ALGEBRA

VERANO UNI

chapter 7 Funciones

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

FUNCIONES

DEFINICIONES PREVIAS

I.- PAR ORDENADO

Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden , si los elementos del par ordenado son a y b al conjunto se le denota por (a;b) y se define de la manera siguiente : $(a;b)$

Donde :

a = Primera componente

b = Segunda componente

$* \ (x;y)$ $\quad * \ (9;4)$ $\quad * \ (-3;0)$

PROPIEDADES

$1.- \ (a;b) \neq (b;a); \ \forall \ a \neq b$

$2.- \ (a;b) = (c;d) \rightarrow a = c \ \wedge \ b = d$

II .- PRODUCTO CARTESIANO

$$(P = AxB)$$

Dado dos conjuntos no vacíos A y B , el producto cartesiano de A por B (en ese orden) se denota así A X B y se define de la manera siguiente :

$$\boxed{A\,x\,B = \{(a;b)/a \in A \;\wedge\; b \in B\}}$$

A = Conjunto de partida

B = Conjunto de llegada

Ejemplo

Dado los conjuntos $A = \{1;2;3\} \;\wedge\; B = \{-1;2\}$

Resolución

$$A\,x\,B = \{(1;-1),(1;2),(2;-1),(2;2),(3;-1),(3,2)\}$$

$$B\,x\,A = \{(-1;1),(2;1),(-1;2),(2;2),(-1;3),(2,3)\}$$

PROPIEDADES

$1.-A\,x\,B \neq B\,x\,A$

$2.-n(AxB) = n(BxA) = n(A).n(B)$

III .- RELACIONES

Son subconjuntos de un producto cartesiano.

Ejemplo

Sea el producto cartesiano :

$$\mathrm{P} = A \; x \; B = \{(1;-1),(1;2),(2;-1),(2;2),(3;-1),(3,2)\}$$

formamos las relaciones :

$$R_1 = \{(1;-1),(1;2),(2;-1)\}$$

$$R_2 = \{(1;-1),(2;2),(3;2)\}$$

$$R_3 = \{(2;-1),(3;-1),(3;2)\}$$

$$R_4 = \{(1;2),(2;-1),(3;-1)\}$$

RELACIÓN BINARIA

I.- DEFINICIÓN: Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se dice que R es una relación de A en B (en ese orden) si y solo si R es un subconjunto de A x B , es decir : $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{AxB}$.

$$\boldsymbol{R = \{(a;b)/a \in A \wedge b \in B \wedge a\,R\,b\}}$$

Donde : a R b indica la relación que existe entre las componentes a y b

Ejemplo

Dados los conjuntos $\boldsymbol{A = \{1;2;4\}} \wedge \boldsymbol{B = \{2;3\}}$. Determinar la relación de A en B definida de la manera siguiente $\boldsymbol{R = \{(a;b)/a \in A \wedge b \in B \wedge a < b\}}$

Resolución

Hallamos el prod. cartesiano A por B : $\boldsymbol{AxB = \{(1;2),(1;3),(2;2),(2;3),(4;2),(4;3)\}}$

Observar que los elementos de R son todos los pares $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{AxB/a < b}$,

luego tenemos: $\boldsymbol{R = \{(1;2),(1;3),(2;3)\}}$

FUNCIONES

DEFINICIÓN.-Dada una relación F de A en B $(F \subset AxB)$, se dice que F es una función de A en B , si y solo si para cada $x \in A$ existe a lo mas un elemento $y \in B$ tal que el par $(x; y) \in F$, es decir que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

CONDICIÓN DE UNICIDAD

Siendo F una función verifica lo siguiente : $\boldsymbol{(x; y) \in F \ \wedge \ (x; z) \in F \rightarrow y = z}$

OBSERVACIONES

1.- Toda función es una relación pero no toda relación es una función

2.- Si una función F va desde A hasta B , se le simboliza asi $F: A \longrightarrow B$

FUNCIONES

Es un caso particular de una relación y se define como un conjunto de pares ordenados en donde dos de ellos diferentes no deben tener igual su primera componente y de ser asi seria una relación pero no función.

