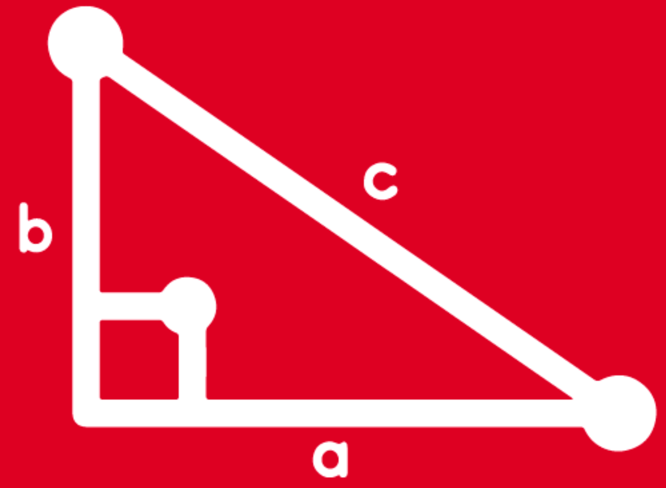
TRIGONOMETRY

Chapter 7

TRANSFORMACIONES TRIGONOMETRICAS



VERANO UNI TOMO 2

SACO OLIVEROS

HELICO-MOTIVACIÓN

OBJETIVOS

- Enunciar las identidades trigonométricas que permiten transformar sumas o diferencias de senos y cosenos a producto.
- Enunciar las identidades trigonométricas que permiten transformar productos de senos y cosenos a sumas o diferencias.
- Reducir expresiones que involucren series trigonométricas.

Francois Vieta (1540 – 1604) , hizo importantes contribuciones a la trigonometría en especial a las identidades

HELICO-MOTIVACIÓN

La Trigonometría y la Prostaféresis

En el siglo XVI , aparecieron en Europa una serie de identidades conocidas como las *reglas de prostaféresis* , las cuales convertían un producto de razones trigonométricas en una suma o diferencia , por ejemplo :

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

Aplicación :

Usando la identidad anterior , aproximar el resultado 105×720

Procedimiento :

1. Desplazar la coma tres lugares cada factor , así tenemos : 0,105 y 0,720

2. Hallar los valores :
$\cos 84^{\circ} = 0{,}105$ y $\cos 44^{\circ} = 0{,}720$

3. Luego : $\alpha = 84^{\circ}$ y $\beta = 44^{\circ}$
Así : $\alpha + \beta = 128^{\circ}$ y $\alpha - \beta = 40^{\circ}$

4. Hallar los valores :
$\cos 128^{\circ} = -\,0{,}616$ y $\cos 40^{\circ} = 0{,}766$

5. Luego : $\frac{1}{2}(-0{,}616 + 0{,}766) = 0{,}075$

6. Desplazar la coma seis lugares a la izquierda y se tiene : 75000

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea : $\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{A+B}{2}\ ;\ y=\dfrac{A-B}{2}$

Usando las identidades del ángulo compuesto :

$\text{sen}(x+y)=\text{sen}x.\cos y+\cos x.\text{sen}y$ **... (1)**

$\text{sen}(x-y)=\text{sen}x.\cos y-\cos x.\text{sen}y$ **... (2)**

$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\text{sen}x.\text{sen}y$ **... (3)**

$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\text{sen}x.\text{sen}y$ **... (4)**

(1) + **(2)** : $\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)=2\text{sen}x.\cos y$

$\Rightarrow \boxed{\text{sen}A+\text{sen}B=2\,\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$

(1) – **(2)** : $\text{sen}(x+y)-\text{sen}(x-y)=2\cos x.\text{sen}y$

$\Rightarrow \boxed{\text{sen}A-\text{sen}B=2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$

(3) + **(4)** : $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x.\cos y$

$\Rightarrow \boxed{\cos A+\cos B=2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$

(3) – **(4)** : $\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\text{sen}x.\text{sen}y$

$\Rightarrow \boxed{\cos A-\cos B=-2\,\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}$

IDENTIDADES PARA TRANSFORMAR SUMAS Y DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS A PRODUCTO

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}14^\circ + \operatorname{sen}6^\circ = 2\operatorname{sen}10^\circ\cos 4^\circ$
- $\operatorname{sen}5x - \operatorname{sen}3x = 2\cos 4x\operatorname{sen}x$
- $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = 2\cos 60^\circ\cos 20^\circ$

  $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\cos 20^\circ$

  $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ = \cos 20^\circ$
- $\cos 2x - \operatorname{sen}50^\circ = \cos 2x - \cos 40^\circ$

  $\cos 2x - \operatorname{sen}50^\circ = -2\operatorname{sen}(x+20^\circ)\operatorname{sen}(x-20^\circ)$
- $\sqrt{3} - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

