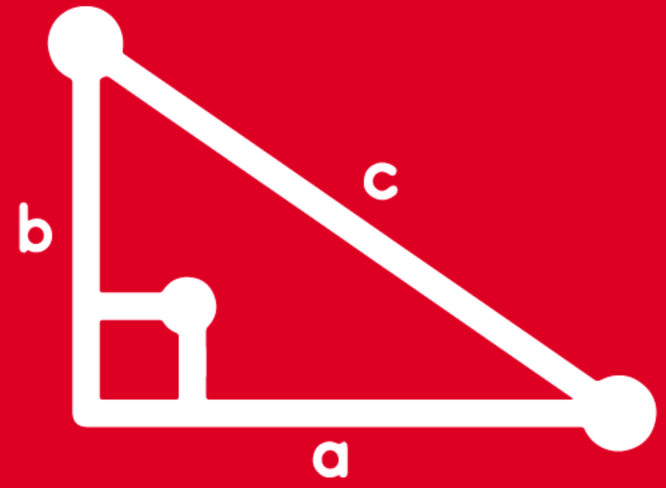
TRIGONOMETRY

VERANO UNI

Capitulo 3

REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE,CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA



SACO OLIVEROS

HELICO-MOTIVACIÓN

El **Canadarm 2** , es un brazo manipu-lador robótico de la *Estación Espacial Internacional*. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones. Calcular la posición final del astronauta en el extremo del brazo requiere un uso repetido de las razones trigonométricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

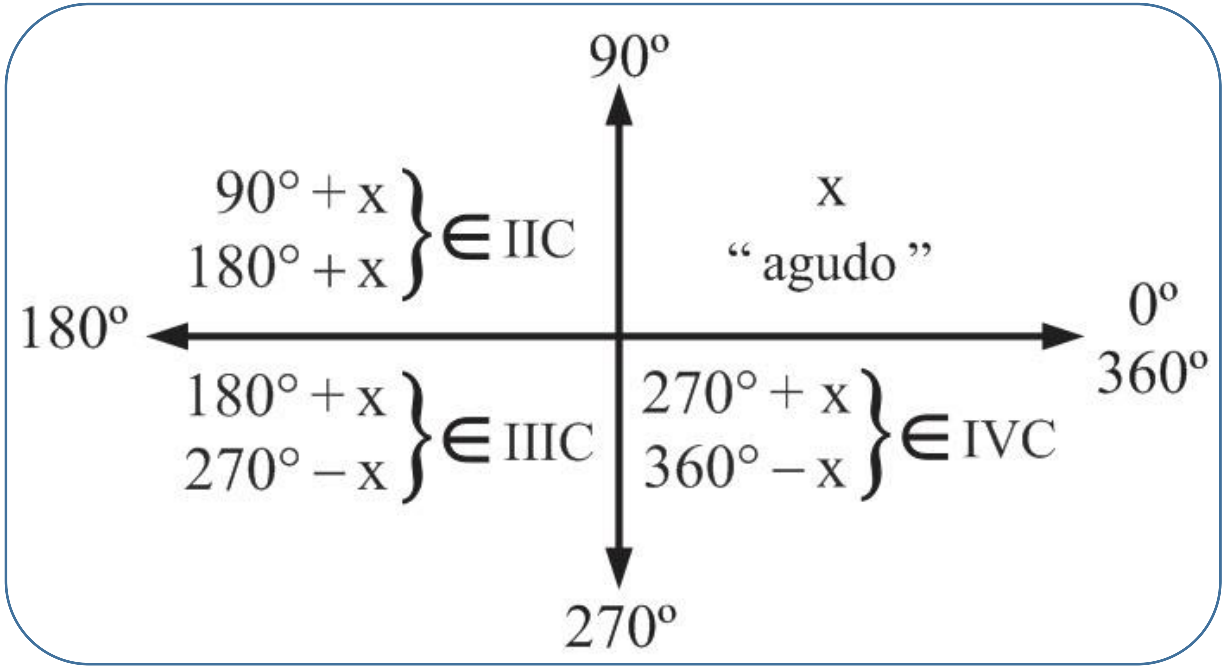
REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Reducir al primer cuadrante implica encontrar un equivalente de la razón trigonométrica de un ángulo que pertenece al IIC , IIIC o IVC a otro ángulo que se encuentre en el IC .

Para hallar dicho equivalente descomponemos el ángulo en términos de los ángulos cuadrantales (90º , 180º , 270º , 360º) .

1º CASO : Para ángulos positivos menores a una vuelta

Considerando al ángulo “ x ” como agudo , ubicamos a los otros ángulos en sus respectivos cuadrantes , así :

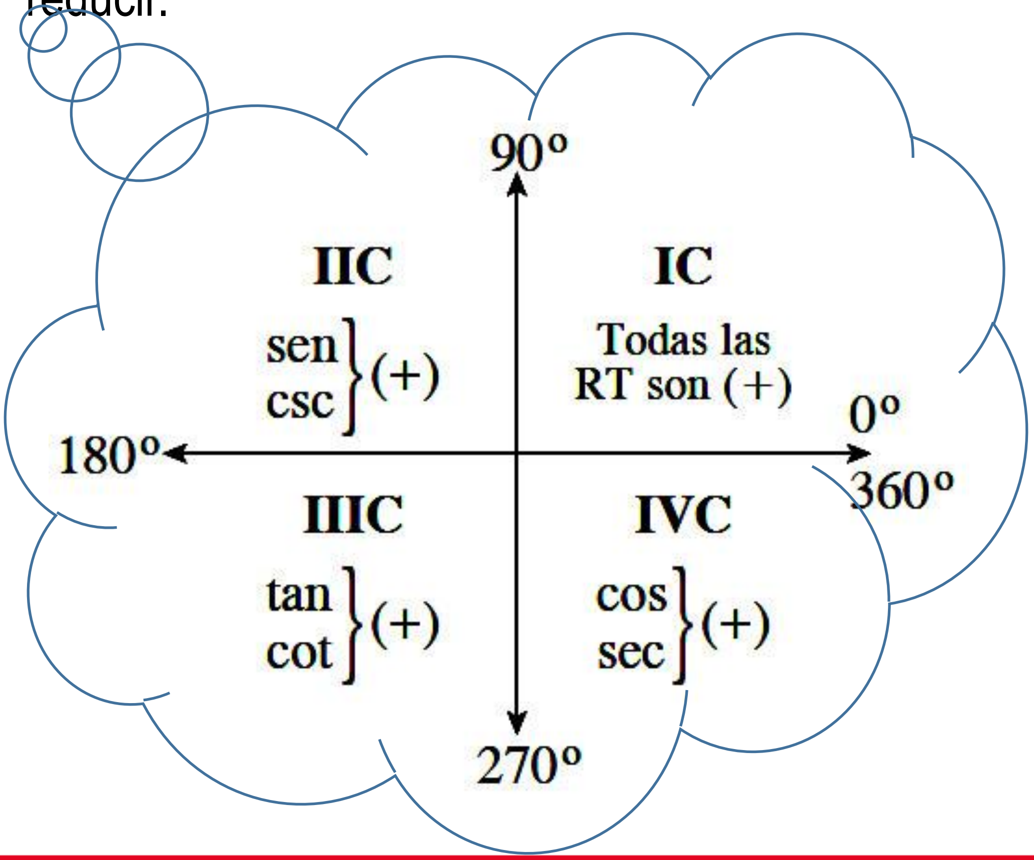


Luego , según corresponda , usamos :

$$RT\begin{pmatrix}180^\circ \pm x\\360^\circ - x\end{pmatrix} = (\pm)RT(x)$$

$$\mathrm{RT}\begin{pmatrix} 90^\circ + x \\ 270^\circ \pm x \end{pmatrix} = (\pm)\,\mathrm{Co\text{-}RT}(x)$$

Donde el signo $(\pm)$ del segundo miembro depende de la RT y el cuadrante al cual pertenece el ángulo a reducir.



***Ejemplos*:**

- $\operatorname{sen}(\underbrace{180^\circ + x}_{\mathrm{IIIC}}) = -\operatorname{sen} x$
- $\tan(\underbrace{90^\circ + x}_{\mathrm{IIC}}) = -\cot x$
- $\cos(\underbrace{360^\circ - x}_{\mathrm{IVC}}) = +\cos x$
- $\operatorname{sen}(\underbrace{270^\circ - x}_{\mathrm{IIIC}}) = -\cos x$
- $\operatorname{sen}120^\circ = \operatorname{sen}(\underbrace{180^\circ - 60^\circ}_{\mathrm{IIC}}) = +\operatorname{sen}60^\circ$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\tan307^\circ = \tan(\underbrace{270^\circ + 37^\circ}_{\mathrm{IVC}}) = -\cot37^\circ$

$$\Rightarrow \tan307^\circ = -\frac{4}{3}$$

- $\operatorname{sen}100^\circ = \operatorname{sen}(\underbrace{90^\circ + 10^\circ}_{\mathrm{IIC}}) = +\cos10^\circ$

2º CASO : Para ángulos negativos

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$	$\csc(-x) = -\csc(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sec(-x) = \sec(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\cot(-x) = -\cot(x)$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}(-30^\circ) = -\operatorname{sen}30^\circ = -\dfrac{1}{2}$
- $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan(-120^\circ) = -\tan 120^\circ = -\tan(\underbrace{180^\circ - 60^\circ}_{IIC})$

$= -(-\tan 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

3º CASO : Para ángulos mayores a una vuelta

$$\boxed{RT(360^\circ k + x) = RT(x)} \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

En este caso se eliminan el número entero de vueltas y la razón no cambia.

