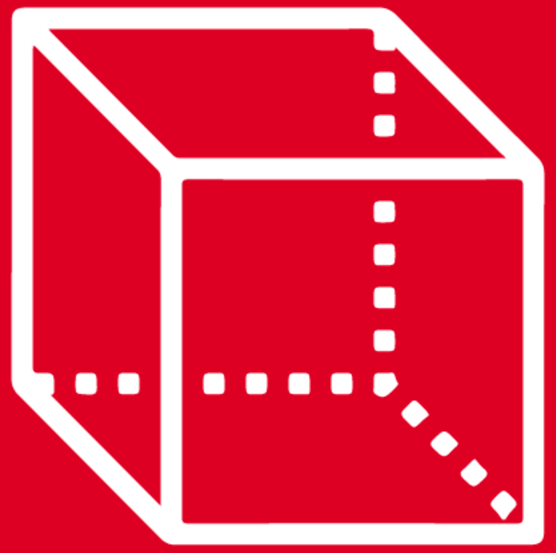
GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

CAPITULO 5 TEORIA

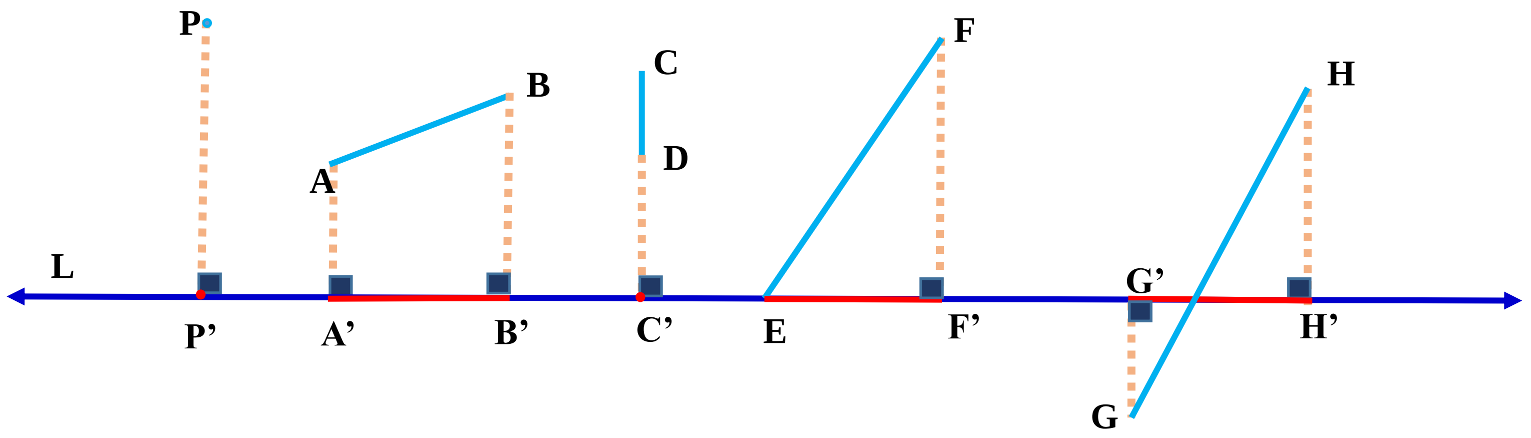


SACO OLIVEROS

PROYECCIÓN ORTOGONAL

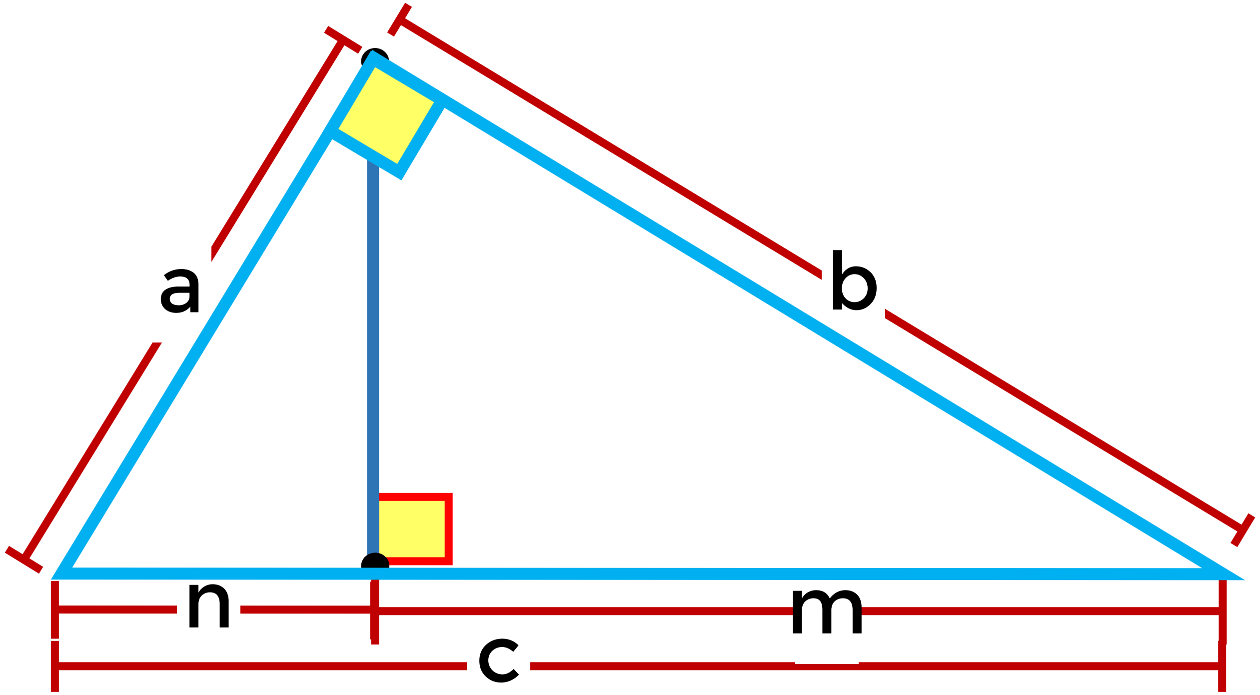
PROYECCIÓN ORTOGONAL :

- La proyección ortogonal del punto P en la recta L es el pie de la perpendicular PP´ trazada del punto P a dicha recta.
- La proyección ortogonal de un segmento AB en la recta L es el segmento de recta A´B´ que tiene por extremos los pies de las perpendiculares AA´ y BB´ trazadas a la recta L.
- La perpendicular se llama proyectante. Si el punto pertenece a la recta su proyección sobre ella es el mismo punto.



RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

<u>**TEOREMA DEL CÁLCULO DEL CATETO**</u>: El cuadrado de la longitud de cada cateto es media proporcional entre las longitudes de su proyección en la hipotenusa y de la hipotenusa.

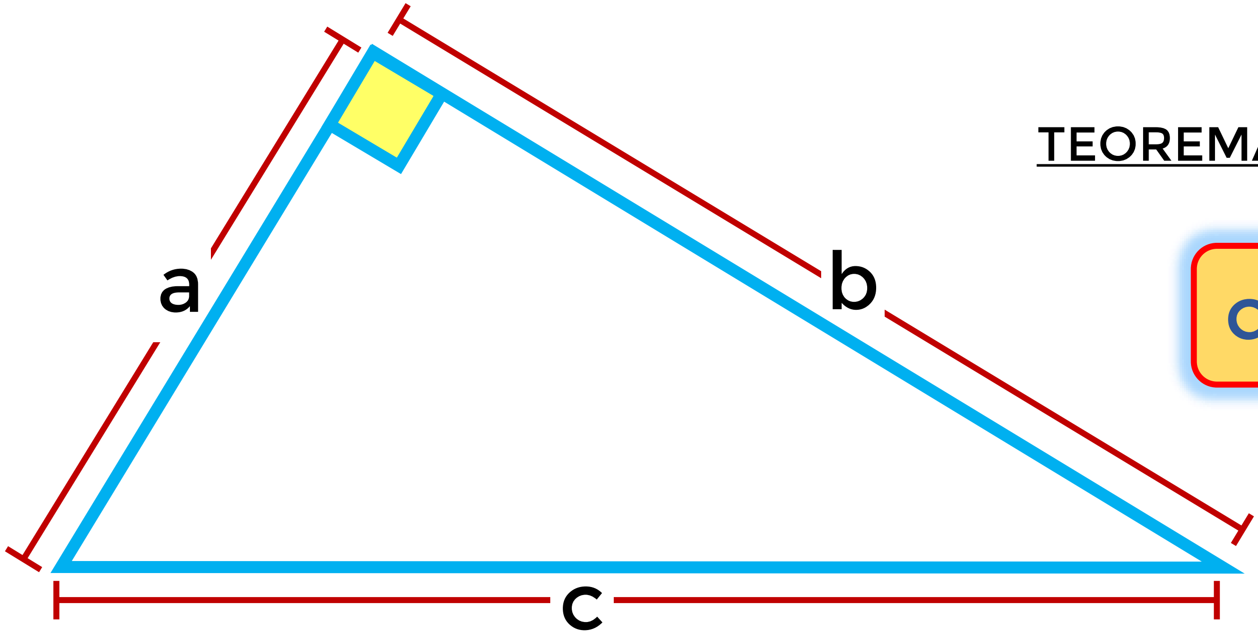


$a^2 = n.c$

$b^2 = m.c$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

TEOREMA DE PITÁGORAS: En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

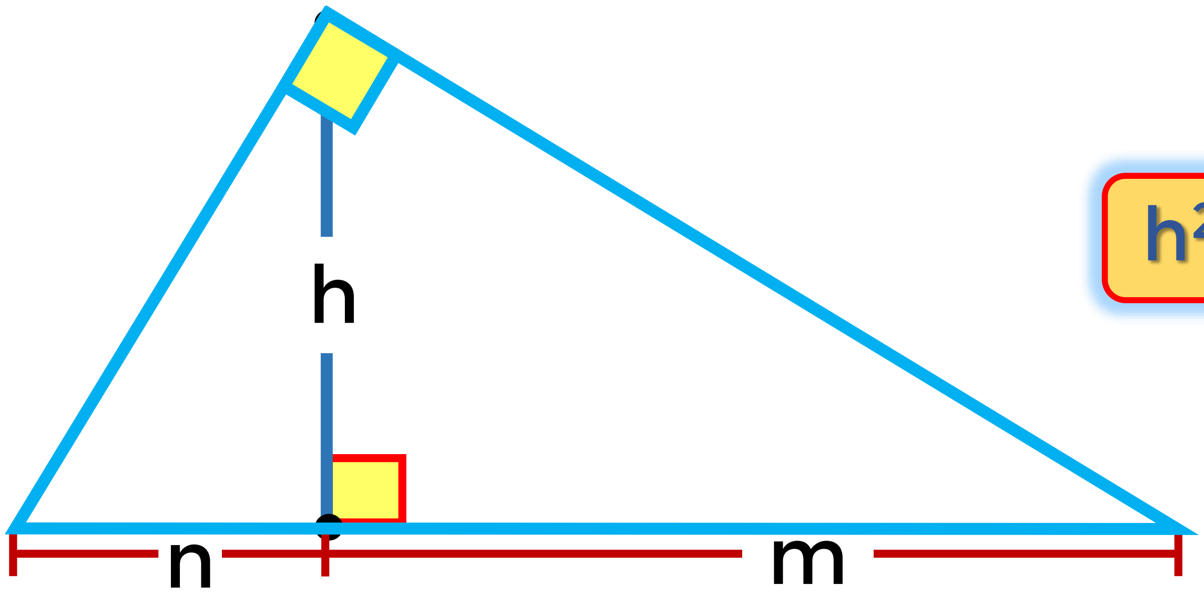


TEOREMA DE PITAGORAS

$$c^2 = a^2 + b^2$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

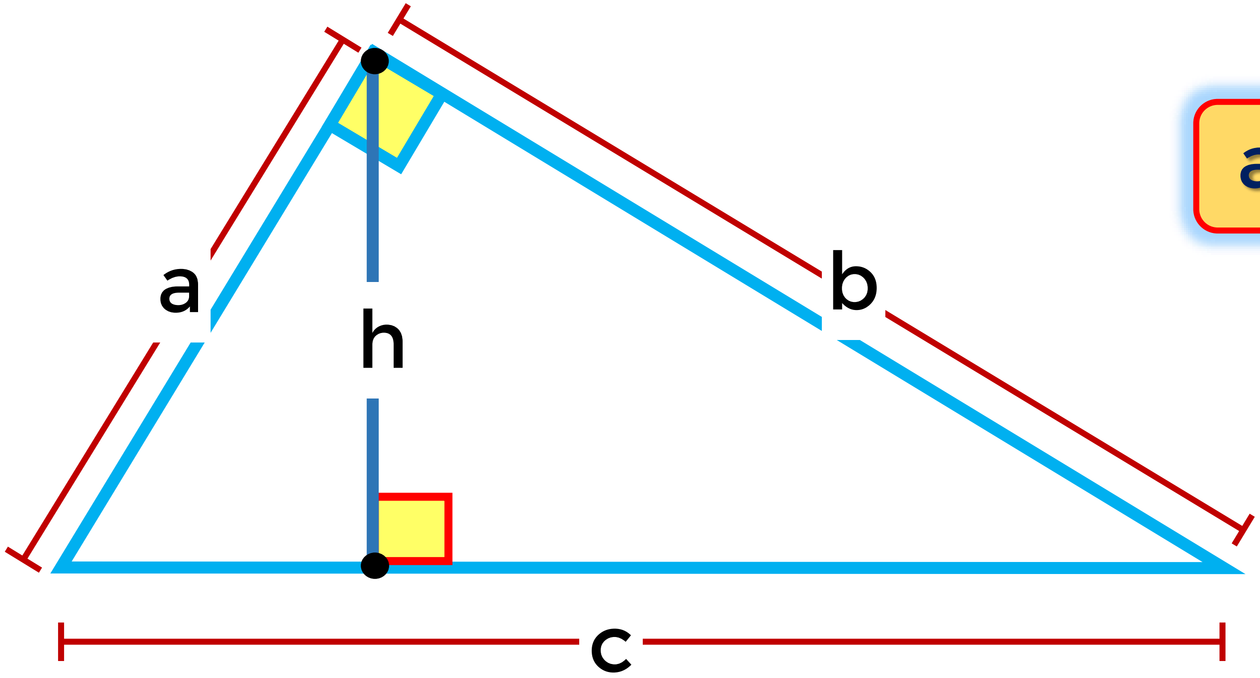
TEOREMA DEL CÁLCULO DE LA ALTURA: La longitud de la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las longitudes de los segmentos que determina dicha altura en la hipotenusa.



