GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

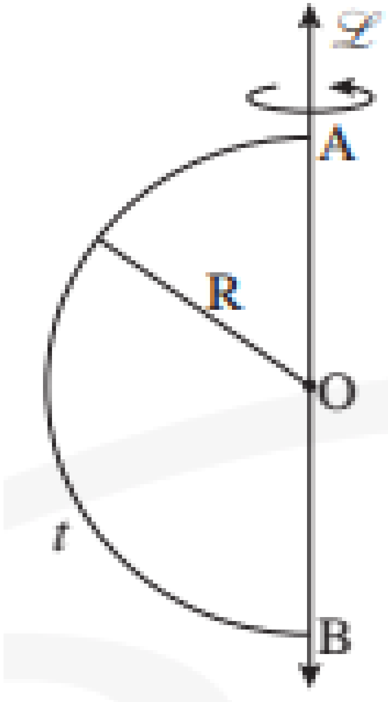
CAPITULO 8 TEORIA

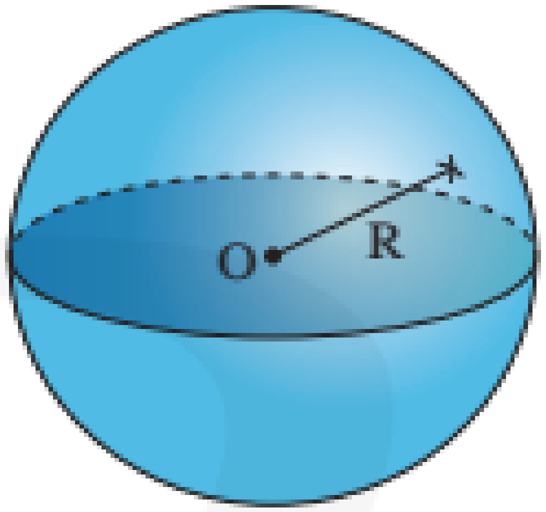
SACO OLIVEROS

SUPERFICIE ESFERICA

DEFINICIÓN :

Se denomina superficie esférica a la superficie generada por la rotación de una semicircunferencia, al girar una vuelta alrededor de un eje que contiene a su diámetro.





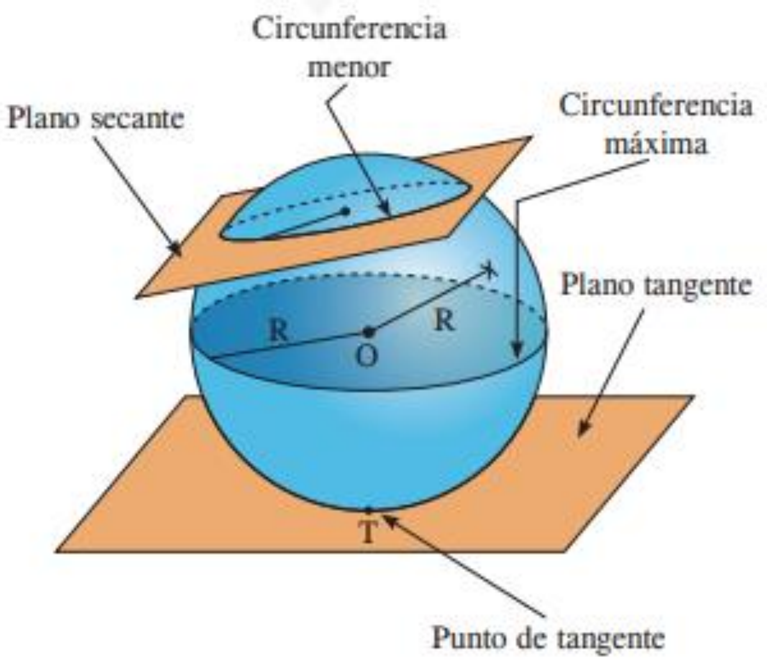
ÁREA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA ($\mathbb{A}_{SE}$)

$$\boxed{\mathbb{A}_{SE} = 4\pi R^2}$$

SUPERFICIE ESFERICA

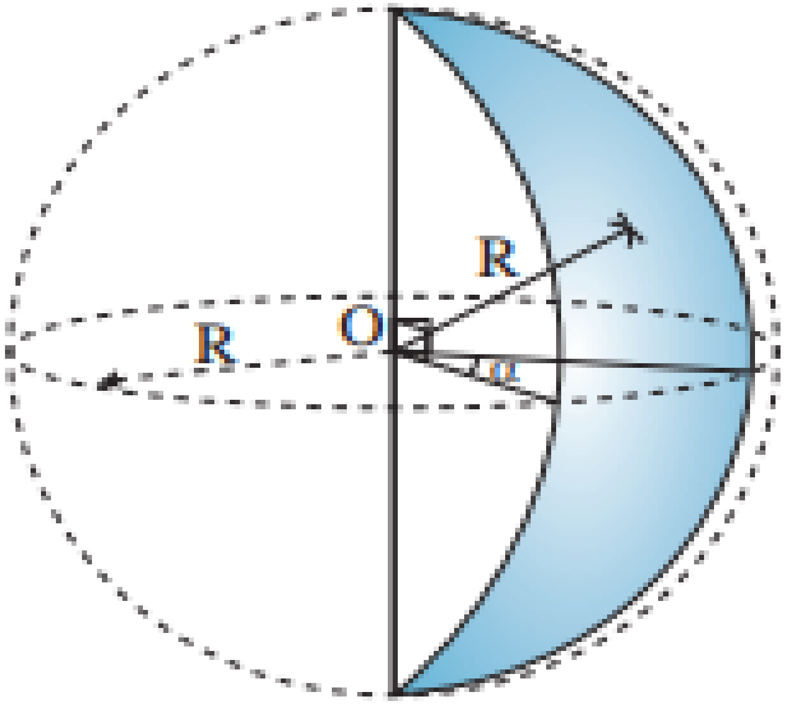
La intersección de una superficie esférica y un plano secante a dicha superficie es una circunferencia.
Un plano es tangente a una superficie esférica si la intersección de estos es un punto.

Se denomina circunferencia máxima, a la circunferencia determinada por la intersección una superficie esférica y un plano que contiene al centro.



HUSO ESFERICO

Definición: Se denomina huso esférico a la parte de una superficie esférica, comprendida entre dos semicircunferencias máximas que tienen el mismo el diámetro.

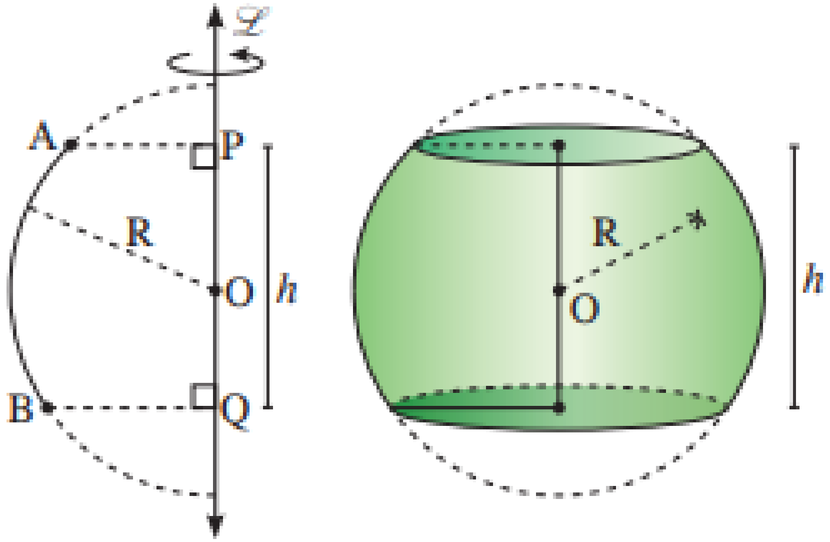


$$\mathbb{A}_{HE} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90°}$$

ZONA ESFERICA

Definición: Se denomina zona esférica a la parte de una superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos entre sí y secantes a la superficie esférica.
El segmento perpendicular a los planos paralelos cuyos extremos están en dichos planos es la altura de la zona esférica

Teorema: El área de una zona esférica es igual al producto de sus longitudes de la circunferencia máxima de la superficie esférica que la contiene y la altura de la zona esférica.

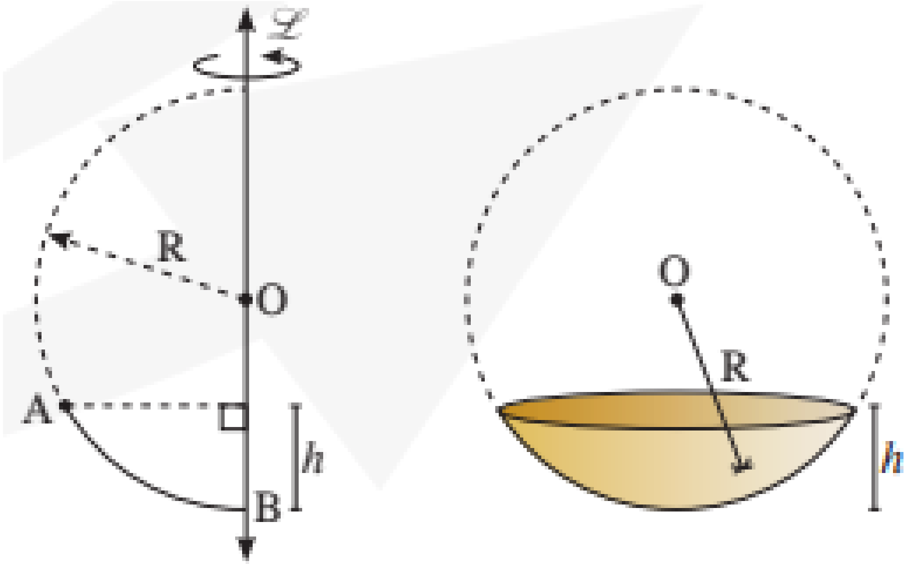


$$\mathbb{A}_{ZE}=2\pi Rh$$

CASQUETE ESFERICA

Definición: Se denomina casquete esférico a la parte de una superficie esférica determinado por un plano secante.