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}420^\circ = \operatorname{sen}(360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{sen}60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 800^\circ = \cos(360^\circ x 2 + 80^\circ) = \cos 80^\circ$
- $\tan 1485^\circ = \tan(360^\circ x 4 + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$

OBSERVACION 1 :
Para eliminar el número de vueltas de un ángulo , lo dividimos entre 360º y solo usamos el residuo.

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}1110^\circ = \operatorname{sen}30^\circ = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} 1110 & 360 \\ \hline 1080 & 3 \\ \hline 30 & \end{array}$$

- $\tan 4340^\circ = \tan 20^\circ$

$$\begin{array}{r|l} 4340 & 360 \\ \hline 360 & 12 \\ \hline 740 & \\ 720 & \\ \hline 20 & \end{array}$$

OBSERVACION 2 :

Los múltiplos de 2π (pares de π), representan vueltas y se eliminan.

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}(\cancel{6\pi} + x) = \operatorname{sen} x$
- $\cos(15\pi + x) = \cos(\cancel{14\pi} + \pi + x) = \overset{\text{IIIC}}{-}\cos x$

OBSERVACION 3 :

Para eliminar las vueltas de un ángulo $\dfrac{a\pi}{b}$,

hacer $\dfrac{a}{2b}$, hallando el cociente q y residuo r.

Luego eliminando las vueltas , queda $\dfrac{r\pi}{b}$

Ejemplos :

- $\cos\left(\dfrac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$a = 25$; $b = 3$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \hline 24 & 4 = q \\ \hline r = 1 & \end{array}$$

- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{44\pi}{7}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$

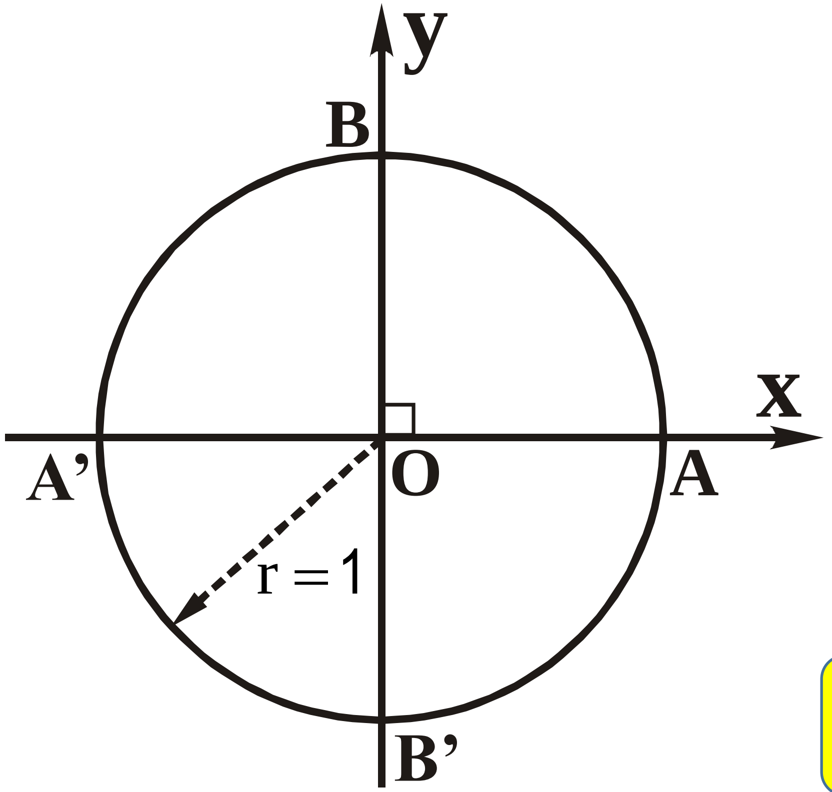
$a = 44$; $b = 7$

$$\begin{array}{r|l} 44 & 14 \\ \hline 42 & 3 = q \\ \hline r = 2 & \end{array}$$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA I

Definición :

La circunferencia trigonométrica (CT) es aquella circunferencia inscrita en el plano cartesiano con centro en el origen y radio igual a la unidad.



Ecuación de la CT :

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

Elementos de la CT :

$A(1;0)$: Origen de arcos

$B(0;1)$: Origen de complementos

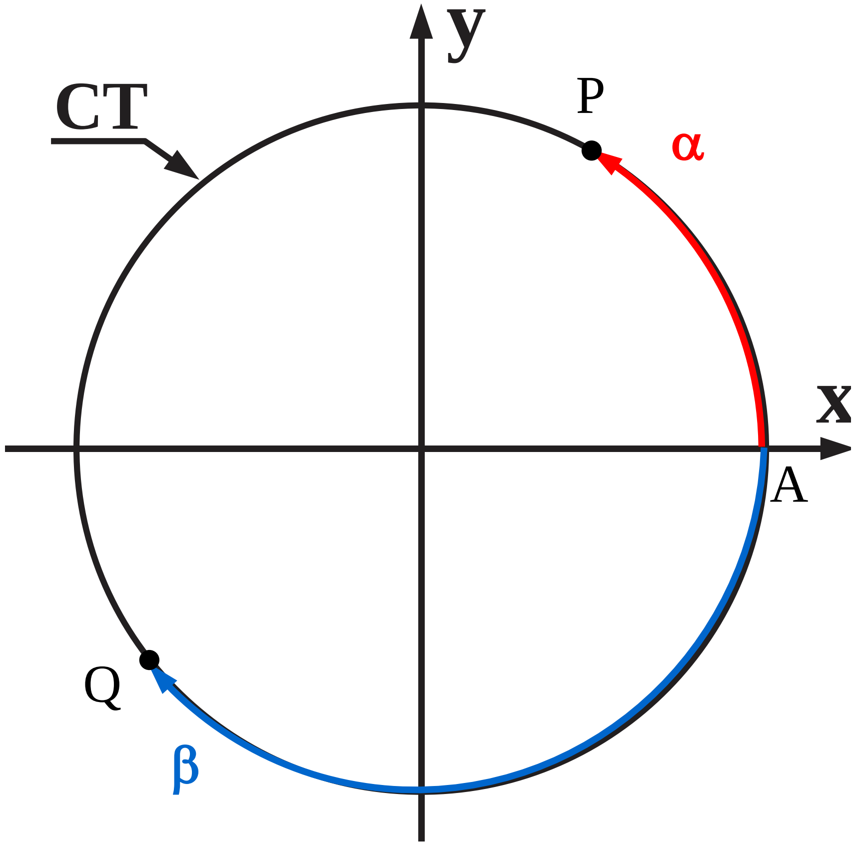
$A'(-1;0)$: Origen de suplementos

$B'(0;-1)$: Sin nombre especial

Arcos dirigidos en posición normal :

También llamados en posición estándar , son aquellos arcos que se generan a partir del Origen de arcos en una CT. Si el sentido del arco es en sentido antihorario el arcos será positivo, en caso contrario será negativo.

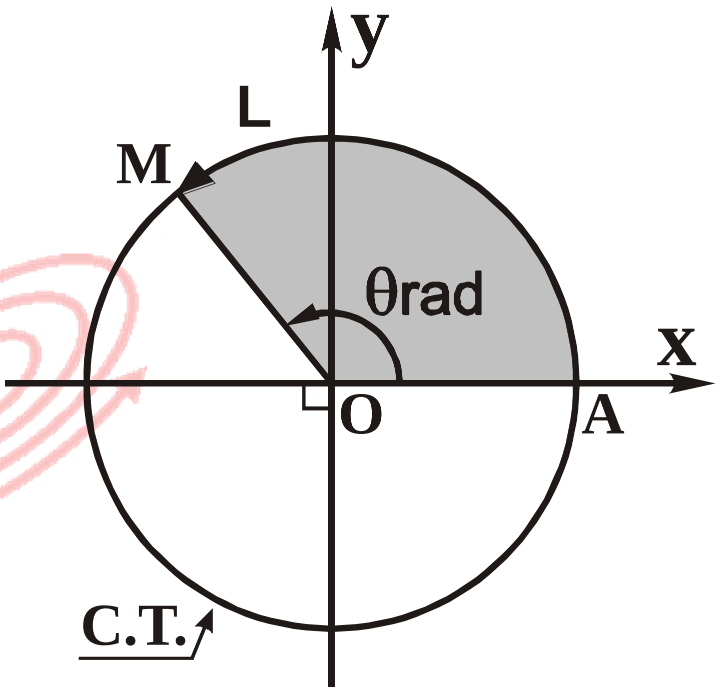
El extremo del arco indica el cuadrante al cual pertenece el arco.