Ejemplo

Sean los conjuntos de pares ordenados:

$G = \{(\underline{4;9}),(7;2),(\underline{4;3}),(5;8),(0;6)\} \rightarrow$ ***G no es una función***

$F = \{(2;9),(7;2),(4;3),(5;9),(0;6)\} \rightarrow$ ***F si es una función***

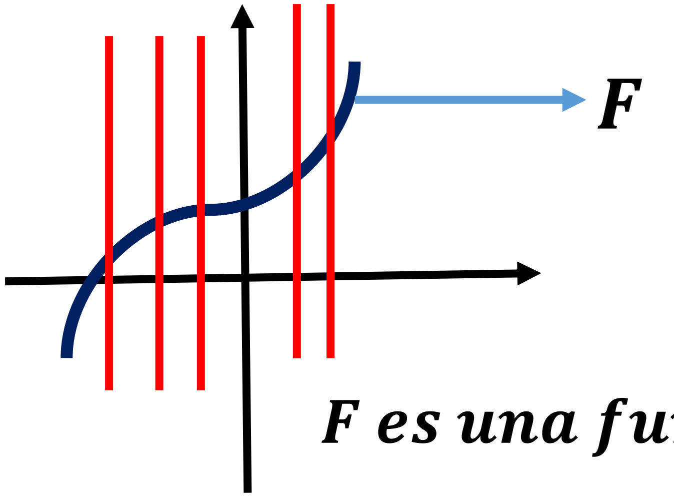
$H = \{(2;5),(7;4),(9;3),\cancel{(2;5)},\cancel{(7;4)}\} \rightarrow$ ***H si es una función***

$P = \{(8;5),(7;5),(9;5),(2;5),(0;5)\} \rightarrow$ ***P si es una función***

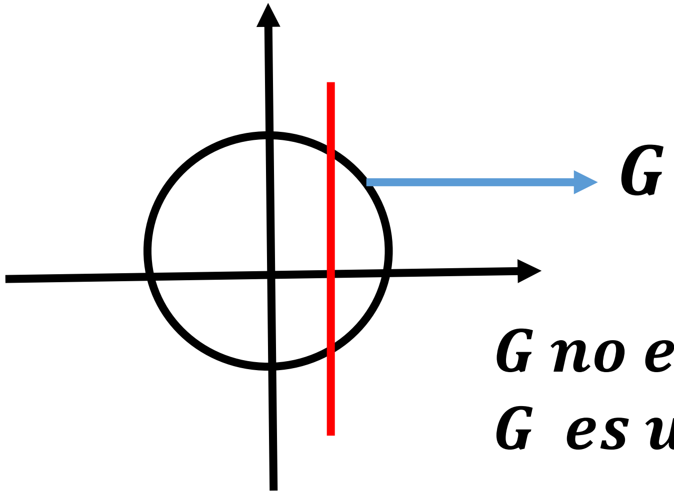
Toda función es una relación, pero no toda relación es una funcion.

TEOREMA

Toda recta vertical trazada a la grafica de una función la corta a lo mas en un solo punto



F *es una funciòn,*



G *no es una funciòn,*
G *es una relaciòn,*

1.- DOMINIO DE F = DOM(F) : (D_F) Denominado tambien conjunto de pre – imagenes es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de partida.

2.- RANGO DE F = RAN(F): (R_F) Denominado también conjunto de imagenes , recorrido o contradominio, es el conjunto de los segundos elementos de la correspondencia que pertenecen al conjunto de llegada.

Dominio (Df) y Rango(Rf) de una Funciòn

Df: es el conj. formado por las primeras componentes de los pares ordenados

Rf: es el conj. formado por las segundas componentes de los pares ordenados

Ejemplo sea la función:

$$f = \{(2;9),(7;2),(4;3),(5;9),(0;6)\}$$

$$Df = \{2;7;4;5;0\} \qquad Rf = \{9;2;3;6\}$$

Al dominio tambièn se le llama pre – imagen de la funciòn y al rango imagen o contradominio de la funciòn

