GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

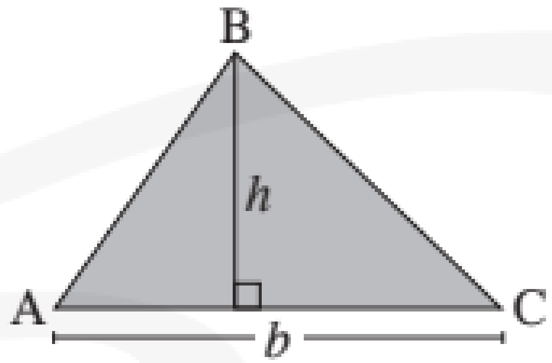
CAPITULO 6 TEORIA

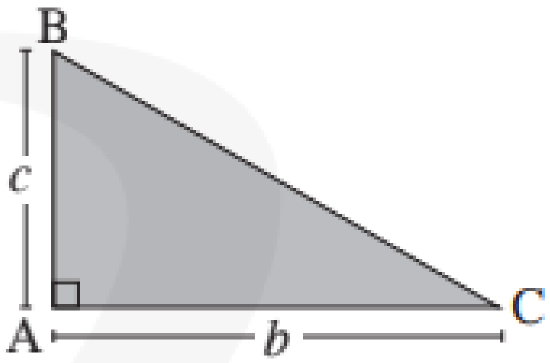
SACO OLIVEROS

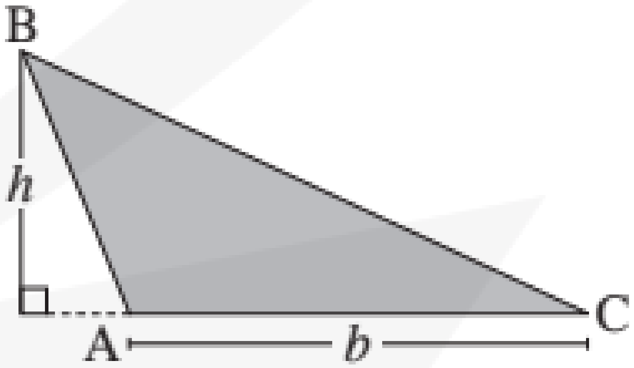
ÁREA DE REGIONES TRIÁNGULARES

TEOREMA FORMULA BASICA :

El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado y de la altura relativa a dicho lado.







$$\mathbb{S}_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

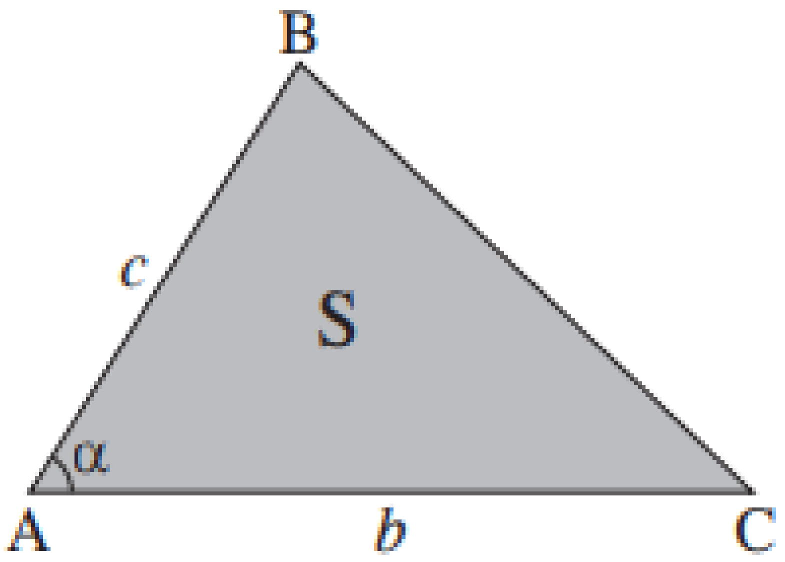
$$\mathbb{S}_{ABC} = \frac{bc}{2}$$

$$\mathbb{S}_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

ÁREA DE REGIONES TRIÁNGULARES

TEOREMA FORMULA TRIGONOMETRICA :

El área de una región triangular es igual al semiproducto de las longitudes de los lados multiplicado con el seno de la medida del ángulo que determinan dichos lados



En la figura,

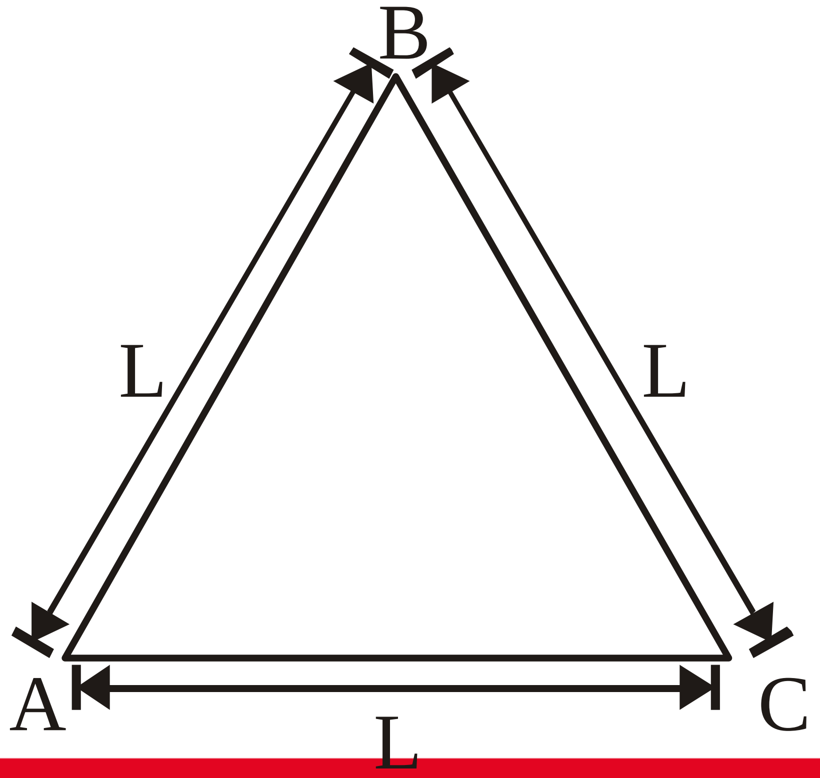
Si ABC es una región triangular de área S, tal que AC=b, AB=c y m∡BAC=α, entonces se cumple que

$$\mathbb{S}_{ABC} = \frac{bc\,sen\alpha}{2}$$

ÁREA DE REGIONES TRIÁNGULARES

ÁREA DE UNA REGIÓN TRIÁNGULAR EQUILÁTERA EN FUNCIÓN DEL LADO:

El área de un triángulo equilátero es igual a la cuarta parte del cuadrado de la longitud de su lado por la raíz cuadrada de 3.



En la figura,

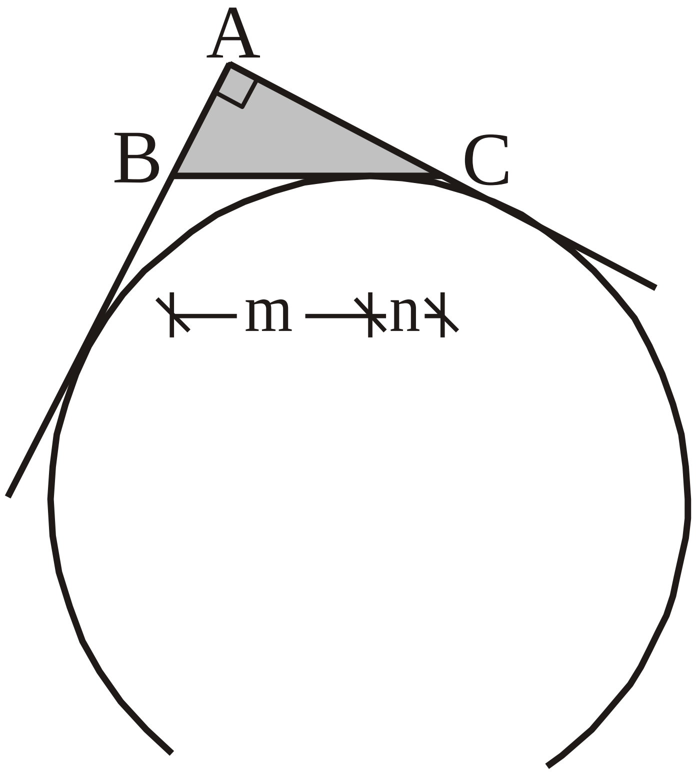
ABC es una región triangular equilátera de área S,

entonces se cumple que

$$\mathbb{S}_{ABC} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

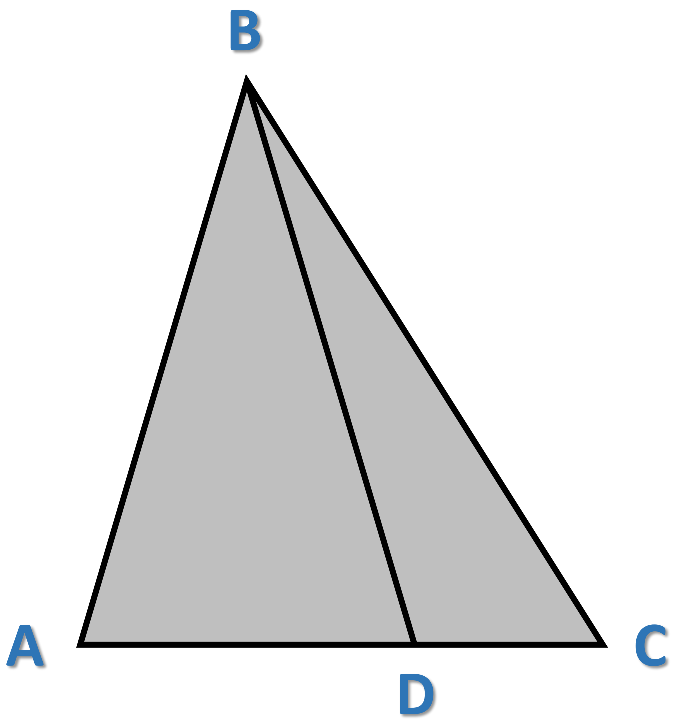
ÁREA DE REGIONES TRIÁNGULARES

TEOREMA: El área de un triángulo rectángulo es igual al producto de las longitudes de los segmentos que la circunferencia ex-inscrita a la hipotenusa determina sobre dicha hipotenusa.