- P es el punto extremo del arco α en posición normal $;\ \alpha \in IC$
- Q es el punto extremo del arco β en posición normal $;\ \beta \in IIIC$

Números Reales en la CT :

En la figura siguiente se muestra un arco dirigido en posición normal " **L**" que subtiende un ángulo θ rad.



Por teoría de longi-tud de arco en el sector AOM se cumple : $\mathbf{L} = \theta r$

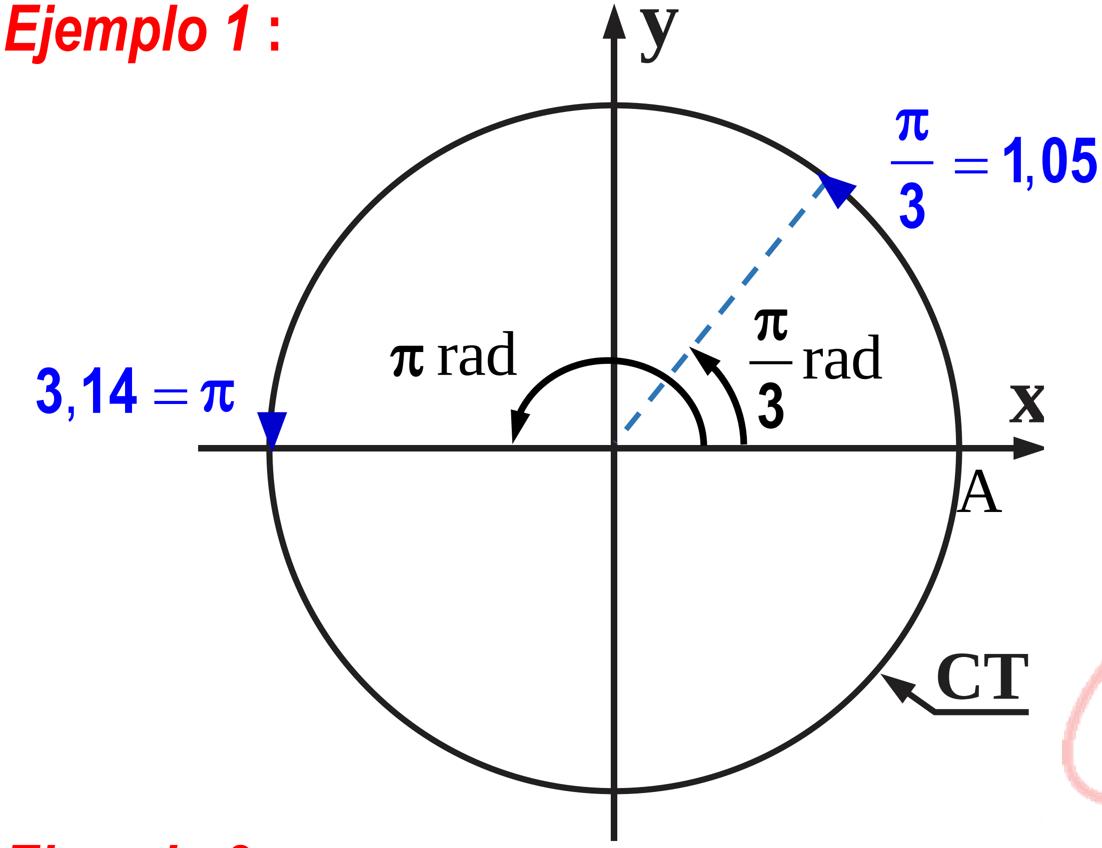
Pero en la CT ; $r = 1$

Por lo tanto: $\mathbf{L} = \theta$

CONCLUSIÓN :

En una CT , la longitud de arco es numericamente igual a su correspondiente ángulo en posición normal expresado en radianes.

Ejemplo 1 :



Usando la aproximación $1\ \text{rad} = 57^\circ$, en la CT , graficamos los ángulos :

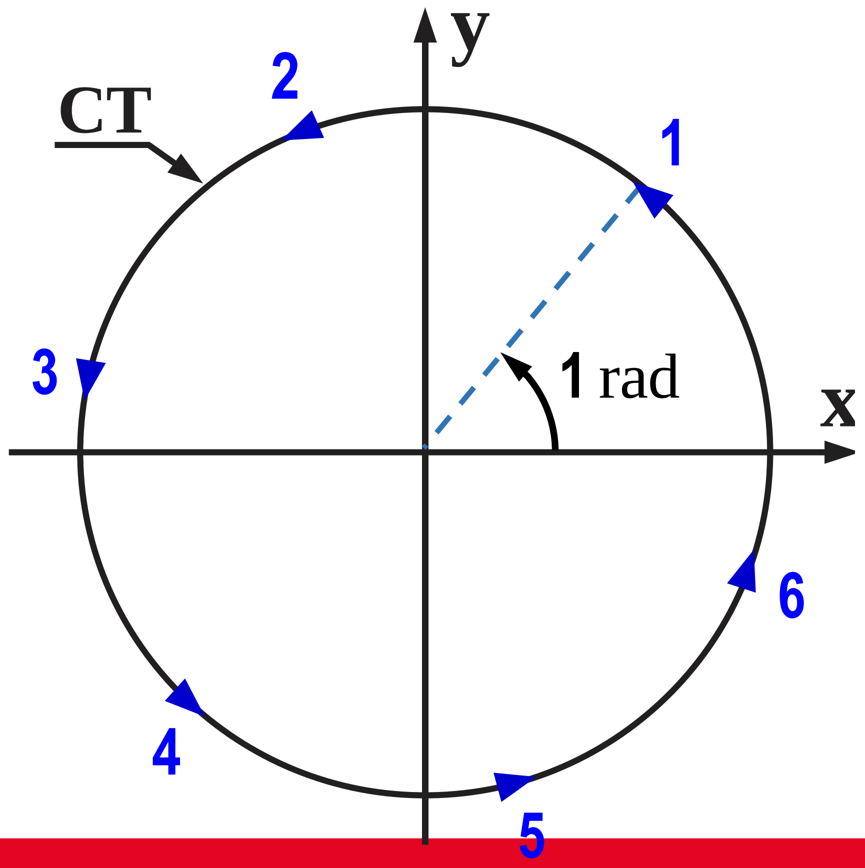
$1\ \text{rad} = 57^\circ$ $\quad 2\ \text{rad} = 114^\circ$ $\quad 3\ \text{rad} = 171^\circ$

$4\ \text{rad} = 228^\circ$ $\quad 5\ \text{rad} = 285^\circ$ $\quad 6\ \text{rad} = 342^\circ$

Ejemplo 2 :

Ubicar en una CT , los números 1 , 2 , 3 , 4 , 5 y 6

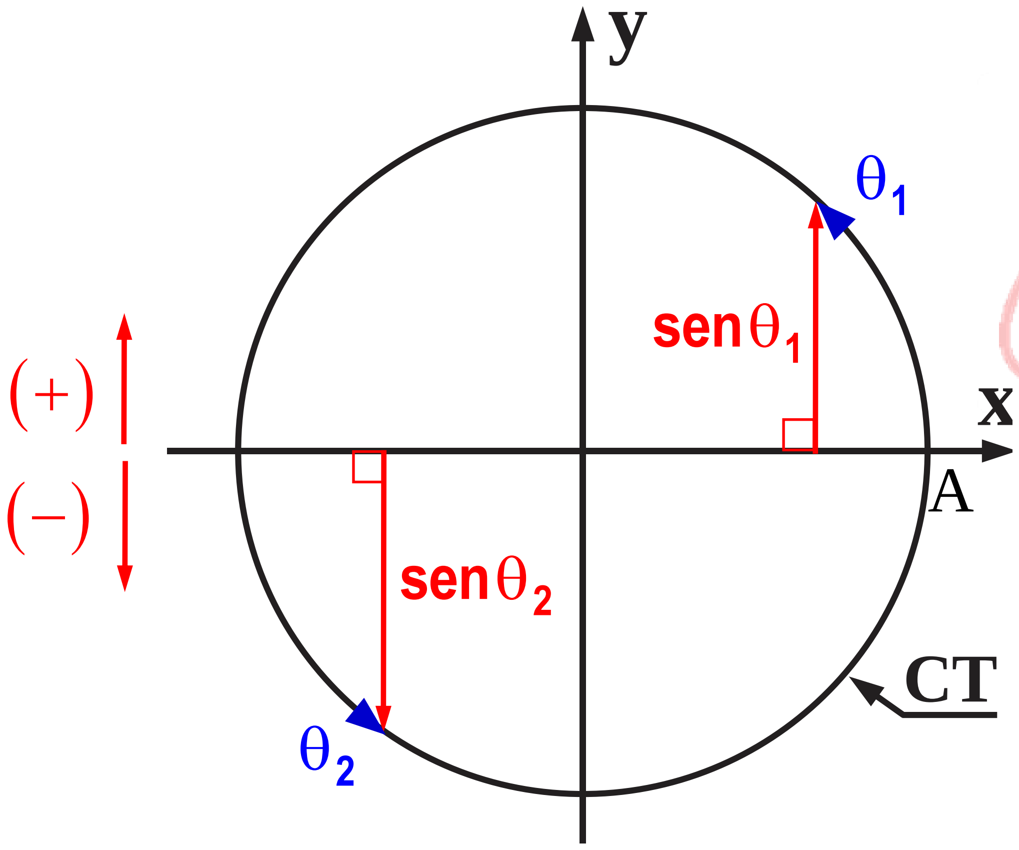
Resolución :