$$h^2 = n.m$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

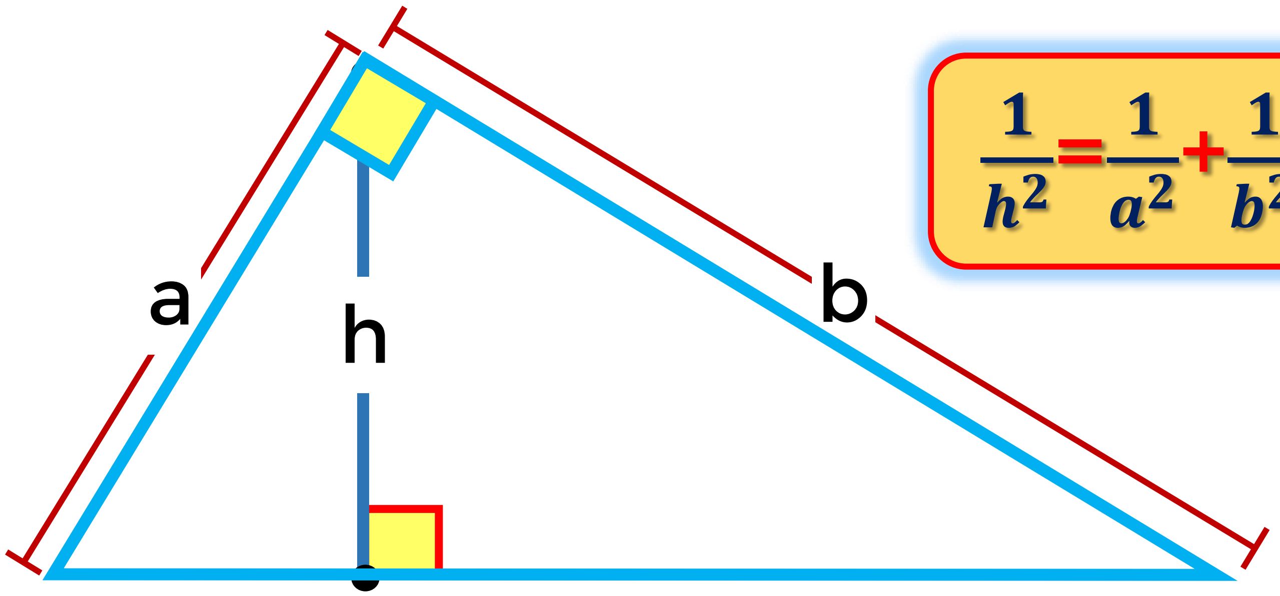
TEOREMA DEL PRODUCTO DE CATETOS: El producto de las longitudes de los catetos es igual al producto entre las longitudes de la altura relativa a la hipotenusa y la hipotenusa.



$$a.b = c.h$$

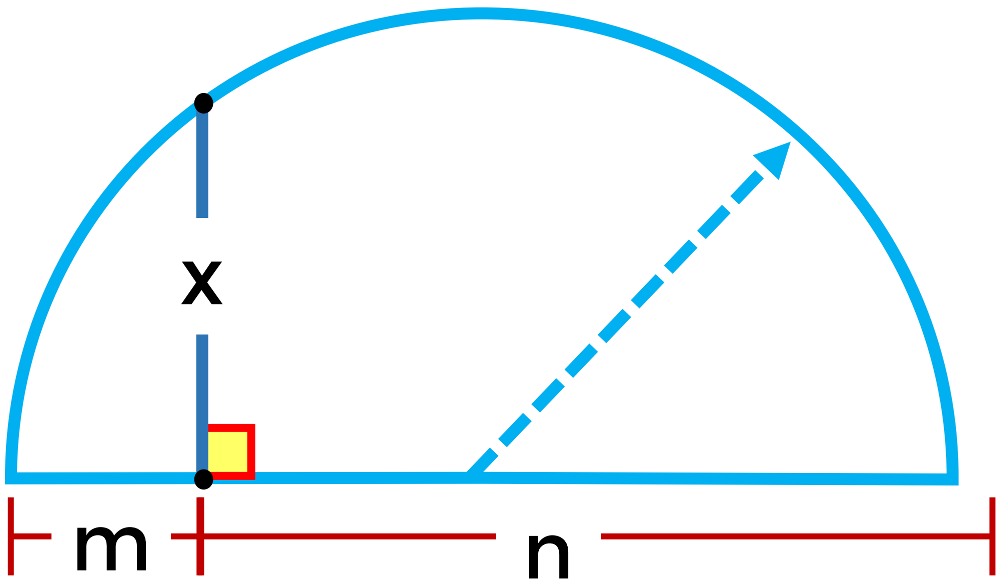
RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

TEOREMA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO: La inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las de las longitudes de los catetos.



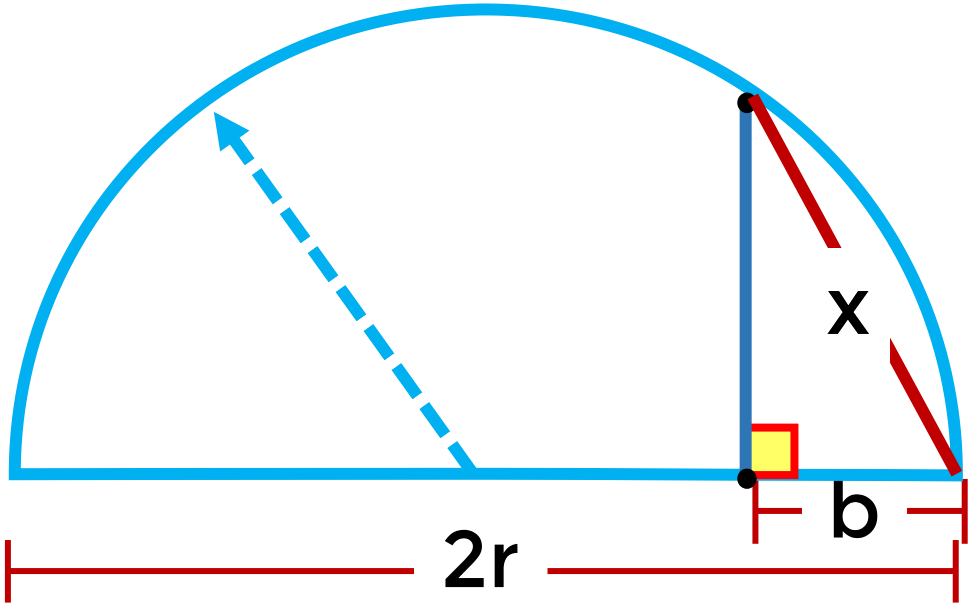
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

TEOREMA :



$$x^2 = m.n$$

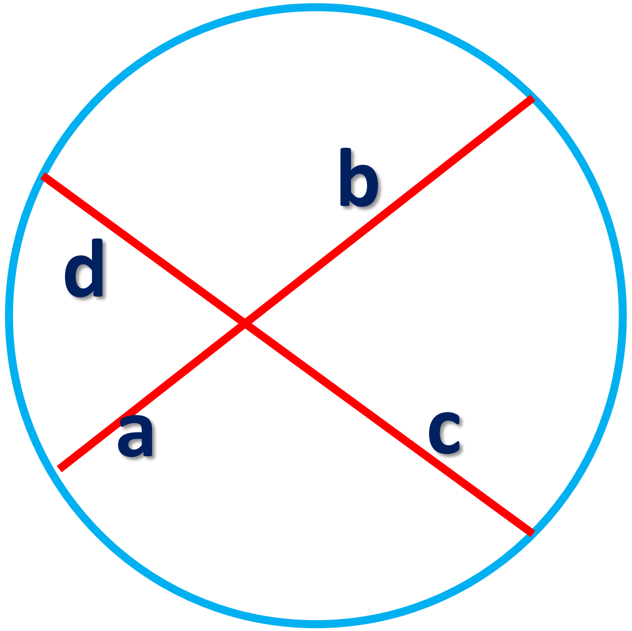
TEOREMA :



$$x^2 = 2r.b$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

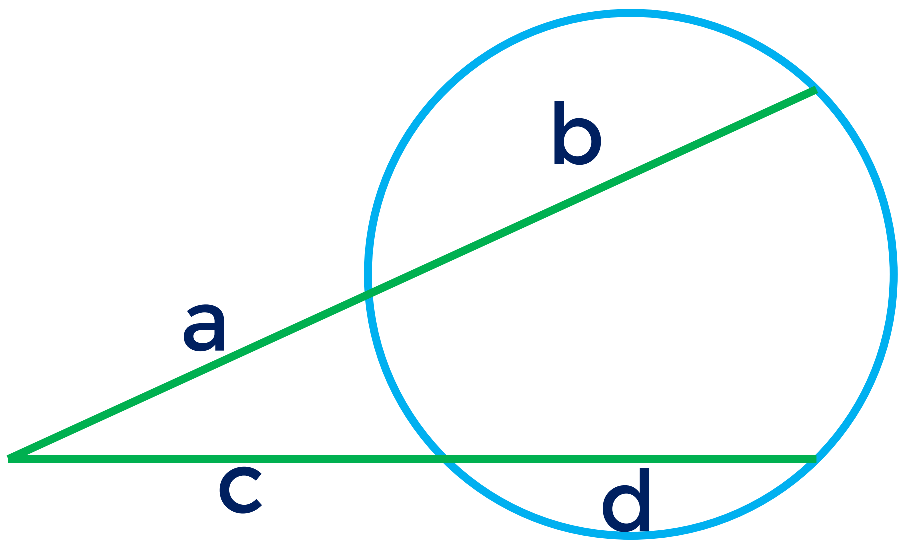
TEOREMA DE LAS CUERDAS : Si en una circunferencia se trazan dos cuerdas secantes, entonces los productos de las longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda son iguales.



$$a.b = c.d$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

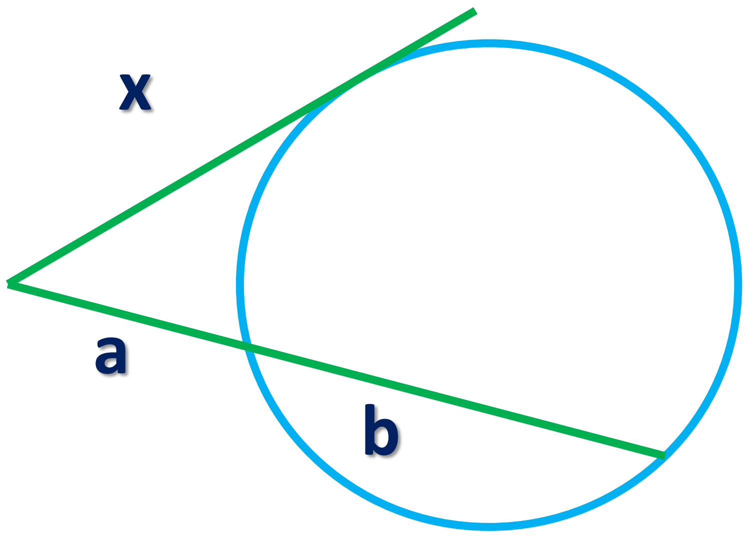
TEOREMA DE LAS SECANTES : Si por un punto exterior a una circunferencia se trazan dos rectas secantes, entonces los productos de las longitudes de los segmentos secantes determinados y los segmentos externos correspondientes son iguales.



$$a(a + b) = c(c + d)$$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

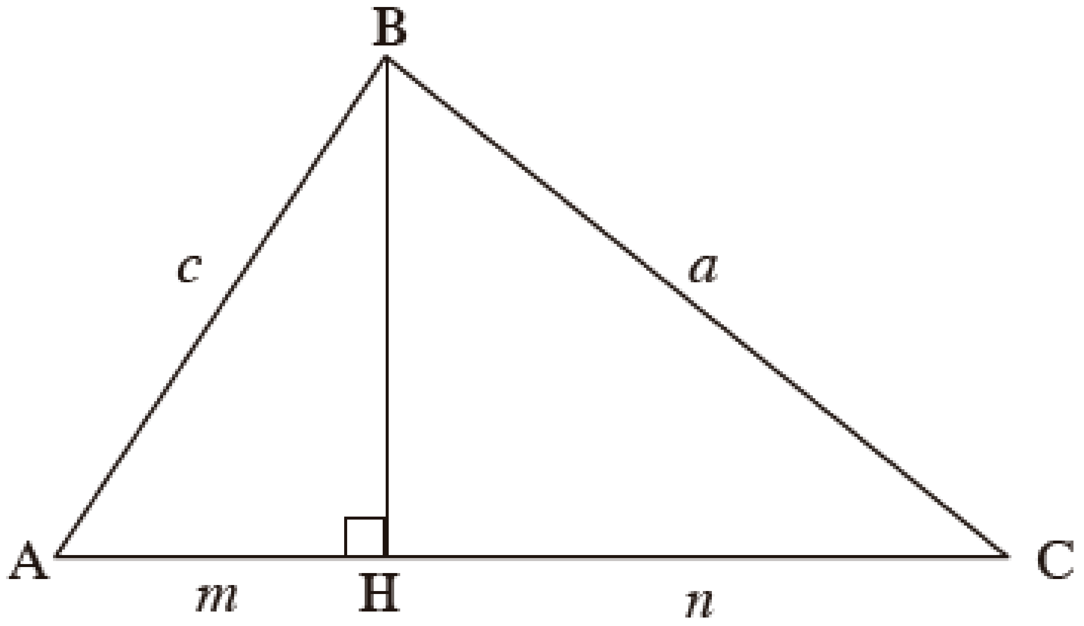
TEOREMA DE LA TANGENTE : Si por un punto exterior a una circunferencia se traza una recta tangente y una recta secante, entonces el segmento tangente determinado es media proporcional entre el segmento secante y su segmento externo correspondiente.



$$x^2 = a(a + b)$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LA PROYECCIONES : En todo triángulo oblicuángulo, la diferencia de los cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a la diferencia de los cuadrados de las longitudes de sus proyecciones sobre el tercer lado o de la recta que lo contiene.