Representación Gráfica

$(Aplicación)$

$A = Dom_{(F)}$

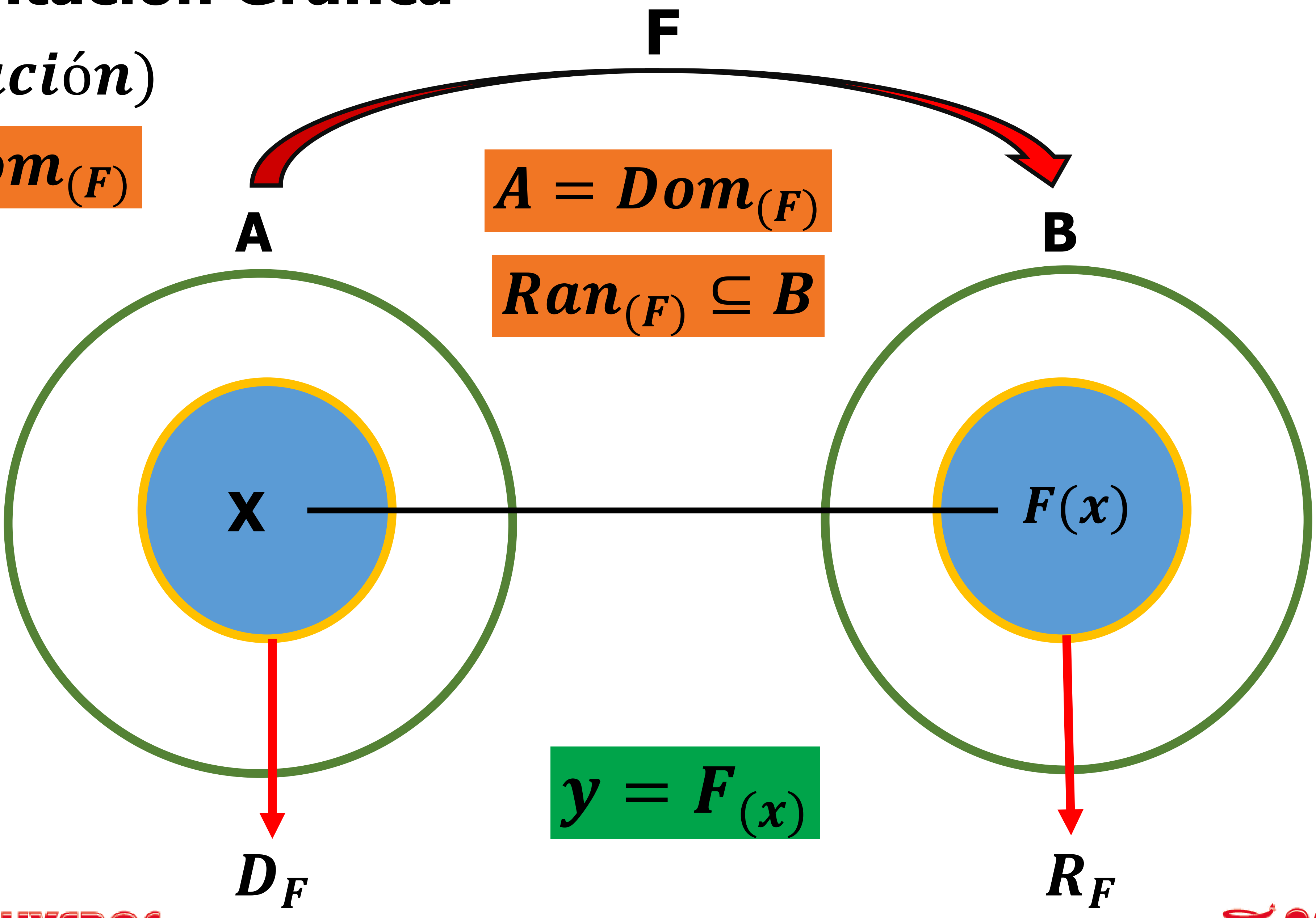
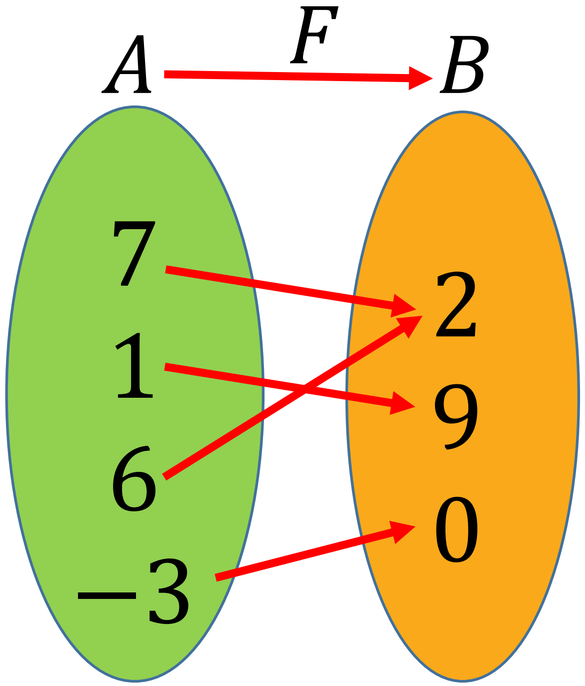


