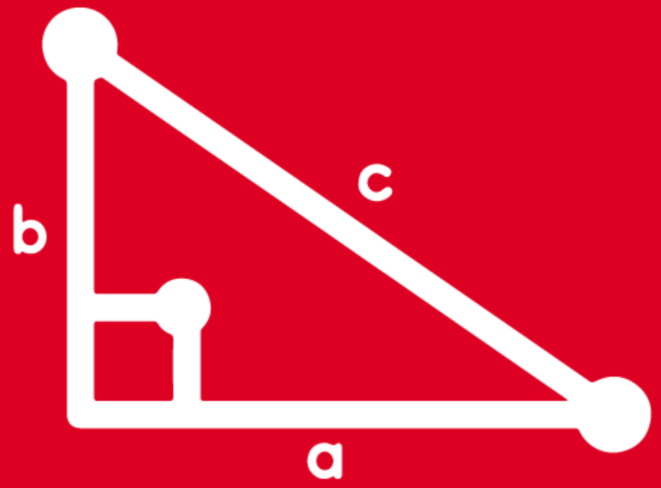
TRIGONOMETRY



- Razones Trigonométricas de un Ángulo en Posición Normal

VERANO UNI

OBJETIVOS

- Reconocer a un ángulo trigono-métrico en posición normal.
- Definir las razones trigonomé-tricas de un ángulo en posición normal.
- Calcular las razones trigonométri-cas de los ángulos cuadrantales.
- Establecer propiedades entre los ángulos coterminales.

HELICOMOTIVACIÓN

El **Canadarm 2** , es un brazo manipulador robótico de la *Estación Espacial Internacional*. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones. Calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere un uso repetido de las razones trigonométricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

HELICOTEORÍA

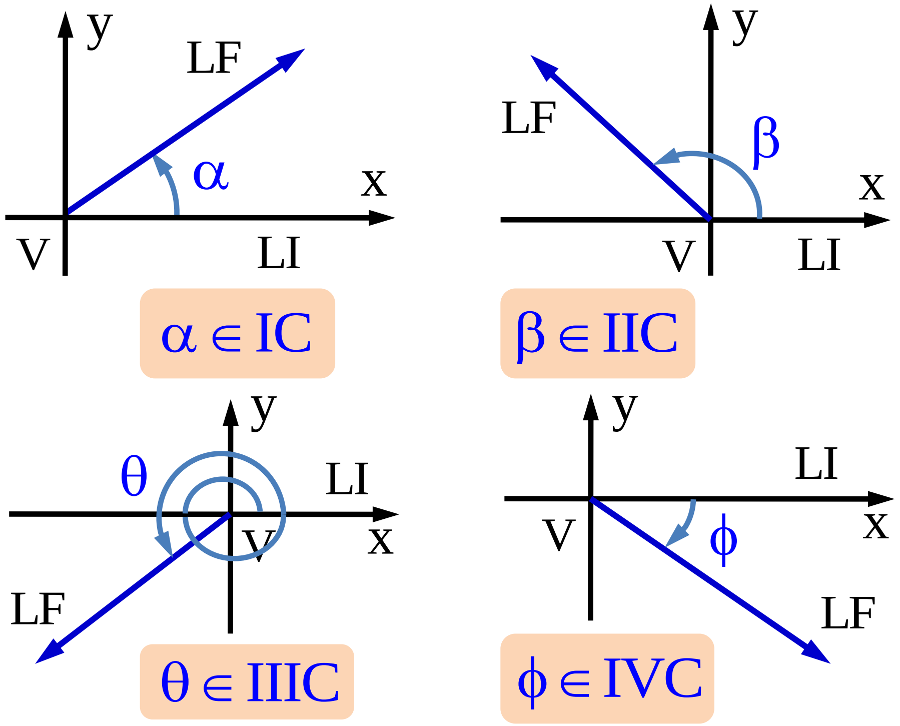
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

1. Ángulo en Posición Normal :

También llamado ángulo en **posición canónica** o **posición estándar** ; es un ángulo trigonométrico cuyo vértice está en el origen de coordenadas cartesianas y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas . El lado final nos indica el cuadrante al cual pertenece el ángulo .

Ejemplos :

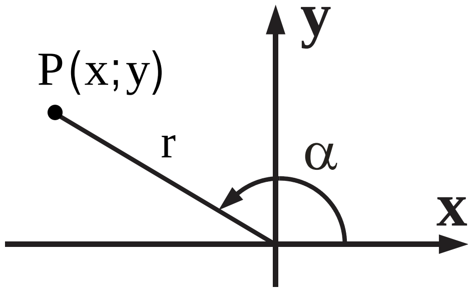
Considerando : V : Vértice; LI : Lado inicial; LF : Lado final



ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

2. Definición :

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo " α " en posición normal , debemos conocer un punto $P(x,y)$ de su lado final.



Luego calculamos la distancia del punto " P " al origen , llamado radio vector (r) .

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; r > 0$$

Así : $\begin{cases} x : \text{Abscisa de } P \\ y : \text{Ordenada de } P \\ r : \text{Radio vector de } P \end{cases}$

Para el ángulo "α" , tenemos :

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Radio Vector}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Radio Vector}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{Radio Vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y}$$

ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

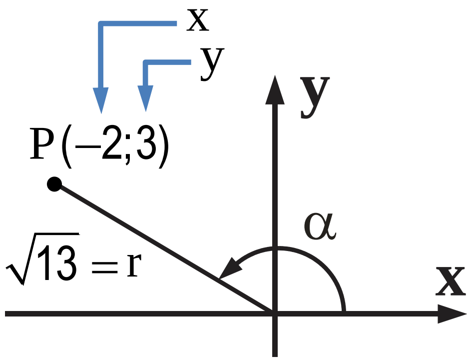
Ejemplo :

Siendo $P(-2;3)$ un punto que pertenece al lado final del ángulo α en posición normal.