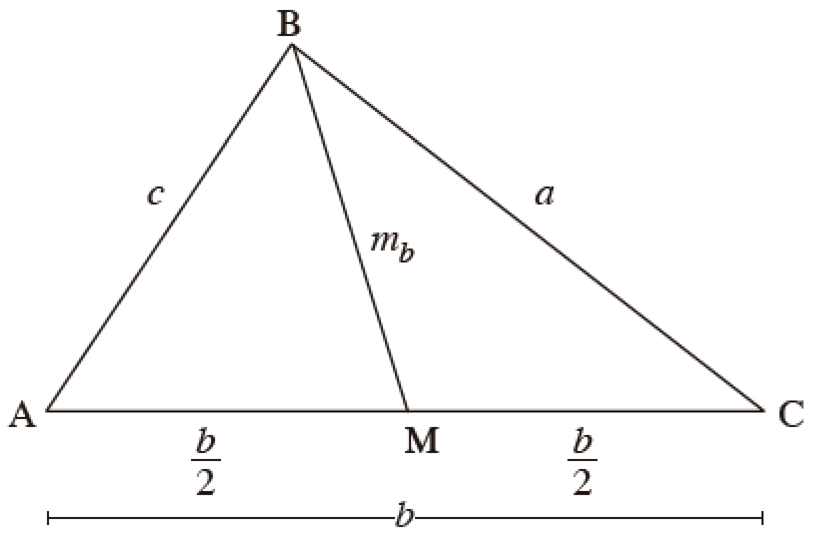
En la figura mostrada:

Se cumple:

$$\boxed{c^2 - a^2 = m^2 - n^2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LA MEDIANA : En todo triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una mediana es igual a dos veces el cuadrado de la longitud de la mediana más la mitad del cuadrado de la longitud del tercer lado.



En la figura mostrada:

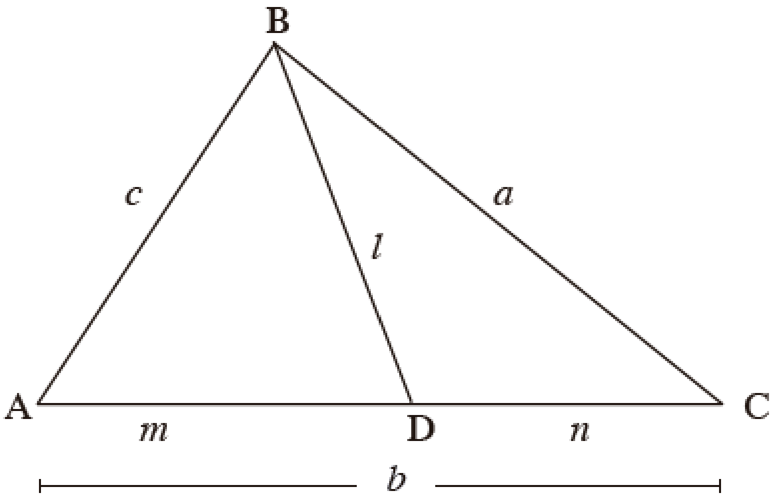
Si $\overline{BM}$ es una mediana

Entonces

$$\boxed{c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LA STEWART : En todo triángulo, la suma de los productos de los cuadra-dos de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana y las longitudes del segmentos opuestos determinado en el tercer lado es igual al producto del cuadrado de la longitud de la ceviana y la longitud del tercer lado más el producto de las longitudes del tercer lado y los segmentos determinados por la ceviana.



En la figura mostrada:

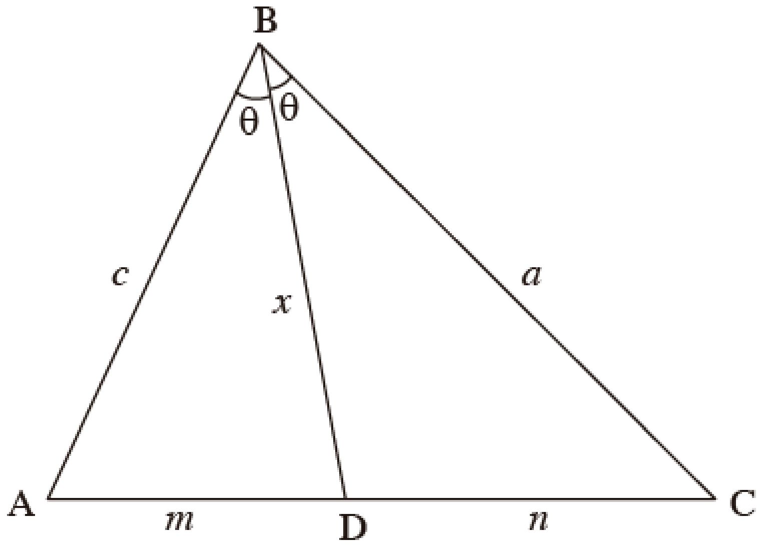
Si $\overline{BM}$ es una ceviana

Entonces

$$\boxed{c^2n + a^2m = l^2b + bmn}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE LA LONGITUD DE LA BISECTRIZ INTERIOR : En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior es igual a la diferencia de los productos de las longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz interior y los segmentos determinados en el lado opuesto.



En la figura mostrada:

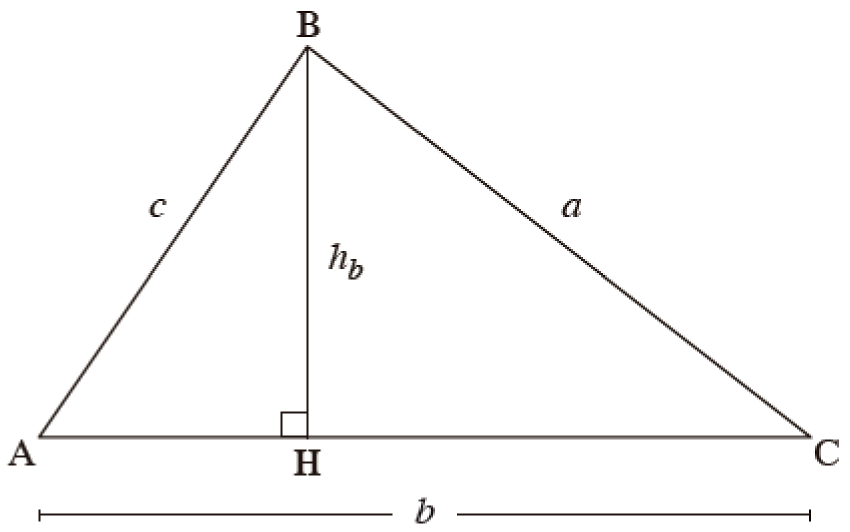
Si $\overline{BD}$ es bisectriz interior en el triángulo ABC

Entonces se cumple:

$$\boxed{x^2 = ac - mn}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

TEOREMA DE HERON : En todo triángulo, la longitud de una altura es igual al doble de la inversa del lado opuesto multiplicado con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y las diferencias de este con cada una de las longitudes de los lados.



En la figura mostrada:

Si $\overline{BH}$ es una altura tal que BH = h_b y p es el semiperimetro de la región triángular ABC

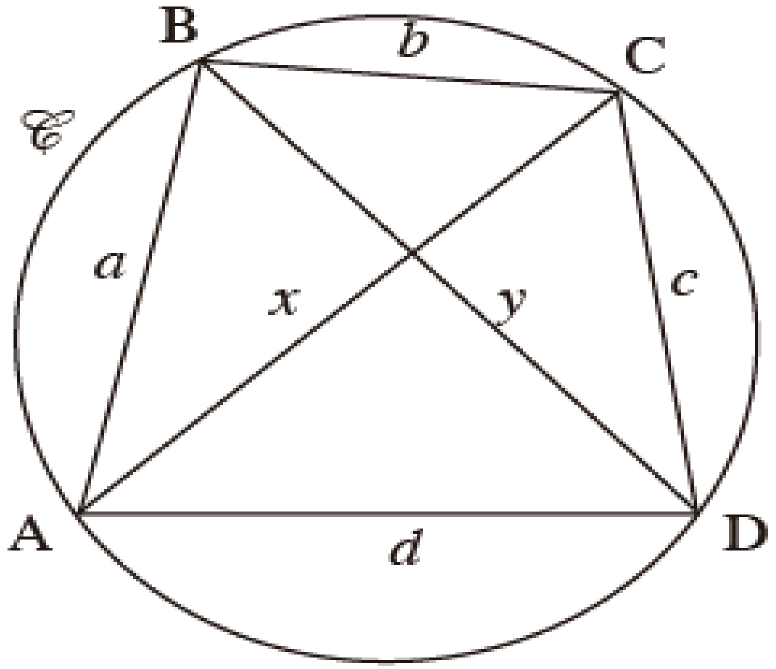
Entonces se cumple:

$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN CUADRILÁTERO

TEOREMA DE PTOLOMEO : Si un cuadrilátero está inscrito o es inscriptible a una circunferencia, el producto de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos.



En la figura mostrada:

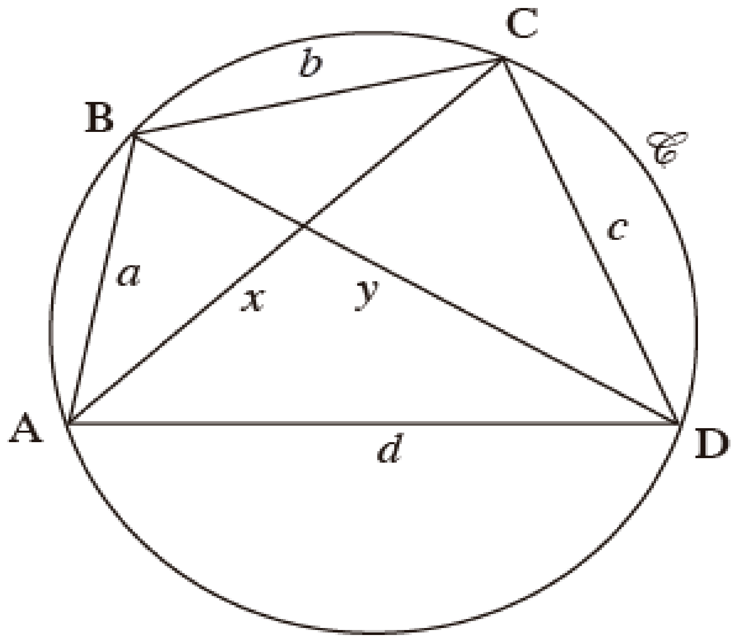
el cuadrilátero ABCD está inscrito a la circunferencia $\mathcal{C}$

Entonces se cumple:

$$\boxed{xy = ac + bd}$$

RELACIONES MÉTRICAS EN CUADRILÁTERO

<u>TEOREMA DE VIETE</u> **:** Si un cuadrilátero está inscrito o es inscriptible a una circunferencia entonces la razón de las longitudes de las diagonales es igual a la razón de las sumas de los productos de las longitudes de los lados concurrentes en los extremos de cada diagonal.



En la figura mostrada:

el cuadrilátero ABCD está inscrito a la circunferencia $\mathcal{C}$

Entonces se cumple:

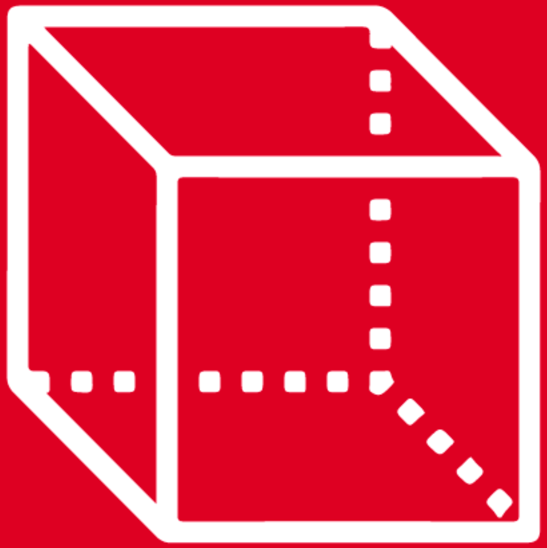
$$\boxed{\frac{X}{Y} = \frac{ad + bc}{ab + dc}}$$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

CAPITULO 5 PRACTICA

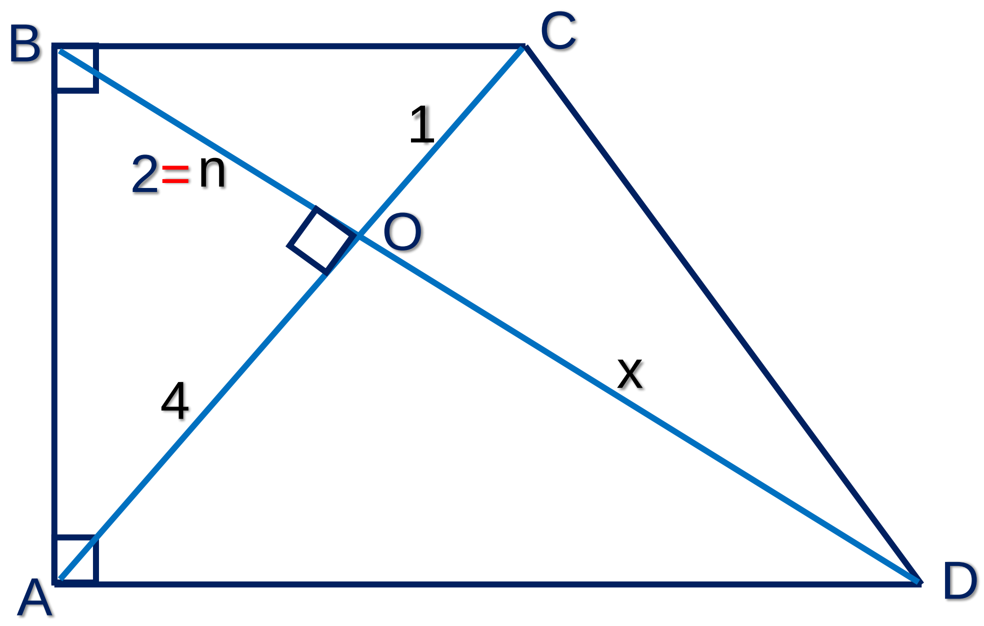


SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 **En un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, de diagonales perpendiculares en O, si AO = 4 m y OC = 1 m, calcule OD.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de OD = x



