ALGEBRA

UNI

CHAPTER 6

DESIGUALDADES – INECUACIONES RACIONALES

SACO OLIVEROS

I. La Desigualdad

Es una relación de orden que se establece entre dos números reales de diferente valor. Existen dos tipos de desigualdades.

$6 > 1$; $5 < 12$ Desigualdades estrictas

$1 \leq 2$; $0 \geq -2$ Desigualdades no estrictas

AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD

A. Ley de tricotomía

Si a y b son números reales , entonces una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple:

$$a < b \ \vee \ a = b \ \vee \ a > b$$

B. Ley de transitividad

Si a , b y c son números reales tales que:

$$a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$$

C. Ley aditiva

Siendo a , b y c son números reales tenemos:

$$a < b \rightarrow a + c < b + c$$

D. Ley multiplicativa

Siendo a , b y c números reales tal que $c > 0$:

Nota: si $c < 0$ el sentido del signo de relación cambia

$$a > b \rightarrow ac < bc$$

TEOREMAS

1. $\forall a \in R \rightarrow a^2 \geq 0$

02. $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$, $a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$

03. $a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d$

04. $0 < a < b \wedge 0 < c < d \rightarrow o < ac < bd$

05. $ab > 0 \leftrightarrow (a < 0 \wedge b < 0) \vee (a > 0 \wedge b > 0)$

06. $ab < 0 \leftrightarrow (a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0)$

07. Si a , b y c son del mismo signo:

$$a < b < c \rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

08. $a , b , c \in R \wedge n \in Z^{+}$:

$$a < b < c \rightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1} < c^{2n+1}$$

09. $a , b , c > 0 \wedge n \in Z^{+}$:

$$a < b < c \rightarrow a^{2n} < b^{2n} < c^{2n}$$

10. $a , b , c < 0 \wedge n \in Z^{+}$:

$$a < b < c \rightarrow a^{2n} > b^{2n} > c^{2n}$$

Propiedades:

01. Siendo $a < 0 \wedge c > 0$:

$$a < b < c \rightarrow 0 \leq b^2 < \max \{ a^2 , c^2 \}$$

02. Siendo a positivo:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

03. Siendo a, m, n > 0:

$$\frac{a}{m} + \frac{n}{a} \geq 2\sqrt{\frac{n}{m}}$$

04. Siendo a negativo:

$$a + \frac{1}{a} \leq -2$$

REGLAS ADICIONALES

Propiedades de desigualdades entre medias

Si $x_1, x_2, \ldots ,x_n$ son números positivos, se define:

- Media aritmética de $x_1, x_2, \ldots ,x_n$

$$MA (x_1, x_2, \ldots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Media geométrica de $x_1, x_2, \dots, x_n$

MG $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$

- Media armónica de $x_1, x_2, \dots, x_n$

MH $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

- Media potencial de $x_1, x_2, \dots, x_n$

MP $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[k]{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}}$

Entonces:

$$MP \geq MA \geq MG \geq MH$$

Para dos números a , b > 0 :

$$\sqrt[k]{\frac{a^k + b^k}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

01. Halle el menor valor entero de la expresión $k = \frac{3x-5}{2}$ si se sabe que $x \in [1;7\rangle$.

A) -4 B) -2 C) -1 D) 0 E) 4

Resolución:

Por condición tenemos que:

$$x \in [1;7\rangle \leftrightarrow 1 \leq x < 7$$

Multiplicando por 3 tenemos:

$$3 \,.\, 1 \leq 3 \,.\, x < 3 \,.\, 7 \rightarrow 3 \leq 3x < 21$$

Ahora procedemos a restar 5:

$$3 - 5 < 3x - 5 \leq 21 - 5 \rightarrow -2 < 3x - 5 \leq 16$$

Al dividir por 2 obtenemos:

$$-1 < \frac{3x-5}{2} \leq 8 \leftrightarrow -1 < k \leq 8$$

Finalmente se observa que el menor entero k es 0.