Calcular : $M=\sqrt{13}\,(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)$

Resolución :

Graficando



Luego : $r=\sqrt{(-2)^2+(3)^2}\ \Rightarrow r=\sqrt{13}$

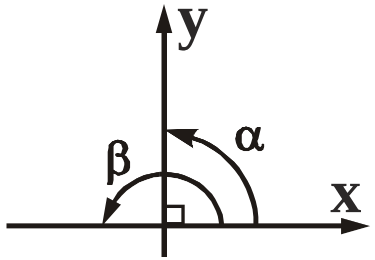
Piden : $M=\sqrt{13}\left[\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)+\left(\dfrac{-2}{\sqrt{13}}\right)\right]=\cancel{\sqrt{13}}\left[\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{13}}}\right]$

$\therefore\ M=1$

3. Ángulos Cuadrantales :

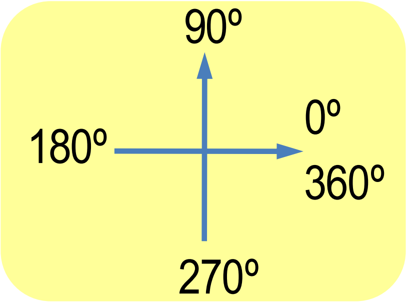
Son aquellos ángulos trigonométricos ubicados en posición normal cuyo lado final se encuentra sobre alguno de los semiejes del plano cartesiano.

Del gráfico $\alpha=90^\circ$ y $\beta=180^\circ$ son ángulos cuadrantales.

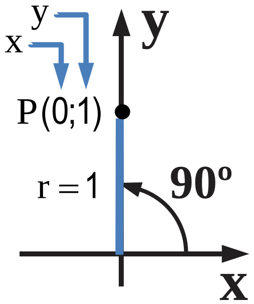


NOTA : Los ángulos cuadrantales tienen la forma $90^\circ n\ ;\ n\in\mathbb{Z}$

De manera práctica, ubicamos los ángulos cuadrantales principales así :



Aplicación : Cálculo de la RT de 90º



$$\operatorname{sen}90^\circ=\frac{1}{1}=1 \qquad \cos 90^\circ=\frac{0}{1}=0$$

$$\tan 90^\circ=\frac{1}{0}=\text{ND} \qquad \cot 90^\circ=\frac{0}{1}=0$$

$$\sec 90^\circ=\frac{1}{0}=\text{ND} \qquad \csc 90^\circ=\frac{1}{1}=1$$

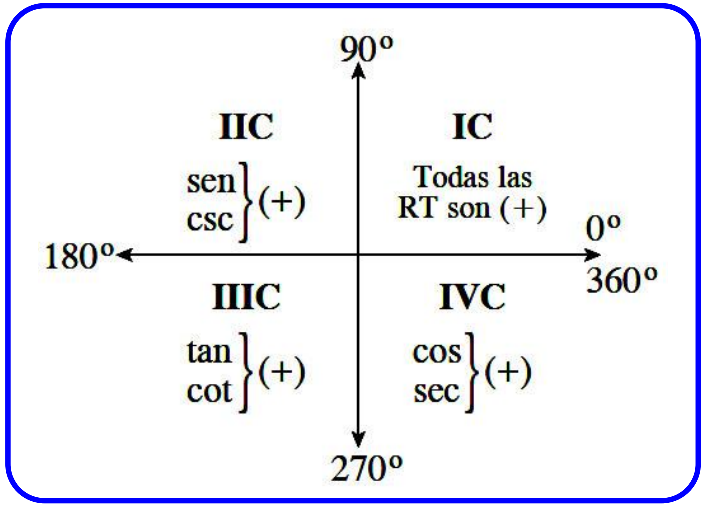
ND : No determinado

4. RT de los Ángulos Cuadrantales :

RT \ ∢	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	–1	ND	1
csc	ND	1	ND	–1	ND

5. Signos de las RT en los Cuadrantes :

Usando la definición para calcular las RT de un ángulo en posición normal , estas pueden ser ***positivas*** o ***negativas*** según cada cuadrante.

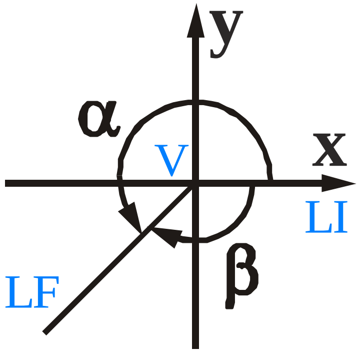


Ejemplos :

- Si : $\operatorname{sen}\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \text{IC} \vee \alpha \in \text{IIC}$
- Si : $\cos\beta < 0 \Rightarrow \beta \in \text{IIC} \vee \beta \in \text{IIIC}$
- Si : $\operatorname{sen}\theta > 0 \wedge \cos\theta < 0 \Rightarrow \theta \in \text{IIC}$

6. Ángulos Coterminales :

También llamados **ángulos cofinales** , son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial , vértice y lado final.



