ALGEBRA
UNI

CHAPTER 1

EL POLINOMIO

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

EL POLINOMIO

Definición previa

Monomio: *es una expresión algebraica racional entera, es decir los exponentes de su o sus variables deben ser numeros enteros positivos (incluido el cero).*

Ejemplo

Sea el monomio: $M(x;y;z) = 9\,.\,x^4y^3z$

Coeficiente — *Parte literal*

Polinomio: *es una expresión formada por uno o más monomios*

Ejemplo

Sea el polinomio: $P(x;y) = 9x^4y^3 - 5xy^2 + 7x^5 - 6y$

Ejemplo

Si la sgte. expresión: $P(x;y) = 9x^{12-n}y^3 - 5xy^{n-4} + 7x^{\frac{n}{3}}$

es un polinomio. Halle la suma de valores que puede tomar "n"

Resolución

Se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} 12 - n \geq 0 \;\rightarrow\; n - 12 \leq 0 \;\rightarrow\; n \leq 12 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; n - 4 \geq 0 \;\rightarrow\; n \geq 4 \end{array}\right\} \quad 4 \leq n \leq 12$$

también: $\frac{n}{3} \in \mathbb{Z}^+$ *por todo ello* $n = 6; 9; 12$

piden: $\sum \textit{valores de "n"} = 6 + 9 + 12 = \boxed{27}$

POLINOMIO DE UNA SOLA VARIABLE

$Sea\ P\ un\ polinomio\ de\ variable\ "x"$

$$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$"n"$: $grado\ del\ polinomio\ \ (n \in \mathbb{Z}^+)$

a_o : $coeficiente\ principal\ o\ primer\ coeficiente\ (a_o \neq 0)$

a_n : $término\ independiente\ o\ término\ constante.$

$a_o\ ; a_1; a_2; a_3; \ldots\ a_{n-1}; a_n$: $coeficientes\ de\ P.$

$Ejemplo$ $$P(x) = 8\,x^4 - 5\,x^3 + 7x^2 - 6\,x + 9$$

$$\sum coef.(P) = 8 - 5 + 7 - 6 + 9 = 13$$

POLINOMIO MÓNICO

Es aquel cuyo coeficiente principal (C.P.) es la unidad.

Ejemplo

$$P(x) = x^2 + 7x - 3$$

$$F(y) = y^5 - 7y^2 + 3y + 2$$

Ejemplo *Si el polinomio:*

$$P(x) = (m-5)x^3 + (n-7)x^2 - 3mx + 2n$$

es cuadrático y mónico. Halle mn

Resolución

Se cumple que: $m - 5 = 0 \rightarrow m = 5$

además: $n - 7 = 1 \rightarrow n = 8$

$$P(x) = x^2 - 15x + 16$$

$$\boxed{m.n = 40}$$

Suma de coeficientes y término independiente de un polinomio

Dado un polinomio $P(x)$ se cumple que:

$$\sum coef.(P) = P(1)$$

$$T.I.(P) = P(0)$$

Ejemplo

Halle la suma de coeficientes y el término independiente de P.

$$P(x-3) = x^2 + 7x - 5$$

Resolución

tenemos que hallar $P(1)$ y $P(0)$

$$Sea\ \ x = 4 \rightarrow P(4-3) = 4^2 + 7(4) - 5$$

$$P(1) = 16 + 28 - 5 \longrightarrow \sum coef.(P) = P(1) = 39$$

$$Sea\ \ x = 3 \rightarrow P(3-3) = 3^2 + 7(3) - 5$$

$$P(0) = 9 + 21 - 5 \longrightarrow T.I.(P) = P(0) = 25$$

CAMBIO DE VARIABLE

Método práctico

Ejemplo

Sea la expresión: $P(2x+5)=6x-1$

halle el equivalente de: $P(4x-3)$

Resolución

en el dato hacemos el cambio:

$$2x+5=y \quad \rightarrow \quad x=\frac{y-5}{2}$$

reemplazando :

$$P(y)=6\left(\frac{y-5}{2}\right)-1$$

$$P(y)=3(y-5)-1$$

$$\boxed{P(y)=3y-16}$$

hacemos el cambio:

