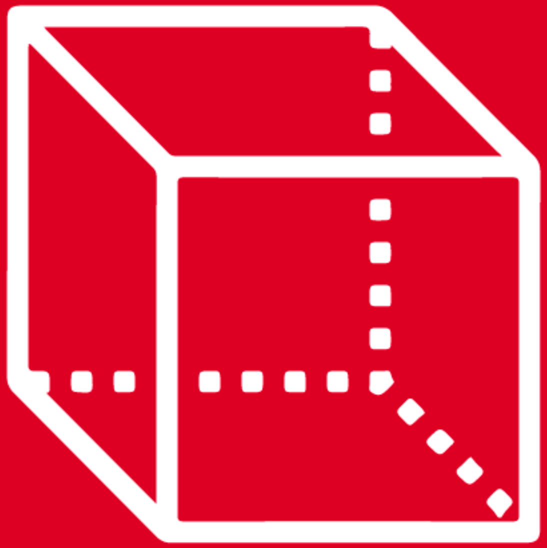
GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

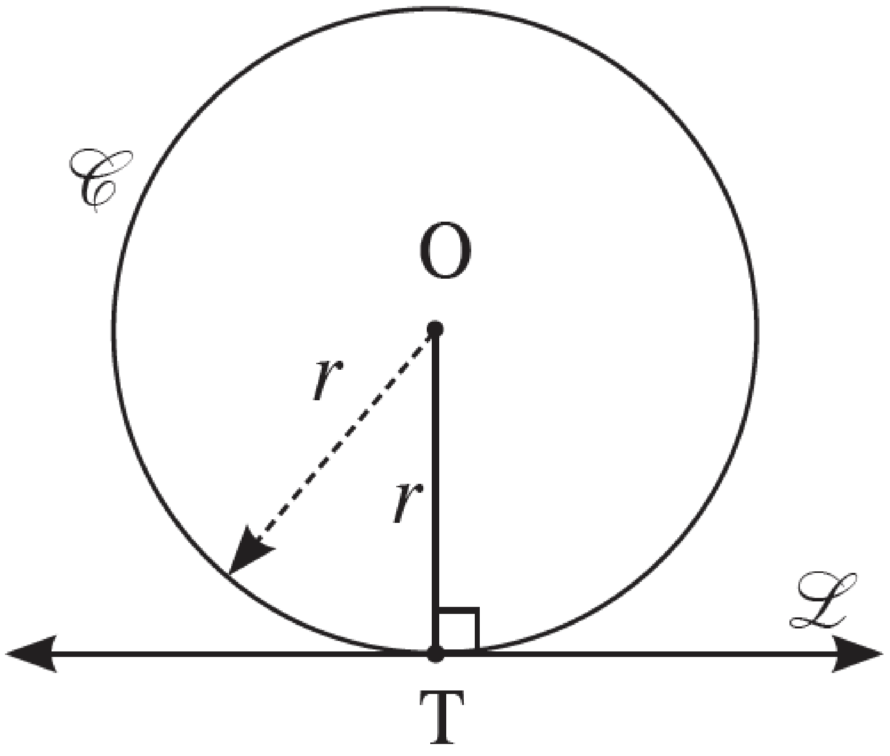
CAPITULO 3 TEORIA



SACO OLIVEROS

TEOREMA FUNDAMENTALES

TEOREMAS : Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



En la figura mostrada:

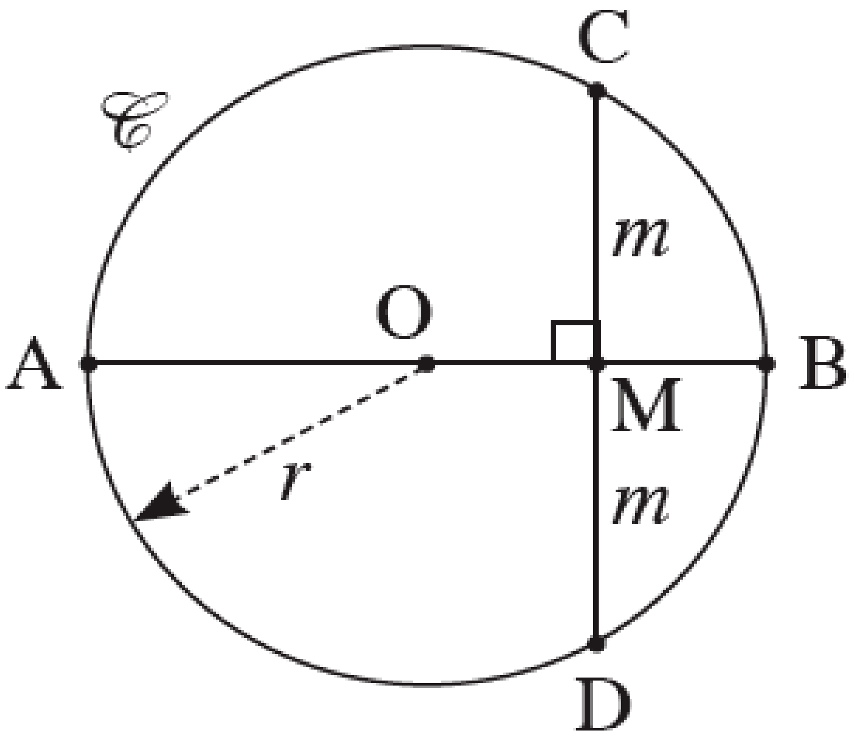
Sea la recta L tangente a la circunferencia,

entonces

$$\boxed{\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L}}$$

TEOREMA FUNDAMENTALES

TEOREMAS : En toda circunferencia un diámetro perpendicular a una cuerda biseca a la cuerda.



En la figura mostrada:

Sean $\overline{AB}$ diámetro y $\overline{CD}$ una cuerda.

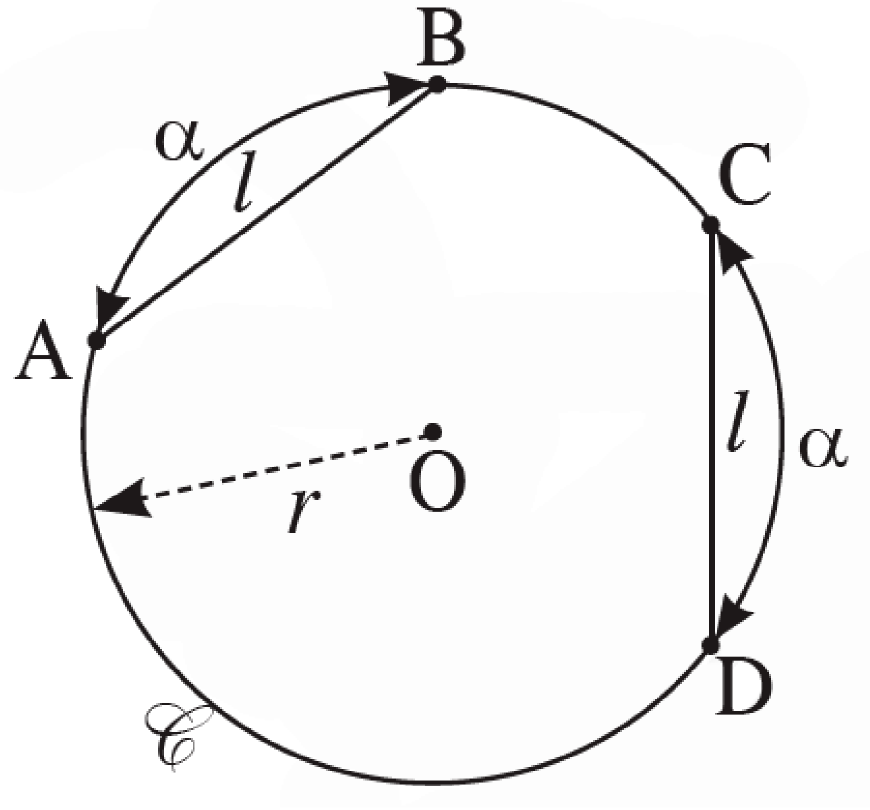
Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$,

entonces

CM = MD

TEOREMA FUNDAMENTALES

TEOREMA : En toda circunferencia si dos cuerdas son congruentes, entonces sus respectivos arcos también lo son.



En la figura mostrada:

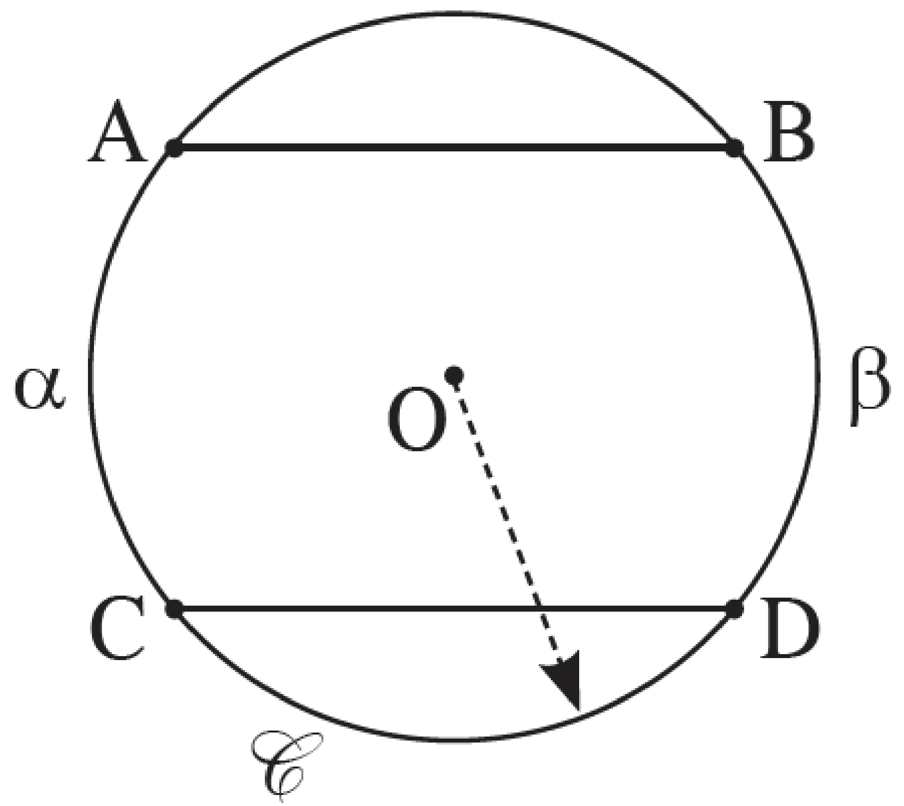
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas congruentes,

Entonces

$$\boxed{m\widehat{AB} = m\widehat{CD}}$$

TEOREMA FUNDAMENTALES

TEOREMA : En toda circunferencia los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son congruentes.



En la figura mostrada:

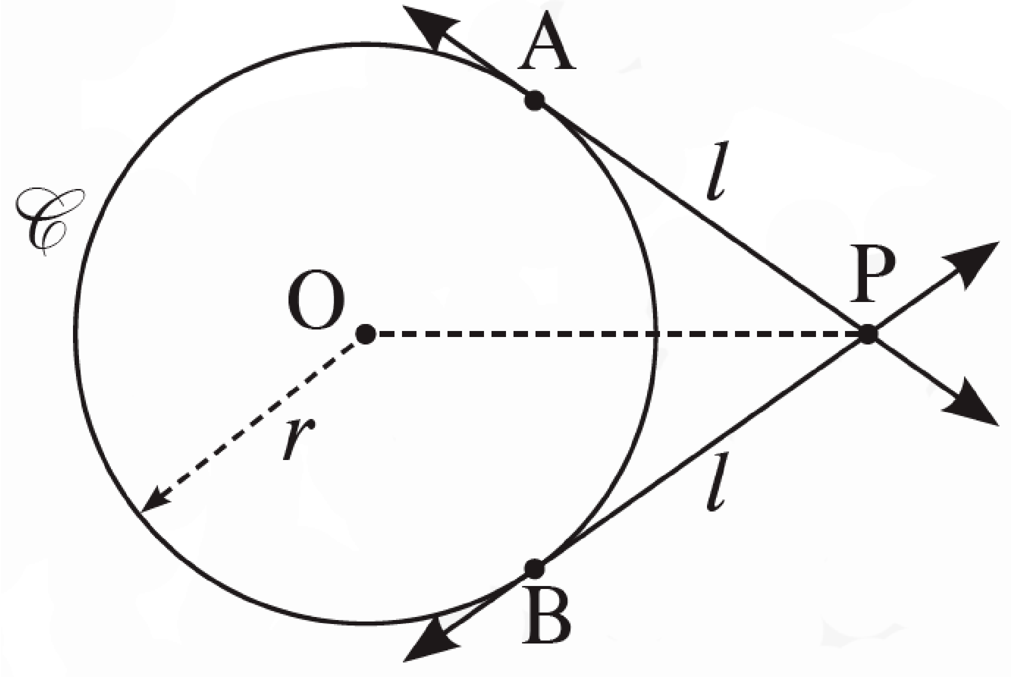
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas tal que, $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$,

Entonces

$$\boxed{m\widehat{AC} = m\widehat{BD}}$$

TEOREMA FUNDAMENTALES

TEOREMA : **Los segmentos de rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son congruentes.**



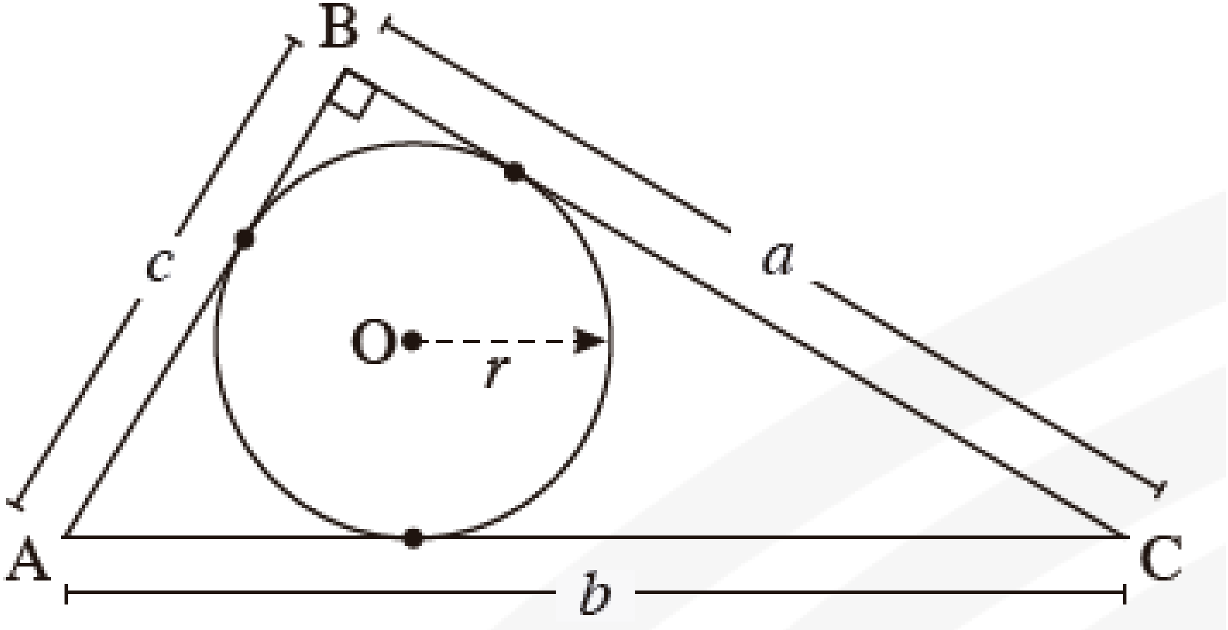
En la figura mostrada:

Sean los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a la circunferencia en los puntos A y B,
Entonces

$$\boxed{AP = PB = \ell}$$

TEOREMAS

TEOREMA PONCELET : En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los catetos es igual a la suma de las longitudes de la hipotenusa y el diámetro de la circunferencia inscrita.