DIAGRAMA SAGITAL PARA FUNCIONES

$$Sea\ la\ función\ F:\ \ A \rightarrow B\ \ \ (Se\ lee\ función\ F\ de\ A\ en\ B)$$

$$Donde\ el\ conj.A\ es\ el\ dominio\ y\ el\ conj.B\ contiene\ al\ rango$$

<u>***Ejemplo***</u> $Sea\ la\ función\ F: A \rightarrow B\ /\ F\ = \{(7;2),(1;9),(6;2),(-3;0)\}$



$$A = D_F = \{7;1;6;-3\}$$

<u>***Regla de Correspondencia***</u>

$$F_{(x)} = y$$

$$F_{(7)} = 2$$

$$F_{(1)} = 9$$

$$F_{(6)} = 2$$

$$F_{(-3)} = 0$$

PROPIEDAD

Sea F una función de A en B , es decir : $F: A \longrightarrow B$ se cumple : $\boldsymbol{D_F \subset A \wedge R_F \subset B}$

APLICACIÓN

Dada una función F de A en B , $f: A \longrightarrow B$; se dice que F es una aplicación si y solo si su dominio es igual al conjunto de partida

$$\boxed{\boldsymbol{F \text{ es una aplicación } \leftrightarrow D_F = A}}$$

NOTA

- En caso $\boldsymbol{A, B} \subset \mathbb{R}$, diremos que F es una **función real de variable real**
- Si F es una función tal que $(x; y) \in f$, diremos entonces $\boldsymbol{y = f(x)}$

La igualdad **:** $\boldsymbol{y = f(x)}$ expresa **la regla de correspondencia** de la función real F

TEOREMA

Para que el siguiente conjunto de pares ordenados: $F = \{(a, b); (a, c)\}$

sea una función; se debe cumplir que: $\boxed{b = c}$

Ejemplo

Halle el dominio y rango de la función:

$$F = \{(1; \underline{2m - 7}), (3; \underline{3n + 2}), (1; \underline{5}), (3; \underline{14}); (m^2; n^2)\}$$

por teoria:

$$2m - 7 = 5 \rightarrow m = 6$$
$$3n + 2 = 14 \rightarrow n = 4$$

Reemplazando: $F = \{\cancel{(1; 5)}, (3; 14), (1; 5), \cancel{(3; 14)}, (6^2; 4^2)\}$

$$F = \{(1; 5), (3; 14), (36; 16)\} \begin{cases} D_F = \{1; 3; 36\} \\ R_F = \{5; 14; 16\} \end{cases}$$

Funciònes Polinomiales

***Funciòn lineal*.-** *es una funciòn de primer grado y cuya regla de correspondencia es*: $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ $\forall\, a \neq 0 \;\wedge\; x \in \mathcal{R}$

***Funciòn cuadràtica*.-** *es una funciòn de segundo grado y cuya regla de correspondencia es*:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \forall\, a \neq 0 \;\wedge\; x \in \mathcal{R}$$

***Funciòn cubica*.-** *es una funciòn de tercer grado y cuya regla de correspondencia es*:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d} \quad \forall\, a \neq 0 \;\wedge\; x \in \mathcal{R}$$

el dominio màximo de las funciones polinomiales son todos los reales.

Funciòn racional

$$F(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

para calcular el $D(F)$ *se restringue*: $h(x) \neq 0$

Ejemplo

Halle el $D(F)$ *y* $D(G)$

$$F(x) = \frac{3x+7}{2x-6}$$

$$2x - 6 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 3$$

$$Dom(F) = \mathcal{R} - \{3\}$$

$$G(x) = \frac{3x+7}{x^2-9}$$

$$x^2 - 9 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 3 \ \wedge \ x \neq -3$$

$$Dom(G) = \mathcal{R} - \{3; -3\}$$

Si: $$F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$Ran(F) = \mathcal{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Intente demostrarlo!

Funciòn Irracional

$$\boxed{F(x) = \sqrt[2n]{G(x)}} \quad ; n \in \mathbb{Z}^+$$

Se debe cumplir que:

$$G(x) \geq 0 \qquad ; x \in \mathcal{R}$$

Si el indice de la raìz es impar;

no hay ninguna restricciòn.