$$y=4x-3$$

$$P(4x-3)=3(4x-3)-1$$

$$P(4x-3)=12x-9-1$$

$$\boxed{P(4x-3)=12x-10}$$

Sea el polinomio: $P(x) = ax + b$

Se tiene que: $P\big(P(x)\big) = a^2x + (ab + b)$

también: $P\big(P(P((x))\big) = a^3x + (a^2b + ab + b)$

Ejemplo $P(x) = 3x + 4$

$$P\big(P(P((x))\big) = 3^3.x + \big(3^2.4 + 3.4 + 4\big)$$

$$P\big(P(P((x))\big) = 27x + 52$$

GRADO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

$G.A. = Grado\ Absoluto\ o\ Grado.$

$G.A. = Grado\ \ Relativo\ con\ respecto\ a\ una\ variable.$

$Sea\ el\ monomio:\ \ \boldsymbol{M(x;y) = k.x^{a}.y^{b}}$

$\boldsymbol{G.A.(M) = a + b}$ $\boldsymbol{G.R.(x) = a}$ $\boldsymbol{G.R.(y) = b}$

$\boldsymbol{Sea\ el\ polinomio:\ \ P(x;y) = 7x^{5}y^{6} + 9x^{7}y^{2} - 6x^{6}y^{4}}$

$\boldsymbol{G.A.(P) = 11}$ $\boldsymbol{(el\ mayor\ grado\ de\ todos\ sus\ términos\ o\ monomios)}$

$\boldsymbol{G.R.(x) = 7}$ $\boldsymbol{(el\ mayor\ exponente\ de\ "x"\ en\ todos\ sus\ términos)}$

$\boldsymbol{G.R.(y) = 6}$ $\boldsymbol{(el\ mayor\ exponente\ de\ "y"\ \ en\ todos\ sus\ términos)}$

POLINOMIOS ESPECIALES

A) POLINOMIO HOMOGÉNEO.

es aquel que tiene todos sus términos o monomios del mismo grado.

$$P(x;y)=7x^5y^6+9x^7y^4-6x^8y^3+x^{11}$$

B) POLINOMIO COMPLETO Y ORDENADO.

es aquel en la cual la variable tiene todos sus grados en forma con – secutiva y ordenada en forma ascendente o descendente.

$$P(x)=7x^5+9x^4-6x^3+x^2-8x+4$$

Se cumple que: $\#\ términos = \#\ grado + 1$

C) POLINOMIO CONSTANTE.

$\boxed{P(x)=k}$ *(regla de correspondencia)*

Ejemplo $P(4)=k$ $\quad P(-7)=k$ $\quad P(x+3)=k$ $\quad P(n^2)=k$

D) POLINOMIOS IDENTICOS .

Son aquellos en la que sus términos semejantes tienen igual coeficiente

Ejemplo

$$ax^7 + bx^2 + c \equiv mx^7 + nx^2 + p \begin{cases} a = m \\ b = n \\ c = p \end{cases}$$

Sea: $P(x) \equiv Q(x)$

Si: $x = \alpha \ (constante) \ \rightarrow \ P(\alpha) = Q(\alpha)$

E) POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO .

Son aquellos cuyos coeficientes de sus términos son iguales a cero.

Ejemplo

$$ax^7 + bx^2 + c \equiv 0 \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. Respecto al polinomio

$$P(x) = 2 + x + 4x^2 + 5x^3$$

escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- Es un trinomio. ( )
- Su coeficiente principal es 5. ( )
- Su término independiente es 2. ( )

RESOLUCIÓN

Ordenando en forma descendente

$$P(x) = 5.x^3 + 4.x^2 + \mathrm{x} + 2$$

- P *no es un trinomio (polinomio de 3 términos), es un polinomio de 4 términos.* (F)
- *Su primer coeficiente o coeficiente principal es* 5 (V)
- *Su término costante o término independiente es* 2 (V)

FVV

2. Si la suma de coeficientes es igual a su término independiente

$$P(x) = 4x^2 - 2xn + 6$$

halle el valor de n.

RESOLUCIÓN

Recordando que:

$$\text{Sea un polinomio } P(x)$$

$$\sum coef.(P) = P(1)$$

$$T.I.(P) = P(0)$$

$$P(1) = 4 - 2n + 6$$

$$P(1) = 10 - 2n$$

$$P(0) = 0 - 0 + 6$$

$$P(0) = 6$$

$$por\ dato:\ P(1) = P(0)$$

$$10 - 2n = 6$$

$$4 = 2n$$

$$n = 2$$

3. Halle el grado del polinomio

$$P(x) = (x + 1)^2(x^2 + 2)^3 + x^7$$

RESOLUCIÓN

$$P(x) = \underbrace{\underbrace{(x+1)^{2}}_{2^{o}} . \underbrace{(x^{2}+2)^{3}}_{6^{o}}}_{8^{o}} + \underbrace{x^{7}}_{7^{o}}$$

En una múltiplicación de factores, el grado esta determinado por la suma de los grados de dichos factores.

