# SACO OLIVEROS SAPEIRON SISTEMA HELICOIDAL

# Ciclo Verano UNI

# ÁLGEBRA

Capítulo 2
DIVISIÓN ALGEBRAICA

# DIVISIÓN POLINÓMICA

División de Polinomios

Sea la división de polinomios:

Pol. Dividendo 
$$\longrightarrow D_{(x)}$$
 Genera Pol. Cociente:  $q_{(x)}$  Pol. Residuo (Resto):  $R_{(x)}$ 

Identidad Fundamental de la División:

$$D_{(x)} \equiv d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}$$





# **Propiedades**

$$[Q]^{\circ} = grado \ del \ cociente \ ; \ [D]^{\circ} = grado \ del \ dividendo \ ; \ [R]^{\circ} = grado \ del \ residuo \ ; \ [d]^{\circ} = grado \ del \ divisor$$

$$1. - [Q]^{\circ} = [D]^{\circ} - [d]^{\circ}$$

$$2.-[R]_{mas}^{\circ} = [d]^{\circ} - 1$$

# **TIPOS DE DIVISIÓN**

## 1.- División Exacta

$$R_{(x)}=0$$

## 2.- División Inexacta

$$R_{(x)} \neq 0$$



# **Condición General**

- Para efectuar la operación los polinomios a dividir se deben presentar completos y ordenados en forma decreciente.
- En el caso de la división exacta los polinomios a dividir se pueden ordenar también en forma creciente.

# **Métodos para Dividir**

- 1. Método de Horner
- 2.- Método de Ruffini



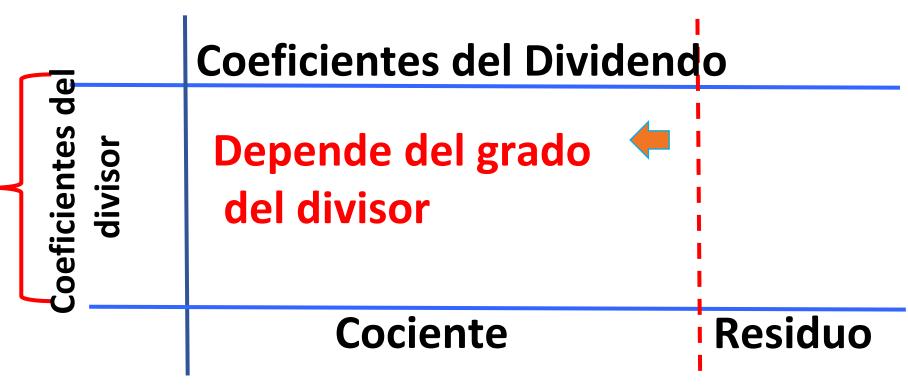


# A) MÉTODO DE HORNER

Para éste método los polinomios a dividir deben estar completos y ordenados en forma descendente; además, si faltase un término se le completa con ceros.

# **Esquema:**

coeficientes con signo cambiado.



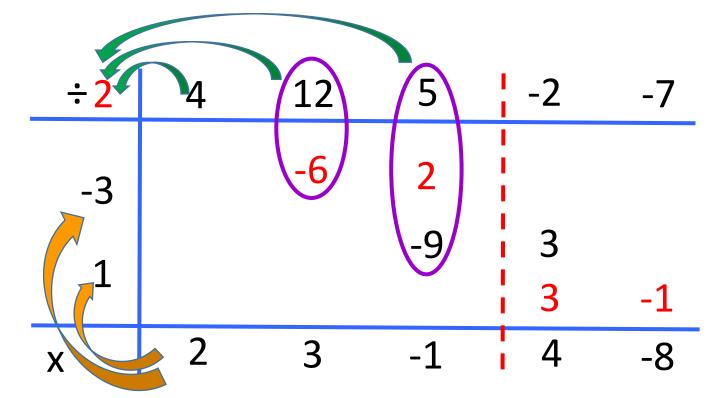


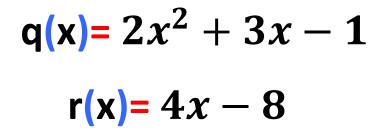


# **Ejemplo:**

Calcule el cociente y residuo de dividir

$$\frac{4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 2x - 7}{2x^2 + 3x - 1}$$