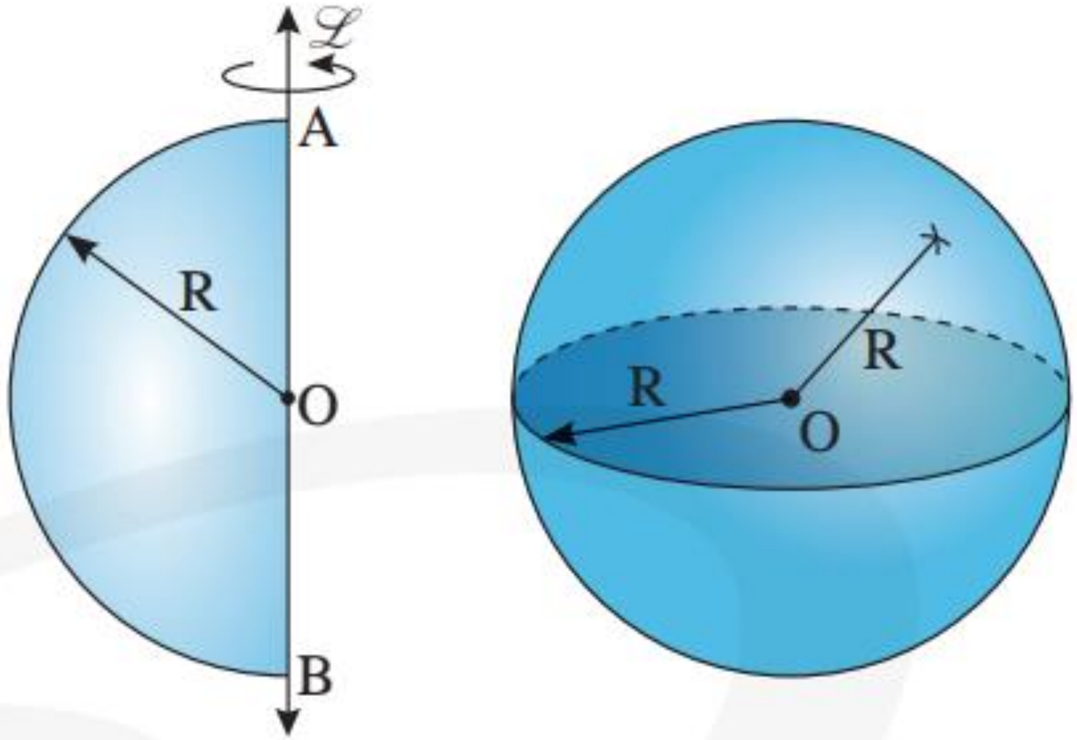
Teorema: El área de un casquete esférico es igual al producto de las longitudes de una circunferencia máxima de la superficie esférica que la contiene y la altura del casquete esférico.



$$\mathbb{A}_{ZE} = 2\pi Rh$$

ESFERA

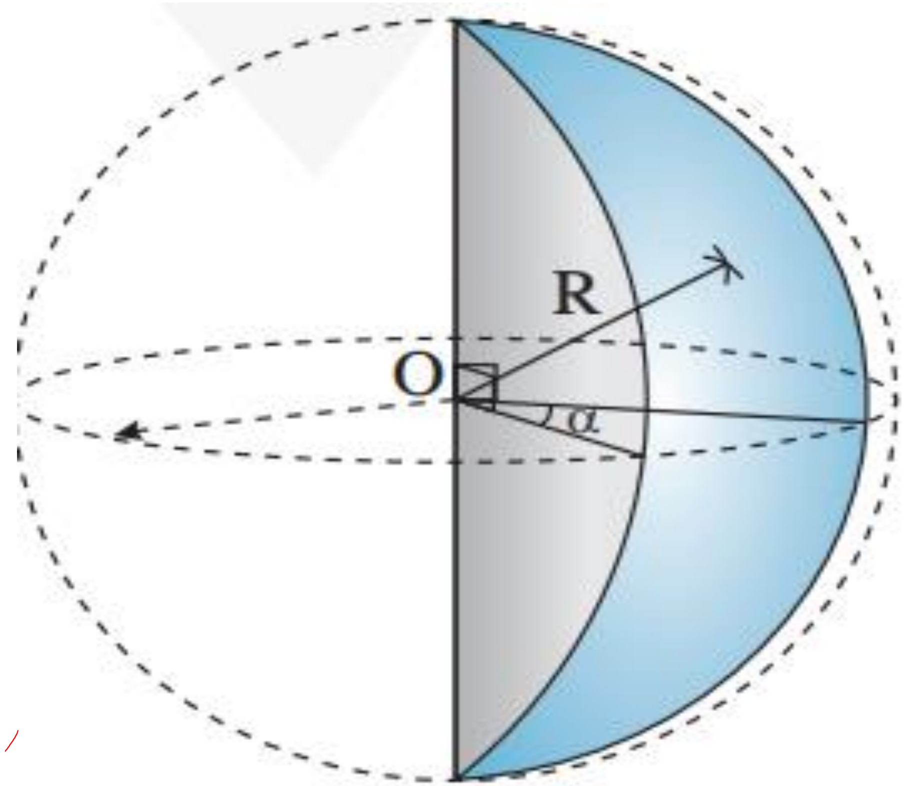
Definición: Se denomina esfera al sólido generado por la rotación de un semicírculo al girar una vuelta alrededor de un eje que contiene al diámetro.



$$\mathbb{V}_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CUÑA ESFÉRICA

Definición Se denomina cuña esférica a la parte de una esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen el mismo diámetro.



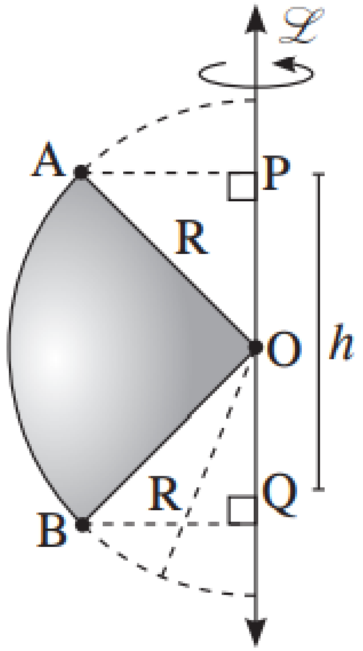
$\alpha \longrightarrow V_{CE}$

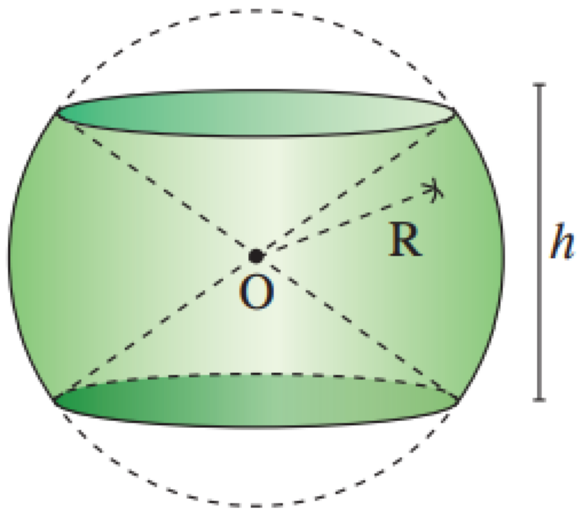
$360 = \frac{4\pi R^3}{3}$

$$\mathbb{V}_{CE} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}$$

SECTOR ESFÉRICO

Definición Se denomina sector esférico al sólido generado por la rotación de un sector circular al girar una vuelta alrededor de un eje coplanar no secante al arco correspondiente (excepto en los extremos) y que contiene a su centro.

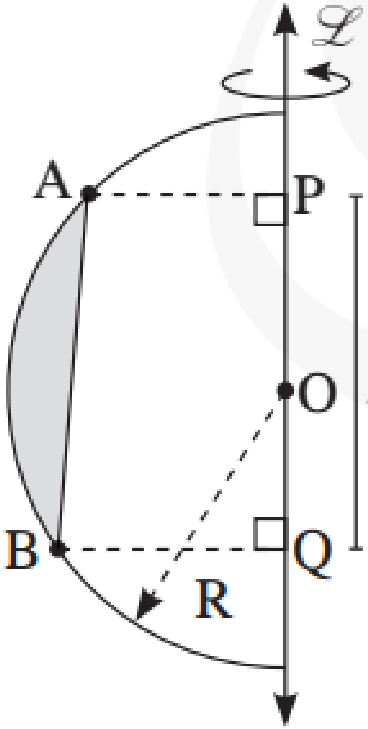


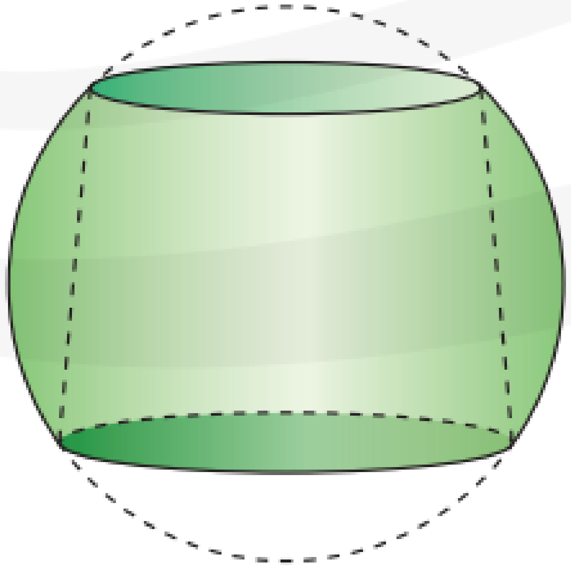


$$\mathbb{V}_{SE} = \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

ANILLO ESFERICO

Definición: Se denomina anillo esférico al sólido generado por un segmento circular que gira una vuelta alrededor de un eje coplanar no secante al arco correspondiente y que contiene al centro.



