ARITHMETIC

Chapter 7

VERANO UNI

CLASIFICACION DE LOS Z^+

SACO OLIVEROS

INTRODUCCIÓN

- En primer lugar, los números primos sirven para asentar las bases de cualquier número
- estos son los "ladrillos" con los que se construyen todos los números (compuestos).
- Y es que sin ellos no podemos elaborar algoritmos y cálculos complejos.
- Sin conocer los números primos, cómo determinarlos y qué implicaciones teóricas tienen, no podríamos hacer nada de lo que hacemos.

Por ejemplo

- Los números primos de gran tamaño, pueden emplearse para codificar cualquier tipo de información de manera segura.
- Si tú coges un par de números primos grandísimos y multiplicas, para poder obtener los originales que lo constituían es dificilísimo.
- Esto lo usan los bancos en los números de seguridad, las transferencias bancarias y otras operaciones".

CLASIFICACION DE LOS ENTEROS POSITIVOS

Dado el conjunto numérico:

$\mathbb{Z}^{+}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Para este estudio tomaremos en cuenta los divisores enteros positivos que tienen cada uno de ellos.

$\mathbb{Z}^{+}$	1	2	3	4	5	6	7	8	....
DIVISORES	1	1	1	1	1	1	1	1	
		2	3	2	5	2	7	2	
				4		3		4	
						6		8	

Donde Podemos Observar que:

- Tenemos un solo numero, que tiene un solo divisor que es 1.
- Tenemos números que poseen solo dos divisores. 2; 3; 5; 7; ……….
- Tenemos números que poseen mas de dos divisores. 4; 6; 8; 10; 12; ……….

Por lo que definiremos:

1. Números Simples

Son aquellos números que tiene a lo mas 2 divisores.

Los cuales se subdividen en:

A. La unidad

Es el único numero entero positivo que posee un solo divisor

B. Números primos o Primos absolutos

Admiten exactamente dos divisores los cuales son la unidad y el mismo número.

Ejemplo:

$\underbrace{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;23;\ 29;}_{\text{Los 10 primeros números primos}}\ \ldots$

2. Números Compuestos

Son aquellos números que admiten más de dos divisores.

Ejemplo:

$\underbrace{4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 10;\ 12;\ 14;\ 15;\ 16;\ 18;}_{\text{Los 10 primeros números compuestos}}\ldots..$

PROPIEDADES

1. La sucesión de los números primos es infinita y no existe formula alguna para determinar todos los números primos.

2. Los único números consecutivos y primos a la vez son el 2 y el 3.

3. El único número primo par que existe es el número 2.

4. Los único tres números impares consecutivos y primos a la vez son el 3; 5 y el 7.

5. Todo número primo mayor que 2 es $\overset{\circ}{4} \pm 1$.

6. Todo número primo mayor que 3 es $\overset{\circ}{6} \pm 1$.

ALGORITMO PARA DETERMINAR SI UN NÚMERO ES PRIMO

1°. Se calcula la $\sqrt{\ }$ (aprox) del número y se toma la parte entera de dicha raíz.

2°. Se indican todos los números primos menores o iguales a la parte entera.

3°. Se determina si el número es o no divisible por cada número primo considerado en el paso anterior.

Ejemplo: Comprobar si el número 139 es primo.

1° paso: $\sqrt{139} \approx 11{,}78\ldots$

2° paso: { 2; 3; 5; 7; 11 }

3° paso:

$$139 = \overset{\circ}{3} + 1$$

$$139 = \overset{\circ}{5} + 4$$

$$139 = \overset{\circ}{7} + 6$$

$$139 = \overset{\circ}{11} + 7$$

∴ Como 139 no es divisible por 2; 3; 5; 7; y 11 ,entonces será un numero primo

Ejemplo: Comprobar si el número 667 es primo.

1° paso: $\sqrt{667} \approx 25{,}82\ldots$

2° paso: { 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19 y 23 }

3° paso: $667 = \overset{\circ}{23} = 23x29$

∴ Como 667 es divisible por 23 no es un numero primo.

CRIBA DE ERATOSTENES

Se colocan los números naturales consecutivos a excepción de la unidad y se procede a eliminar los múltiplos de 2 excepto el 2, todo los múltiplos de 3 excepto el 3 y así sucesivamente hasta eliminar los múltiplos de la raíz cuadrada aproximada del número excepto esta, luego los números que quedan serán los primeros primos absolutos.

Ejemplo

¿Cuantos números primos son menores o igual a 50?

$\sqrt{50} \approx 7,07\ldots$ Eliminamos : m2, m3, m5 y m7

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~
23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ 37 ~~38~~
~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~

Números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47

CLASIFICACION POR UN GRUPO DE NUMEROS

Números Primos entre si (PESI)

Se les denomina también primos relativos o coprimos, y son aquellos que tienen como único divisor común a la unidad.

Ejemplo: ¿12; 15 y 20 son PESI?