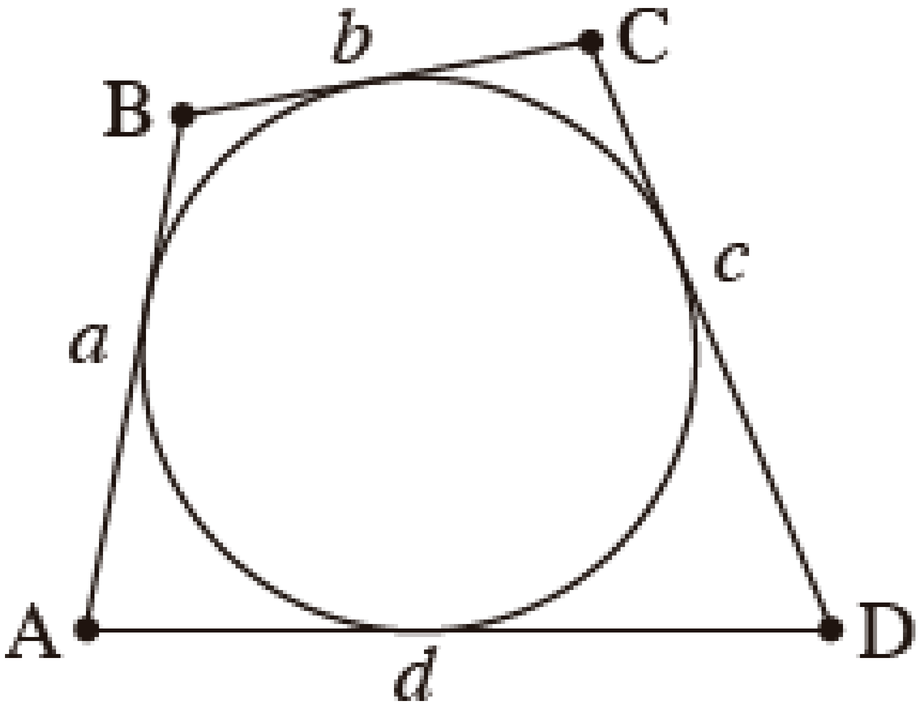
En la figura mostrada:

En el triángulo rectángulo ABC, O es centro de la circunferencia inscrita cuyo radio mide r,
Entonces

$$\boxed{a + c = b + 2r}$$

TEOREMAS

TEOREMA PITOT : En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de lados opuestos son iguales.

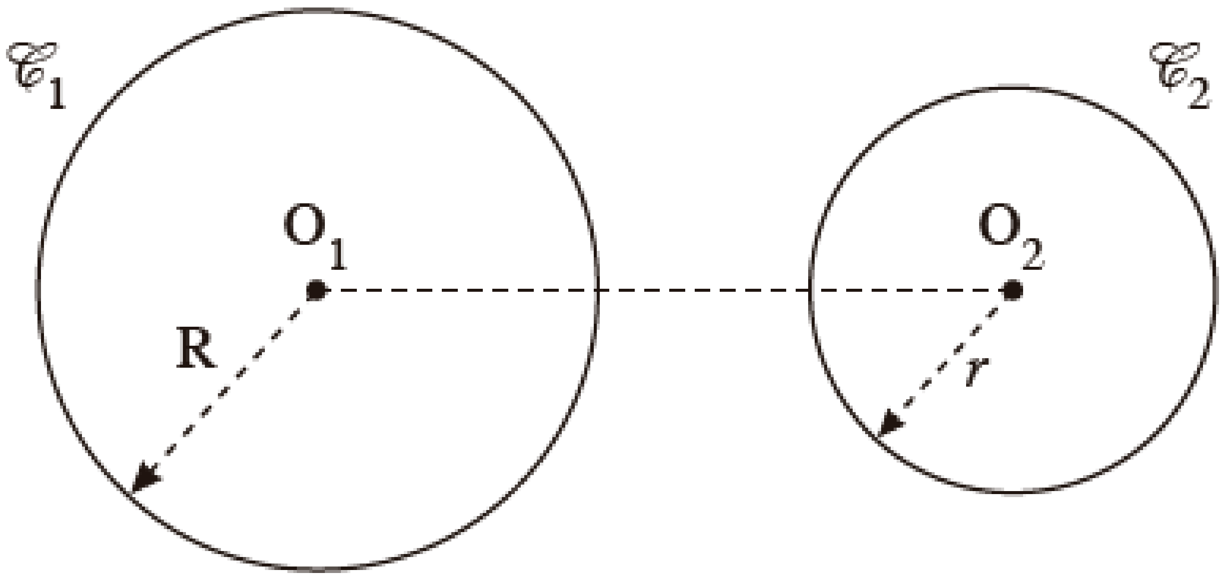


En la figura mostrada:
El cuadrilátero ABCD está circunscrito a la circunferencia, Entonces

$$\boxed{a + c = b + d}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIA EXTERIORES : Dos circunferencias son exteriores, si la distancia entre los centros es mayor que la suma de las longitudes de sus respectivos radios .



En la figura mostrada:

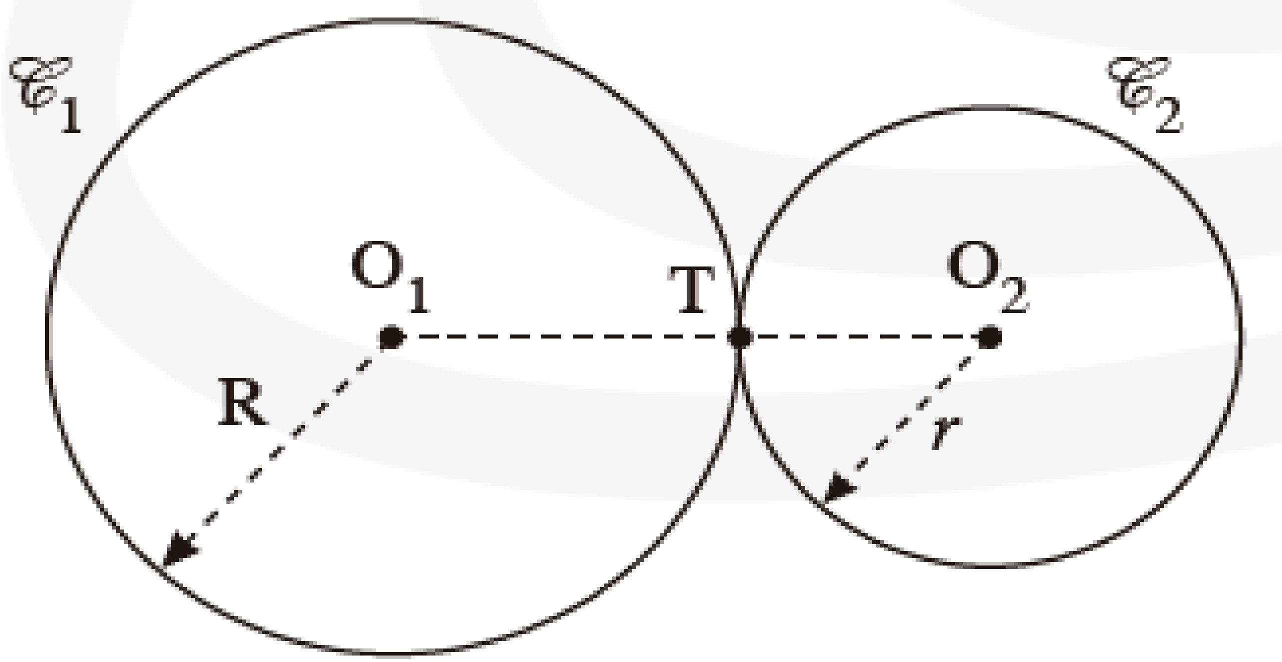
Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias exteriores de centros O_1 y O_2 cuyos radios miden R y r,

Entonces

$$\boxed{O_1O_2 > R + r}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIA TANGENTES EXTERIORES : Dos circunferencias son tangentes exteriores, si la distancia entre los centros es igual a la suma de las longitudes de sus respectivos radios.



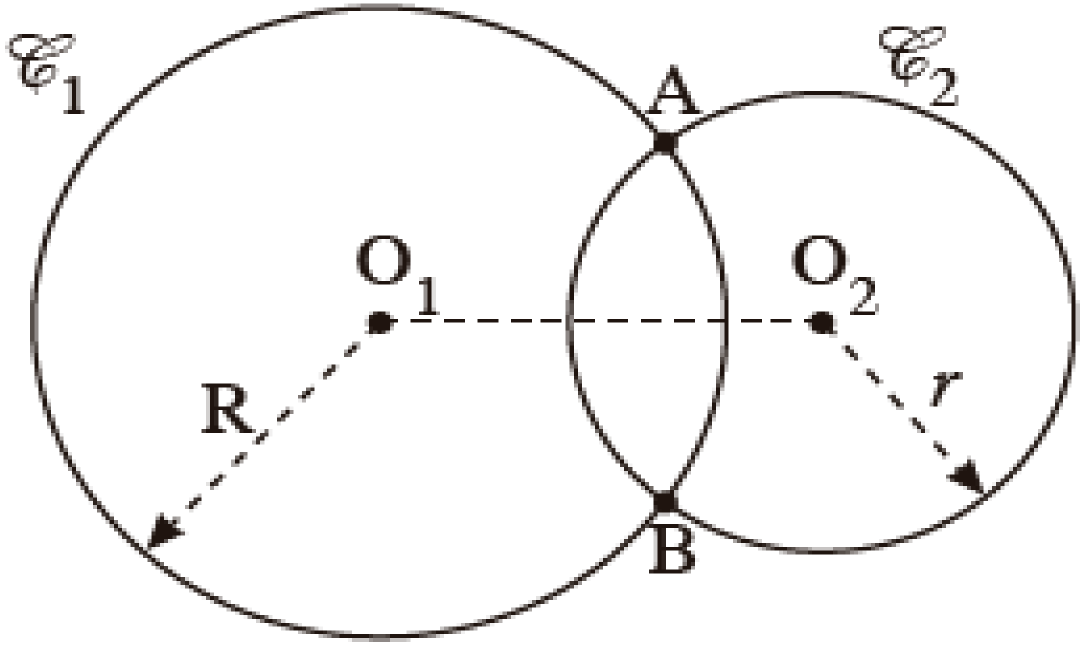
En la figura mostrada:

Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias tangentes exteriores de centros O_1 y O_1 cuyos radios miden R y r, Entonces

$$\boxed{O_1O_2 = R + r}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIA SECANTES : Dos circunferencias son secantes, si la distancia entre los centros es mayor que la diferencia, pero menor que la suma de las longitudes de sus respectivos radios.



En la figura mostrada:

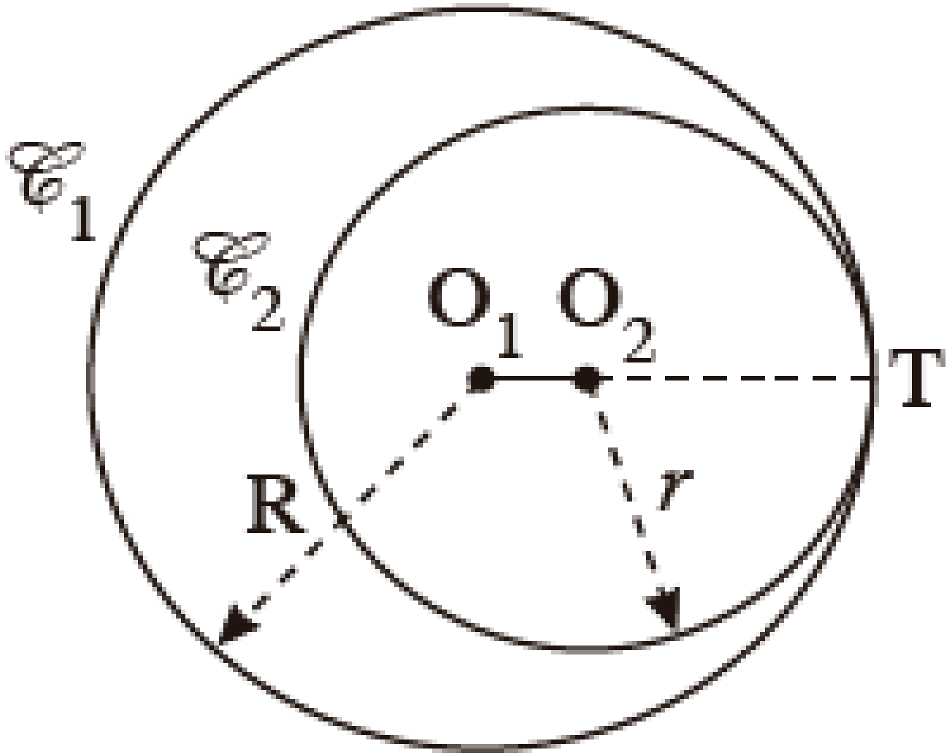
Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias secantes de centros O_1 y O_1 cuyos radios miden R y r,

Entonces

$$\boxed{R - r < O_1O_2 < R + r}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIA TANGENTES INTERIORES : Dos circunferencias son tangentes interiores, si la distancia entre los centros es igual a la diferencia de las longitudes de sus respectivos radios



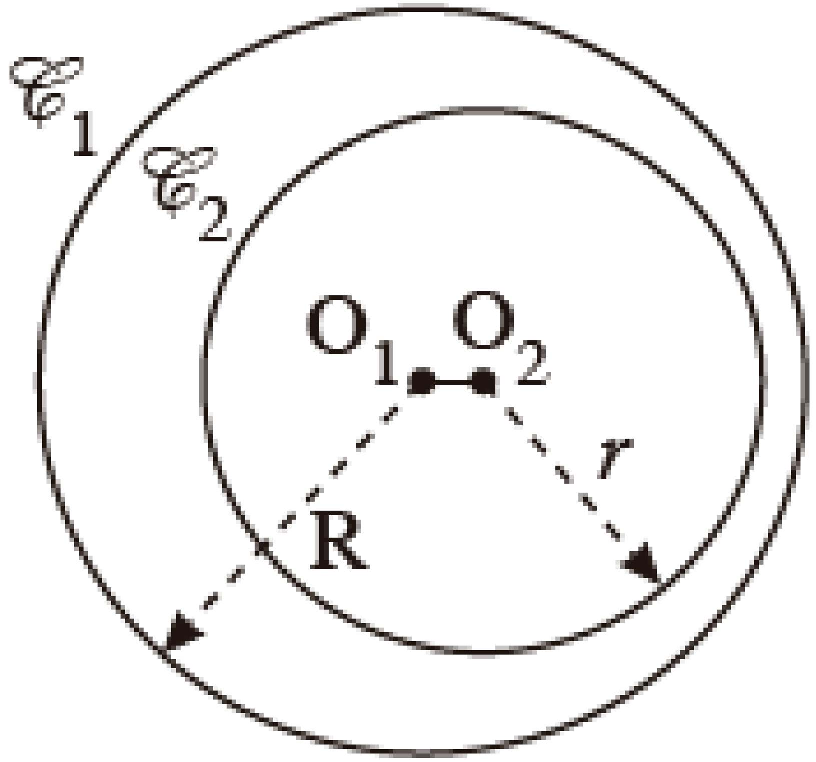
En la figura mostrada:

Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias tangentes interiores de centros O_1 y O_1 cuyos radios miden R y r, Entonces

$$\boxed{O_1O_2 = R - r}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

<u>CIRCUNFERENCIA INTERIORES</u> : Dos circunferencias son interiores si la distancia entre los centros es menor que la diferencia de las longitudes de sus respectivos radios.