Ejemplo

Halle el $D(F)$ *y* $D(G)$

$$F(x) = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[3]{x}$$

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$(x + 3)(x - 3) \leq 0$$

$$Dom(F) = [-3; 3]$$

$$G(x) = x + \sqrt{x^2 + x - 6}$$

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

$$(x + 3)(x - 2) \leq 0$$

$$Dom(G) = < -\infty; -3\,] \cup [2; +\infty >$$

Funciòn Constante

$$\boxed{F(x) = k} \qquad k \neq 0$$

$$D(F) = \mathcal{R}$$

$$R(F) = \{k\}$$

Valor Absoluto

$$|x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

$$|x| \geq 0; \qquad \forall\, x \in \mathcal{R}$$

$$x^2 = |x|^2 \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$Si:\ -5 < x < -2 \rightarrow 2 < |x| < 5$$

$$Si:\ -7 < x < 5 \rightarrow 0 \leq |x| < 7$$

<u>***Teoremas***</u> $\qquad \forall\, a \geq 0$

$$Si:\ |x| = a \rightarrow x = a \vee x = -a$$

$$Si:\ |x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$Si:\ |x| \geq a \rightarrow x \leq -a \cup x \geq a$$

PRACTICA PARA LA CLASE

1. Si f es una función tal que $f: \mathbb{Q}^{+} \rightarrow \mathbb{Q}$; además

$$f=\{(7;\sqrt{x}),\ (x;4x),\ (7;2x),\ (x^2;x),\ (x^3;x)\}.$$

Determine el cardinal del rango.

RESOLUCIÓN

Si es funciòn se cumple que:

$$(7;\sqrt{x}\,) = (7;2x)$$

$$2x = \sqrt{x}$$

$$\textit{Al}\ \blacksquare \rightarrow\ 4x^2 = x$$

$$\textit{Como}\quad x > 0$$

$$4x = 1$$

$$\rightarrow\quad x = \frac{1}{4}$$

Reemplazando :

$$f = \left\{\left(7;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4};1\right),\left(\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{64};\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$Ran(f) = \left\{\frac{1}{2};1;\frac{1}{4}\right\}$$

$$\boxed{n(R_f) = 3}\ (C)$$

2. Sean las funciones $f(x)=\sqrt[4]{9-x^2}$; $g(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$ y $h(x)=x^5+4x^3-x+2$. Determine

$$\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g)\cap\mathrm{Dom}(h)$$

RESOLUCIÓN

$I)$ ***Calculo del Df***

$$9-x^2\geq 0$$
$$x^2-9\leq 0$$
$$(x+3)(x-3)\leq 0$$
$$Df=[-3;3]$$

$II)$ ***Calculo del Dg***

$$x-2\neq 0\rightarrow x\neq 2$$
$$Dg=\mathcal{R}-\{2\}$$

$III)$ ***Calculo del Dh***

como h es una funciòn polinomial

$$Dh=\mathcal{R}=<-\infty;+\infty>$$

Luego:

$$Df\cap Dg\cap Dh$$
$$=[-3;3]-\{2\}\quad(D)$$

3. La siguiente tabla muestra parte del dominio y rango de una función lineal f.

x	2	5	8	b
$f(x)$	10	a	28	37

La suma de a y b es

RESOLUCIÓN

$$f(x) = mx + n$$

$* \quad f(2) = m(2) + n$

$$2m + n = 10 \quad \ldots (i)$$

$* \quad f(8) = m(8) + n$

$$8m + n = 28 \quad \ldots (ii)$$

Resolviendo (i) *y* (ii)

$$m = 3 \;\wedge\; n = 4$$

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f(5) = 3(5) + 4 \;\rightarrow\; a = 19$$

$$f(b) = 3(b) + 4$$

$$3b + 4 = 37 \;\rightarrow\; \mathrm{b} = 11$$

$$a + b = 30 \quad (D)$$

4. Dada M$=\{x \in \mathbb{N} / \ |x| \le 5\}$, sea f una función de M en $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\sqrt{5-x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

donde la suma de los elementos del rango

$$es: \ \sqrt{a}+\sqrt{a}^{-1}+\sqrt{b}^{-1}+2,$$ entonces

$a \cdot b$ es

RESOLUCIÓN

$$En\ M: \quad |x| \le 5$$

$$-5 \le x \le 5$$

$$M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$Como: \quad f: \quad M \to \mathcal{R}$$

$$Dom(f) = \{3; 4; 5\}$$

$$f(3) = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{1}} = \sqrt{2} + 1$$

$$f(4) = \sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(5) = \sqrt{0} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Ran(f) = \left\{\sqrt{2}+1; 1+\sqrt{2}^{-1}; \sqrt{3}^{-1}\right\}$$

$$\sum = \sqrt{2} + 1 + 1 + \sqrt{2}^{-1} + \sqrt{3}^{-1}$$

$$\sum = \sqrt{2} + \sqrt{2}^{-1} + \sqrt{3}^{-1} + 2 \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$a.b = 6 \quad (C)$$

5. Calcule el rango de la siguiente función

$$f(x) = 5|x| - 2;\ x \in [-1; 4\rangle$$

dé como respuesta el valor de la menor imagen.

