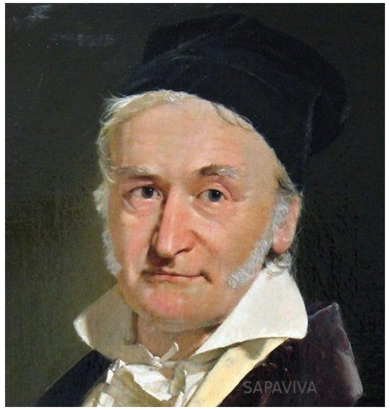
ARITHMETIC

Chapter 6

VERANO UNI

DIVISIBILIDAD

ARITMÉTICA MODULAR



Si son las 2 y pasan 12 horas vuelven a ser las 2. O si son las 6 y pasan 7 horas es la 1, con lo que 6 + 7 = 1. Es la aritmética modular o aritmética del reloj que presentó Johann Carl Friedrich Gauss en su obra maestra Disquisitiones Arithmeticae en 1801, estableciendo las bases de la Teoría de Números.

Con las horas puede hacerse cada 12 o cada 24, con minutos y segundos cada 60 y con cualquier número n, contando desde 0 hasta n-1 y volviendo a pasar siempre por los mismos números. Son las congruencias módulo n $a \equiv b$ (mód n), de extremada importancia en el estudio de los números primos y criptografía, en la ley de reciprocidad cuadrática y en la construcción con regla y compás del polígonos regular de 17 lados, que llevó a Gauss a hacerse matemático a los 19 años.

DIVISIBILIDAD O MULTIPLICIDAD

Evaluaremos la divisibilidad o multiplicidad de números enteros respecto a módulos (módulo $\in \mathbb{Z}^+$) y de las consecuencias que de este análisis se deriven.

Estos conceptos, de DIVISIBILIDAD y MULTIPLICIDAD resultan equivalentes, dependiendo con que operación (división o multiplicación) se evalúe.

Ejemplo 1:

Evaluemos a 56 respecto al módulo 7.

$$\begin{array}{r|l} 56 & 7 \\ \hline 0 & 8 \end{array} \longleftrightarrow 56 = 7 \times 8$$

módulo

56 es DIVISIBLE por 7 <> 56 es MÚLTIPLO de 7

7 es DIVISOR de 56 <> 7 es FACTOR de 56

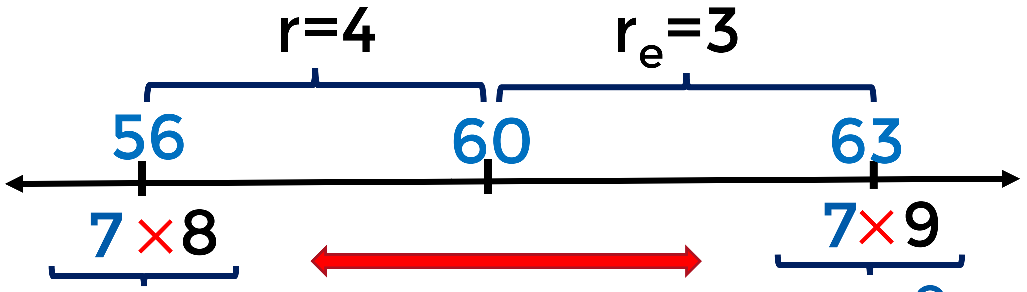
Esto lo denotamos: $56=\overset{\circ}{7}$ o $56=\overline{\overset{\circ}{7}}$ o $56=m7$

Ejemplo 2:

Evaluemos a 60 respecto al módulo 7.

Notemos que: $60 \neq \overset{\circ}{7}$

Lema: Si un número no es múltiplo de cierto módulo, está comprendido entre 2 múltiplos consecutivos de este.



$60 = \overset{\circ}{7} + 4$ $\qquad$ $60 = \overset{\circ}{7} - 3$

Donde: $r + r_e = \text{módulo}$

En resumen:

Dados: $A \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}^+$ (módulo)

Al evaluar A respecto al módulo m se da
uno de dos casos:

* $A = \overset{\circ}{m} \Rightarrow A = m \times K$; $K \in \mathbb{Z}$

* $A \neq \overset{\circ}{m} \Rightarrow A = \overset{\circ}{m} + r \vee A = \overset{\circ}{m} - r_e$

Siendo: $r + r_e = \text{módulo}$

Ejemplos:

* $100 \neq \overset{\circ}{7} \Rightarrow 100 = \overset{\circ}{7} + 2 \vee 100 = \overset{\circ}{m} - 5$