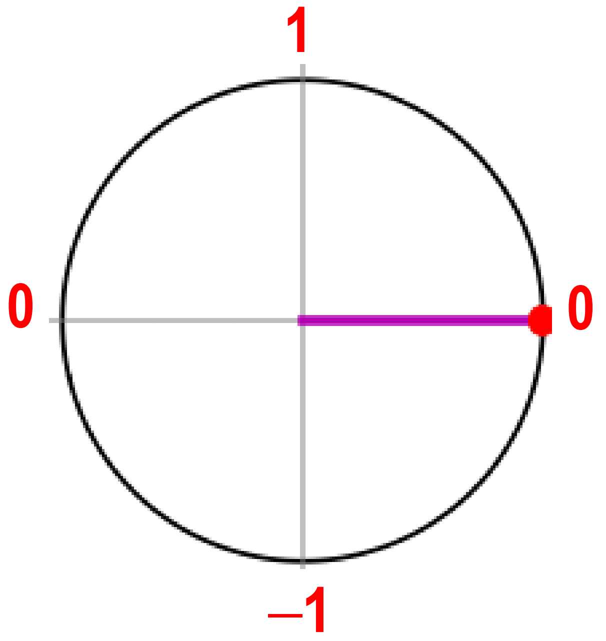
REPRESENTACIONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CT :

1. El seno :

El seno de un arco es **la ordenada** de su extremo.



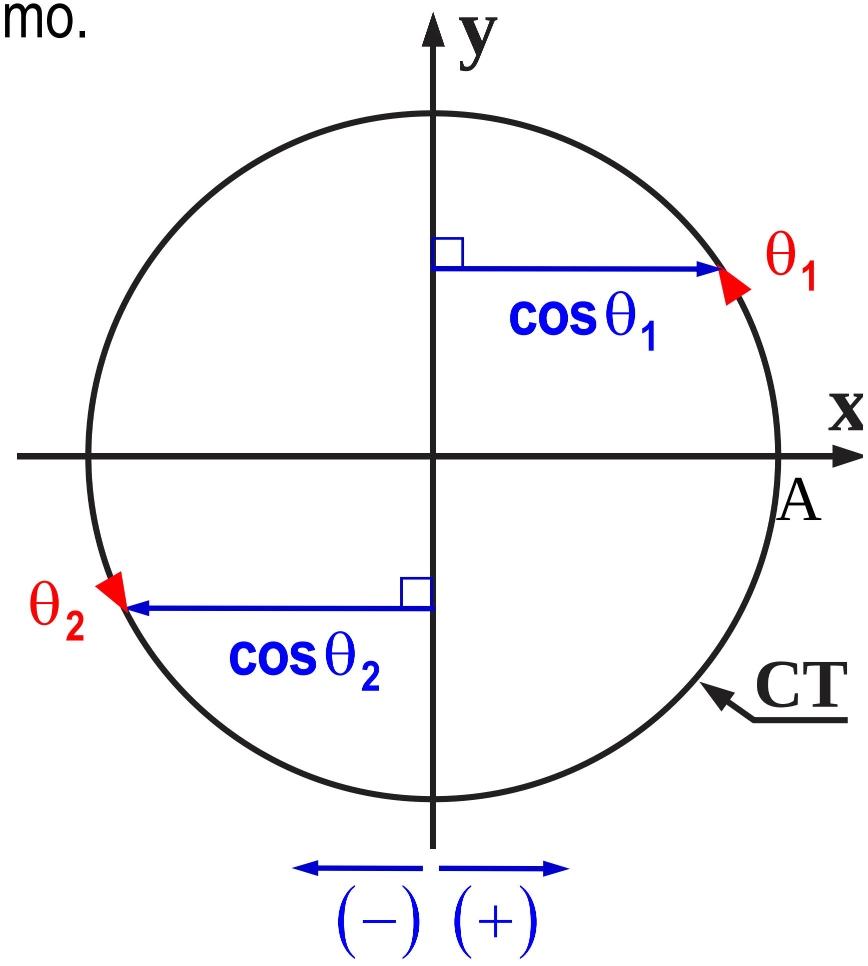
La siguiente gráfica , muestra la variación del seno en cada cuadrante y sus valores en los ángulos cuadrantales.

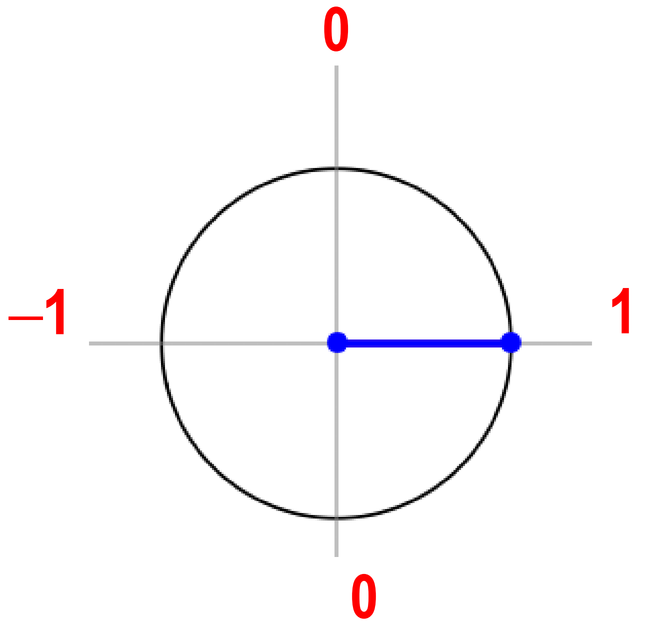


En general : $\forall \theta \in \mathbb{R} \;\; \Rightarrow -1 \leq \text{sen}\theta \leq 1$

2. El coseno :

El coseno de un arco es **la abscisa** de su extremo.



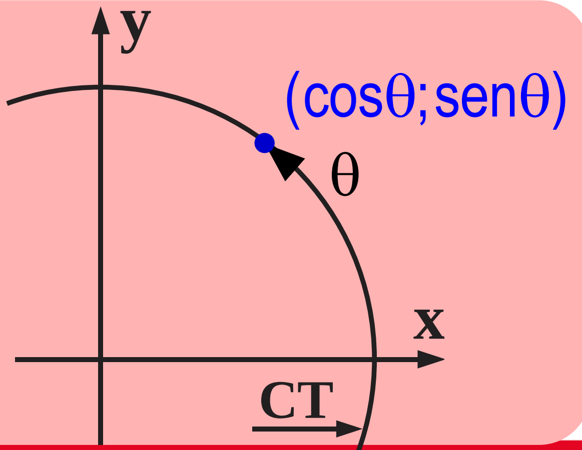


La siguiente gráfica , muestra la variación del coseno en cada cuadrante y sus valores en los ángulos cuadrantales.

En general : $\forall\theta\in\mathbb{R} \Rightarrow -1\leq\cos\theta\leq 1$

NOTA :

En la CT , las coordenadas del extremo del arco θ es : $(\cos\theta;\operatorname{sen}\theta)$



HELICO-PRACTICE 1

Determine el valor de

$$H = 4\cos 120° + \sqrt{2}\,\text{sen}135°$$

Recordamos

$$\boldsymbol{RT\left(\begin{matrix}180°\\360°\end{matrix} \pm \alpha\right) = \pm\, RT(\alpha)}$$

$$\boldsymbol{RT\left(\begin{matrix}90°\\270°\end{matrix} \pm \alpha\right) = \pm CO - RT(\alpha)}$$

Resolución

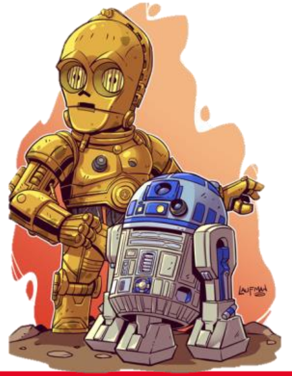
$$\mathbf{H} = 4\underbrace{\cos(180° - 60°)}_{\textbf{IIC}} + \sqrt{2}\underbrace{\text{sen}(180° - 45°)}_{\textbf{IIC}}$$

$$\mathbf{H} = -4\cos(60°) + \sqrt{2}\,\text{sen}(45°)$$

$$\mathbf{H} = \cancel{-4}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + \cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\mathbf{H} = -2 + 1$$

$$\mathbf{H = -1}$$



HELICO-PRACTICE 2

Calcule

$$C = \cos 40° + \cos 80° + \cos 100° + \cos 120° + \cos 140°$$

Resolución

$$C = \cos 40° + \cos 80° + \cos 100° + \cos 120° + \cos 140°$$

$$\cos 100° = \cos(\underbrace{180° - 80°}_{IIC}) = -\cos 80°$$

$$\cos 120° = \cos(\underbrace{180° - 60°}_{IIC}) = -\cos 60° = -1/2$$

$$\cos 140° = \cos(\underbrace{180° - 40°}_{IIC}) = -\cos 40°$$

$$C = \cancel{\cos 40°} + \cancel{\cos 80°} + (-\cancel{\cos 80°}) + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-\cancel{\cos 40°}) \longrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Recordamos

$$RT\left(\begin{matrix}180° \\ 360°\end{matrix} \pm \alpha\right) = \pm RT(\alpha)$$

$$RT\left(\begin{matrix}90° \\ 270°\end{matrix} \pm \alpha\right) = \pm CO - RT(\alpha)$$