- En el ⊿ ABC (Relac Métricas ⊿)

$n^2 = 1 \cdot 4$

$\boxed{n = 2}$

- En el ⊿ BAD (Relac Métricas ⊿)

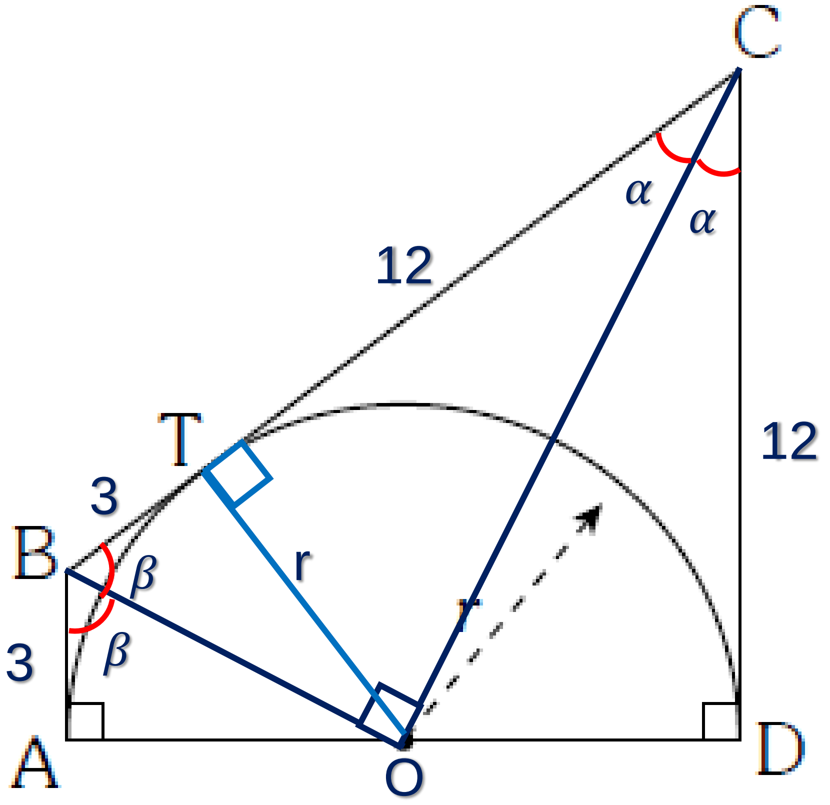
$4^2 = 2 \cdot x$

$\therefore\ x = 8m$

PROBLEMA 2 **Halle la longitud del radio si AB = 3 m y CD = 12 m.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor del radio = r



- Por teorema:

$CT = CD = 12$

$AB = BT = 3$

- Del gráfico:

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

- En el ⊿ BOC (Relac Métricas ⊿)

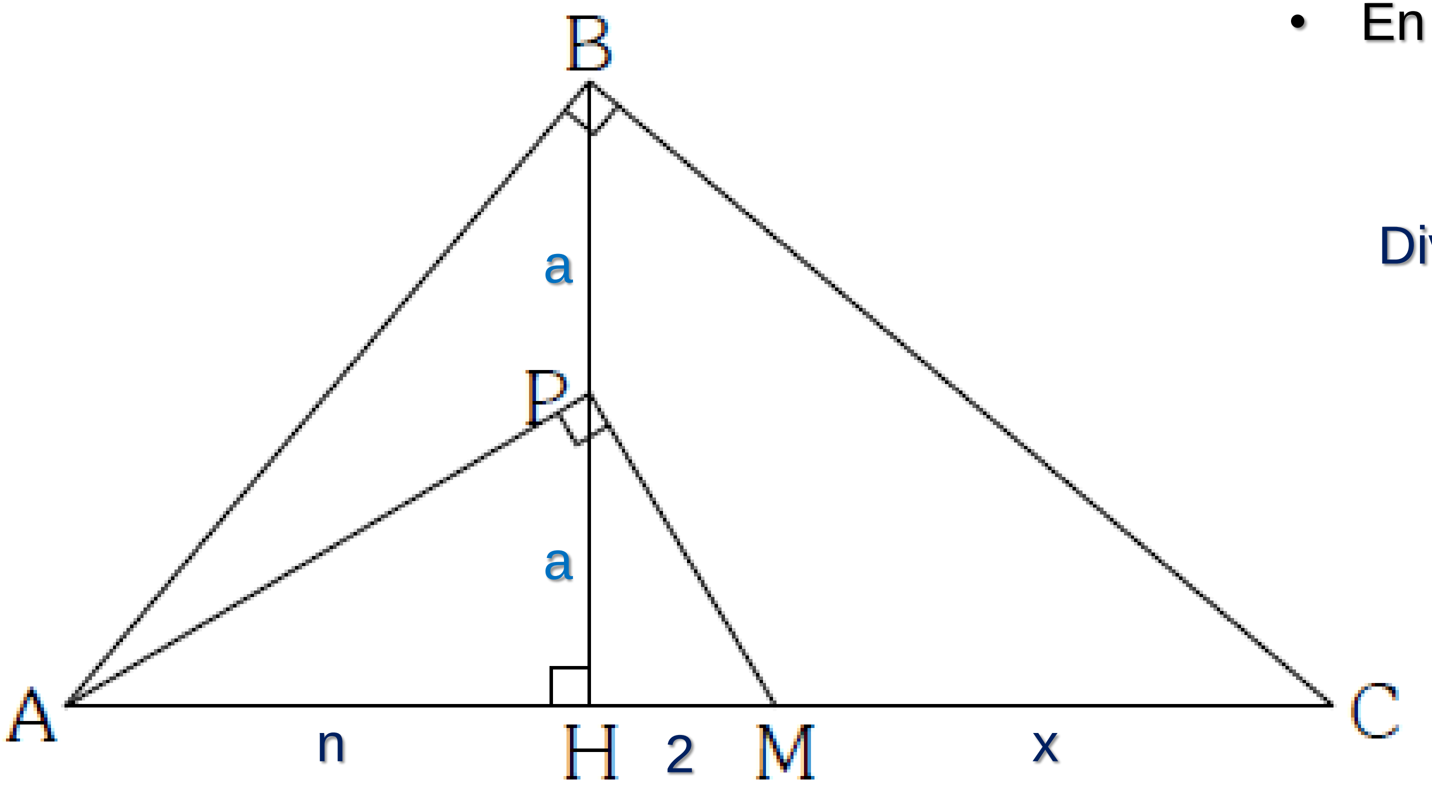
➡ $r^2 = 3 \cdot 12$

$\therefore$ **r = 6m**

PROBLEMA 3 Si BP = PH y HM = 2 m, halle MC.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de MC = x



- En el ⊿ APM (Relac Métricas ⊿)

$\Rightarrow$ $a^2 = n \cdot 2$ . . . . (I)

- En el ⊿ ABC (Relac Métricas ⊿)

$\Rightarrow$ $(2a)^2 = n \cdot (2+x)$ . . . . (II)

Dividiendo I entre II

$$\frac{a^2}{4\,a^2} = \frac{2.n}{n.(2+x)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{2+x}$$

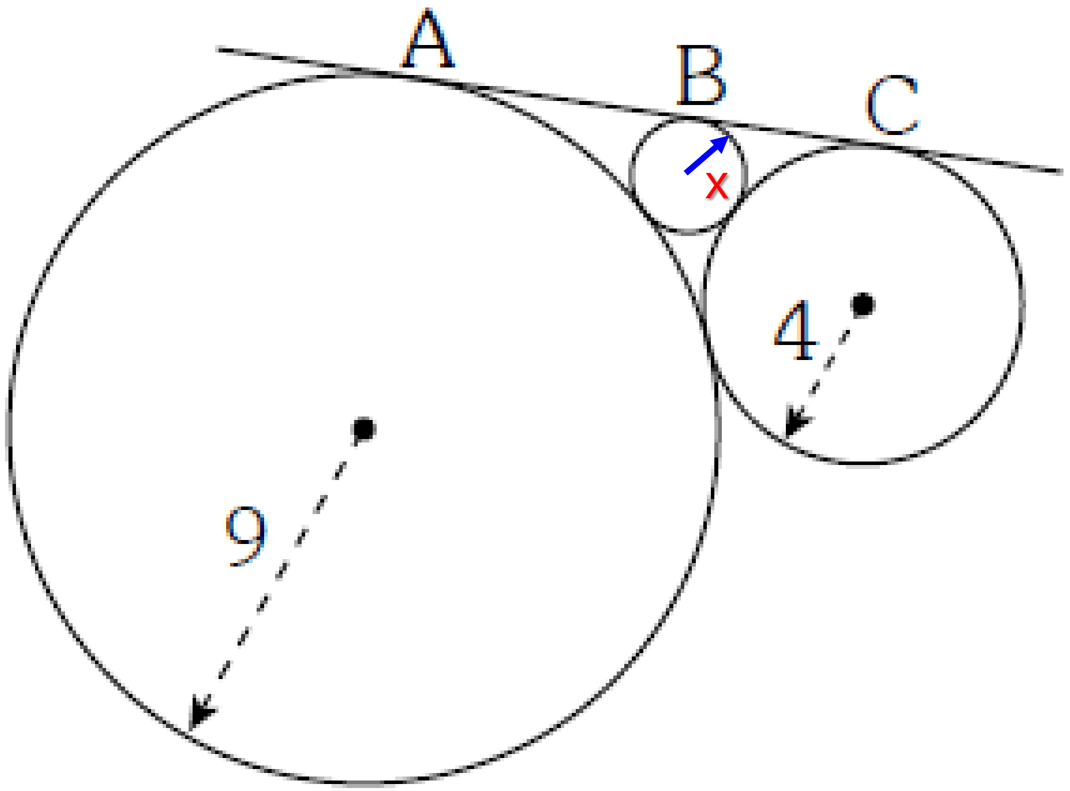
$\boxed{\therefore\ x = 6m}$

PROBLEMA 4

Si A, B y C son puntos de tangencia, halle la longitud del radio menor.

<u>RESOLUCIÓN</u>

Piden: el valor del radio menor = x



- Por teorema:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{4}}$$

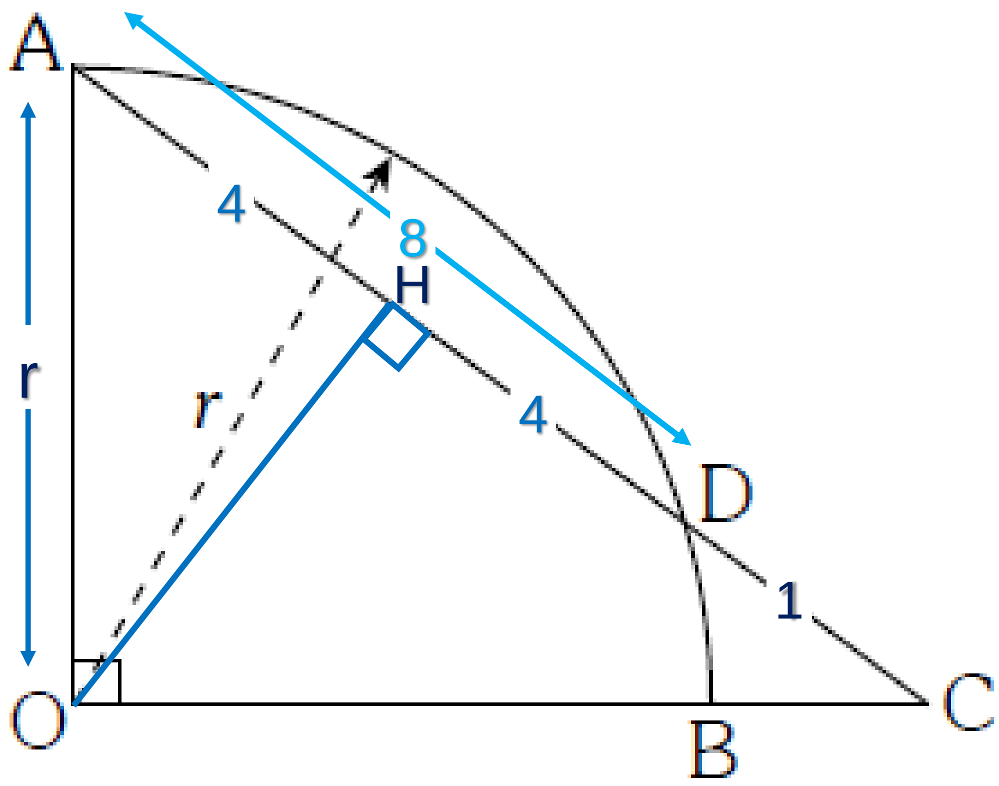
$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ **x = 1,44m**

PROBLEMA 5 **Halle la longitud del radio si AD = 8 m y CD = 1 m.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor del radio = r



- Por teorema:

AH = DH = 4

- En el ⊿ AOC (Relac Métricas ⊿)