RESOLUCIÓN

$$y = 5|x| - 2$$

del dominio de la funciòn

$$-1 \leq x < 4$$

$$0 \leq |x| < 4$$

$$0 \leq 5|x| < 20$$

$$-2 \leq 5|x| - 2 < 18$$

$$-2 \leq y < 18$$

$$Ran(f) = [-2; 18 >$$

el menor valor del rango o imagen de la funciòn es:

$$\boxed{-2} \quad (C)$$

6. Dado A={x ∈ ℤ / |x| ≤ 4}, sean f y g funciones de A en ℝ, definidas por $f(x)=x^2-3$ y $g(x)=\sqrt{1-x}+1$. Halle la intersección del rango de f con el dominio de g.

RESOLUCIÓN

A: $\quad |x| \leq 4$

$$-4 \leq x \leq 4$$

$$A = \{-4; -3; -2; \ldots; 2; 3; 4\}$$

$$f: \ A \ \rightarrow \ R$$

$$f(x) = x^2 - 3; \quad D(f) = A$$

$$R(f) = \{13; 6; 1; -2; -3\}$$

$$g(x) = \sqrt{1-x} + 1;$$

$$1 - x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 1$$

$$x \in \ < -\infty; 1\,]$$

$$D(g) = A \cap < -\infty; 1\,]$$

$$D(g) = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$$

$luego$:

$$R(f) \cap D(g) = \{-3; -2; 1\} \ (D)$$

7. Halle el rango en

$$f(x)=\sqrt{4-|x|}+1$$

RESOLUCIÓN

$$y=\sqrt{4-|x|}+1$$

Sabemos que:

$$|x|\geq 0$$

$$-|x|\leq 0$$

$$4-|x|\leq 4$$

$$0\leq\sqrt{4-|x|}\leq 2$$

$$1\leq\sqrt{4-|x|}+1\leq 3$$

$$1\leq y\leq 3$$

$$Ran(f)=[1;3]$$

(B)

8. Halle el rango de la función cuadrática f la cual satisface

$$f(0)=11;\ f(-1)=6;\ f(1)=18$$

para todo preimagen real de f.

RESOLUCIÓN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(0)=11 \rightarrow c=11$$

$$f(1)=18 \rightarrow a+b+c=18$$

$$a+b=7$$

$$f(-1)=6 \rightarrow a-b+c=6$$

$$a-b=-5$$

$$resolviendo: \begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$$

$$f(x)=x^2+6x+11$$

$$f(x)=(x+3)^2+2$$

el menor valor de f es 2:

$$Ran(f)=[2;+\infty> \quad (A)$$

9. Halle el rango de la función

$$f(x) = -x^2 + 2x$$

sabiendo que su dominio es igual al conjunto de los números reales.

RESOLUCIÓN

$$y = -x^2 + 2x$$

Sabemos que:

$$(x-1)^2 \geq 0$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 - 2x \geq -1$$

$$-x^2 + 2x \leq 1$$

$$y \leq 1$$

$$Ran(f) = \langle -\infty; 1]$$

$$(B)$$

10. Determine el rango de la función H definida por $H(x)=x^2-2(|x|+1)+7$.

RESOLUCIÓN

Efectuando:

$$y = x^2 \ -2|x| - 2 + 7$$

$$y = x^2 -2|x| + 5 \ldots (\alpha)$$

Sabemos que:

$$(|x| - 1)^2 \geq 0$$

$$|x|^2 -2|x| + 1 \geq 0$$

$$x^2 -2|x| + 5 \geq 4$$

$$de\ (\alpha): \quad y \geq 4$$

$$Ran(H) = [\ 4; +\infty >$$

(E)

11. Si $\langle -5; -4\rangle$ es el dominio de la función f, definida por $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$. Obtenga el rango de la función.

RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x+1}{x+3} - 1 + 1$$

$$y = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}-3}{x+3} + 1$$

$$y = \boxed{\frac{-2}{x+3}+1}$$

$$Dom(f) \rightarrow \quad -5 < x < -4$$

$$+3 \rightarrow \quad -2 < x+3 < -1$$

$$inv. \rightarrow \quad -\frac{1}{2} > \frac{1}{x+3} > -1$$

$$x\,(-2) \rightarrow \quad 1 < \frac{-2}{x+3} < 2$$

$$+1 \rightarrow \quad 2 < \boxed{\frac{-2}{x+3}+1} < 3$$

$$2 < y < 3$$

$$Ran(f) = \langle 2; 3 \rangle \quad (B)$$

12. Sea la función $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$, halle

$$Ran(f) \cap Dom(f)$$

RESOLUCIÓN

Calculo del dominio

$$4x - x^2 \geq 0$$
$$x^2 - 4x \leq 0$$
$$x(x-4) \leq 0$$
$$0 \leq x \leq 4$$
$$x \in [0;4] = Dom(f)$$

Calculo del rango

$$Dom(f) \rightarrow \quad 0 \leq x \leq 4$$
$$-2 \leq x-2 \leq 2$$
$$0 \leq x^2 - 4x + 4 \leq 4$$
$$-4 \leq x^2 - 4x \leq 0$$
$$4 \geq 4x - x^2 \geq 0$$
$$2 \geq \sqrt{4x-x^2} \geq 0$$
$$Ran(f) = [0;2]$$
$$Ran(f) \cap Dom(f) = [0;2] \quad (B)$$

13. Si f es una función cuadrática; cuya regla de correspondencia la conforma solo un polinomio mónico de término independiente unitario. Halle $f(2x)$ si $f(3)=13$.

RESOLUCIÓN

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

Como el polinomio f es mònico, su coef. principal a es la unidad.

Tambièn por dato $\boxed{c = 1}$

Luego:

$$f(x) = x^2 + b.x + 1$$
$$f(3) = 3^2 + b.3 + 1$$

$$9 + 3b + 1 = 13 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$f(2x) = (2x)^2 + (2x) + 1$$

$$f(2x) = 4x^2 + 2x + 1$$

(D)

14. Halle el rango de la siguiente función

$$f(x)=\frac{(x^2-x)(x^2+2x)}{x^2+x-2}$$

RESOLUCIÓN

Calculo del dominio

$$x^2+x-2\neq 0$$

$$(x+2)\,(x-1)\neq 0$$

$$x+2\neq 0 \quad \wedge \quad x-1\neq 0$$

$$x\neq -2 \quad \wedge \quad x\neq 1$$

$$Dom(f)=\mathcal{R}-\{-2;1\}$$

$$\rightarrow y=\frac{x.\cancel{(x-1)}.x.\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}.\cancel{(x-1)}}$$

$$y=x^2 \longrightarrow y\geq 0$$

$$pero:\begin{cases} x\neq -2 & \rightarrow \quad y\neq 4 \\ x\neq 1 & \rightarrow \quad y\neq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{Ran(f)=\mathcal{R}_0^+-\{4;1\}}$$

(C)

15. Halle la menor imagen de la siguiente función

$$G(x) = 4^{x^2 - 4|x| + 1}$$

RESOLUCIÓN

Sea: $E = x^2 - 4|x| + 1$

$$E = |x|^2 - 4|x| + 1$$

$$E = \underline{|x|^2 - 4|x| + 4} - 3$$

$$E = (|x| - 2)^2 - 3$$

El menor valor que va a tomar la imagen de la función G ocurrira cuando E tome su menor valor.

$$E_{mìnimo} = -3$$

$$G_{mìnimo} = 4^{-3} = (2^2)^{-3}$$

$$= 2^{-6}$$

Luego:

$$Ran(G) = [2^{-6}; +\infty >$$

piden:

$$\boxed{G_{mìnimo} = 2^{-6}} \quad (D)$$

16. Halle el rango de la función f si

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

RESOLUCIÓN

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

$$yx^2-xy+y=x^2+x+1$$

$$yx^2-x^2-xy-x+y-1=0$$

$$(y-1)x^2-(y+1)x+(y-1)=0$$

$$Como:\ x\in\mathcal{R}\rightarrow\Delta\geq 0$$

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)(y-1)\geq 0$$

$$(y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0$$

$$(y+1)^2-(2y-2)^2\geq 0$$

$$(2y-2)^2-(y+1)^2\leq 0$$

$$(2y-2+y+1)\ (2y-2-y-1)\leq 0$$

$$(3y-1).\ (y-3)\leq 0$$

$$\boxed{Ran(f)=\left[\frac{1}{3};3\right]}\quad (B)$$

17. Halle Dom(f) ∩ Ran(f) de la función

$$f(x)=\begin{cases}3x;\ x\in[-2;\ 3\rangle & \dots\dots(f_1)\\ x^2;\ 3\le x<5 & \dots\dots(f_2)\end{cases}$$