# B) MÉTODO DE RUFFINI

Se utiliza para calcular divisiones de la forma:  $\frac{P(x)}{ax+b}$ 

$$ax + b = 0$$
 Coeficientes del Dividendo  $x = -\frac{b}{a}$  Cociente Residuo



# 1er Caso: (a=1)

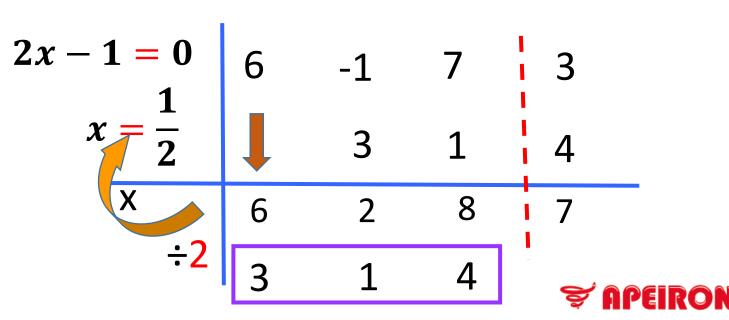
# Calcule cociente y residuo

# **2do Caso: (a≠1)**

# Calcule el cociente de dividir:

$$\frac{6x^3 - x^2 + 7x + 3}{2x - 1}$$

$$q(x) = 3x^2 + x + 4$$
SACO OLIVEROS



# C) TEOREMA DEL RESTO

$$\frac{D_{(x)}}{ax+b} \longrightarrow Resto: R = D_{\left(-\frac{b}{a}\right)}$$

# Forma práctica

- **1**. El divisor se igual a cero (ax + b = 0)
- 2. Se despeja la variable  $(x = -\frac{b}{a})$
- 3. Se reemplaza en el dividendo Obteniendo el resto  $(R = D_{(-\frac{b}{a})})$



# **EJEMPLO**

Calcule el resto de la siguiente división:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 2x + 6}{x - 2}$$

# Resolución

1) 
$$x - 2 = 0$$

2) 
$$x = 2$$

3) Reemplazando en el numerador

$$R = (2)^{4} - 2(2)^{3} + 2(2) + 6$$

$$R = 10$$



Para calcular el residuo hacemos  $d_{(x)}=0$  y despejamos equivalencias que nos permita reducir el grado del dividendo hasta lograr o bien cero o bien un polinomio de grado menor a la del divisor

# Ejemplo

Hallar el residuo en : 
$$\frac{(x^2+x-3)^3+x^2+3x+1}{x^2+x-4}$$

Hacemos: 
$$x^2 + x - 4 = 0 \rightarrow x^2 = -x + 4$$

Reemplazando en el dividendo : 
$$R_{(x)} = (4-3)^2 - x + 4 + 3x + 1$$

$$R_{(x)} = 2x + 6$$





# **COCIENTES NOTABLES (C.N.)**

# **DEFINICIÓN**

Son aquellos cocientes que se pueden obtener en forma directa, sin la necesidad de efectuar la operación de división.

Proviene de una División Notable de la forma:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^c \pm y^d}$$

# **EJEMPLOS**

$$\frac{x^{12}-y^{16}}{x^3-y^4}$$
;  $\frac{p^{30}-q^{24}}{p^5+q^4}$ ;  $\frac{w^{99}+z^{77}}{w^9+z^7}$ 

# **TEOREMA**

Sea la División:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^c \pm y^d}$$