En la figura mostrada:

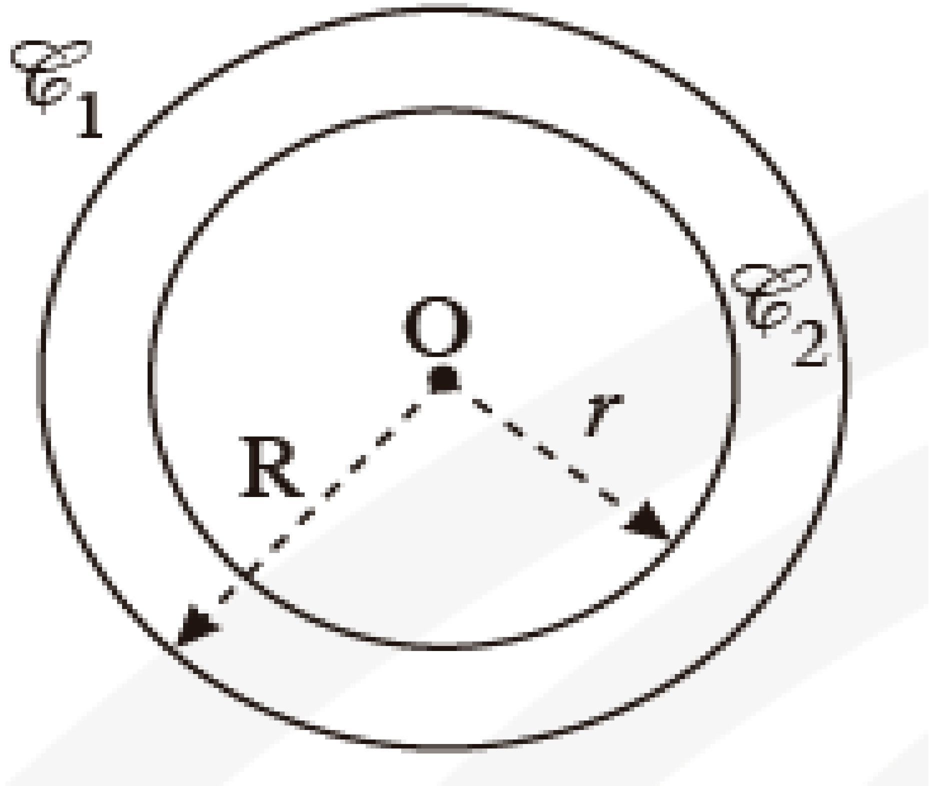
Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias interiores O_1 y O_1 cuyos radios miden R y r,

Entonces

$$\boxed{O_1O_2 < R - r}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIA CONCENTRICAS : Dos circunferencias son concéntricas, si la distancia entre los centros es cero



En la figura mostrada:

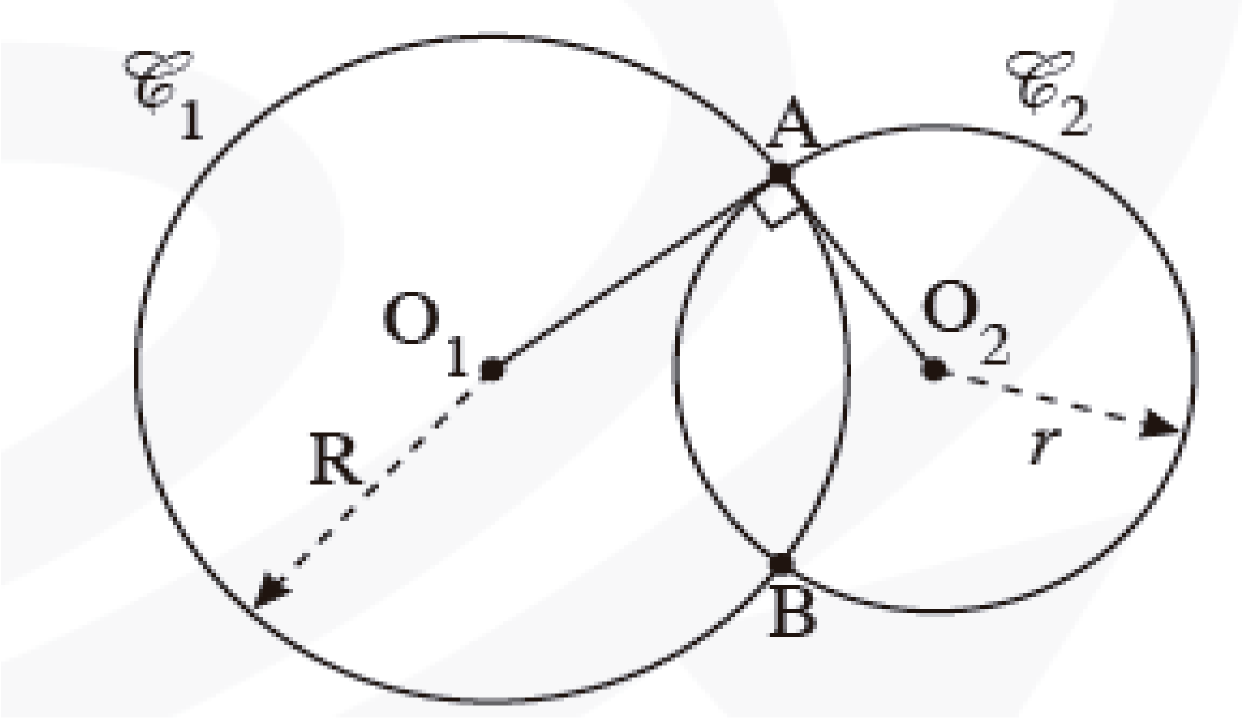
Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias concéntricas de centro O ,cuyos radios miden R y r,

Entonces

$$\boxed{O_1O_2 = 0}$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

CIRCUNFERENCIA ORTOGONALES : Dos circunferencias secantes se denominan ortogonales si los radios trazados hacia un punto de intersección de las circunferencias determinan un ángulo recto.



En la figura mostrada:

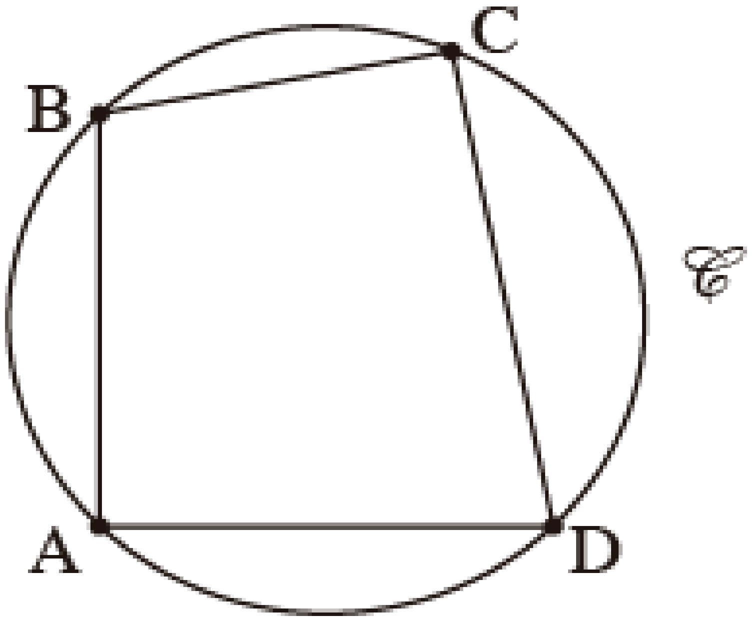
Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son circunferencias ortogonales de centros O_1 y O_1 cuyos radios miden R y r,

Entonces

$$\boxed{\overline{O_1A} \perp \overline{O_2A}}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO EN LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN : Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia si los cuatro vértices pertenecen a una circunferencia.



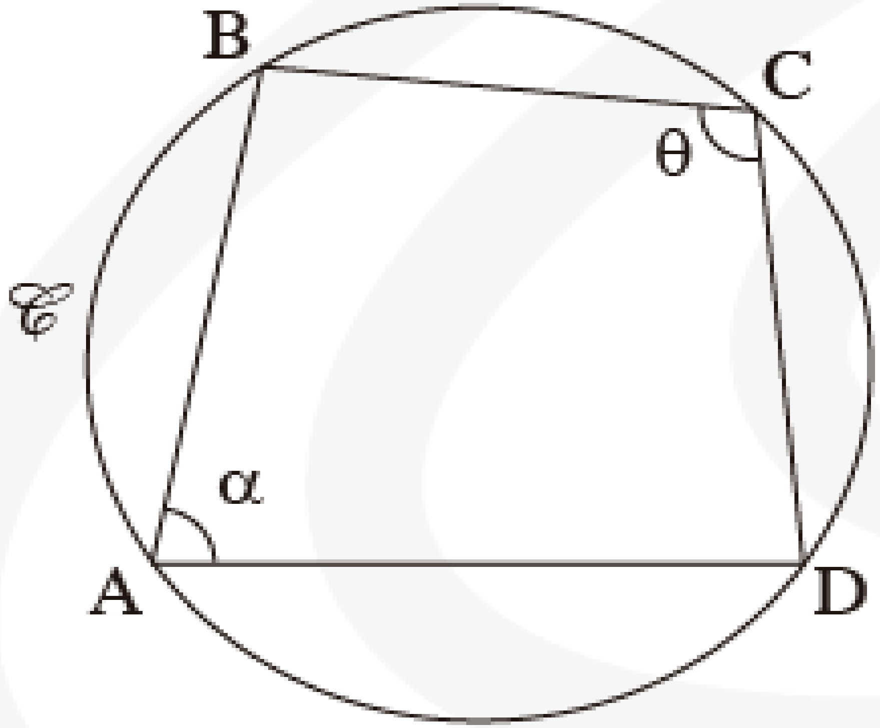
En la figura mostrada:

Si A, B, C, y D pertenecen a $\mathcal{C}$, entonces

ABCD es un cuadrilátero inscrito en $\mathcal{C}$.

CUADRILÁTERO INSCRITO EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMAS: En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la suma de las medidas de dos ángulos apuestos es 180°.



En la figura mostrada:

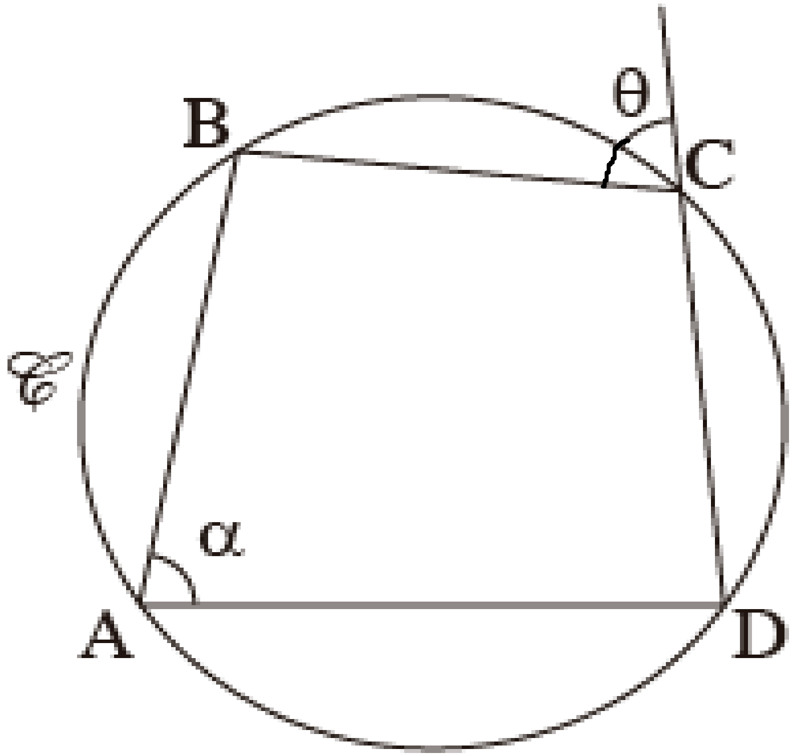
Si el cuadrilátero ABCD inscrito en $\mathcal{C}$,

entonces

$$\boxed{\alpha + \theta = 180°}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMAS: En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, la medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo opuesto ex



En la figura mostrada:

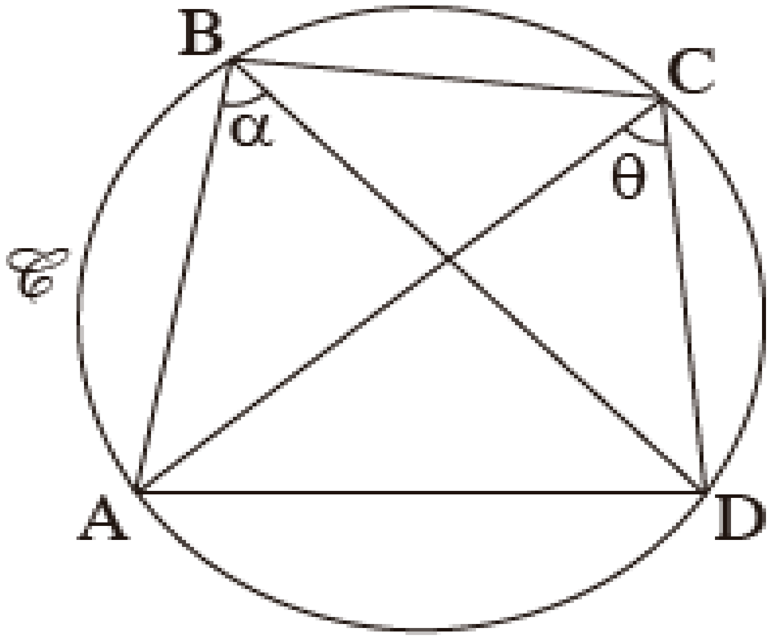
Si el cuadrilátero ABCD inscrito en $\mathcal{C}$,

entonces

$$\boxed{\alpha = \theta}$$

CUADRILÁTERO INSCRITO EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMAS: En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las diagonales y los lados opuestos determinan ángulo congruentes.