Divisores

12 → 1; 2; 3; 4; 6; y 12

15 → 1; 3; 5 y 15

20 → 1; 2; 4; 5; 10 y 20

→ Unico divisor comun

∴ 12; 15 y 20 son PESI

¿12; 15 y 18 son PESI?

Divisores

12 → 1; 2; 3; 4; 6; y 12

15 → 1; 3; 5 y 15

18 → 1; 2; 3; 6; 9 y 18

∴ Como 12; 15 y 18 tiene ademas a 3 como divisor comun no son PESI

Números primos entre si 2 a 2

Son aquellos grupos de números que al ser tomados de 2 en 2, siempre son PESI.

Ejemplo:

8; 21 y 25 son PESI 2 a 2 puesto que:

8 y 21 son PESI, 8 y 25 son PESI

21 y 25 son PESI

Ejemplo:

9; 20 y 21 no son PESI 2 a 2 puesto que:

9 y 21 no son PESI

PROPIEDADES

1. Si un grupo de numeros son PESI 2 a 2, entonces son PESI, lo reciproco no siempre se cumple.
2. Dos numeros consecutivos siempre son PESI.

Ejemplos

8; 15 y 49 son PESI 2 a 2 puesto que:

8 y 15 son PESI, 8 y 49 son PESI

15 y 49 son PESI

∴ 8; 15 y 49 son PESI

$$\underbrace{n;\ (n+1);\ (n+2);\ \ldots\ldots\ldots;\ (n+k)}$$

Son PESI Por ser consecutivos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA O DE GAUSS

Todo número entero positivo mayor que uno, se puede expresar como el producto de sus divisores primos diferentes elevados cada uno de ellos a exponentes enteros positivos. Esta descomposición es única y se le denomina descomposición canónica (DC) de dicho numero.

Ejemplos Descomponer canónicamente a los numeros

a) 120

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2^3 . 3^1 . 5^1 \ldots (DC)$

Donde:

Divisores Primos: 2; 3 y 5

Divisores Simples: 1; 2; 3 y 5

b) 8000

8×10^3	$2^3 \times 5^3$
8	2
4	2
2	2
1	

$8000 = 2^6 . 5^3 \ldots (DC)$

Donde:

Divisores Primos: 2 y 5

Divisores Simples: 1; 2 y 5

En General:

$$\boxed{N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)}$$

Donde :

a, b, c: Numeros primos diferentes (Divisores primos)

α, β, θ: Son numeros enteros positivos

Aplicación:

Si $N = a^a \times (a+2)^{a-1} \times (a+4) \ldots (DC)$

Determine N

Como: a; (a+2) y (a+4)

Deben ser numeros primos diferentes

"a" Debe ser 3

$N = 3^3 \times 5^2 \times 7$

$\therefore N = 4725$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NUMERO

Por ejemplo:

Indiquemos los divisores del número 100.

$\mathbb{Z}^+$	Divisores								
100	1	2	4	5	10	20	25	50	100

Donde podemos observar que:

Divisores Primos: 2 5

Divisores Simples: 1 2 5

Div. Compuestos: 4 10 20 25 50 100

Divisores Propios: 1 2 4 5 10 20 25 50

Nota:

Se llama **divisor propio** a aquel divisor de un número diferente a dicho número.

1. Cantidad de divisores de N: (CD_N)

Por ejemplo: Sea N = 360

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ ...(DC)

Divisores

2^0	3^0	5^0
2^1	3^1	5^1
2^2	3^2	
2^3		
(3+1)	(2+1)	(1+1)

$CD_{360} = (3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$

$CD_{360} = 4 \times 3 \times 2 = 24$

En General:

Sea: $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)$

$\therefore$ $CD_N = (\alpha + 1) \times (\beta + 1) \times (\theta + 1)$

Donde :

$CD_N = CD_{Simples} + CD_{Compuestos}$

Nota:

$CD_{Simples} = 1 + CD_{Primos}$

$CD_{propios} = CD_N - 1$

Analicemos los divisores enteros positivos de 200:

¿Cuántos divisores tiene 200 ?

$200 = 2^3 . 5^2 \ldots (DC)$

$CD_{200} = (3 + 1) \times (2 + 1) = 12$

¿Cuántos divisores simples tiene 200 ?

$CD_{Simples} = 1 + 2 = 3$

¿Cuántos divisores compuestos tiene 200 ?

$CD_{Compuestos} = CD_{200} - CD_{Simples}$

$CD_{Compuestos} = 12 - 3 = 9$

¿Cuántos divisores pares tiene 200 ?

$200 = 2^3 . 5^2$ ... (DC)

$200 = 2 \times \underbrace{(2^2 . 5^2)}$

Nota:

Son divisores pares o múltiplos de 2

$CD_{Pares} = (2 + 1) \times (2 + 1) = 9$

¿Cuántos divisores propios tiene 200 ?