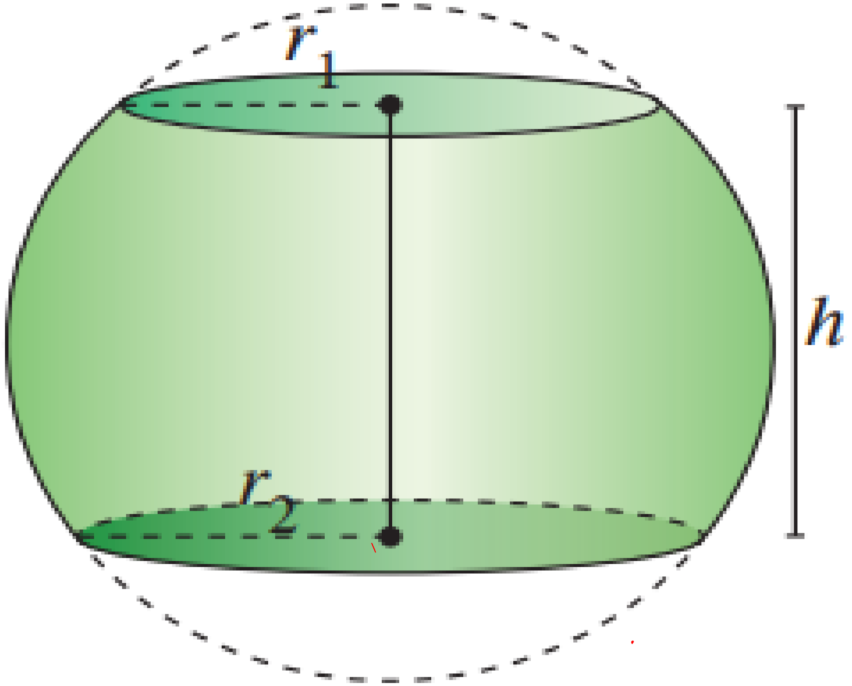


$$\mathbb{V}_{AE} = \frac{\pi(AB)^2 h}{6}$$

SEGMENTO ESFÉRICO

Definición: Se denomina segmento esférico a la parte de una esfera comprendido entre dos círculos determinados por dos planos paralelos entre si, secantes a la esfera.

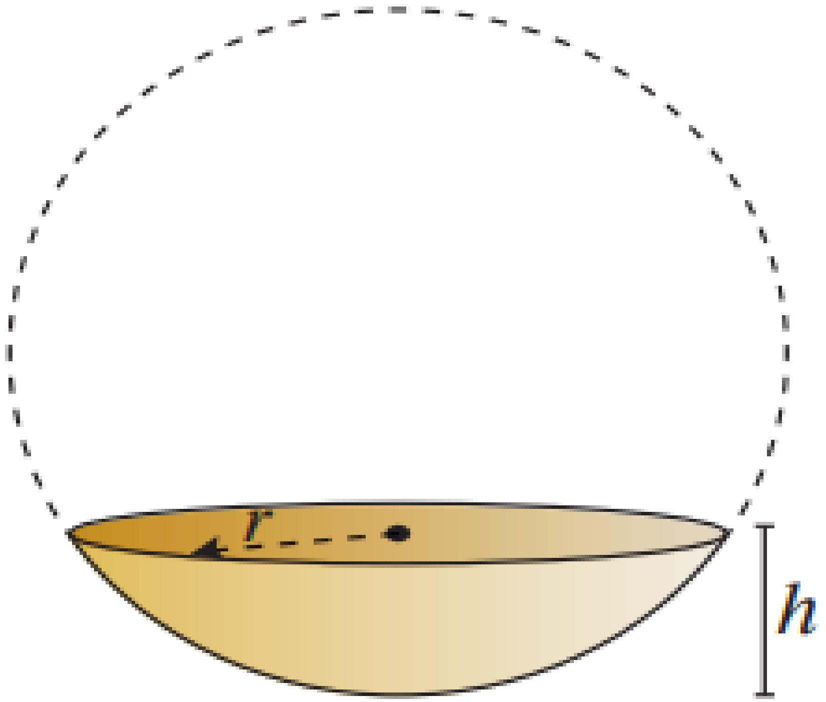
$\mathbb{V}_{SE} = \frac{h}{2} + \frac{r_1 \; h}{2} + \frac{r_2 \; h}{2}$



$$\mathbb{V}_{SE} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi r_2^2 h}{2}$$

SEGMENTO ESFÉRICO

Definición: Se denomina segmento esférico a la parte de una esfera comprendido entre dos círculos determinados por dos planos paralelos entre si, secantes a la esfera.



$$\mathbb{V}_{SE} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2}$$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

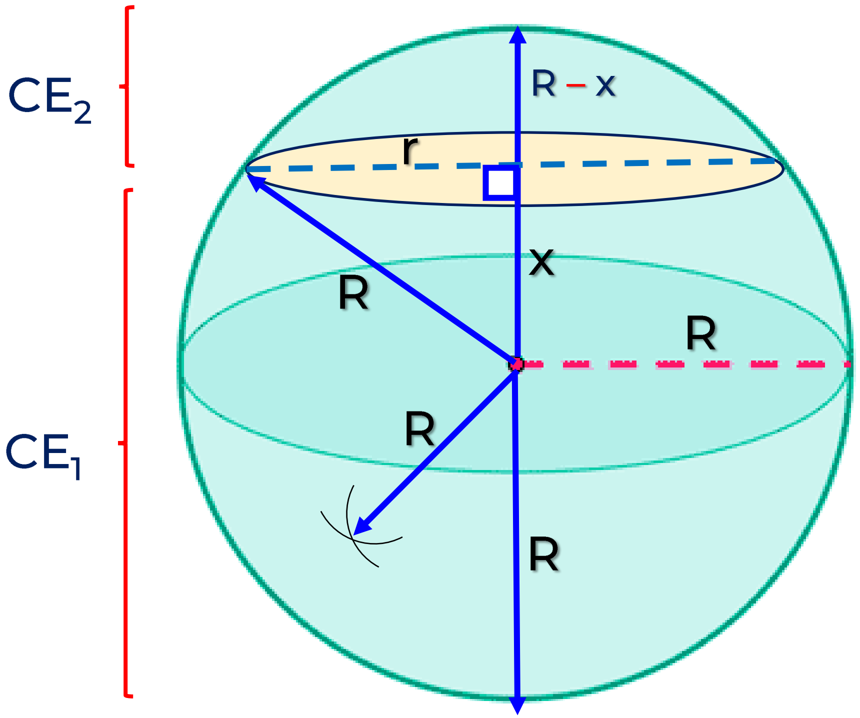
CAPITULO 8 PRACTICA

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 Determine a qué distancia del centro de una esfera de radio $R = 2 + \sqrt{5}$ m se debe seccionar con un plano para que la diferencia de las áreas de los casquetes esféricos determinados sea igual al área de la sección que divide a la esfera en dichos casquetes.

Resolución :

Piden: distancia del centro de una esfera a un plano = x



Dato:

$$A_{CE1} - A_{CE2} = \pi \cdot r^2$$

$$2\pi R (R + x) - 2\pi R (R - x) = \pi \cdot r^2$$

$$2\pi R \cdot (2x) = \pi \cdot (R^2 - x^2)$$

$$4 R \cdot x = R^2 - x^2$$

$$x^2 + 4 R x - R^2 = 0$$

$$\boxed{x = R(\sqrt{5} - 2)}$$

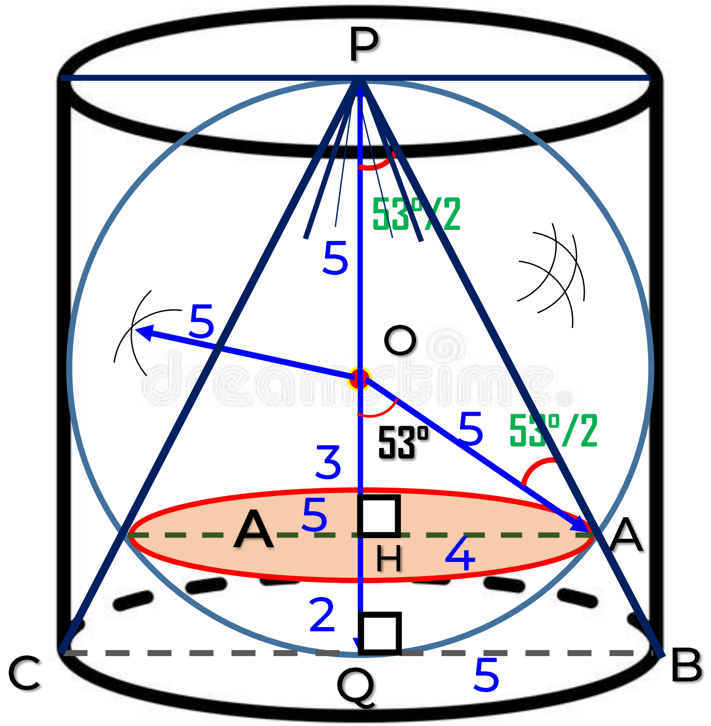
$$x = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$$

$$\therefore x = 1 \text{ m}$$

PROBLEMA 2 Halle el área de la sección que se determina al intersecarse una esfera y un cono, ambos inscritos en un cilindro recto cuyo radio de la bases es 5 m.

Resolución :

Piden: el área de la sección que se determina al intersecarse una esfera y un cono = A



- ⊿ PQB: aproximado 53°/2

  ➡ PQ = 10

- Δ POA: Isósceles

  ➡ PO = OA = 5

- ⊿ OHA: aproximado 53° – 37°

  ➡ HA = 4

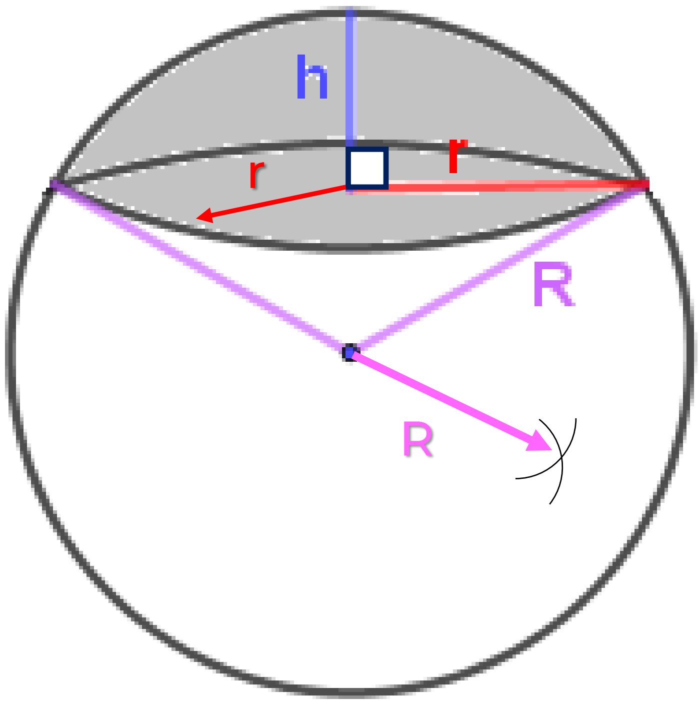
- A = $\pi \cdot 4^2$

$\therefore$ A = 16π m²

PROBLEMA 3 Halle el área de la base de un segmento de 2 m^2 de superficie correspondiente a una esfera cuyo radio mide $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ m.