Los ángulos α y β son coterminales

Propiedad 1 :

En general , la diferencia de dos ángulos coterminales es un número entero de vueltas.

$$\boxed{\alpha - \beta = 360^{\circ} n} \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

Propiedad 2 :

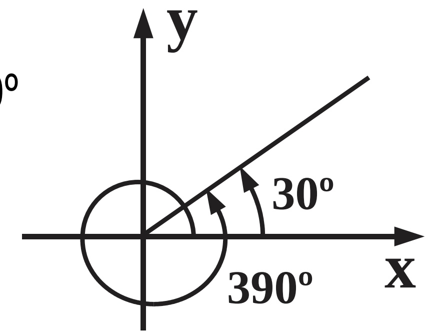
Los ángulos coterminales tienen las mismas razones trigonométricas.

$$\boxed{RT(\alpha) = RT(\beta)}$$

Ejemplo :

Los ángulos 390º y 30º son coterminales

Para $\alpha = 390^{\circ}$ y $\beta = 30^{\circ}$, tenemos :



Propiedad 1

$$390^{\circ} - 30^{\circ} = 360^{\circ}$$

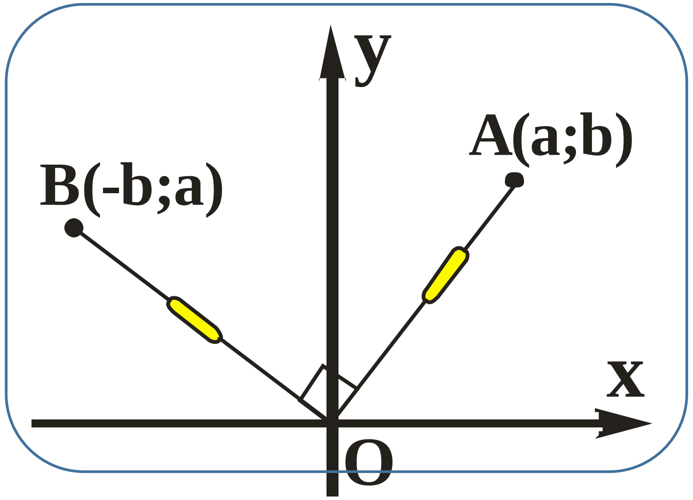
$$390^{\circ} - 30^{\circ} = 360^{\circ}\underbrace{(1)}_{n}$$

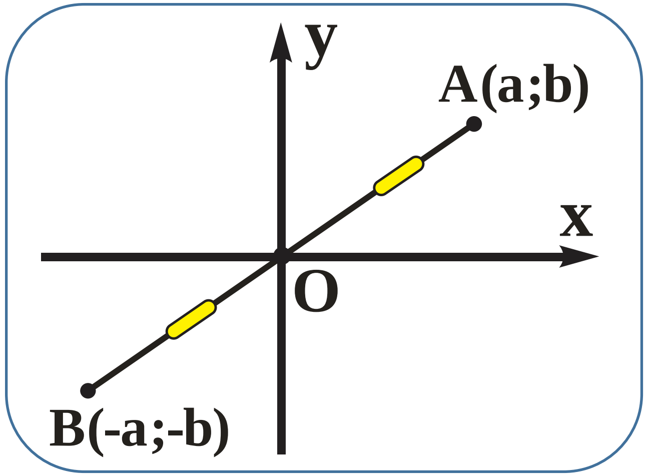
Propiedad 2

$$\text{sen}390^{\circ} = \text{sen}30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 390^{\circ} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PROPIEDADES





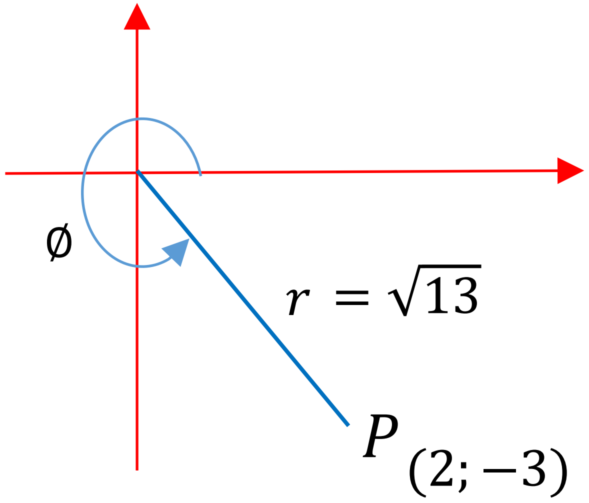
1. Si el punto P(2; –3) pertenece al lado final del ángulo canónico ϕ, calcule

$$A = \sqrt{13}\csc\phi - \frac{1}{2}\cot\phi$$

A) 1 B) –1 C) –2
D) 2 E) –4

RESOLUCIÓN:

Ubicamos el punto P , en el plano cartesiano



usamos: $\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2}}$

$$r = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{13}$$

en el gráfico:

$$csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{-3} \quad \wedge \quad cot\alpha = \frac{2}{-3}$$

$$piden\,; \sqrt{13}csc\emptyset - \frac{1}{2}cot\emptyset$$

$$= \sqrt{13}.\left(\frac{\sqrt{13}}{-3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{-3}\right)$$

$$= \left(\frac{13}{-3}\right) - \left(\frac{1}{-3}\right)$$

$$= \frac{12}{-3} = \boxed{-4}$$

RECORDAR:

$$csc\alpha = \frac{r}{y}$$

$$cot\alpha = \frac{x}{y}$$

ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

2. ¿A qué cuadrante pertenece θ si

$$P = \sqrt{\operatorname{sen}\theta \cdot \sqrt{-\cos\theta}}$$

es un número real?

