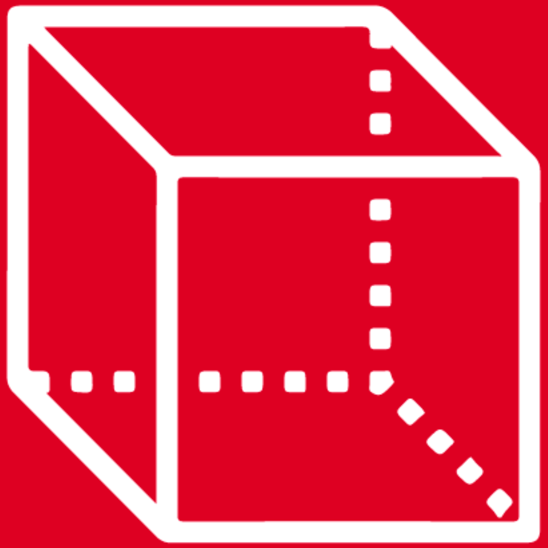
GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

CAPITULO 7 TEORIA

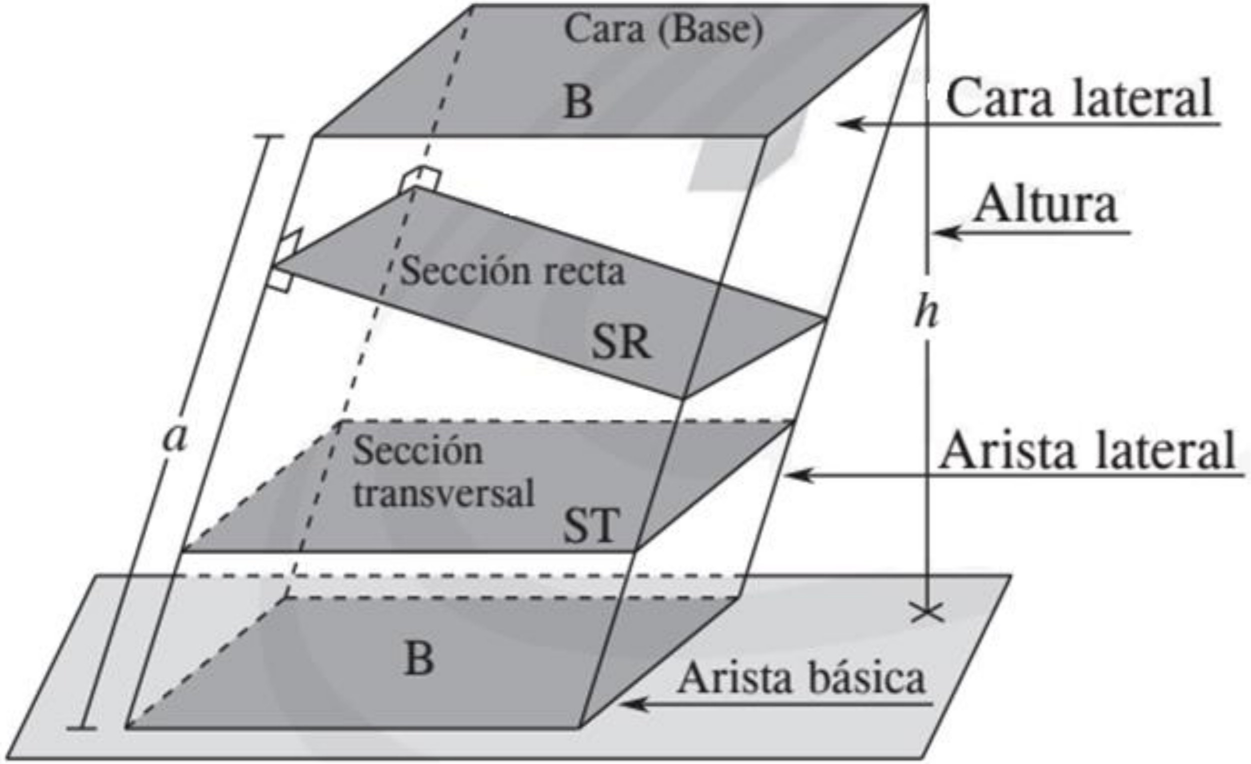


SACO OLIVEROS

PRISMA

DEFINICIÓN :

Es el poliedro limitado por una superficie prismática cerrada y dos planos paralelos secantes a todas las generatrices de esta superficie.

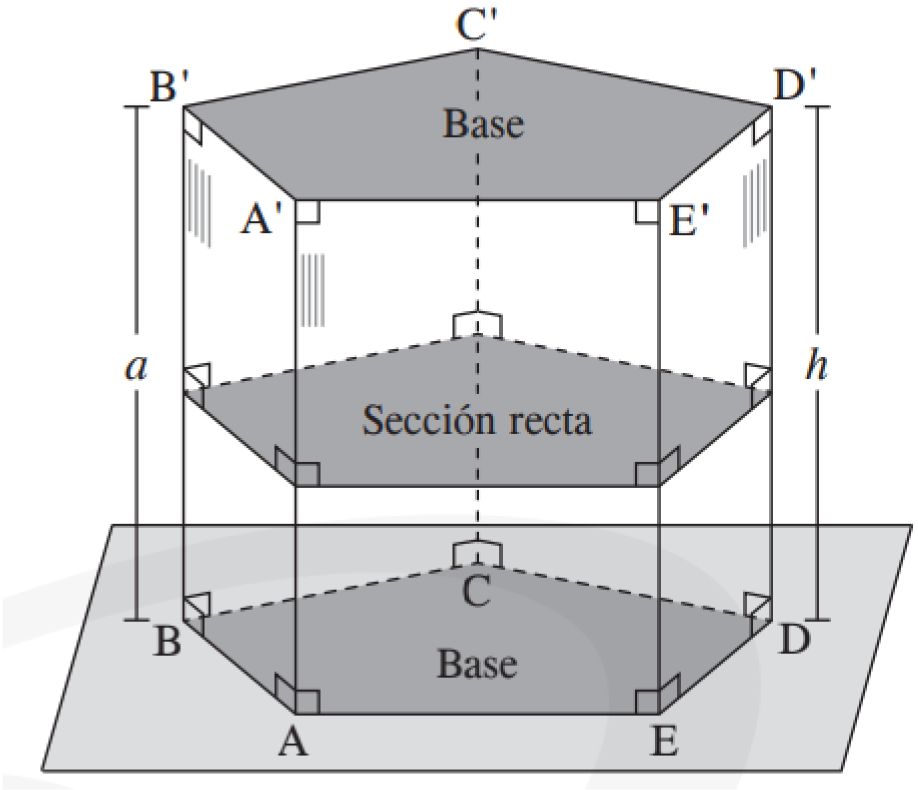


PRISMA

CLASIFICACIÓN :

a. Prisma recto

Cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son regiones rectangulares.

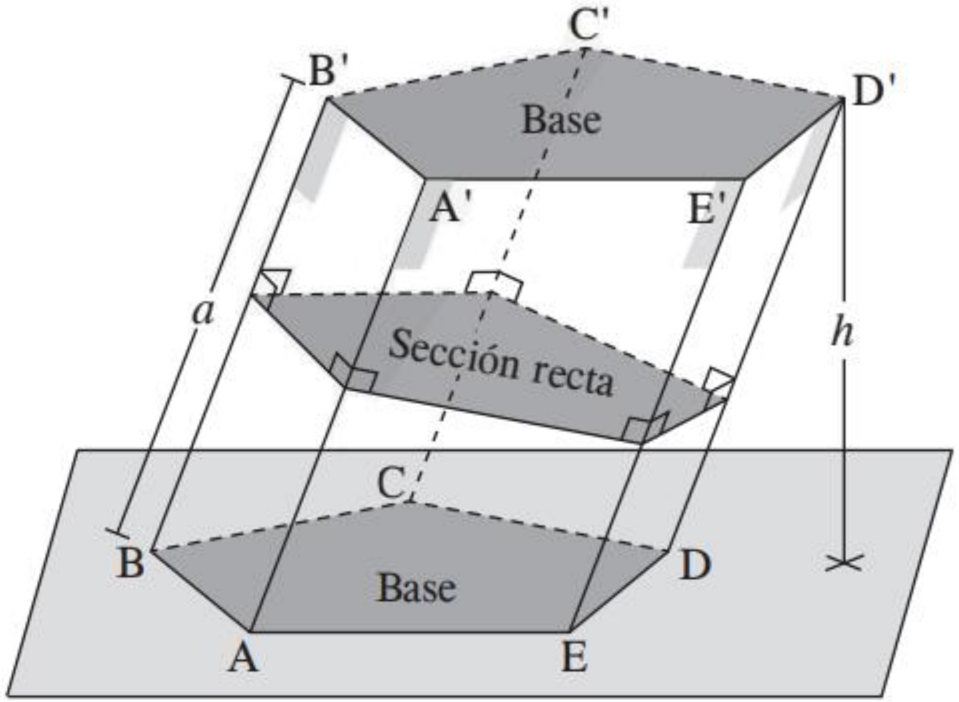


PRISMA

CLASIFICACIÓN :

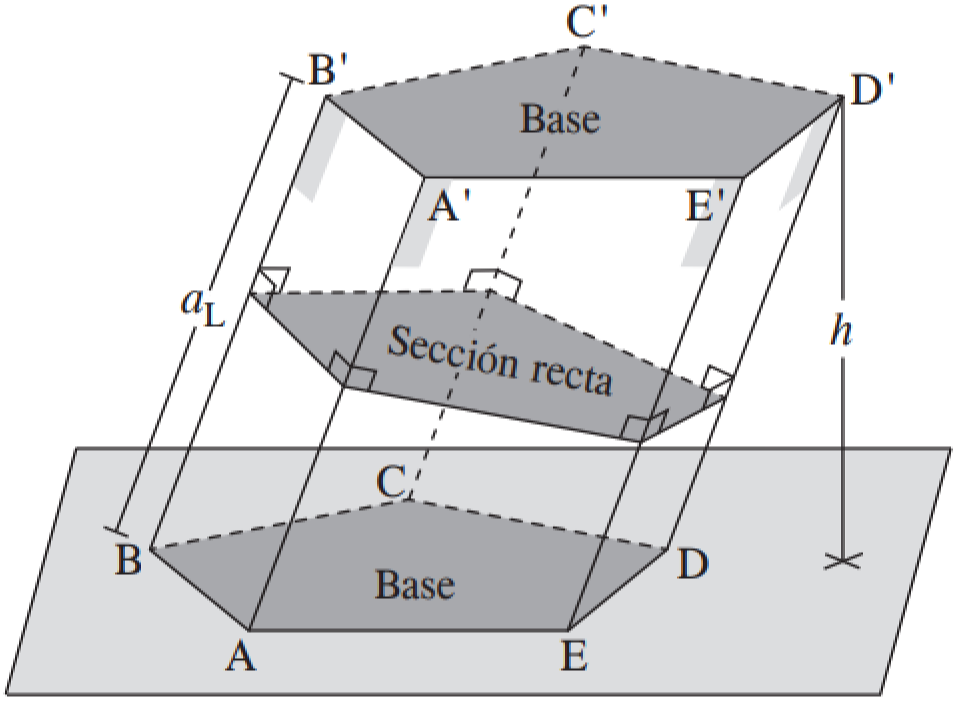
b. Prisma regular Es el prisma recto cuyas bases son regiones poligonales regulares.

c. Prisma oblicuo Cuando las aristas laterales son oblicuas a las bases. Las caras laterales son regiones paralelográmicas.