Respuesta: D

02. Si $x \in [-1;4]$, entonces ele intervalo de $k = \frac{3}{2x+3}$ es:

A)S = $\langle -1;4]$ **B)S = $[1;\frac{13}{11}\rangle$** C)S = $[\frac{3}{11}\,;\,3]$

D)S = $\langle 0;+\infty\rangle$ **E)S =** $[\frac{6}{11}\,;\,4]$

Resolución:

A partir de la extensión tenemos:

$$-1 \leq x \leq 4 \rightarrow -2 \leq 2x \leq 8$$

Sumando 3 e invirtiendo obtenemos:

$$1 \leq 2x + 3 \leq 11 \rightarrow \frac{1}{11} \leq \frac{1}{2x+3} \leq 1$$

Finalmente multiplicamos por 3:

$$\frac{3}{11} \leq \frac{3}{2x+3} \leq 3 \leftrightarrow \frac{3}{11} \leq k \leq 3$$

Por lo tanto el intervalo es $[\frac{3}{11}\,;\,3]$

Respuesta: C

03. Determine mayor valor "m" que satisface la condición:

$$\frac{x}{4} + \frac{9}{x} \geq m \; ; \; x > 0$$

A)2 **B)3** **C) 4** **D)6** **E)12**

Resolución:

Según la desigualdad propuesta para las medias se plantea:

MA ≥ MG

Ahora tenemos que:

$$\frac{\frac{x}{4} + \frac{9}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{9}{x}} \rightarrow \frac{\frac{x}{4} + \frac{9}{x}}{2} \geq \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x}{4} + \frac{9}{x} \geq 3$$

Nótese que $m \leq 3$, luego el máximo valor que asume m es 3.

Respuesta: B

04. Halle el mayor valor de la expresión (2x+1) si se sabe que

$(3-2x) \in [-1;2\rangle$.

A) –4 **B) –2** **C) –1** **D) 5** **E) 4**

Resolución:

Por condición tenemos que:

$$-1 \leq 3-2x < 2 \rightarrow -1 -3 \leq 3-2x -3 < 2 -3 \rightarrow -4 \leq -2x < -1$$

$$1 < 2x \leq 4 \rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 2$$

Ahora procedemos a formar 2x +1 a partir de la extensión de x:

$$\frac{1}{2} < x \leq 2 \rightarrow 1 < 2x \leq 4 \rightarrow 2 < 2x + 1 \leq 5$$

Por lo tanto el mayor valor de 2x + 1 es 5.

Respuesta: D

INECUACIONES RACIONALES

INECUACIONES RACIONALES

Definición: Son todas aquellas inecuaciones que se reducen a una de las siguientes formas:

P(x) > 0 , P(x) < 0 , P(x) ≥ 0 ,P(x) ≤ 0

Donde P(x) es un polinomio literal o bien una fracción algebraica.

Algunos ejemplos son $x^3 - 4x + 3 > 0$, $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$2x + 7 < x - 4$, $\frac{4x+7}{x+1} \geq 0$, $\frac{x^2 - 5}{4x+3} < \frac{x+5}{4}$, $\frac{5}{x+3} \leq \frac{x^2}{x+3}$

Observación: De las inecuaciones racionales citadas como ejemplos podemos reconocer que según la estructura que presentan cada una de estas , las tres primeras son inecuaciones polinomiales mientras que las tres ultimas son inecuaciones fraccionarias.

TEOREMAS

01)Del trinomio positivo

$a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0 \rightarrow ax^2 + bx + c > 0 \,;\, \forall\, x \in \mathbb{R}$

02)Del trinomio negativo

$a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0 \rightarrow ax^2 + bx + c < 0 \,;\, \forall\, x \in \mathbb{R}$

RESOLUCION DE LA INECUACION

Concepto: Es el proceso mediante el cual se determina el conjunto solución de la inecuación.

Método de los puntos de referencia: También se le conoce como **el método de las curvas ,** es una regla practica que permite resolver cualquier inecuación racional su aplicación considera seis pasos.

04. Los puntos de corte se ubican ordenadamente en la recta real.

05. De la parte superior derecha se traza una línea curva hacia el primer punto de corte . Esta línea cruza por el punto siempre que el punto de corte analizado provenga de un factor con exponente impar y se dirige hacia el siguiente punto , pero si el punto de corte analizado proviene de un factor con exponente par la línea curva rebota y se dirige hacia el siguiente punto. El mismo análisis se debe hacer con cada punto de corte hasta terminar el recorrido de la línea curva.

06. Si el signo de relación de la inecuación es $>$ o $\geq$ el conjunto solución estará conformado por las zonas que se encuentran por encima de la recta real , pero si el signo de relación de la inecuación es $<$ o $\leq$ el conjunto solución lo conformaran todas las zonas ubicadas por debajo de la recta real.