HELICO-PRACTICE 3

Calcule

$$R = \underbrace{\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots}_{(180\ \text{términos})}$$

Analizamos

$\cos 180° = -1$

$\cos 179° = -\cos 1°$

$\cos 178° = -\cos 2°$

$\cos 177° = -\cos 3°$

$\vdots$

$\cos 91° = -\cos 89°$

$\cos 90° = 0$

Sabemos

Si $x + y = 180°$

$\cos x = -\cos y$

Resolución

$$\mathbf{R} = \cos 1° + \cos 2° + \cdots + \cos 90° + \cdots + \cos 179° + \cos 180°$$

$$\mathbf{R} = \cancel{\cos 1°} + \cancel{\cos 2°} + \cdots + \cos 90° + \cdots + (-\cancel{\cos 2°}) + (-\cancel{\cos 1°}) + (-1)$$

$$\mathbf{R} = \cos 90° + (-1)$$

$$\mathbf{R} = 0 + (-1)$$

¡Muy bien!

$$\mathbf{R = -1}$$

HELICO-PRACTICE 4

En un triángulo ABC se cumple

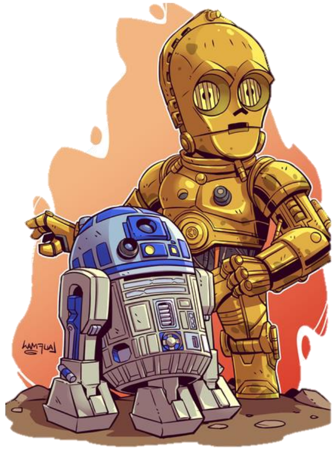
$\operatorname{sen}(B + C) = \cos C$ ...I

Dicho triángulo es

Sabemos

Si $x + y = 180°$

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$



Resolución

$A + B + C = 180°$ ⟶ $\operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen}(A)$ ...II

Reemplazamos I en II

$\operatorname{sen}(A) = \cos(C)$

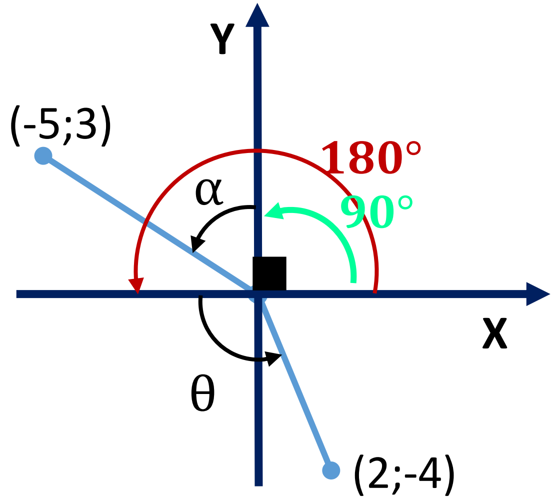
⟶ $A + C = 90°$

$\therefore B = 90°$

ABC es un triángulo rectángulo

HELICO-PRACTICE 5

A partir del gráfico mostrado, obtenga el valor de $\tan\alpha.\cot\theta$



Recordamos

$$\mathrm{RT}\left(\begin{matrix}180°\\360°\end{matrix} \pm \alpha\right) = \pm\,\mathrm{RT}(\alpha)$$

$$\mathrm{RT}\left(\begin{matrix}90°\\270°\end{matrix} \pm \alpha\right) = \pm\mathrm{CO}-\mathrm{RT}(\alpha)$$

Resolución:

Notamos que $90° + \alpha$ y $180° + \theta$ en P.N.

Convenientemente hallamos

$$\underbrace{\cot(90° + \alpha)}_{\text{IIC}} = -\left(\frac{5}{3}\right) \qquad \underbrace{\cot(180° + \theta)}_{\text{IIIC}} = +\left(\frac{2}{-4}\right)$$

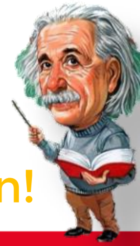
$$-\tan\alpha = -\left(\frac{5}{3}\right) \qquad \cot\theta = -\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tan\alpha = \left(\frac{5}{3}\right)$$

Piden:

$$\tan\alpha.\cot\theta = \left(\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{5}{6}\right)$$

¡Muy bien!



HELICO-PRACTICE 6

Reduzca la expresión

$$M = \frac{\cot(1997\pi - \theta)\,.\,\cos(39\frac{\pi}{2} + \theta)}{\sec(\theta - 84\pi)\,.\,\operatorname{sen}(\theta - 61\frac{\pi}{2})}$$

Resolución:

$$\sec(\theta - 84\pi) = \sec(84\pi - \theta)$$

$$\operatorname{sen}(\theta - 61\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}(61\frac{\pi}{2} - \theta)$$

Recordamos

$\text{Impar } x\ (\pi) \longrightarrow 180°$

$\text{par } x\ (\pi) \longrightarrow 0°$

$(\dot{4} + 1)\ x\ \left(\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow 90°$

$(\dot{4} - 1)\ x\ \left(\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow 270°$

Continuamos:

$$M = \frac{\cot\overbrace{(1997\pi}^{\mathrm{I}} - \theta)\,.\,\cos\overbrace{(39}^{\dot{4}-1}\frac{\pi}{2} + \theta)}{\sec(\underbrace{84\pi}_{\mathrm{P}} - \theta)\left(-\operatorname{sen}\left(\underbrace{61}_{\dot{4}+1}\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)}$$

$$M = \frac{\cot\overbrace{(180° - \theta)}^{\mathrm{IIC}}\,.\,\cos\overbrace{(270° + \theta)}^{\mathrm{IVC}}}{\sec(-\theta)(-\operatorname{sen}\underbrace{(90° - \theta)}_{\mathrm{IC}})}$$

$$M = \frac{(-\cot(\theta))\,.\,(\operatorname{sen}(\theta))}{\sec\theta(-\cos\theta)}$$

$$M = \frac{\cot(\theta)\,.\,\operatorname{sen}(\theta)}{\underbrace{\sec\theta.\cos\theta}_{1}}$$

$$M = \cot\theta.\operatorname{sen}\theta$$

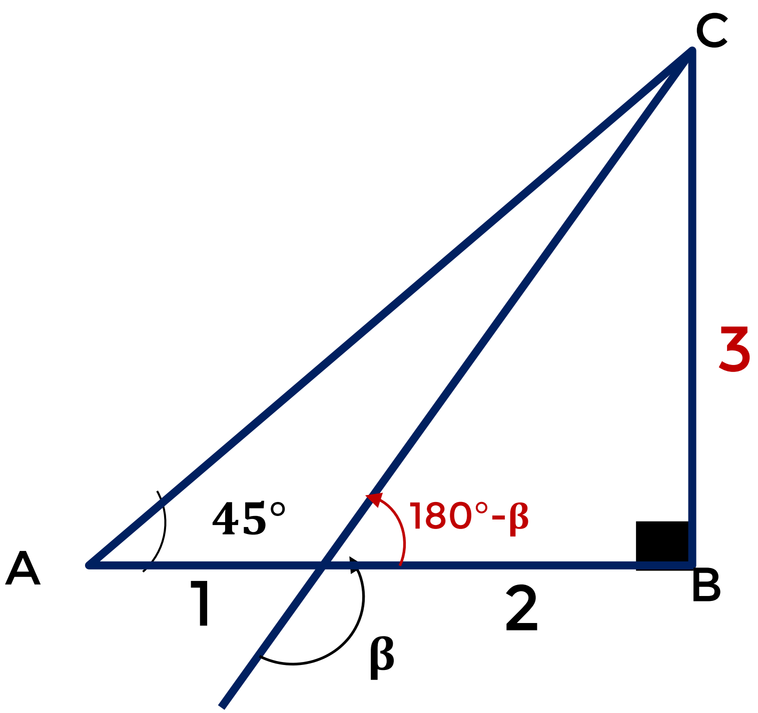
$$M = \left(\frac{\cos\theta}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}\right).\cancel{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\mathbf{M = \cos\theta}$$

¡Muy bien!

HELICO-PRACTICE 7

Del gráfico, calcule $\tan\beta$.



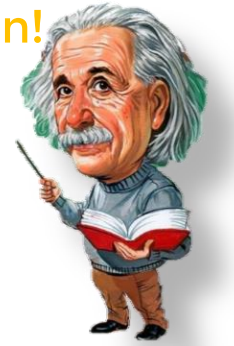
Resolución:

$$\tan(\overbrace{180° - \beta}^{\text{IIC}}) = \frac{3}{2}$$

$$-\tan(\beta) = \frac{3}{2}$$

$$\tan(\beta) = -\frac{3}{2}$$

¡Muy bien!



