo de varios módulos será múltiplo del (m.c.m) de dichos números

$$\text{Si } A = \overset{\circ}{35} \rightarrow A = \begin{cases} \overset{\circ}{1} \\ \overset{\circ}{5} \\ \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{35} \end{cases}$$

$$\text{Si:} \quad B = \overset{\circ}{12}$$

$$B = \overset{\circ}{15}$$

$$B = \overset{\circ}{6}$$

$$B = \text{MCM}(\overset{\circ}{12}, \overset{\circ}{15}, \overset{\circ}{6})$$

$$B = \overset{\circ}{60}$$

1

¿Cuántos múltiplos de 13 existen entre 70 y 826?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

$\overset{\circ}{13} = 13.k$

$70 < 13.k < 826$

$5,... < k < 63,...$

Donde:

$k = 6;7;8;....;63$

$\#\text{ valores }(k) = \dfrac{63 - 5}{1}$

Piden:

$\therefore \#\text{ valores }(k) = 58$

RPTA: 58

2

¿Cuántos múltiplos de 8 terminados en 6 existen entre 39 y 721?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

$$\overset{\circ}{8} = 8.k$$

$$39 < 8.k < 721$$

$$4,\ldots < k < 90,\ldots$$

Pero:

$$8.k = \ldots 6$$

$$k = \ldots 2; \ldots 7$$

Donde:

$$k = 7; 12; 17; \ldots; 87$$

$$\#\ \text{valores}\ (k) = \frac{87 - 2}{5} = \frac{85}{5}$$

Piden:

$$\therefore \#\ \text{valores}\ (k) = 17$$

RPTA: 17

3

Del 1 al 1714, ¿Cuántos números son divisibles por 6 pero no por 4?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

del 1; 2; 3; 4;. . . . . . . ;1714

* Para 6

$\overset{\circ}{6} \leq 1714$

$6.k \leq 1714$

$k \leq \boxed{285},66...$

* Para 6 y 4

MCM(6;4) = 12

$\overset{\circ}{12} \leq 1714$

$12.k \leq 1714$

$k \leq \boxed{142},83...$

Piden:

múltiplos de 6 pero no de 4

$\therefore\ 285 - 142 = 143$

RPTA: 143

4

Al dividir N entre 8 deja residuo 3. Determine el residuo que se obtiene al dividir

$$E = \left(N^3\right).(6N) + 2N \text{ entre } 8.$$

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

$$N = \overset{\circ}{8} + 3$$

Reemplazando en E

$$E = (\overset{\circ}{8} + 3)^3 . 6(\overset{\circ}{8} + 3) + 2(\overset{\circ}{8} + 3)$$

$$E = (\overset{\circ}{8} + 27)(\overset{\circ}{8} + 18) + (\overset{\circ}{8} + 6)$$

$$E = (\overset{\circ}{8} + 3)(\overset{\circ}{8} + 2) + (\overset{\circ}{8} + 6)$$

$$E = (\overset{\circ}{8} + 6) + (\overset{\circ}{8} + 6)$$

$$E = \overset{\circ}{8} + 6 + \overset{\circ}{8} + 6$$

$$E = \overset{\circ}{8} + 12 = \overset{\circ}{8} + 4$$

RPTA: $\overset{\circ}{8} + 4$

5

En un colegio hay 450 alumnos, de las mujeres se sabe que $\frac{7}{24}$ usan falda, $\frac{5}{18}$ son mayores de edad y $\frac{4}{15}$ postulan a San Marcos. ¿Cuántos hombres hay?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

Total: 450

$$\text{Mujeres} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{24} \\ \overset{\circ}{18} \\ \overset{\circ}{15} \end{array}\right\}$$

$$\text{Mujeres} = \overset{\circ}{\text{mcm}(24;18;15)}$$

$$\text{Mujeres} = \overset{\circ}{360}$$

$$\text{Mujeres} = 360.k < 450$$

$$\text{Mujeres} = 360$$

Pero:

$$\text{Varones} + \text{Mujeres} = 450$$

$$360 + \text{Varones} = 450$$

$$\therefore \text{Varones} = 90$$

RPTA: 90

6

Halle el residuo que se obtiene al dividir 1850^{125} entre 7.

RESOLUCIÓN

Operando: $1850^{125} = (\overset{\circ}{7} + 2)^{125}$

$= \overset{\circ}{7} + 2^{125}$

$= \overset{\circ}{7} + (2^3)^{41} . 2^2$

$= \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)^{41} . 2^2$

$= \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1) . 4$

$= \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} + 4$

Donde:

$1850^{125} = \overset{\circ}{7} + 4$

Piden :

$\therefore$ residuo $= 4$

RPTA: 4

7

En la fiesta de aniversario del Rotary Club asistieron 120 personas entre damas, caballeros y niños; el número de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la tercera parte del número de damas; el número de niños era igual a la quinta parte del número de damas y la cuarta parte del número de damas fue con minifalda. ¿Cuántas damas no bailaban en dicho momento?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos: Total personas = 120

$$\text{Damas:}\ \left.\begin{array}{l}\dot{3}\\ \dot{5}\\ \dot{4}\end{array}\right\}$$

Damas = $\overset{\circ}{\text{MCM}}(3;5;4)$

Damas = $\overset{\circ}{60}$

Damas = 60.k

Damas < 120 ➡ Damas = 60

Pero los niños: $\frac{1}{5}.60 = 12$

➡ Caballeros = 120 − (60 + 12) = 48

❋ Caballeros que no bailan: $\frac{1}{3}.60 = 20$

Luego:

❋ Caballeros que bailan = 48 − 20 = 28

❋ Damas que bailan = 28

Piden:

➡ Damas que no bailan 60 − 28

∴ 32

8

En una fiesta asistieron un número de personas que es mayor que 200 pero menor que 350. En cierto momento se observó que los $\frac{2}{11}$ de los asistentes son varones que están bebiendo y los $\frac{5}{13}$ de los mismos son mujeres que están bailando o bebiendo. ¿Cuántas mujeres están bailando o bebiendo?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos: # asistentes: X

$$X: \begin{cases} \overset{\circ}{11} \\ \overset{\circ}{13} \end{cases} \quad X = \overset{\circ}{MCM}(11;13) \quad X = \overset{\circ}{143} \quad X = 143.k$$

Donde: $250 < 143.k < 350$

si: $k = 2 \Rightarrow X = 286$

Luego:

- Varones que beben: $\frac{2}{11}.286 = 52$

Piden:

- Mujeres que bailan o beben:

$$\frac{5}{13}.286 = 110$$

RPTA: 110