* $100 \neq \overset{\circ}{13} \Rightarrow 100 = \overset{\circ}{13} + 9 \vee 100 = \overset{\circ}{13} - 4$

* $\overline{abc} = \overset{\circ}{19} \Rightarrow \overline{abc} = 19 \times K$; $K \in \{6;7;8;9; \ldots ;52\}$

* $120 = \overset{\circ}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{ab} \in \{10;12;15;20;24;30;40;60\}$

* $\overline{xy8} = \overset{\circ}{17} \Rightarrow \overline{xy8} = 17 \times N$; $N \in \{14;24;34; \ldots ;54\}$

* $\overline{ab} = \overset{\circ}{19} + 17 \Rightarrow \overline{ab} = 19 \times K + 17$; $K \in \{0;1;2;3;4\}$

Tener en cuenta que:

* $A = \overset{\circ}{1}$; $\forall A \in \mathbb{Z}$

* $A = \overset{\circ}{A}$; $\forall A \in \mathbb{Z}^+$

* $0 = \overset{\circ}{M}$; $\forall M \in \mathbb{Z}$

OPERACIONES BÁSICAS:

ADICIÓN

$$\overset{\circ}{m}+\overset{\circ}{m}+\overset{\circ}{m}+\overset{\circ}{m}+\ldots+\overset{\circ}{m}=\overset{\circ}{m}$$

$$(\overset{\circ}{m}+a)+(\overset{\circ}{m}+b)=\overset{\circ}{m}+(a+b)$$

SUSTRACCIÓN

$$\overset{\circ}{m}-\overset{\circ}{m}=\overset{\circ}{m}$$

$$(\overset{\circ}{m}+a)-(\overset{\circ}{m}+b)=\overset{\circ}{m}+(a-b)$$

MULTIPLICACIÓN

$$(\overset{\circ}{m})\times k=\overset{\circ}{m} \text{ siempre que } k\in\mathbb{Z}$$

$$(\overset{\circ}{m}+a)\times(\overset{\circ}{m}+b)=\overset{\circ}{m}+(a\times b)$$

POTENCIACIÓN

$(\overset{\circ}{m})^K=\overset{\circ}{m}$; siempre que $K\in\mathbb{Z}^+$

$$(\overset{\circ}{m}+r)^k=\overset{\circ}{m}+r^k \text{ siempre que } k\in\mathbb{Z}^+$$

$$(\overset{\circ}{m}-r)^k=\overset{\circ}{m}+r^k \text{ cuando } k \text{ es par.}$$

$$(\overset{\circ}{m}-r)^k=\overset{\circ}{m}-r^k \text{ cuando } k \text{ es impar.}$$

Ejemplos:

* $(\overset{\circ}{7}+5)\times(\overset{\circ}{7}+2)=\overset{\circ}{7}+10=\overset{\circ}{7}+3$
* $(\overset{\circ}{13}-4)\times(\overset{\circ}{13}-5)=\overset{\circ}{13}+20=\overset{\circ}{13}+7$
* $(\overset{\circ}{19}+2)^5=(\overset{\circ}{19}+32)=\overset{\circ}{19}+13$
* $(\overset{\circ}{5}-2)^7=\overset{\circ}{5}-128=\overset{\circ}{5}-3=\overset{\circ}{5}+2$

NOTA:

En la potenciación, resulta muy conveniente trabajar con residuo 1,
ya sea por defecto o por exceso.

Aplicación:

Determine el residuo de dividir 2020^{777} entre 13

PRINCIPIOS DE DIVISIBILIDAD

PRINCIPIO 1:

Si un número es múltiplo de cierto módulo, entonces es múltiplo de los divisores de dicho módulo.

$$\text{Si } A=\overset{\circ}{m} \rightarrow A=\overset{\circ}{d}\,;\ (d \text{ es divisor de } m)$$

PRINCIPIO 2:

Si un número es múltiplo de varios módulos a la vez, entonces es múltiplo del menor múltiplo común (MCM) de dichos módulos.

Si:

$$A=\overset{\circ}{m}\pm r$$
$$A=\overset{\circ}{n}\pm r$$
$$A=\overset{\circ}{p}\pm r$$

$$\Rightarrow A=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(m;\ n;\ p)}}\pm r$$

PRINCIPIO 3:

Si el producto de dos números es múltiplo de cierto módulo, y uno de ellos no posee algún factor en común (además del 1) con el módulo, entonces el otro número es múltiplo del módulo.