  $\sqrt{3} - 1 = 2(\operatorname{sen}60^\circ - \operatorname{sen}30^\circ)$

  $\sqrt{3} - 1 = 2(2\cos 45^\circ\operatorname{sen}15^\circ)$

  $\sqrt{3} - 1 = 4\cos 45^\circ\operatorname{sen}15^\circ$

IDENTIDADES PARA TRANSFORMAR EL PRODUCTO DE SENOS Y COSENOS A SUMAS Y DIFERENCIA

$$2\text{sen}x.\cos y=\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)$$

$$2\cos x.\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$2\text{sen}x.\text{sen}y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

Ejemplos :

- $2\,\text{sen}50^\circ\cos30^\circ=\text{sen}80^\circ+\text{sen}20^\circ$
- $2\cos3\alpha\cos\alpha=\cos4\alpha+\cos2\alpha$
- $\sqrt{2}\,\text{sen}10^\circ=2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}10^\circ$

$$\sqrt{2}\,\text{sen}10^\circ=2\text{sen}45^\circ\text{sen}10^\circ$$

$$\sqrt{2}\,\text{sen}10^\circ=\cos35^\circ-\cos55^\circ$$

PROPIEDADES

En un triángulo ABC , se cumplen :

1. $\text{sen}A+\text{sen}B+\text{sen}C=4\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{C}{2}\right)$
2. $\cos A+\cos B+\cos C=4\text{sen}\left(\dfrac{A}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{B}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{C}{2}\right)+1$
3. $\text{sen}2A+\text{sen}2B+\text{sen}2C=4\text{sen}A\text{sen}B\text{sen}C$
4. $\cos2A+\cos2B+\cos2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$

Demostración 1.

Recordar :

$x+y=90^\circ\Rightarrow\text{sen}x=\cos y$ | $\text{sen}2x=2\text{sen}x\cos x$

DATO : $A+B+C=180^\circ\Rightarrow\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C}{2}=90^\circ$

$$\Rightarrow \ \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left(\frac{C}{2}\right) \ \ldots (*)$$

$$\Rightarrow \ \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) \ \ldots (**)$$

Sea : $E=\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C$

Transformando a producto :

$$E=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\operatorname{sen}C$$

Usando (*) :

$$E=2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\operatorname{sen}C$$

Identidad ángulo doble :

$$E=2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

Factorizando $2\cos\left(\frac{C}{2}\right)$:

$$E=2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right]$$

Usando (**) :

$$E=2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

Transformando a producto :

$$E=2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\left[2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\right]$$

Ordenando :

$$\therefore \ E=4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

SERIES TRIGONOMÉTRICAS

I. Suma de senos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética :

$$\text{sen}(P)+\text{sen}(P+r)+\text{sen}(P+2r)+\ldots+\text{sen}(U)=\frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}.\text{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

II. Suma de cosenos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética :

$$\cos(P)+\cos(P+r)+\cos(P+2r)+\ldots+\cos(U)=\frac{\text{sen}\left(\frac{nr}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{r}{2}\right)}.\cos\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

Donde : P = Primer ángulo, U = Último ángulo, n = Número de términos, r = Razón

Ejemplo :

Reducir la siguiente sumatoria :

$$\int = \text{sen}2^\circ + \text{sen}4^\circ + \text{sen}6^\circ + \text{sen}8^\circ + ... + \text{sen}180^\circ$$

Resolución :

Se nota que la serie tiene 90 términos , además el primer y último término son 2º y 180º respectivamente , donde la razón de la progresión aritmética del ángulo es 2º , así :

$$P = 2^\circ \;\; ; \;\; U = 180^\circ \;\; ; \;\; r = 2^\circ \;\; ; \;\; n = 90$$

$$\Rightarrow \int = \frac{\text{sen}\left(\dfrac{90 \times 2^\circ}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{2^\circ}{2}\right)}.\text{sen}\left(\frac{2^\circ + 180^\circ}{2}\right)$$

Reduciendo , tenemos :

$$\Rightarrow \int = \frac{\text{sen}90^\circ}{\text{sen}1^\circ}.\text{sen}91^\circ$$

$$\text{Recordar : } \begin{cases} \text{sen}90^\circ = 1 \\ \text{sen}91^\circ = \text{sen}(90^\circ + 1^\circ) = \cos 1^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int = \frac{1}{\text{sen}1^\circ}.\cos 1^\circ \qquad \therefore \int = \cot 1^\circ$$

APLICACIONES :

Usando la sumatoria de cosenos , se demuestra que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}$$

PRODUCTOS TRIGONOMÉTRICOS

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumplen :

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right).\ \ldots\ .\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right).\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right).\ \ldots\ .\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{2^n}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right).\tan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right).\tan\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right).\ \ldots\ .\tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\sqrt{2n+1}$$

Ejemplos :

- Para $n=2$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{5}\right).\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{5}$$

- Para $n=3$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{7}}{8}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\sqrt{7}$$