En una suma o resta de términos, el grado esta determinado por el mayor grado de todos sus términos.

Luego el polinomio P es de octavo grado.

8

4. Se sabe que

$$P(x) = x^2 - x + 3$$

calcule $P(2) + P(P(1))$.

RESOLUCIÓN

$$P(2) = 2^2 - 2 + 3$$

$$P(2) = 4 - 2 + 3 = 5$$

$$P(1) = 1^2 - 1 + 3$$

$$P(1) = 1 - 1 + 3 = 3$$

$$P(3) = 3^2 - 3 + 3$$

$$P(3) = 9 - 3 + 3 = 9$$

Nos piden:

$$P(2) + P(P(1))$$

$$5 \quad + \quad P \quad (3)$$

$$5 \quad + \quad 9$$

$$\boxed{14}$$

5. Calcule

$$P(1) + P(2) + P(3) + ... + P(6)$$

si $P(x) = x^2 + 3x - x(x + 2)$.

RESOLUCIÓN

Reduciendo el dato:

$$P(x) = \cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2} - 2x$$

$$\boxed{P(x) = x}$$

Nos piden:

$$P(1) + P(2) + P(3) + \cdots + P(6)$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$\frac{6(7)}{2}$$

$$\boxed{21}$$

6. Dado el polinomio

$$P(x) = 3x + 2$$

halle el equivalente de $P(2x+3)$.

RESOLUCIÓN

$$P(x) = 3x + 2$$

Hacemos un cambio de variable

$$Sea: \quad x = a$$

$$P(a) = 3a + 2$$

Hacemos otro cambio de variable

$$Sea: \quad a = 2x + 3$$

$$P(2x+3) = 3(2x+3) + 2$$

$$P(2x+3) = 6x + 9 + 2$$

$$P(2x+3) = 6x + 11$$

7. Respecto al polinomio

$$P(x) = (x-2)^3(x+1)^2 + 3$$

escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- Su término independiente es 3. ( )
- La suma de coeficientes es –1. ( )
- Su grado es 3. ( )

RESOLUCIÓN

$$\boxed{\begin{gathered}\sum coef.(P) = P(1)\\ T.I.(P) = P(0)\end{gathered}}$$

- $P(0) = (0-2)^3.(0+1)^2 + 3$

$P(0) = (-2)^3.(1) + 3$

$T.I.(P) = P(0) = -5$ (F)

- $P(1) = (1-2)^3.(1+1)^2 + 3$

$P(1) = (-1)^3.(2)^2 + 3$

$\sum coef.(P) = P(1) = -1$ (V)

- $P(x) = \underbrace{(x-2)^3}_{3^o}.\underbrace{(x+1)^2}_{2^o} + 3$

5^o (F)

FVF

8. Dado el siguiente polinomio

$$P(x) = x^{n-3} + 2x^{5-n} + n$$

calcule P(n). *Si "n" es par*

RESOLUCIÓN

Como P es un polinomio, se debe cumplir que:

$$n - 3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad n \geq 3$$

$$5 - n \geq 0 \quad \rightarrow \quad n \leq 5$$

además "n" es un número entero

$$3 \leq n \leq 5 \quad \rightarrow \quad n = 4(\text{par})$$

Luego:

$$P(x) = x^1 + 2x^1 + 4$$

$$P(x) = 3x + 4$$

Nos piden:

$$P(4) = 3(4) + 4$$

$$\boxed{P(4) = 16}$$

9. Evalúe P(2) si se sabe que

$$P(2x+4)=x^{12}+2x^7+1$$

RESOLUCIÓN

$Como\ nos\ piden\ P(2)\ hacemos:$

$$2x+4=2$$

$$2x=-2$$

$$\boxed{x=-1}$$

$reemplazando:$

$$P(-2+4)=(-1)^{12}+2(-1)^7+1$$

$$P(2)=1+2(-1)+1$$

$$P(2)=1-2+1$$

$$\boxed{P(2)=0}$$

10. Si la suma de coeficientes del polinomio

$$P(x-1) = x^2 + nx + 2$$

es -4; halle su término independiente.