PROPIEDADES

01)Para resolver inecuaciones polinomiales de primer grado es suficiente despejar la letra incógnita dando uso de la transposición de términos .

02)Para resolver un sistema de inecuaciones se debe resolver cada una de las inecuaciones que forman el sistema para luego intersectar todos los conjuntos obtenidos , siendo dicha intersección la solución del sistema.

Observación: Existe una regla común para resolver inecuaciones racionales llamada **método de los puntos de corte o regla de los signos.**

Problema 01. Resolver la inecuación:

$$5(x+2) - 3(x-1) \geq 4-x$$

Resolución:

Una rápida inspección permite reconocer que se trata de una inecuación polinomial de primer grado. Según la teoría procedemos a despejar la incógnita.

$$5x + 10 - 3x + 3 \geq 4 - x$$

$$2x + 13 \geq 4 - x \leftrightarrow 2x + x \geq 4 - 13$$

$$3x \geq -9 \rightarrow x \geq -3$$

Finalmente tenemos:

$$cs = [-3 ; +\infty[$$

Problema 02. Resolver la inecuación:

$$x^3 + x^2 < 9x + 9$$

Resolución:

Dando uso de los puntos de referencia procedemos de la manera siguiente:

$$x^3 + x^2 - 9x - 9 < 0 \leftrightarrow x^2(x+1) - 9(x+1) < 0$$

$$(x+1)(x^2-9) < 0 \leftrightarrow (x+1)(x+3)(x-3) < 0$$

Los puntos de corte son -1 ; -3 ∧ 3 , nótese que por ser el signo de relación simple (< o >) cada punto de corte le corresponde a un extremo abierto. Ahora de la recta real finalmente se tendrá:

$$cs =]-\infty ; -3[\cup]-1 ; 3[$$

Problema 03. Resolver la inecuación:

$$\frac{5x+7}{x+4} > \frac{2x+3}{x+4}$$

Indicar como respuesta la suma de los x enteros que no pertenecen al conjunto solución.

Resolución:

Una rápida inspección permite reconocer que se trata de una inecuación fraccionaria , según la teoría:

$$\frac{5x+7}{x+4} > \frac{2x+3}{x+4} \leftrightarrow \frac{5x+7}{x+4} - \frac{2x+3}{x+4} > 0$$

$$\frac{5x+7-2x-3}{x+4} > 0 \leftrightarrow \frac{3x+4}{x+4} > 0$$

Nótese que los puntos de corte son -4 y -4/3 y ambos corresponden a extremos abiertos. Ahora de la recta real se consigue que

cs =]-∞ ; -4[U]-4/3 ; +∞[

El conjunto solución se forma con todos los valores que asume x , luego los valores que no asume x se encuentran en el complemento del conjunto solución y este es $(cs)^{c}$ = [-4 ; -4/3].

Los valores enteros que no asume x son -4 ; -3 y -2

Sea la suma de valores enteros que no asume x = K :

K = -4-3-2 = -9

Problema 05. Al resolver el sistema:

$$x^2 < 4x \leq x + 6$$

Indicar la longitud de su conjunto solución.

Resolución:

Según la teoría debemos resolver cada inecuación del sistema , en la primera:

$$x^2 < 4x \leftrightarrow x^2 - 4x < 0$$

$$x(x - 4) < 0 \leftrightarrow 0 < x < 4$$

Nótese que:

cs(1) =]0 ; 4[

En la segunda inecuación:

$$4x \leq x + 6 \rightarrow 3x \leq 6 \rightarrow x \leq 2$$

Nótese que:

cs(2) =]-∞ ; 2]

Ahora el conjunto solución del sistema es:

cs = cs(1) ∩ cs(2)

cs =]0 ; 4[∩]-∞ ; 2]

cs =]0 ; 2]

Finalmente la longitud del conjunto solución es:

Longitud (cs) = 2 – 0 = 2

PRÁCTICA PARA LA CLASE

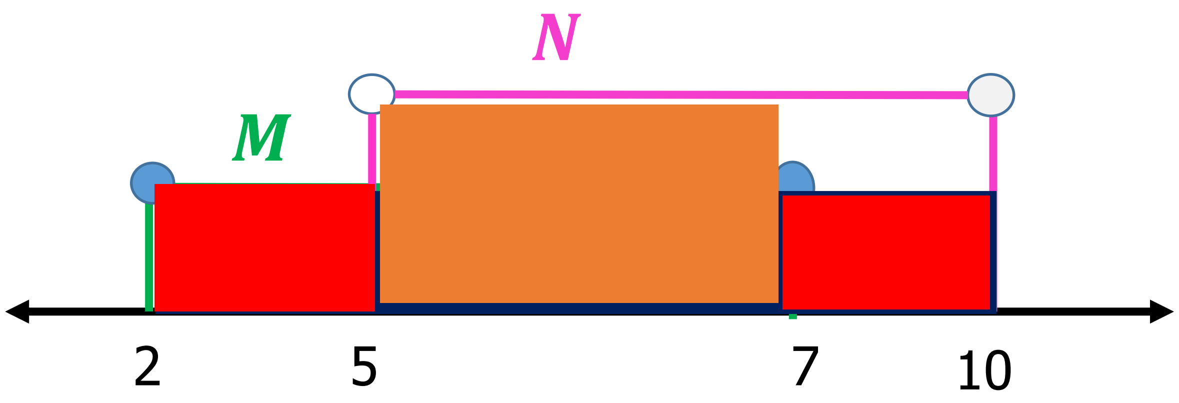
1. Dados los intervalos

$$M = [2; 7]; \quad N = \langle 5; 10\rangle$$

calcule $(M \cup N) - (M \cap N)$.

A) $[2; 5] \cup \langle 7; 10\rangle$ B) $[-2; 5]$
C) $\langle 7; 10\rangle$ D) $\langle 2; 3\rangle$
E) $[2; 5] \cap \langle 7; 10\rangle$

RESOLUCIÓN



$$M \cup N = [2; 10[$$

$$M \cap N =]5; 7]$$

$$\therefore\ (M \cup N) - (M \cap N) = [2; 5] \cup \langle 7; 10\rangle$$

2. Dados los intervalos $[a, b]=\{x^2-1/-4 \leq x < 3\}$ y $\langle c;\ +\infty\rangle=\left\{\frac{x}{5}<\frac{x}{3}-1<2x\right\}$. Calcule $\frac{ab}{c}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) 2

D) –2 E) $-\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN

$$[a;b]=\{x^2-1/-4\leq x<3\}$$

$$-4\leq x<3$$

$$0\leq x^2\leq 16$$

$$-1\leq x^2-1\leq 15$$

$$a=-1\ \wedge\ b=15$$

$$\langle c;\infty\rangle=\left\{\frac{x}{5}<\frac{x}{3}-1<2x\right\}$$

$$\frac{x}{5}<\frac{x}{3}-1\ \wedge\ \frac{x}{3}-1<2x$$

$$1<\frac{2x}{15}\ \wedge\ -1<\frac{5x}{3}$$

$$x>\frac{15}{2}\ \wedge\ x>\frac{-3}{5}$$

$$x>\frac{15}{2}$$

$$\langle c;\infty\rangle=\left\langle\frac{15}{2};\infty\right\rangle$$

$$c=\frac{15}{2}$$

$$\boxed{\therefore \frac{ab}{c}=-2}$$

3. Luego de resolver $2<\dfrac{x}{x+1}<5$, indique el número de valores enteros que toma x.

A) 6 B) 2 C) 1
D) 5 E) 0

RESOLUCIÓN

- $2<\frac{x}{x+1} \wedge \frac{x}{x+1}<5$

$$2-\frac{x}{x+1}<0 \;\wedge\; 0<5-\frac{x}{x+1}$$

$$\frac{x+2}{x+1}<0 \;\wedge\; 0<\frac{4x-5}{x+1}$$

$$\rightarrow -2<x<-1 \;\wedge\; \left(x<-1 \vee x>\frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -2<x<-1$$

$$\boxed{\therefore\ valores\ enteros\ de\ "x"=0}$$

4. Si a, b, $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $a+16b=1$ y $k=25ab$, determine el intervalo de variación de k.