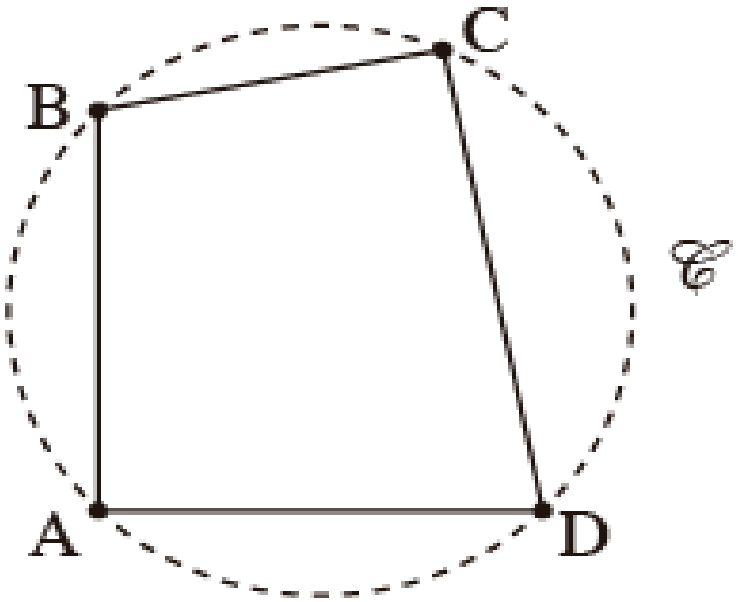
En la figura mostrada:

Si el cuadrilátero ABCD inscrito en $\mathcal{C}$, entonces

$$\boxed{\alpha = \theta}$$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE EN LA CIRCUNFERENCIA

DEFINICIÓN: Un cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia si por sus vértices se puede trazar una circunferencia.

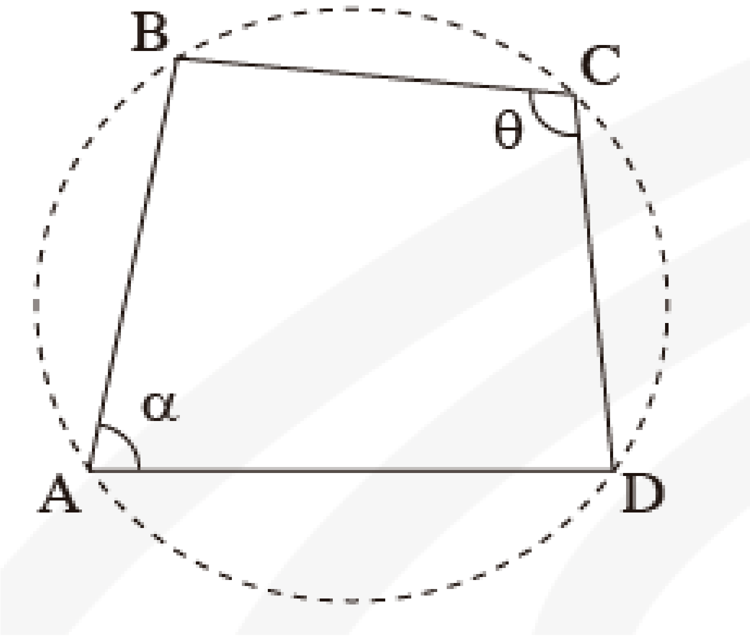


En la figura mostrada:

El cuadrilátero ABCD inscriptible en $\mathcal{C}$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMAS: Si en un cuadrilátero convexo, los ángulos opuestos son suplementarios, entonces el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.



En la figura :

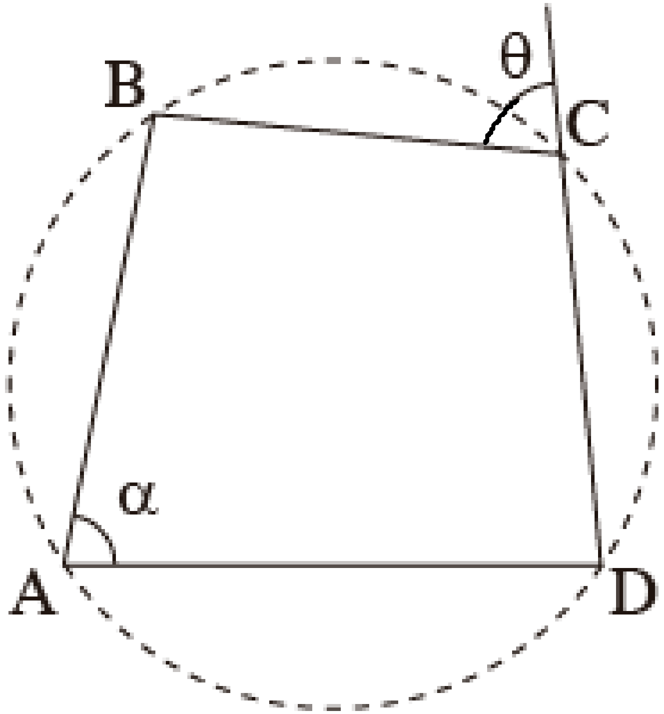
Si $\alpha + \theta = 180°$,

entonces

Cuadrilátero ABCD inscriptible en $\mathcal{C}$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMAS: Si en un cuadrilátero convexo, la medida de un ángulo interior y la medida del ángulo opuesto exterior son congruentes, entonces el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.



En la figura :

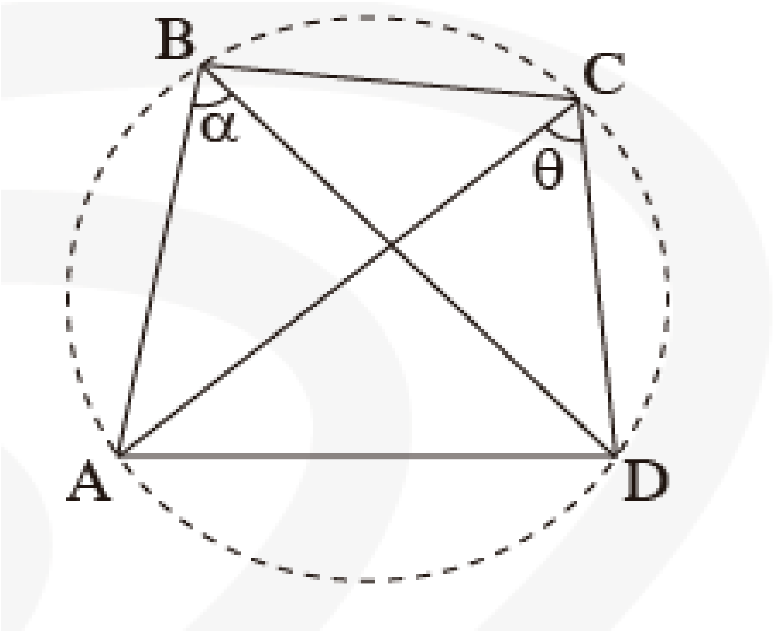
Si $\alpha = \theta$,

entonces

Cuadrilátero ABCD inscriptible en $\mathcal{C}$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMAS: Si en un cuadrilátero convexo, las diagonales determinan ángulos congruentes con los lados opuestos, entonces el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia.



En la figura :

Si $\alpha = \theta$,

entonces

Cuadrilátero ABCD inscriptible en $\mathcal{C}$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

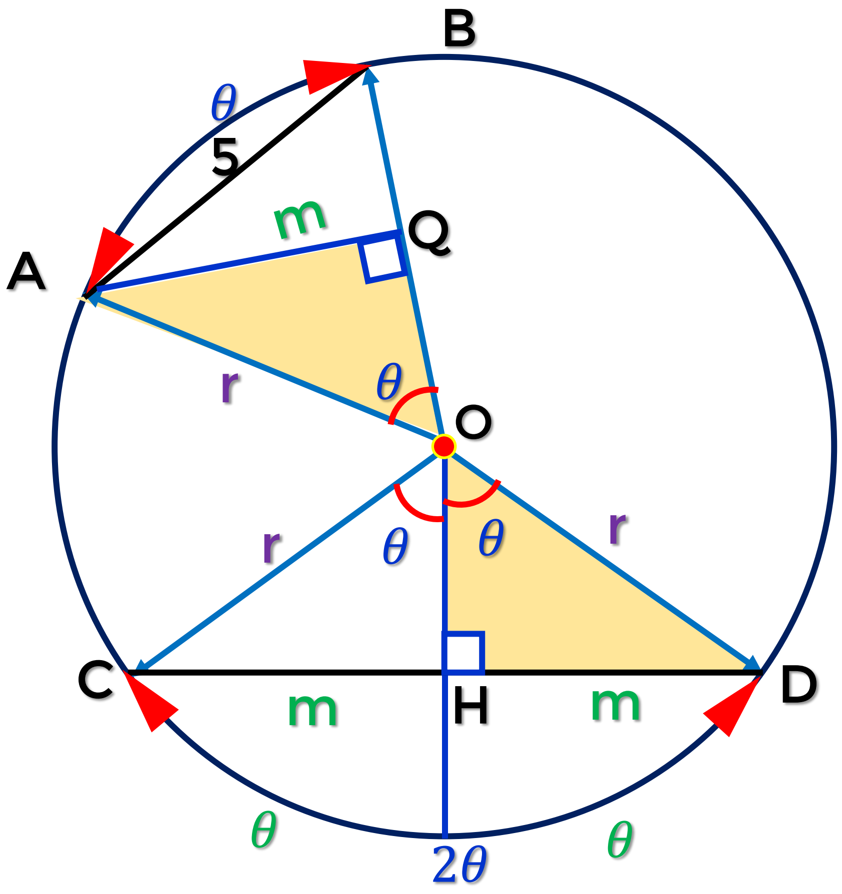
CAPITULO 3 PRACTICA

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 En una circunferencia se tienen las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, tal que $m\overset{\frown}{CD} = 2\, m\overset{\frown}{AB}$. Si AB = 5, entonces el máximo valor entero de CD es

RESOLUCIÓN:

Piden: el máximo valor de CD = CD_{max}



- El Δ COD (Isósceles)

  ➡ CH = HD = m

- El ⊿ AQO ≅ ⊿ OHD

  ➡ AQ = HD = m

  ➡ m < 5 (x 2)

  2 m < 10

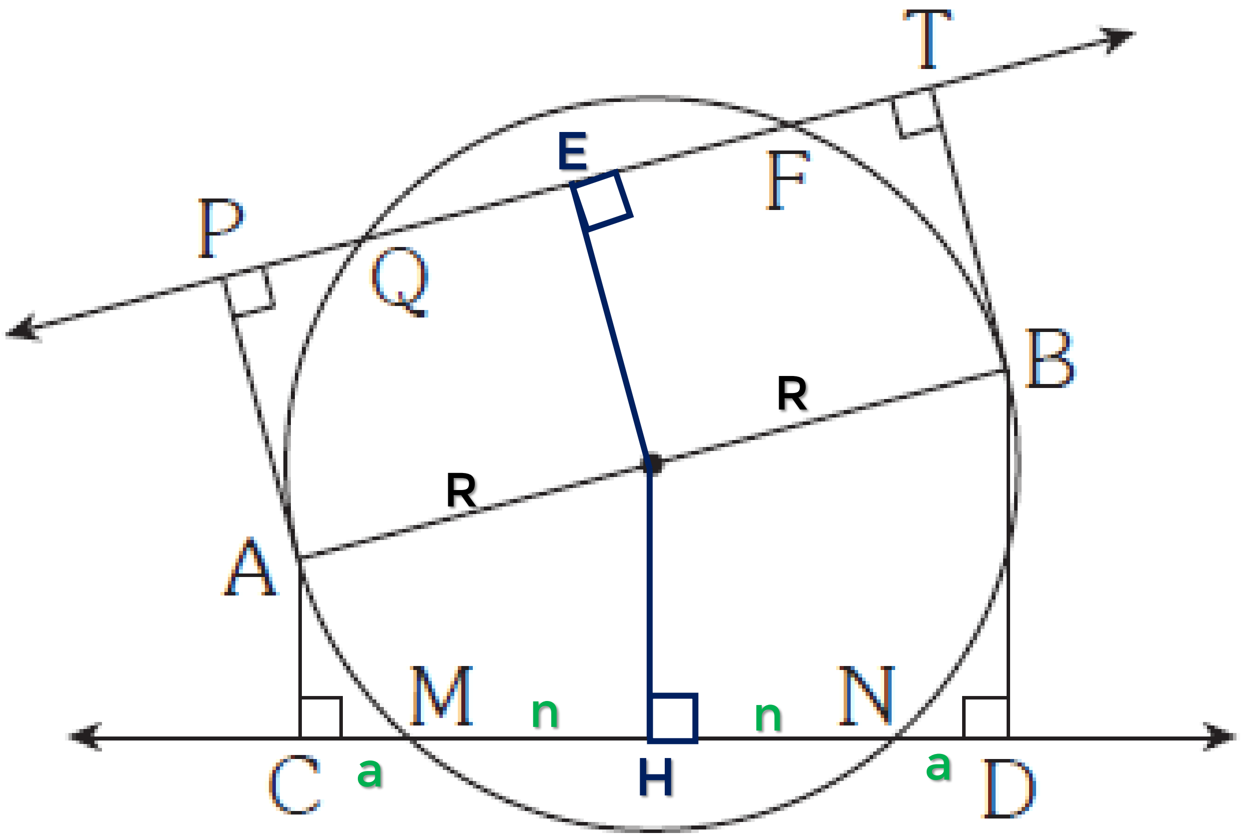
  CD < 10

$\therefore\ CD_{max} = 9$

PROBLEMA 2 En la figura mostrada, $\overline{AB}$ es diámetro. Si CM + PQ= 4 cm; entonces ND + FT, en cm, es

RESOLUCIÓN:

Piden: ND + FT



Dato: CM + PQ = 4 ($\overline{AB}$: diámetro)

- En el ⏢ ABCD ➡ CH = HD
  - Por teorema ➡ MH = HN = n
    CM = ND = a
- En el ⏢ APTB ➡ PE = ET
  - Por teorema ➡ QE = EF
    PQ = FT

Del dato: $\underbrace{CM}_{ND} + \underbrace{PQ}_{FT} = 4$

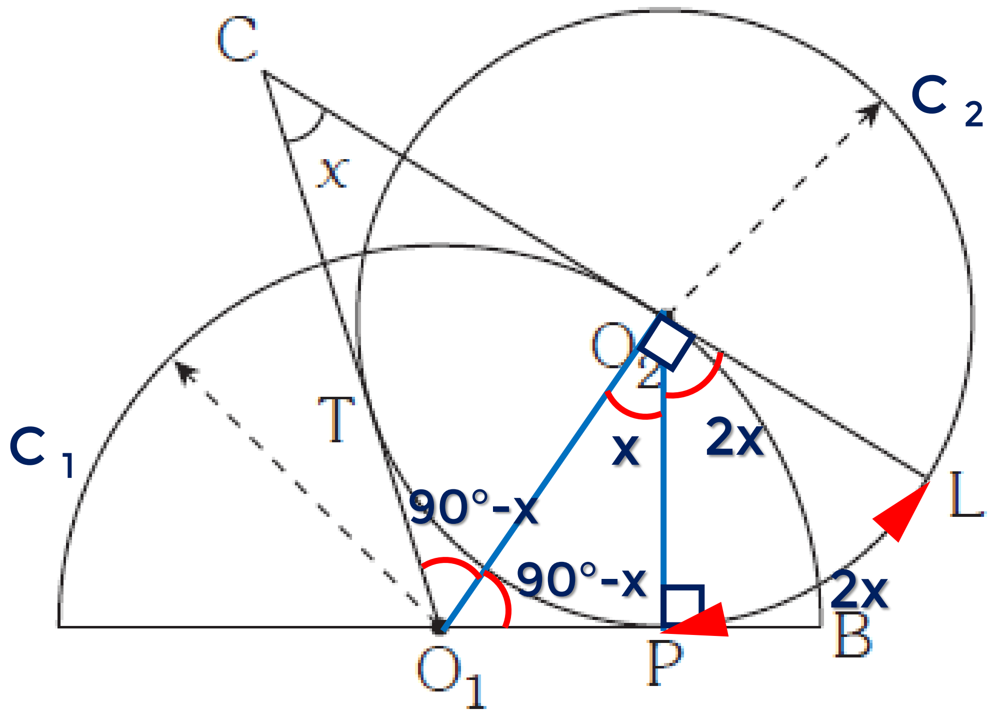
ND + FT

∴ ND + FT = 4cm

PROBLEMA 3 En la figura; T, P y O_2 son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{PL} = 2x$, entonces el valor de x es