RESOLUCIÓN

$$Dom(f)=Dom(f_1)\cup Dom(f_2)$$

$$Dom(f)=[-2;3>\ \cup\ [3;5>$$

$$Dom(f)=[-2;\ 5>$$

$$Calculo\ del\ Ran(f_1)$$

$$-2\le x<3$$

$$-6\le 3x<9$$

$$Ran(f_1)=[-6;9>$$

$$Calculo\ del\ Ran(f_2)$$

$$3\le x<5$$

$$9\le x^2<25$$

$$Ran(f_2)=[9;25>$$

$$Ran(f)=Ran(f_1)\cup Ran(f_2)$$

$$Ran(f)=[-6;9>\ \cup\ [9;25>$$

$$Ran(f)=[-6;\ 25>$$

$$piden:\ [-2;\ 5>\ \cap\ [-6;\ 25>$$

$$[-2;\ 5>\quad (A)$$

18. Halle el menor valor de rango de la función $f(x)=x^2-|x|+1$, si $Dom(f)=[-3;3]$.

RESOLUCIÓN

$$y = |x|^2 - |x| + 1$$

$$-3 \le x \le 3$$

$$0 \le |x| \le 3$$

$$-\frac{1}{2} \le |x| - \frac{1}{2} \le \frac{5}{2}$$

elevando al cuadrado

$$0 \le |x|^2 - |x| + \frac{1}{4} \le \frac{25}{4}$$

$$\frac{3}{4} \le |x|^2 - |x| + 1 \le 7$$

$$\frac{3}{4} \le y \le 7$$

$$Ran(f) = \left[\frac{3}{4}; 7\right]$$

$$\boxed{\frac{3}{4} = 0,75}\ (B)$$

19. Dada la función

$$f(x)=\frac{4}{x^2-2x+3}-1$$

halle el Ran(f).

RESOLUCIÓN

Sabemos que:

$$(x-1)^2 \geq 0$$

$$x^2-2x+1 \geq 0$$

$$x^2-2x+3 \geq 2$$

$$0<\frac{1}{x^2-2x+3}\leq\frac{1}{2}$$

$$0<\frac{4}{x^2-2x+3}\leq 2$$

$$-1<\frac{4}{x^2-2x+3}-1\leq 1$$

$$-1<f(x)\leq 1$$

$$-1<y\leq 1$$

$$Ran(f) =< -1;1]$$

(E)

20. Dada la función $h: A \to \mathbb{R}; A \subset \mathbb{R}^+$, tal que $h(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ y $\operatorname{Ran}(h) = \langle 1; +\infty \rangle$. Halle el conjunto A.

RESOLUCIÓN

$$y = \frac{x^2}{2-x}$$

$$y > 1$$

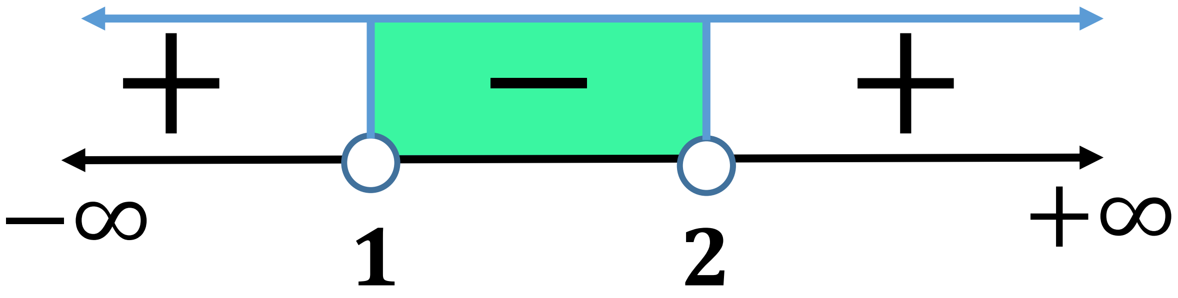
$$\frac{x^2}{2-x} > 1$$

$$\frac{x^2}{2-x} - 1 > 0$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{2-x} > 0$$

$$+$$

$$\frac{\cancel{(x+2)}\,(x-1)}{(x-2)} < 0$$



$$A = Dom(h) = <1; 2>$$

$$\boxed{<1; 2>} \quad (B)$$