A) $\langle 0; 3\rangle$ B) $\langle 2; 3\rangle$ C) $\langle 2; 5\rangle$

D) $\langle 1; 3\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{25}{64}\right]$

RESOLUCIÓN

aplicamos desigualdad de medias : $MA \geq MG$

$$\frac{a+16b}{2} \geq \sqrt{a.16b}$$

$$\frac{1}{2} \geq 4\sqrt{ab}$$

$$0 < \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8}$$

$$0 < ab \leq \frac{1}{64}$$

$$0 < 25ab \leq \frac{25}{64}$$

$$0 < k \leq \frac{25}{64}$$

$$\boxed{\therefore k \in \left]0; \frac{25}{64}\right]}$$

5. Halle el mayor elemento entero de

$$U=\{x^2-6x/\ x \in \langle 0;5\rangle\}$$

A) –1 B) 0 C) –2
D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN

$$U = x^2 - 6x + 9 - 9 \quad \rightarrow U = (x-3)^2 - 9$$

$$0 < x < 5$$

$$-3 < x - 3 < 2$$

$$0 \leq (x-3)^2 < 9$$

$$-9 \leq (x-3)^2 - 9 < 0$$

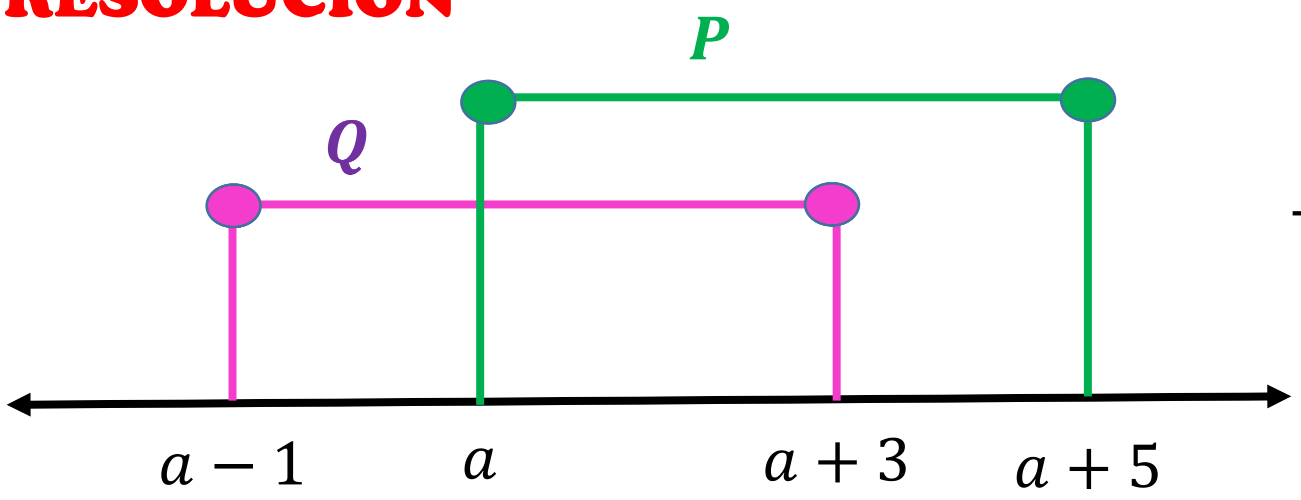
$$\boxed{\therefore U = [-9;0[}$$

6. Dados los intervalos $P=[a;\ a+5]$; $Q=[a-1;\ a+3]$; $a \in \mathbb{Z}$. Si la suma de los elementos enteros de $P-Q$ es 15, entonces, ¿cuál es el valor de a^2?

A) 1 B) 9 C) 8

D) 7 E) 6

RESOLUCIÓN



$$P-Q =]a+3; a+5]$$

$\rightarrow$ *suma de elementos enteros de* $P-Q$

$$a+4+a+5=15$$

$$2a=6$$

$$a=3$$

$$\boxed{\therefore\ a^2=9}$$

7. Sabiendo que $x \in [-4; -2]$, calcule la diferencia del máximo y mínimo valor de $\dfrac{35}{3-x}$.

A) 6 B) 2 C) 1
D) 5 E) 3

RESOLUCIÓN

Construyendo la expresión pedida:

$$-4 \leq x \leq -2$$

$$2 \leq -x \leq 4$$

$$5 \leq 3 - x \leq 7$$

$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{3-x} \leq \frac{1}{5}$$

$$\cancel{\frac{35}{7}} \leq \frac{35}{3-x} \leq \cancel{\frac{35}{5}}$$

$$5 \leq \frac{35}{3-x} \leq 7$$

$$maximo = 7$$

$$minimo = 5$$

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{máx. - min. = 2}}$$

8. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I. Si $\frac{2x+1}{5}-\frac{2-x}{3}>1$; entonces $x>2$