$$\mathbb{S}_{ABC} = m.n$$

RELACIÓN DE ÁREA DE DOS REGIONES TRIÁNGULARES:

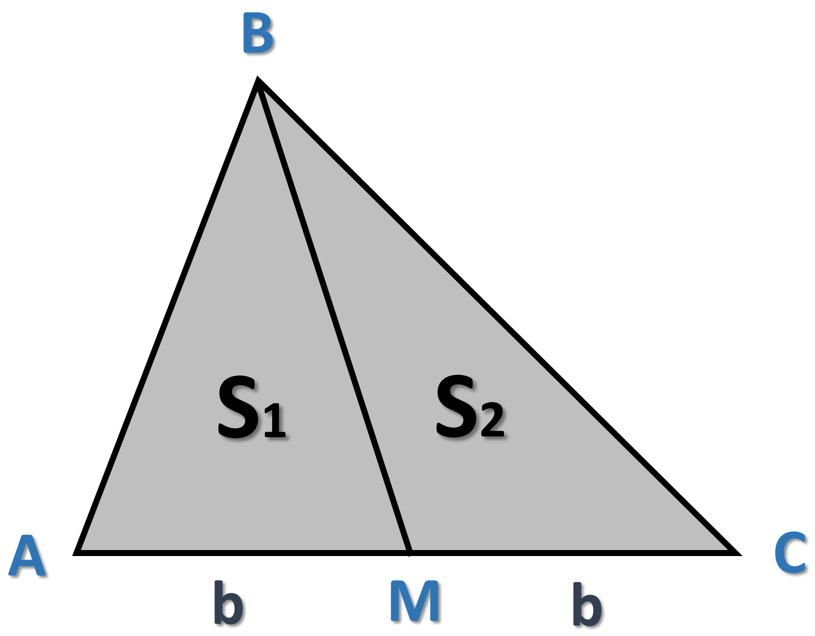


En la figura,
ABC es una región triangular,
entonces se cumple que

$$\frac{\mathbb{S}_{ABD}}{\mathbb{S}_{DBC}} = \frac{AD}{DC}$$

ÁREA DE REGIONES TRIÁNGULARES

RELACIÓN DE ÁREA DE DOS REGIONES TRIÁNGULARES:



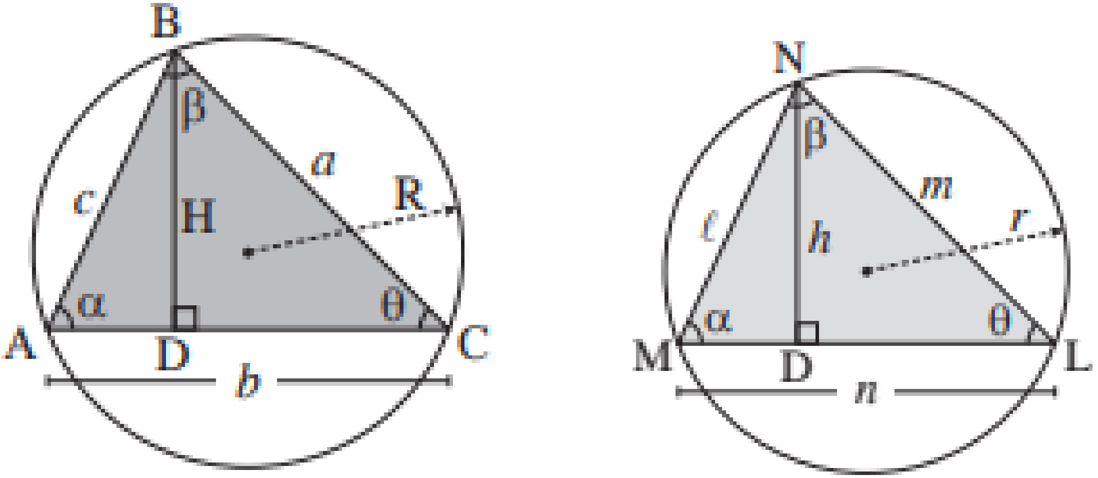
En la figura,
ABC es una región triangular y $\overline{BM}$ es mediana
entonces se cumple que

$$\boxed{\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2}$$

ÁREA DE REGIONES TRIÁNGULARES

RELACIÓN DE ÁREA DE DOS REGIONES TRIÁNGULARES SEMEJANTES:

Si dos triángulos son semejantes, entonces las áreas de sus regiones correspondientes son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus elementos homólogos.



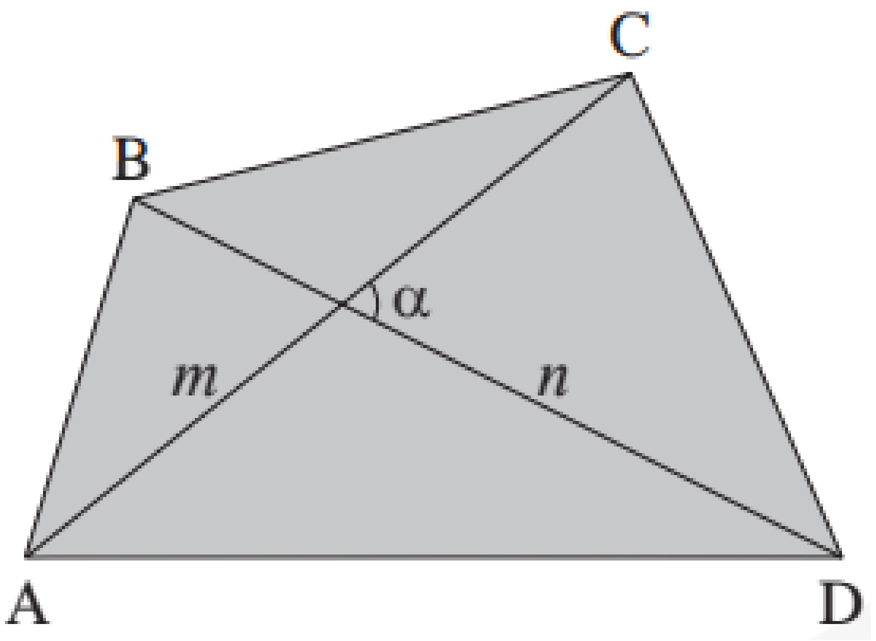
En la figura, los triángulos ABC y MNL son semejantes, entonces se cumple que

$$\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{a^2}{m^2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{c^2}{\ell^2} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{R^2}{r^2} = \ldots}$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

TEOREMA FORMULA GENERAL :

El área de una región cuadrangular es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales multiplicado con el seno de la medida del ángulo que determinan las rectas que contienen a las diagonales.



En la figura,

Si $\mathbb{A}_{ABCD}$ es área de la región cuadrangular ABCD, AC=m y BD=n,

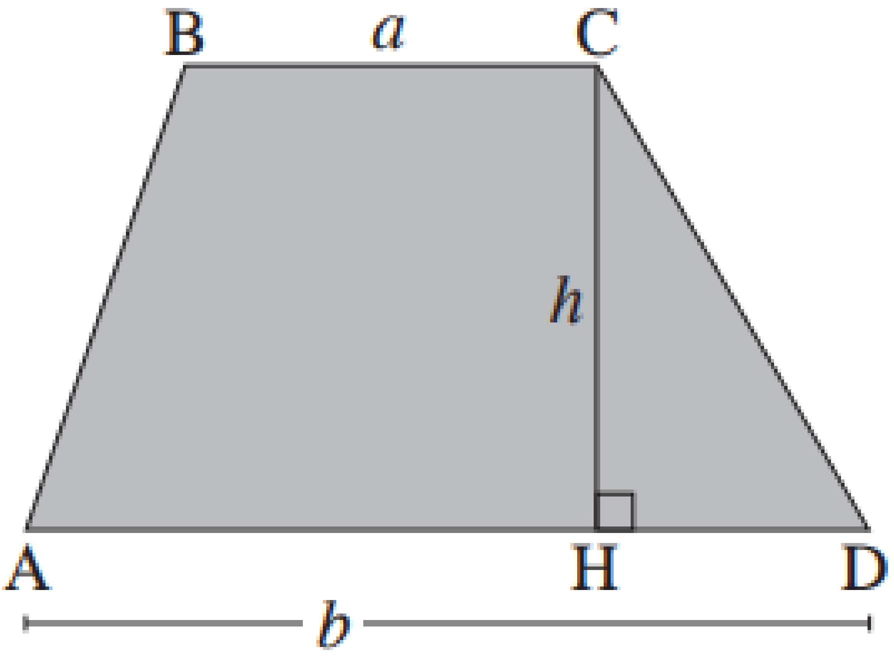
entonces se cumple que

$$\mathbb{A}_{ABCD}=\frac{m.n.\operatorname{sen}\alpha}{2}$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

ÁREA DE UNA REGIÓN TRAPECIAL :

El área de una región trapecial es igual al producto de las longitudes de la mediana y la altura.