(PRINCIPIO ARQUÍMEDES)

Si $A\times k=\overset{\circ}{m}$, pero A y m no tiene algún factor en común (además del 1) $\rightarrow k=\overset{\circ}{m}$

Ejemplos:

* $35.N=\overset{\circ}{12} \rightarrow N=\overset{\circ}{12}$
* $5.N=\overset{\circ}{12}+10 \rightarrow N=\overset{\circ}{12}+2$
* $6.M=\overset{\circ}{21}+12 \rightarrow 2.N=\overset{\circ}{7}+4 \rightarrow N=\overset{\circ}{7}+2$
* $7.K=\overset{\circ}{11}+\underbrace{2+33} \rightarrow 7.K=\overset{\circ}{11}+35 \rightarrow K=\overset{\circ}{11}+5$

PROPIEDADE

PROPIEDAD 1:
El producto de n números enteros positivos consecutivos es siempre múltiplo del factorial de n. ($n!=1\times2\times3\times\ldots\times n$).

Ejemplo:

$N=\overline{a35}_7\times\overline{a36}_7\times\overline{a40}_7\times\overline{a41}_7\times\overline{a42}_7 \rightarrow N=\overset{\circ}{\overline{120}}$

PROPIEDAD 2:
De los N primeros enteros positivos, la cantidad de estos que son múltiplos de m, está dada por la parte entera del cociente de N entre m.

Ejemplo:

¿De los 800 primeros enteros positivos, cuántos son múltiplos de 37?

$\rightarrow \dfrac{800}{37}=21{,}621\ldots \rightarrow$ Son: 21 números

PROPIEDAD 3:
De un grupo de N números enteros consecutivos, la cantidad de estos que son múltiplos de m está dada por el cociente de N entre m, siempre y cuando sea exacto (entero).

Ejemplo:

¿De los números que se expresan con tres cifras en el sistema senario, son múltiplos de 20? ?

Tenemos 5x6x6 = 180 números consecutivos

$\rightarrow \dfrac{180}{20}=9 \rightarrow$ Son: 9 números

PROPIEDAD 4:
Todo número impar elevado a un exponente par es múltiplo de ocho más uno.

Ejemplo:

$N=\overline{a41a}_7^{\;\overline{bbbb}_5} \rightarrow N=\overset{\circ}{8}+1$

PROPIEDAD 5:
Todo número par (que no termine en cero) elevado a un exponente múltiplo de 4 siempre termina en 6.

Ejemplo:

$N = \overline{b3b1}_9^{\overline{ab0}_4} \rightarrow N = \overline{\ldots 6}$

PROPIEDAD 6:
Todo número impar (que no termine en cinco) elevado a un exponente múltiplo de 4 siempre termina en 1.

Ejemplo:

$M = \overline{b1b}_5^{\overline{mn0}_4} \rightarrow M = \overline{\ldots 1}$

PROPIEDAD 7:
El valor de un numeral en cierta base es múltiplo de la k-ésima potencia de la base, más el bloque formado por las k últimas cifras, en dicha base.

Sea: $M = \overline{abcde}_{(n)} \Rightarrow M = \overset{\circ}{n} + e$

También: $M = \overset{\circ}{\overline{n^2}} + \overline{de}_{(n)}$

Así mismo: $M = \overset{\circ}{\overline{n^3}} + \overline{cde}_{(n)}$

Ejemplo:

$M = \overline{xyz143}_{(5)} \rightarrow M = \overset{\circ}{5} + 3$

También: $M = \overset{\circ}{\overline{5^2}} + 43_{(5)} = \overset{\circ}{\overline{25}} + 23$

Así mismo: $M = \overset{\circ}{\overline{5^3}} + 143_{(5)} = \overset{\circ}{\overline{125}} + 48$

Observación:

* Si: $M = \overset{\circ}{9} + 5 \rightarrow M = \overline{\ldots 5}_{(9)}$

* Si: $M = \overset{\circ}{\overline{16}} + 7 \rightarrow M = \overset{\circ}{\overline{4^2}} + 13_{(4)} \rightarrow M = \overline{\ldots 13}_{(4)}$

RESTOS POTENCIALES (R.P.)

Son los restos que se obtienen al evaluar las potencias enteras no negativas de un número entero positivo, respecto a un determinado módulo.

Ejemplo:

Al evaluar las potencias de 2, respecto al módulo 7. Ordenadamente obtenemos:

$2^0 = 1 = \overset{\circ}{7}+1$

$2^1 = 2 = \overset{\circ}{7}+2$

$2^2 = 4 = \overset{\circ}{7}+4$

$2^3 = 8 = \overset{\circ}{7}+1$

$2^4 = 16 = \overset{\circ}{7}+2$

$2^5 = 32 = \overset{\circ}{7}+4$

$2^6 = 64 = \overset{\circ}{7}+1$

...