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor de x



- En C_1 $\overline{O_1O_2} \perp \overline{LO_2}$
- En C_2 $\overline{O_1O_2}$ es la bisectriz del $\measuredangle CO_1P$
- Ángulo central:

$\Rightarrow$ $m\measuredangle PO_2L = 2x$

- Del gráfico:

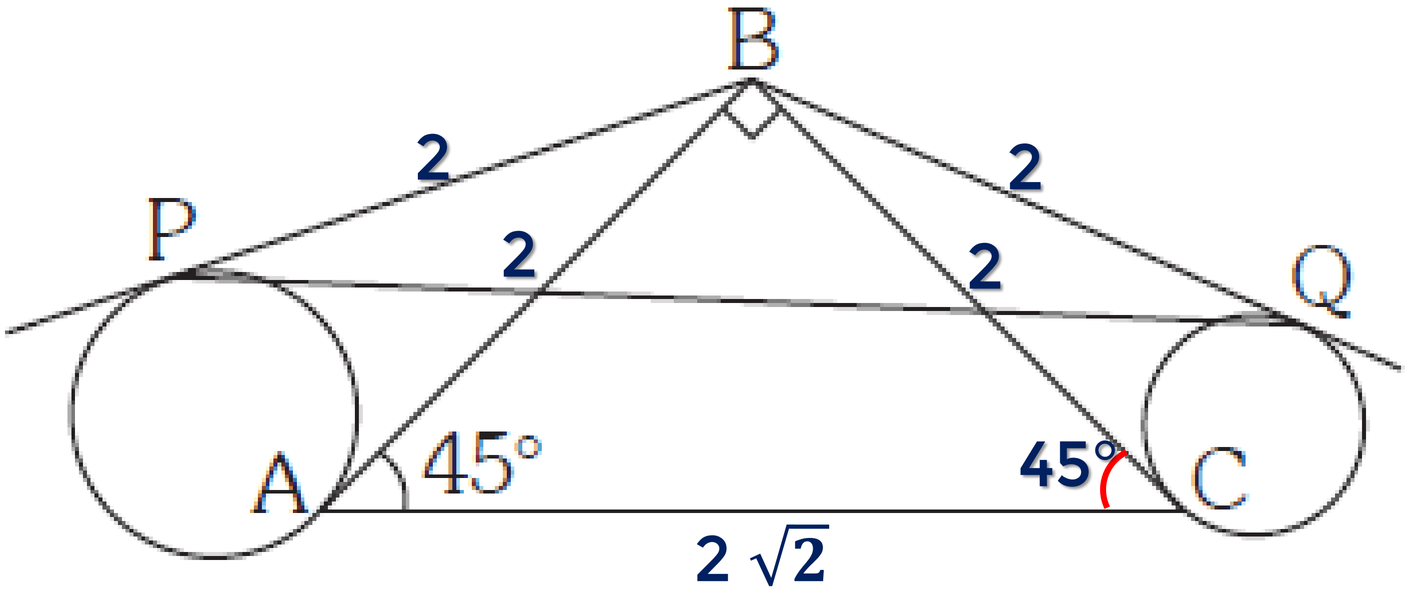
$x + 2x = 90°$

$\therefore\ x = 30°$

PROBLEMA 4 En la figura; P, A, C y Q son puntos de tangencia. Si $AC=2\sqrt{2}$, entonces el valor entero de PQ es

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor entero de $PQ = PQ_{ent.}$



- El $\triangle$ ABC (notable 45°- 45°)

  ➡ $AB = BC = 2$

- El Δ PBQ $m\sphericalangle PBQ > 90°$

- Por teorema de naturaleza de triángulo

  $(PQ)^2 > 2^2 + 2^2$

  $PQ > 2\sqrt{2}$ (= 2,82....)

- Por teorema de existencia de triángulo

  $2 - 2 < PQ < 2 + 2$

  $0 < PQ < 4$

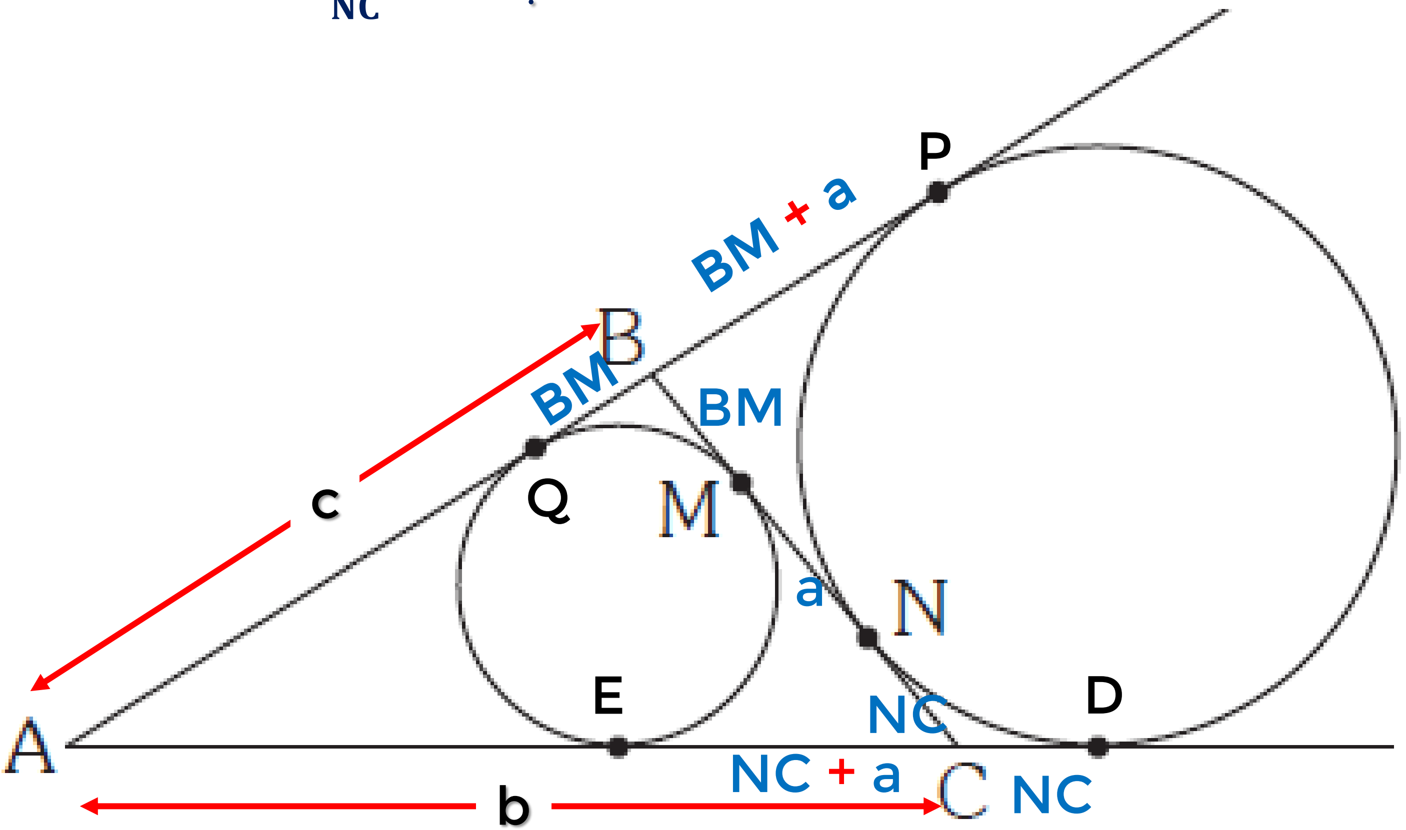
  ➡ $2{,}82.. < PQ < 4$

$\therefore PQ_{ent} = 3$

PROBLEMA 5 En el siguiente gráfico, si AC = b y AB = c, entonces $\frac{BM}{NC}$ + MN es

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor $\frac{BM}{NC} + MN$.



- Del gráfico QP = ED

$$2\,BM + a = 2\,NC + a$$

$$\boxed{BM = NC}$$

- Del gráfico AP = AD

$$c + \cancel{BM} + \underbrace{a} = b + \cancel{NC}$$

$$\boxed{MN = b - c}$$

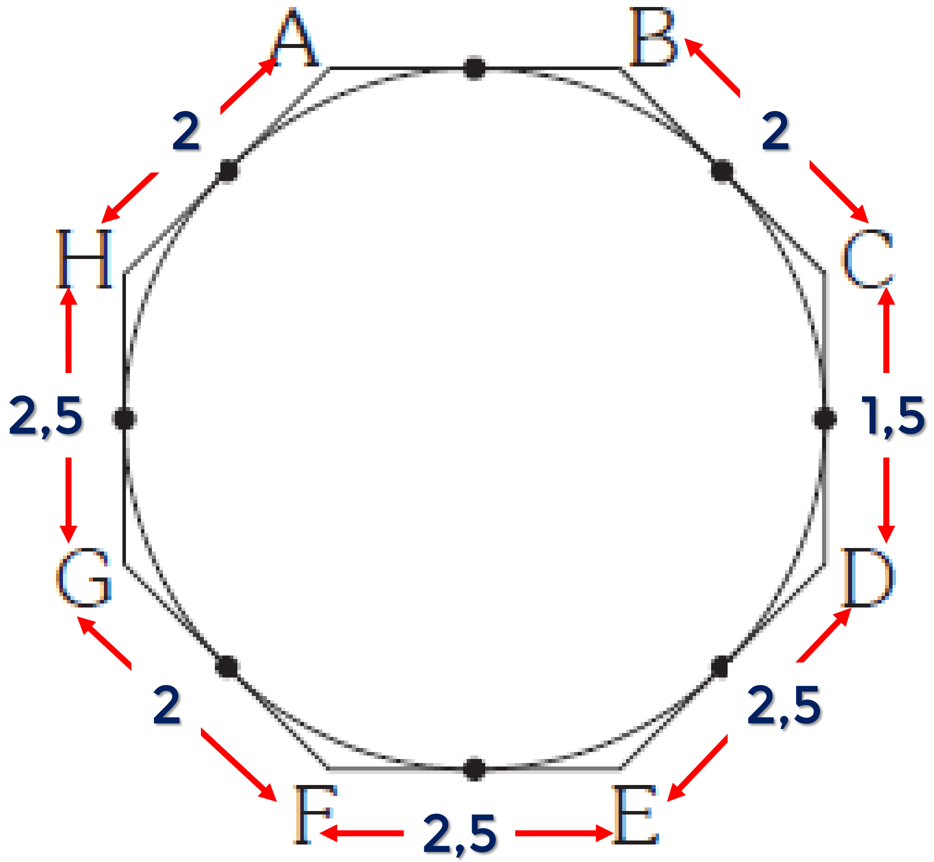
- Piden: $\frac{BM}{NC} + MN = \frac{BM}{BM} + MN$

$$\therefore \frac{BM}{NC} + MN = 1 + b - c$$

PROBLEMA 6 En el siguiente gráfico; si BC = 2; CD = 1,5; DE = 2,5; EF = 2,5; GF = 2; HG = 2,5 y HA = 2, entonces AB mide

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor AB .



- **Por teorema:**

$$AB + CD + EF + GH = BC + ED + FG + HA$$

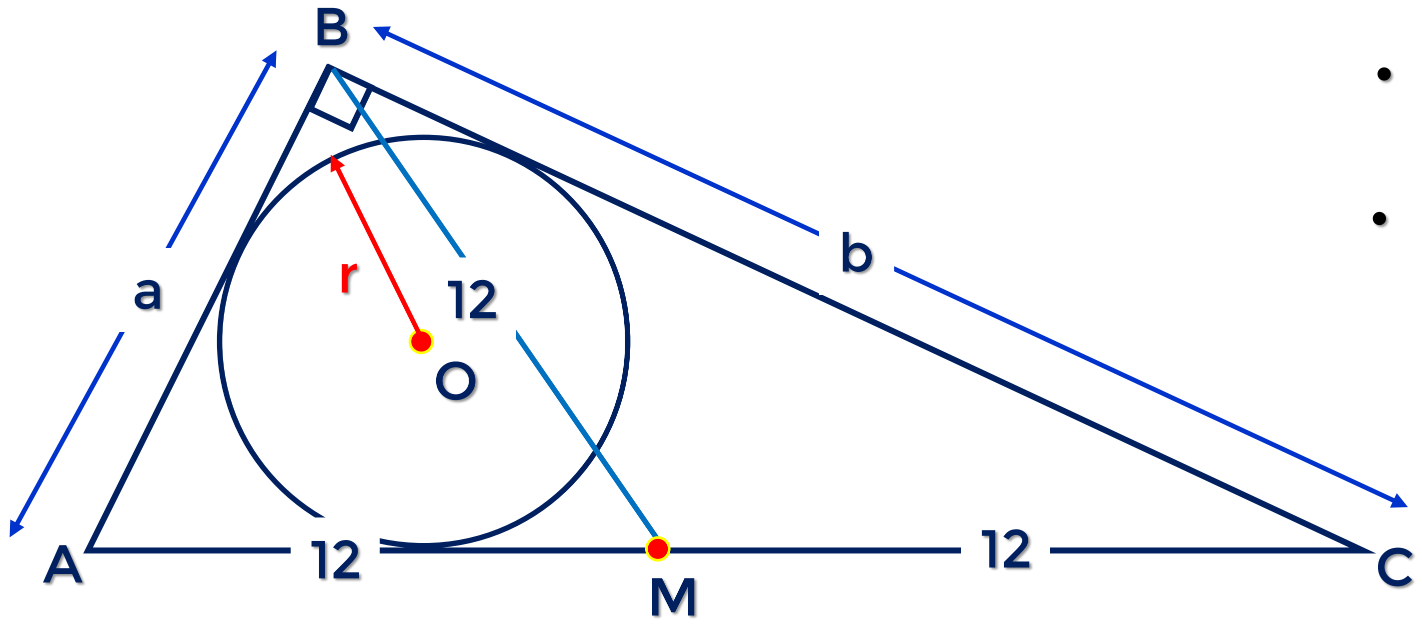
$$AB + 1{,}5 + 2{,}5 + 2{,}5 = 2 + 2{,}5 + 2 + 2$$

$$\boxed{\therefore\ AB = 2}$$

PROBLEMA 7 En un triángulo rectángulo; los catetos suman 32 cm. Si la mediana relativa a la hipotenusa mide 12 cm, calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo, en cm.

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor de r .