PRISMA OBLICUO

SUPERFICIE LATERAL , TOTAL Y VOLUMEN DEL PRISMA :



Área superficie lateral ($\mathbb{A}_L$)

$$\mathbb{A}_L = (2P_{SR})a_L$$

Área superficie total ($\mathbb{A}_T$)

$$\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_L + 2(\mathbb{A}_{base})$$

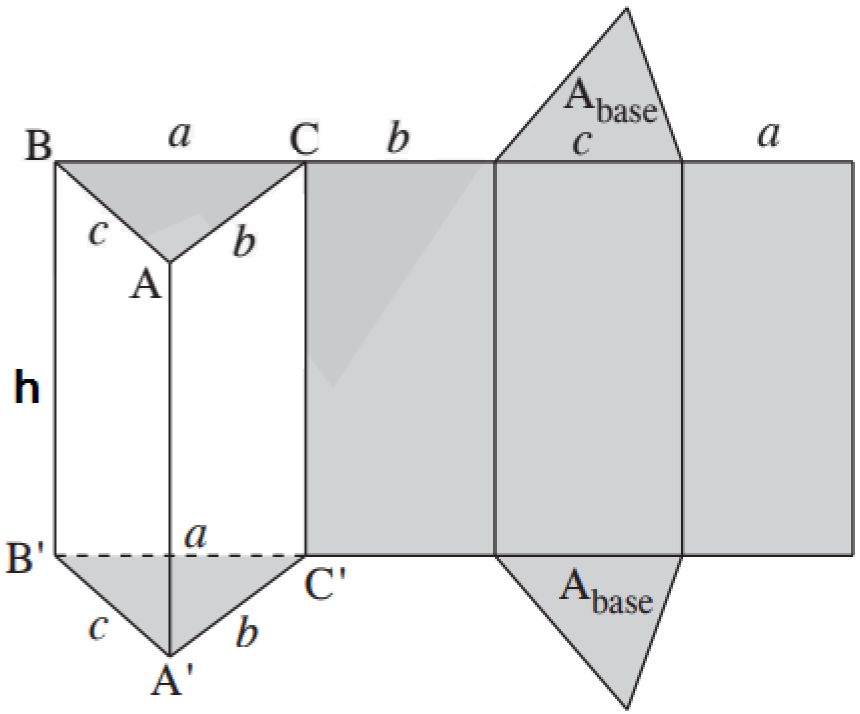
Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\mathbb{V} = (\mathbb{A}_{SR})a_L$$

$$\mathbb{V} = (\mathbb{A}_{base})\, h$$

PRISMA RECTO

SUPERFICIE LATERAL ,TOTAL Y VOLUMEN DEL PRISMA :



Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\mathbb{A}_{SL} = (2P_{base})h$$

Área de la superficie ($\mathbb{A}_{ST}$)

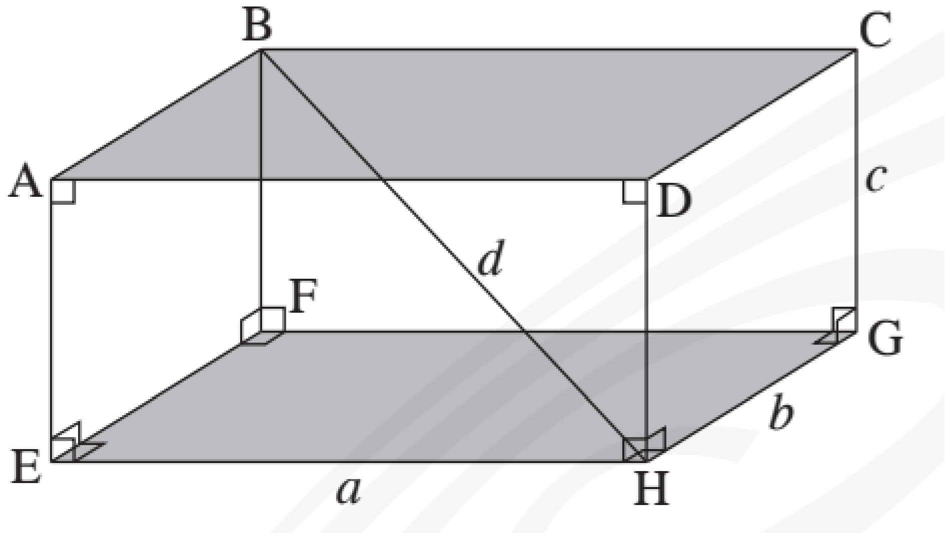
$$\mathbb{A}_{ST} = \mathbb{A}_{L} + 2(\mathbb{A}_{base})$$

Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\mathbb{V} = (\mathbb{A}_{base})\, h$$

PARALELEPIPEDO RECTANGULAR

SUPERFICIE TOTAL ,DIAGONAL Y VOLUMEN :



Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

$$\mathbb{A}_{ST} = 2(\ ac + ab + bc\ )$$

Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\mathbb{V} = (a.\ b.\ c)$$

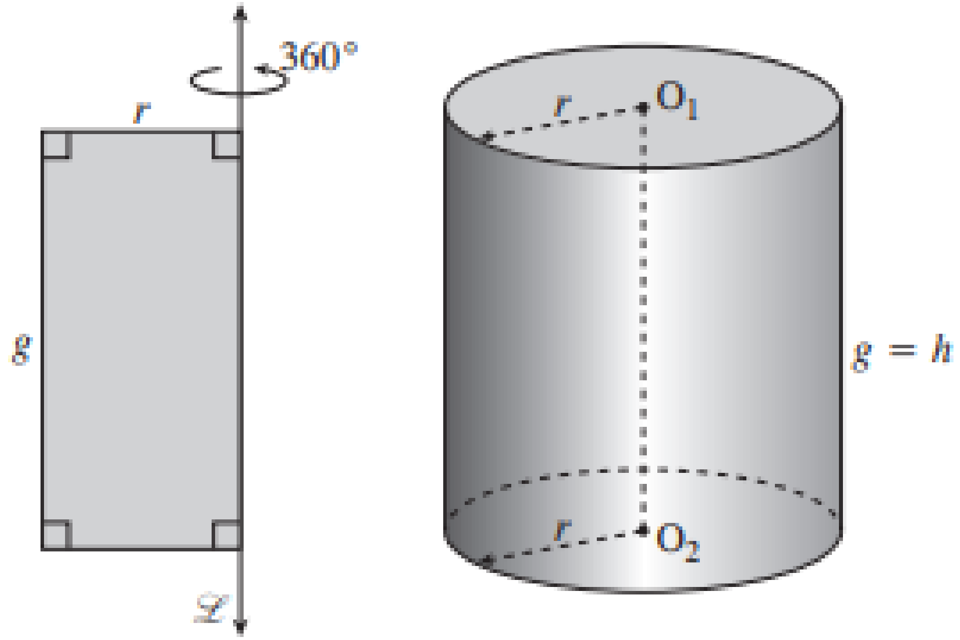
Diagonal (d)

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

CILINDRO

CILINDRO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN:

A un cilindro se le denomina cilindro recto cuando su generatriz es perpendicular a las bases.

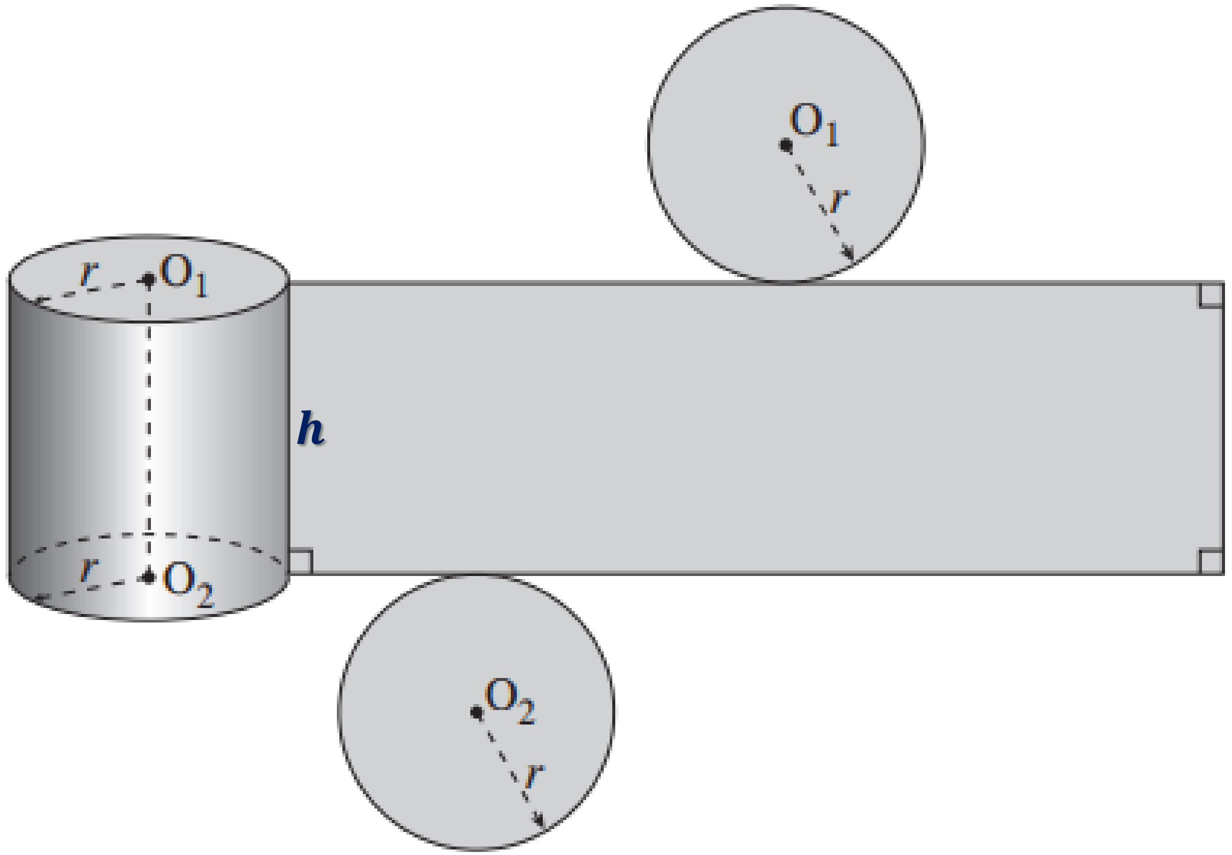


Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\mathbb{V}=\pi r^2 h$$

CILINDRO

CILINDRO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN:



Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

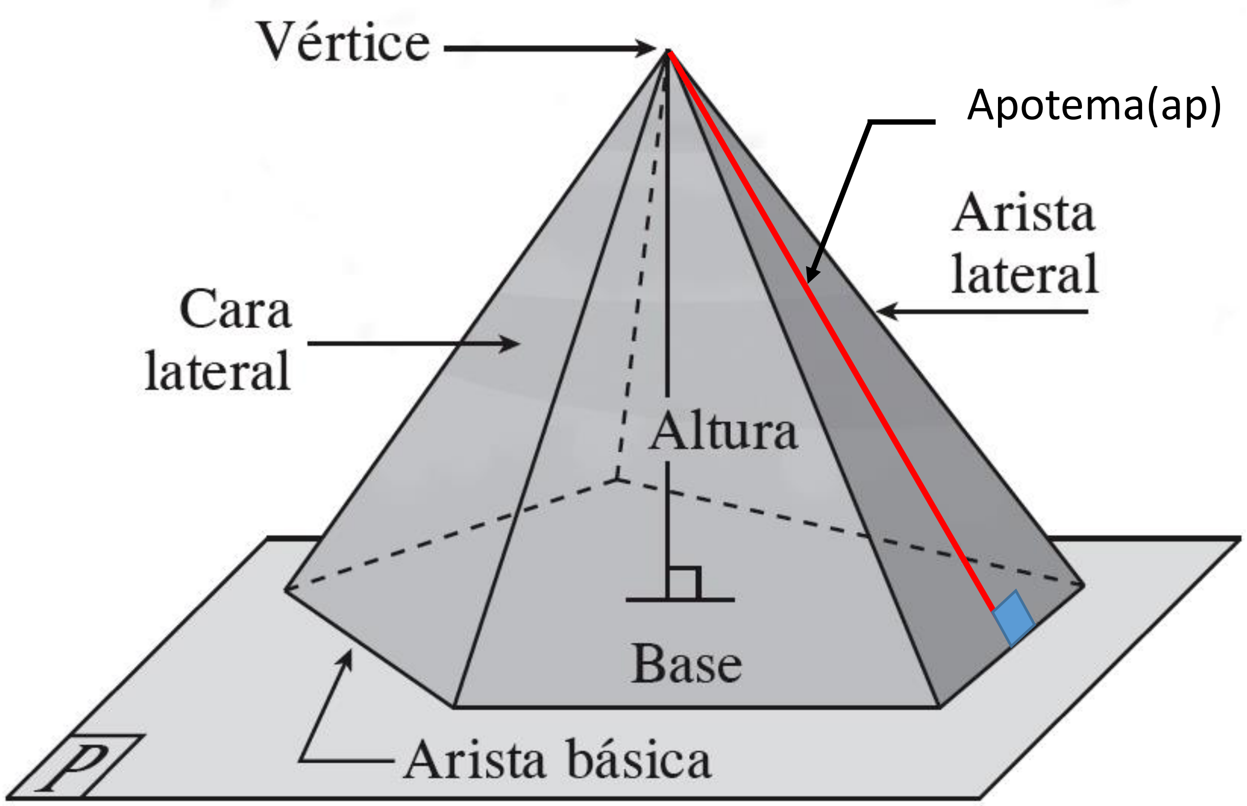
$$\boxed{\mathbb{A}_L = 2\pi r h}$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_T$)

$$\boxed{\mathbb{A}_T = 2\,\pi r(h + r)}$$

PIRÁMIDE

Pirámide Regular: Se denomina pirámide regular, a la pirámide cuya base es una región poligonal regular y el pie de la altura es el centro de dicha base.