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) θ no existe

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$P = \sqrt{\underbrace{sen\theta.\underbrace{\sqrt{-cos\theta}}_{+}}_{+}}$$

$* \quad -cos\theta > 0$

$cos\theta < 0$

$\theta \in IC \vee IIC$

$* \quad sen\theta > 0$

$\theta \in IIC \vee IIIC$

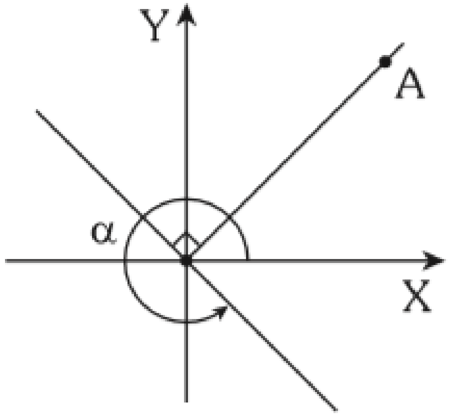
Para que se cumplan ambas condiciones $\theta \in IIC$

$\therefore \boxed{\theta \in IIC}$

ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

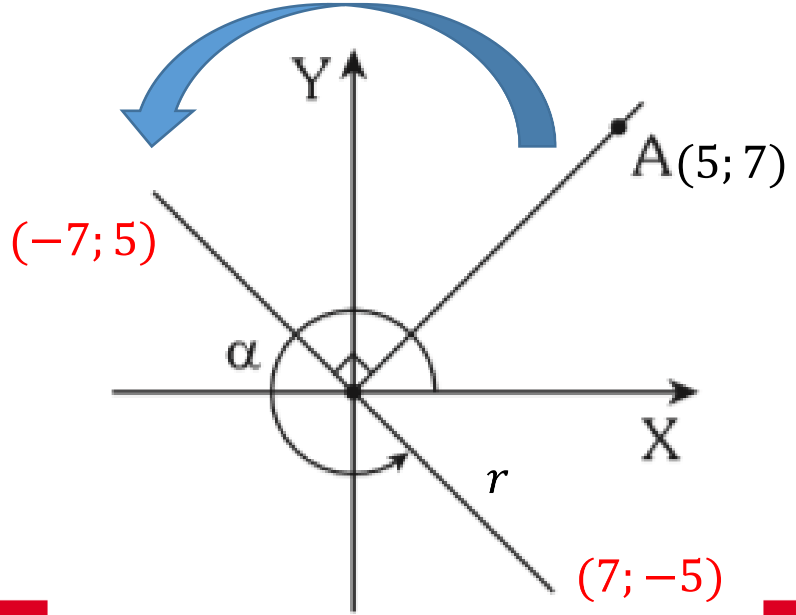
3. En la figura mostrada, las coordenadas del punto A son (5; 7). Calcule

$$r = \sqrt{74}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha) - 14\tan\alpha$$



A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

RESOLUCIÓN:



usamos: $\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$r = \sqrt{(7)^2 + (-5)^2}$$

$$r = \sqrt{34}$$

luego para el lado final de "α"

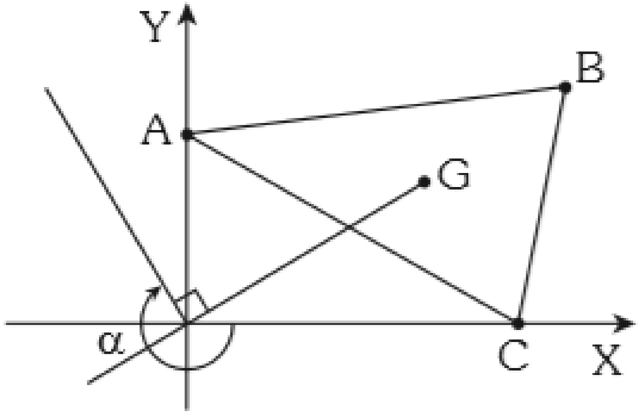
x=7	y =-5	r=$\sqrt{74}$

PIDEN: $r = \sqrt{74}(sen\alpha + cos\alpha) - 14tan\alpha$

$$r = \sqrt{74}\left(\frac{-5}{\sqrt{74}} + \frac{7}{\sqrt{74}}\right) - 14.\left(\frac{-5}{7}\right)$$