Dato:
- $\overline{BM}$ es mediana
- a + b = 32

- El ⊿ ABC   AM = MC = BM = 12

- Teorema de Poncelet

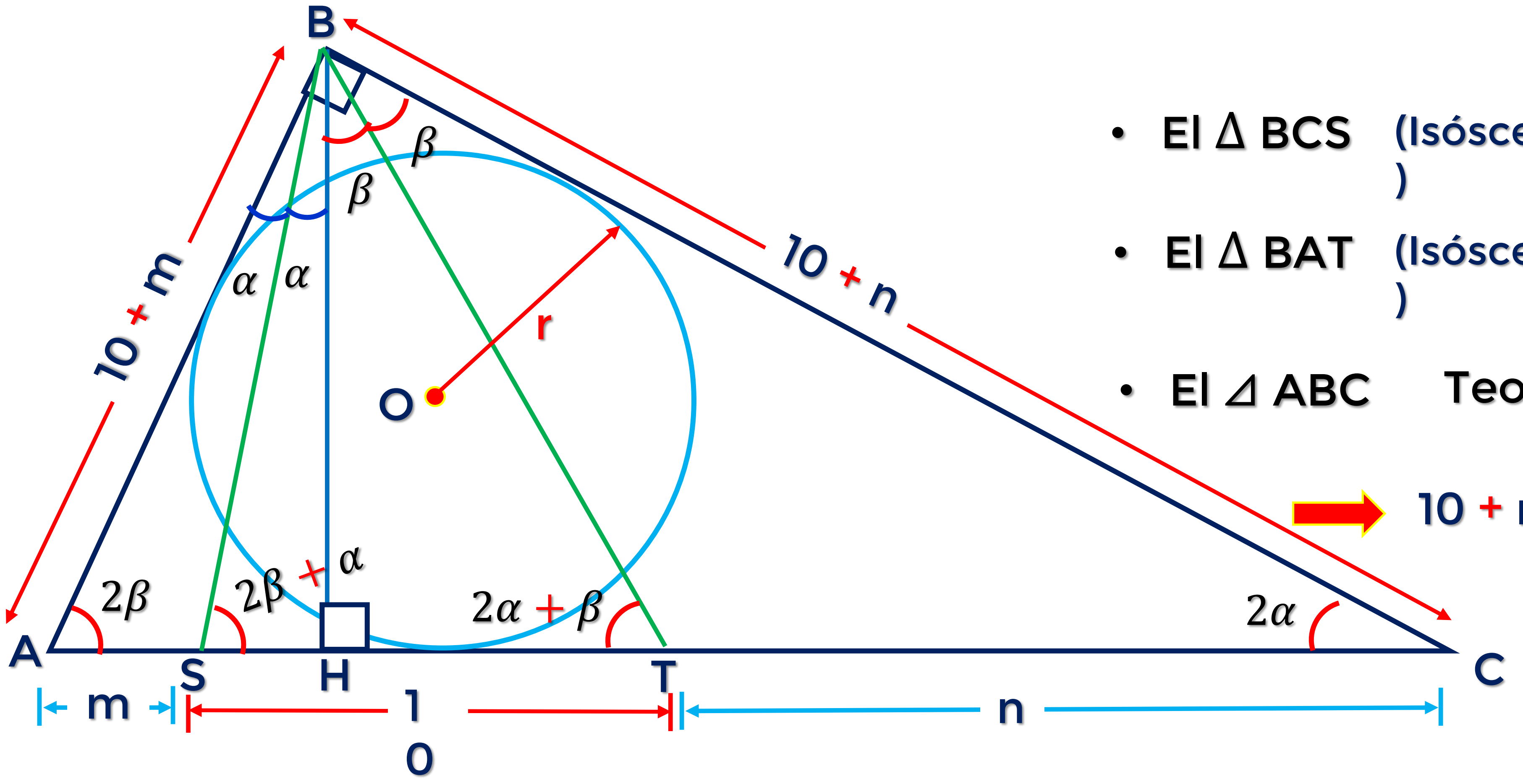
$$\underbrace{a + b}_{} = 24 + 2r$$

$$32 = 24 + 2r$$

$$\boxed{\therefore\ r = 4}$$

PROBLEMA 8 En un triángulo ABC, recto en B, $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BS}$ y $\overline{BT}$ son bisectrices interiores de los triángulos ABH y HBC, respectivamente. Si ST = 10, calcule la longitud del inradio del triángulo ABC.

RESOLUCIÓN: Piden: el valor de r .



Por observación: m ∢ ABH = 2α

m ∢ HBC = 2β

- El Δ BCS (Isósceles) ➡ BC = SC = 10+n
- El Δ BAT (Isósceles) ➡ AB = AT = 10+m
- El ⊿ ABC Teorema de Poncelet

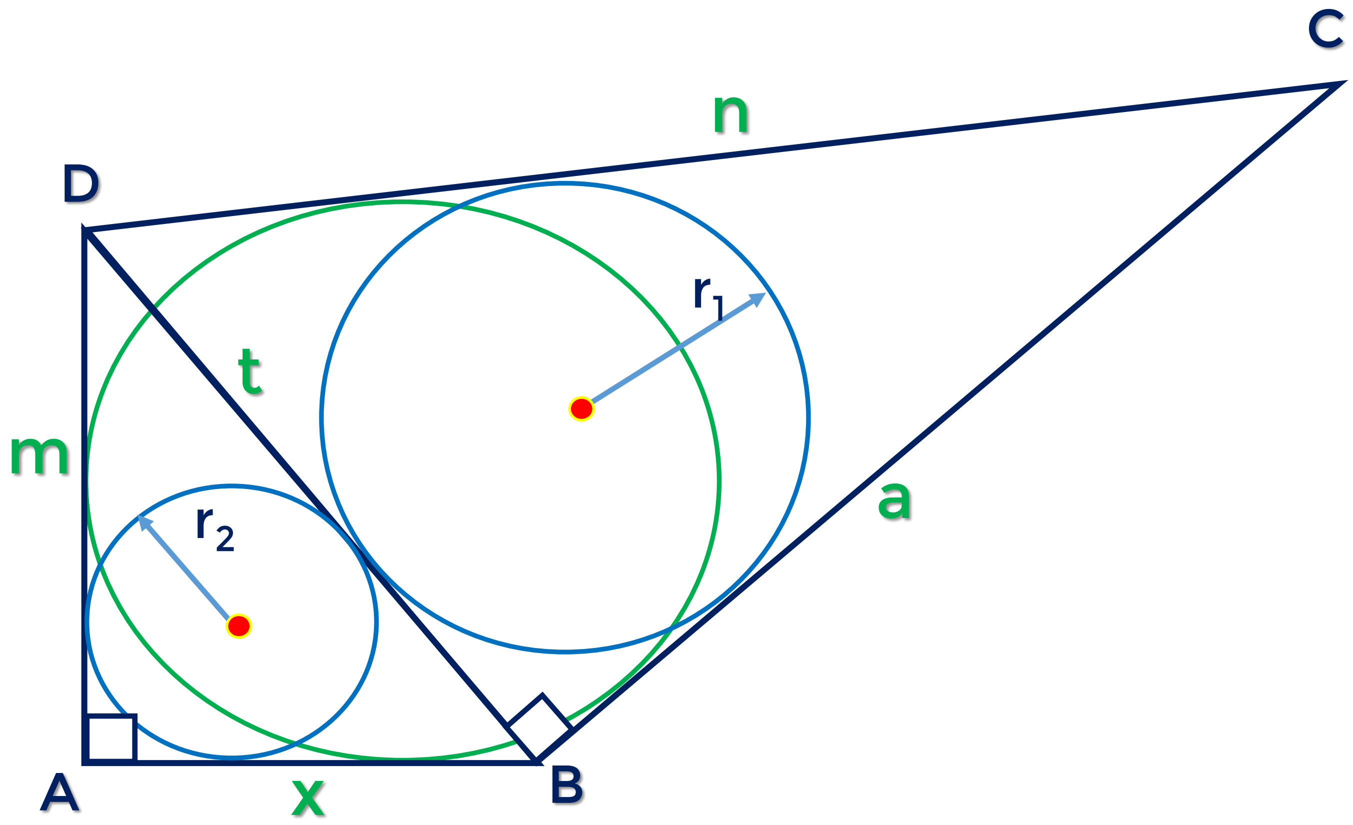
➡ 10 + m + 10 + n = m + 10 + n + 2r

$\therefore$ r = 5

PROBLEMA 9 Un cuadrilátero ABCD está circunscrito a una circunferencia. Si $m\sphericalangle BAD = 90°$, $m\sphericalangle CBD = 90°$ y los inradios de los triángulos CBD y BAD miden r_1 y r_2, respectivamente, calcule AB.

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor de $AB = x$.



- El ⊿ BAD

  (Teorema de Poncelet) $m + x = t + 2r_2$

- El ⊿ DBC

  (Teorema de Poncelet) $t + a = n + 2r_1$

- En el ⏢ ABCD

  (Teorema de Pitot) $x + n = m + a$

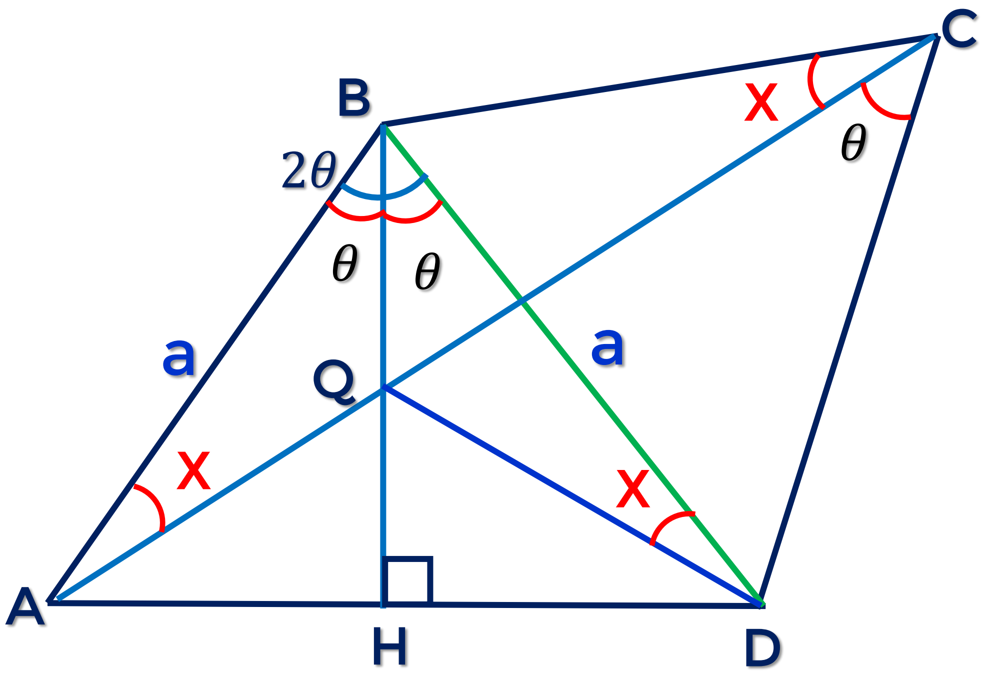
Sumando $2x = 2r_1 + 2r_2$

$$\therefore x = r_1 + r_2$$

PROBLEMA 10 Se tiene el cuadrilátero ABCD, donde AB=BD y m∢ ABD=2(m ∢ ACD).
Calcule m ∢ BCA.

RESOLUCIÓN:

Piden: la m ∢ BAC



- El Δ ABD (Isósceles)

  ➡ $\overline{BH}$ bisectriz del ∢ BAD

- En el ⏢ BCDQ (Es inscriptible)

  ➡ m ∢ QDB = x

- Por la simetría respecto a $\overline{BH}$

  ➡ m ∢ BAQ = m ∢ BDQ = x

- El Δ ABC (Isósceles)

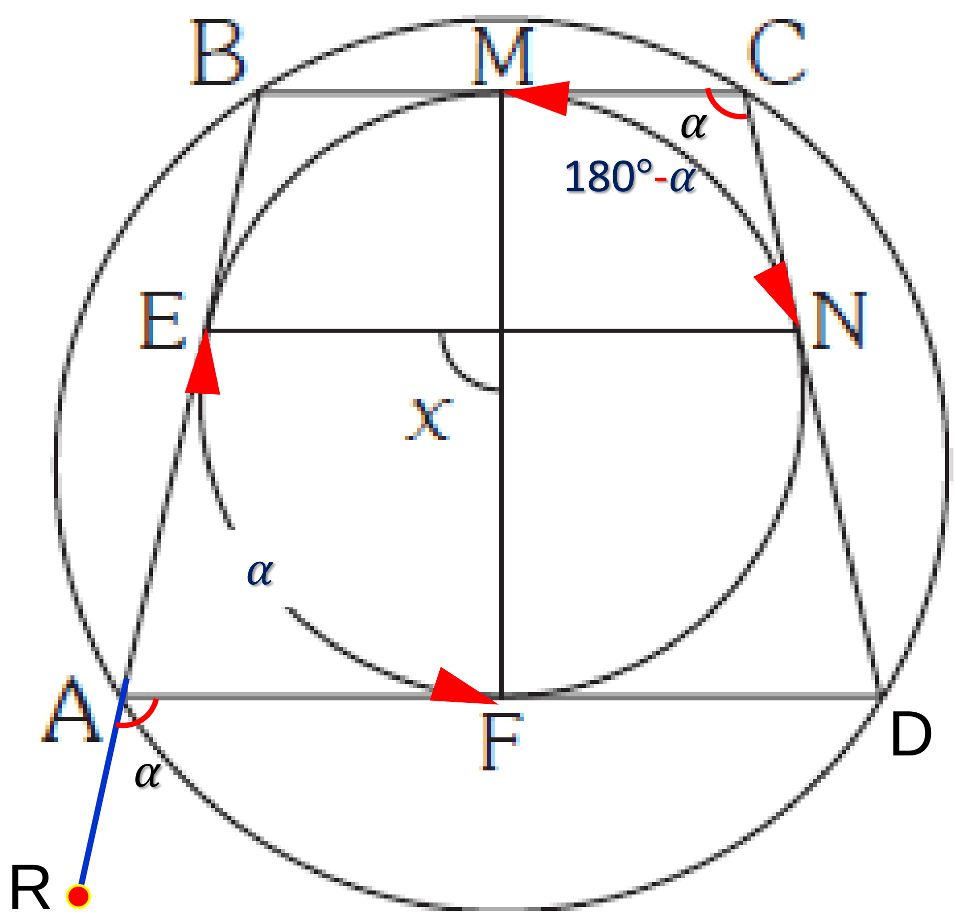
  ➡ m ∢ BAC = m ∢ BCA

$\therefore$ m ∢ BCA = m ∢ BAC

PROBLEMA 11 **El cuadrilátero ABCD está inscrito y circunscrito a dos circunferencias tal que E, M, N y F son puntos de tangencia. Calcule *x*.**

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor de x .