Resolución :

Piden: el área de la base = A



Dato:

$A_{CE} = 2$; $R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$2\pi R \, . \, h = 2$

$2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) . \, h = 2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$

$R = h \Rightarrow R = r$

$A_{base} = \pi \, . \, r^2$

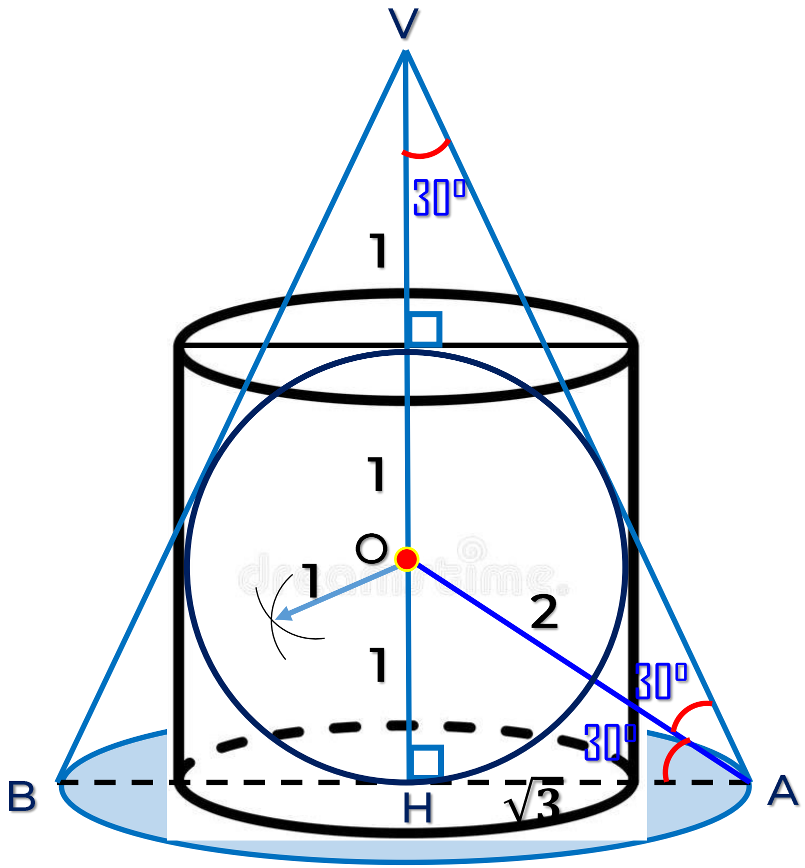
$= \pi \, . \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2$

$\boxed{\therefore A_{BASE} = 1 \ m^2}$

PROBLEMA 4 Se tiene una esfera cuyo radio mide 1 m, un cilindro y un cono equilátero circunscrito a esta esfera. Halle la suma de los volúmenes de los tres sólidos.

Resolución :

Piden: la suma de los volúmenes de los tres sólidos = Vx



- ⊿ OHA: notable 30°-60°

  ➡ HA = $\sqrt{3}$ y OA = 2

- Δ VOA: isósceles

  ➡ VO = OA = 2

V x = V cono + V cilindro + V esfera

$$= \frac{\pi\,(\sqrt{3})^2\,3}{3} + \pi\,.\,1^2\,.\,2 + \frac{4}{3}\pi\,.\,1^3$$

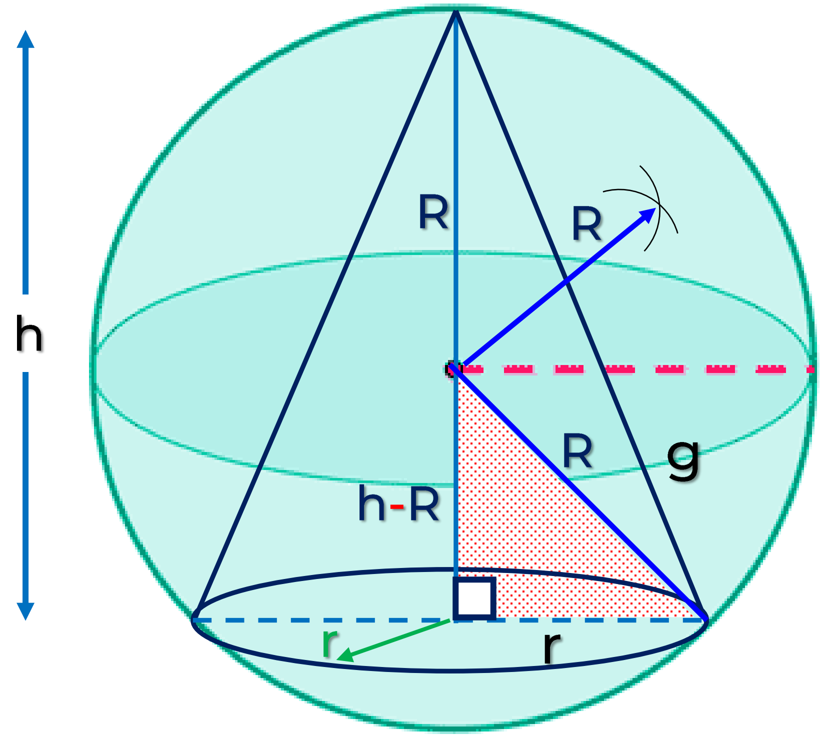
$$= 3\pi + 2\pi + \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore\ A\ \text{BASE} = \frac{19}{3}\pi\ m^3$$

PROBLEMA 5 En una esfera de radio R se halla inscrito un cono circular recto de altura *h*. Halle la superficie lateral del cono.

Resolución :

Piden: la superficie lateral del cono = A SL



- Del gráfico :

$$g^2 = h^2 + r^2 \qquad \ldots (1)$$

- En el ⊿ : $R^2 = (h-R)^2 + r^2$

$$\boxed{r = \sqrt{h(2R-h)}} \qquad \ldots (2)$$

- (2) en (1) : $g^2 = h^2 + 2hR - h^2$

$$\boxed{g = \sqrt{2hR}}$$

$$A_{SL} = \pi\, r\, g$$

$$= \pi \cdot \sqrt{h(2R-h)} \cdot \sqrt{2hR}$$

$$\therefore\ \boxed{A_{SL} = \pi\, h\sqrt{2R(2R-h)}}$$

m²

PROBLEMA 6 Calcule el volumen de una esfera circunscrita a un octaedro regular de $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ m³ de volumen.

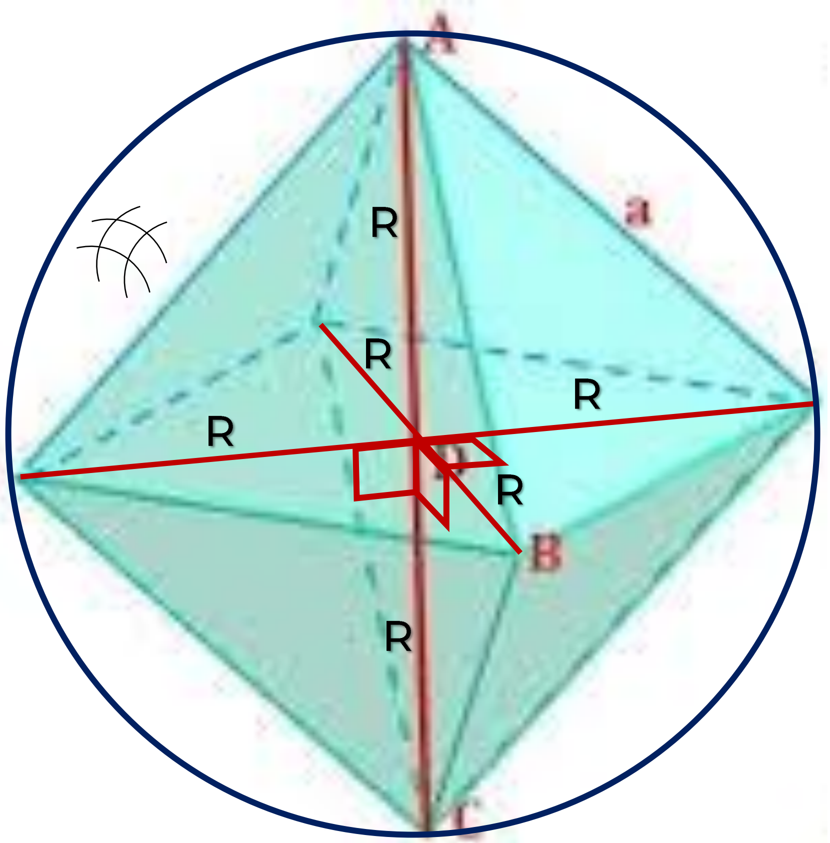
Resolución :

Piden: el volumen de una esfera circunscrita
= V esfera

$V_{oct} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

$V_{oct} = 2V_{pirám}$

$= 2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{(2R)^2}{2}\right) \cdot R\right)$



Dato:

Volumen del octaedro = V octaedro

V octaedro $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{(2R)^2}{2} \cdot R\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