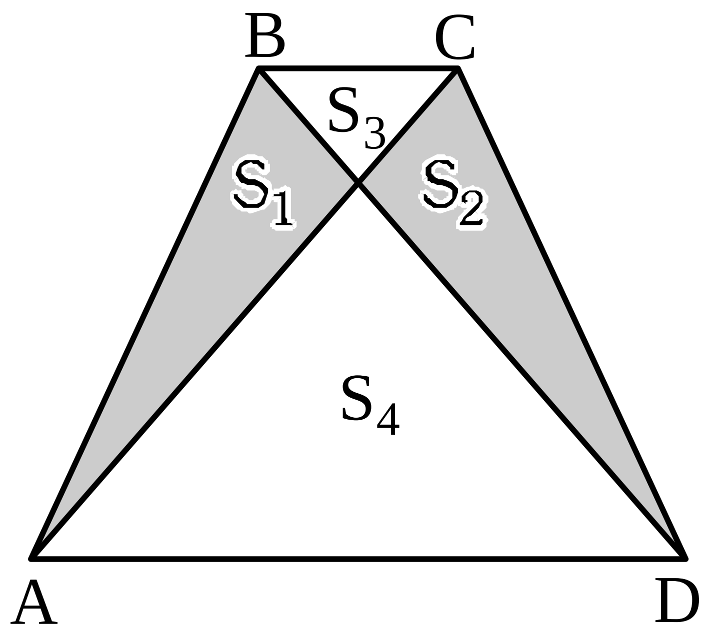
En la figura,

Si $\mathbb{A}_{ABCD}$ es área de la región trapecial ABCD, cuyos lados BC y AD son las bases, BC=a y AD=
entonces se cumple que

$$\mathbb{A}_{ABCD}=\left(\frac{a+b}{2}\right)h$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

TEOREMAS :



En la figura,
Si ABCD es un trapecio cuyos lados BC y AD son las bases,
entonces se cumple que

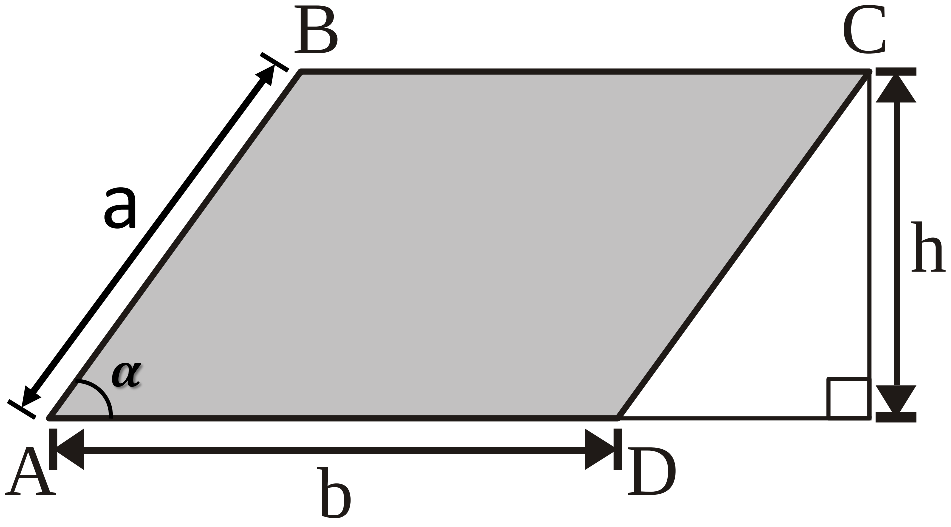
$$\mathbb{A}_{ABCD}=\left(\sqrt{\mathbb{S}_1}+\sqrt{\mathbb{S}_2}\right)^2$$

$$\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRAMICA :

El área de una región paralelogramica es igual al producto de las longitudes de un lado y a la altura relativa a dicho lado



En la figura,
Si ABCD es un paralelogramo AD=b y AB=a,
entonces se cumple que

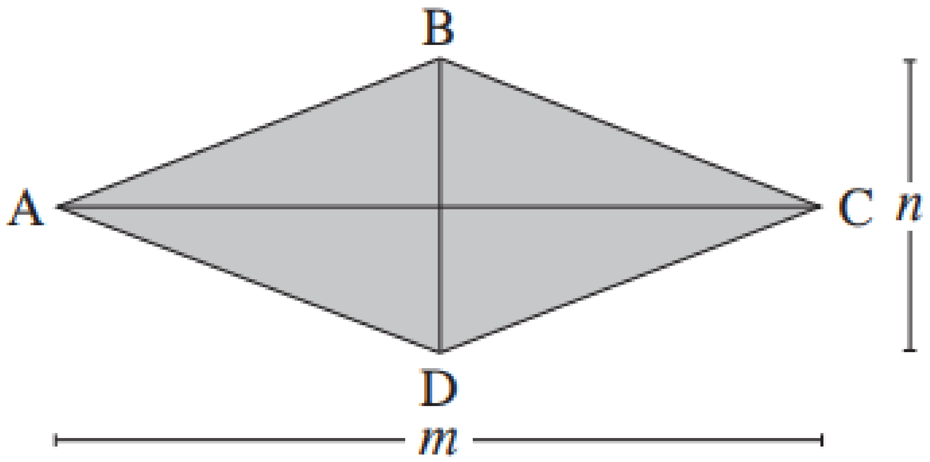
$$\mathbb{A}_{ABCD} = b.h$$

$$\mathbb{A}_{ABCD} = a.b.\operatorname{sen}\alpha$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

ÁREA DE UNA REGIÓN ROMBAL :

El área de una región cuadrangular determinado por un rombo es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales.



En la figura,

Si ABCD es un rombo AC=m y BD=n ,

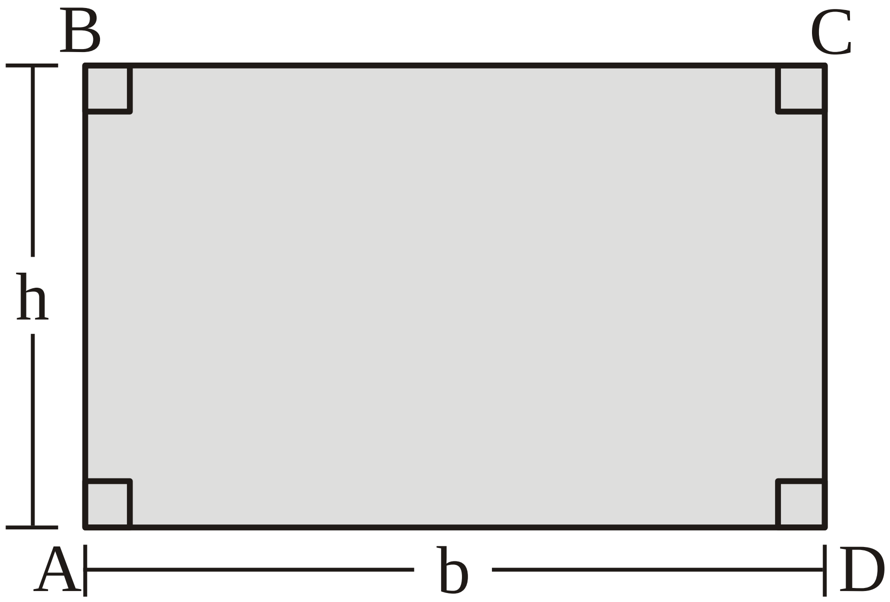
entonces se cumple que

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \frac{(m)(n)}{2}$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

ÁREA DE UNA REGIÓN RECTÁNGULAR :

El área de una región rectángular es igual al producto de las longitudes de dos de sus lados consecutivos.



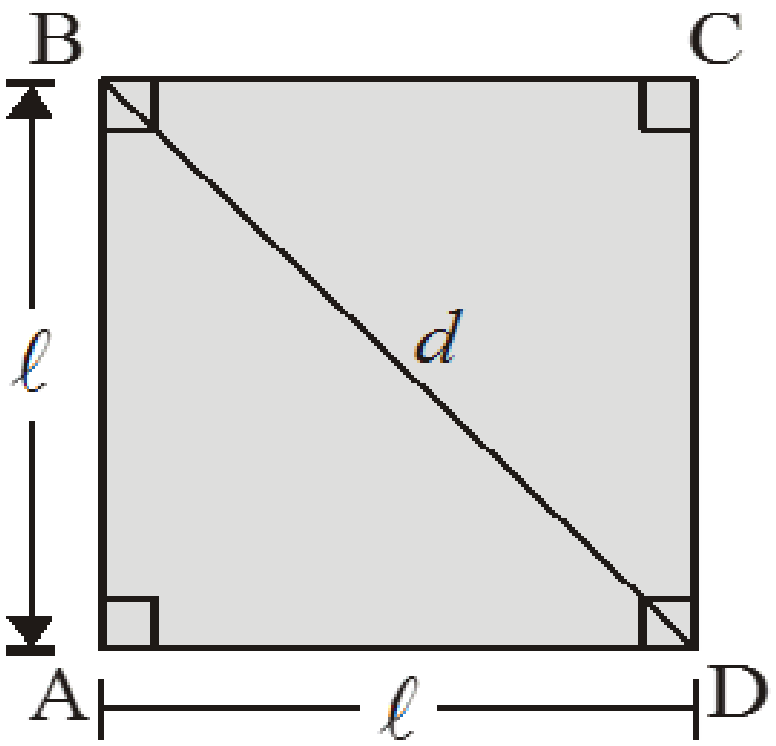
En la figura,
Si ABCD es un rectángulo AB=h y AD=b ,
entonces se cumple que

$$\mathbb{A}_{ABCD}=b.h$$

ÁREA DE REGIONES CUADRÁNGULARES

ÁREA DE UNA REGIÓN CUDRADA :

El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.