- En el ⏢ ABCD (Es inscrito)

$\Rightarrow$ $m\measuredangle BCD = m\measuredangle RAD = \alpha$

- Por teorema

$m\ \overset{\frown}{MN} = 180° - \alpha$

- Por ángulo interior:

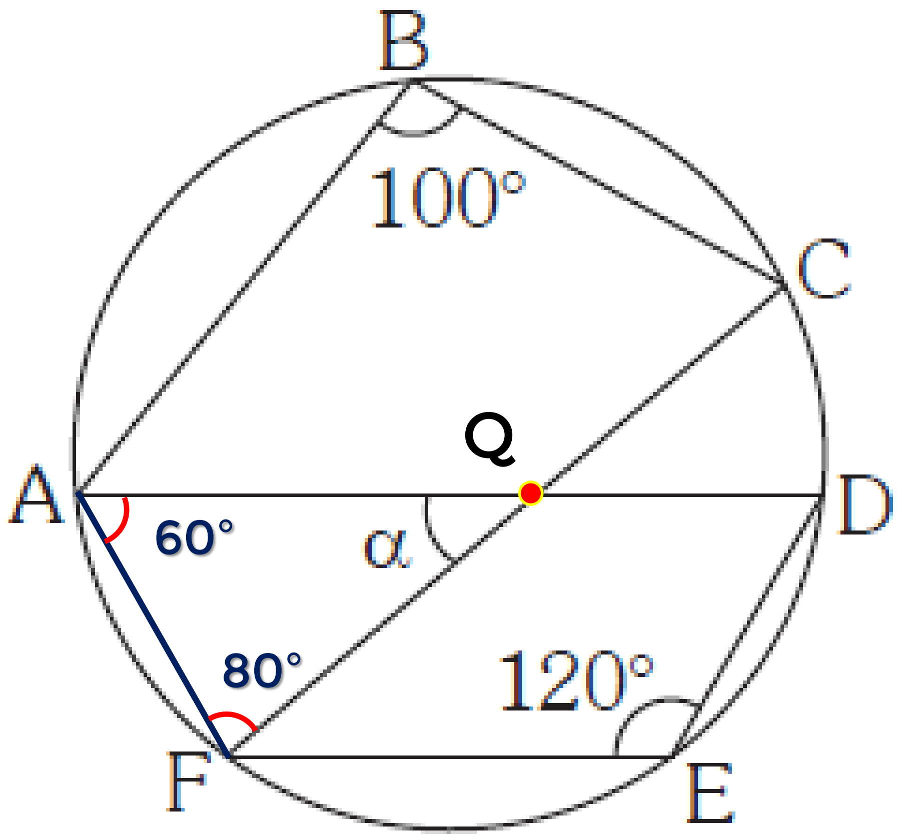
$$X = \frac{\alpha + 180° - \alpha}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ x = 90°}$$

PROBLEMA 12 En la figura se muestra una circunferencia. Calcule α.

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor de α .



- En el ⏢ ABCF (Es inscrito)

→ $m\sphericalangle AFC = 80°$

- En el ⏢ ADEF (Es inscrito)

→ $m\sphericalangle FAD = 60°$

- El Δ AFQ

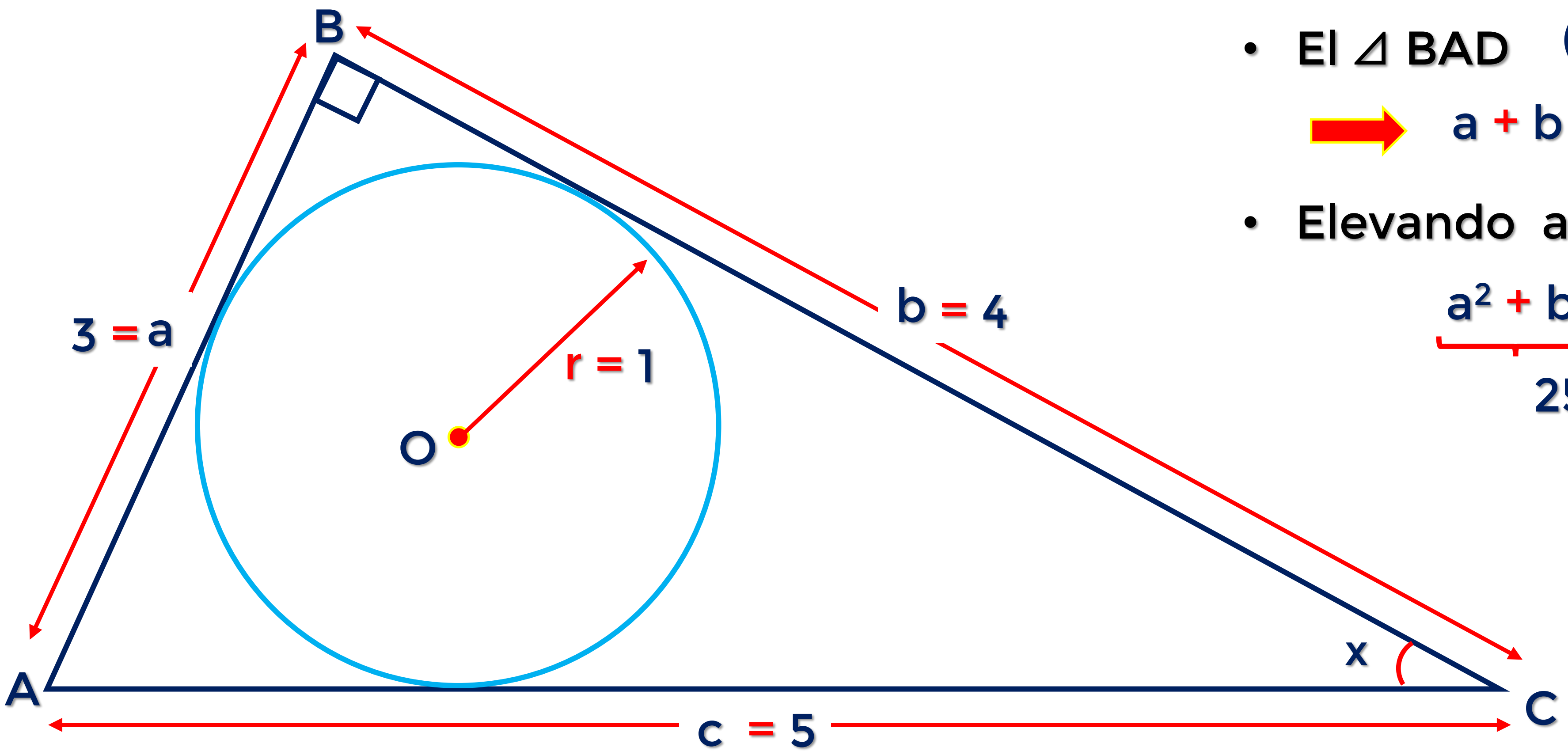
$$60° + 80° + \alpha = 180°$$

$$\therefore \alpha = 40°$$

PROBLEMA 13 En un triángulo ABC, recto en B, las longitudes del radio de la circunferencia inscrita y la hipotenusa del triángulo están en razón de 1 a 5; entonces la medida del menor ángulo interior del triángulo es

RESOLUCIÓN:

Piden: el menor valor ángulo interior del triángulo.



- Sea b > a
- Sea r = 1 y AC = 5
- El ⊿ BAD (Teorema de Poncelet)

$\Rightarrow$ $a + b = 5 + 2(1)$ $\quad \boxed{a + b = 7}$

- Elevando al cuadrado

$$\underbrace{a^2 + b^2} + 2ab = 49$$

$$25 + 2ab = 49$$

$$ab = 12$$

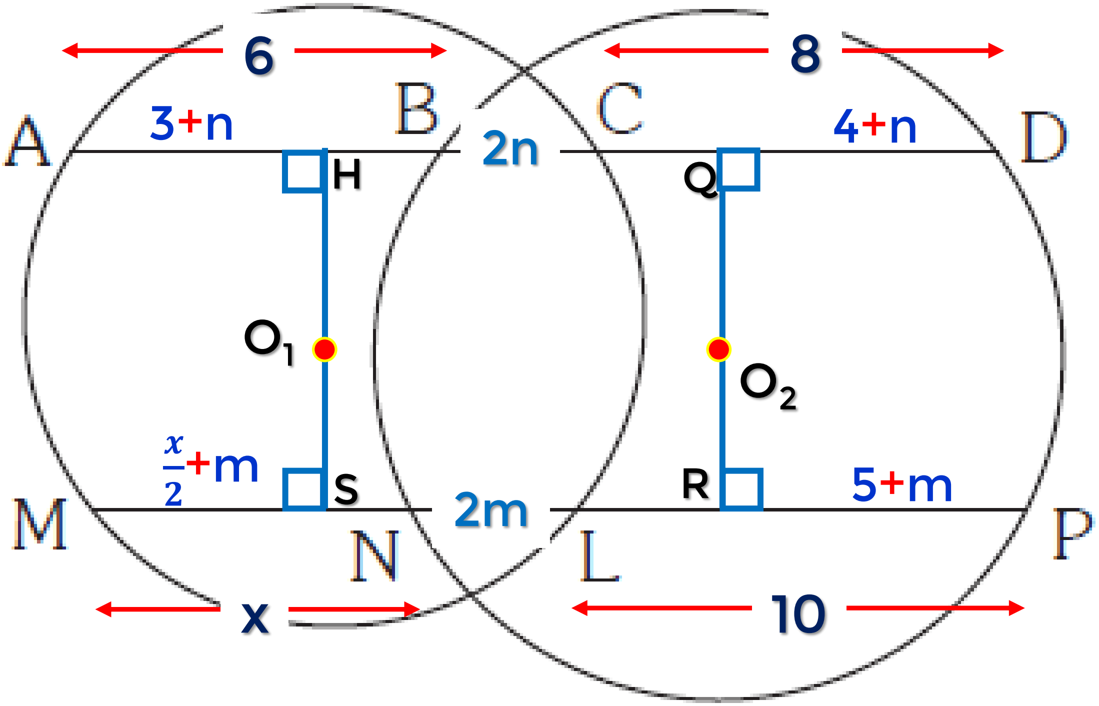
$$(7-b)\,b = 12 \quad \begin{cases} b = 4 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\therefore \quad x = 37°}$$

PROBLEMA 14 En la figura mostrada, $\overline{AD} \;//\; \overline{MP}$. Si AB = 6 cm, CD = 8 cm y LP = 10 cm; calcule MN en cm.

RESOLUCIÓN:

Piden: el valor de MN = x.



- Dato $\overline{AD} \;//\; \overline{MP}$
- Por teorema AH = HC = 3 + n

  BQ = QD = 4 + n
- Por teorema $MS = SL = \frac{x}{2} + m$

  NR = RP = 5 + m
- Del gráfico: HQRS rectángulo

$$HQ = SR$$

$$6 + 8 + 2n - (3+n+4+m) = x + 10 + 2m - \left(\frac{x}{2}+m+5+m\right)$$

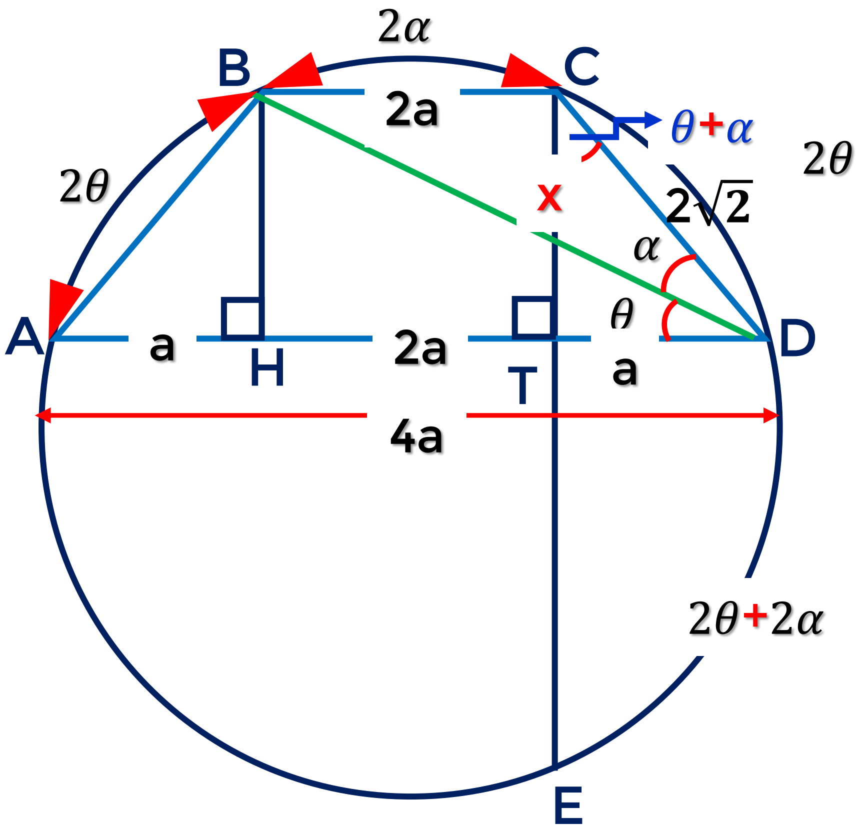
$$7 = \frac{x}{2} + 5$$

$\therefore$ x = 4cm

PROBLEMA 15 ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ inscrito en una circunferencia tal que es un trapecio AD=2BC, $\overline{CT}$ es altura y su prolongación interseca a la circunferencia en E, tal que DE = BD. Si CD = $2\sqrt{2}$, ¿cuál es la longitud de $\overline{CT}$?

RESOLUCIÓN:

Piden: la longitud de CT= x



- ABCD es un trapecio Isósceles

$\Rightarrow$ m $\overset{\frown}{AB}$ = m $\overset{\frown}{CD}$ = 2θ

$\Rightarrow$ AH = TD = a

- Dato DE = BD

$\Rightarrow$ m $\overset{\frown}{BD}$ = m $\overset{\frown}{DE}$ = $2\theta+2\alpha$

- El Δ CTD $\theta + \alpha = 45°$

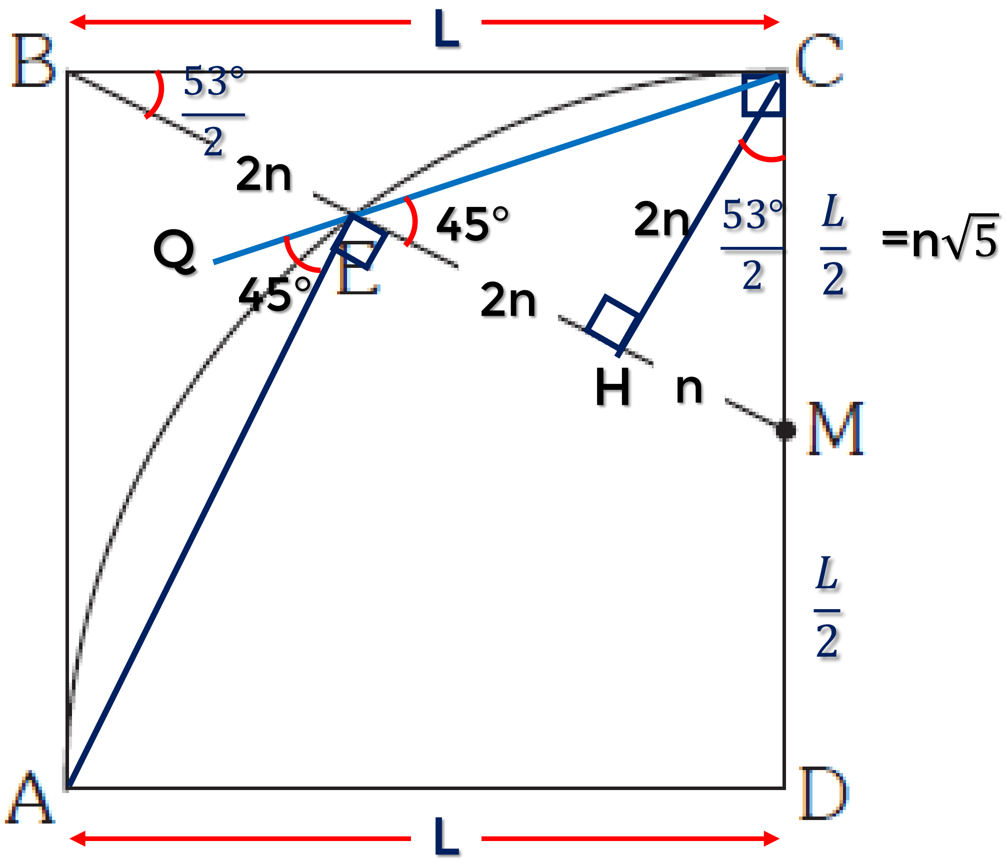
- El ⊿ CTD (Notable 45°)

$\therefore$ x = 2

PROBLEMA 16 En la figura, ABCD es un cuadrado cuyo lado tiene longitud L. $\overset{\frown}{D}$ es centro de AC y CM = MD. Calcule BE.