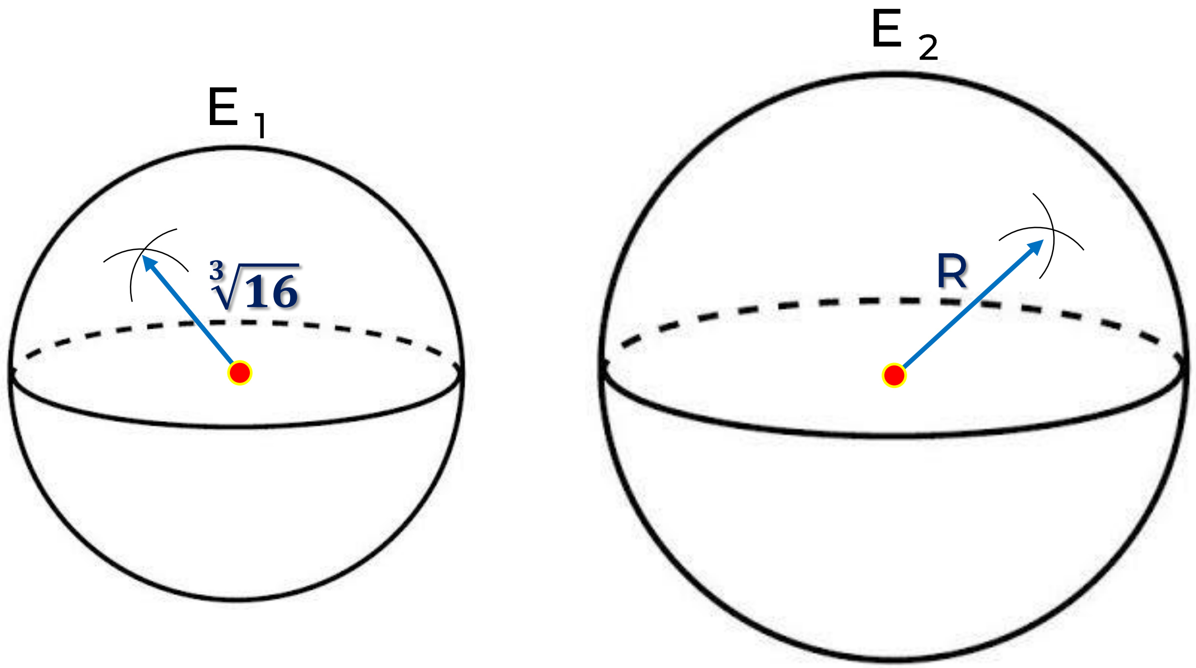
$\underbrace{\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3}_{\text{V esfera}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \pi$

$\boxed{.:\ V\ \text{Esfera} = \sqrt{\pi}}$ m³

PROBLEMA 7 Sean E_1 y E_2 dos esferas. Si el volumen de E_2 es el doble del volumen de E_1 y el radio de E_1 mide $\sqrt[3]{64}$ cm, halle el volumen de E_2.

Resolución :

Piden: el volumen de E_2 = V E_2



Dato:

$$V\,E_2 = 2\,V\,E_1$$

$$V\,E_2 = 2\ .\ \frac{4}{3}\ .\ \pi\ .\ (\sqrt[3]{64}\ )^3$$

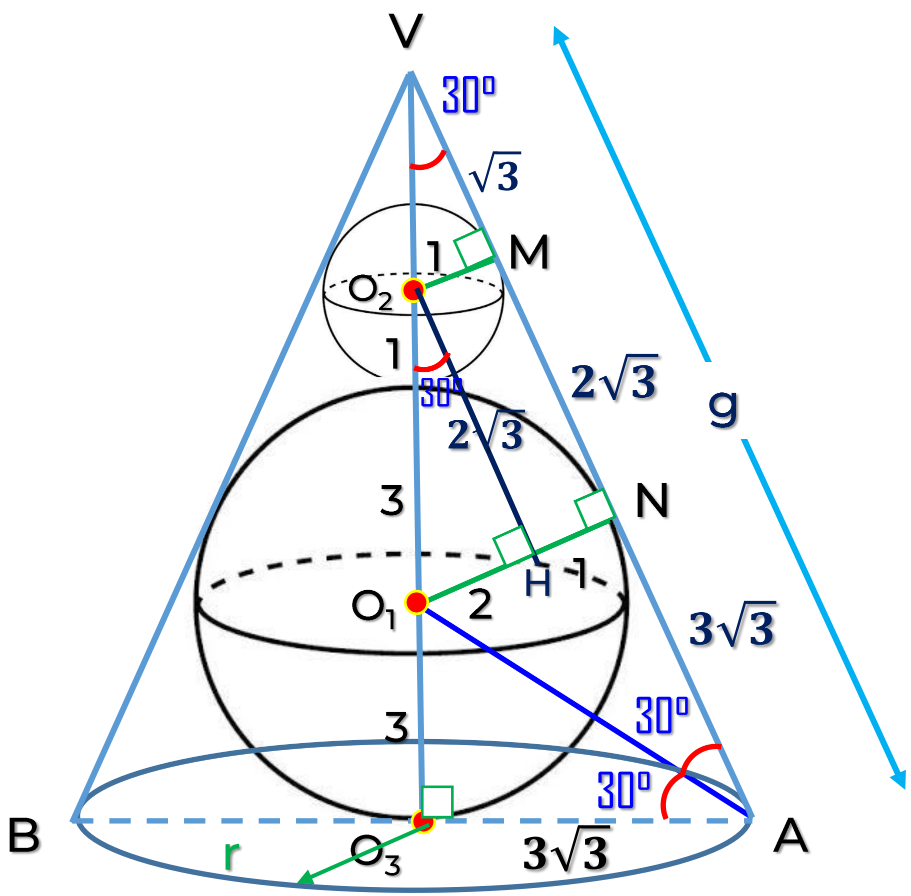
$$V\,E_2 = \frac{8}{3}\ .\ \pi\ .\ 16$$

$$\therefore V\,E_2 = \frac{512}{3}\ \pi\ cm^3$$

PROBLEMA 8 Halle el área total de un cono circunscrito a dos esferas tangentes exteriores cuyos radios miden 1 m y 3 m, respectivamente.

Resolución :

Piden: el área total de un cono circunscrito = A ST



- $\triangle\, O_1HO_2$: notable 30°-60°

$\boxed{O_2H = 2\sqrt{3}}$

- $\triangle\, O_2MV$: notable 30°-60°

$\boxed{MV = \sqrt{3}}$

- $\triangle\, O_1NA$: notable 30°-60°

$\boxed{NA = 3\sqrt{3}}$

- Por teorema $\boxed{O_3A = NA = 3\sqrt{3}}$

- $AST = \pi \cdot r\,(r + g)$

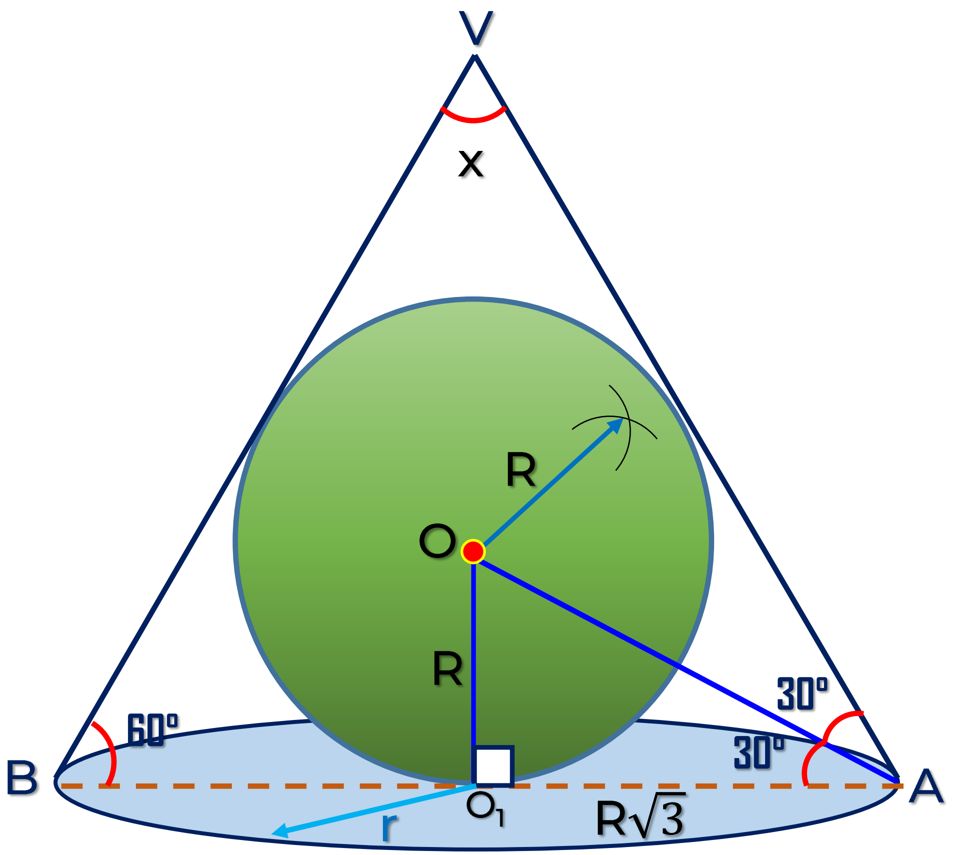
$= \pi \cdot (3\sqrt{3})\,(3\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

$\boxed{\therefore\ A_{ST} = 81\,\pi\ m^2}$

PROBLEMA 9 Calcule el ángulo en la cúspide de un cono recto sabiendo que el área de la esfera inscrita es al área de la base como 4 es a 3.

Resolución :

Piden: el ángulo en la cúspide = x



Dato:

$$\frac{A_{esfera}}{A_{base\ del\ cono}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\cancel{4}\cancel{\pi}R^2}{\cancel{\pi}r^2} = \frac{\cancel{4}}{3} \Rightarrow \boxed{r = R\sqrt{3}}$$

- $\triangle$ OO_1A: notable 30°-60°

  $\Rightarrow$ m $\measuredangle$ OAO_1 = 30°

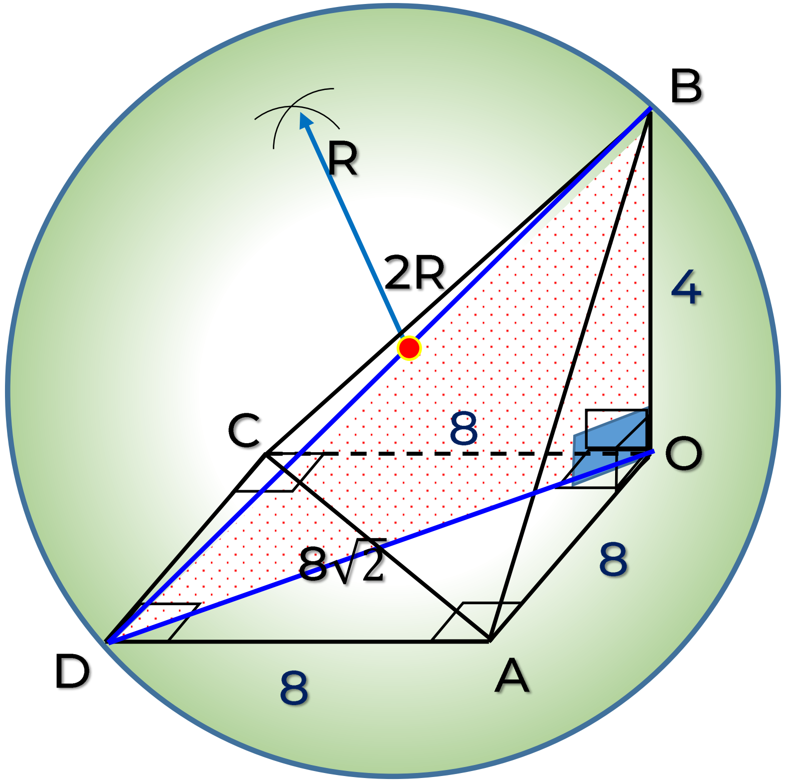
- Δ BVA: equilátero

$$\boxed{\therefore x = 60°}$$

PROBLEMA 10 En el tetraedro O - ABC, el triedro O es trirrectángulo, OA= 8m , OB= 4m y OC= 8m. Calcule el radio de la circunferencia circunscrita.