En la figura,

Si ABCD es un cuadrado AB= ℓ y BD= d , entonces se cumple que

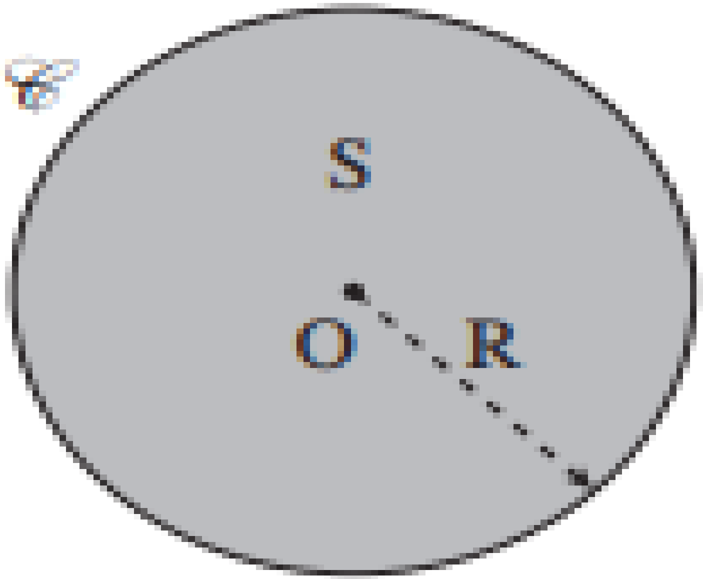
$$\mathbb{A}_{ABCD} = \ell^2$$

$$\mathbb{A}_{ABCD} = \frac{d^2}{2}$$

ÁREA DE REGIONES CIRCULARES

<u>CIRCULO</u> :

Se denomina círculo a la unión de una circunferencia con el interior.



En la figura,

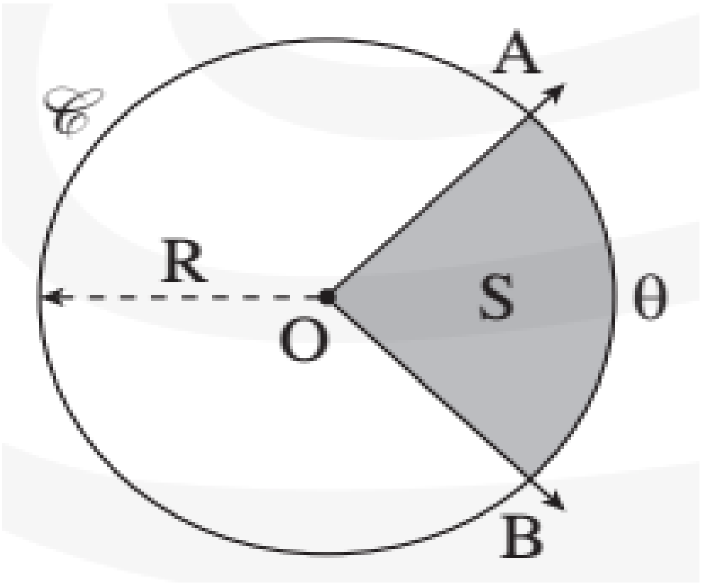
Si tiene el circulo de centro O y longitud de radio R, y A es el área del circulo , entonces se cumple que

$$\mathbb{A} = \pi . R^2$$

ÁREA DE REGIONES CIRCULARES

SECTOR CIRCULAR :

Se denomina sector circular a la parte de un círculo determinado por un ángulo central de la circunferencia y el arco correspondiente.



En la figura,

Si tiene el circulo de centro O y longitud de radio R y el arco menor AB mide θ.

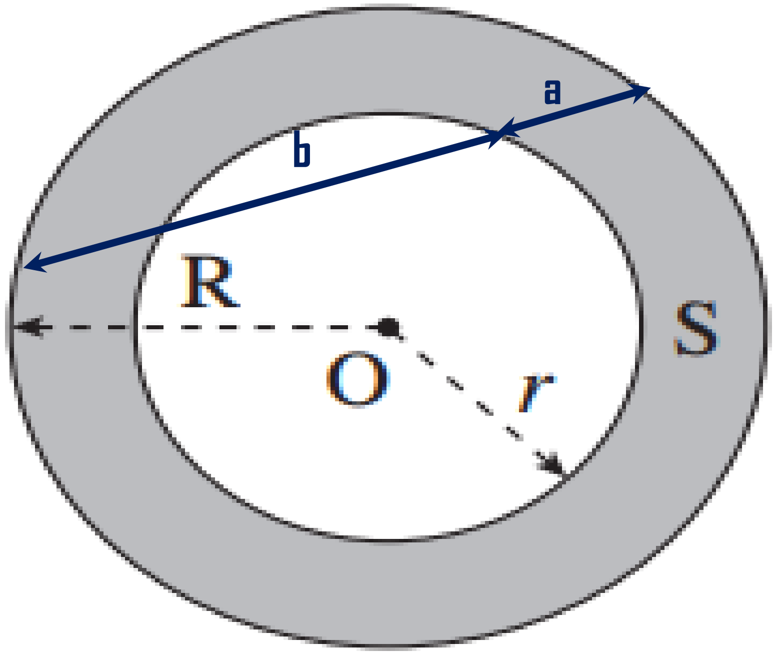
entonces se cumple que

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\theta}{360°}\right) \pi . R^2$$

ÁREA DE REGIONES CIRCULARES

CORONA CIRCULAR :

Se denomina corona circular a la región plana determinada por dos circunferencias concéntricas.



En la figura,
O es centro de las dos circunferencias cuyos radios miden R y r,respectivamente.
entonces se cumple que

$$\mathbb{A} = \pi.(R^2 - r^2)$$

$$\mathbb{A} = a.b.\pi$$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

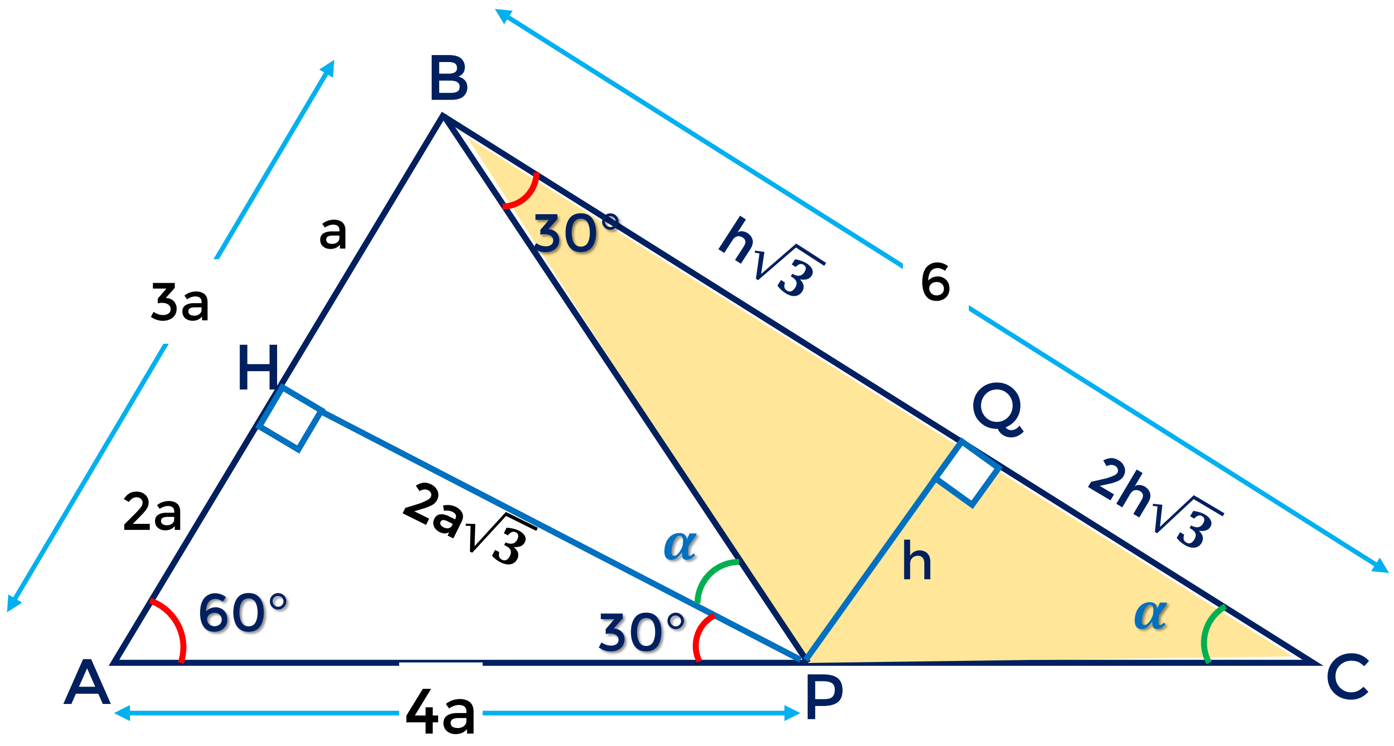
CAPITULO 6 PRACTICA

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, tal que m∢PBC = 30° y 4(AB) = 3(AP). Calcule el área de la región triangular PBC si, además, BC = 6u y m ∢ BAC = 60°.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región triangular PBC = A_{PBC}



- Trazo $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ ⊿ AHP : (Not 30°- 60°)

➡ AH = 2 a y HP = 2 a $\sqrt{3}$

- Trazo $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ ⊿ BQP : (Not 30°- 60°)