RESOLUCIÓN:

Piden: la longitud de BE.



- Dato ABCD es un cuadrado

  CM = MD = $\frac{L}{2}$

- El ⊿ BCM Aproximado 53°/2
- Trazo $\overline{CH} \perp \overline{BM}$ Sea HM = n
- El ⊿ CHM Aproximado 53°/2
- Además: $m\sphericalangle$ AEM = 90°

  $m\sphericalangle$ QEA = 45°

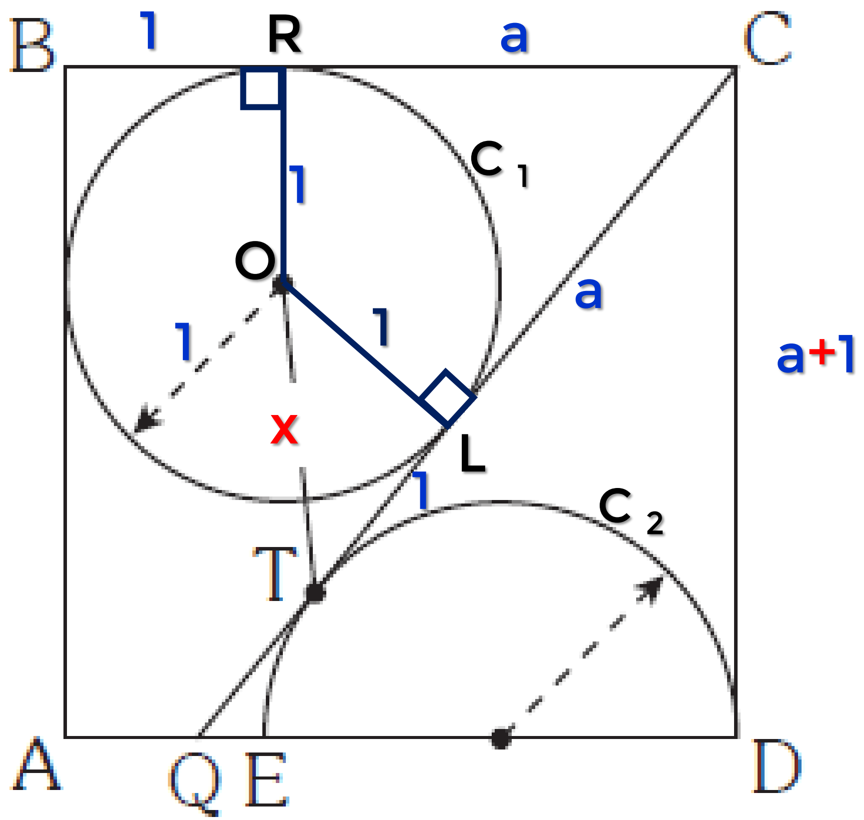
CM = $n\sqrt{5} = \frac{L}{2}$

$\therefore$ **BE** $= \frac{L\sqrt{5}}{5}$

PROBLEMA 17 En la figura, ABCD es un cuadrado. Si O es el centro de la circunferencia tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CQ}$, cuyo radio mide 1m, entonces OT, en m, es

RESOLUCIÓN:

Piden: la longitud de OT=X.



- **Dato** ABCD es un cuadrado

$\Rightarrow$ BC = CD = a+1

- **Por teorema**

En C_1: RC = CL = a

En C_2: TC = CD = a+1

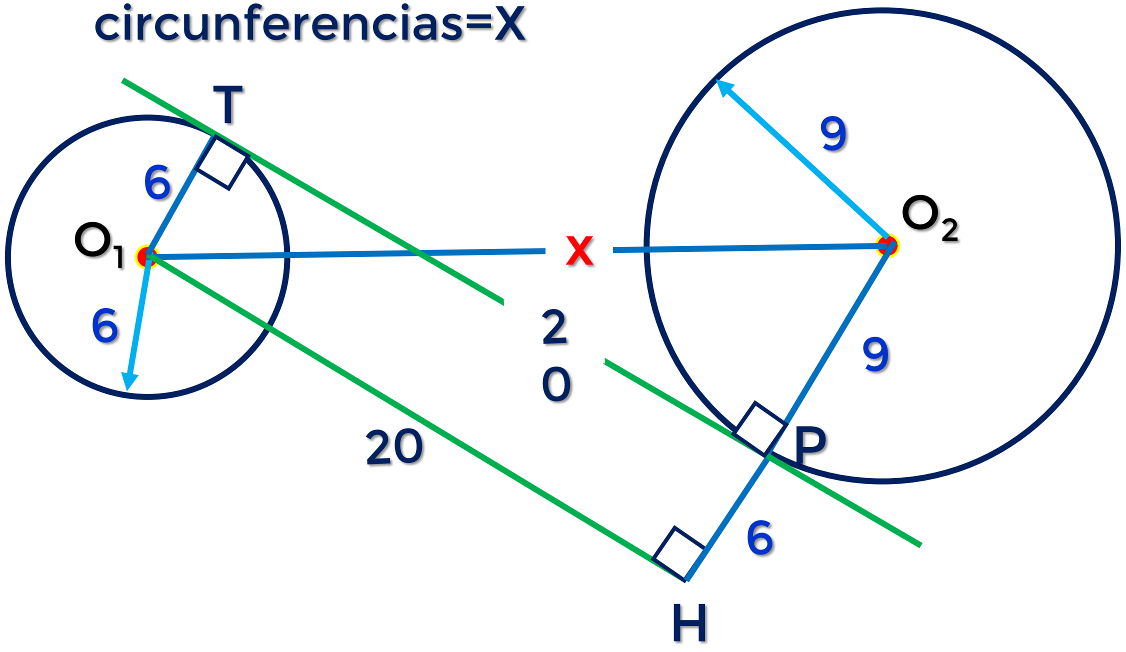
- **El ⊿ OLT** (Notable 45°)

$\therefore \quad x = \sqrt{2}m$

PROBLEMA 18 Los radios de dos circunferencias exteriores miden 6 cm y 9 cm y la longitud de la tangente común interior es 20 cm. Calcule la distancia, en cm, entre los centros de las circunferencias.

RESOLUCIÓN:

Piden: la distancia entre los centros de la circunferencias=X



- **Dato:** Tangente común

$PT = 20$

- **Formamos** Rectángulo O_1TPH

$O_1T = PH = 6$

$PT = O_1H = 20$

- El $\triangle\, O_1HO_2$ Teorema de Pitágoras

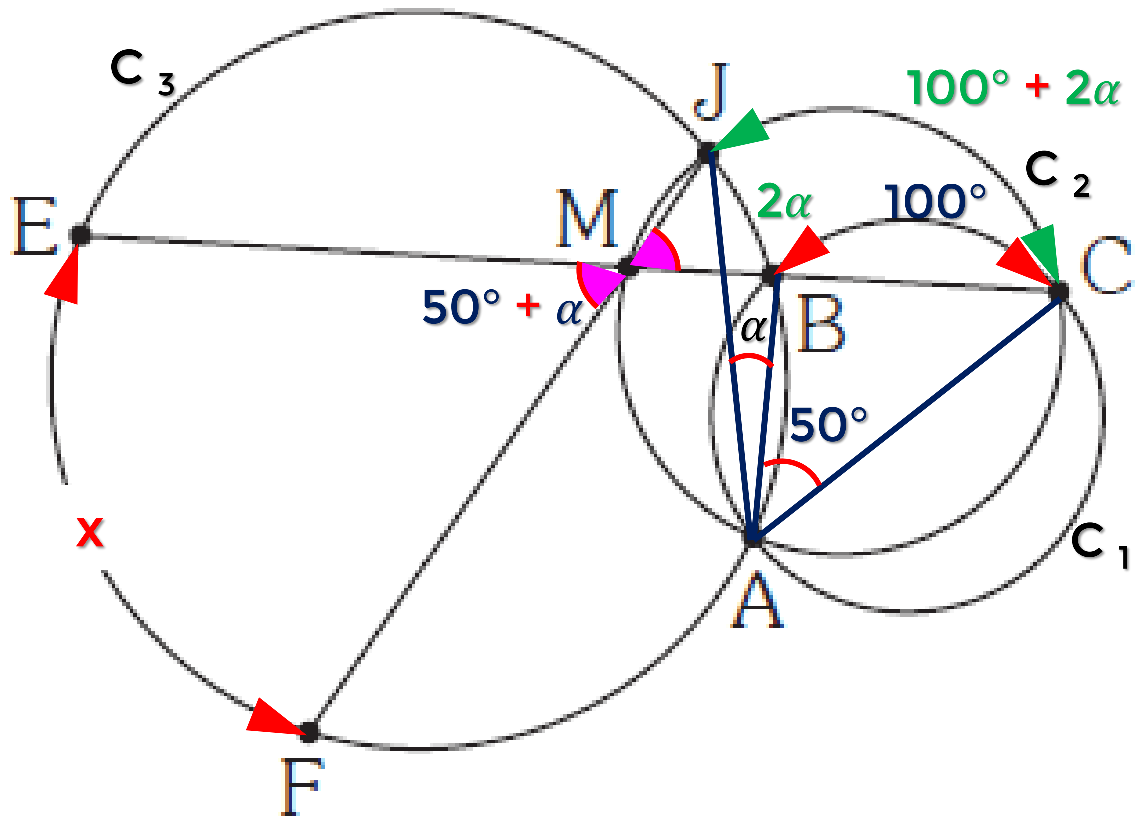
$X^2 = 20^2 + 15^2$

$\therefore$ x = 25cm

PROBLEMA 19 Si las circunferencias mostradas son secantes y tienen como punto común A, y si m $\overset{\frown}{BC}$ = 100°, calcule m $\overset{\frown}{EF}$.

RESOLUCIÓN:

Piden: la m $\overset{\frown}{EF}$ = x



- Se traza la cuerda común $\overline{AB}$
- En C 1 : Ángulo inscrito

$m\sphericalangle BAC = 50°$

- Se traza la cuerda común $\overline{JA}$ m $\overset{\frown}{JB}$ = 2 α
- En C 2 : Ángulo inscrito

$m\sphericalangle JAC = m\sphericalangle JMC = m\sphericalangle EMF = 50° + \alpha$

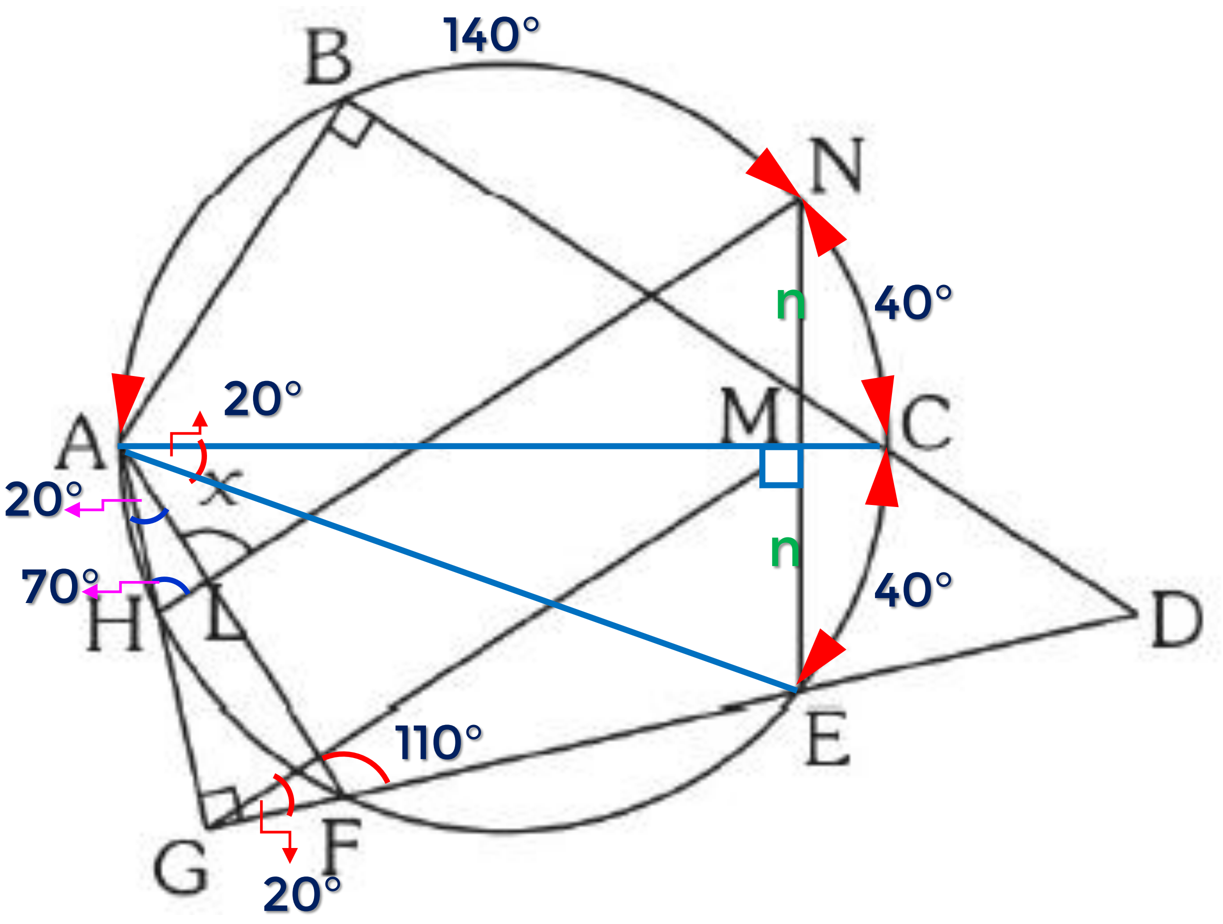
- En C 3 : Ángulo interior

$$\alpha + 50° = \frac{x+2\alpha}{2}$$

$\therefore$ x = 100°

PROBLEMA 20 En la figura; m∢ABD = m ∢ AGD = 90°, $\overset{\frown}{MN}$ = $\overset{\frown}{ME}$, NC ≅ CE y m ∢ MGE = 20°. Calcule el valor de x.

RESOLUCIÓN: Piden: el valor de x



- Dato: MN = ME y m $\overset{\frown}{NC}$ = m $\overset{\frown}{CE}$
- Del gráfico: m ∢ ABC = 90°

➡ $\overline{AC}$ es diámetro yA, M y C son colineales

- En el ⏢ AMEG (es inscriptible)

➡ m ∢ MAE = 20°

- Además: m $\overset{\frown}{ABN}$ = 140°
- Por ángulo inscrito: m ∢ AHN = 70°

m ∢ AFE = 110°

- El Δ GAF m ∢ GAF = 20°
- El Δ HAL

X = 20° + 70°

∴ x = 90°