Son 3 R.P. diferentes que se repiten ordenada y periódicamente.

A esta cantidad denominaremos GAUSSIANO (G)

G = 3

Tomando el Gaussiano como módulo para expresar al exponente.

Podemos observar que:

$2^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{7}+1$; $2^{\overset{\circ}{3}+1} = \overset{\circ}{7}+2$; $2^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{7}+4$

Esto nos puede ayudar a responder:

- ¿Cuál es el residuo de dividir $2^{200} \div 7$?
- ¿Cuál es la suma de valores de x, si el residuo de dividir $100^{\overline{1xx}}$ entre 7, es 2?
- ¿Cuál es el residuo de dividir: $2^{10}+2^{11}+2^{12}+....+2^{2021}+2^{2022}$ entre 7?

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Condiciones que aplicadas a las cifras de un numeral permiten establecer la divisibilidad o no del numeral respecto a cierto módulo, pues determina el residuo.

Veremos los principales criterio para números expresados en base 10.

CRITERIO PARA MÓDULO 2^n o 5^n

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

$N = \overset{o}{2} + e$ | $N = \overset{o}{5} + e$

$N = \overset{o}{2^2} + \overline{de}$ | $N = \overset{o}{5^2} + \overline{de}$

$N = \overset{o}{2^3} + \overline{cde}$ | $N = \overset{o}{5^3} + \overline{cde}$

... | ...

CRITERIO PARA MÓDULO 3 o 9

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

$N = \overset{o}{3} + a+b+c+d+e$

$N = \overset{o}{9} + a+b+c+d+e$

CRITERIO PARA MÓDULO 11

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

$\quad\quad\;\; ... +-+-+ \Leftarrow$

$N = \overset{o}{11} + a-b+c-d+e$

CRITERIO PARA MÓDULO 7

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

$\quad ...\;x\;x\;x\;x\;x \Leftarrow$

$...\;\underline{2\;3\;1}\;\underline{2\;3\;1}$

$+ \quad - \quad +$

$N = \overset{o}{11} - 3a - 1b + 2c + 3d + 1e$

CRITERIO PARA MÓDULO 13

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

... x x x x x ⇐

... 1 4 3 1 4 3 1

− + − +

$$N = \overset{\circ}{13} + 3a - 1b - 4c - 3d + 1e$$

CRITERIO PARA MÓDULO 33 o 99

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

...de 2 en 2

$$N = \overset{\circ}{33} + a + \overline{bc} + \overline{de}$$

$$N = \overset{\circ}{99} + a + \overline{bc} + \overline{de}$$

CRITERIO PARA MÓDULO 27 o 37

Dado el número: $N = \overline{abcde}$

...de 3 en 3

$$N = \overset{\circ}{27} + \overline{ab} + \overline{cde}$$

$$N = \overset{\circ}{37} + \overline{ab} + \overline{cde}$$

También veamos algunos criterios de divisibilidadd según la base n:

CRITERIO PARA MÓDULO "n-1"

$$\overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{(n-1)} + a + b + c + d + e$$

Si $a+b+c+d+e = \overset{\circ}{(n-1)} \rightarrow \overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{(n-1)}$

CRITERIO PARA MÓDULO "n+1"

$$\overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{(n+1)} + a - b + c - d + e$$

Si $a-b+c-d+e = \overset{\circ}{(n+1)} \rightarrow \overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{(n+1)}$

1. Del 1 al 400 determine cuántos números no son múltiplos de 15.

A) 25
B) 21
C) 26
D) 19
E) 28

F) 374

RESOLUCIÓN

Calculamos la cantidad de m15:

$$15k \leq 400$$

$$k \leq 26{,}666\ldots$$

$$k = 1; 2; 3; \ldots; 26$$

Hay 26 números m15

Luego: Nos piden los números NO m15

Entonces: Total – cant(m15)

$$\therefore\ 400 - 26 = 374$$

Rpta: F

2. ¿Cuál es el menor número de términos de la siguiente sucesión cuya suma es múltiplo de 29?

7; 11; 15; 19; ...