Resolución :

Piden: el radio de la circunferencia circunscrita = R



- Se traza el rectángulo AOCD
- $\overline{BO}$ ⊥ ▱ AOCD
- ⊿ DOB:

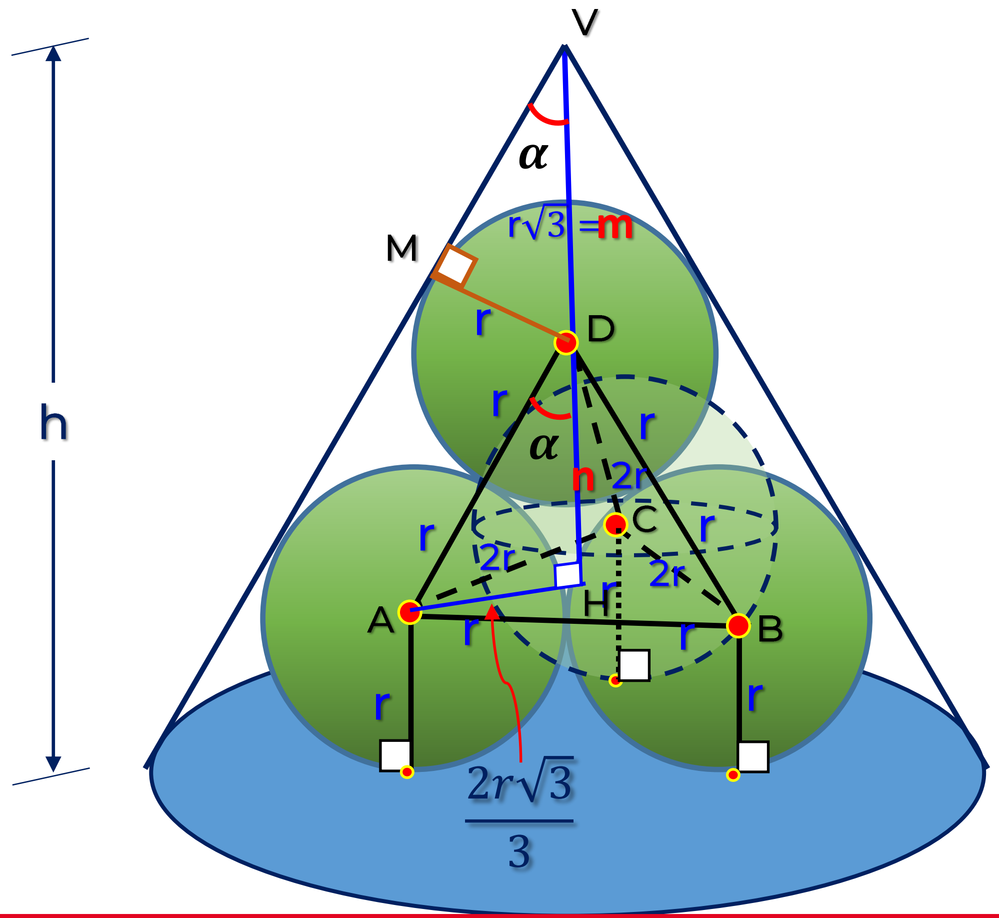
$$(2R)^2 = 4^2 + (8\sqrt{2})^2$$

$$\therefore R = 6m$$

PROBLEMA 11 Calcule la altura *h* del cono circunscrito a cuatro esferas iguales, situadas 3 de ellas en la base y la altura sobre las tres primeras, todas tangentes entre sí. (Radio: *r*)

Resolución :

Piden: la altura del cono circunscrito = h



- A, B, C, D son centros de la esferas de radio r
- A, B , C equidistan del plano
- Δ ABC es equilátero
- Δ ACD es equilátero
- Δ CBD es equilátero
- Δ ABD es equilátero
- ABCD es un tetraedro regular ➡ $\boxed{n = \frac{2r\sqrt{6}}{3}}$
- $\triangle$ VMD ~ $\triangle$ DHA

$$\frac{m}{2r} = \frac{r}{\frac{2r\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \boxed{m = r\sqrt{3}}$$

- Del gráfico

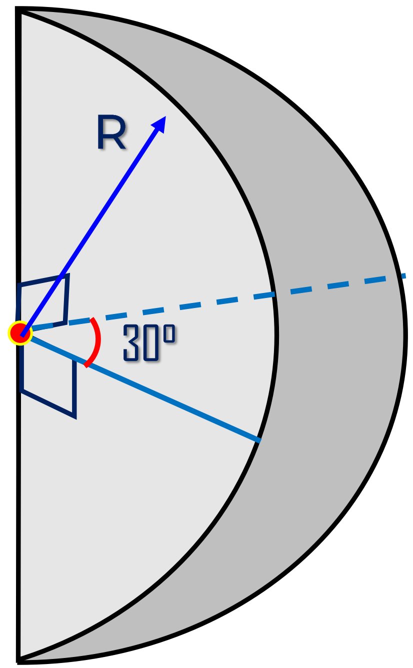
$$h = r\sqrt{3} + \frac{2r\sqrt{6}}{3} + r$$

$$\boxed{\therefore h = \frac{r}{3}(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 3)}$$

PROBLEMA 12 Halle el volumen de una cuña esférica de 30° cuyo radio R es $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ m.

Resolución :

Piden: el volumen de una cuña esférica = V



Dato:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

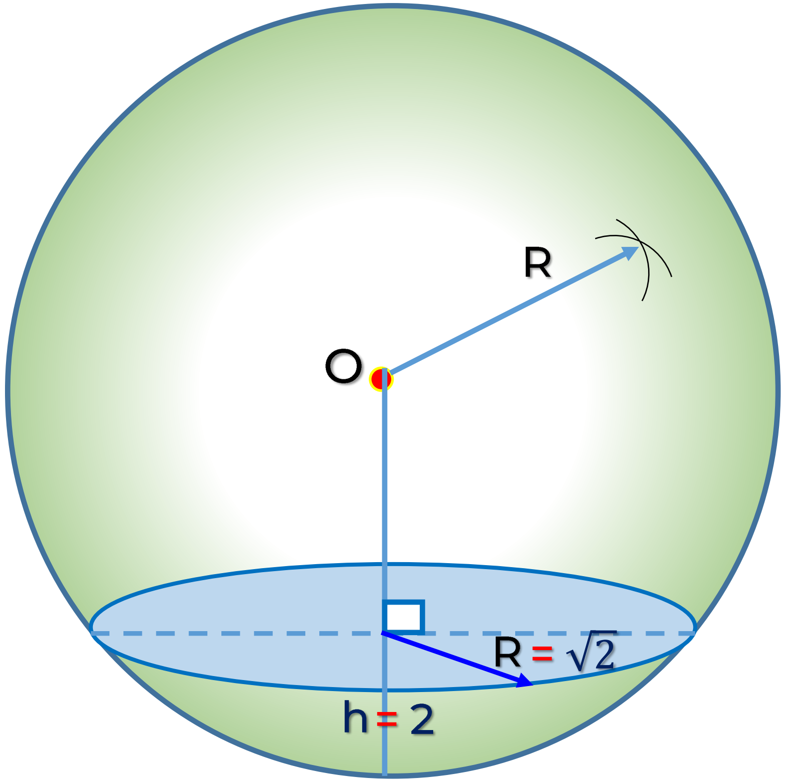
$$V = \frac{\pi}{270°} \cdot 30° \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{12} \text{ m}^3$$

PROBLEMA 13 Halle el volumen de un segmento esférico de una base si el radio de la base es $\sqrt{2}$ m y su altura es 2.

Resolución :

Piden: el volumen de un segmento esférico = V SE



$$V_{SE} = \frac{\pi \cdot h^3}{6} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{2}$$

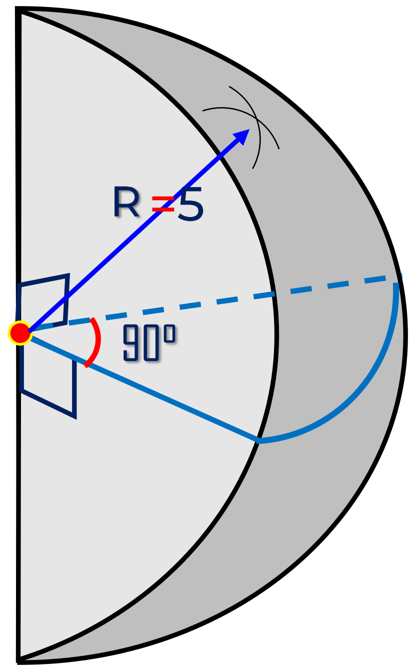
$$= \frac{\pi \cdot 2^3}{6} + \frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 2}{2}$$

$$\therefore V_{SE} = \frac{10\,\pi}{3}$$ m³

PROBLEMA 14 Halle el área de un huso esférico de 90° si el radio mide 5 m.