HELICO-PRACTICA 1

1. Calcule X, si

$$\frac{\text{Sen}5x + \text{Sen}x}{\text{Cos}5x + \text{Cos}x} = \sqrt{3}$$

Recuerda:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

$$\frac{2\text{Sen}\left(\frac{5x+x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{5x-x}{2}\right)}{2\text{Cos}\left(\frac{5x+x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{5x-x}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

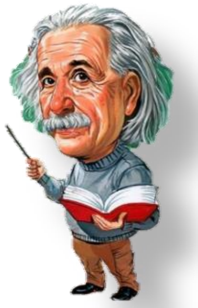
$$\frac{\cancel{2}\text{Sen}3x\cancel{\text{Cos}2x}}{\cancel{2}\text{Cos}3x\cancel{\text{Cos}2x}} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\text{Sen}3x}{\text{Cos}3x} = \sqrt{3}$$

$$\text{Tan}3x = \sqrt{3}$$

$$3x = 60°$$

¡Muy bien!



$$\boxed{x = 20°}$$

HELICO-PRACTICE 2

2. Reduzca $E = 2(\mathrm{Cos}5x + \mathrm{Cos}3x)(\mathrm{Sen}3x - \mathrm{Sen}x)$

Resolución:

$$E = (2)2\mathrm{Cos}\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{5x-3x}{2}\right)2\mathrm{Cos}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$

$$E = 2\cdot 2\mathrm{Cos}4x\mathrm{Cos}x2\mathrm{Cos}2x\mathrm{Sen}x$$

$$E = 2\cdot 2\cdot \underbrace{2\mathrm{Sen}x.\,\mathrm{Cos}x}.\,\mathrm{Cos}2x.\,\mathrm{Cos}4x$$

$$E = 2\cdot \underbrace{2\mathrm{Sen}2x.\,\mathrm{Cos}2x}.\,\mathrm{Cos}4x$$

$$E = 2\mathrm{Sen}4x.\,\mathrm{Cos}4x$$

$$\boxed{E = \mathrm{Sen}8x}$$

¡Muy bien!

Recuerda:

$$\mathrm{sen}2x = 2\mathrm{sen}x\cos x$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\mathrm{sen}A - \mathrm{sen}B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

HELICO-PRACTICE 3

3. Transformar a producto

$$L = \text{Sen}2° + \text{Sen}4° + \text{Sen}6° + \text{Sen}8°$$

Recuerda:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

¡Muy bien!

Resolución:

$$L = \underbrace{\text{Sen}2° + \text{Sen}8°} + \underbrace{\text{Sen}4° + \text{Sen}6°}$$

$$L = 2\text{sen}\left(\frac{8° + 2°}{2}\right)\cos\left(\frac{8° - 2°}{2}\right) + 2\text{sen}\left(\frac{6° + 4°}{2}\right)\cos\left(\frac{6° - 4°}{2}\right)$$

$$L = 2\text{Sen}5°\text{Cos}3° + 2\text{Sen}5°\text{Cos}1°$$

$$L = 2\text{Sen}5°\underbrace{(\text{Cos}3° + \text{Cos}1°)}$$

$$L = 2\text{Sen}5°\,2\text{Cos}\left(\frac{3° + 1°}{2}\right)\cos\left(\frac{3° - 1°}{2}\right)$$

$$\boxed{L = 4\text{Sen}5°\text{Cos}2°\text{Cos}1°}$$

HELICO-PRACTICE 4

4. Simplifique

$$L = \frac{\text{Senx} + 2\text{Sen}2x + \text{Sen}3x}{\text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Recuerda:

$$\text{senA} + \text{senB} = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

Reduciendo el numerador

$$\underbrace{\text{Senx} + \text{Sen}3x} + 2\text{Sen}2x$$

$$2\text{Sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{3x-x}{2}\right) + 2\text{Sen}2x$$

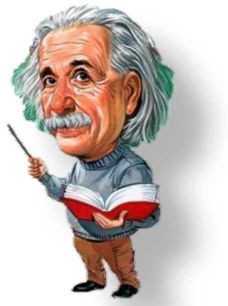
$$2\text{Sen}2x\text{Cosx} + 2\text{Sen}2x$$

$$2\text{Sen}2x(\underbrace{\text{Cosx} + 1})$$

$$2\text{Sen}2x.\,2\text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \ldots \mathbf{I}$$

I en L

$$L = \frac{2\text{Sen}2x.\,2\cancel{\text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cancel{\text{Cos}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$



¡Muy bien!

$$\boxed{L = 4\text{Sen}2x}$$

HELICO-PRACTICE 5

5. Transformar a producto

$$E = 3 + 5\mathrm{Sen}13°$$

Recuerda:

$$\mathrm{sen}A + \mathrm{sen}B = 2\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