Se cumple que:

$$N = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Donde:

$$N = \# terminos$$

# **EJEMPLO**

Halle la cantidad de términos del C.N. que genera la siguiente división:

$$\frac{x^{20}-y^{30}}{x^4-y^6}$$

## Resolución:

$$N = \frac{20}{4} = \frac{30}{6} \longrightarrow N = 5$$

El C.N. tiene 5 términos



## **PROBLEMA**

Halle la cantidad de términos del C.N. que genera la siguiente división:

$$\frac{x^{6p-2}-y^{3p+11}}{x^5-y^4}$$

#### **Resolución:**

Se cumple que:

$$N = \frac{6p-2}{5} = \frac{3p+11}{4}$$

$$4(6p-2) = 5(3p+11)$$

$$9p = 63 \longrightarrow p = 7 \longrightarrow \frac{x^{40} - y^{32}}{x^5 - y^4}$$

$$N = \frac{40}{5} = 8$$
  $\longrightarrow$  El C.N. tiene 8 términos

# **CASOS**

## Son 3 casos:

# **CASO 1**:

$$\frac{x^a - y^b}{x^c - y^d}$$



Todos son (+)

# **CASO 2**:

N debe ser par

$$\frac{x^a - y^b}{x^c + y^d}$$



 $T_1, T_3, T_5, \dots son (+) : Lugar impar$ 

# **CASO 3:**

N debe ser impar

$$\frac{x^a + y^b}{x^c + y^d}$$



$$T_2, T_4, T_6, \dots son(-): Lugar par$$

# **EJEMPLOS**

# **CASO 1**:

$$\frac{x^{15} - y^{10}}{x^3 - y^2}$$



$$x^{12} + x^9y^2 + x^6y^4 + x^3y^6 + y^8$$

Todos son (+)

# **CASO 2**:

N debe ser par

$$\frac{x^{18}-y^{12}}{x^3+y^2}$$



$$x^{15} - x^{12}y^2 + x^9y^4 - x^6y^6 + x^3y^8 - y^{10}$$

 $T_1, T_3, T_5, ... son (+) : Lugar impar$ 

# **CASO 3**:

N debe ser impar

$$\frac{x^{15} + y^{10}}{x^3 + y^2}$$



# $T_2, T_4, T_6, \dots son(-): Lugar par$

$$x^{12} - x^9y^2 + x^6y^4 - x^3y^6 + y^8$$

# FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL

Sea la división:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^c \pm y^d}$$

El término de lugar k se halla con la siguiente fórmula:

$$T_k = (signo)(x^c)^{N-k}(y^d)^{k-1}$$

#### **EJEMPLO**

Halle el término de lugar 7 en:

$$\frac{x^{30}-y^{20}}{x^3-y^2}$$

## Resolución:

$$N=\frac{30}{3}=\frac{20}{2}\longrightarrow N=10$$

Séptimo término  $\longrightarrow k = 7$ 

$$T_7 = (+)(x^3)^{10-7}(y^2)^{7-1}$$

$$T_7 = (x^3)^3 (y^2)^6$$

$$T_7 = x^9 y^{12}$$

# TÉRMINO CENTRAL ( $T_c$ )

# Está dado por:

$$T_c = T_{\frac{N+1}{2}}$$

(N debe ser impar)

# **EJEMPLO**

Halle el término central en:

$$\frac{x^{44} + y^{33}}{x^4 + y^3}$$

# Resolución:

$$\frac{x^{44} + y^{33}}{x^4 + y^3} \quad | \quad N = \frac{44}{4} = 11$$

$$T_c = T_{\frac{11+1}{2}} \longrightarrow T_c = T_6$$

El T<sub>c</sub> ocupa el lugar 6.