Área de la superficie lateral ($\mathbb{A}_{SL}$)

$$\mathbb{A}_{SL} = P_{base} \cdot ap$$

Área de la superficie total ($\mathbb{A}_{ST}$)

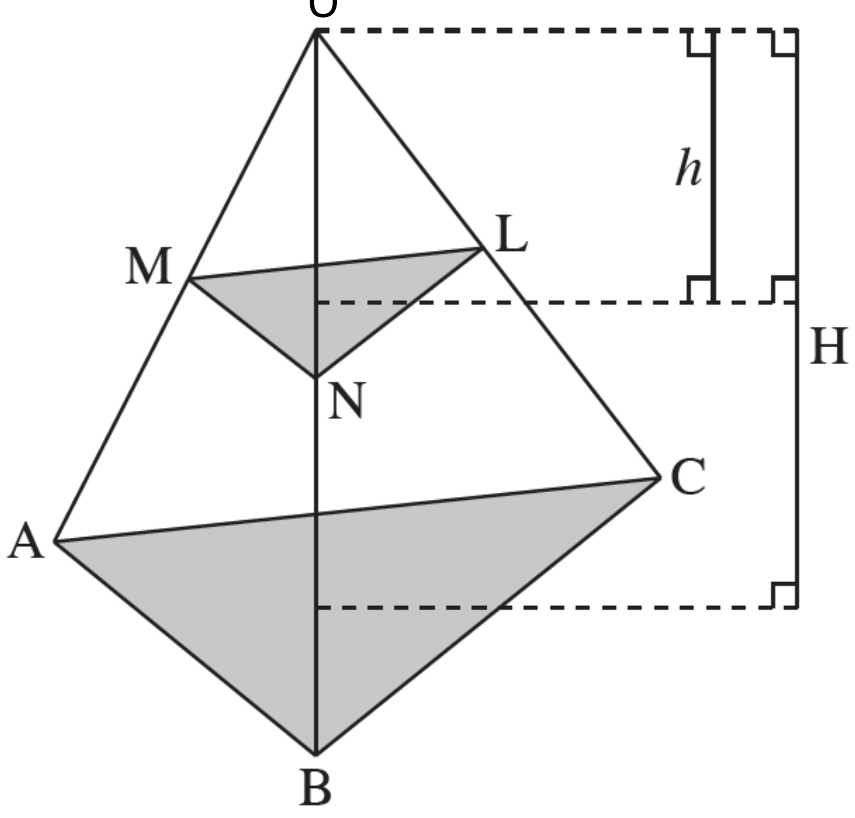
$$\mathbb{A}_{ST} = \mathbb{A}_{SL} + \mathbb{A}_{base}$$

Volumen ($\mathbb{V}$)

$$\mathbb{V} = \frac{(\mathbb{A}_{base})\, h}{3}$$

PIRÁMIDE

TEOREMA:



Si ΔMNL // ΔABC

→ O-MNL ~ O-ABC

Luego se cumple:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{NL}{BC} = \frac{OL}{OC} = \frac{h}{H} = \ldots\text{(Distancias)}$$

$$\frac{S_{T(O-MNL)}}{S_{T(O/ABC)}} = \frac{(OM)^2}{(OA)^2} = \frac{(NL)^2}{(BC)^2} = \frac{(OL)^2}{(OC)^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{V_{(O-MNL)}}{V_{(O/ABC)}} = \frac{(OM)^3}{(OA)^3} = \frac{(NL)^3}{(BC)^3} = \frac{(OL)^3}{(OC)^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

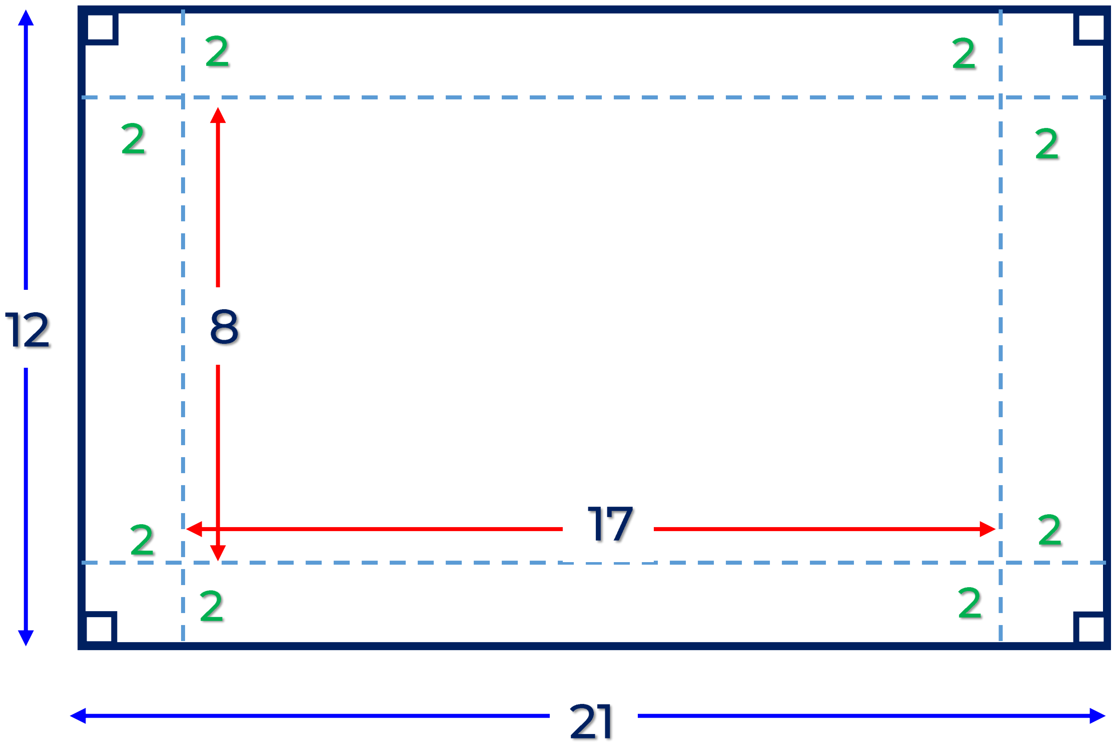
CAPITULO 7 PRACTICA

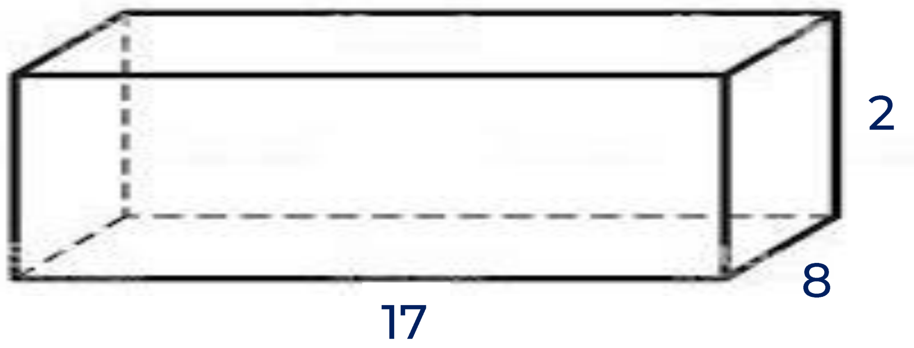
SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 De una lámina rectangular de 12 cm de ancho y 21 cm de largo se construye una caja abierta, cortando un cuadrado de 2 cm de lado en cada esquina. El volumen de la caja, en cm^3, es

RESOLUCIÓN :

Piden: El volumen de la caja = V





Volumen de la caja

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

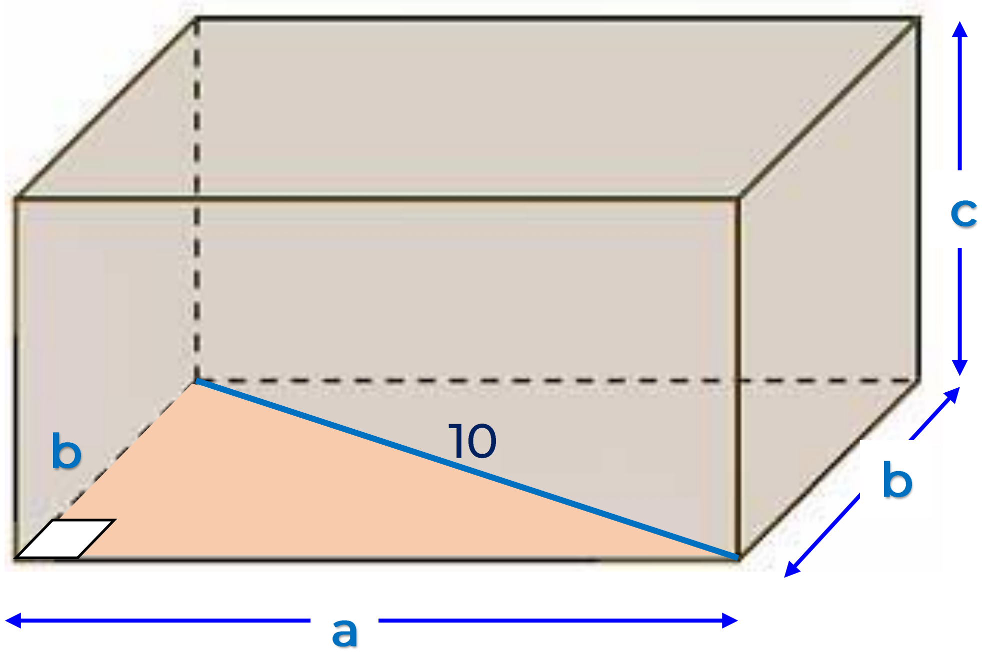
$$V = 17 \cdot 8 \cdot 2$$

$$\boxed{\therefore V = 272 \text{ cm}^3}$$

PROBLEMA 2 La superficie total de un paralelepípedo rectangular recto es 180 cm^2, la diagonal de la base mide 10 cm y la suma de las dimensiones es 17 cm. ¿Cuál es la longitud de la arista lateral?

RESOLUCIÓN :

Piden: la longitud de la arista lateral = c



Dato:

- $A_{ST} = 180$ ➡ $2(a.b + b.c + a.c) = 180$
- $a + b + c = 17$

Sabemos :

$$\underbrace{(a+b+c)^2}_{17^2} = \underbrace{a^2 + b^2}_{10^2} + c^2 + \underbrace{2(ab + b.c + a.c)}_{180}$$