II. Si $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}$; entonces $x>1$

III. Si $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$;entonces $x<7$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

RESOLUCIÓN

$$I.-\ \frac{6x+3-10+5x}{15}>1$$

$$11x-7>15$$

$$11x>22$$

$$\rightarrow x>2\ \ldots(V)$$

$$II.-15(5x-1)-6(3x-13)>20(5x+1)$$

$$75x-15-18x+78>100x+20$$

$$43x<43$$

$$\rightarrow x\ <1\ \ldots(F)$$

$$III.-\ \frac{2(3x-1)-5(x+1)}{10}<\frac{7-x}{7}$$

$$\frac{x-7}{10}<\frac{7-x}{7}$$

$$17x<119$$

$$\rightarrow x<7\ \ldots(V)$$

$$\boxed{\therefore I\ y\ III}$$

9. ¿Cuántos pares ordenados $(a; b)$ de coordenadas enteras satisfacen el sistema?

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2} \leq x \\ y + 1 > x^2 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

$$(+)\begin{cases} 2x \geq y \\ y + 1 > x^2 \end{cases}$$

$$2x + 1 > x^2$$

$$x^2 - 2x - 1 < 0$$

$$(x-1)^2 < 2$$

$$-\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2}$$

$$1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} + 1$$

$$-0.41\ldots < x < 2.41\ \ldots$$

$$\rightarrow \quad x = 0; 1; 2$$

- $x = 0 \rightarrow -1 < y \leq 0$

  $(0; 0)$

- $x = 1 \rightarrow 0 < y \leq 2$

  $(1: 1), (1; 2)$

- $x = 2 \rightarrow 3 < y \leq 4$

  $(2; 4)$

$$\boxed{\therefore\ n^\circ\ soluciones = 4}$$

10. ¿Qué valor debe tener n para que

$$nx^2+(n-1)x+(n-1)$$

sea positivo para cualquier valor de x?

A) $n \in \langle -\infty; -1/3\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
B) $n \in \langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$
C) $n \in \langle -\infty; -1/3\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$
D) $n \in \langle -\infty; 1\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$
E) $n \in \langle 1; +\infty\rangle$

RESOLUCIÓN

El problema señala :

$$nx^2+(n-1)x+n-1>0\,;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Debe cumplirse que :

$$\rightarrow \boldsymbol{n>0 \ \wedge\ \Delta<0}$$

$$n>0 \ \wedge\ (n-1)^2-4(n)(n-1)<0$$

$$(n-1)(-3n-1)<0$$

$$(n-1)(3n+1)>0$$

$$\rightarrow\ n>0\ \wedge\left(n<-\frac{1}{3}\ \vee\ n>1\right)$$

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{n \in \langle 1;\infty\rangle}}$$

11. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I. Si $3+\frac{x-3}{6}>\frac{x+5}{3}-2\frac{1}{3}$; entonces $x<19$

II. Si $\frac{3x-1}{2}>\frac{1-2x}{3}$; entonces $x<\frac{5}{13}$

III. Si $3-\frac{x}{4}<7+\frac{x-3}{4}$;entonces $x<-\frac{13}{5}$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

RESOLUCIÓN

$$I.-\ \frac{x+15}{\cancel{6}}>\frac{x-2}{\cancel{3}}$$

$$x+15>2x-4$$

$$\rightarrow x<19\ \ldots(V)$$

$$II.-\ 3(3x-1)>2(1-2x)$$

$$9x-3>2-4x$$

$$13x>5$$

$$\rightarrow x>\frac{5}{13}\ \ldots(F)$$

$$III.-\ \frac{12-x}{\cancel{4}}<\frac{x+25}{\cancel{4}}$$

$$12-x<x+25$$

$$2x>-13$$

$$\rightarrow x>-\frac{13}{2}\ \ldots(F)$$

$$\boxed{\therefore\ \textit{Solo I}}$$

12. Si $-\dfrac{2}{5} < a < 0$, resuelva la inecuación

$$\frac{3x-a}{2a}+\frac{5x}{2}\leq\frac{5x+2}{10a}$$

A) $\left\langle -\infty; \dfrac{1}{5}\right]$ B) $\left\langle -\infty; \dfrac{1}{3}\right]$ C) $\left\langle \dfrac{1}{5}; \infty\right\rangle$

D) $\left[\dfrac{1}{5}; \infty\right\rangle$ E) $\left[-\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{5}\right]$