Calculamos el  $T_6$ :

$$T_6 = (-)(x^4)^{11-6}(y^3)^{6-1}$$

$$T_6 = -(x^4)^5 (y^3)^5$$

$$T_6 = -x^{20}y^{15}$$





 Respecto a la división del polinomio, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

$$\frac{2x^6 + 3x^2 + mx + n}{x^2 - 2x + 1}$$

- ➤ El grado del divisor es 2. ( )
- ➤ El grado del cociente es 4. ( )
- El mayor grado del residuo es 1. ( )

# **RESOLUCIÓN**

$$[D] = 6; [d] = 2$$

$$II. - [q]^{\circ} = [D]^{\circ} - [d]^{\circ} \rightarrow [q]^{\circ} = 6 - 2 \rightarrow [q]^{\circ} = 4$$

III. -Por teoria: 
$$[R]_{max}^{\circ} = [d]^{\circ} -1$$

$$[R]_{max}^{\circ} = 2 - 1$$
  $[R]_{max}^{\circ} = 1$ 

## : VVV



**2.** Al dividir P(x) entre  $(x^2 + 1)$  se obtiene como cociente  $2x^3$  y como residuo x + 1. Evalúe P(1).

## Resolución

Por el algoritmo de la división:

$$P_{(x)} = (x^2 + 1)(2x^3) + x + 1$$

evaluamos para x = 1

$$P_{(1)} = (1^2 + 1)(2(1)^3) + 1 + 1$$

: 
$$P_{(1)} = 6$$

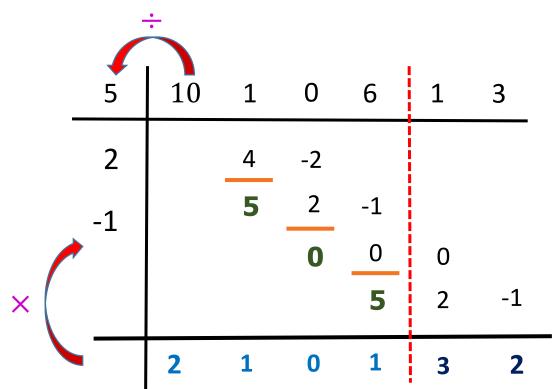




Halle el cociente de la siguiente división:

$$\frac{10x^5 + x^4 + 6x^2 + x + 3}{5x^2 - 2x + 1}$$

## Resolución



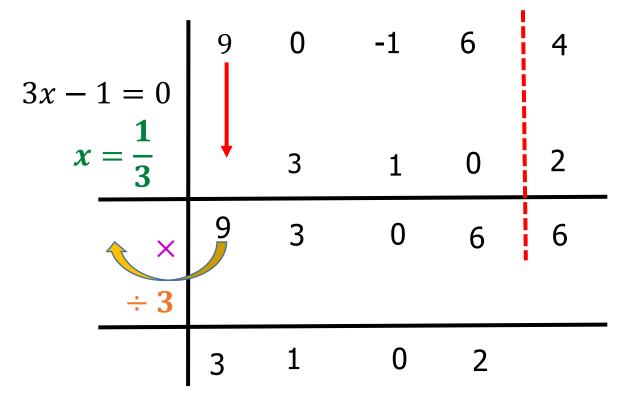
el cociente sera :

$$\therefore q_{(x)} = 2x^3 + x^2 + 1$$

 Calcule la suma del cociente y resto de la siguiente división

$$\frac{9x^4 - x^2 + 6x + 4}{3x - 1}$$

#### Resolución



se obtiene:

$$q_{(x)} = 3x^3 + x^2 + 2$$

$$R_{(x)} = 6$$

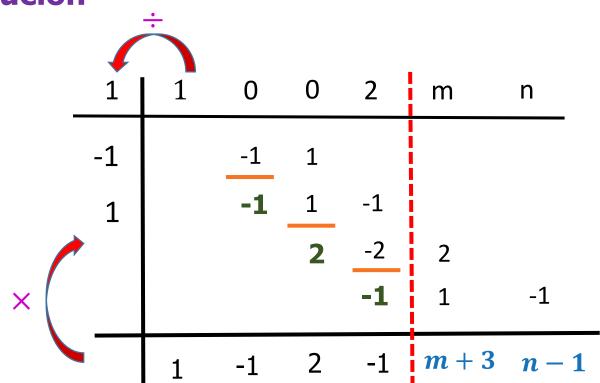
$$\therefore q_{(x)} + R_{(x)} = 3x^3 + x^2 + 8$$

## Si la siguiente división es exacta

$$\frac{x^5 + 2x^2 + mx + n}{x^2 + x - 1}$$

calcule mn.