$$17^2 = 10^2 + c^2 + 180$$

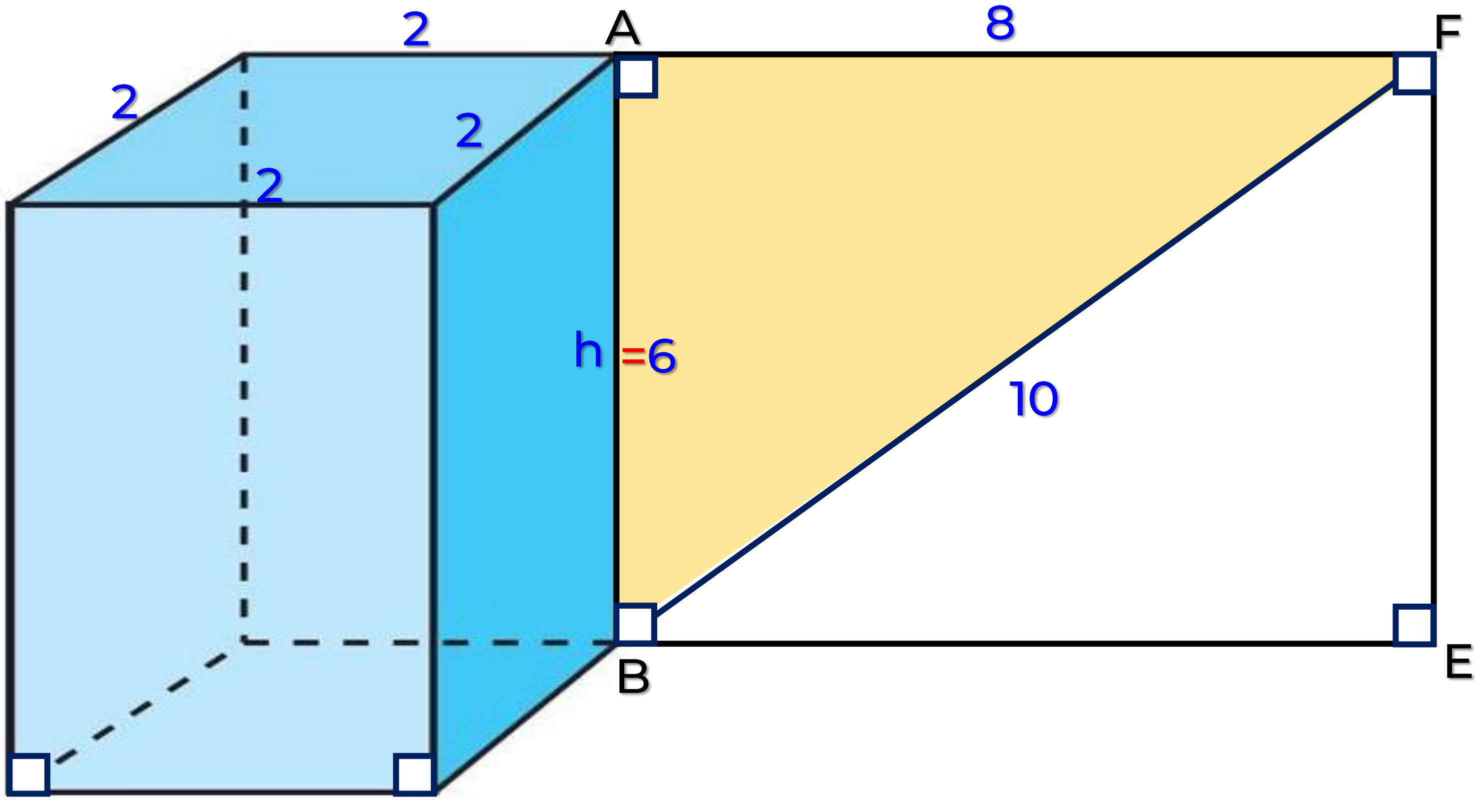
$$9 = c^2$$

$$\boxed{\therefore\ c = 3\ cm}$$

PROBLEMA 3 En un prisma cuadrangular regular cuya arista básica mide 2 cm, la diagonal del desarrollo de la superficie lateral mide 10 cm. Calcule el área de la superficie total.

RESOLUCIÓN :

Piden: Calcule el área de la superficie total = A_{ST}



- En el ⊿ BAF (Teor. Pitágoras)

$$8^2 + h^2 = 10^2$$

$$\boxed{h = 6}$$

- $A_{ST} = 2 \,.\, A_{BASE} + A_{SL}$

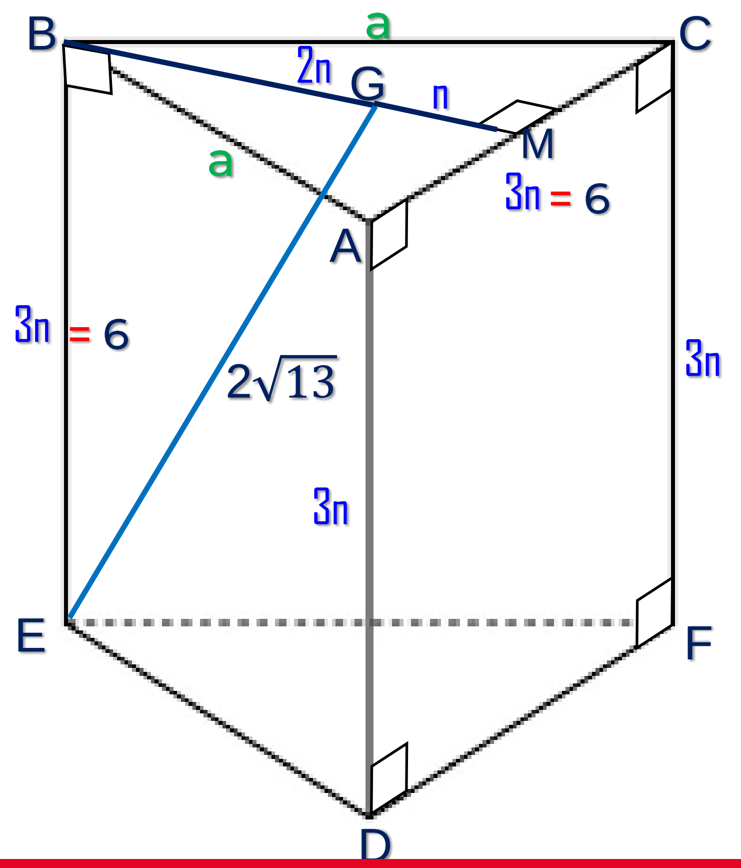
$$A_{ST} = 2(2^2) + 8 \,.\, 6$$

$$\boxed{\therefore\ A_{ST} = 56\ cm^2}$$

PROBLEMA 4 En un prisma recto ABC - DEF, ADFC es una región cuadrada, AB=BC y 3(BG)=2(AC) y G es el centro de la base ABC. Si EG = $2\sqrt{13}$, calcule el volumen del sólido determinado por el prisma.

RESOLUCIÓN :

Piden: calcule el volumen del sólido = V



Dato:

- ADFC es una región cuadrada

  AB = BC ➡ Δ ABC: Isósceles

- G: es el baricentro del Δ ABC

  ➡ BG = 2 GM

- En el ⊿ EBG (Teor. Pitágoras)

  $(3n)^2 + (2n)^2 = (2\sqrt{13})^2$

  ➡ $\boxed{n = 2}$

- Volumen del sólido

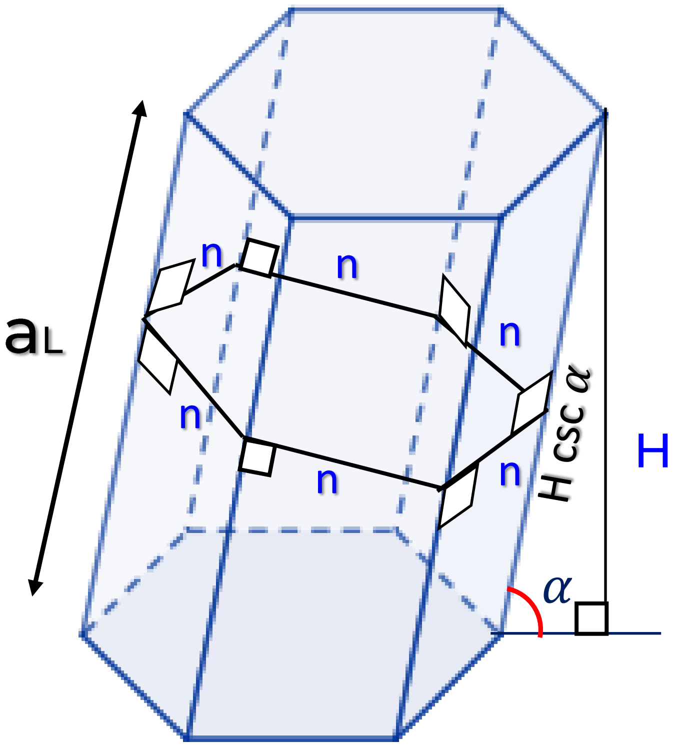
  $V = \left(\frac{6 \cdot 6}{2}\right) \cdot 6$

$\therefore V = 108\ u^3$

PROBLEMA 5 En un prisma hexagonal oblicuo cuya sección recta es una región poligonal regular, el área de la superficie lateral es S, su altura mide H y las aristas laterales forman con el plano de la base un ángulo que mide α. Calcule el volumen del sólido determinado por el prisma.

RESOLUCIÓN :

Piden: calcule el volumen del prisma = V



Dato: La sección recta es una región poligonal regular

El área de la superficie lateral es S

$$(6n)(H \csc \alpha) = S \quad \begin{cases} n = \dfrac{S}{6H \csc \alpha} \\ n^2 = \dfrac{S^2}{36H^2 \csc^2 \alpha} \end{cases}$$

- $$A_{SR} = 6\left(\frac{n^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{S^2}{36H^2 \csc^2 \alpha}\right) \Rightarrow \boxed{A_{SR} = \frac{\sqrt{3}\,S^2}{24H^2 \csc^2 \alpha}}$$

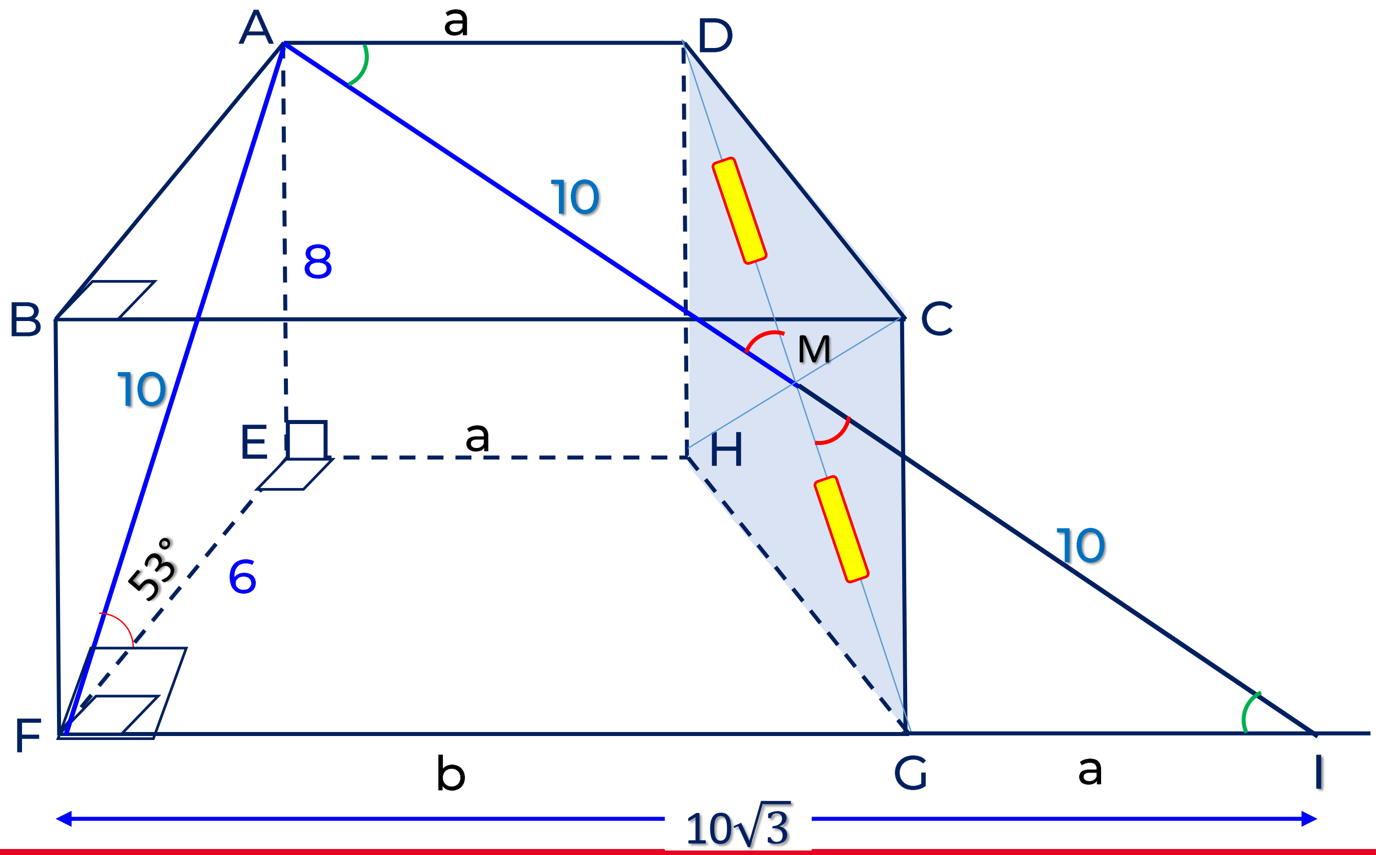
- $$V = a_L \cdot A_{SR} = (H \csc \alpha)\left(\frac{\sqrt{3}\,S^2}{24H^2 \csc^2 \alpha}\right)$$

$$\boxed{\therefore V = \frac{\sqrt{3}\,.\,S^2}{24H \csc \alpha}\,\mathbf{u}^3}$$

PROBLEMA 6 En un prisma recto ABCD - EFGH, ABCD es un trapecio rectángulo recto en A, el punto de intersección de las diagonales de la cara DCGH es M. Si AM = AF = 10 u y el diedro entre una base del prisma y el plano que contiene a los puntos M, A y F mide 53°. Calcule el volumen del prisma.