RESOLUCIÓN

$$\frac{3x-a}{2a}+\frac{5x.a}{2.a}\leq\frac{5x+2}{10a}$$

$$\frac{3x-5a+5xa}{2a}-\frac{5x+2}{10a}\leq 0$$

$$5x-2\geq 0$$

$$\therefore \left[\frac{1}{5};\infty\right[$$

$$\frac{(3x-5a+5xa).5}{(2a).5}-\frac{5x+2}{10a}\leq 0$$

$$\frac{15x-25a+25xa-5x-2}{10a}\leq 0$$

$$\frac{25ax+10x-5a-2}{10a}\leq 0$$

$$\frac{5x(5a+2)-(5a+2)}{10a}\leq 0$$

$$\frac{\overbrace{(5a+2)}^{(+)}(5x-1)}{\underbrace{10a}_{(-)}}\leq 0$$

13. Para la confección de la parte final de un libro habían cierto número de problemas, se duplicó este número y se eliminaron 39 problemas porque eran muy sencillos, de este modo quedaron menos de 65 problemas. Si se hubiera triplicado el número original de problemas y eliminando luego 70 por considerarlos repetidos en capítulos anteriores quedarían más de 80. ¿Cuántos problemas habían inicialmente?

A) 38 B) 47 C) 51
D) 53 E) 57

RESOLUCIÓN

$Número\ de\ problemas : x$

- $2x - 39 < 65 \rightarrow 2x < 104 \Rightarrow x < 52 \ \ldots (i)$
- $3x - 70 > 80 \rightarrow 3x > 150 \Rightarrow x > 50 \ \ldots (ii)$

$De\ (i)\ y\ (ii):$

$$50 < x < 52$$

$$\boxed{\therefore x = 51}$$

14. Se compró un número impar y múltiplo de 3 de naranjas, tal que, si se vende la cuarta parte, quedan por vender menos de 120, pero si se vendiera la sexta parte, quedarían más de 129 por vender. ¿Cuántas naranjas se compraron?

A) 147 B) 159 C) 135
D) 165 E) 195

RESOLUCIÓN

$Sea\ la\ cantidad\ de\ naranjas: N \qquad dato: N = impar\ y\ multiplo\ de\ 3$

- $se\ vende: \frac{k}{4} \rightarrow quedan: \frac{3k}{4} < 120 \Rightarrow k < 160\ \ldots(i)$
- $se\ vende: \frac{k}{6} \rightarrow quedan: \frac{5k}{6} > 129 \Rightarrow k > 154{,}8\ \ldots(ii)$

$De\ (i) y\ (ii): 154{,}8 < k < 160 \rightarrow k = 155{,}156{,}157{,}158{,}159$

$\boxed{\therefore N°\ naranjas = 159}$

15. Halle un número de dos cifras, sabiendo que la suma de ellas es mayor que 10 y que la diferencia entre la cifra de las decenas y el doble de la que ocupa el lugar de las unidades es mayor que 4. Indicar como respuesta el producto de las cifras.

A) 24 B) 30 C) 18
D) 21 E) 27

RESOLUCIÓN

$Sea\ el\ número: \ \overline{ab}$

- $a + b > 10 \ \rightarrow 2a + 2b > 20$
- $a - 2b > 4 \ \ \rightarrow \underline{a - 2b > 4}$