A) 9 B) 10 C) 11

D) 12 E) 13

RESOLUCIÓN

Por dato: $7 + 11 + 15 + 19 + \ldots = \overset{\circ}{m}29$

$+4 \quad +4 \quad +4$

$$\left.\begin{aligned} 7 &= 4(1) + 3 \\ 11 &= 4(2) + 3 \\ 15 &= 4(3) + 3 \\ &\vdots \\ t_n &= 4(n) + 3 \end{aligned}\right\} \quad 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 3(n) = m29$$

n es mínimo

$$\overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + 3n = m29$$

Resolviendo:

$$\underbrace{n}_{29}\;\underbrace{(2n + 5)}_{29} = m29$$

$\boxed{n = 29}$ $\boxed{n = 12}$

Nos piden: $\therefore\ n_{min} = 12$

Rpta: D

3. ¿Cuántos múltiplos de 12 terminados en 4 existen entre 240 y 1800?

A) 24

B) 25

C) 26

D) 27

E) 28

RESOLUCIÓN

Calculamos la cantidad de m12:

$$240 < 12k < 1800$$

$$20 < k < 150$$

$$k = 21; 22; 23; \dots; 149$$

Además: $12k = \dots 4$ ⇒ $\boxed{k = \dots 2}$ $\boxed{k = \dots 7}$

Entonces:

$$k = \underbrace{22; 27; 32; \dots; 147}$$

$$\frac{147 - 17}{5} = 26$$

$\therefore$ 26

Rpta: C

4. ¿Cuántos números de cuatro cifras existen tales que sean múltiplos de 12 pero no de 20?

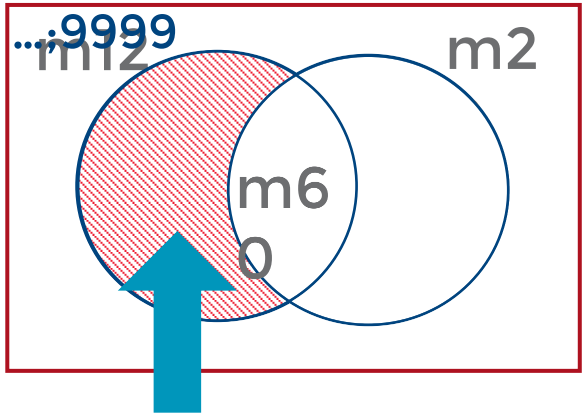
A) 600 B) 540 C) 650

D) 620 E) 580

RESOLUCIÓN

Por Dato:

1000; 1001; 1002; ...;9999



CN(m12) – CN(m60)

$1000 \leq 12k \leq 9999$

$83{,}33... \leq k \leq 833{,}25$

$k = \underbrace{84;\ 85;\ 86;\ ...;\ 833}_{833\ -\ 83\ =\ 750}$

$1000 \leq 60p \leq 9999$

$16{,}66... \leq p \leq 166{,}65$

$p = \underbrace{17;\ 18;\ 19;\ ...;\ 166}_{166\ -\ 16\ =\ 150}$

Reemplazando: $\therefore$ 750 – 150 = 600

Rpta: A

5. ¿Cuántos numerales de cuatro cifras que empiezan en 4 son m11?

A) 90

B) 91

C) 92

D) 93

E) 94

RESOLUCIÓN

Calculamos la cantidad de m11 que empiezan en 4:

$$4000 \leq 11k \leq 4999$$

$$363{,}63\ldots \leq k \leq 454{,}45\ldots$$

$$k = \underbrace{364;\ 365;\ 366;\ \ldots;\ 454}$$

Entonces:

$$454 - 363 = 91$$

$$\therefore\ 91$$

Rpta: B

6. Calcule a, si $\overline{a732} = \overline{m37}$.

A) 1

B) 5

C) 7

D) 8

E) 9

RESOLUCIÓN

Del Enunciado:

$$\overline{a732} = \overline{m37}$$

Descomponemos convenientemente:

$$\underbrace{1000a}_{\overset{\circ}{m37}+1} + \underbrace{732}_{\overset{\circ}{m37}-8} = \overset{\circ}{m37}$$

$$\overset{\circ}{m37} + a + \overset{\circ}{m37} - 8 = \overset{\circ}{m37}$$

$$a - 8 = \underbrace{\overset{\circ}{m37}}_{0}$$

$$\therefore \quad a = 8$$

Rpta: D

7. Calcule $\overline{ab}$, si $\overline{ab6127} = \overset{\circ}{m}101$.

A) 23 B) 25 C) 29
D) 30 E) 34

RESOLUCIÓN

Del Enunciado:

$$\overline{ab6127} = m101$$

Descomponemos convenientemente:

$$\underbrace{10000}_{m101+1}\overline{ab} + \underbrace{6127}_{m101+67} = m101$$

$$m101 + \overline{ab} + m101 + 67 = m101$$

$$\overline{ab} + 67 = \underbrace{m101}_{101}$$

$$\therefore \quad \overline{ab} = 34$$

Rpta: E

8. Si se sabe que $\overline{4ab58a} = m56$, calcule a+b.

A) 9

B) 8

C) 7

D) 6

E) 5

RESOLUCIÓN

Del Enunciado:

$\overline{4ab58a} = m56$ → m8, m7

Aplicamos criterio del 8:

$\overline{58a} = m8$ $\boxed{a = 4}$

Aplicamos criterio del 7:

$$\overline{44b584} = m7$$

$$\underbrace{2\ 3\ 1}_{-}\ \underbrace{2\ 3\ 1}_{+}$$

$$-[\,2(4) + 3(4) + 1(b)\,] + [\,2(5) + 3(8) + 1(4)\,] = m7$$

$$-[\,20 + b\,] + [\,38\,] = m7$$

$$18 - b = m7 \quad \boxed{b = 4}$$

Nos piden:

$\therefore\ a + b = 8$

Rpta: B

9. Si se tiene el numeral de la forma $\overline{8ab432}$ que es múltiplo de 99, calcule a – b.

A) 6 B) 4 C) - 4
D) - 6 E) 0

RESOLUCIÓN

Del Enunciado:

$$\overline{8ab432} = m99$$

Aplicamos criterio del 99:

$$\overline{8a} + \overline{b4} + 32 = m99$$

$$84 + \overline{ba} + 32 = m99$$

$$\overline{ba} = m99 - 17$$

$$\overline{ba} = 99 - 17$$

$$\overline{ba} = 82$$

a = 2 b = 8

Nos piden:

$\therefore$ a - b = - 6

Rpta: D

10. El número de la forma $\overline{aa0bbc}$ al ser dividido entre 4; 9 y 25 deja como residuo 2; 4 y 7 respectivamente. Calcule a.

A) 6 B) 4 C) 2

D) 0 E) 3

RESOLUCIÓN

Del Enunciado:

$$N = \overline{aa0bbc}$$

N = m4 + 2 - 20

N = m9 + 4

N = m25 + 7 - 25

N = m4 - 18

N = m25 - 18

N = m100 - 18

N = m100 + 82

N = ... 82

$\boxed{b = 8}$ $\boxed{c = 2}$

Luego: $N = \overline{aa0882}$ = m9 + 4

Aplicamos criterio del 9:

a + a + 0 + 8 + 8 + 2 = m9 + 4

2a + 18 = m9 + 4

a = m9 - 7

∴ a = 2

Rpta: C

11. Si $\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{1375}$, entonces $\overline{xyz}$ es divisible por

A) 11. B) 13. C) 37.

D) 17. E) 29.

RESOLUCIÓN

Si:

$$\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{1375}$$

Entonces:

$$\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{1375}$$

Criterio por 125:

Si: $\overline{xy6yz} = \overset{\circ}{125}$

Se cumple:

$$\underbrace{\overline{6yz}}_{625} = \overset{\circ}{125} = 125\text{x}5$$

$\Rightarrow$ y = 2
z = 5

Criterio por 11:

(Reemplazando X e Y)

$$\Rightarrow \overline{x\,2625} = \overset{\circ}{11}$$

(signos de derecha a izquierda: + - + - +)

Se cumple:

$$x - 2 + 6 - 2 + 5 = \overset{\circ}{11}$$

$\Rightarrow$ x = 4

Entonces:

$$\overline{xyz} = 425 = 5^2\text{x}17$$

$\therefore$ $\overline{xyz}$ Sera divisible por 17

Rpta: D

12. Si $\overline{abcd}$ es el menor número que al ser expresado en las bases 5; 7; 4 y 6 termina en las cifras 3; 1; 0; 12 respectivamente, calcular el residuo de dividir

$\underbrace{\overline{abcd44\ldots\ldots4}}_{67\text{ cifras}}$ entre 7

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Del Dato y completando, para tener residuos iguales :

$$\overline{abcd} = \begin{cases} \overline{\ldots 3}_{(5)} = \overset{\circ}{5} + 3 + 5 \\ \overline{\ldots 1}_{(7)} = \overset{\circ}{7} + 1 + 7 \\ \overline{\ldots 0}_{(4)} = \overset{\circ}{4} \quad + 8 \\ \overline{\ldots 12}_{(6)} = \overset{\circ}{6} + 2 + 6 \end{cases}$$

Entonces:

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{\overline{MCM(5;7;4\ y\ 6)}} + 8 = \overset{\circ}{420} + 8$$