RESOLUCIÓN :

Piden: calcule el volumen del prisma = V



- Del gráfico $\overline{AE}$ ⊥ EFGH

  $\overline{AE}$ 1° ⊥ y $\overline{EF}$ 2° ⊥ → $\overline{AF}$ ⊥ $\overline{FG}$

- El ⊿ AEF (aproximado 37° - 53°)
- En el plano determinado $\overline{AD}$ // $\overline{FG}$
- Prolongamos $\overline{AM}$ y $\overline{FG}$ hasta I
- ∆ ADM ≅ ∆ IGM
- El ⊿ AFI (notable 30° - 60°)

→ $a + b = 10\sqrt{3}$

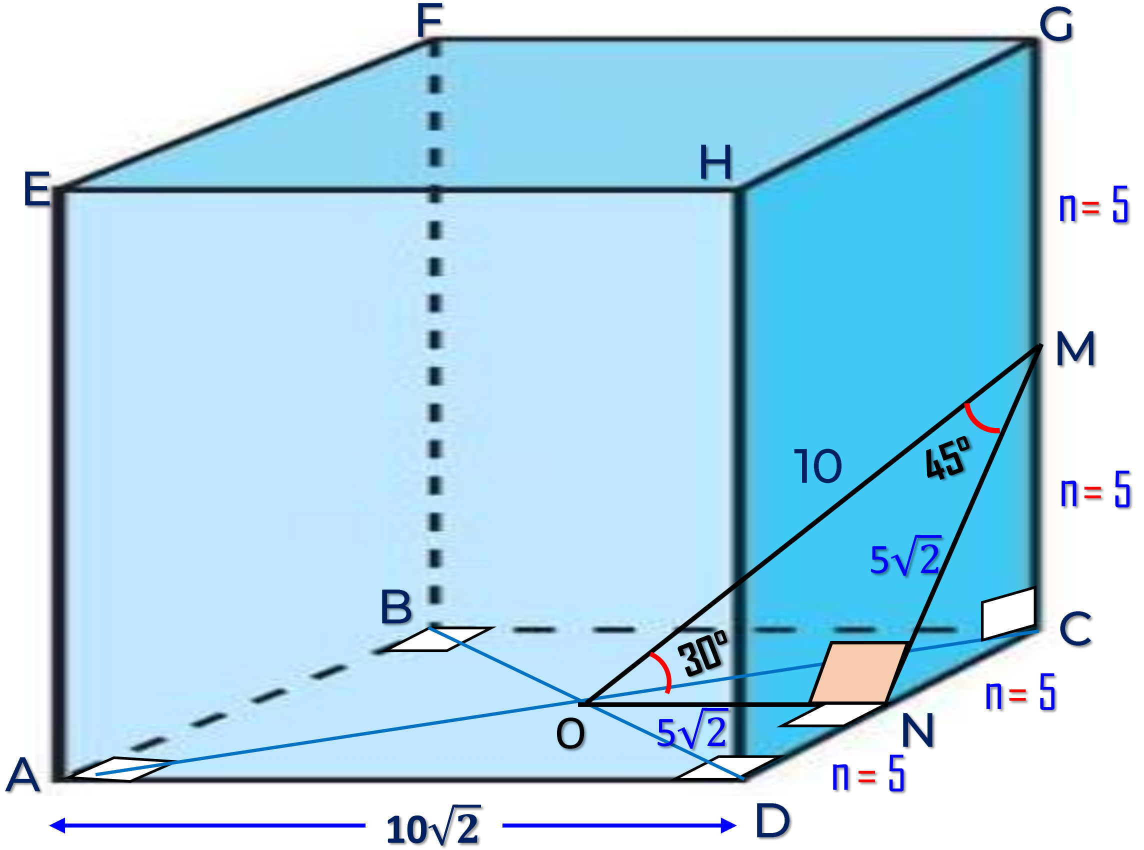
$V = \left(\frac{a+b}{2}\right) . 6 .$

$\therefore V = 240\sqrt{3}\ u^3$

PROBLEMA 7 Calcule el volumen del sólido determinado por un prisma recto ABCD - EFGH, si el segmento que tiene por extremos el punto de intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$ y el punto medio de $\overline{CG}$ mide 10 u, los ángulos entre dicho segmento y los planos que contienen a las regiones ABCD y CDHG miden 30° y 45°, respectivamente. (ABCD: rectángulo)

RESOLUCIÓN :

Piden: calcule el volumen del prisma = V



Dato: m ∢ entre $\overline{OM}$ y ▱ ABCD es 30°

- El ⊿ OCM (notable 30° - 60°) ➡ $\boxed{n = 5}$
- $\overline{MC}$ ⊥ ▱ ABCD y $\overline{CN}$ ⊥ $\overline{ON}$

➡ $\overline{MN}$ ⊥ $\overline{ON}$

Dato: m ∢ entre $\overline{OM}$ y ▱ CDHG es 45°

- El ⊿ ONM (notable 45°) ➡ ON = MN = $5\sqrt{2}$
- El ⊿ NCM (notable 45°) ➡ NC = 5
- Δ ACD: $\overline{ON}$ es base media ➡ AD = $10\sqrt{2}$

$V = (10\sqrt{2} \cdot 10) \cdot 10$

$\boxed{\therefore V = 1000\sqrt{2}\ u^3}$

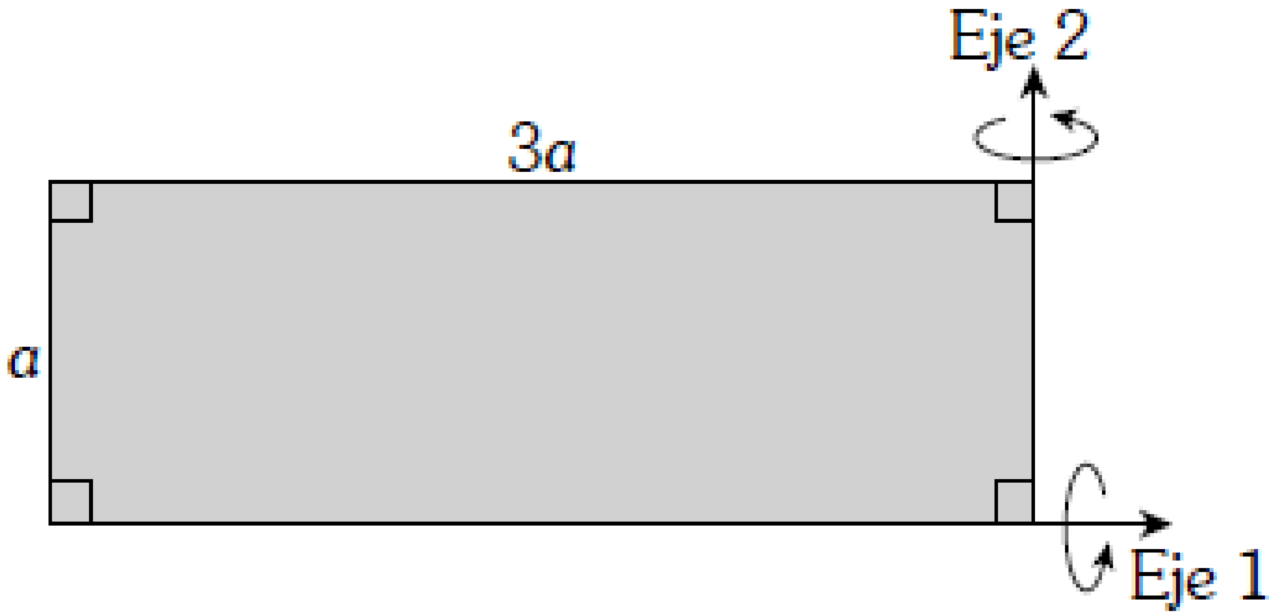
PROBLEMA 8 En la figura mostrada, la región rectangular al girar alrededor del eje 1 genera un sólido cuyo volumen es V_1 y al girar alrededor del eje 2 genera un sólido cuyo volumen es V_2. Calcule V_1 / V_2.

RESOLUCIÓN :

Piden: $\frac{V_1}{V_2}$

V_1 = Volumen generado por la región rectangular al girar a rededor del eje 1

V_2 = Volumen generado por la región rectangular al girar a rededor del eje 2



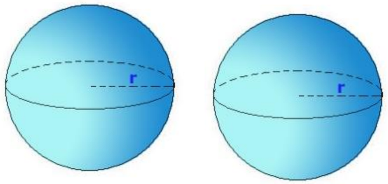
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi\, a^2 \,.\, 3\, a}{\pi\, (3a)^2 \,.\, a} = \frac{3\, \pi\, a^3}{9\, \pi\, a^3}$$

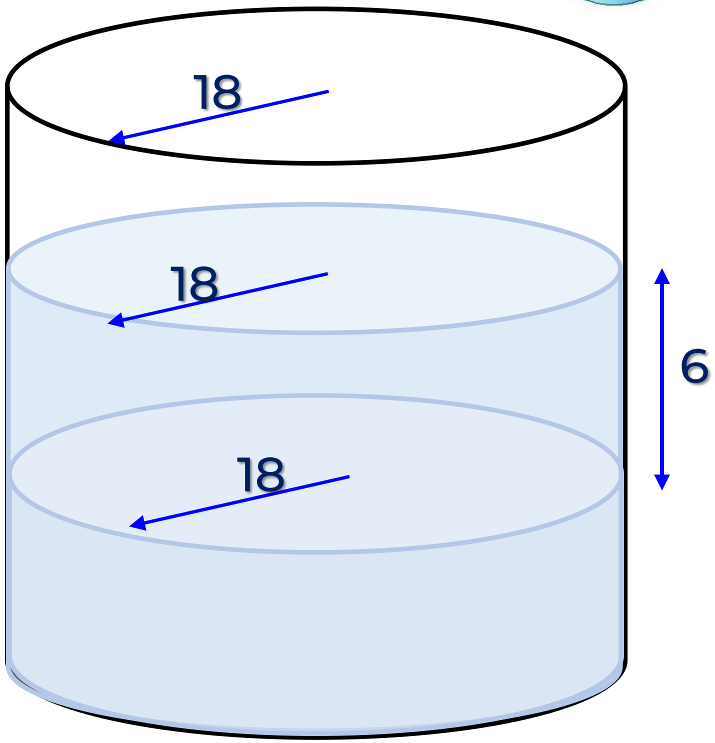
$$\therefore\ \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}}$$

PROBLEMA 9 En un vaso cilíndrico de 36 cm de diámetro, contiene cierta cantidad de agua, se colocan dos bolas de plomo de igual diámetro y el nivel del agua sube 6 cm. Calcule el radio de las bolas de plomo.