## Resolución



$$Por\ dato:\ R_{(x)}=0$$

$$\rightarrow m + 3 = 0 \land n - 1 = 0$$

$$m = -3 \wedge n = 1$$

$$m \cdot m \cdot n = -3$$

 Halle el resto de la siguiente división polinómica

$$\frac{3x^{2017} - 2x^2 + x + 3}{x - 1}$$

## Resolución

aplicamos el teorema del resto : x - 1 = 0

$$\rightarrow x = 1$$

Reemplazando en el dividendo:

$$R_{(x)} = 3(1)^{2017} - 2(1)^2 + 1 + 3$$

$$\therefore R_{(x)} = 5$$



# Halle el grado del cociente de

$$\frac{(x+1)(x-2)^2(x+3)^3...(x-8)^8}{x^8+x-1}$$

## Resolución

Hallamos el grado del dividendo:  $1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{8.9}{2}$ 

$$[D]^{\circ} = 36$$

$$\rightarrow [d]^{\circ} = 8$$

por lo tanto .el grado del cociente es :

$$\therefore [q]^{\circ} = 36 - 8 = 26$$





**8.** Al dividir P(x) entre  $(x^4 + 2x + 2)$  se obtiene como cociente  $(4x^2 + 3)$  y como resto ax + 6. Halle el término independiente del dividendo.

#### Resolución

Por el algoritmo de la división:

$$P_{(x)} = (x^4 + 2x + 2).(4x^2 + 3) + ax + 6$$

 $Piden P_{(0)}$ ; reemplazamos

$$P_{(0)} = (8^2 + 2.0 + 2)(4.0^2 + 3) + \alpha.0 + 6$$

$$\therefore P_{(0)} = 12$$

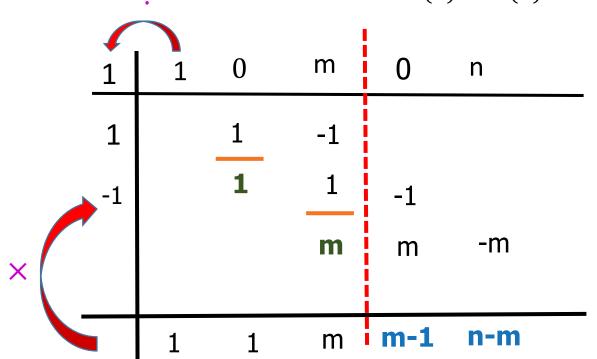


# Si los polinomios

$$P(x) = x^4 + mx^2 + n \ y \ d(x) = x^2 - x + 1$$
son divisibles, calcule  $m + n$ .

# Resolución

 $si\ P_{(x)}\ y\ d_{(x)}\ son\ divisibles\ o \ R_{(x)}=0$ 



Se cumple:

$$\rightarrow m - 1 = 0 \land n - m = 0$$

$$m = 1 \land n = m = 1$$

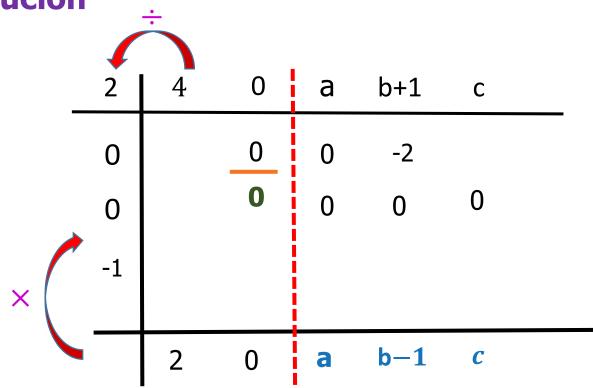
$$\therefore m+n=2$$

#### Si el resto de la siguiente división es un monomio mónico y lineal

$$\frac{4x^4 + ax^2 + (b+1)x + c}{2x^3 + 1}$$

calcule  $b^a + b^b + b^c$ .