➡ PQ = h y BQ = h $\sqrt{3}$

- ⊿ BHP ~ ⊿ PQC ➡ QC = 2h $\sqrt{3}$

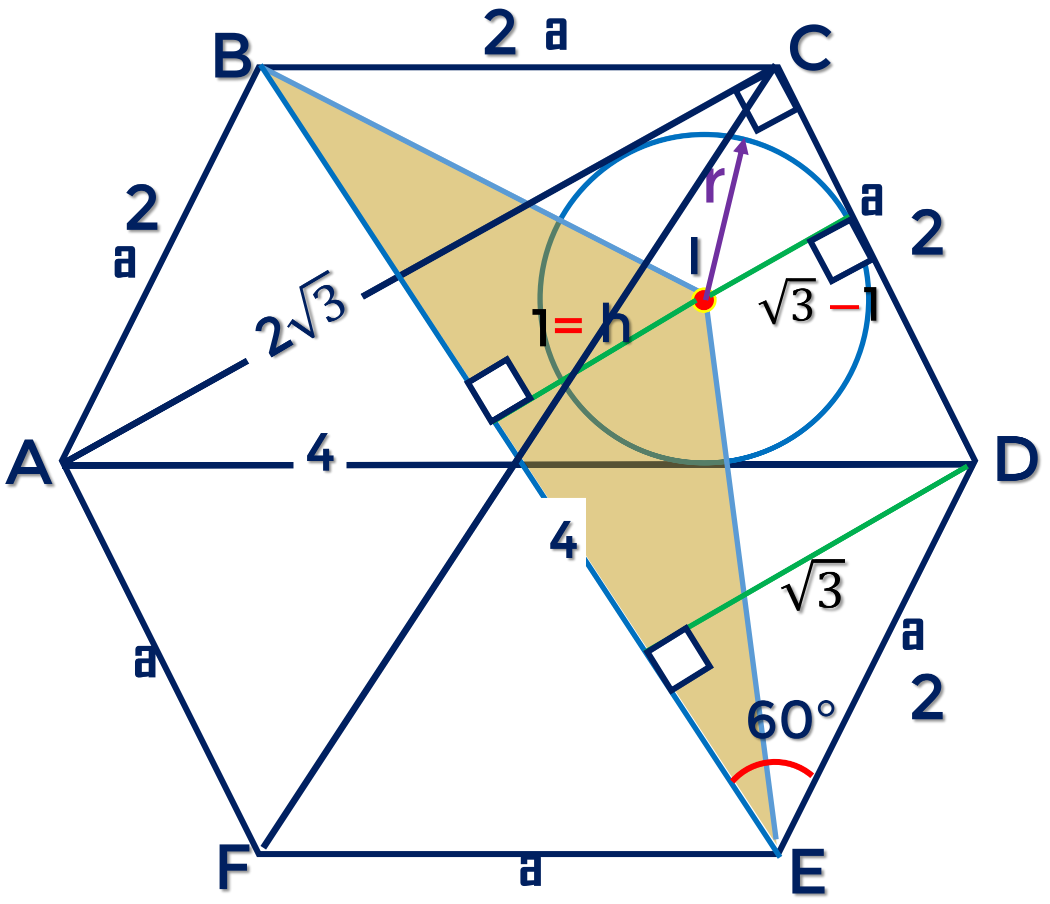
- Del gráfico 3h $\sqrt{3}$ = 6 ➡ $\boxed{h = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$$A_{PBC} = \frac{(2\sqrt{3}/3) \cdot 6}{2}$$

$$\boxed{\therefore A_{PBC} = 2\sqrt{3}\ u^2}$$

PROBLEMA 2 El área de la región limitada por un hexágono regular ABCDEF es igual a $6\sqrt{3}$ cm². Calcule el área de la región triangular BIE, siendo I el incentro del triángulo ACD.

RESOLUCIÓN : Piden: el área de la región triangular BIE = A_{BIE}



- Dato: $\underbrace{A_{ABCDEF}} = 6\sqrt{3}$

$$6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

- Del gráfico: $m\measuredangle ACD = 90°$ y $m\measuredangle BED = 60°$

$AD = BE = 4$ y $AC = 2\sqrt{3}$

- $\triangle$ ACD (Teorema de Poncelet)

$$2r + 4 = 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{3} - 1}$$

- Del gráfico: $h + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{h = 1}$

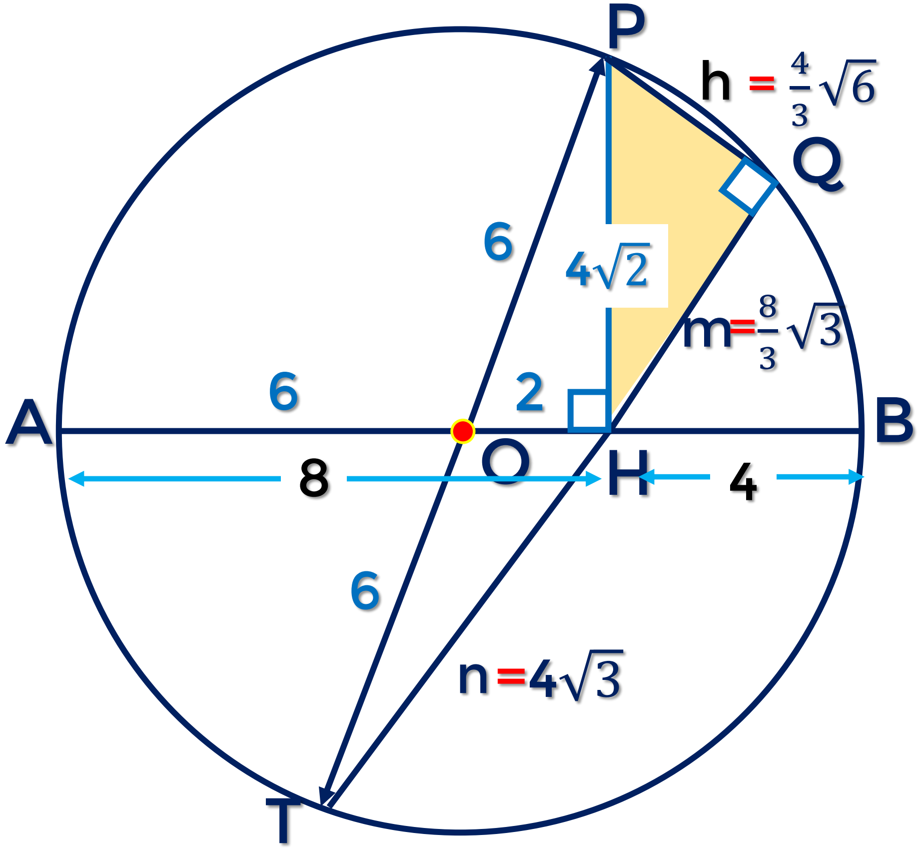
$$A_{BIE} = \frac{(4) \cdot 1}{2}$$

$$\therefore A_{BIE} = 2 \text{ cm}^2$$

PROBLEMA 3 En una semicircunferencia de diámetro AB se ubica el punto P y se traza la perpendicular PH a $\overline{AB}$, tal que AH = 8 cm y HB=4 cm. En el arco PB se ubica el punto Q, tal que $\overline{PQ}\perp\overline{QH}$. El área de la región triangular PQH

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región triangular PQH = A_{PQH}



- Prolongo $\overline{PO}$ y $\overline{QH}$ intersectándose en T
- Por teorema $(PH)^2 = 8 \cdot 4$ ➡ $\boxed{PH = 4\sqrt{2}}$
- En el Δ PHT Teor. de la mediana

$$(4\sqrt{2})^2 + n^2 = 2(2)^2 + \frac{(12)^2}{2} \Rightarrow \boxed{n = 4\sqrt{3}}$$

- Teorema de las cuerdas

$$m \cdot 4\sqrt{3} = 8 \cdot 4 \Rightarrow \boxed{m = \frac{8}{3}\sqrt{3}}$$

- ⊿ HQP (Teorema de Pitágoras)

$$(4\sqrt{2})^2 = \left(\frac{8}{3}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{4}{3}\sqrt{6}}$$