Resolución :

Piden: el área de un huso esférico = A_{HE}



$$\boxed{A_{HE} = \frac{\pi \cdot R^{2} \cdot (\alpha)}{90°}}$$

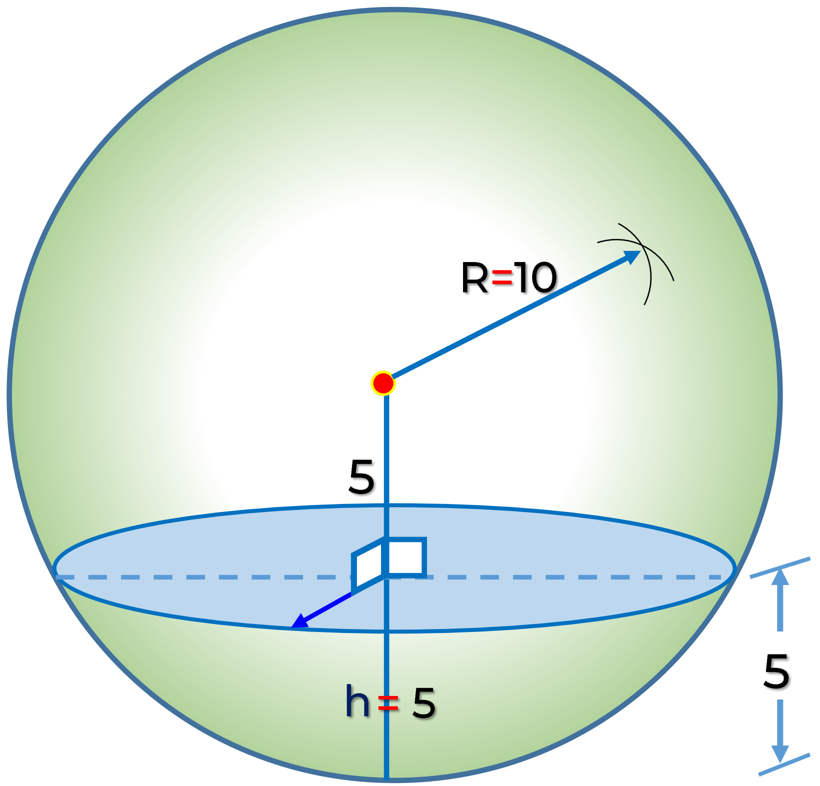
$$A_{HE} = \frac{\pi \cdot 5^{2} \cdot (90°)}{90°}$$

$$\boxed{\therefore A_{HE} = 25\pi}$$ m^2

PROBLEMA 15 Halle el área de un casquete esférico si el radio de la esfera R = 10 y la altura es 5.

Resolución :

Piden: el área de un casquete esférico = A_{CE}



$$\boxed{A_{CE} = 2\pi \cdot R \cdot h}$$

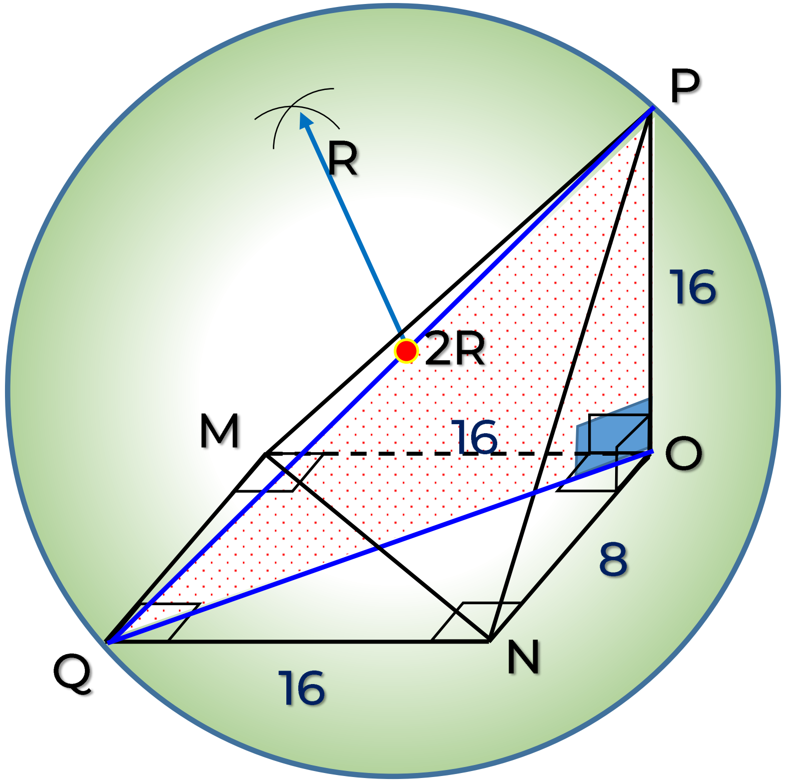
$$A_{CE} = 2\pi \cdot 10 \cdot 5$$

$$\boxed{\therefore A_{CE} = 100\pi \ m^2}$$

PROBLEMA 16 En un tetraedro O - MNP, trirrectángulo en O, las aristas $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ y $\overline{OP}$ miden 16; 8 y 16, respectivamente, entonces el área de la superficie esférica circunscrita es

Resolución :

Piden: el área de la superficie esférica circunscrita = A SE



- Se traza el rectángulo MONQ
- $\overline{PO}$ ⊥ ▱ MONQ
- ⊿ QNO: $QO^2 = 16^2 + 8^2$
- ⊿ QOP: $(2R)^2 = \underbrace{QO^2} + 16^2$

$$4R^2 = 16^2 + 8^2 + 16^2$$

$$\boxed{R = 12}$$

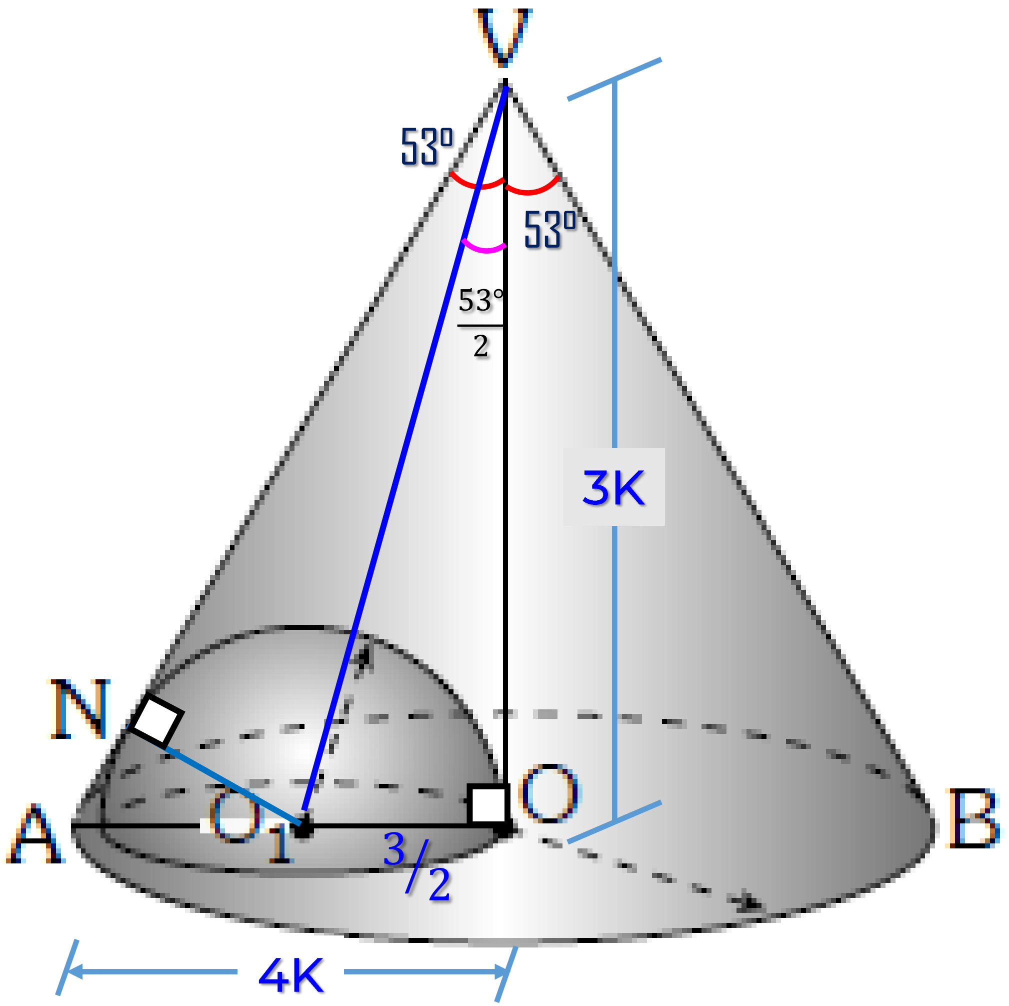
$$A_{SE} = 4\pi R^2$$

$$= 4\pi(12)^2$$

$$\boxed{\therefore A_{SE} = 576\pi \text{ u}^2}$$

PROBLEMA 17 En el gráfico mostrado, N es punto de tangencia, m∢AVB = 106° y el volumen del cono de revolución es 16 π cm³. Calcule el volumen de la semiesfera.

Resolución :