$(+)$

$$3a > 24$$

$$8 < a < 10 \ \rightarrow a = 9$$

$Reemplazando:$

$$1 < b < 2.5$$

$$\rightarrow b = 2$$

$$\boxed{\therefore ab = 18}$$

16. Dado que $12 < x+10 < 14$. Calcule $4a+5b$ si $2a < 3(x+1)+1 < 2b$.

A) 50 B) 70 C) 64

D) 68 E) 60

RESOLUCIÓN

$$12 < x + 10 < 14 \quad \rightarrow \quad 2 < x < 4$$

$$dato: \; 2a < 3x + 4 < 2b$$

$$2 < x < 4$$

$$6 < 3x < 12$$

$$10 < 3x + 4 < 16$$

$$\rightarrow 2a = 10 \quad \wedge \quad 2b = 16$$

$$a = 5 \quad \wedge \quad b = 8$$

$$\boxed{\therefore 4a + 5b = 60}$$

17. Halle el total de valores enteros que verifican el sistema

$$\begin{cases} 5x - 9x + 2 > (x+2)(-6) \\ 3(2x+3) < 7x - 2(x-8) \end{cases}$$

A) 13 B) 12 C) 11
D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN

- $-4x + 2 > -6x - 12$

$$2x > -14$$

$$x > -7 \quad \dots (i)$$

- $6x + 9 < 7x - 2x + 16$

$$6x + 9 < 5x + 16$$

$$x < 7 \quad \dots (ii)$$

$$De\ (i)\ y\ (ii):$$

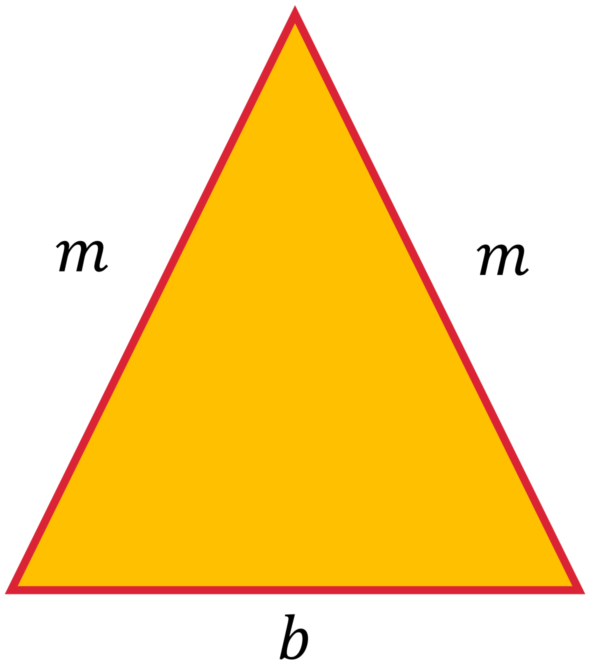
$$-7 < x < 7$$

$\therefore$ "x" puede tomar 13 *valores enteros*

18. El perímetro de un triángulo isósceles es 200 m, si uno de los lados es múltiplo de 25. Halle las dimensiones del triángulo.

A) 65; 65; 70 B) 75; 75; 50
C) 50; 50; 100 D) 70; 70; 55
E) 150; 25; 25

RESOLUCIÓN



$$Dato: 2m + b = 200 \qquad m = \dot{25} \qquad 2m > b$$

- $m = 25 \rightarrow b = 150$
- $m = 50 \rightarrow b = 100$
- $\boldsymbol{m = 75 \rightarrow b = 50}$

$$\boxed{\therefore\ 75; 75; 50}$$

19. A un estudiante le dieron a vender cierta cantidad de pollitos, de los que vendió 35 y le quedaron más de la mitad. Luego le devuelven 3, y vende después 18 con lo que le restan menos de 22 pollitos. ¿Cuántos pollitos le dieron?

A) 69 B) 70 C) 71
D) 72 E) 73

RESOLUCIÓN

$$cantidad\ de\ pollitos : x$$

$$vendio\ 35 \rightarrow quedan : x - 35 \rightarrow x - 35 > \frac{x}{2} \rightarrow x > 70 \ \ldots (i)$$

$$le\ devuelven\ 3 \rightarrow x - 32 \quad vende\ 18 \rightarrow quedan : x - 50 < 22 \rightarrow x < 72 \ \ldots (ii)$$

$$luego\ de\ (i)\ y\ (ii):$$

$$70 < x < 72$$

$$\boxed{\therefore x = 71}$$

20. ¿Cuántos pares ordenados (a; b) de coordenadas enteras satisfacen el sistema?

$$\begin{cases} y - x^2 + x + 6 > 0 \\ y - x < -3 \end{cases}$$

A) 7 B) 8 C) 71

D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN

$$(+)\begin{cases} y > x^2 - x - 6 \\ x - 3 > y \end{cases} \qquad \rightarrow \quad -1 < x < 3$$

$$x - 3 > x^2 - x - 6$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$

- $x = 0 \rightarrow -6 < y < -3 \rightarrow \{(0;-4),(0;-5)\}$
- $x = 1 \rightarrow -6 < y < -2 \rightarrow \{(1;-3).(1;-4),(1;-5)\}$
- $x = 2 \rightarrow - -4 < y < -1 \rightarrow \{(2;-2),(2;-3)\}$

$\therefore$ ***hay 7 soluciones***