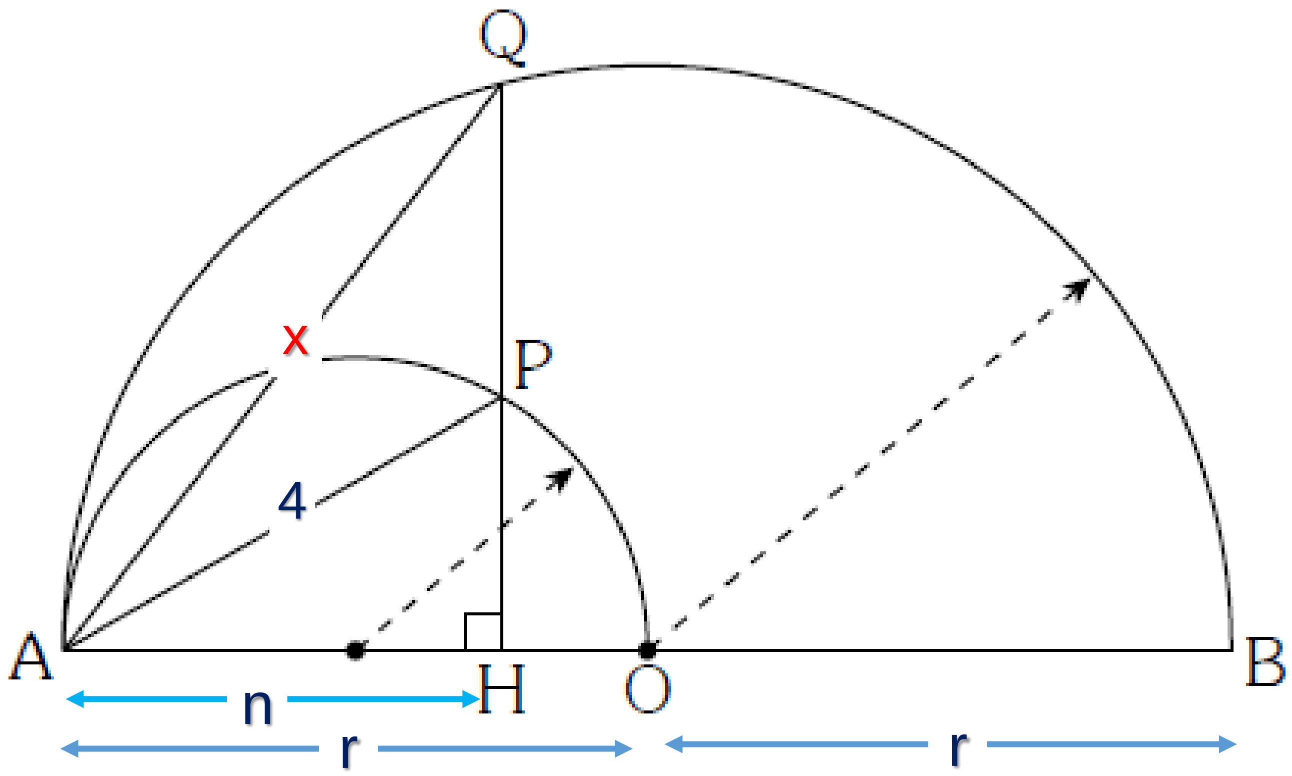
$r^2 = 9 . 4$

$\therefore$ **r = 6m**

PROBLEMA 6 Si AP = 4 m y O es centro, halle AQ.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de AQ = x



- Por teorema:

$4^2 = n \cdot r$ . . . . (I)

$x^2 = n \cdot 2r$ . . . . (II)

Dividiendo I entre II

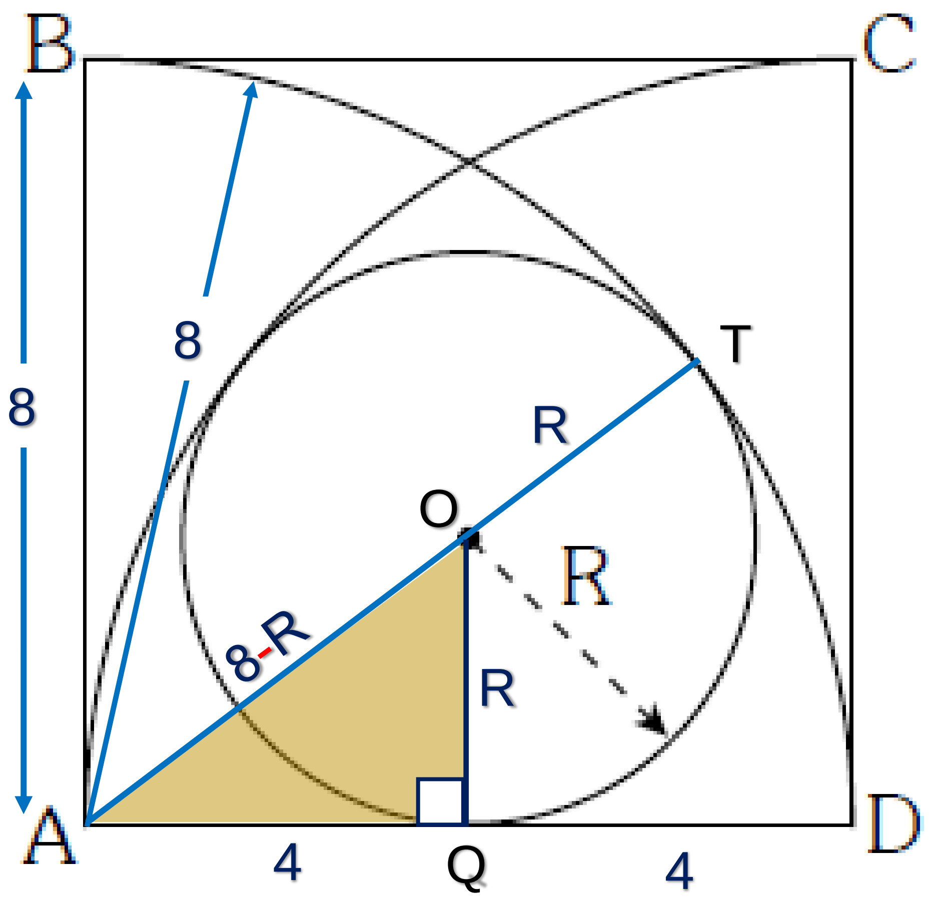
$$\frac{16}{x^2} = \frac{n \cdot r}{n \cdot 2r}$$

$$\therefore\ x = 4\sqrt{2}\text{m}$$

PROBLEMA 7 Si ABCD es un cuadrado y AB = 8 m, halle el radio R.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor del radio = R



Dato: ABCD es un cuadrado

- Se traza el radio $\overline{AT}$
- Se traza $\overline{OQ} \perp \overline{AD}$
- En el ⊿ AQO (Teor. Pitágoras)

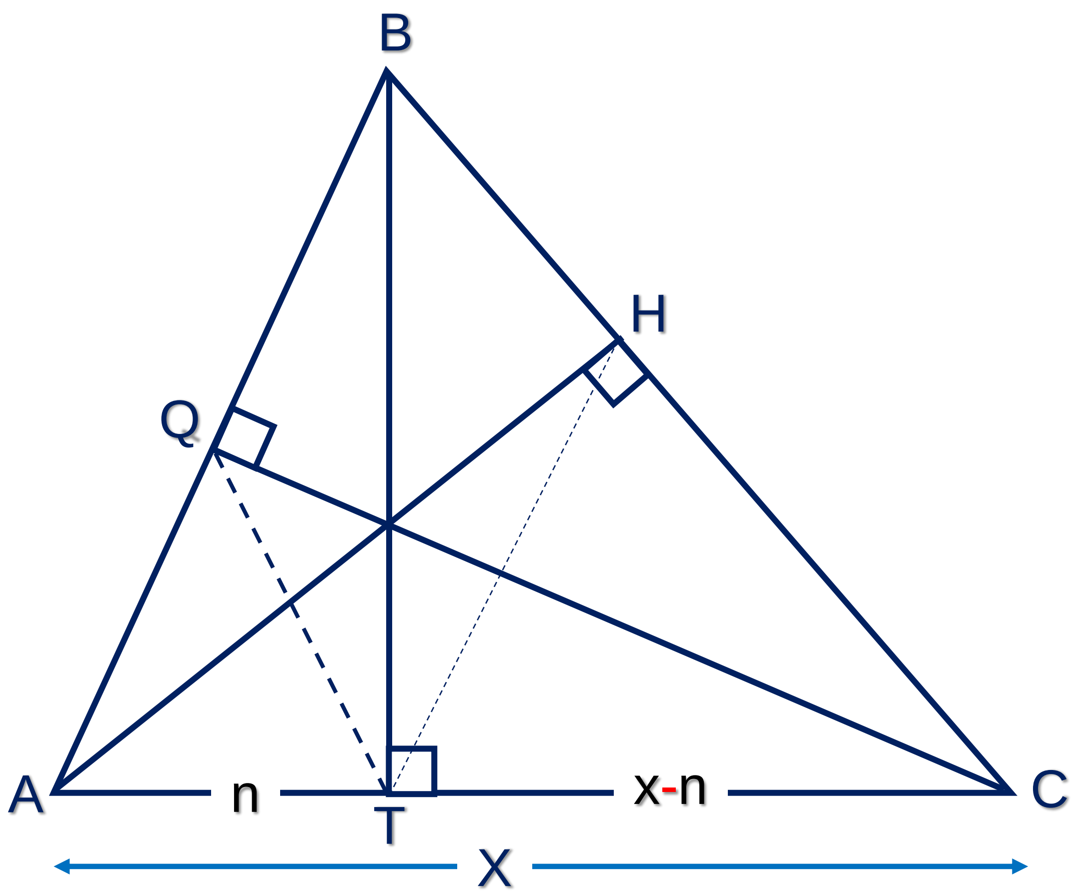
$$(8 - R)^2 = 4^2 + R^2$$

$$\therefore\ R = 3m$$

PROBLEMA 8 **En un triángulo escaleno ABC se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CQ}$. Si (AB)(AQ) = 24 m² y (BC)(CH) = 25 m², halle AC.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de AC = x



Dato: (AB)(AQ) = 24

- En el ⏢ BQTC (Inscriptible)

➡ (AQ)(AB) = n . x . . . . (I)

Dato: (CH)(BC) = 25

- En el ⏢ BATH (Inscriptible)

➡ (CH)(BC) = (x-n) . x . . . . (II)

Sumando I y II

$$24 + 25 = \cancel{n.x} + x^2 - \cancel{nx}$$

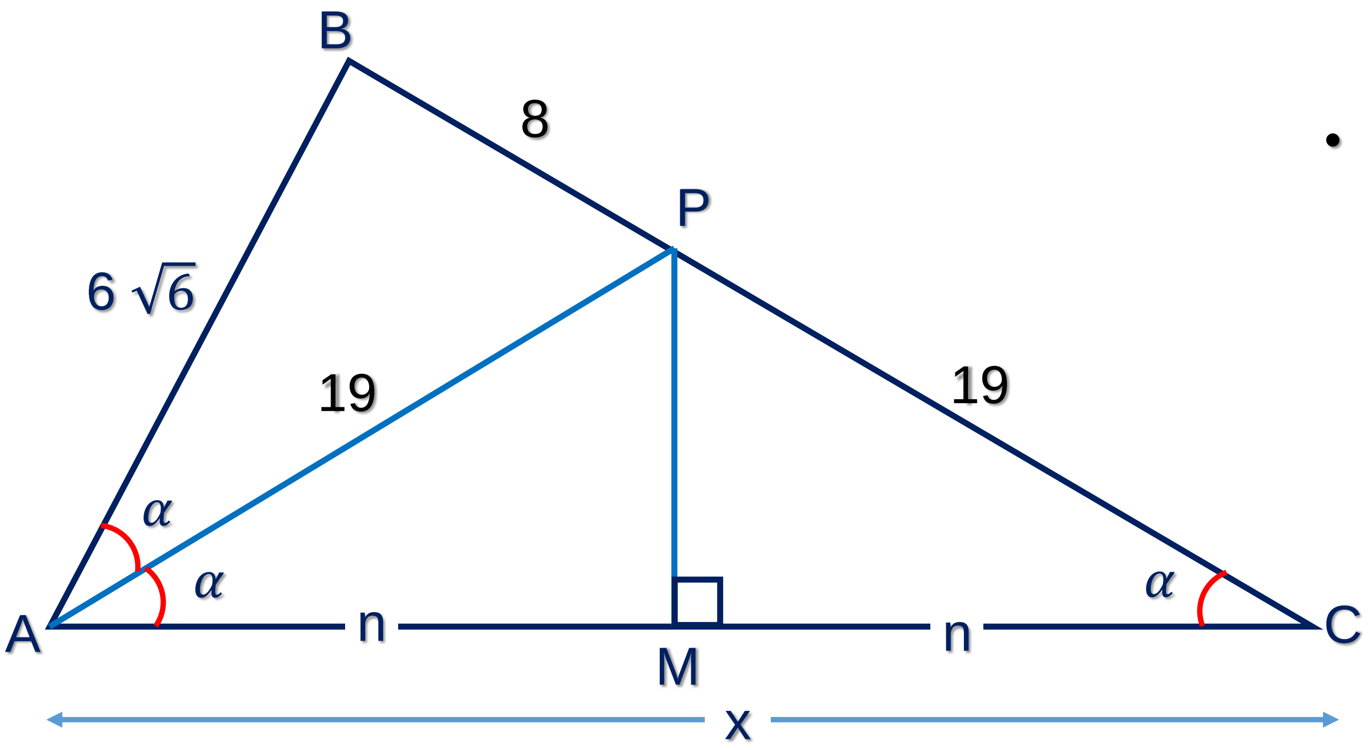
$$49 = x^2$$

$$\therefore\ \boxed{x = 7\text{m}}$$

PROBLEMA 9 **En un triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A y la mediatriz de $\overline{AC}$ se intersecan en un punto P que pertenece al lado $\overline{BC}$. Si BP = 8 y PC = 19, halle AC.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de AC = x



- Del gráfico: Δ APC (Isósceles)

m ∢ PAC = m ∢ PCA = α

AP = PC = 19

- Por teorema:

$AB^2 = 8 \cdot 27$

$\boxed{AB = 6\sqrt{6}}$

(Teor. Bisectriz interior)

$$\frac{6\sqrt{6}}{x} = \frac{8}{19}$$

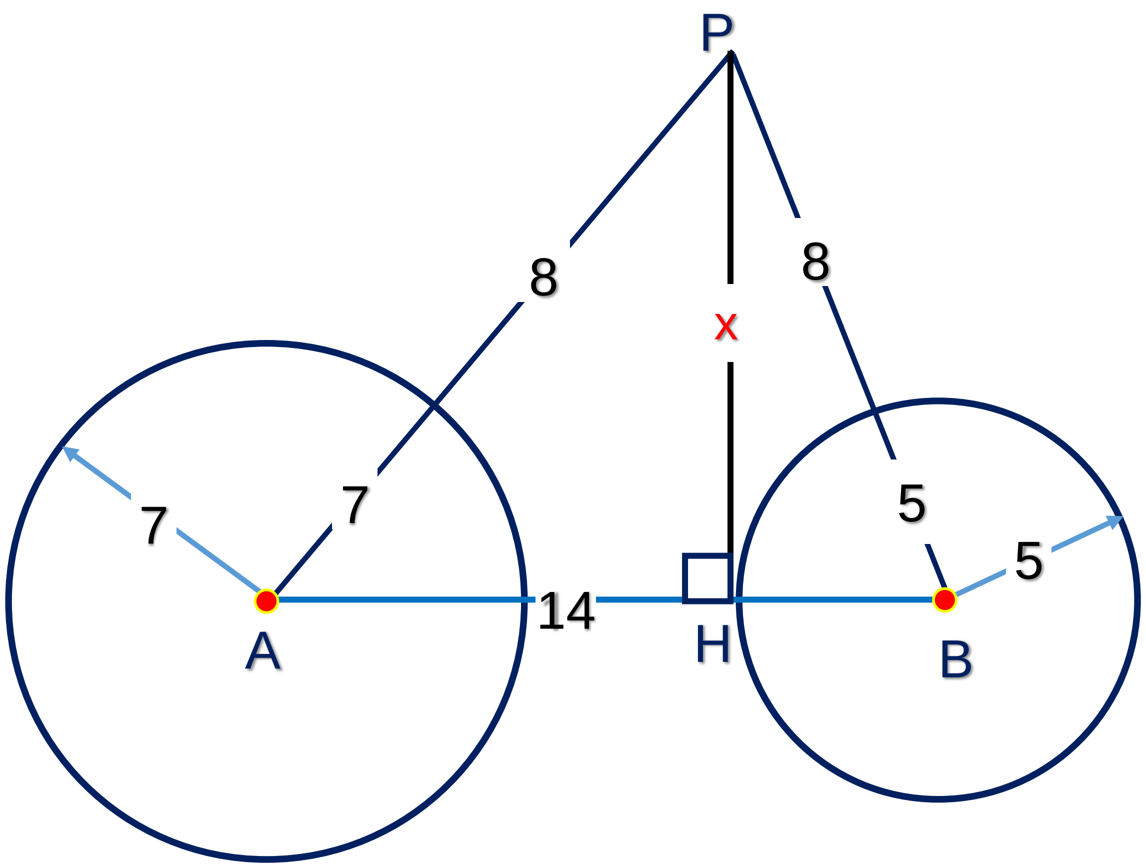
$$\therefore\ x = \frac{57\sqrt{6}}{4}$$

PROBLEMA 10

Los radios de dos circunferencias miden 7 y 5 y la distancia entre sus centros es 14. Si un punto exterior dista de las dos circunferencias 8, halle la distancia de dicho punto a la línea que une los centros.

RESOLUCIÓN

Piden = x



- En el Δ BAC (Teor. de Herón)

$$p = \frac{15 + 13 + 14}{2} = 21$$

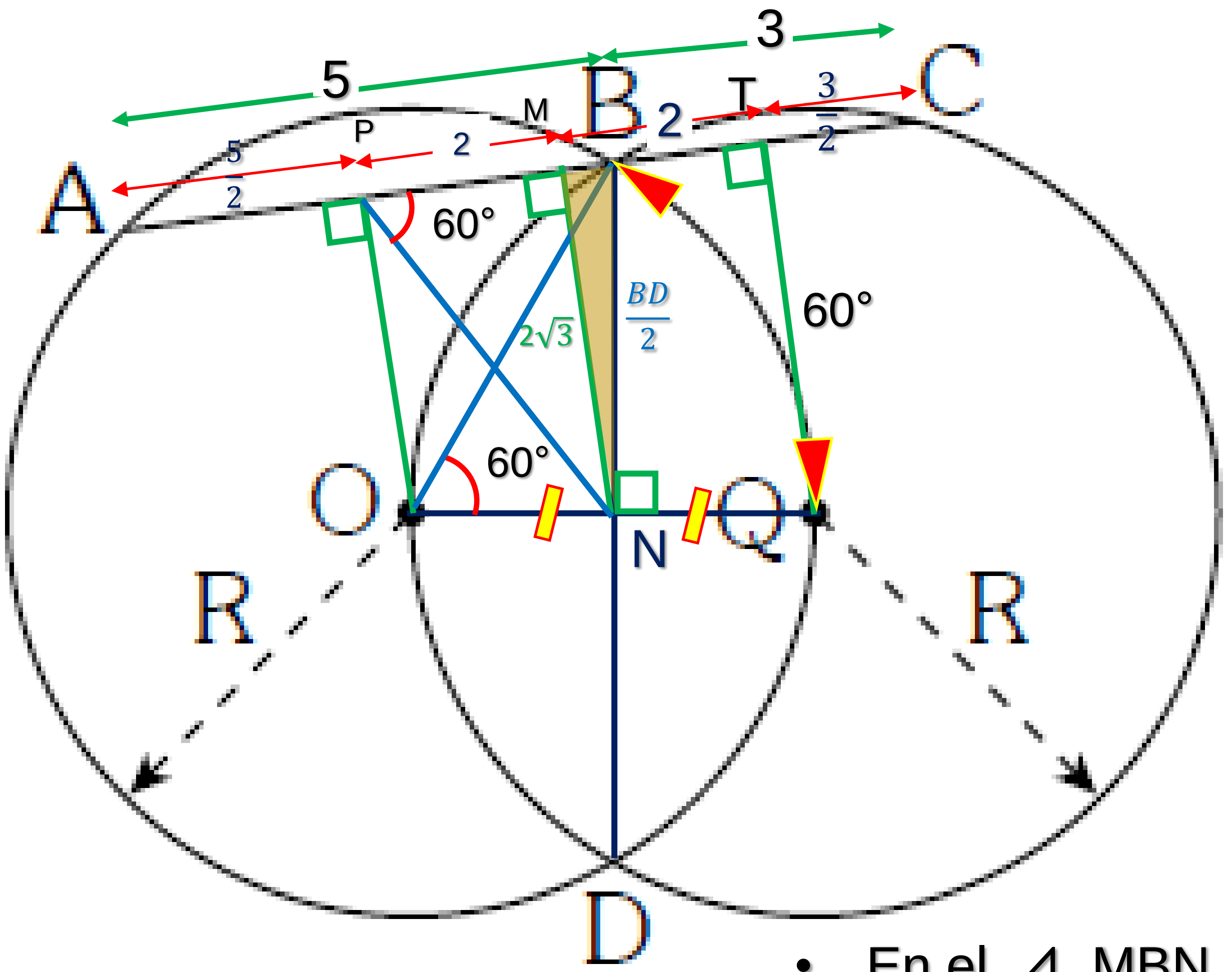
$$x = \frac{2}{14} \cdot \sqrt{21.(21-15).(21-13).(21-14)}$$

$$x = \frac{1}{7} \cdot \sqrt{21.(6).(8).(7)}$$

$$\therefore\ x = 12$$

PROBLEMA 11 **En la figura, AB = 5 y BC = 3. Halle BD.**

RESOLUCIÓN Piden: el valor de BD



- Por teorema $m\,\overset{\frown}{BQ} = 60°$

  BN = ND y ON = NQ

- Por teorema AP = PB

  BT = TC

- Trazo $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ en ⏢ OPTQ

  ➡ PM = MT

- En el ⏢ OPBN es inscriptible

  m ∢ BON = m ∢ BPN = 60°

- En el ⊿ PMN (notable 30° - 60°)

  ➡ $MN = 2\sqrt{3}$

- Del gráfico BM = 1/2

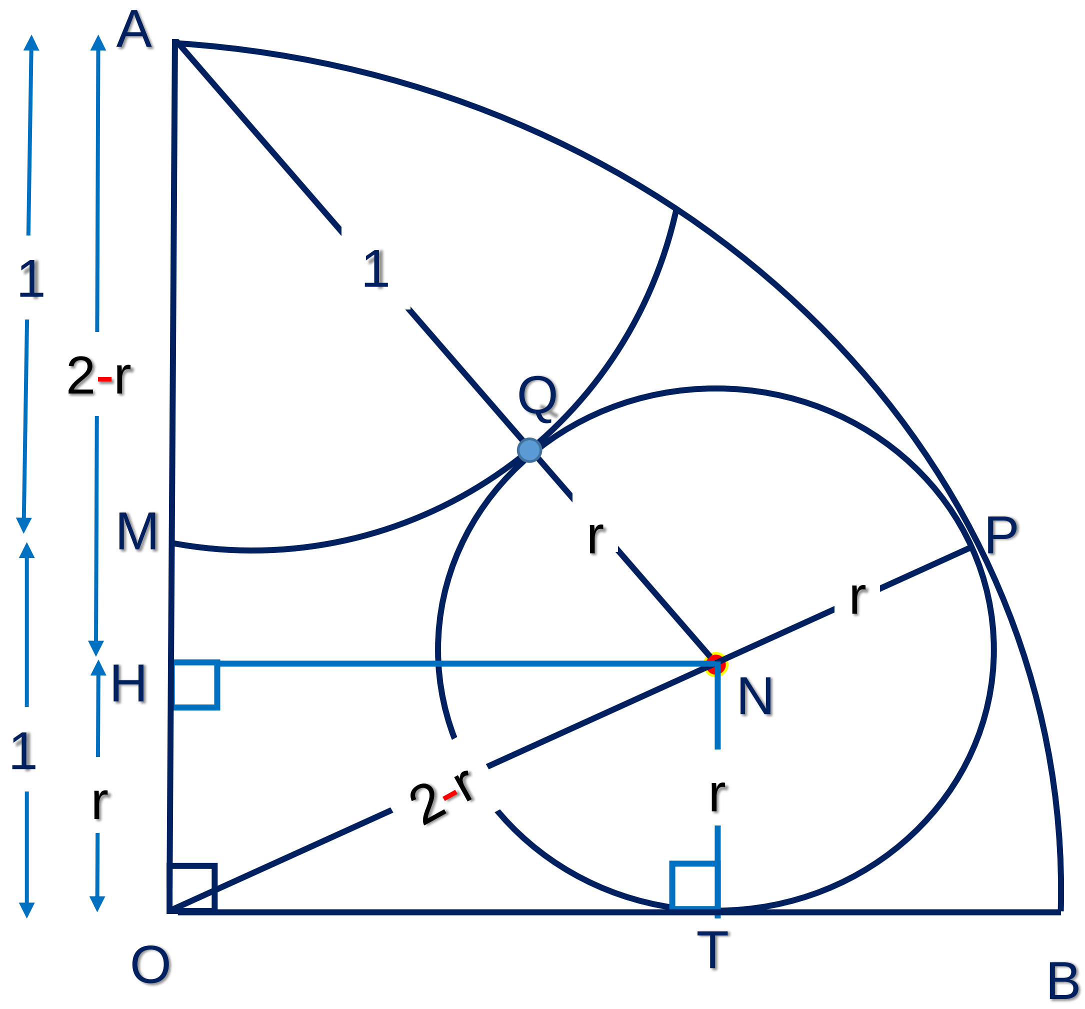
- En el ⊿ MBN

$$\left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$$

$\therefore$ **BD = 7**

PROBLEMA 12 **Si AO = OB = 2 y AM = MO, halle el valor del radio *r*.**

RESOLUCIÓN Piden: el valor del radio = r



- Del gráfico:

  O, N, P son colineales

- OHNT es un rectángulo

  A, Q, N, son colineales

- En el Δ AON (Teor. de proyecciones)

$$(1 + r)^2 - (2 - r)^2 = (2 - r)^2 - r^2$$

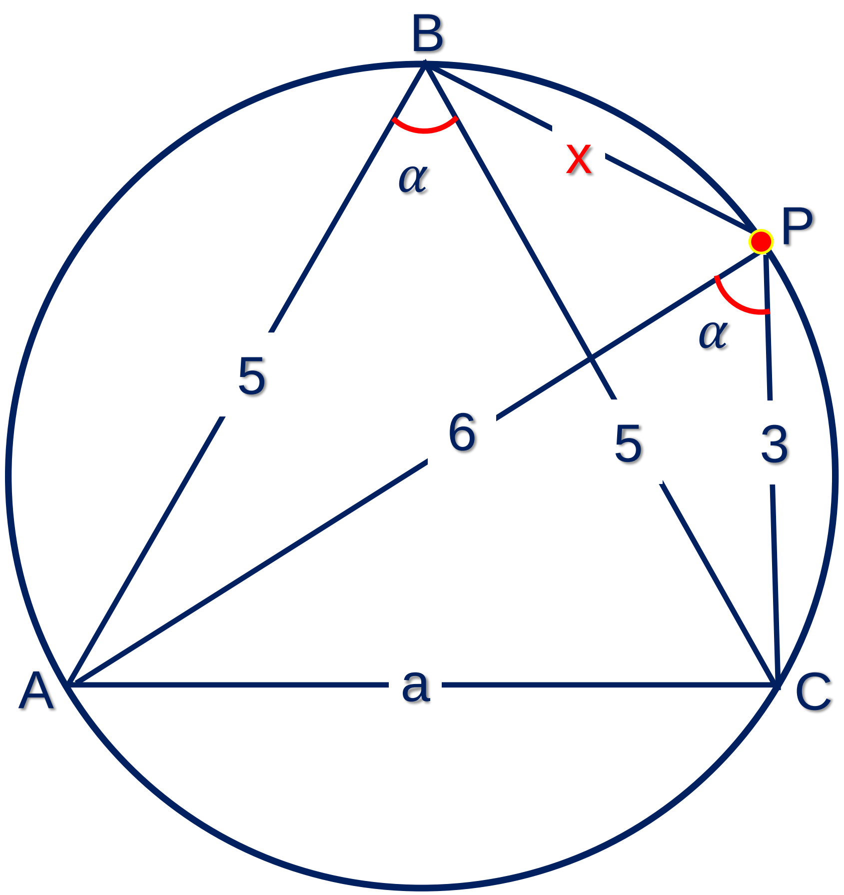
$$(1 + r)^2 + r^2 = 2(2 - r)^2$$

$$\cancel{2r^2} + 2r + 1 = 8 - 8r + \cancel{2r^2}$$

$$\therefore\ r = \frac{7}{10}$$

PROBLEMA 13 **En un triángulo ABC, AB = BC = 5, P es un punto exterior relativo a $\overline{BC}$ tal que m∢ABC = m∢APC, PA = 6 y PC = 3. Halle PB.**