RESOLUCIÓN :

Piden: el radio de las bolas de plomo = r





Por teorema

Volumen del cuerpos sumergido = Volumen de la variación del nivel

2 V esferas = V cilindro

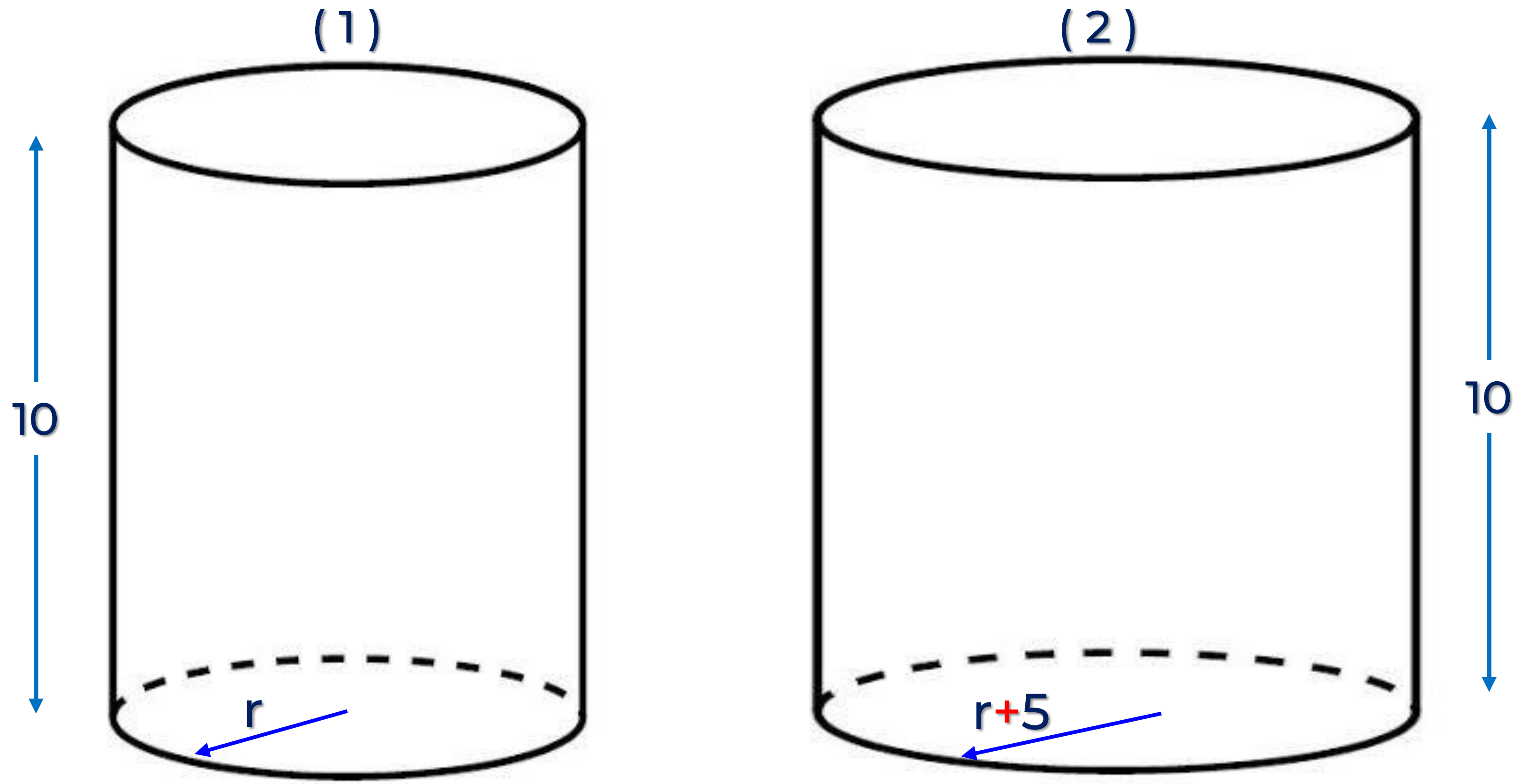
$$2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi (18)^2 \cdot 6$$

$$\boxed{\therefore\ r = 9cm}$$

PROBLEMA 10 Calcule la longitud del radio de la base de un cilindro de revolución de 10 cm de altura, sabiendo que si aumentan en 5 cm el radio de la base resulta un nuevo cilindro cuya área lateral es igual al área total del cilindro original.

RESOLUCIÓN

Piden: la longitud del radio de la base = r



Dato:

$$A_{SL(2)} = A_{ST(1)}$$

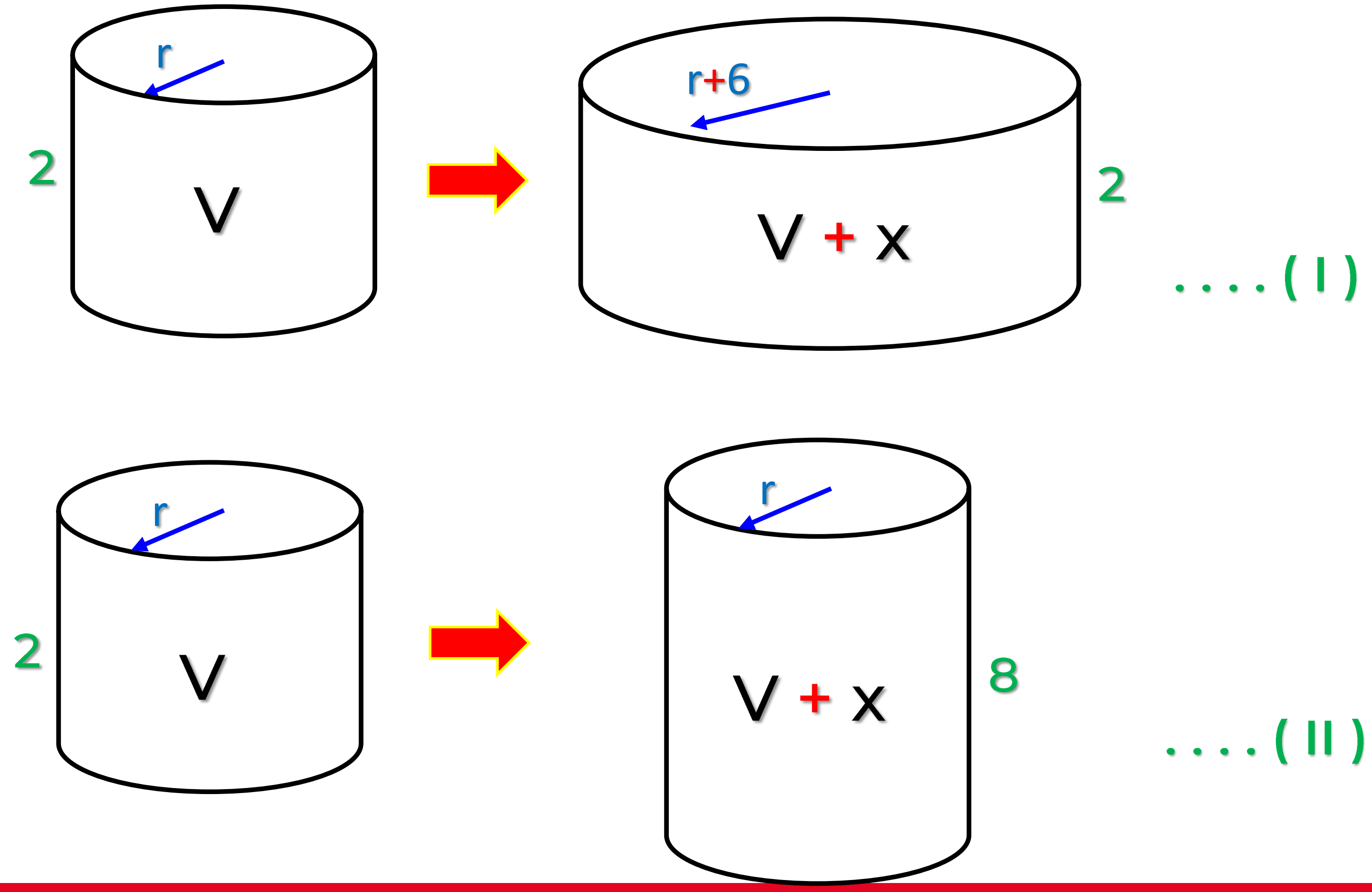
$$\cancel{2\pi}(r+5).10 = \cancel{2\pi}r(r+10)$$

$$\cancel{10r} + 50 = r^2 + \cancel{10r}$$

$$\boxed{\therefore r = 5\sqrt{2}\text{cm}}$$

PROBLEMA 11 Al aumentar el radio de un cilindro en 6 m, el volumen aumenta en xm^3, pero si aumentamos la altura del cilindro en 6 m, el volumen aumenta igualmente en xm^3. Si la altura original mide 2 m, calcule la longitud del radio original.

RESOLUCIÓN :



Piden: la longitud del radio original = r

- Igualamos (I) y (II)

$$\pi (r+6)^2 . 2 = \pi r^2 . (8)$$

$$(r+6)^2 = 4r^2$$

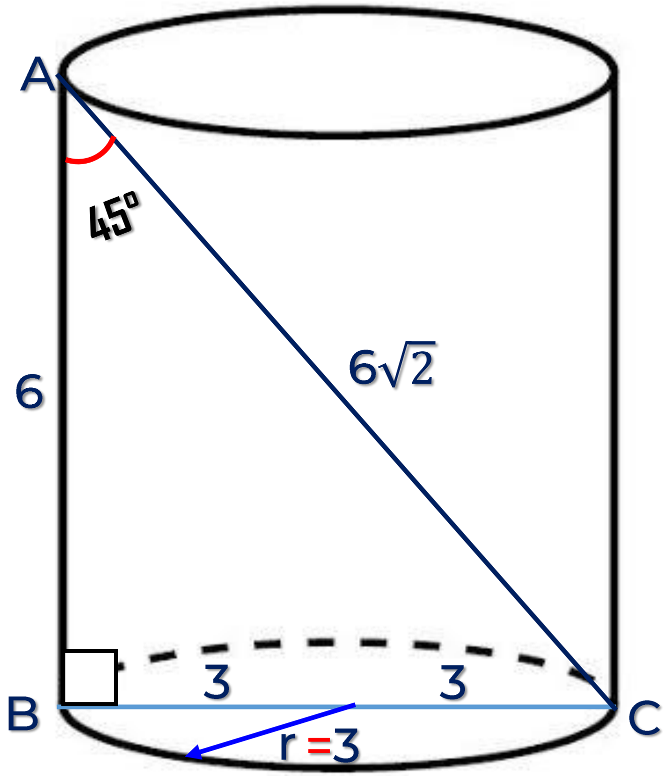
$$r+6 = 2r$$

$$\therefore r = 6m$$

PROBLEMA 12 El segmento que une los extremos de dos generatrices diametralmente opuestas de un cilindro circular recto mide $6\sqrt{2}$ cm, la longitud de la circunferencia de la base mide 6πcm, calcule el volumen del sólido determinado por el cilindro.

RESOLUCIÓN :

Piden: el volumen del sólido del cilindro = V



Dato:

- La longitud de la circunferencia de la base = 6π

$2\pi r = 6\pi \Rightarrow \boxed{r = 3}$

- El ⊿ ABC (notable 45°)

$\Rightarrow \boxed{AB = 6}$

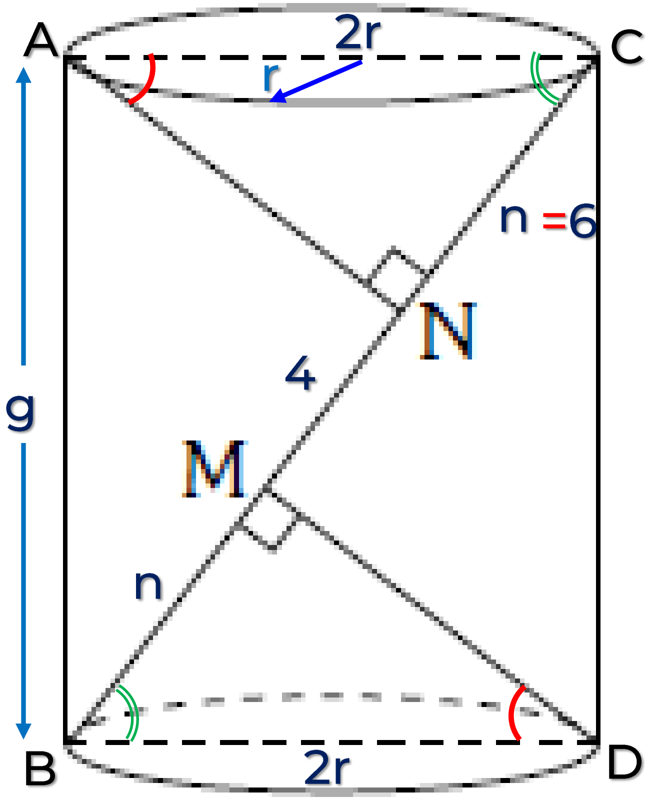
$V = \pi . 3^2 . 6$

$\therefore V = 54\pi \text{ cm}^3$

PROBLEMA 13 Calcule el área de la superficie lateral de un cilindro de revolución conociendo que la sustracción de los cuadrados de la generatriz y el diámetro de la base es 64, además, MN = 4.