$CD_{propios} = CD_{200} - 1$

$CD_{propios} = 12 - 1 = 11$

2. Suma de divisores de N: (SD_N)

Por ejemplo: Sea $N = 360$

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ ...(DC)

Divisores

S_1	S_2	S_3
2^0	3^0	5^0
2^1	3^1	5^1
2^2	3^2	
2^3		

Nota:

Se sabe que:

$S = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

$SD_{360} = (S_1) \times (S_2) \times (S_3)$

$SD_{360} = \left(\frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1}\right) \times \left(\frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1}\right) \times \left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1}\right)$

$\therefore SD_{360} = (15) \times (13) \times (6) = 1170$

En General:

Sea: $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)$

$$SD_{360} = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right) \times \left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right) \times \left(\frac{c^{\theta+1}-1}{c-1}\right)$$

Donde:

$$SD_N = SD_{Simples} + SD_{Compuestos}$$

Nota:

$$SD_{Simples} = 1 + SD_{Primos}$$

$$SD_{propios} = SD_N - N$$

Analicemos los divisores enteros positivos de 324:

¿Cuál es la suma de los divisores tiene 324 ?

$$324 = 2^2 . 3^4 \ldots (DC)$$

$$SD_{324} = \left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right) \times \left(\frac{3^{4+1}-1}{3-1}\right) = (7) \times (121) = 847$$

¿Cuál es la suma de los divisores simples tiene 324 ?

$$CD_{Simples} = 1 + (2+3) = 6$$

¿Cuál es la suma de los divisores compuestos tiene 324 ?

$$SD_{Compuestos} = SD_{324} - CD_{Simples}$$

$$CD_{Compuestos} = 847 - 6 = 841$$

3. Suma de las inversas de los divisores de N: (SID_N)

En General:

Sea: $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)$

$$SID_N = \frac{SD_N}{N}$$

Por ejemplo:

¿Cuál es SID_{324} ?

$324 = 2^2 . 3^4 \ldots (DC)$

$$SD_{324} = \left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right) \times \left(\frac{3^{4+1}-1}{3-1}\right)$$

$$SD_{324} = (7) \times (121) = 847$$

$$SID_{324} = \frac{SD_{324}}{324} = \frac{847}{324} = 2{,}61$$

4. El producto de los divisores de N: (PD_N)

En General:

Sea: $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)$

$$PD_N = \sqrt{N^{CD_N}} = N^{\frac{CD_N}{2}}$$

Por ejemplo:

¿Cuál es PD_{80} ?

$80 = 2^4 . 5^1 \ldots (DC)$

$CD_{80} = (4+1) \times (1+1) = 20$

$PD_{80} = \sqrt{80^{20}} = 80^{10}$

NUMERO DE FORMAS DE EXPRESAR UN $\mathbb{Z}^+$ COMO EL PRODUCTO DE OTROS DOS $\mathbb{Z}^+$

Sea: $\boxed{N = A \times B}$

Donde:

N; A y B $\in \mathbb{Z}^+$

Ejemplos:

$24 = 2^3 \cdot 3^1$ $\left\{\begin{array}{l} 1 \times 24 \\ 2 \times 12 \\ 3 \times 8 \\ 4 \times 6 \end{array}\right.$

$CD_{24} = 8$

$N°\text{de formas} = \dfrac{8}{2} = 4$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\left\{\begin{array}{l} 1 \times 36 \\ 2 \times 18 \\ 3 \times 12 \\ 4 \times 9 \\ 6 \times 6 \end{array}\right.$

$CD_{36} = 9$

$N°\text{de formas} = \dfrac{9+1}{2} = 5$

FUNCION DE EULER (φ_N) O INDICADOR DE N

Indica cuantos numeros enteros positivos que son PESI con N existen entre 2 múltiplos consecutivos de N. De donde deducimos que nos , indica en forma particular, cuantos numeros enteros positivos menores y PESI con N existen.

Ejemplos:

¿Cuántos numeros menores que 12 son PESI con el ?

Entonces:

Los numeros menores que 12 son

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11

Existen 4 numeros Que son PESI con 12

También obtenemos lo mismo:

$12 = 2^2 . 3^1 \Rightarrow \varphi_N = 2^{2-1} . (2-1) . 3^{1-1} . (3-1)$

$\varphi_N = 2^1 . (1) . 3^0 . (2) = 4$ (Existen 4 numeros)

En General

Sea:

$$\boxed{N = a^{\alpha} . b^{\beta} \ldots (DC)}$$

$$\therefore \boxed{\varphi_N = a^{\alpha-1} . (a-1) . b^{\beta-1} . (b-1)}$$

Nota:

Si N>1 entonces la suma de los enteros positivos menores o iguales a N y PESI con N es :

$$\boxed{S = \frac{N.\varphi_N}{2}}$$

Ejemplo:

Sea: N= 12 y $\varphi_{12} = 4$

$\rightarrow S = \frac{12.(4)}{2} = 24$

DESCOMPOSICION CANONICA DE UN NUMERO FACTORIAL

Ejemplo:

Si: $50! = 2^{47} . 3^a . 5^b . \ldots \ldots \ldots (DC)$

¿Determine a + b?