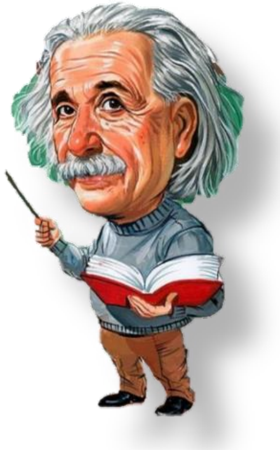
$$E = 3 + 5\mathrm{Sen}13°$$

(/5)... $$\frac{E}{5} = \frac{3}{5} + \frac{5}{5}\mathrm{Sen}13°$$

$$\frac{E}{5} = \underbrace{\mathrm{Sen}37° + \mathrm{Sen}13°}$$

$$\frac{E}{5} = 2\mathrm{Sen}25°\mathrm{Cos}12°$$

$$\boxed{E = 10\mathrm{Sen}25°\mathrm{Cos}12°}$$



HELICO-PRACTICE 6

6. Calcule el máximo valor de

$$P = \mathrm{Sen}(20° + x) + \mathrm{Sen}(40° - x)$$

Recuerda:

$$\mathrm{sen}A + \mathrm{sen}B = 2\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

$$P = 2\mathrm{Sen}\left(\frac{(20° + x) + (40° - x)}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(\frac{(20° + x) - (40° - x)}{2}\right)$$

$$P = 2\mathrm{Sen}30°.\mathrm{Cos}(x - 10°)$$

$$P = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right).\mathrm{Cos}(x - 10°)$$

$$P = \mathrm{Cos}(x - 10°)$$

Sabemos:

$$-1 \leq \mathrm{Cos}\theta \leq 1$$

$$P = \underbrace{\mathrm{Cos}(x - 10°)}$$

$$\boxed{P_{\text{máx}} = 1}$$

HELICO-PRACTICE 7

7. Simplifique

$$M = \frac{Cos70° + Cos50° + Cos30° + Cos10°}{Sen70° + Sen50° + Sen30° + Sen10°}$$

Recuerda:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

Ordenando

$$M = \frac{Cos70° + Cos10° + Cos50° + Cos30°}{Sen70° + Sen10° + Sen50° + Sen30°}$$

$$M = \frac{2Cos40°Cos30° + 2Cos40°Cos10°}{2Sen40°Cos30° + 2Sen40°Cos10°}$$

$$M = \frac{\cancel{2}Cos40°\cancel{(Cos30° + Cos10°)}}{\cancel{2}Sen40°\cancel{(Cos30° + Cos10°)}}$$

$$M = \frac{Cos40°}{Sen40°}$$

$$M = Cot40°$$

$$\boxed{M = Tan50°}$$

HELICO-PRACTICE 8

8. Si se cumple

$$\text{Cos}58° + \text{Cos}34° = a + b$$
$$\text{Sen}58° + \text{Sen}34° = a - b$$

Calcule Tan46°

Recuerda:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

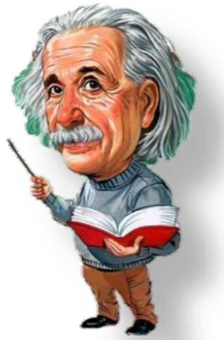
$$\text{Cos}58° + \text{Cos}34° = a + b$$

$$2\text{Cos}46°\text{Cos}12° = a + b \quad \ldots \text{I}$$

$$\text{Sen}58° + \text{Sen}34° = a - b$$

$$2\text{Sen}46°\text{Cos}12° = a - b \quad \ldots \text{II}$$

¡Muy bien!



II/I

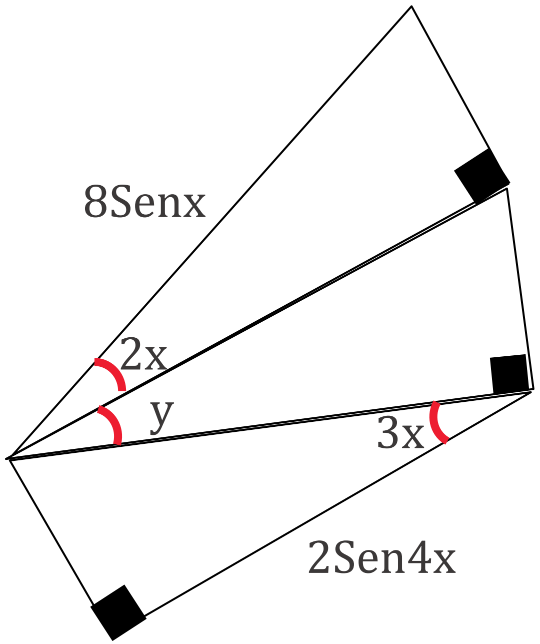
$$\frac{\cancel{2}\text{Sen}46°\cancel{\text{Cos}12°}}{\cancel{2}\text{Cos}46°\cancel{\text{Cos}12°}} = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\boxed{\text{Tan}46° = \frac{a-b}{a+b}}$$