## Resolución



Por dato: Residuo monico y lineal

$$\rightarrow a = 0 \land b - 1 = 1 \land c = 0$$

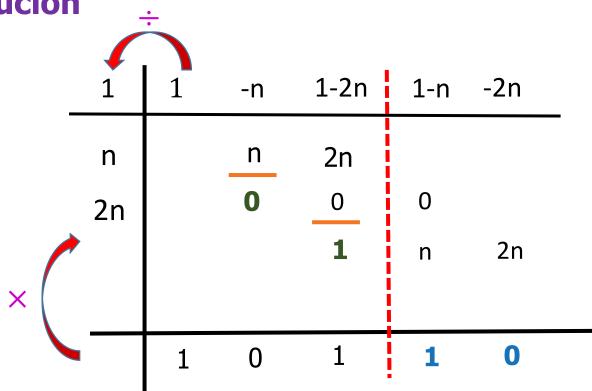
$$a = 0 \land b = 2 \land c = 0$$

$$b^a + b^b + b^c = 6$$

#### Halle el resto de la división

$$\frac{x^4 - nx^3 + (1 - 2n)x^2 + (1 - n)x - 2n}{x^2 - nx - 2n}$$

# Resolución



piden el resto:

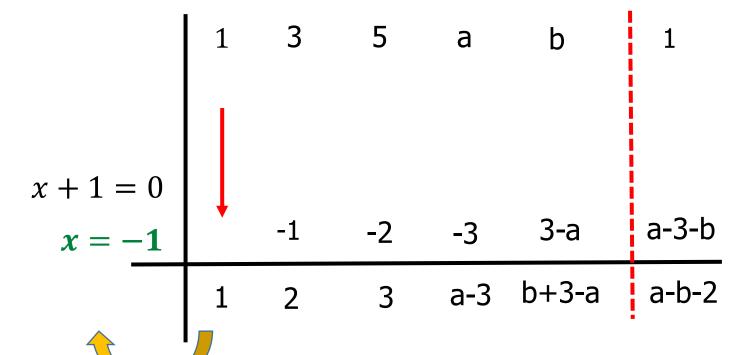
$$\therefore R_{(x)} = x$$

#### De la división

$$\frac{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 1}{x + 1}$$

se obtiene un cociente de coeficientes consecutivos. Calcule a + b.

## Resolución



#### Por dato:

$$a-3=4 \wedge b+3-a=5$$

$$a = 7$$
  $b + 3 - 7 = 5$ 

$$b = 9$$

$$\therefore a+b=16$$

# Halle el resto de la siguiente división

$$\frac{x^{13} - 625x^9 + x^2 - 4x + 1}{x - 5}$$

#### Resolución

Por el teorema del resto:  $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$ 

$$R_{(x)} = (5)^{13} - 625.(5)^{9} + (5)^{2} - 4(5) + 1$$

$$R_{(x)} = (5)^{13} - (5)^{4}.(5)^{9} + (5)^{2} - 4(5) + 1$$

$$R_{(x)} = (5)^{13} - (5)^{13} + (5)^{2} - 4(5) + 1$$

 $\therefore R_{(x)} = 6$ 



## Halle el resto de la división

$$\frac{(x^2-3)^8+x^3+1}{x^2-4}$$

# Resolución

Por el teorema del resto:  $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4$ 

Reemplazando:

$$R_{(x)} = (4-3)^8 + x^2 \cdot x + 1$$
$$R_{(x)} = 1 + 4 \cdot x + 1$$

$$\therefore R_{(x)} = 4x + 2$$



#### 15. Se tiene la siguiente división

$$\frac{x^{15} + 2x^{12} + x^3 - 2}{x^6 + x^3 + 1}$$

halle el término independiente del cociente.