Regla practica:

50 | 3
2 16 | 3
1 5 | 3
2 1

50 | 5
0 10 | 5
0 2

a = 16+ 5+ 1= 22

a = 10+ 2 = 12

$\therefore$ 22+12 = 34

También obtenemos lo mismo:

$12 = 2^2 . 3^1 \Rightarrow \varphi_N = 2^{2-1} . (2-1) . 3^{1-1} . (3-1)$

$\varphi_N = 2^1 . (1) . 3^0 . (2) = 4$ (Existen 4 numeros)

En General

Sea:

$$\boxed{N = a^{\alpha} . b^{\beta} \ldots (DC)}$$

$$\therefore \boxed{\varphi_N = a^{\alpha-1} . (a-1) . b^{\beta-1} . (b-1)}$$

Nota:

Si N>1 entonces la suma de los enteros positivos menores o iguales a N y PESI con N es :

$$\boxed{S = \frac{N.\varphi_N}{2}}$$

Ejemplo:

Sea: N= 12 y $\varphi_{12} = 4$

$\rightarrow S = \frac{12.(4)}{2} = 24$

DESCOMPOSICION CANONICA DE UN NUMERO FACTORIAL

Ejemplo:

Si: $50! = 2^{47} . 3^a . 5^b . \ldots \ldots \ldots (DC)$

¿Determine a + b?

Regla practica:

50	3		
2	16	3	
	1	5	3
		2	1

a = 16+ 5+ 1= 22

50	5	
0	10	5
	0	2

a = 10+ 2 = 12

$\therefore$ 22+12 = 34

1. A un número de tres cifras se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, obteniéndose un número que tiene 18 divisores. Calcule la suma de las cifras de dicho número, si es el mayor posible.

A) 15 B) 19 C) 17
D) 23 E) 21

RESOLUCIÓN

Tenemos que: $\overline{abc} - \overline{cba}$, Posee 18 divisores

Descomponemos polinómicamente:

$(100a+10b+c) - (100c+10b+a) = 99(a-c) = 3^2 \times 11^1 \times (a-c)$

Observación: Descartamos que a-c=3

Luego: $a-c=\underbrace{(\text{primo})}_{\text{Sólo puede ser = 2}}{}^2$; (pues así CD=3x2x3=18)

Es decir: a-c= 4

Máx.: 9 y 5 ; además: b∈ {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6: 7; 8; 9}

Máx.

Por lo tanto: a + b + c = 23

D

2. Un alumno al calcular el número de divisores de N, encontró erróneamente 49, porque consideró a 4 y 9 como números primos. ¿Cuál es el verdadero número de divisores de N?

A) 81 B) 100 C) 121

D) 144 E) 169

RESOLUCIÓN

Sea la supuesta descomposición canónica de N:

$N = 4^x.9^y \Rightarrow (x+1).(y+1) = 49 \Rightarrow x=6 \; ; \; y=6$

La descomposición canónica de N es:

$N = (2^2)^x.(3^2)^y = 2^{2x}.3^{2y}$

$N = 2^{12}.3^{12} \Rightarrow CD(N) = 13x13 = 169$

E

3. ¿Cuántos divisores de 113 400 terminan en 1, 3, 7 o 9?

A) 5 B) 12 C) 24
D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN

Tenemos que:

$113400 = \cancel{2}^3 . 3^4 . \cancel{5}^2 . 7^1$ …. (D.C.)

Los divisores que terminen en 1; 3; 7 o 9.

Son aquellos que: Son PESI con 2 y PESI con 5

Es decir: Son todos los divisores que se pueden generar con $3^4 . 7^1$.

Son: $5 \times 2 = 10$

E

4. Dar $a - b$ si se sabe que $\overline{aabb}$ tiene 21 divisores.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Sabemos que $\overline{aabb}$ es múltiplo de 11:

Para que posea 21 divisores (notemos que $21=3\times7$)

Su descomposición canónica, tendrá que ser:

$$= 11^{(2)} \times \underbrace{(\text{primo})}_{\text{Sólo puede ser } = 2}{}^{(6)} = 11^2 \times 2^6 = 7744$$

$\Rightarrow$ $a=7$; $b=4$

Por tanto: lo $a - b = 3$

C

5. Calcule la suma de todos los valores de a que hacen posible que el numeral $\overline{aaa}$ tenga 8 divisores.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

RESOLUCIÓN

Sabemos que $\overline{aaa}$ es 111.a:

Para que posea 8 divisores(notemos que 111=3x37)

Observación: Descartamos que a=3
Sin embargo si puede ser $a=3^2$
Pues así: $\overline{aaa} = 3\text{x}37\text{x}3^2 = \underbrace{3^3\text{x}37^1}_{\text{C.D.}=4\times 2=8}$

También su descomposición canónica puede ser:

$= 3^1\text{x}37^1\text{x}\underbrace{(\text{primo})}_{\text{Sólo puede ser }=2\text{ o }5\text{ o }7}{}^1$; (pues así CD=2x2x2=8)

Por lo tanto: 9 + 2 + 5 + 7 = 23

D

6. Determine dos números enteros N que tengan como únicos factores primos 2 y 3 de modo tal que el número de divisores de N^2 sea el triple de las de N, se pide: ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de los números?