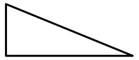
HELICO-PRACTICE 9

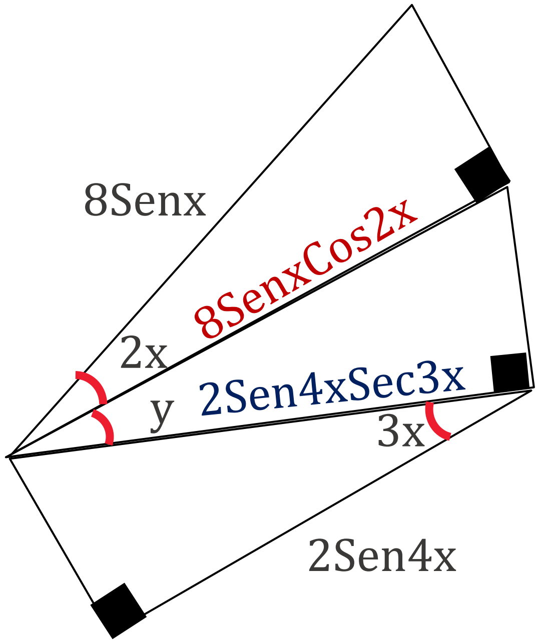
9. Dado el siguiente gráfico

$$\text{Calcule } T = \frac{\text{Secy} + 1}{\text{Secy} - 1}$$



Resolución:

Aplicando Resol de 



$$\text{Cosy} = \frac{2\text{Sen}4x\text{Sec}3x}{8\text{Senx}\text{Cos}2x}$$

$$\text{Cosy} = \frac{\cancel{2.}2\text{Sen}2x\cancel{\text{Cos}2x}\text{Sec}3x}{2.\cancel{4}.\text{Senx}.\cancel{\text{Cos}2x}}$$

$$\text{Cosy} = \frac{\cancel{2\text{Senx}}\text{Cosx}\text{Sec}3x}{\cancel{2\text{Senx}}}$$

$$\text{Cosy} = \text{CosxSec}3x$$

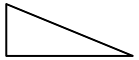
$$\text{Cosy} = \frac{\text{Cosx}}{\text{Cos}3x}$$

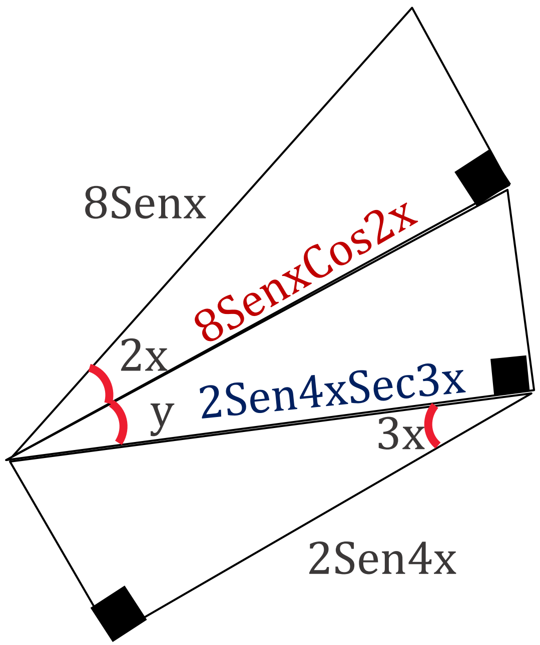
$$\text{Cosy} = \frac{1}{2\text{Cos}2x - 1}$$

Continua...

HELICO-PRACTICE 9

Resolución:

Aplicando Resol de 



Recuerda:

$$\text{Tan}2x.\text{Tan}x = \text{Sec}2x - 1$$

$$\frac{1}{\text{Sec}y} = \frac{1}{2\text{Cos}2x - 1}$$

$$\text{Sec}y = 2\text{Cos}2x - 1$$

Piden

Calcule $T = \dfrac{\text{Sec}y + 1}{\text{Sec}y - 1}$

$$T = \frac{2\text{Cos}2x - 1 + 1}{2\text{Cos}2x - 1 - 1}$$

$$T = \frac{\cancel{2}\text{Cos}2x}{\cancel{2}(\text{Cos}2x - 1)}$$

$$T = \frac{1}{\dfrac{\text{Cos}2x - 1}{\text{Cos}2x}}$$

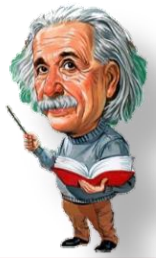
$$T = \frac{1}{1 - \text{Sec}2x}$$

$$T = \frac{1}{-(\text{Sec}2x - 1)}$$

$$T = \frac{1}{-\text{Tan}2x\text{Tan}x}$$

$$\boxed{T = -\text{Cot}2x.\text{Cot}x}$$

¡Muy bien!