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{420} + 8$$

$$\overline{abcd} = 420 \times 3 + 8$$

(El menor valor)

$$\overline{abcd} = 1268$$

Reemplazando y aplicando el criterio por 7:

$$\underbrace{\overset{1\ \ 2\ \ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 1}{1\ 2\ 6\ 8\ 4\ 4\ 4}}_{7\text{ cifras}}\ \underbrace{\overbrace{4\ldots\ldots\ldots 4\ 4\ 4\ 4}^{=0}}_{60\text{ cifras}} \div 7$$

Aplicando el criterio, cada 6 cifras se anulan, por tal razón solo analizamos las 7 primeras cifras, de derecha a izquierda.

$$1 - 4 - 18 - 8 + 8 + 12 + 4 = -5 = \overset{\circ}{7} - 5$$

$$= \overset{\circ}{7} + 2$$

Rpta: B

13. Calcule a+b+c,

si $\overline{4a3bc} = \overset{\circ}{1125}$

A) 20 B) 18 C) 17

D) 21 E) 19

RESOLUCIÓN

Si: $\overline{4a3bc} = \overset{\circ}{1125}$

Entonces:

$\overline{4a3bc} = \overset{\circ}{9} \times \overset{\circ}{125}$

Criterio por 125:

➡ $\overline{4a3bc} = \overset{\circ}{125}$

Se cumple:

$\underbrace{\overline{3bc}}_{375} = \overset{\circ}{125} = 125 \times 3$

➡ b = 7
c = 5

Criterio por 9:

(Reemplazando b y c)

➡ $\overline{4a375} = \overset{\circ}{9}$

Se cumple:

$4 + a + 3 + 7 + 5 = \overset{\circ}{9}$

Resolviendo:

a = 8

$\therefore$ a + b + c + = 20

Rpta: A

14. Si $\overline{abcd}_{(n)} + \overline{dcba}_{(n)}$ es siempre múltiplo de

A) n – 1 B) n C) n+1
D) 3 E) 6

RESOLUCIÓN

Del Dato, efectuando la descomposición polinómica:

$$a \times n^3 + b \times n^2 + c \times n^1 + d + d \times n^3 + c \times n^2 + b \times n^1 + a$$

Ordenando:

$$a \times n^3 + a + b \times n^2 + b \times n^1 + c \times n^2 + c \times n^1 + d \times n^3 + d$$

Factorizando:

$$\underbrace{a(n^3+1)}_{(n+1)(n^2+n+1)} + b \times n(n+1) + c \times n(n+1) + \underbrace{d(n^3+1)}_{(n+1)(n^2+n+1)}$$

Otra vez factorizamos (n+1) :

$$(n+1)(a \times (n^2+n+1) + b \times n + c \times n + d \times (n^2+n+1))$$

Entonces: $\overline{abcd}_{(n)} + \overline{dcba}_{(n)}$

$\therefore$ Sera Múltiplo de (n+1)

Rpta: C

15. ¿Cuántos valores puede aceptar $\overline{abc}$ en

$$368^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} + 9?$$

A) 60 B) 90 C) 120
D) 150 E) 180

RESOLUCIÓN

Por Dato:

$$368^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} + 9$$

Pero: $368^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} + 9$

$$368^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} + 9$$

Efectuando:

$$5^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{11} + 9$$

Donde:

$$\left.\begin{aligned} 5^0 &= \overset{\circ}{11} + 1 \\ 5^1 &= \overset{\circ}{11} + 5 \\ 5^2 &= \overset{\circ}{11} + 3 \\ 5^3 &= \overset{\circ}{11} + 4 \\ 5^4 &= \overset{\circ}{11} + 9 \end{aligned}\right\} G = 5 \text{ (Repetición)}$$

$$5^5 = \overset{\circ}{11} + 1$$

$\vdots \qquad \vdots$

Se Cumple:

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{5} + 4$$

De donde los valores que puede tomar a, b y c son:

c : 4; 9 → 2 valores

b : 0; 1; 2; .....; 9 → 10 valores

a : 1; 2; ....; 9 → 9 valores

La cantidad de valores de $\overline{abc}$ es:

$\therefore$ 2 x 9 x 10 = 180

Rpta: E

16. En el sistema de base 8 la cifra de las unidades del número $4365^{43} \cdot 7937^{67}$ es

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Sea:

$$\underbrace{4365^{43}} \times \underbrace{7937^{67}} = \overline{\ldots\ldots\ldots m}_{(8)} = \overset{\circ}{8} + m$$