HELICO-PRACTICE 8

Calcule

$$M = \frac{\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right).\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right).\sec\left(-\frac{44\pi}{3}\right)}{\cot\left(-\frac{31\pi}{6}\right).\operatorname{sen}\left(-\frac{55\pi}{3}\right).\csc\left(-\frac{37\pi}{6}\right)}$$

Resolución:

Dividimos

$$\begin{array}{r|l} 17 & 8 \\ 16 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 44 & 6 \\ 43 & 7 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 55 & 6 \\ 54 & 9 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 8 \\ 24 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 31 & 12 \\ 24 & 2 \\ \hline 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 37 & 12 \\ 36 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Remplazamos:

$$M = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right).\sec\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{\cot\left(-\frac{7\pi}{6}\right).\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right).\csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

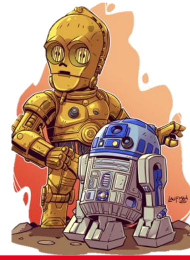
$$M = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \sec\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{-\cot\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right).\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).\left(-\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}$$

$$M = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\sec\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{-\cot\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2)}$$

$$M = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{-\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)(\sqrt{3})}$$

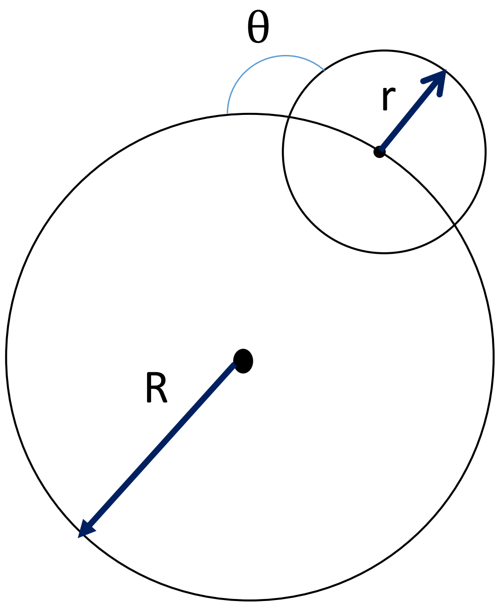
$$M = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(-2)}{-(\sqrt{3})\ (\sqrt{3})}$$

$$\mathbf{M = 1/3}$$

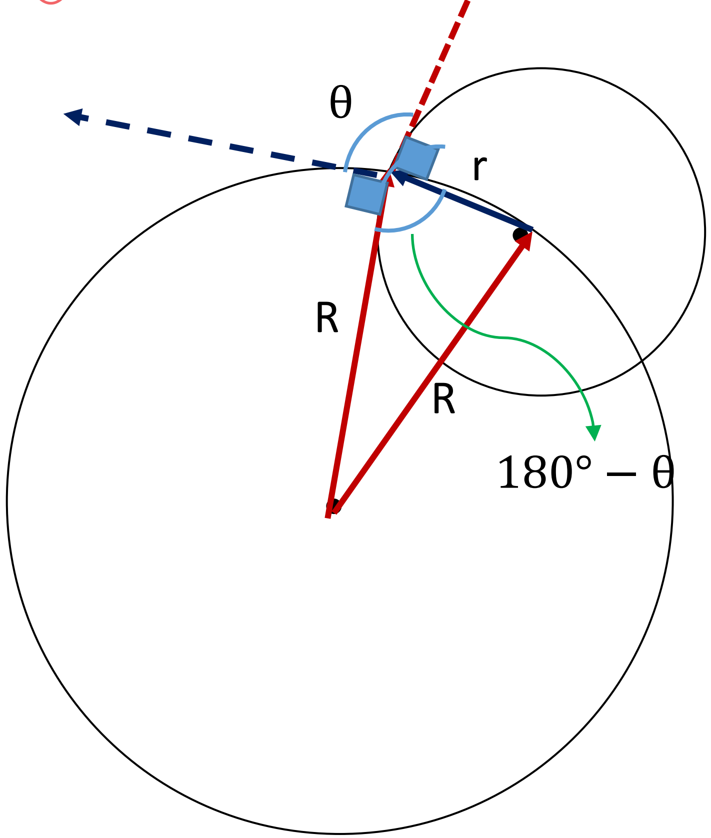


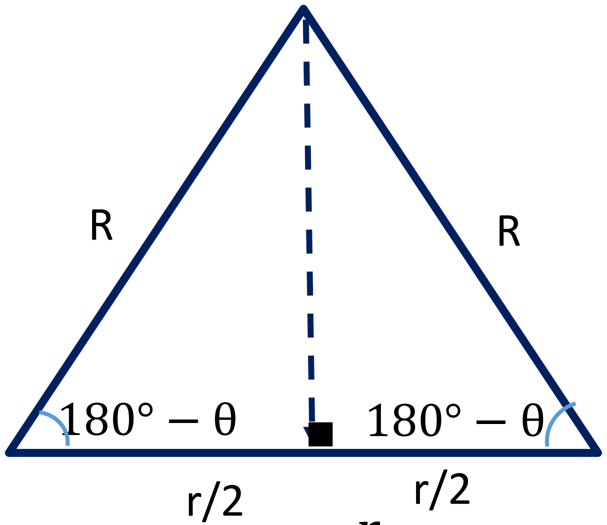
HELICO-PRACTICE 9

Del gráfico, calcule $\cos\theta$



Resolución:



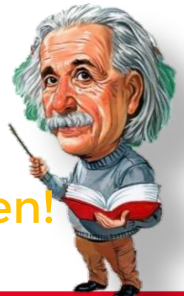


$$\cos(180° - \theta) = \frac{\frac{r}{2}}{R}$$

$$-\cos(\theta) = \frac{\frac{r}{2}}{R}$$

$$\therefore \boldsymbol{\cos\theta = -\frac{r}{2R}}$$

¡Muy bien!



HELICO-PRACTICE 10

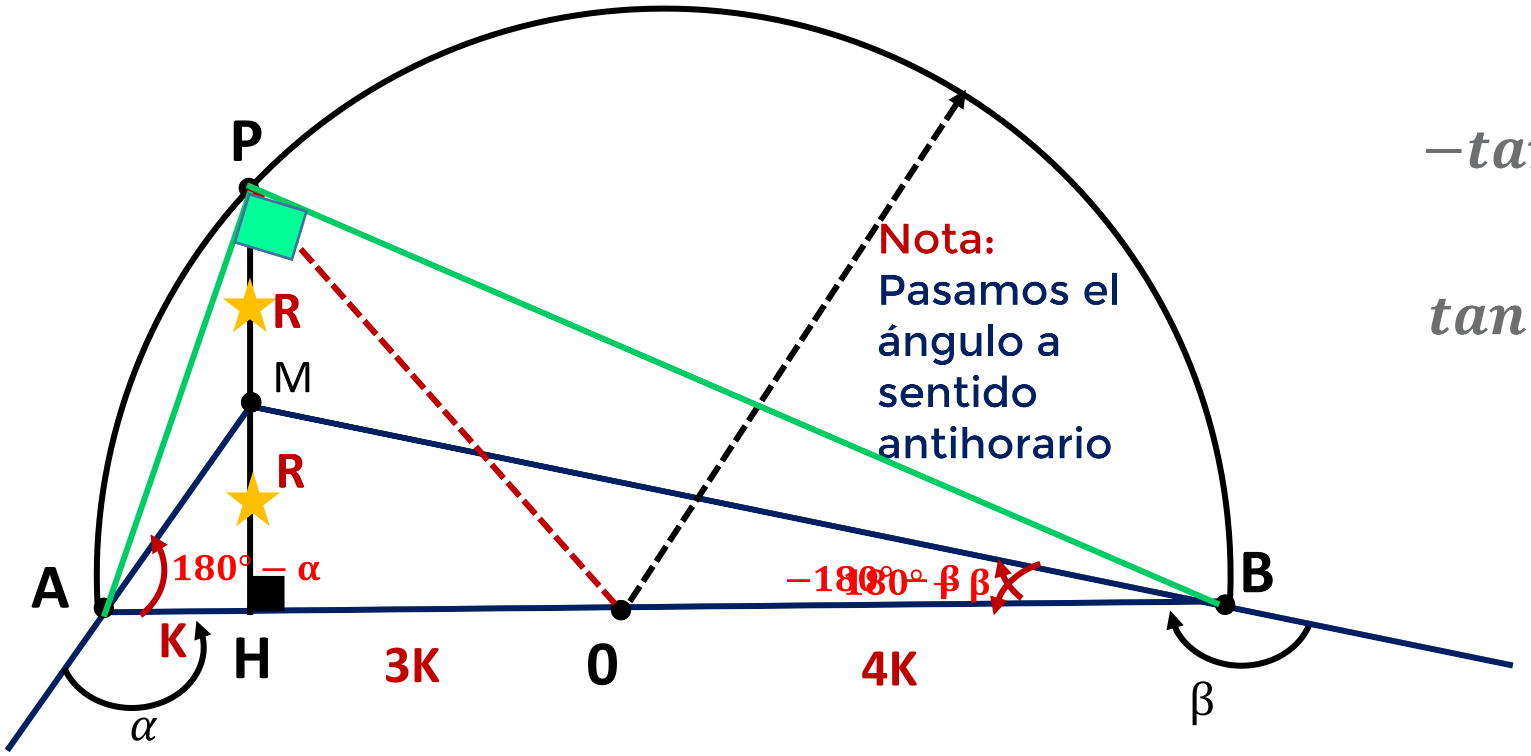
Del gráfico, obtenga

$P = \tan\alpha . \tan\beta$

Si $OH = 3AH$.