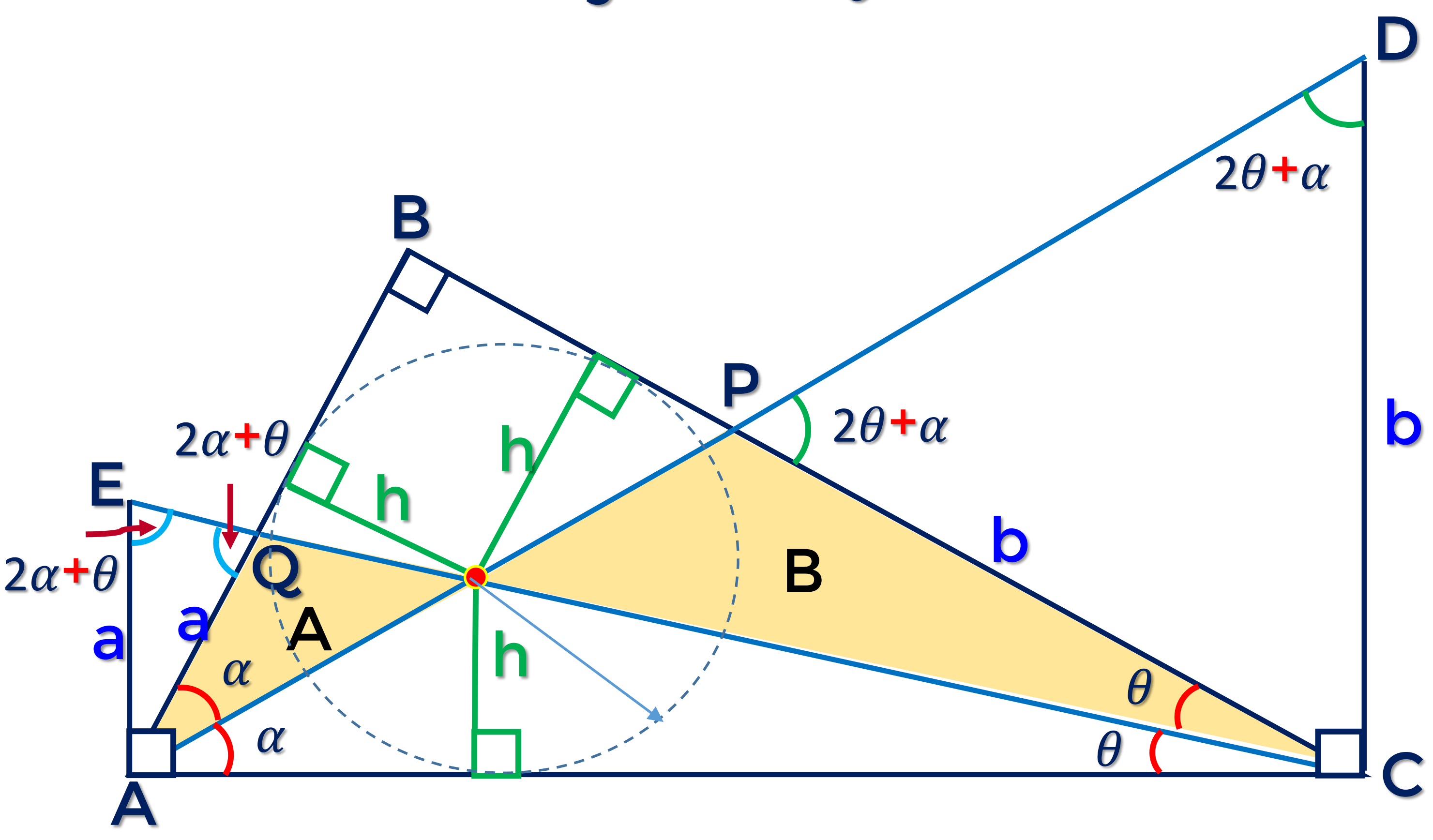
$$A_{PQH} = \frac{4}{3}\sqrt{6} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore A_{PQH} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ cm^2$$

PROBLEMA 4 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las bisectrices AP y CQ. Calcule el área de la región APCQ si AQ = a y PC = b.

RESOLUCIÓN :

Piden: el área de la región APCQ = A + B



- Prolongo $\overline{AP}$ hasta D, tal que m∢ ACD = 90°

➡ El Δ PCD m∢ ADC = $2\theta+\alpha$

El Δ PCD (Isósceles)

➡ PC = CD = b

- Prolongo $\overline{CQ}$ hasta E, tal que m∢ EAC = 90°

➡ El Δ EAC m∢ AEC = $2\alpha+\theta$

El Δ EAC (Isósceles)

➡ EA = AQ = a

- Por teorema

$$\boxed{h = \frac{a \cdot b}{a+b}}$$

$$A + B = \frac{a.h}{2} + \frac{b.h}{2}$$

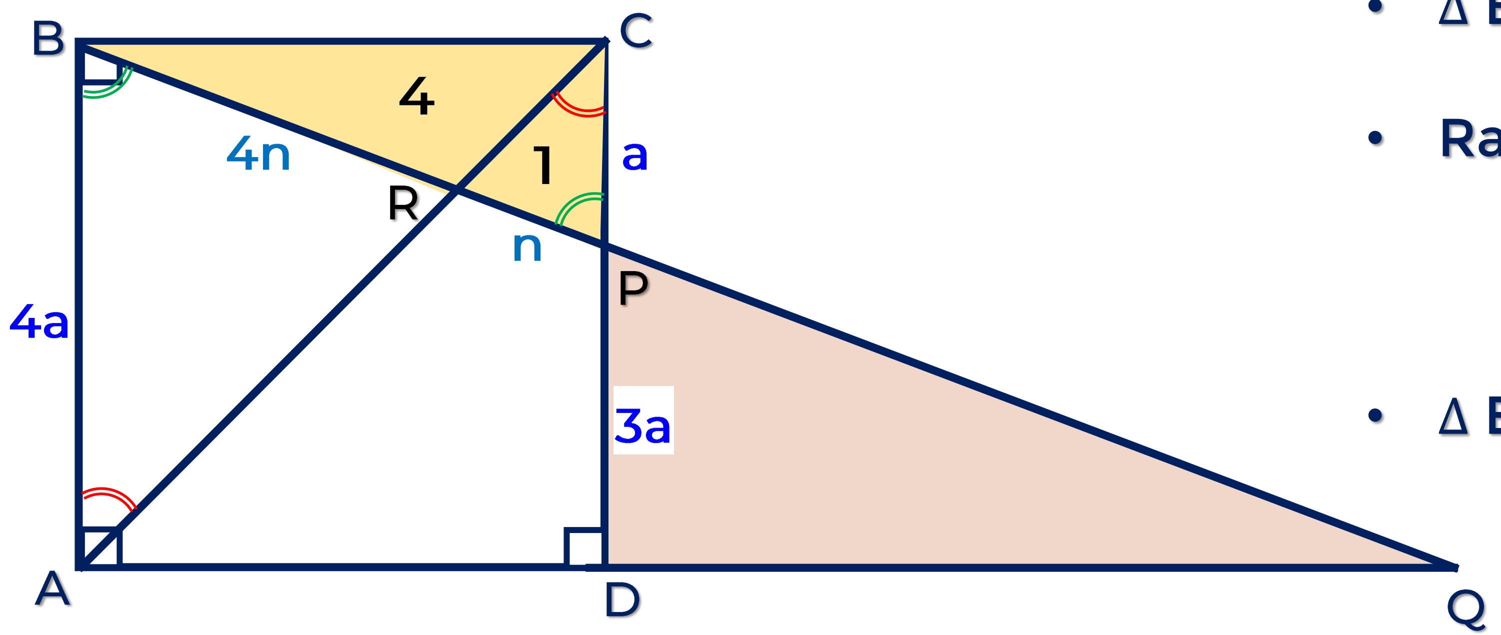
$$= \frac{\cancel{(a+b)}}{2} \cdot \frac{(a \cdot b)}{\cancel{a+b}}$$

$$\boxed{\therefore A + B = \frac{a.b}{2} u^2}$$

PROBLEMA 5 En un cuadrado ABCD se ubica el punto P en $\overline{CD}$, tal que PD = 3PC. Los rayos BP y AD se cortan en Q. $\overline{AC}$ y $\overline{BP}$ se cortan en R. Si el área de la región triangular BRC es igual a 4 cm^2, entonces el área de la región PDQ es

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región PDQ = A PDQ



- **Dato:** ABCD es un cuadrado
- Δ BRA ~ Δ PRC ➡ BR = 4 RP
- Razón de áreas

$$\frac{n}{4n} = \frac{A_{PRC}}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{PRC} = 1\ cm^2}$$

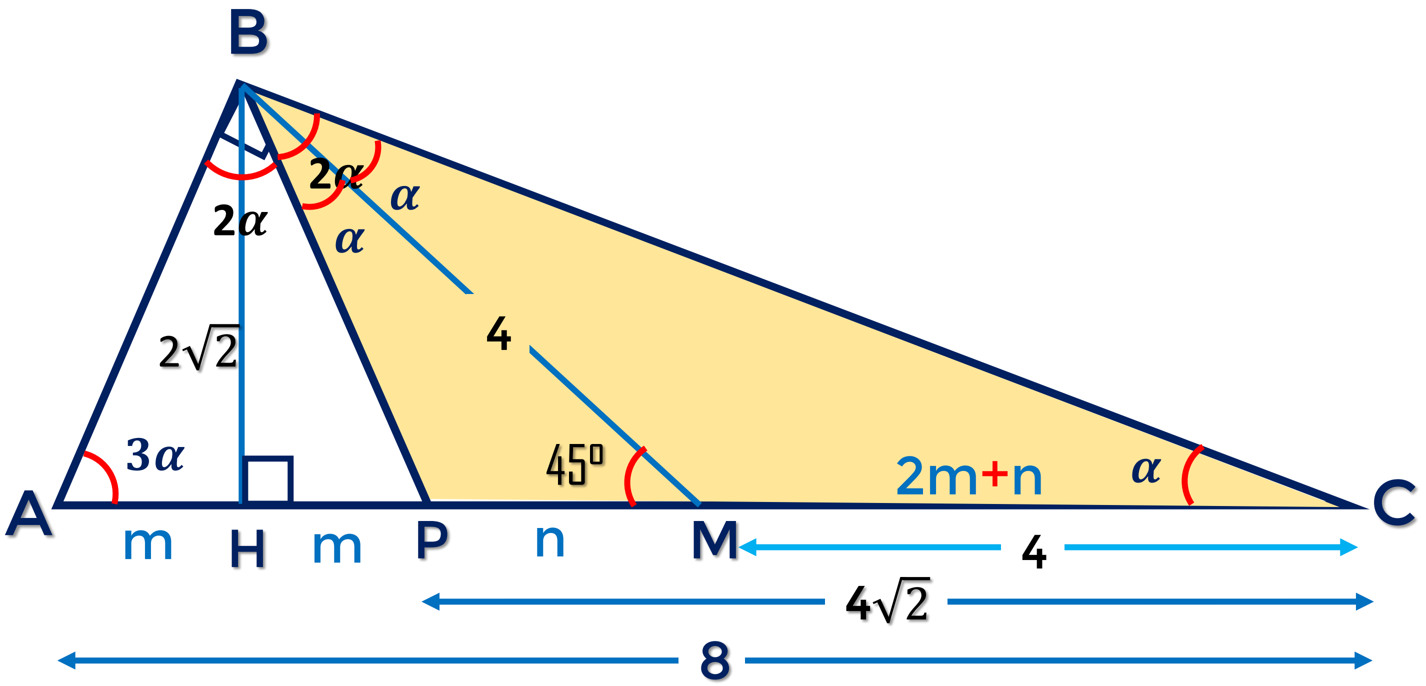
- Δ BCP ~ Δ PDQ $\quad \dfrac{5}{A_{PDQ}} = \dfrac{(a)^2}{(3a)^2} = \dfrac{1}{9}$

$$\boxed{\therefore A_{PDQ} = 45cm^2}$$

PROBLEMA 6 En un triángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior BP. Calcule el área de la región triangular PBC si m ∢ BCA = 22,5° y AC = 8 u.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región triangular PBC = A_{PBC}