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\boxed{\sum coef.(P) = P(1)}$$

Hacemos: $x - 1 = 1$

$x = 2$

reemplazando:

$$P(2-1) = (2)^2 + n(2) + 2$$

$$P(1) = 4 + 2n + 2 = 2n + 6$$

por dato: $2n + 6 = -4$

$$\boxed{n = -5}$$

$$\boxed{P(x-1) = x^2 - 5x + 2}$$

Nos piden: $\boxed{T.I.(P) = P(0)}$

Hacemos: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

reemplazando:

$$P(1-1) = (1)^2 - 5(1) + 2$$

$$\boxed{P(0) = -2}$$

11. Si se sabe que P(x) es un trinomio cuadrático y mónico, tal que la suma de coeficientes excede en 3 al término independiente, calcule P(3) - P(2).

RESOLUCIÓN

del enunciado:

$$P(x) = 1x^2 + bx + c$$

$$P(1) - P(0) = 3$$

$$-\begin{cases} P(1) = 1 + b + c \\ P(0) = 0 + 0 + c \end{cases}$$

$$P(1) - P(0) = b + 1$$

$$3 = b + 1 \rightarrow \boxed{b = 2}$$

$$-\begin{cases} P(3) = 9 + 3b + c \\ P(2) = 4 + 2b + c \end{cases}$$

$$P(3) - P(2) = 5 + b$$

$$\boxed{P(3) - P(2) = 7}$$

12. Calcule ab si $P(x) = ax + b$ y además,

$$P(P(x)) = 9x + 8$$

siendo $a > 0$.

RESOLUCIÓN

$$P(P(x)) = P(ax + b)$$

$$P(ax + b) = a(ax + b) + b$$

$$P(ax + b) = a^2x + ab + b$$

$$\boxed{P\big(P(x)\big) = a^2x + (ab + b)}$$

igualando al dato

$$a^2x + (ab + b) = 9x + 8$$

$$a^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} a = 3 & (a > 0) \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{a = 3}$$

$$ab + b = 8 \quad \rightarrow \quad 4b = 8$$

$$\boxed{b = 2}$$

$$\boxed{ab = 6}$$

13. Si $P(x^2 - 1) = x^2 + 1$; calcule

$$P(n+1) + P(n)$$

RESOLUCIÓN

Hacemos el cambio:

$$x^2 - 1 = n \quad \rightarrow \quad x^2 = n + 1$$

reemplazando:

$$P(n) = n + 1 + 1$$

$$P(n) = n + 2$$

También:

$$P(n+1) = n + 1 + 2$$

$$P(n+1) = n + 3$$

Sumando:

$$P(n) + P(n+1) = 2n + 5$$

$$2n + 5$$

14. Dado que

$$P(x-1)=2x^2+1$$

halle $P(x)$.

RESOLUCIÓN

$$Sea:\quad x-1=a$$

$$x=a+1$$

$reemplazando:$

$$P(a)=2.(a+1)^2+1$$

$$P(a)=2.\left(a^2+2a+1\right)+1$$

$$P(a)=2.\left(a^2+2a+1\right)+1$$

$$P(a)=2.a^2+4.a+3$$

$Cambiamos$ "a" por "x"

$$P(x)=2.x^2+4.x+3$$

15. Halle el valor de $4n$ si el polinomio

$$P(x) = x^{2n-3} + x^{6-2n} + x^2 + n - 2$$

se reduce a un trinomio. $n \in \mathbb{Z}$

RESOLUCIÓN

Como P es un polinomio, los expo_ nentes de la variable son numeros enteros positivos o iguales a cero.

Luego: $\mathbf{3 \leq 2n \leq 6}$

$$\mathbf{1{,}5 \leq n \leq 3}$$

$$\mathbf{n = 2 \quad \vee \quad n = 3}$$

Si $n = 2$

$$P(x) = x + x^2 + x^2 + 2 - 2$$

$$P(x) = 2x^2 + x$$

(no es un trinomio)

Si $n = 3$

$$P(x) = x^3 + x^0 + x^2 + 3 - 2$$

$$P(x) = x^3 + x^2 + 2$$

(si es un trinomio)

$$\boxed{4n = 12}$$

16. Si

$$P(x) = x^2 + 2x + 3$$

calcule la siguiente suma

$$E = P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(10)$$

RESOLUCIÓN

completando cuadrados:

$$P(x) = x^2 + 2x + 1 + 2$$

$$P(x) = (x+1)^2 + 2$$

$$+\begin{cases} P(1) = (2)^2 + 2 \\ P(2) = (3)^2 + 2 \\ P(3) = (4)^2 + 2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P(10) = (11)^2 + 2 \end{cases}$$

$$E = \underline{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2} - 1^2 + 201$$

$$E = \frac{11(12)(23)}{6} - 1 + 20$$

$$E = 506 + 19$$

$$\boxed{E = 525}$$

17. Dado que

$$P(x + P(x)) = x^2 + 1 + 2x \cdot P(x) + P^2(x)$$

calcule $P(1) + P(2)$.