RESOLUCIÓN Piden: el valor de PB = x



- En el ⏢ BPCA es inscriptible

Teorema de Ptolomeo

➡ a . x + 5 . 3 = 6 . 5

a . x = 15 . . . . (I)

Teorema de Viette

➡ $\frac{6}{5} = \frac{3.x + 5.a}{5.x + 3.a}$

7.a = 15.x . . . . (II)

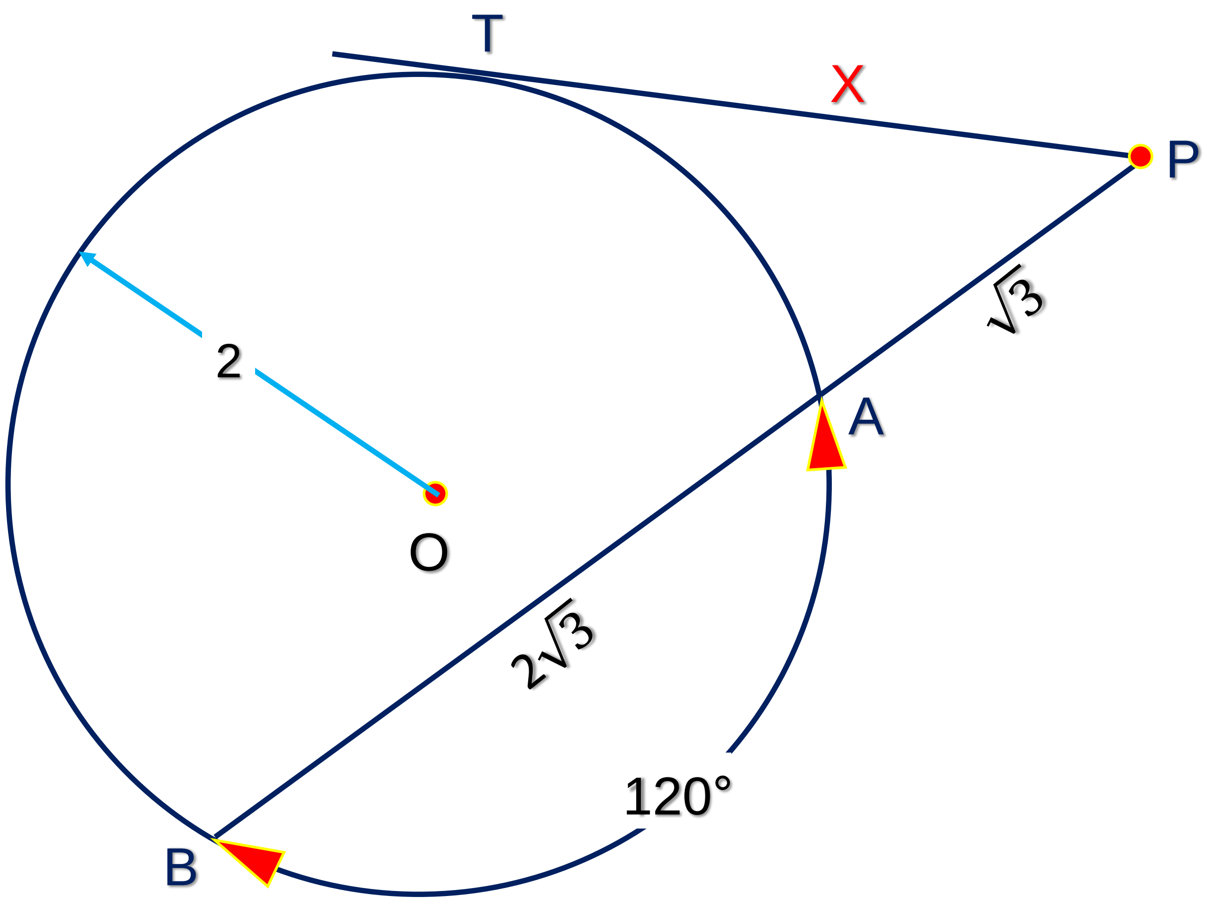
Dividiendo I entre II

$\frac{a.x}{7.a} = \frac{15}{15.x}$

$$\boxed{\therefore\ x = \sqrt{7}}$$

PROBLEMA 14 **Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{PT}$ y la secante $\overline{PAB}$, tal que m$\overset{\frown}{AB}$ = 120°, AP = $\sqrt{3}$ m y el radio de la circunferencia mide 2 m. Halle TP.**

RESOLUCIÓN Piden: el valor de TP = x



- Dato:

$$m\overset{\frown}{AB} = 120°$$

- Por teorema:

$$\Rightarrow \quad AB = 2\sqrt{3}$$

- Teorema de la tangente

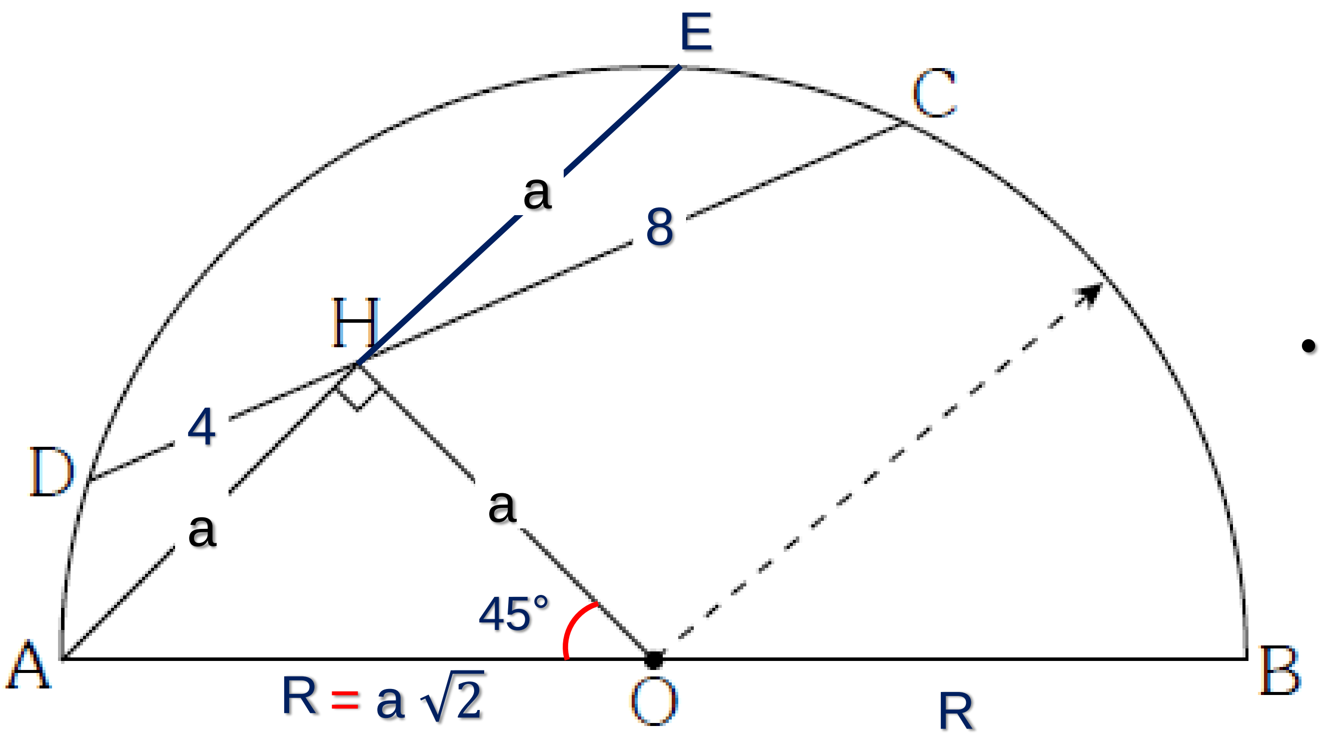
$$x^2 = \sqrt{3}\ (3\sqrt{3})$$

$$\boxed{\therefore\ x = 3m}$$

PROBLEMA 15 **Si O es centro, DH = 4 m, HC = 8 m y AH = HO, halle OB.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de OB = R



- Por teorema:

$$AH = HE = a$$

- En $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ (Teorema de cuerdas)

$$a^2 = 4 \, . \, 8$$

$$\boxed{a = 4\sqrt{2}}$$

- En el ⊿ AHO (Notable 45°)

$$R = a\sqrt{2}$$

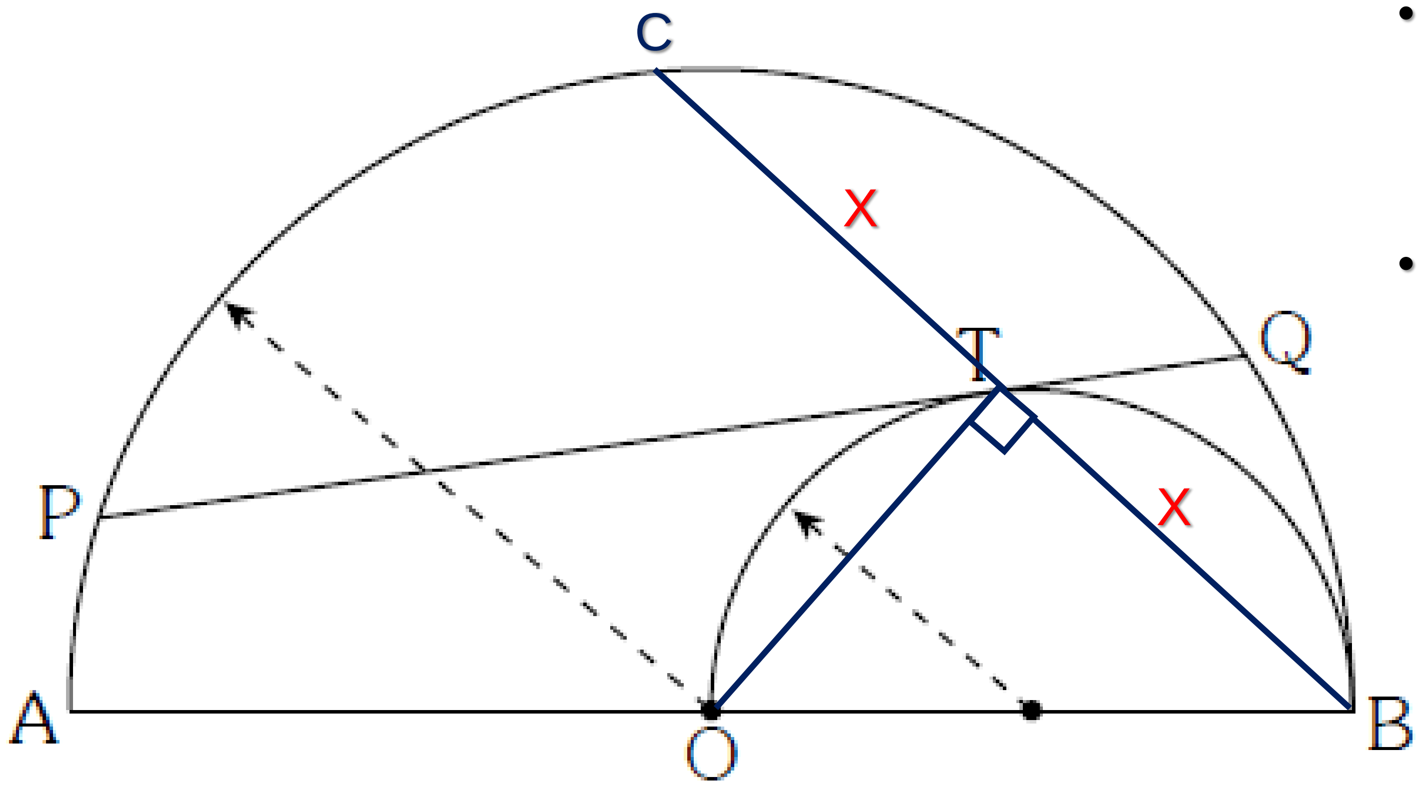
$$R = 4\sqrt{2} \, . \, \sqrt{2}$$

$$\boxed{\therefore \; R = 8m}$$

PROBLEMA 16 En la figura, O es centro, $\overline{OB}$ es diámetro, T es punto de tangencia y (PT)(TQ) = 36 m². Halle TB.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de TB = x