$(2R)^2 = K.7K$

$\frac{R^2}{7K^2} = \frac{1}{4}$



Nota:
Pasamos el ángulo a sentido antihorario

Resolución:

$\underbrace{\tan(180° - \alpha)}_{IIC} = \frac{R}{K}$

$-\tan(\alpha) = \frac{R}{K}$

$\tan(\alpha) = -\frac{R}{K}$

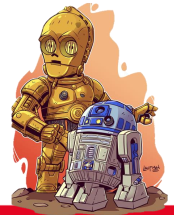
$\underbrace{\tan(180° + \beta)}_{IIIC} = \frac{R}{7K}$

$\tan(\beta) = \frac{R}{7K}$

Piden

$P = \tan\alpha . \tan\beta$

$\left(-\frac{R}{K}\right)\left(\frac{R}{7K}\right) = -1/4$



HELICO-PRACTICE 11

¿Cuál de los siguientes puntos que se presentan en las alternativas pertenecen a una circunferencia trigonométrica?

A) $P\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ B) $Q\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ C) $R\left(\frac{1}{5};\frac{1}{12}\right)$

D) $M\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$ E) $N\left(-\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$

Resolución:

$$1 = x^2 + y^2$$

★ **P** ⟹ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1/4$ **(F)**

★ **Q** ⟹ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3/4$ **(F)**

★ **R** ⟹ $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = 169/(25)(144)$ **(F)**

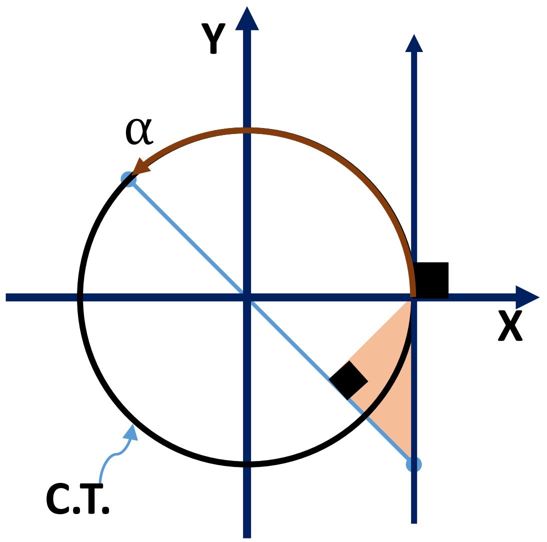
★ **M** ⟹ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 13/25$ **(F)**

★ **N** ⟹ $\left(\frac{-5}{13}\right)^2 + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$ **(V)**

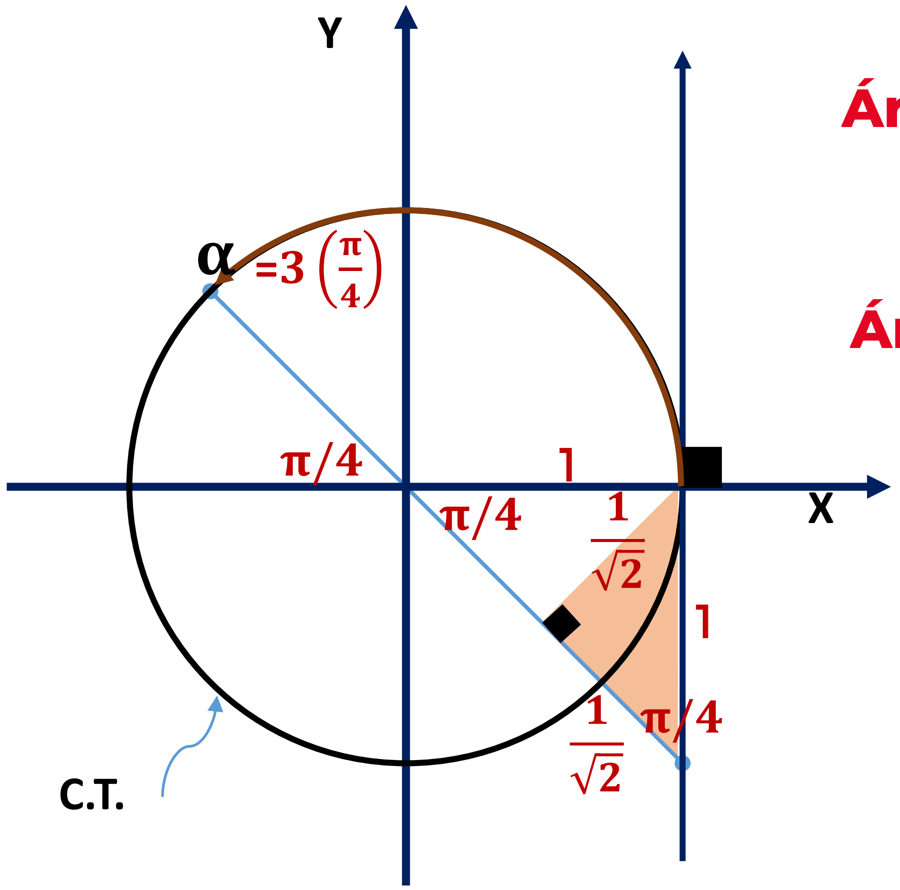
HELICO-PRACTICE 12

Determine el área de la región sombreada si

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

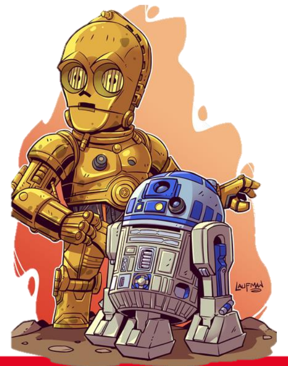


Resolución:



$$\text{Área}= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2}$$

$$\text{Área}= \frac{1}{4}u^2$$

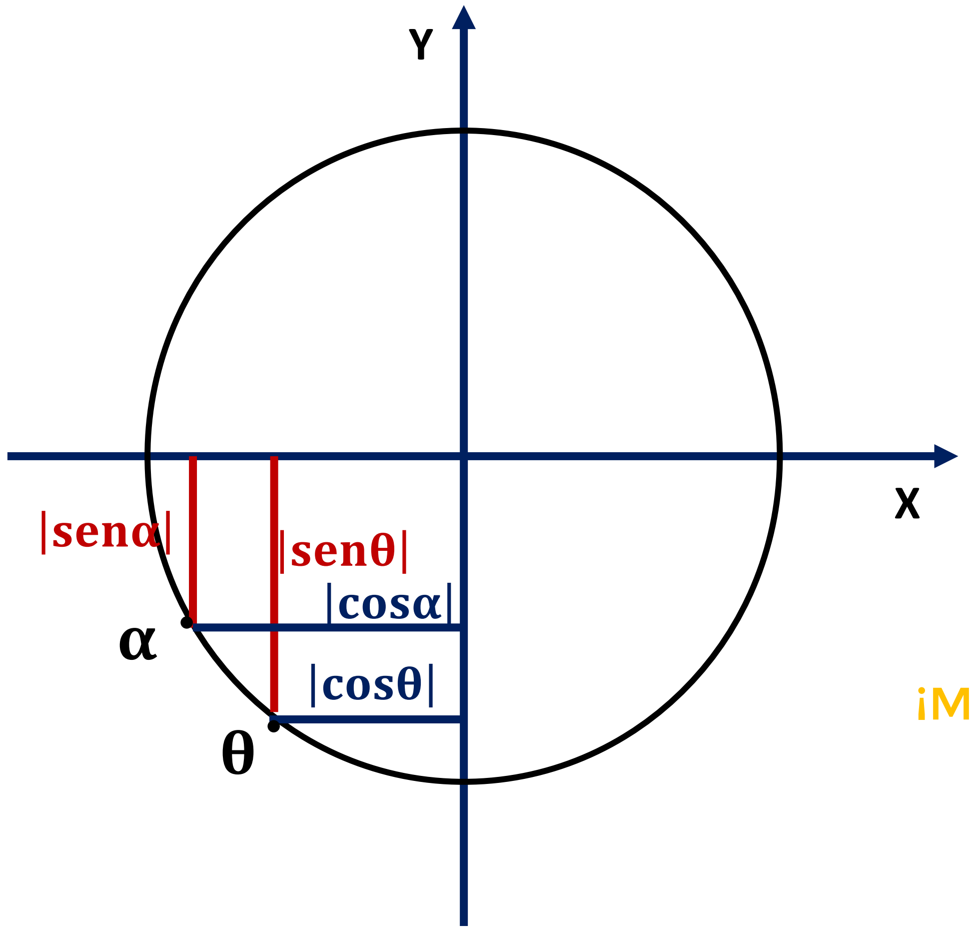


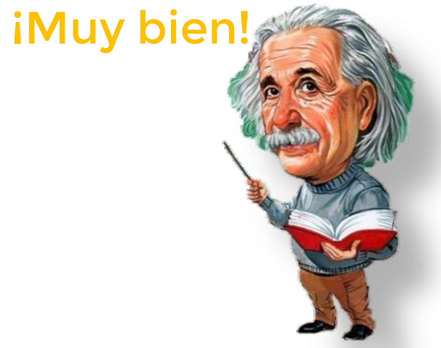
HELICO-PRACTICE 13

Si $\pi < \alpha < \theta < \frac{3\pi}{2}$, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego indique la alternativa correcta.