RESOLUCIÓN :

Piden: el área de la superficie lateral del cilindro = A_{SL}



Dato: $g^2 - (2r)^2 = 64$

Del gráfico $\triangle ANC \cong \triangle DMB$ ⟹ $\boxed{NC = BM}$

- $\triangle BAC$: R. M. en $\triangle$ ⟹ $g^2 = (n + 4).(2n + 4)$ ... (I)
- $\triangle BDC$: R. M. en $\triangle$ ⟹ $(2r)^2 = (n).(2n + 4)$ ... (II)

Restamos: $\underline{g^2 - (2r)^2} = (2n + \cancel{4}).(n \cancel{+} 4 - n)$

$64 = (2n + 4).(4)$ ⟹ $\boxed{n = 6}$

- En (I): $g^2 = (n + 4).(2n + 4)$ ⟹ $\boxed{g = 4\sqrt{10}}$
- En (II): $(2r)^2 = (n).(2n + 4)$ ⟹ $\boxed{r = 2\sqrt{6}}$

$\boxed{A_{SL} = 2\pi r.g}$

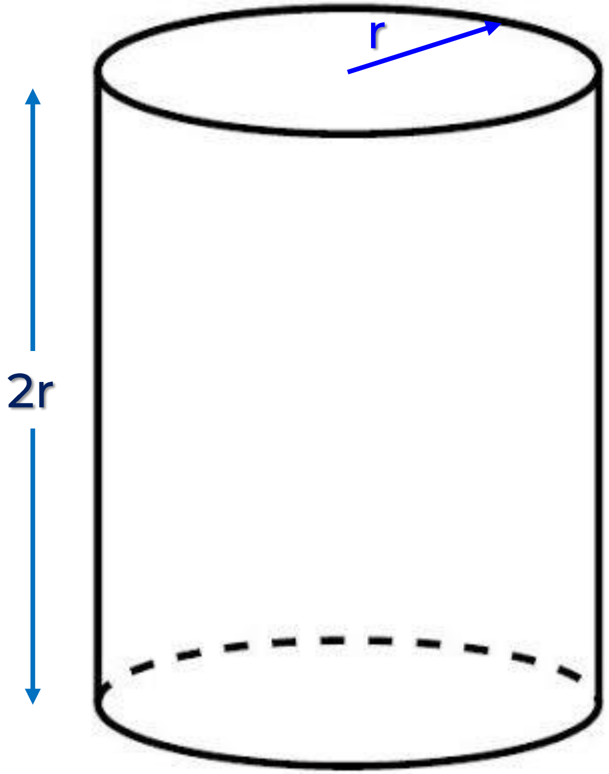
$A_{SL} = 2\pi.2\sqrt{6}.(4\sqrt{10})$.

$\boxed{\therefore A_{SL} = 32\sqrt{15}\,\pi \ u^2}$

PROBLEMA 14 En un cilindro de revolución el diámetro de la base y la generatriz son congruentes. Calcule la razón entre las áreas de las superficies lateral y total del cilindro.

RESOLUCIÓN :

Piden: $\dfrac{A_{SL}}{A_{ST}}$



$$\frac{A_{SL}}{A_{ST}} = \frac{2\pi . r . (2r)}{2\pi . r . (r + 2r)}$$

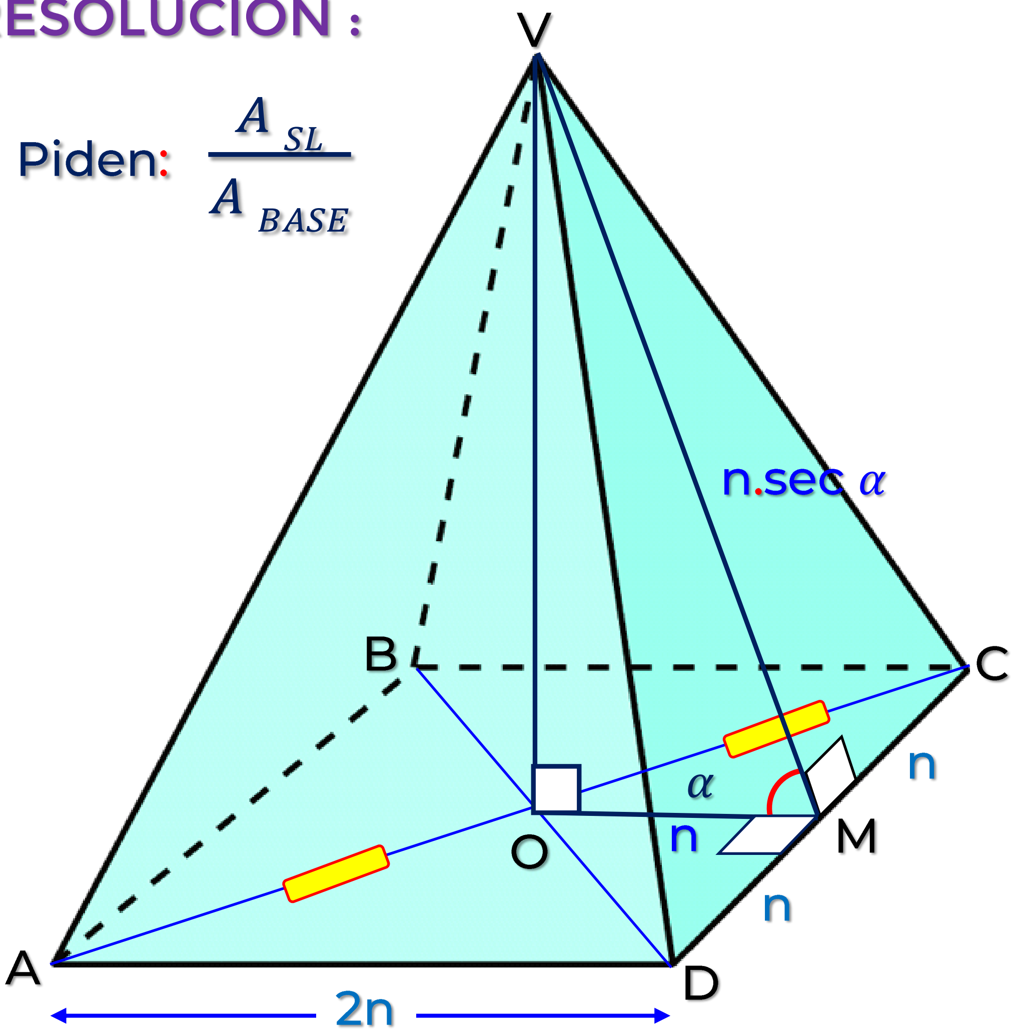
$$= \frac{4\pi . r^2}{6\pi . r^2}$$

$$\therefore \quad \frac{A_{SL}}{A_{ST}} = \frac{2}{3}$$

PROBLEMA 15 En una pirámide cuadrangular regular, la medida del ángulo diedro determinado por una cara lateral y el plano de la base es α. Calcule la razón de área de la superficie lateral y de la base de dicha pirámide.

RESOLUCIÓN :

Piden: $\dfrac{A_{SL}}{A_{BASE}}$



Dato: Se tiene una pirámide regular

- Trazo $\overline{VO} \perp$ ABCD y $\overline{OM} \perp \overline{CD}$

  → $\overline{VM} \perp \overline{CD}$

- Sea AD = 2n

- En el Δ ADC: $\overline{OM}$ base media → OM = n

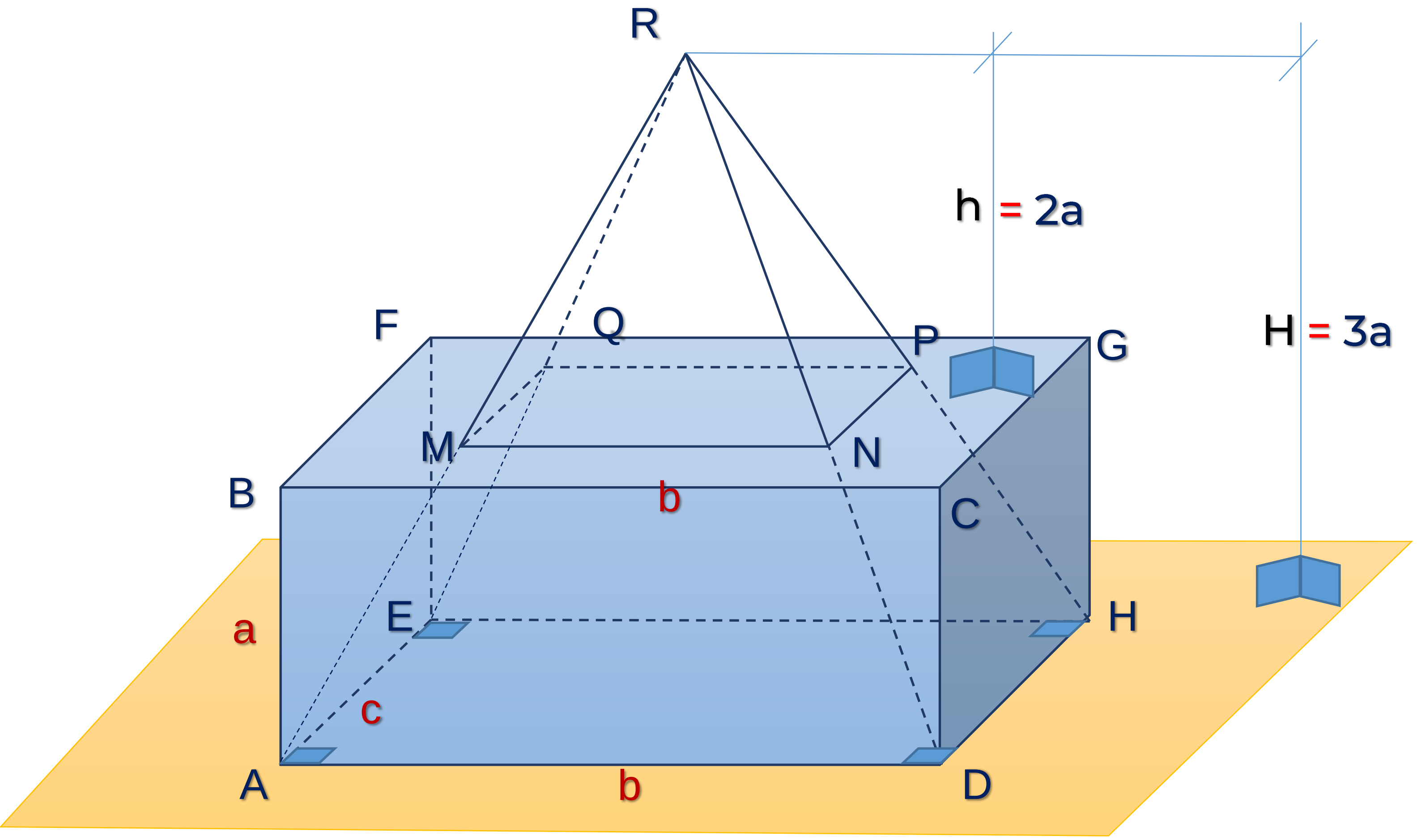
- En el ⊿ VOM: → VM = n. sec α

$$\frac{A_{SL}}{A_{BASE}} = \frac{(n\sec\alpha).(4n)}{(2n)^2}$$

$$\therefore \frac{A_{SL}}{A_{BASE}} = \text{Sec } \alpha$$

PROBLEMA 16 Un paralelepípedo rectangular recto ABCD - EFGH, es equivalente a la pirámide R - ADHE. Si $\overline{RA}$, $\overline{RD}$, $\overline{RH}$ y $\overline{RE}$ intersecan a la cara BCGF en los puntos M; N; P y Q, respectivamente, y AB = *a*, BC = *b* y AE = *c*, calcule el volumen del sólido determinado por la pirámide R - MNPQ.