- Por teorema:

$$CT = TB = x$$

- Dato:

$$(PT)\ (TQ) = 36$$

- En $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ (Teorema de cuerdas)

$$x^2 = (PT)\ (TQ)$$

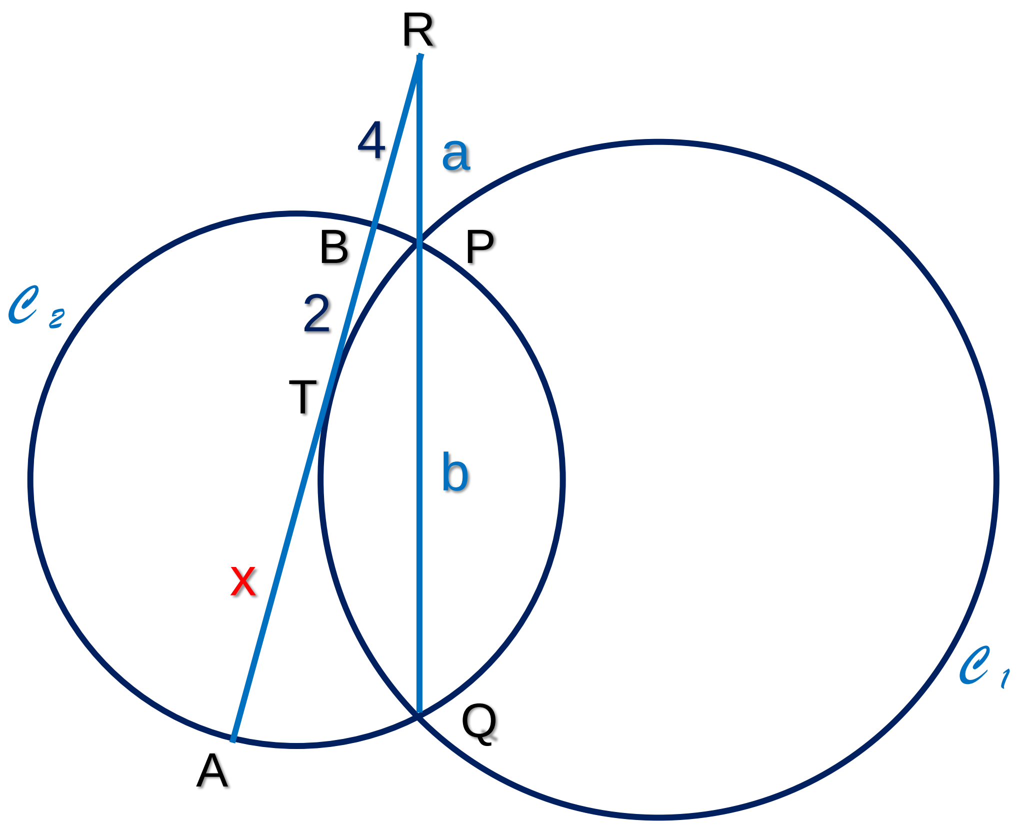
$$x^2 = 36$$

$$\therefore\ x = 6m$$

PROBLEMA 17

Se tiene dos circunferencias secantes en P y Q, se prolonga $\overline{QP}$ hasta el punto R y se traza la secante $\overline{RBA}$ a una de ellas y es tangente a la otra en el punto T. Si RB = 4 m y TB = 2 m, halle TA.

RESOLUCIÓN Piden: el valor de TA = x



- Teorema de la tangente

En $\mathcal{C}_1$: $6^2 = a(a + b)$ .... (I)

- Teorema de la secante

En $\mathcal{C}_2$: $4(6 + x) = a(a + b)$ .... (II)

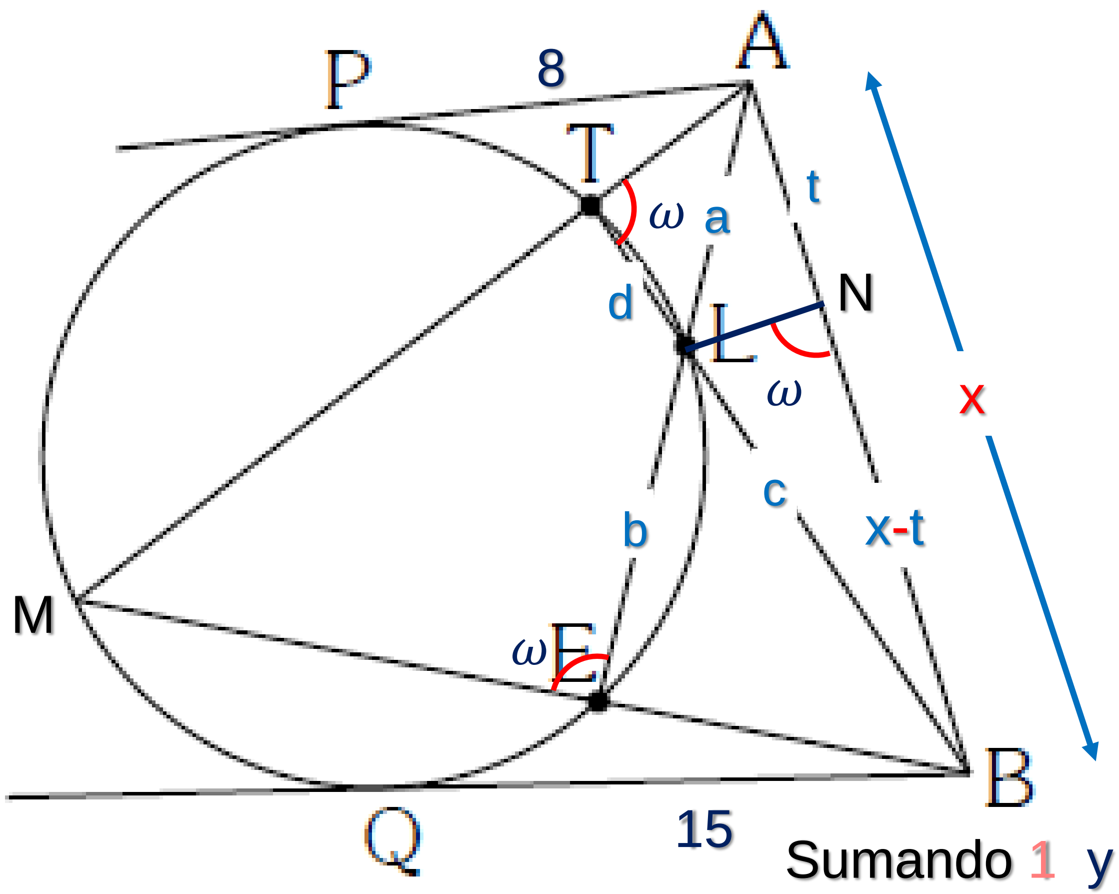
Igualando I y II

$$6^2 = 4(6 + x)$$

$$\therefore\ x = 3m$$

PROBLEMA 18 Si AP = 8 m, QB = 15 m y P y Q son puntos de tangencia, halle AB.

RESOLUCIÓN Piden: el valor de AB = x



- Teorema de la tangente $8^2 = a(a+b)$ . . . . (I)
- Trazo $\overline{LN}$ tal que $m\measuredangle LNB = \omega$
- En el ⏢ ELNB es inscriptible

  ➡ $a(a+b) = t \cdot x$ . . . . . (II)

  Igualando I y II $8^2 = t \cdot x$ . . . . (1)

- Teorema de la tangente $15^2 = c(c+d)$ . . . (i)
- En el ⏢ MELT es inscrito

  $m\measuredangle MEL = m\measuredangle LTA = \omega$

- En el ⏢ TLNA es inscriptible

  ➡ $c(c+d) = (x-t) \cdot x$ . . . (ii)

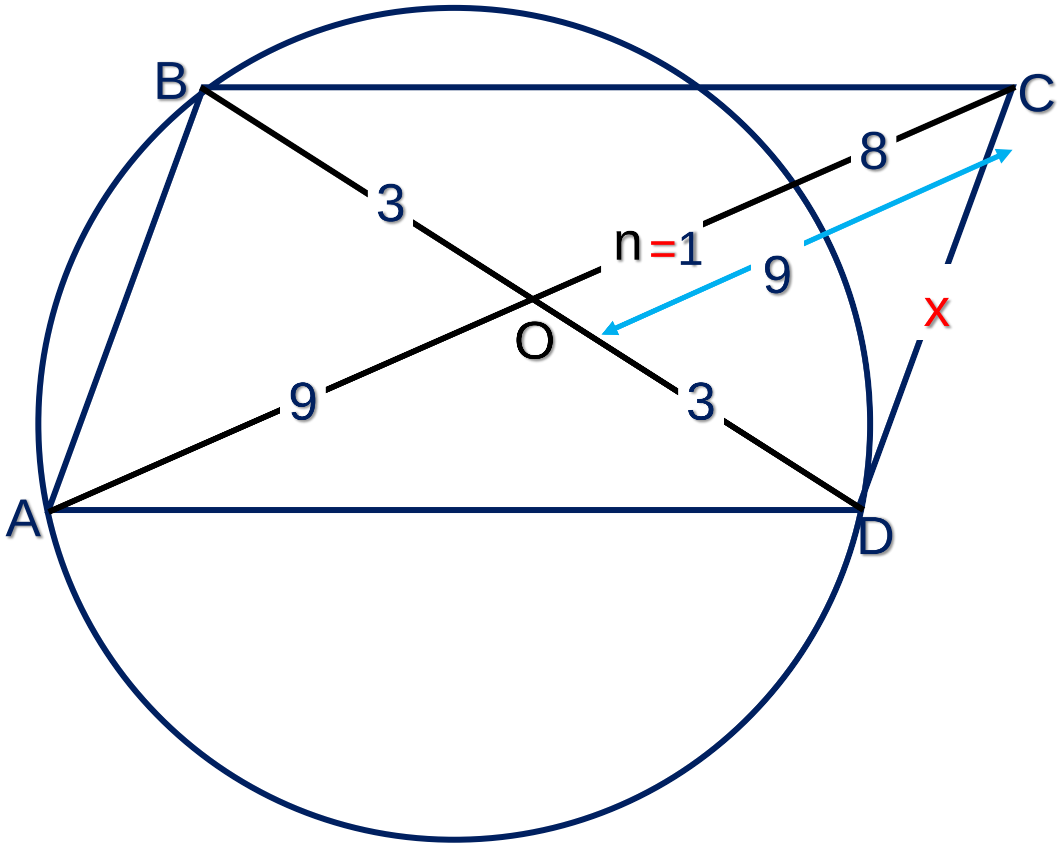
  Igualando i y ii $15^2 = (x-t) \cdot x$ . . . . (2)

Sumando 1 y 2: $8^2 + 15^2 = \cancel{t.x} + x^2 - \cancel{t.x}$

$\boxed{\therefore\ x = 17m}$

PROBLEMA 19 **En un paralelogramo ABCD, AC = 18 m y BD = 6 m. Si la circunferencia circunscrita al triángulo ABD es secante de $\overline{BC}$ y tangente a $\overline{CD}$ en D, halle CD.**

RESOLUCIÓN Piden: el valor de CD = x



Dato: ABCD es un paralelogramo

➡ O es el centro ▱ ABCD

AO = OC = 9 BO = OD = 3

- Teorema de Las cuerdas

$n \cdot 9 = 3 \cdot 3$ ➡ $\boxed{n = 1}$

- Teorema de la tangente

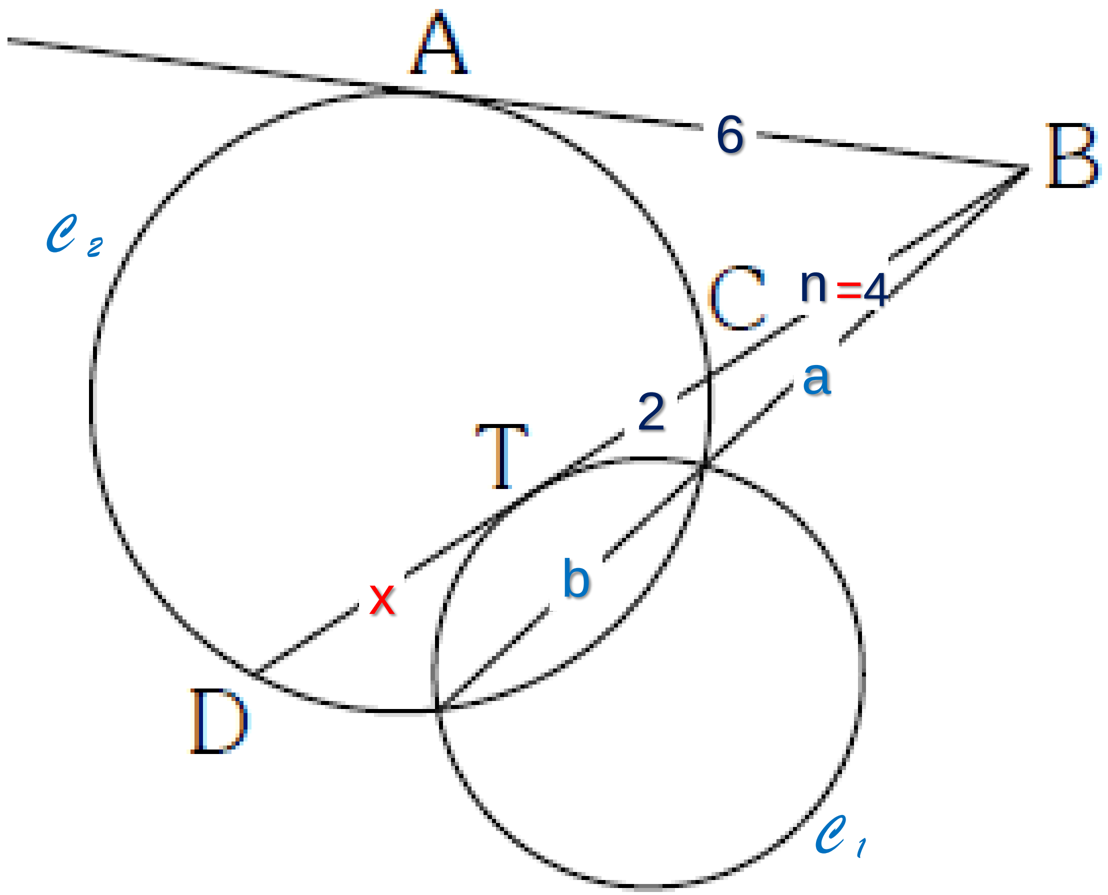
$x^2 = 8(18)$

$\therefore x = 12m$

PROBLEMA 20 **En la figura, AB = 6 m, TC = 2 m y A y T son puntos de tangencia. Halle TD.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de TD = x



- Teorema de la tangente

En $\mathcal{C}_1$: $a(a+b) = (2+n)^2$

En $\mathcal{C}_2$: $a(a+b) = 6^2$

Igualando ➡ $\boxed{n = 4}$

En $\mathcal{C}_2$: $6^2 = 4 \cdot (6+x)$

$\boxed{\therefore\ x = 3\text{m}}$