HELICO-PRACTICE 10

10. Halle una expresión equivalente a

$$E = \sqrt{3}\mathrm{Sec}70° - 2$$

Recuerda:

$$\cos A - \cos B = -2\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resolución:

$$E = \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{Cos}70°} - 2$$

$$E = \frac{\sqrt{3} - 2\mathrm{Cos}70°}{\mathrm{Cos}70°} \quad (\div 2)$$

$$\frac{E}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{Cos}70°}{\mathrm{Cos}70°}$$

$$\frac{E}{2} = \frac{\mathrm{Cos}30° - \mathrm{Cos}70°}{\mathrm{Cos}70°}$$

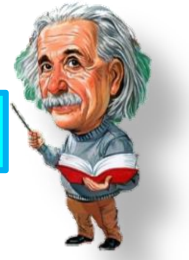
$$\frac{E}{2} = \frac{-2\mathrm{Sen}50°\mathrm{Sen}(-20°)}{\mathrm{Cos}70°}$$

$$\frac{E}{2} = \frac{2\mathrm{Sen}50°\cancel{\mathrm{Sen}20°}}{\cancel{\mathrm{Sen}20°}}$$

$$E = 4\mathrm{Sen}50°$$

$$\boxed{E = 4\mathrm{Cos}40°}$$

¡Muy bien!



HELICO-PRACTICE 11

11. Reduzca

$$C = \frac{2Sen4xCos3x - Sen7x}{2Sen5xCos3x - Sen8x}$$

Recuerda:

$2senAcosB = sen(A + B) + sen(A\text{-}B)$
$Sen2x = 2Senx.Cosx$

Resolución:

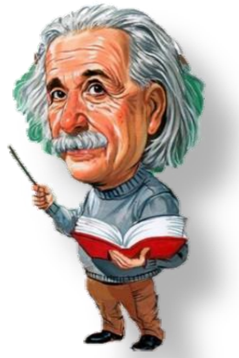
$$C = \frac{Sen(4x + 3x) + Sen(4x - 3x) - Sen7x}{Sen(5x + 3x) + Sen(5x - 3x) - Sen8x}$$

$$C = \frac{\cancel{Sen7x} + Senx - \cancel{Sen7x}}{\cancel{Sen8x} + Sen2x - \cancel{Sen8x}}$$

$$C = \frac{Senx}{Sen2x}$$

$$C = \frac{\cancel{Senx}}{2\cancel{Senx}Cosx}$$

$$\boxed{C = \frac{Secx}{2}}$$



HELICO-PRACTICE 12

12. Reduzca la expresión

$$\frac{\text{Sen}50° + 4\text{Sen}10°.\text{Cos}35°.\text{Cos}25°}{\text{Cos}25°}$$

Recuerda:

$2\text{senAcosB} = \text{sen}(A + B) + \text{sen}(A\text{-}B)$

$\text{Sen}2x = 2\text{Senx}.\text{Cosx}$

Resolución:

$$E = \frac{2\text{Sen}25°\cancel{\text{Cos}25°} + 2.2\text{Sen}10°\text{Cos}35°\cancel{\text{Cos}25°}}{\cancel{\text{Cos}25°}}$$

$$E = 2\text{Sen}25° + 2.(2\text{Sen}10°\text{Cos}35°)$$

$$E = 2\text{Sen}25° + 2(\text{Sen}45° - \text{Sen}25°)$$

$$E = \cancel{2\text{Sen}25°} + 2\text{Sen}45° - \cancel{2\text{Sen}25°}$$

$$E = 2\text{Sen}45°$$

$$E = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \boxed{E = \sqrt{2}}$$

HELICO-PRACTICE 13

13. Reduzca

$$P = \text{Cos}5x.\,\text{Cos}x + \text{Sen}4x.\,\text{Sen}2x + \text{Sen}3x.\,\text{Sen}x$$

Recuerda:

$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$
$2\text{sen}A\,\text{sen}B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

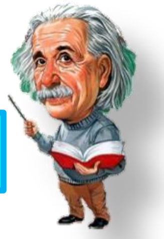
Resolución:

$$2P = \underbrace{2\text{Cos}5x.\,\text{Cos}x}_{} + \underbrace{2\text{Sen}4x\text{Sen}2x}_{} + \underbrace{2\text{Sen}3x.\,\text{Sen}x}_{}$$

$$2P = \cancel{\text{Cos}6x} + \cancel{\text{Cos}4x} + \text{Cos}2x - \cancel{\text{Cos}6x} + \text{Cos}2x - \cancel{\text{Cos}4x}$$

$$\cancel{2}P = \cancel{2}\cos 2x$$

$$\boxed{P = \cos 2x}$$



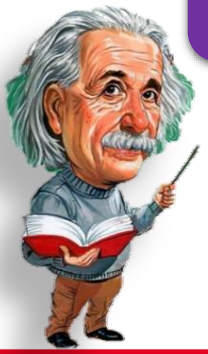
HELICO-PRACTICE 14

14. Halle x

$$\text{Si } 2\mathrm{Cos}4x.\mathrm{Cos}2x - \mathrm{Cos}2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Recuerda:

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$



¡Muy bien!