# Resolución

Por el teorema del resto: 
$$x^6 + x^3 + 1 = 0$$
  $\rightarrow (x^6 + x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0.(x^3 - 1)$ 

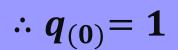
$$x^9 - 1 = 0 \rightarrow x^9 = 1$$
; Reemplazando en el dividendo:

$$R_{(x)} = x^9 \cdot x^6 + 2x^9 \cdot x^3 + x^3 - 2 \rightarrow R_{(x)} = (1)(-x^3 - 1) + 2(1)x^3 + x^3 - 2$$

$$\rightarrow R_{(x)} = 2x^3 - 3$$
; Por el algoritmo de la división:

$$x^{15} + 2x^{12} + x^3 - 2 \equiv (x^6 + x^3 + 1)q_{(x)} + 2x^3 - 3$$
; reemplazando  $x = 0$ 

$$(0)^{15} + 2(0)^{12} + (0)^3 - 2 \equiv ((0)^6 + (0)^3 + 1)q_{(0)} + 2(0)^3 - 3$$





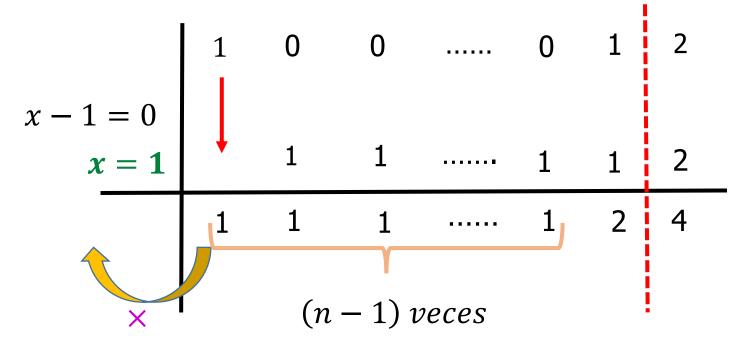


## 16. Halle el grado del dividendo en

$$\frac{x^n + x + 2}{x - 1}$$

si la suma de coeficientes del cociente es 39.

# Resolución



#### Por dato:

$$1.(n-1) + 2 = 39$$

$$n = 38$$

$$\therefore [D]^{\circ} = 38$$

#### Halle el resto de la división

$$\frac{x^{2017}}{x^2 + x + 1}$$

## Resolución

Por el teorema del resto:  $x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow (x^2 + x + 1)(x - 1) = 0.(x - 1)$ 

$$x^3 - 1 = 0 \quad \rightarrow x^3 = 1$$

Reemplazando en el dividendo:  $R_{(x)} = (x^3)^{672}.x$ 

$$R_{(x)} = (1)^{672}.x$$

$$\therefore R_{(x)} = x$$



**19.** Sea 
$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
, tal que  $(x + 4)$  y  $(x - 3)$  son factores de P, además  $P(4) = 48$ .

A) 
$$P(0) = 24$$

A) 
$$P(0) = 24$$
 B)  $P(1) = -30$ 

C) 
$$P(0) + P(1) = -6$$
 D)  $P(1) = 30$ 

E) 
$$P(4) = -48$$

## Resolución

$$Sea\ P_{(x)} = (x+4)(x-3)(x+m)$$
;  $Dato:\ P_{(4)} = 48$ 

## Reemplazando:

$$48 = (8)(1)(m+4)$$

$$m = 2$$

$$P_{(x)} = (x+4)(x-3)(x+2)$$

$$para x = 1$$
:

$$P_{(1)} = (5)(-2)(3)$$

$$P_{(1)} = -30$$





# 20. Dado el polinomio

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 120$$

que es divisible separadamente por los polinomios (x + 2), (x + 3) y (x + 5). Calcule a + b + c.

# Resolución

$$Sea P_{(x)} = (x+2)(x+3)(x+5)(x+m)$$

Se observa : 
$$P_{(0)} = 120$$
 ; reemplazando :

$$120 = (2)(3)(5)(m)$$

$$m = 4$$

$$P_{(x)} = (x+2)(x+3)(x+5)(x+4)$$

$$P_{(x)} = x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 120$$

$$\rightarrow a = 14$$
;  $b = 71 y c = 154$ 



$$\therefore a + b + c = 239$$