Expresando todo $\overset{\circ}{8}$ y efectuando

$$(\overset{\circ}{8}+5)^{43} \times (\overset{\circ}{8}+1)^{67} = \overset{\circ}{8}+m$$

$$(\overset{\circ}{8}+5^{43}) \times (\overset{\circ}{8}+1^{67}) = \overset{\circ}{8}+m$$

$$(\overset{\circ}{8}+5.(5^2)^{21}) \times (\overset{\circ}{8}+1) = \overset{\circ}{8}+m$$

$$\underbrace{(\overset{\circ}{8}+5.(\overset{\circ}{8}+1)^{21}) \times (\overset{\circ}{8}+1)}_{(\overset{\circ}{8}+5)} = \overset{\circ}{8}+m$$

Entonces:

$\therefore$ m = 5

Rpta: E

17. Si $23\times23\times23\times\ldots\times23=\overset{\circ}{m5}+2$ (n factores), n puede ser

A) $\overset{\circ}{m4}$. B) $\overset{\circ}{m4}+1$. C) $\overset{\circ}{m4}+2$.

D) $\overset{\circ}{m4}+3$. E) No existe

RESOLUCIÓN

Por Dato:

$$\underbrace{23\times23\times23\times\ldots\ldots\times23}_{\text{n factores}} = \overset{\circ}{5}+2$$

De Donde:

$$23^n = \overset{\circ}{5}+2$$

Donde:

$$\left.\begin{aligned} 23^0 &= \overset{\circ}{5}+1 \\ 23^1 &= \overset{\circ}{5}+3 \\ 23^2 &= \overset{\circ}{5}+4 \\ 23^3 &= \overset{\circ}{5}+2 \end{aligned}\right\} G = 4 \text{ (Repetición)}$$

$$23^4 = \overset{\circ}{5}+1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Entonces podemos decir:

$$\therefore\ n = \overset{\circ}{4}+3 = m4+3$$

Rpta: D

18. Calcule el menor valor de $\overline{abc}$

si $\underbrace{(5656.....56)}_{20\text{ cifras}}^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{9} + 1$

Dar a + b – c.

A) 0 B) 1 C) – 1

D) 2 E) – 2

RESOLUCIÓN

Por dato:

$$\underbrace{(5656.....56)}_{20\text{ cifras}}^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{9} + 1$$

De donde:

$$\underbrace{5656......56}_{20\text{ cifras}} \div 9$$

Aplicando el criterio por 9:

Sumando sus cifras tenemos.

$$10(5+6) = \underbrace{(5656.....56)}^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{9} + 1$$

$$\underbrace{5656......56}_{20\text{ cifras}} = (5656...56)^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{9}+1$$

Reemplazando:

$$(5656.....56)^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{9} + 1$$

Efectuando:

$$2^{\overline{abc}} = \overset{\circ}{9} + 1$$

Se sabe que:

$$2^{6} = 64 = \overset{\circ}{9} + 1$$

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{6} = 6k = 6 \times 17$$

(mínimo valor) 17

$$\overline{abc} = 102$$

Menor valor de $\overline{abc}$

De Donde:

a = 1 b = 0 c = 2

$\therefore$ 1 + 0 - 2 = - 1

Rpta: C

19. El menor número de 35 cifras, ¿qué resto deja al ser dividido entre 13?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

El menor número será:

$\underbrace{100000.......0}_{35 \text{ cifras}} \div 13$

Aplicando el criterio por 13:

Como cada 6 cifras se se anulan por tal razón solo analizamos las 5 primeras cifras de derecha a izquierda.

+3 -1 -4 -3 1

$1\,0\,0\,0\,0\,\overbrace{\underbrace{......0\,0\,0\,0\,0\,0}_{30 \text{cifras}}}^{=0} = \overset{\circ}{13} + 3 \times 1$

$= \overset{\circ}{13} + 3$

Rpta: C

20. 5^{70} en que cifra termina al ser escrito en base 11.

A) 5 B) 3 C) 10
D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN

Sea:

$5^{70} = \overline{\ldots\ldots m}_{(11)}$

$5^{70} = \overset{\circ}{11} + m$

Aplicando el criterio por 11:

$5^5 = \overset{-}{3}\overset{+}{1}\overset{-}{2}\overset{+}{5} = \overset{\circ}{11} + 1$

$5^{70} = (5^5)^{14}$

$5^{70} = (\overset{\circ}{11} + 1)^{14} = \overset{\circ}{11} + m$

Efectuando:

$\overset{\circ}{11} + 1 = \overset{\circ}{11} + m$

$\therefore\ m = 1$

Rpta: D

MUCHAS GRACIAS

ATENTAMENTE SU PROFESOR