RESOLUCIÓN

$$sea: \quad P(x) = y$$

$$P(x+y) = x^2 + 1 + 2xy + y^2$$

$$P(x+y) = x^2 + 2xy + y^2 + 1$$

$$P(x+y) = (x+y)^2 + 1$$

$$Hacemos: \quad x + y = z$$

$$P(z) = (z)^2 + 1$$

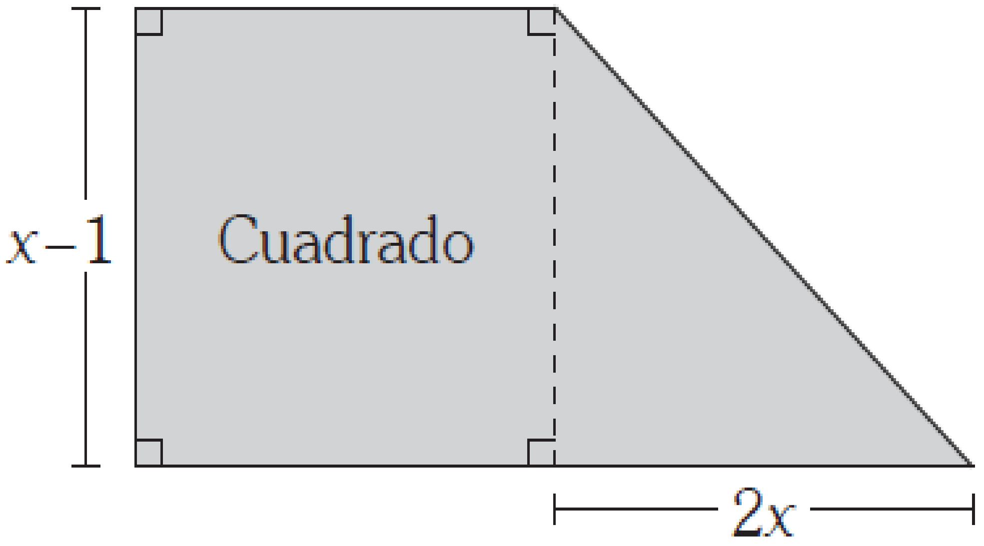
$$\boxed{P(z) = z^2 + 1}$$

$$+ \begin{cases} P(1) = 1^2 + 1 \\ P(2) = 2^2 + 1 \end{cases}$$

$$P(1) + P(2) = 2 + 5$$

$$\boxed{P(1) + P(2) = 7}$$

18. En la siguiente figura



P(x) representa el área sombreada, calcule la suma del coeficiente principal y su término independiente.

RESOLUCIÓN

El área de la región sombreada es igual a la suma del área del cuadrado con el área del triángulorectángulo.

$$P(x) = (x-1)^2 + \frac{(2x).(x-1)}{2}$$

$$P(x) = \cancel{x}^2 - 2x + 1 + \cancel{x}^2 - x$$

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

piden:

$$2 + 1 = \boxed{3}$$

19. Sea $P(x)=\sqrt{x+1}$, halle $P(P(P(x)))$.

RESOLUCIÓN

$$P(P(x)) = P(\sqrt{x+1})$$

$$P(P(x)) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1}$$

$$P(P(x)) = \sqrt{\sqrt{x+1}+1}$$

$$P(P(P(x))) = P(\sqrt{\sqrt{x+1}+1})$$

$$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+1}$$

$$P(P(P(x))) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}+1}$$

20. Dado el polinomio

$$P(x) = x^3 - ax^2 + ax - 9$$

y a es un número real, halle un valor de a de modo que se verifique la igualdad $P(a) = 0$.

RESOLUCIÓN

$$\boldsymbol{Hacemos:} \quad x = a$$

$$P(a) = a^3 - a.a^2 + a.a - 9$$

$$P(a) = \cancel{a^3} - \cancel{a^3} + a^2 - 9$$

$$P(a) = a^2 - 9$$

$$P(a) = a^2 - 9 = 0$$

$$a^2 - 9 = 0$$

$$(a + 3).(a - 3) = 0$$

$$a = -3 \quad \vee \quad a = 3$$