Resolución:

$$\underbrace{2\mathrm{Cos}4x.\mathrm{Cos}2x} - \mathrm{Cos}2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{Cos}6x + \cancel{\mathrm{Cos}2x} - \cancel{\mathrm{Cos}2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{Cos}6x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$6x = 30°$$

$$\boxed{x = 5°}$$

HELICO-PRACTICE 15

15. Calcule el valor de F, si

$$F = \frac{\text{Sec}80^\circ}{2} - 2\text{Sen}70^\circ$$

Recuerda:

$$2\text{senA}\cos\text{B} = \text{sen}(A + B) + \text{sen}(A\text{-}B)$$

Resolución:

$$F = \frac{1}{2\text{Cos}80^\circ} - 2\text{Sen}70^\circ$$

$$F = \frac{1 - 2(2\text{Sen}70^\circ\text{Cos}80^\circ)}{2\text{Cos}80^\circ}$$

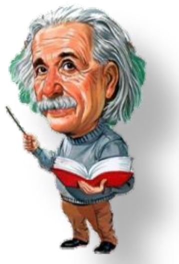
$$F = \frac{1 - 2(\overbrace{\text{Sen}150^\circ}^{1/2} - \text{Sen}10^\circ)}{2\text{Sen}10^\circ}$$

$$F = \frac{1 - 1 + 2\text{Sen}10^\circ}{2\text{Sen}10^\circ}$$

$$F = \frac{2\text{Sen}10^\circ}{2\text{Sen}10^\circ}$$

$$\boxed{F = 1}$$

¡Muy bien!



HELICO-PRACTICE 16

16.

$$P = \frac{Sen9x}{2Senx} - Cos2x - Cos4x - Cos6x - Cos8x$$

Recuerda:

$2senAcosB = sen(A+B) + sen(A-B)$

Resolución:

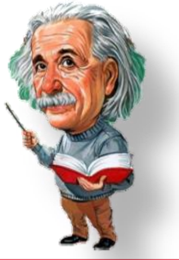
$$P = \frac{Sen9x - 2SenxCos2x - 2SenxCos4x - 2SenxCos6x - 2SenxCos8x}{2Senx}$$

$$P = \frac{\cancel{Sen9x} - (\cancel{Sen3x} - Senx) - (\cancel{Sen5x} - \cancel{Sen3x}) - (\cancel{Sen7x} - \cancel{Sen5x}) - (\cancel{Sen9x} - \cancel{Sen7x})}{2Senx}$$

$$P = \frac{\cancel{Senx}}{2\cancel{Senx}}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}}$$

¡Muy bien!

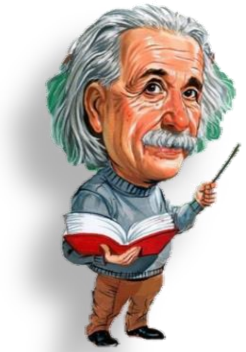


HELICO-PRACTICE 17

17. Reduzca

$$Q = \text{Cos}2° + \text{Cos}4° + \text{Cos}6° + \cdots + \text{Cos}58°$$

Recuerda:



Serie de cosenos para ángulos en progresión aritmética

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x + kr) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{nr}{2}\right)\cos\left(\frac{P+U}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Donde consideramos que

n: número de términos

r: razón de la P.A.

P: primer ángulo

U:último ángulo

Resolución:

$$n = \frac{58}{2} \longrightarrow n = 29$$

$P = 2°$ $\quad r = 2°$

$U = 58°$

¡Muy bien!

$$Q = \frac{\text{Sen}\left(\frac{29x\cancel{2}°}{\cancel{2}}\right)\text{Cos}\left(\frac{2° + 58°}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{2°}{2}\right)}$$

$$Q = \frac{\text{Sen}29°\text{Cos}30°}{\text{Sen}1°}$$

$$\boxed{Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\text{Sen}29°}{\text{Sen}1°}}$$

HELICO-PRACTICE 18

18. Simplifique

$$Q = \text{Sen}2x + \text{Sen}4x + \text{Sen}6x + \cdots + \text{Sen}24x$$

Recuerda:

Serie de senos para ángulos en progresión aritmética

$$\sum_{k=1}^{n} \text{sen}(x + kr) = \frac{\text{Sen}\left(\frac{nr}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Resolución:

$$n = \frac{24}{2} \longrightarrow n = 12$$

$$r = 2x \qquad P = 2x \qquad U = 24x$$

$$Q = \frac{\text{Sen}\left(\frac{12.2x}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{2x+24x}{2}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{2x}{2}\right)}$$

$$Q = \frac{\text{Sen}12x\text{Sen}13x}{\text{Senx}}$$

¡Muy bien!