Dato: $\alpha = 22{,}5°$

- Δ ABC: $4\alpha = 90°$
- ⊿ ABC (Teorema de la mediana)

  AM = MC = BM = 4
- Δ ABP: Isósceles ➡ AH = HP
- ⊿ BHM (notable de 45° - 45°)

  BH = $2\sqrt{2}$ y m + n = $2\sqrt{2}$
- Del gráfico PC = 2 (m + n)

  PC = $4\sqrt{2}$

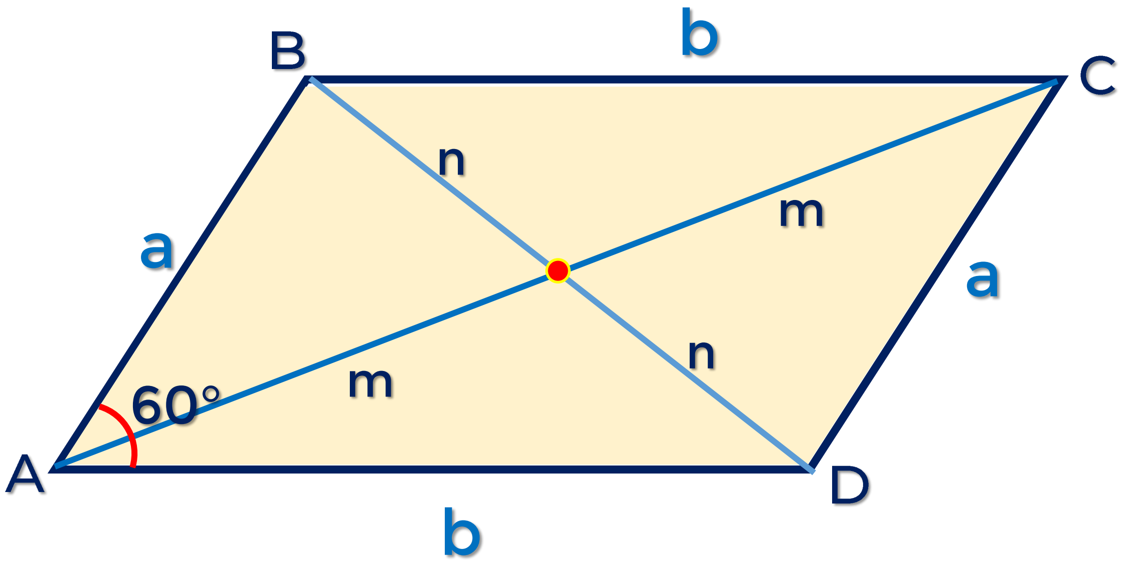
$$A_{PBC} = \frac{(2\sqrt{2})(4\sqrt{2})}{2}$$

$$\boxed{\therefore A_{PBC} = 8\ u^2}$$

PROBLEMA 7 Calcule el área de una región romboidal en la cual la diferencia de cuadrados de sus diagonales es igual a 20 cm² y uno de sus ángulos internos mide 60°.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región romboidal = A_{ABCD}



Dato: $(2m)^2 - (2n)^2 = 20 \Rightarrow m^2 - n^2 = 5$

- Δ ABD: T. de la mediana

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{(2n)^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2m^2 + 2n^2$$

- Δ ABD: T. de Cosenos

$$(2n)^2 = \underline{a^2 + b^2} - 2.a.b \underbrace{\cos(60°)}_{1/2}$$

$$4n^2 = 2m^2 + 2n^2 - a.b$$

$$a.b = 2\underbrace{(m^2 - n^2)}_{5} \Rightarrow a.b = 10$$

$$A_{ABCD} = a.b.\operatorname{sen}(60°) = 10 . \frac{\sqrt{3}}{2}$$

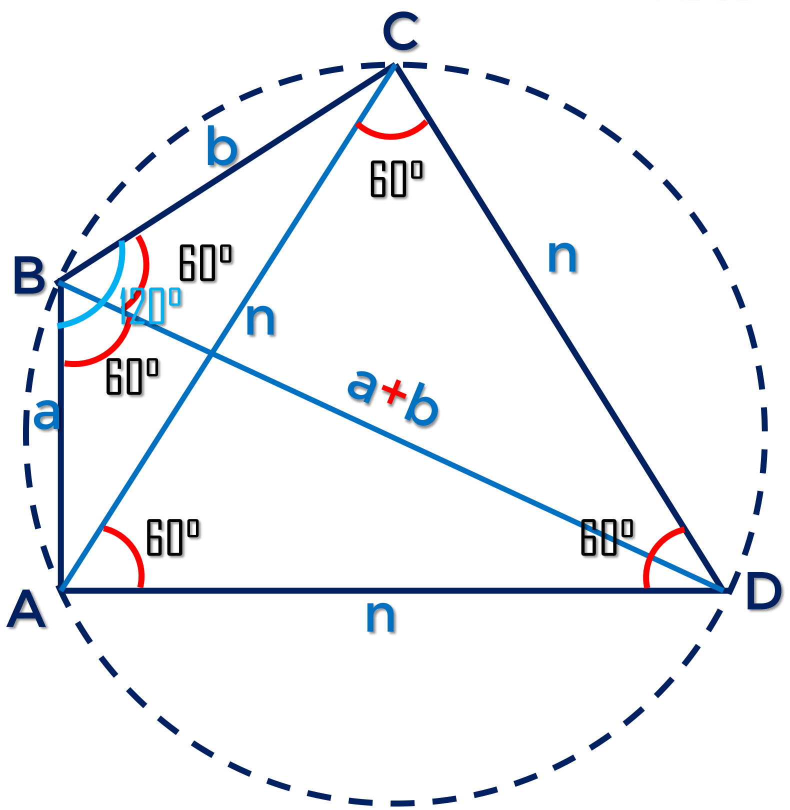
$$\therefore A_{ABCD} = 5\sqrt{3}\ cm^2$$

PROBLEMA 8

En un cuadrilátero ABCD, AB + BC = 8 u , AD = CD y m ∢ ABC = 2m ∢ ADC = 120°. Calcule el área de la región cuadrangular ABCD.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región cuadrangular ABCD = A_{ABCD}.



Dato:

- AB + BC = 8 ➡ a + b = 8
- AD = CD = n
- Del gráfico: $A_{ABCD} = A_{BCD} + A_{ABD}$
- Δ ACD: es equilátero
- En el ⏢ ABCD(Es inscriptible)
- Por teorema BD = a + b

➡ $m∢ABD = m∢CBD = 60°$

$$\left.\begin{aligned} A_{BCD} &= \frac{b.(a+b)\,sen\,60°}{2} \\ A_{ABD} &= \frac{a.(a+b)\,sen\,60°}{2} \end{aligned}\right\}(+)$$

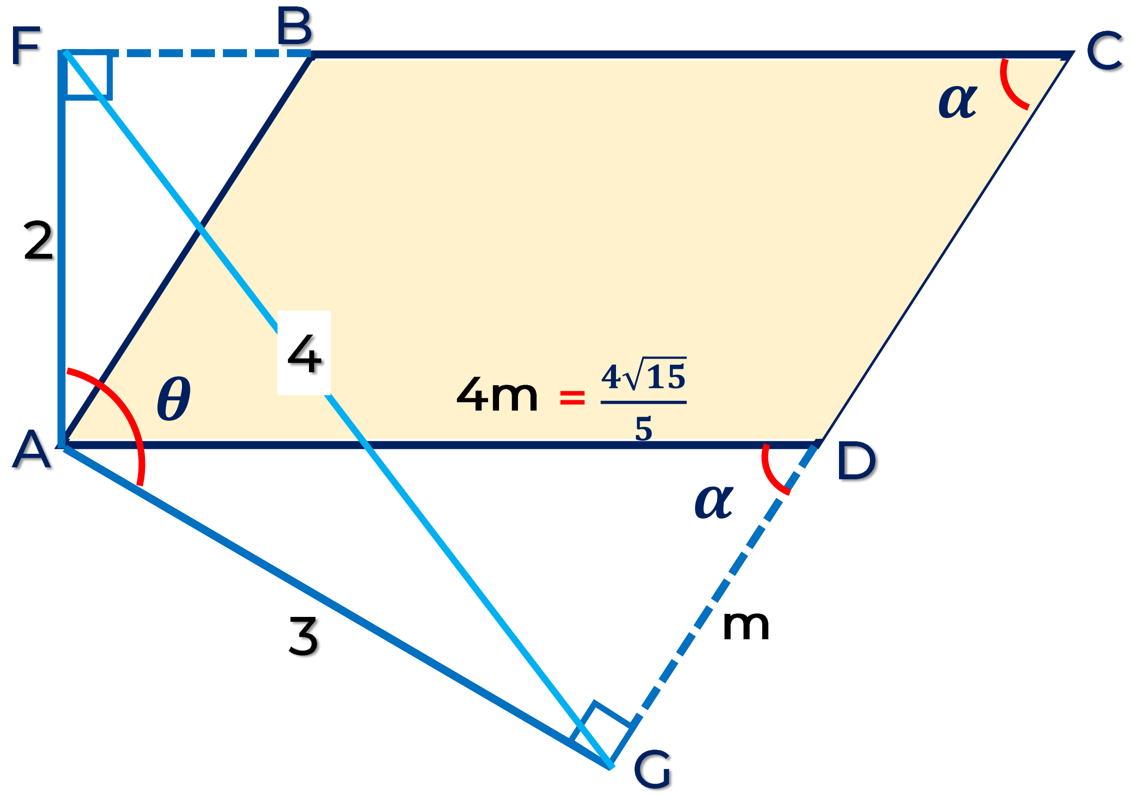
$$A_{ABCD} = \frac{(a+b)^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(8)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\therefore A_{ABCD} = 16\sqrt{3}\ u^2}$$