A) 45 B) 90 C) 120

D) 150 E) 180

RESOLUCIÓN

Sea la descomposición canónica de N:

$N = 2^x.3^y \Rightarrow CD(N) = (x+1).(y+1)$

Luego:

$N^2 = 2^{2x}.3^{2y} \Rightarrow CD(N^2) = (2x+1).(2y+1)$

Por condición: $(2x+1).(2y+1) = 3.(x+1).(y+1)$

Para: $x = 4 \Rightarrow (9).(2y+1) = 3.(5).(y+1) \Rightarrow y=2$

Es decir: $x = 4$; $y=2$ (o viceversa)

Entonces: $N_1 = 2^4.3^2 = 144$

$N_2 = 2^2.3^4 = 324$

Por lo tanto: $324 - 144 = 180$

E

7. Determine el valor de n si se sabe que el número 1960^n, tiene 105 divisores.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

La descomposición canónica de 1960^n:

$(2^3 x 5^1 x 7^2)^n = 2^{3n} x 5^n x 7^{2n}$

La cantidad de divisores:

$(3n+1).(n+1).(2n+1) = 105 = 7x3x5 \Rightarrow n=2$

B

8. Cuántos divisores tiene $N=9^{n+1}-9^{n-1}$, si 161^{n+2} tiene $\overline{n6}$ divisores.

A) 49 B) 50 C) 64
D) 65 E) 81

RESOLUCIÓN

Buscamos la descomposición canónica de N:

$N = 9^{n+1} - 9^{n-1} = 9^{n-1}.(9^2 - 1) = (3^2)^{n-1}.(80)$

$N = 3^{2n-2}.2^4.5^1$

También hacemos la D.C. de 161^{n+2}:

$161^{n+2} = (7x23)^{n+2} = 7^{n+2}x23^{n+2}$; $(CD=\overline{n6})$

$\Rightarrow$ $(n+3).(n+3) = \overline{n6}$ $\Rightarrow$ $n = 3$

Luego: $N = 3^4.2^4.5^1$

$CD(N) = 5x5x2 = 50$

B

9. Las cifras del numeral $\overline{abcabc}$ son todas diferentes de cero. Si el número es el menor posible y tiene 16 divisores, ¿cuál es la suma de las cifras?

A) 20 B) 18 C) 14
D) 12 E) 10

RESOLUCIÓN

Descomponemos en bloques a $\overline{abcabc}$:

$\overline{abc}\times 10^3 + \overline{abc} = 1001.\overline{abc} = 7^1 \times 11^1 \times 13^1 \times \overline{abc}$

Para que posea 16 divisores, $\overline{abc}$ puede ser:

$\overline{abc} = 11^2$; pues tendríamos: $7^1 \times 11^3 \times 13^1 \Rightarrow CD=8$

$\overline{abc} = (\text{primo})^1 \Rightarrow \overline{abc} \in \{101; 103; 107; 109; \underbrace{113}; ...\}$

Menor donde todas las cifras son diferentes de cero

Luego: $\overline{abcabc}$ es: 113113

Por lo tanto: $1+1+3+1+1+3 = 10$

E

10. Calcule el valor de n, si $N=21\times15^n$ tiene 20 divisores compuestos.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN

Buscamos la descomposición canónica de N:

$N = 21\times15^n = 3x7x(3x5)^n = 3^{n+1}x5^1x7^1 \Rightarrow CD_{(simples)} = 4$

Pero: $CD_{(compuestos)} = 20$

Luego: $CD_{(total)} = 24$

Es decir: $(n+2).(2).(2) = 24$

$n+2 = 6$

$n = 4$

B

11. Un número de 6 cifras es múltiplo de m. Si se le resta 1 a cada una de sus cifras el resultado sigue siendo divisible entre m, ¿cuántos valores puede tomar m?

A) 2 B) 4 C) 8

D) 16 E) 32

RESOLUCIÓN

Por Dato: $\overline{abcdef} = \overset{\circ}{m}$

Además:

$$\underbrace{\overline{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)(f-1)}}_{\text{Descomponiendo convenientemente}} = \overset{\circ}{m}$$

$\underbrace{\overline{abcdef}}_{\overset{\circ}{m}} + 111111 = \overset{\circ}{m}$ ➡ $111111 = \overset{\circ}{m}$

m es un divisor de 111111

Observe: $111111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \quad 37$ DC

➡ $CD_{111111} = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 32$

∴ m toma 32 valores.