- $sen\alpha > sen\theta$ **(V)**
- $cos\alpha > cos\theta$ **(F)**
- $|sen\alpha| > |sen\theta|$ **(F)**
- $|cos\alpha| > |cos\theta|$ **(V)**

Resolución:

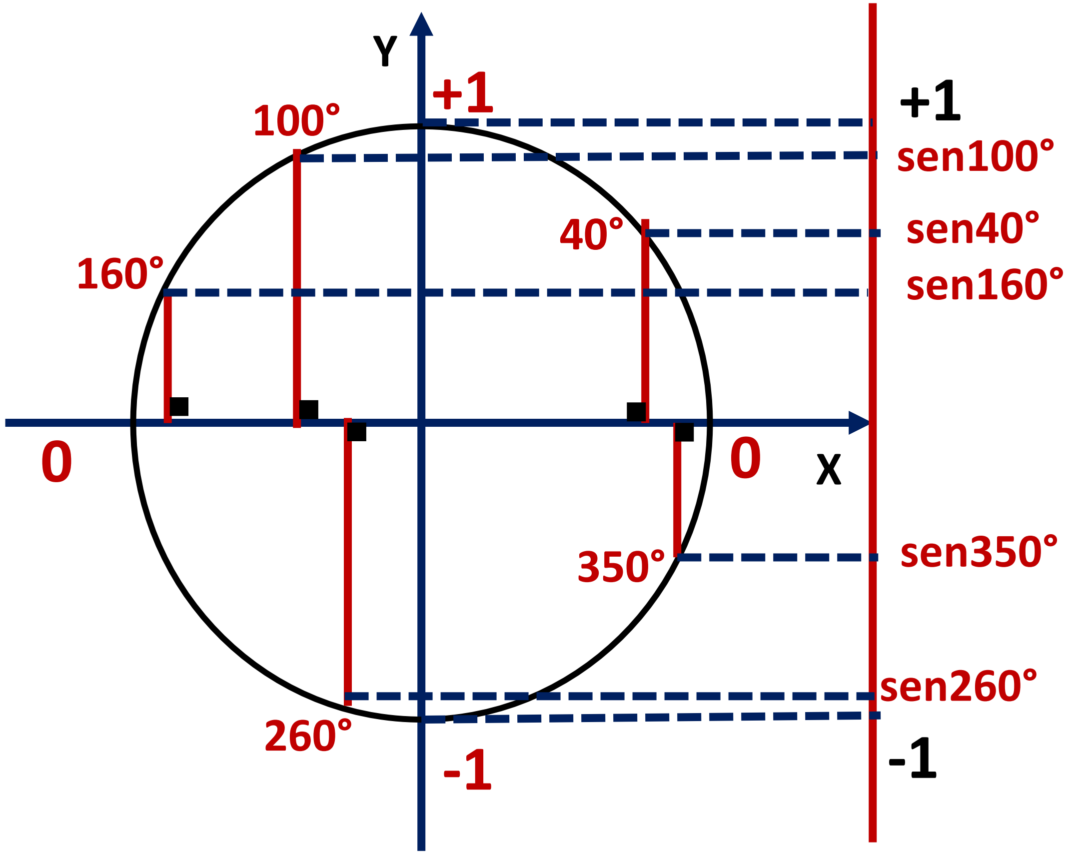




HELICO-PRACTICE 14

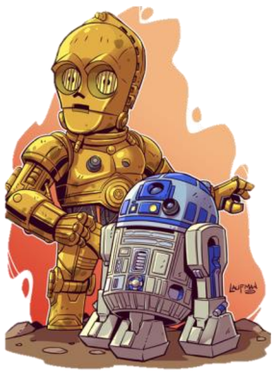
Ordene en forma creciente.

$\text{sen}40°, \text{sen}100°, \text{sen}160°, \text{sen}260°, \text{sen}350°$



Ordenamos

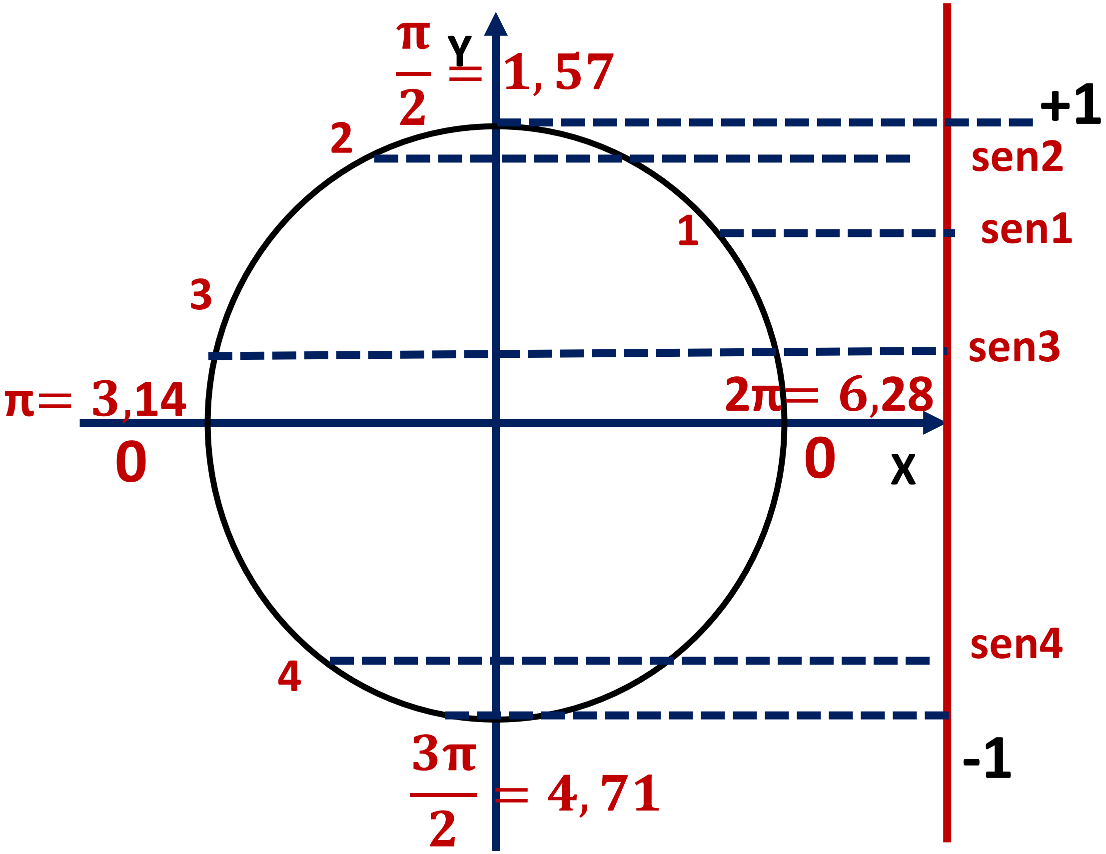
$\text{sen}260°, \text{sen}350°, \text{sen}160°, \text{sen}40°, \text{sen}100°$



HELICO-PRACTICE 15

Ordene de mayor a menor

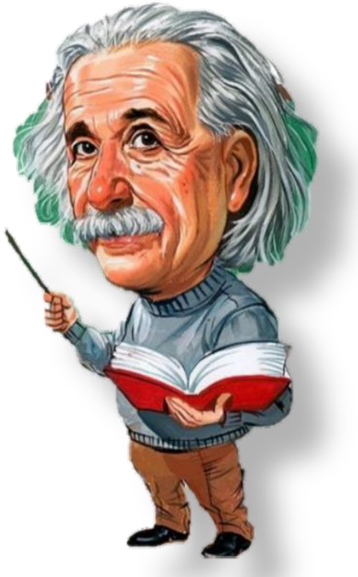
$\text{sen}(1), \text{sen}(2), \text{sen}(3) \text{ y } \text{sen}(4)$



Ordenamos

$\text{sen}2, \text{sen}1, \text{sen}3, \text{sen}4$

¡Muy bien!



COLEGIOS
SACO OLIVEROS APEIRON
SISTEMA HELICOIDAL

MUCHAS GRACIAS POR TU ATENCIÓN

Tu curso amigo

TRIGONOMETRÍA