Piden: el volumen de la semiesfera = V semi esf

Dato: m ∢ AVB = 106°

- Δ BVA: isósceles
- ⊿ VOA: aproximado 53° – 37°

➡ AO = 4k y VO = 3k

Dato: V cono = 16 π

➡ $\frac{\pi .(4k)^2\, 3k}{3} = 16\pi$ ➡ $\boxed{K = 1}$

- ⊿ VOA: aproximado 53°/2

➡ $\boxed{QO = 3/2}$

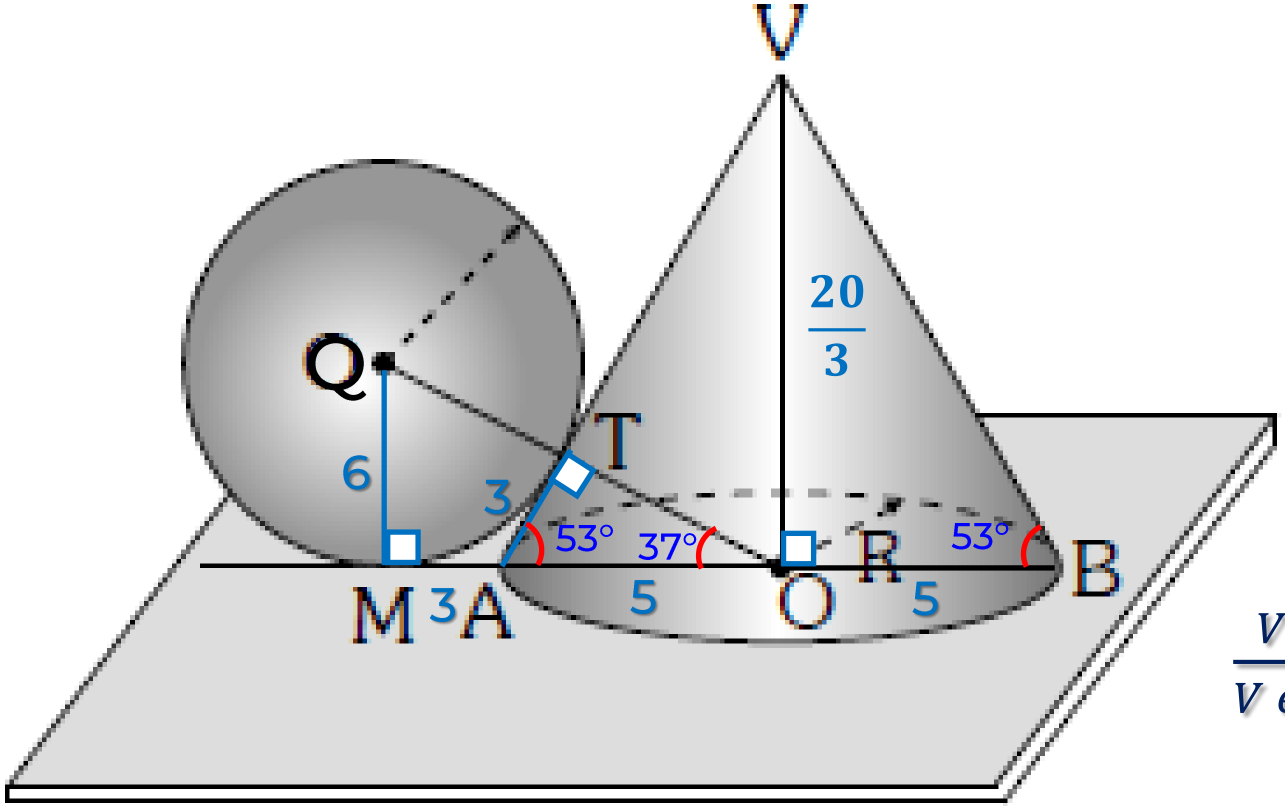
$V_{\text{semi esf}} = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$$\therefore V_{\text{semi esfe}} = \frac{9\pi}{4}\ \text{cm}^2$$

PROBLEMA 18 En el gráfico, M y T son puntos de tangencia, m∢VBA = 53° y la altura del cono de revolución es $\frac{20}{3}$ cm. Calcule la razón de los volúmenes entre el cono y la esfera.

Resolución :

Piden: la razón de los volúmenes entre el cono y la esfera = $\frac{V\ cono}{V\ esfera}$



- Δ AVB: isósceles
- ⊿ VOA: aproximado 53° – 37° ➡ R = 5
- ⊿ ATO: aproximado 53° – 37° ➡ AT = 3
- Por Teorema MA = TA = 3
- ⊿ QMO: aproximado 53° – 37° ➡ MQ = 6

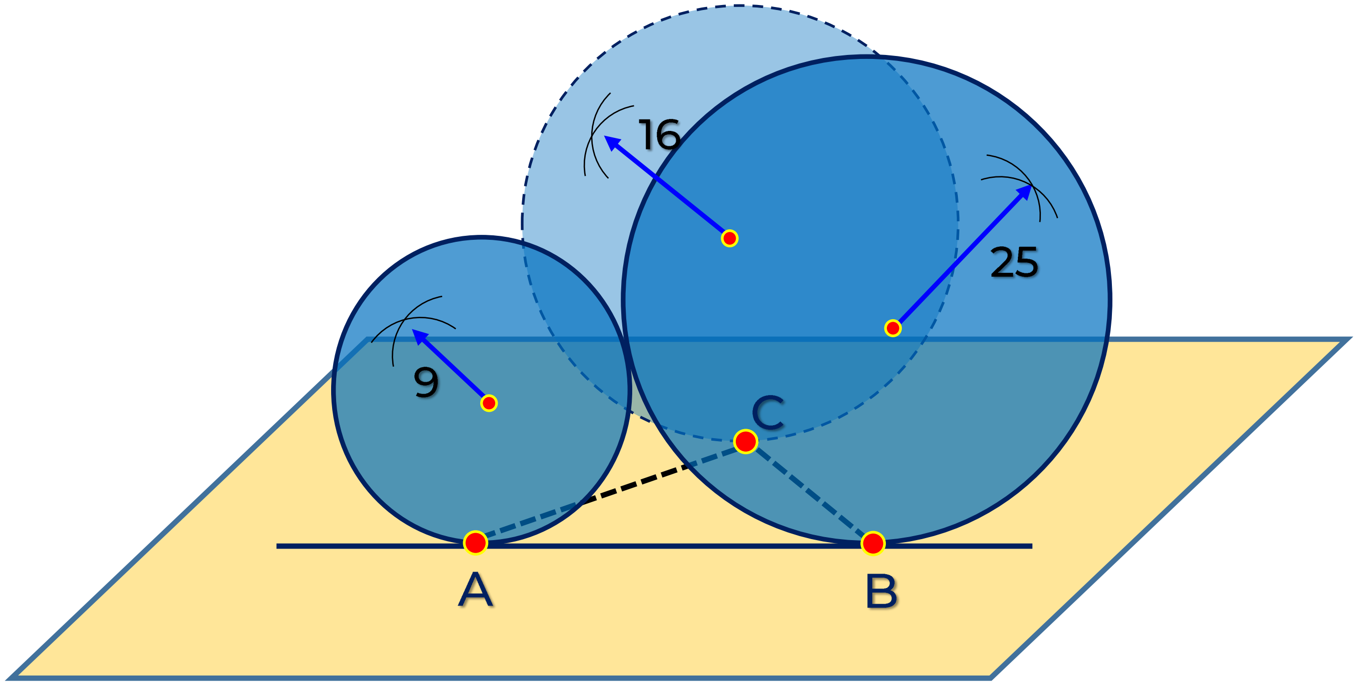
$$\frac{V\ cono}{V\ esfera} = \frac{\frac{\pi\, 5^2}{3} \cdot \frac{20}{3}}{\frac{4}{3} \cdot \pi\, 6^3}$$

$$\therefore \frac{V\ cono}{V\ esfera} = \frac{125}{648}$$

PROBLEMA 19 Tres esferas de radios 9 u; 16 u y 25 u son tangentes exteriormente entre sí. Un plano tangente a las tres esferas determina 3 puntos de tangencia que son los vértices de un triángulo cuyo perímetro se desea conocer.

Resolución :

Piden: el perímetro de la región triángular ABC = $2p_{\Delta ABC}$



- Por Teorema

$$AB = 2\sqrt{9\,.\,25} = 30$$

$$AC = 2\sqrt{9\,.\,16} = 24$$

$$BC = 2\sqrt{16\,.\,25} = 40$$

$$2p_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$$

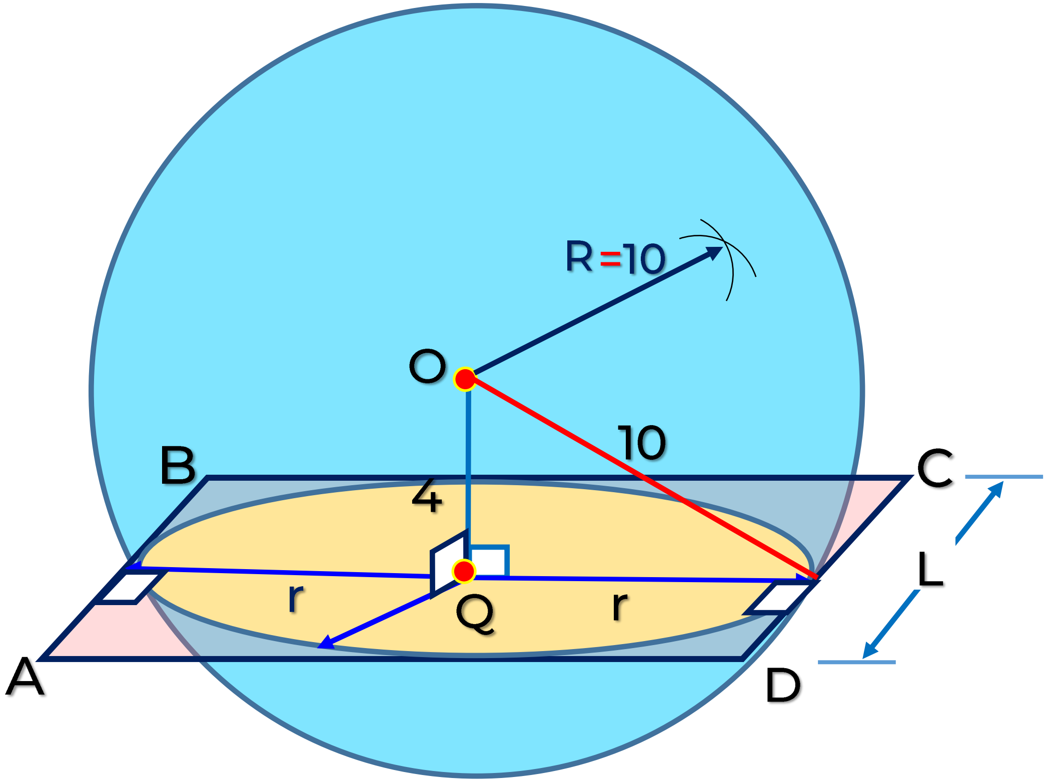
$$= 30 + 24 + 40$$

$$\boxed{\therefore\ 2p_{\Delta ABC} = 94 \text{ u}}$$

PROBLEMA 20 El área de una esfera es de $400\pi dm^2$. Dicha esfera es tangente a todos los lados de un rombo. La distancia del centro de la esfera al plano del rombo es de 4 dm. Calcule el área de dicho rombo si la longitud de su lado es de L dm.

Resolución :

Piden: el área de dicho rombo = A_{ABCD}



Dato:

ABCD es un rombo de lado L

Dato:

$A_{SE} = 400\pi$

$4\pi R^2 = 400\pi$ → $\boxed{R = 10}$

- $\triangle$ OQT:

$4^2 + r^2 = 10^2$ → $\boxed{r = 2\sqrt{21}}$

$A_{ABCD} = (2r)L$

$= (2 \cdot 2\sqrt{21})L$

$\boxed{\therefore V_{\text{semi esfe}} = 4\sqrt{21}L}$ dm^2