$$\boxed{Q = \text{Sen}12x\text{Sen}13x\text{Cscx}}$$

HELICO-PRACTICE 19

19. Calcule el valor de F,si

$$F = \text{Cos}52°.\text{Cos}68° + \text{Cos}68°\text{Cos}172° + \text{Cos}172°.\text{Cos}52°$$

Recuerda:

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$

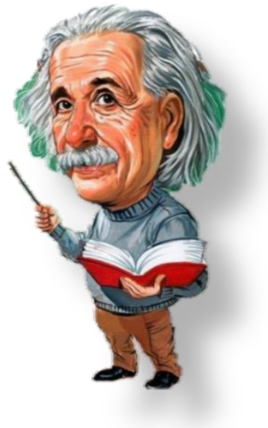
Resolución:

Multiplicamos por 2

$$2F = 2\text{Cos}52°\text{Cos}68° + 2\text{Cos}68°\text{Cos}172° + 2\text{Cos}172°\text{Cos}52°$$

$$2F = \underbrace{\text{Cos}120°}_{-1/2} + \text{Cos}16° + \underbrace{\text{Cos}240°}_{-1/2} + \text{Cos}104° + \text{Cos}224° + \underbrace{\text{Cos}120°}_{-1/2}$$

$$2F + \frac{3}{2} = \underbrace{\text{Cos}16° + \text{Cos}104°} + \text{Cos}224°$$



¡Muy bien!

HELICO-PRACTICE 19

Recuerda:

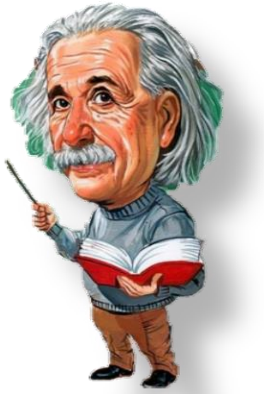
$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2F + \frac{3}{2} = \underbrace{2\mathrm{Cos}60°}_{1/2}\mathrm{Cos}44° + \mathrm{Cos}224°$$

$$2F + \frac{3}{2} = \mathrm{Cos}44° + \mathrm{Cos}224°$$

$$2F + \frac{3}{2} = 2\mathrm{Cos}134°\underbrace{\mathrm{Cos}90°}_{0}$$

$$2F + \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow 2F = -\frac{3}{2} \longrightarrow \boxed{F = -\frac{3}{4}}$$



¡Muy bien!

HELICO-PRACTICE 20

20. Simplifique

$$Q = Sen^2x + Sen^2 2x + Sen^2 3x + \cdots . + Sen^2 11x$$

Resolución:

$(x - 2)$

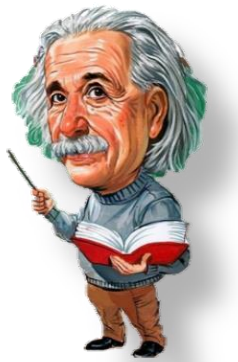
$$-2Q = -2Sen^2x - 2Sen^2 2x - 2Sen^2 3x - \cdots - 2Sen^2 11x$$

$(+11)$

$$11 - 2Q = \underbrace{1 - 2Sen^2x} + \underbrace{1 - 2Sen^2 2x} + \underbrace{1 - 2Sen^2 3x} + \cdots + \underbrace{1 - 2Sen^2 11x}$$

$$11 - 2Q = Cos2x + Cos4x + Cos6x + \cdots + Cos22x$$

Continuara...



HELICO-PRACTICE 20

Recuerda:

Serie de cosenos para ángulos en progresión aritmética

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x + kr) = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{nr}{2}\right)\cos\left(\frac{P+U}{2}\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{r}{2}\right)}$$

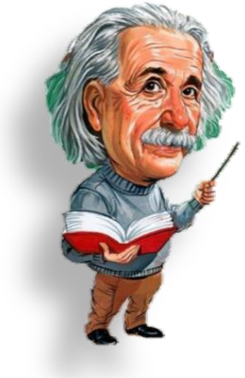
Donde consideramos que

n: número de términos

r: razón de la P.A.

P: primer ángulo

U:último ángulo



Aquí

$$n = \frac{22}{2} \longrightarrow n = 11$$

$$r = 2x \qquad P = 2x \qquad U = 22x$$

$$11 - 2Q = \frac{\operatorname{Sen}\left(\frac{11.2x}{2}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{2x+22x}{2}\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{2x}{2}\right)}$$

$$11 - 2Q = \frac{\operatorname{Sen}11x\operatorname{Cos}12x}{\operatorname{Sen}x}$$

¡Muy bien!

$$\boxed{Q = \frac{11}{2} - \frac{\operatorname{Sen}11x.\operatorname{Cos}12x}{2\operatorname{Sen}x}}$$

MUCHAS GRACIAS POR TU ATENCIÓN

Tu curso amigo

TRIGONOMETRÍA