RESOLUCIÓN : Piden: el volumen de la pirámide R - MNPQ = V_{R-MNPQ}



Dato:

$$V_{\substack{\text{PIRAMIDE}\\ \text{R - ADHE}}} = V_{\text{Paralelepípedo}}$$

$$\frac{b\,.\,c\,.\,H}{3} = a\,.\,b\,.c$$

$$\boxed{H = 3\,a}$$

$$\frac{V_{R\_MNPQ}}{V_{R\_ADHE}} = \left(\frac{2a}{3a}\right)^3$$

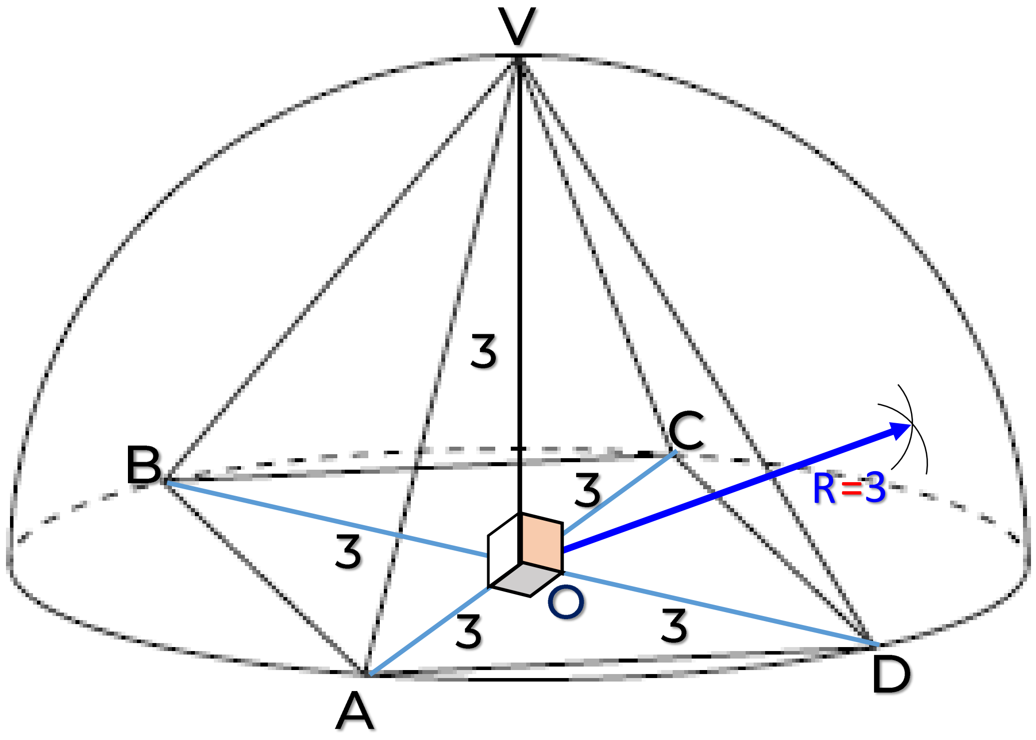
$$\frac{V_{R\_MNPQ}}{\frac{b\,.\,c\,.\,3a}{3}} = \frac{8}{27}$$

$$\therefore\ V_{R-MNPQ} = \frac{8}{27}\,a.b.c\ u^3$$

PROBLEMA 17 Calcule el volumen del sólido determinado por la pirámide regular inscrita en la semiesfera si el volumen de esta es $18\pi u^3$.

RESOLUCIÓN :

Piden: el volumen de la pirámide cuadrangular = V



Dato:

- $V_{\text{semi esfera}} = 18\pi$

$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 18\pi \Rightarrow \boxed{R = 3}$

- Trazo las diagonales de la base del cuadrado

$\overline{VO} \perp \square ABCD$

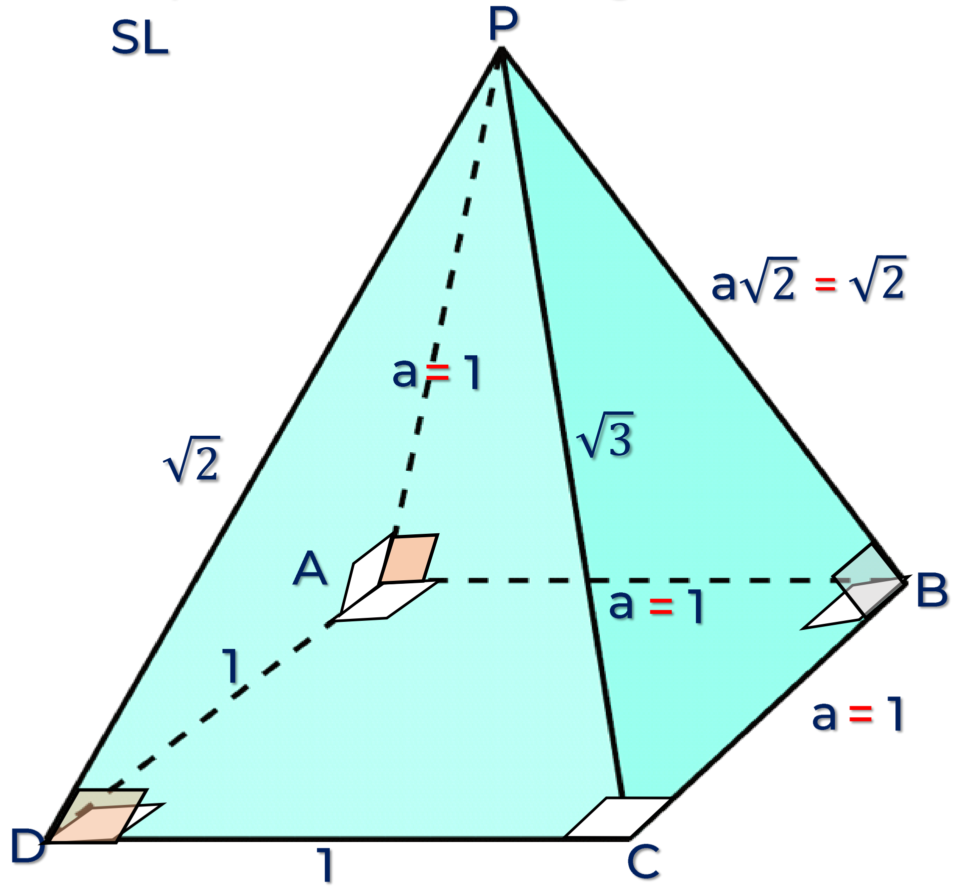
- $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6^2}{2}\right) \cdot 3$

$\boxed{\therefore V = 18\ u^3}$

PROBLEMA 18 Calcule el área de la superficie lateral de la pirámide P - ABCD de base cuadrada , si A es la proyección ortogonal de P, PA = AB y PC = $\sqrt{3}$ cm.

RESOLUCIÓN :

Piden: el área de la superficie lateral de la pirámide cuadrangular = A_{SL}



Dato: ABCD es un cuadrado

- $\overline{PA} \perp$ ▱ ABCD y $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ➡ $\overline{PB} \perp \overline{CB}$
- En el ⊿ PBC (Teor. Pitágoras)

$$(a\sqrt{2})^2 + a^2 = \sqrt{3}^2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

- En el Δ PDC

$$(\sqrt{2})^2 + 1^2 = \sqrt{3}^2 \Rightarrow \boxed{m\measuredangle PDC = 90°}$$

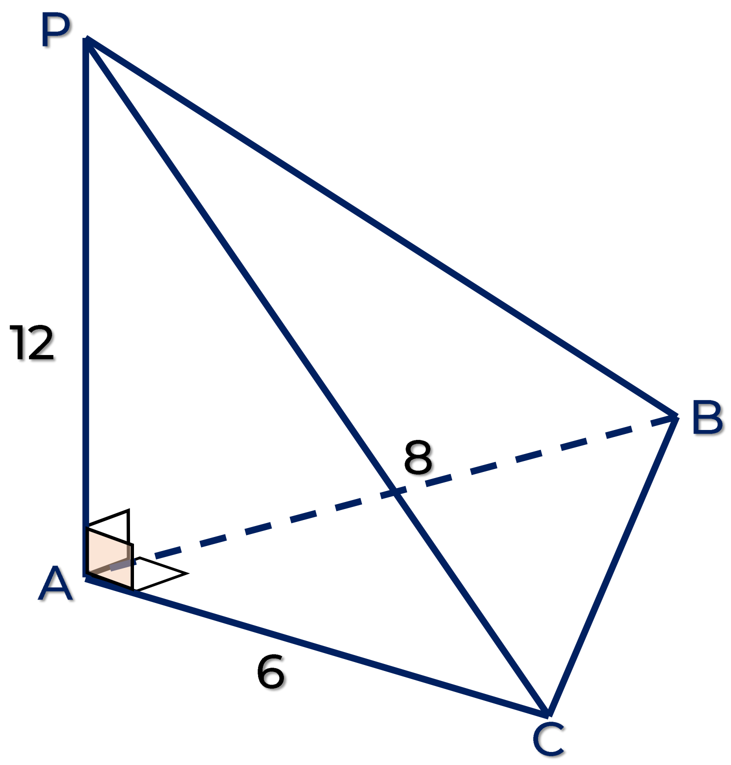
$$A_{SL} = \frac{\sqrt{2}\,.\,1}{2} + \frac{\sqrt{2}\,.\,1}{2} + \frac{1\,.\,1}{2} + \frac{1\,.\,1}{2}$$

$$\boxed{\therefore A_{SL} = \sqrt{2} + 1 \text{ cm}^2}$$

PROBLEMA 19 Las aristas laterales de una pirámide de base triangular son perpendiculares entre sí y miden 6; 8 y 12. Calcule el volumen de sólido determinado por la pirámide.

RESOLUCIÓN :

Piden: el volumen del sólido determinado por la pirámide = V



Volumen

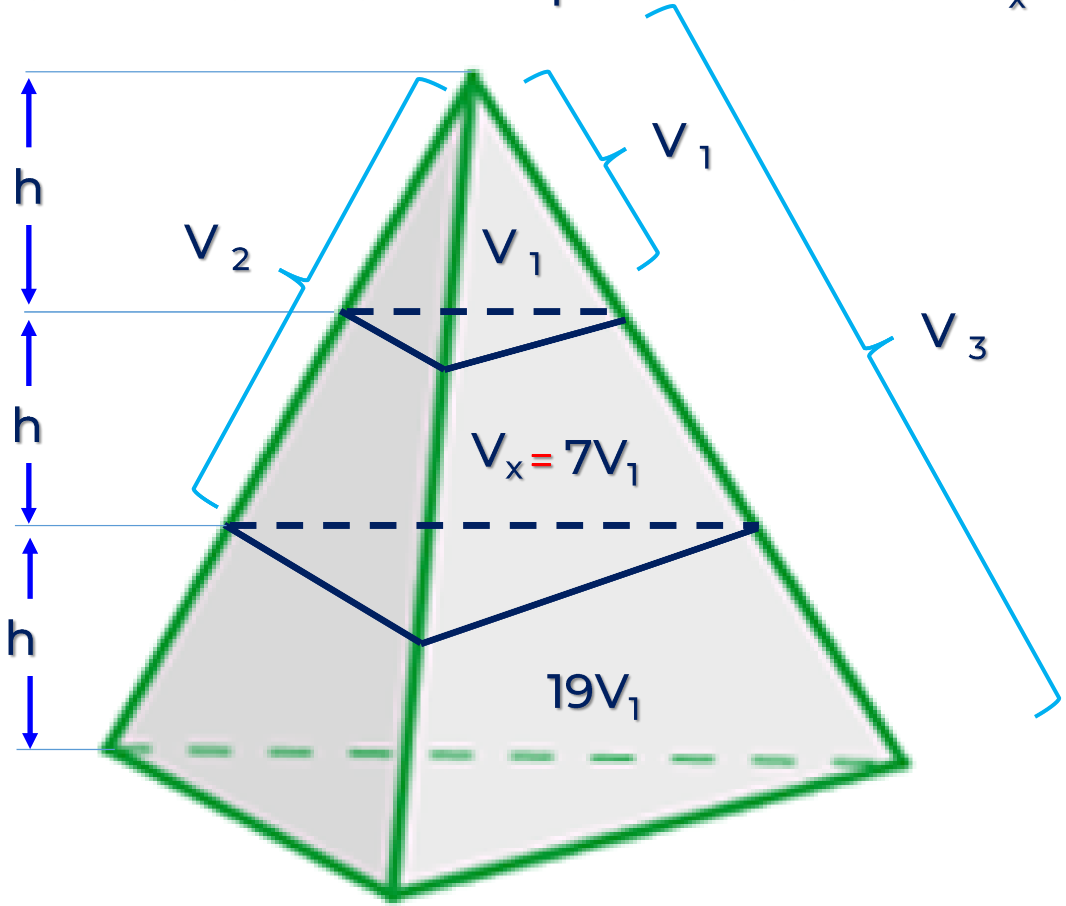
- $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6 \cdot 8}{2}\right) \cdot 12$

$$\therefore V = 96 \ u^3$$

PROBLEMA 20 En una pirámide de 27 m^3 de volumen, se trazan dos planos secantes paralelos que dividen a la altura en tres segmentos congruentes. Calcule el volumen de la porción central.

RESOLUCIÓN :

Piden: el volumen de la porción central = V_x



- Considero una pirámide triangular

Dato: $V_3 = 27$

$$\frac{V1}{V2} = \left(\frac{h}{2h}\right)^3 = \frac{1}{8} \qquad \frac{V1}{V3} = \left(\frac{h}{3h}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

- Del gráfico

$$19\,V_1 + 7\,V_1 + V_1 = V_3$$

$$27\,V_1 = 27 \Rightarrow \boxed{V_1 = 1}$$

$\Rightarrow$ $V_x = 7\,V_1$

$$\boxed{\therefore V_x = 7\ m^3}$$