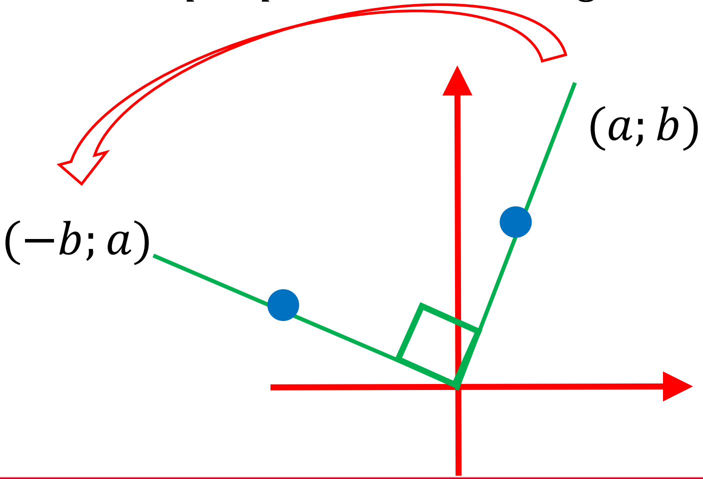
$$r = (2) + 10 = \boxed{12}$$

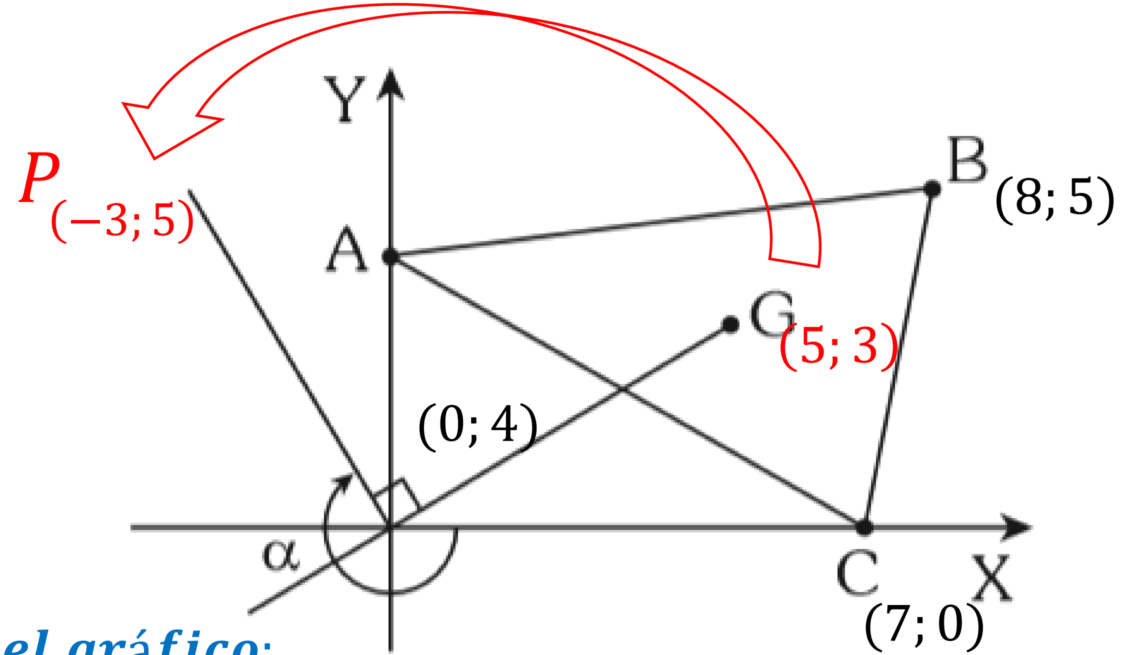
4. De la figura, A(0; 4), B(8; 5) y C(7; 0). Calcule tan θ, siendo G el baricentro de la región triangular ABC.



A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

RESOLUCIÓN: *propiedad de ortogonales*:





del gráfico:

coordenadas del baricentro

$$G = \left(\frac{0+8+7}{3}; \frac{4+5+0}{3}\right) = (5; 3)$$

por propiedad de ortogonales , hallamos coordenadas de "P"

$$P = (-3; 5)$$

$$\text{luego} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{-3} = \boxed{-\frac{5}{3}}$$

5. Si

$$\tan\alpha = a + \frac{1}{a};\ \forall\, a \in \mathbb{R}^{+}$$

calcule $E = \sqrt{5}\csc\alpha$ sabiendo que $\tan\alpha$ toma su menor valor.

A) –1 B) –1,5 C) –2

D) –2,5 E) –3

RESOLUCIÓN:

propiedad:

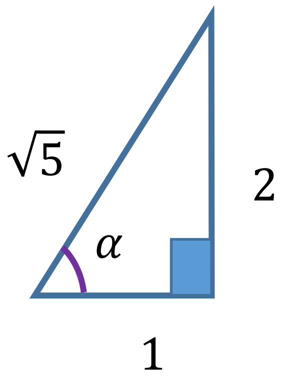
$$\boxed{\begin{array}{c} si\ \ a > 0 \\ a + \dfrac{1}{a} \geq 2 \end{array}}$$

Del dato: $$tan\alpha = \underbrace{a + \frac{1}{a}}_{\geq 2}$$

$$tan\alpha_{MÍN} = 2 \qquad ("\alpha"\ \in\ IC \vee IIIC)$$

método práctico

ahora asumimos "α" como ángulo agudo



luego $$csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad csc\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad ("\alpha"\ \in\ IC \vee IIIC)$$

piden:

$$E = \sqrt{5}csc\alpha$$

$$E = \sqrt{5}\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \boxed{\pm\frac{5}{2}}$$

6. Si θ es un ángulo canónico del tercer cuadrante, el cual cumple

$$(\tan\theta)^{2\cot\theta} = \frac{8}{27}$$

calcule $W = 3\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta$.

A) 0 B) $\sqrt{13}$ C) $-\sqrt{13}$ D) 13 E) -13

RESOLUCIÓN:

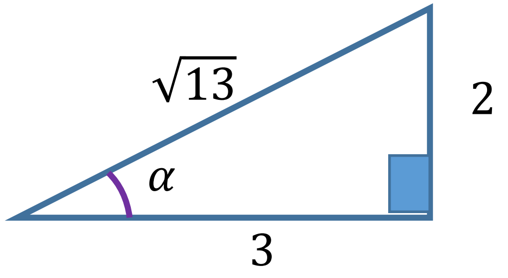
Del dato: $(tan\theta)^{2cot\theta} = \dfrac{2^3}{3^3}$

$$(tan\theta)^{2cot\theta} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$(tan\theta)^{2cot\theta} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2.\frac{3}{2}}$$

$$tan\theta = \frac{2}{3} \quad ; \ \theta \in IIIC$$

ahora asumimos "α" como ángulo agudo



$$sen\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \wedge \quad cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Colocamos el signo según el cuadrante:

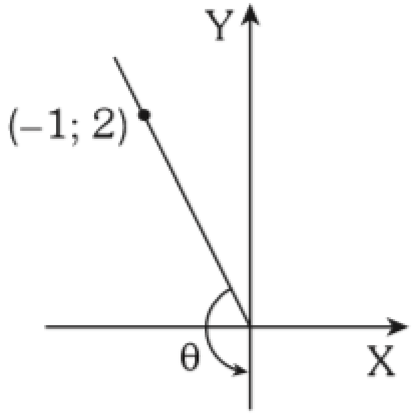
$$sen\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad \wedge \quad cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

Piden $W = 3cos\theta + 2sen\theta$

Piden $W = 3\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) = \boxed{-\dfrac{13}{\sqrt{13}}}$

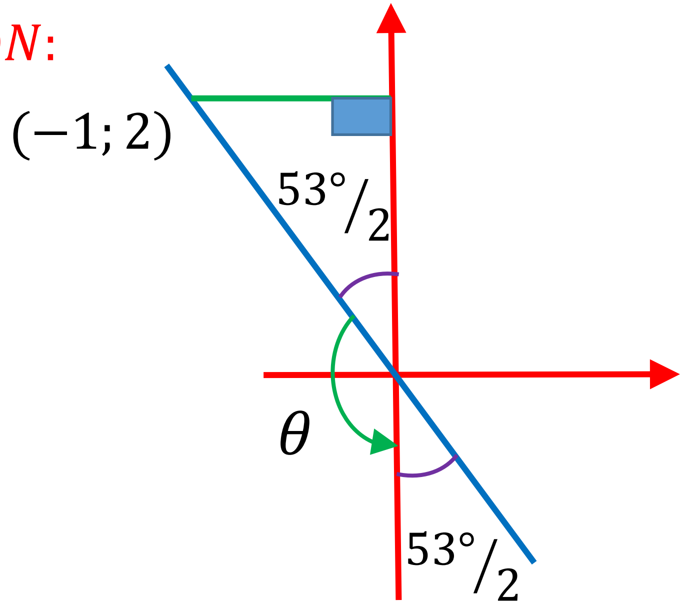
7. De la figura, calcule

$$M = \left(\sqrt{5}\csc\theta - \cot\theta \cdot \operatorname{sen}270^\circ\right)\sec 180^\circ$$

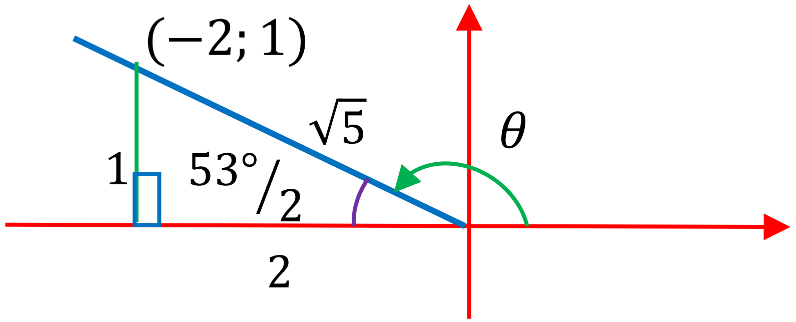


A) 1 B) 2 C) 7 D) –7 E) –3

RESOLUCIÓN:



ubicando al ángulo "θ" en posición normal



$$M = \left(\sqrt{5}\csc\theta\ - \cot\theta\, .\, sen270^{\circ\circ}\right)sec180^\circ$$

$$M = \left(\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{1}\right) - \left(\frac{-2}{1}\right).(-1)\right)(-1)$$

$$\boxed{M = -3}$$

8. Siendo α y θ ángulos cuadrantales positivos y menores a una vuelta, tal que se cumple

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\theta$$

además, $\alpha \neq \theta$, calcule $\alpha + \theta$.

A) 0° B) 90° C) 180°

D) 360° E) 540°?

RESOLUCIÓN:

Del enunciado: $\alpha, \theta \in \{90°, 180°, 270°\}$

$*\quad cos^2\alpha = 1 - sen^2\theta$

Si $\alpha = 90°$

$0 = 1 - sen^2\theta$

$\overbrace{180° \quad 270°}$

$\textit{se cumple para } \theta = 270°$

$*\quad cos^2\alpha = 1 - sen^2\theta$

Si $\alpha = 180°$

$1 = 1 - sen^2\theta$

$\overbrace{180° \quad 270°}$

$\theta = 180°$

(no cumple la condición $\alpha \neq \theta$*)*

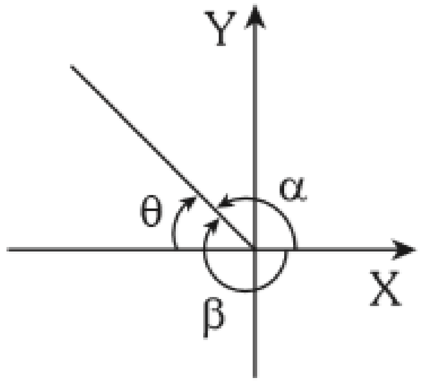
se concluye que $\boxed{\alpha = 90°} \wedge \boxed{\theta = 270°}$