Rpta: E

12. ¿Cuántos números de tres cifras tienen como suma de inversas de sus divisores al número 2?

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Sea: $N = \overline{abc}$

Por Dato: $SID_N = 2 \Rightarrow \frac{SD_N}{N} = 2 \Rightarrow SD_N = 2 \times N$

Entonces, N es un Número Perfecto

Teorema: Un entero par es un número perfecto si es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$ donde $2^p - 1$ es un primo

Observe:

$p = 2 \longrightarrow 2^{2-1}(2^2 - 1) = 2 \times 3 = 6$

$p = 3 \longrightarrow 2^{3-1}(2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$

$\boxed{p = 5 \longrightarrow 2^{5-1}(2^5 - 1) = 16 \times 31 = 496}$

$p = 7 \longrightarrow 2^{7-1}(2^7 - 1) = 64 \times 127 = 8128$

Solo: $\overline{abc} = 496$

$\therefore$ Existe solo un número.

Rpta: A

13. ¿Cuántos divisores de 144 000 son cubos perfectos?

A) 4 B) 6 C) 8

D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN

Dado el número:

$N = 144\,000$

Descomponiendo canónicamente:

$N = 2^7 \times 3^2 \times 5^3$ DC

Piden la cantidad de divisores cubos perfectos.

Observe:

$N = \underbrace{\boxed{(2^3)^2 \times (5^3)^1}}_{\text{Nos dá la CD cubos perfectos}} \times 2 \times 3^2$

$CD_{\text{cubos perfectos}} = (2+1)(1+1)$

$\therefore CD_{\text{cubos perfectos}} = 6$

Rpta: B

14. ¿Cuántos números naturales menores o iguales a 800 son primos con él?

A) 80 B) 160 C) 320
D) 640 E) 300

RESOLUCIÓN

Sea: $\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ 798,\ 799,}_{800}$ (800 números)

De dichos números, nos piden cuántos son menores o iguales a 800 y PESI con 800.

Observe:

$800 = 2^5 \times 5^2$ DC

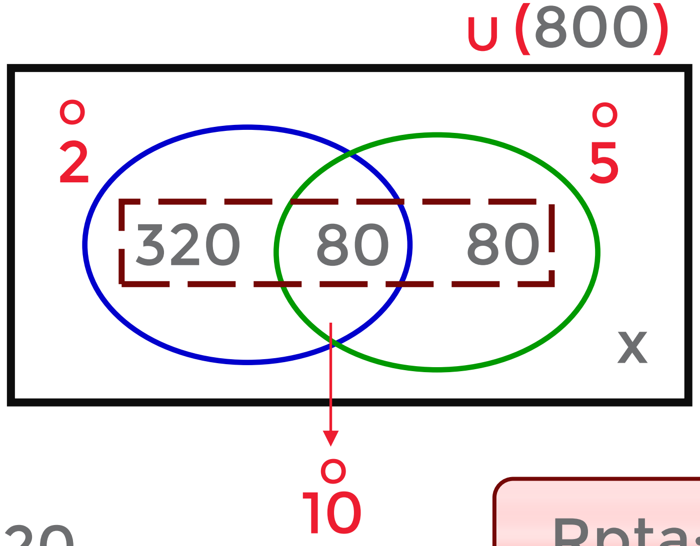
Dichos números no son múltiplos de 2 ni múltiplos de 5.

Ahora:

Son m10: $\dfrac{800}{10} = 80$

Son m2: $\dfrac{800}{2} = 400$

Son m5: $\dfrac{800}{5} = 160$



$\therefore$ x = 800 - 480 = 320

Rpta: C

15. ¿Cuántos números de dos cifras son primos con 100?

A) 16 B) 20 C) 24

D) 32 E) 36

RESOLUCIÓN

Sean los números de dos cifras: $\underbrace{10, 11, 12, 13, 14, \ldots, 98, 99}$ (90 números)

De dichos números, nos piden cuántos son PESI con 100.

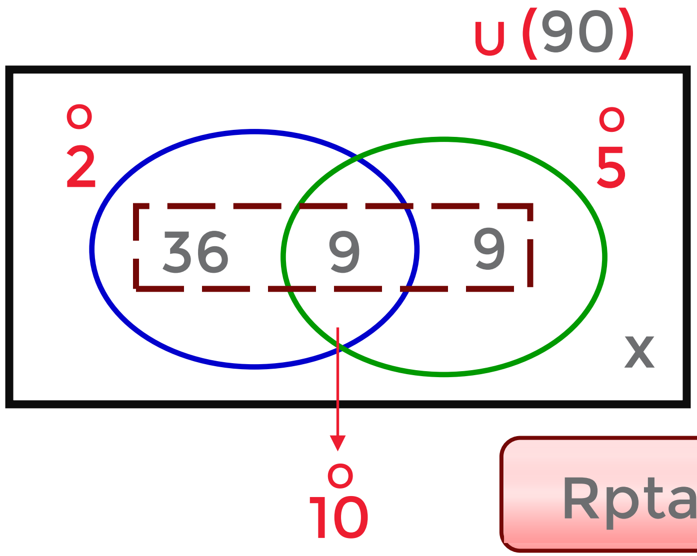
Observe: $100 = 2^2 \times 5^2$ DC ➡ Dichos números no son múltiplos de 2 ni múltiplos de 5.