$\therefore \quad \boxed{\alpha + \theta = 360°}$

ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

9. Del gráfico, calcule

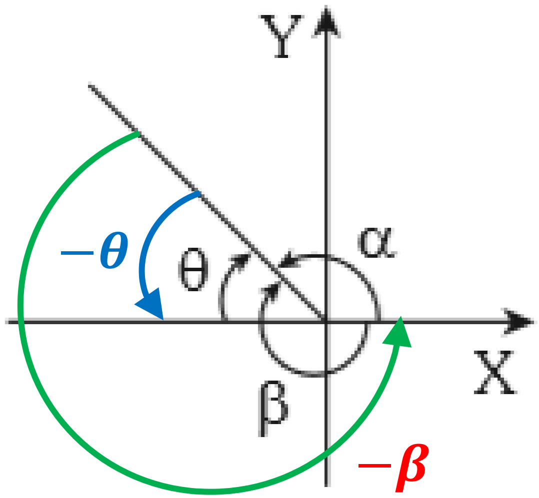
$$J = 2\operatorname{sen}(\alpha - \beta) + 3\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \operatorname{sen}(\beta - \theta)$$



A) 0° B) 90° C) 180°

D) 360° E) 540°

RESOLUCIÓN:



del gráfico:

$* \ \alpha - \beta = 360°$

$* \ -\beta = -\theta + 180°$

$\beta - \theta = -180°$

Reemplazando en J:

$$J = 2sen(\alpha - \beta) + 3\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - sen(\beta - \theta)$$

$$J = 2sen(360°) + 3\cos\left(\frac{360°}{2}\right) - sen(-180°)$$

$$J = 2.(0) + 3\cos(180°) - sen(-180°)$$

$$J = 0 + 3(-1) - (0)$$

$$\boxed{J = -3}$$

ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

10. Se sabe que α, θ y ϕ son ángulos cuadrantales, positivos, diferentes entre sí y menores que una vuelta. Si α es coterminal con (–α) y ϕ es coterminal con –990°, calcule

$$\cos\frac{\alpha}{3}+\operatorname{sen}\frac{\phi}{3}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN:

del enunciado : $\alpha, \theta \ y \ \emptyset \in \{90°, 180°, 270°\}$

Del dato: $*$ α *es coterminal con* : $-\alpha$

$$\alpha-(-\alpha)=360°k$$

$$2\alpha=360°k \qquad ; \ k\in Z$$

$$\alpha=180°k$$

$$\boxed{\alpha=180°}$$

$*$ $\emptyset$ *es coterminal con* : $-990°$

$$\emptyset-(-990°)=360°k \qquad ; \ k\in Z$$

$$\emptyset+990°=\underbrace{360°k}_{1080°}$$

$$\boxed{\emptyset=90°}$$

de I y II se obtiene que

$$\boxed{\emptyset=270°}$$

$$\cos\frac{\alpha}{3}+\operatorname{sen}\frac{\emptyset}{3}+\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$$

$$=\cos 60°+\operatorname{sen}90°+\operatorname{sen}30°=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=\boxed{2}$$

11. Dadas las condiciones

$$5\csc\theta + 3\,\mathrm{sen}\,\theta < 0 \quad \ldots (1)$$

$$\left(\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\theta > 0 \quad \ldots (2)$$

indique el cuadrante al cual pertenece el arco θ.

A) I y II B) IV C) II D) III E) III y II

RESOLUCIÓN:

$$* \quad 5csc\theta + 3sen\theta < 0$$

$$\Rightarrow \quad sen\theta < 0 \quad \ldots (I)$$

$$-\sqrt{2} \leq sen\theta + cos\theta \leq \sqrt{2}$$

sumando $\pi/2$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}}_{+0,15} \leq sen\theta + cos\theta + \frac{\pi}{2} \leq \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$* \quad \underbrace{\left(sen\theta + cos\theta + \frac{\pi}{2}\right)}_{(+)} cos\theta > 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta > 0 \quad \ldots (II)$$

resolviendo I y II :

$$\boxed{\theta \in IV\ C}$$

12. Siendo α, β y θ ángulos cuadrantes distintos, mayores o iguales que 0°, pero menores o iguales que 270° y, además, cumplen

$$\cos\beta = \sqrt{\operatorname{sen}\theta - \sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}$$

calcule $W = \cos(\alpha + \beta + \theta)$.

A) −2 B) −1 C) 0
D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN:

del enunciado : $\alpha, \beta\ y\ \theta \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}$

$\cos\beta = \{0 ; 1\}$

* $si\ \cos\beta = 0 \quad \Rightarrow \beta = 90° \vee 270°$

$$0 = \sqrt{\underbrace{sen\theta}_{0} - \underbrace{\sqrt{sen\alpha}}_{0}}$$

$\theta = 0° \quad \alpha = 180°$

$\Rightarrow \boxed{\alpha, +\beta + \theta = 270° \vee 450°}$

* $si\ \cos\beta = 1 \quad \Rightarrow \beta = 0°$

$$1 = \sqrt{\underbrace{sen\theta}_{1} - \underbrace{\sqrt{sen\alpha}}_{0}}$$

$\theta = 90° \quad \alpha = 180°$

$\Rightarrow \boxed{\alpha, +\beta + \theta = 270°}$

$\therefore \boxed{\cos(\alpha, +\beta + \theta) = 0}$

13. Siendo α y β son ángulos cuadrantes, positivos y menores que una vuelta, tales que

$$\cot\alpha > \cos\beta$$

calcule $K = \dfrac{\cos\alpha - \operatorname{sen}\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} - \cos\beta}$