Ahora:

Son m10: $\dfrac{90}{10} = 9$

Son m2: $\dfrac{90}{2} = 45$

Son m5: $\dfrac{90}{5} = 18$



$\therefore\ x = 90 - 54 = 36$

Rpta: E

16. Calcule la suma de todos los números menores que 200 que con él son primos relativos.

A) 2000 B) 4000 C) 6000
D) 8000 E) 1000

RESOLUCIÓN

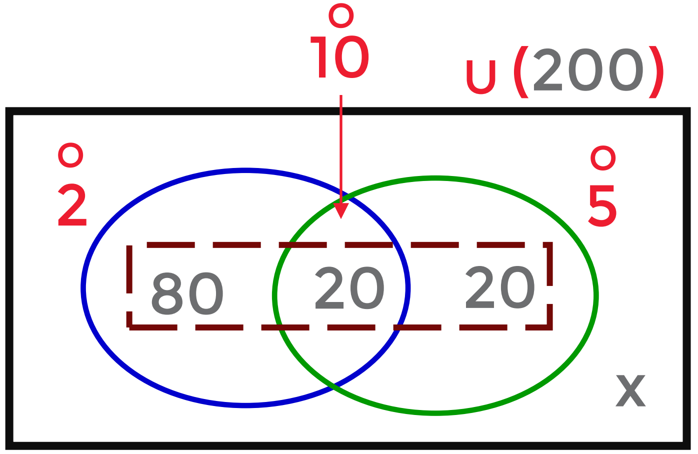
Calculemos la cantidad de números menores que 200 ($2^3 \times 5^2$) que son PESI con 200.

Observe:

Son m10: $\frac{200}{10} = 20$

Son m2: $\frac{200}{2} = 100$

Son m5: $\frac{200}{5} = 40$



$x = 200 - 120 = 80$

Indicando los números menores que 200 y PESI con 200:

1, 3, 7, 9, ..., 191, 193, 197, 199 (80 números)

16. Calcule la suma de todos los números menores que 200 que con él son primos relativos.

A) 2000 B) 4000 C) 6000

D) 8000 E) 1000

RESOLUCIÓN

Calculemos ahora la suma de números menores que 200 que son PESI con 200.

$$S = \overbrace{1 + 3 + 7 + 9 + \ldots + 191 + 193 + 197 + 199}^{80 \text{ Sumandos}}$$

Observe que la suma de cada pareja de términos equidistantes de los extremos es constante e igual a 200.

$$S = 200 \times \frac{80}{2} \quad \therefore \quad S = 8000$$

Rpta: D

17. Si se conoce que $N=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 7$ y que entre 2N y 7N existen 720 números PESI con N, ¿cuál es el número de cifras de N?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN

Por Dato: $\boxed{N = 2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 7\ \text{DC}}$

Recuerde: Entre dos múltiplos consecutivos de N la cantidad de números PESI con N está dado por el indicador de N.

Observe:

$$2\times N \underbrace{\;.\;.\;.\;}_{\text{Números PESI con N.}} 3\times N \underbrace{\;.\;.\;.\;}_{\text{Números PESI con N.}} 4\times N \underbrace{\;.\;.\;.\;}_{\text{Números PESI con N.}} 5\times N \underbrace{\;.\;.\;.\;}_{\text{Números PESI con N.}} 6\times N \underbrace{\;.\;.\;.\;}_{\text{Números PESI con N.}} 7\times N$$

Además: Cantidad de números PESI con N entre 2N y 7N $= 720$ ➡ $5\times\Phi(N) = 720$

Ahora:

$$\cancel{5}\times 2^{\alpha-1}\times(2-1)\times 3^{\beta-1}\times(3-1)\times 7^{1-1}\times(7-1) = 7\cancel{2}0$$

➡ $2^{\alpha-1}\times 3^{\beta-1} = 12 = 2^2\times 3$ $\boxed{\alpha = 3}$ $\boxed{\beta = 2}$

$N = 2^3\times 3^2\times 7 = 504$ ∴ N tiene 3 cifras

Rpta: B

18. Si:

$P = 210 \times 211 \times 212 \times 213 \times \ldots \times 342$

tiene n divisores. ¿Cuántos divisores tiene $343 \times P$?