A) $\sqrt{2} - 2$ B) $\sqrt{2} - 1$ C) $\sqrt{2} + 1$

D) $\sqrt{2} + 2$ E) 1

RESOLUCIÓN:

$\alpha \; y \; \beta \in \{90°, 180°, 270°\}$

del dato: $\underbrace{\cot\alpha}_{0} > \underbrace{\cos\beta}_{-1}$

$* \; \alpha = 90° \lor 270°$ $\quad * \; \beta = 180°$

$\dfrac{\alpha}{2} = 45° \lor \dfrac{\alpha}{2} = 135°$

$$K = \frac{\cos\alpha - sen\,\frac{\beta}{2}}{sen\,\frac{\alpha}{2} - \cos\beta}$$

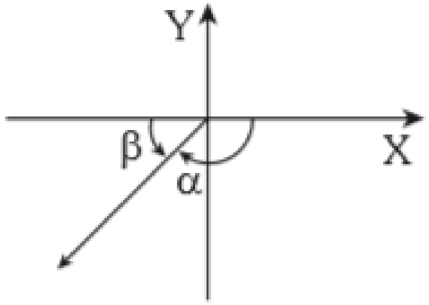
$$K = \frac{0 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)}$$

$$K = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2} + 2}{2}}$$

$$K = \frac{-2}{\sqrt{2} + 2} = \frac{-2.(\sqrt{2} - 2)}{\underbrace{(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 2)}_{-2}}$$

$$\boxed{K = \sqrt{2} - 2}$$

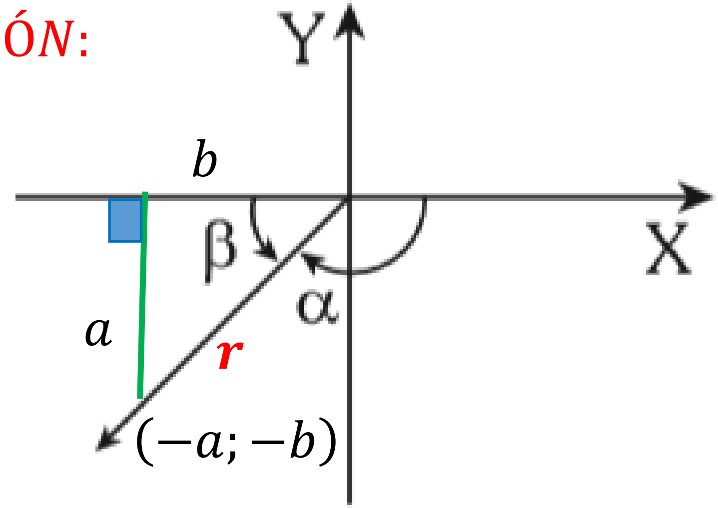
14. Con los datos de la figura mostrada determine



$$E = \frac{\cos\alpha + \cos\beta + 8\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}$$

A) -4 B) -2 C) -1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:



del gráfico: $\alpha - \beta = -180°$

* para "α" en posición normal

$$\cos\alpha = \frac{-a}{r} \qquad sen\alpha = \frac{-a}{r}$$

* para "β" agudo

$$\cos\beta = \frac{a}{r} \qquad sen\beta = \frac{a}{r}$$

reemplazando en la expresión E:

$$E = \frac{\cancel{\cos\alpha} + \cancel{\cos\beta} + 8\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\cancel{sen\alpha} + \cancel{sen\beta} + 4sen\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)} = \frac{8\cos(-45°)}{4sen(-45°)}$$

$$E = \frac{2\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \boxed{-2}$$

ASOCIACIÓN EDUCATIVA SACO OLIVEROS

15. Siendo $\frac{4}{5}\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$

$|\cos\phi| = -\cos\phi$

calcule $K = 2\operatorname{sen}\phi + 3\cos\phi$.

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) –3

RESOLUCIÓN:

* $|cos\emptyset| = -cos\emptyset$

$\emptyset \in IIC \;\vee\; IIIC$

* $\frac{4}{5}sen\emptyset = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \frac{1}{10.13}$

multiplicamos por 3 ambos lados de la igualdad

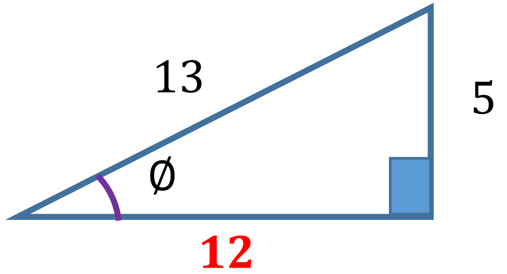
$$\frac{12}{5}sen\emptyset = \frac{3}{1.4} + \frac{3}{4.7} + \frac{3}{7.10} + \frac{3}{10.13}$$

$$\frac{12}{5}sen\emptyset = \frac{4-1}{1.4} + \frac{7-4}{4.7} + \frac{10-7}{7.10} + \frac{13-10}{10.13}$$

$$\frac{12}{5}sen\emptyset = \left(1 - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{10}} - \frac{1}{13}\right)$$

$$\frac{12}{5}sen\emptyset = \frac{12}{13} \qquad sen\emptyset = \frac{5}{13}$$

ahora asumimos "Ø" como ángulo agudo



$$sen\emptyset = \frac{5}{13} \;;\; cos\emptyset = -\frac{12}{13}$$

$$Piden\;\; W = 2sen\emptyset + 3cos\emptyset = 2\left(\frac{5}{13}\right) + 3\left(-\frac{12}{13}\right) = \boxed{-2}$$