A) 29n/26 B) 28n/25 C) 27n/24

D) 26n/23 E) 25n/22

RESOLUCIÓN

Se Tiene $P = 210 \times 211 \times 212 \times 213 \times \ldots \times 342$

Además: $CD_P = n$ Piden: CD_{343P}

Observe:

$$P = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 209}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 209} \times 210 \times 211 \times 212 \times 213 \times \ldots \times 342$$

$$P = \frac{342!}{209!} = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^k \times \ldots \quad \text{DC}$$

Mostramos parte de la DC de P y solo calcularemos el exponente del factor primo 7, ya que luego debemos calcular la cantidad de divisores de 343P = 7^3P

Ahora:

342 ÷ 7 = 48; 48 ÷ 7 = 6

209 ÷ 7 = 29; 29 ÷ 7 = 4

$k = 54 - 33 = 21$

18. Si:

$P=210\times211\times212\times213\times\ldots\times342$ tiene n divisores. ¿Cuántos divisores tiene 343×P?

A) 29n/26 B) 28n/25 C) 27n/24

D) 26n/23 E) 25n/22

RESOLUCIÓN

Reemplazando:

$$P=\frac{342!}{209!}=2^{a}\times3^{b}\times5^{c}\times7^{21}\times\ldots\ \text{DC}$$

$$CD_{P}=n=(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times(21+1)\times\ldots$$

$$\boxed{(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\ldots=\frac{n}{22}}$$

Descomponiendo canónicamente 343P:

$$343P=2^{a}\times3^{b}\times5^{c}\times7^{24}\times\ldots\quad \text{DC}$$

Calculando la cantidad de divisores de 343P:

$$CD_{343}=(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times(24+1)\times\ldots$$

$$CD_{343}=(25)\times\boxed{(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\ldots}$$

$$\therefore\ CD_{343}=25\times\frac{n}{22}$$

Rpta: E

19. Si 24! tiene n divisores, ¿cuántos divisores tiene 25!?

A) 7n/5 B) 7n/6 C) 9n/7
D) 9n/5 E) 11n/9

RESOLUCIÓN

Sea: $24! = 2^{a} \times 3^{b} \times 5^{4} \times 7^{c} \times \ldots$ DC

Mostramos parte de la DC de 24! y solo se ha calculado el exponente del factor primo 5, ya que luego debemos calcular la cantidad de divisores de $25! = 25 \times 24!$

Por Dato: $CD_{24!} = n$

$$n = (a+1) \times (b+1) \times (4+1) \times (c+1) \times \ldots$$

$$\boxed{(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \ldots = \frac{n}{5}}$$

Descomponiendo canónicamente 25!:

$25! = 25 \times 24! = 2^{a} \times 3^{b} \times 5^{6} \times 7^{c} \times \ldots$ DC

$$CD_{25!} = (a+1) \times (b+1) \times (6+1) \times (c+1) \times \ldots$$

$$CD_{25!} = (7) \times \boxed{(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \ldots}$$

$$\therefore\ CD_{25!} = 7 \times \frac{n}{5}$$

Rpta: A

20. Si $\overline{mn0}$ = w! + a! + c!, ¿en cuántos ceros termina el mayor $\overline{ac}$! cuando se expresa en base 6?

A) 30 B) 22 C) 25

D) 31 E) 35

RESOLUCIÓN

Por Dato: $\overline{mn0} = w! + a! + c!$

Observe: $1! = 1$ $\boxed{4! = 24}$

$2! = 2$ $5! = 120$

$\boxed{3! = 6}$ $\boxed{6! = 720}$

Para que $\overline{ac}!$ sea máximo :

$\boxed{a = 6}$ $\boxed{c = 4}$ $\boxed{w = 3}$

$\overline{mn0} = 750$

Ahora:

$\overline{ac}! = 64! = \overline{pq.\ .\ .z\underbrace{00.\ .\ .00}_{k\ \text{cifras}}}_{(6)}$

D. P. en Bloques

$64! = \overline{pq.\ .\ .z}_{(6)} \times 6^{k}$

Calculemos los exponentes de los primos 2 y 3 en la DC de 64!.

Para el primo 2

$$\begin{array}{l|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Exponente: 63

20. Si $\overline{mn0}$ = w! + a! + c!, ¿en cuántos ceros termina el mayor $\overline{ac}$! cuando se expresa en base 6?

A) 30 B) 22 C) 25

D) 31 E) 35

RESOLUCIÓN

Para el primo 3

64 | 3
21 | 3
7 | 3
2

Exponente: 30

Mostremos parte de la DC de 64!:

$64! = 2^{63} \times 3^{30} \times 5^{z} \times \ . \ . \ . \ DC$

$64! = (2 \times 3)^{30} \times 2^{33} \times 5^{z} \times \ . \ . \ . \ DC$

$64! = 6^{30} \times \ . \ . = \ . \ . \ . \underbrace{.00 \ldots 00}_{30\text{ cifras}}{}_{(6)}$

$\therefore$ k = 30

Rpta: A

MUCHAS GRACIAS