PROBLEMA 9 Desde el vértice de A de un paralelogramo ABCD se trazan las perpendiculares $\overline{AF}$ y $\overline{AG}$ a $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si AF = 2 u, AG = 3 u y FG = 4 u, calcule el área de la región ABCD.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región ABCD = A_{ABCD}



- El Δ FAG T. de los cosenos

$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2(2)(3)\cos\theta$

$\boxed{\cos\theta = {}^{-1}/_{4}}$

$\theta + \alpha = 180°$ ➡ $\cos\alpha = -\cos\theta$

$\boxed{\cos\alpha = {}^{1}/_{4}}$

- $\triangle$ AGD (Teorema de Pitágoras)

$(4m)^2 = m^2 + 3^2$ ➡ $\boxed{m = \frac{\sqrt{15}}{5}}$

$4m = \frac{4\sqrt{15}}{5}$

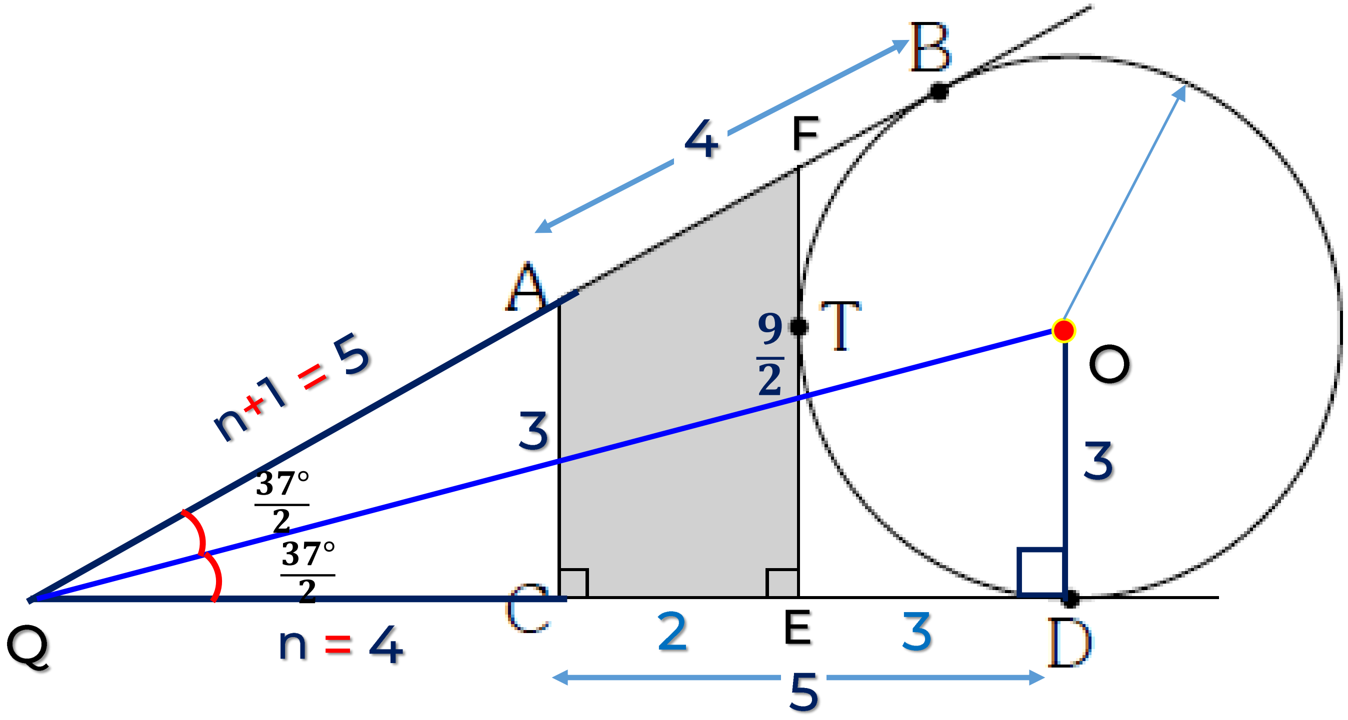
$A_{ABCD} = \frac{4\sqrt{15}}{5} \cdot 2$

$\therefore A_{ABCD} = \frac{8\sqrt{15}}{5}\ u^2$

PROBLEMA 10 En la figura mostrada, AB = 4 cm, AC = 3 cm y CD = 5 cm. Calcule el área de la región sombreada. (B, D, T: puntos de tangencia)

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región sombreada = A_{AFDC}



- Por teorema QB = QD
- ⊿ QCA (Teorema de Pitágoras)

$$(n+1)^2 = n^2 + 3^2$$

➡ $\boxed{n = 4}$ $\boxed{m\measuredangle AQC = 37°}$

- ⊿ QDO (Aproximado 37°/ 2)

➡ $\boxed{OD = 3}$

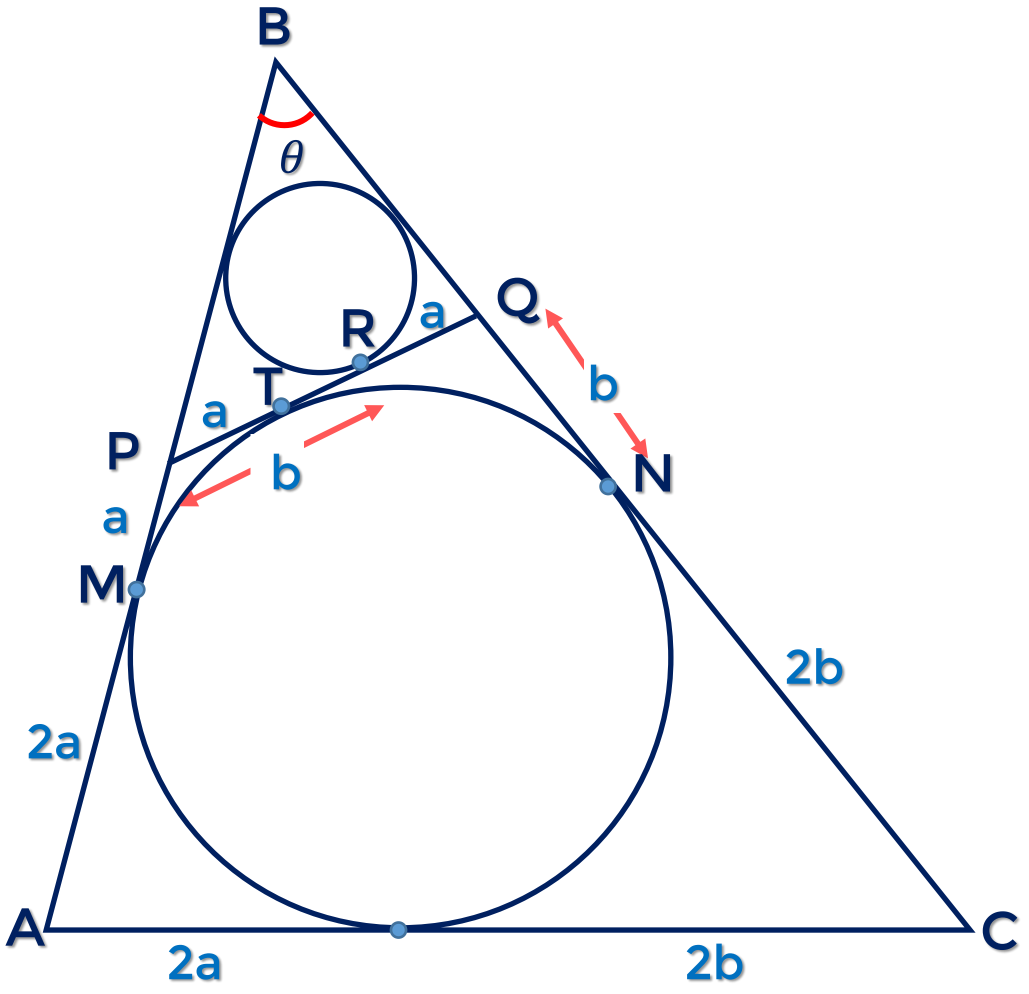
- ■ TODE (Cuadrado) ➡ $\boxed{ED = 3}$
- ⊿ QEF (Aproximado 37°) ➡ $\boxed{FE = 9/2}$

$$A_{ABCD} = \frac{(3 + \frac{9}{2})}{2} \cdot 2$$

$\boxed{\therefore A = 7{,}5\ cm^2}$

PROBLEMA 11 En la figura, AM = 2MP y CN = 2NQ. Calcule la razón entre las áreas de las regiones poligonales PBQ y APQC.

RESOLUCIÓN : Piden: la razón entre las áreas de las regiones poligonales PBQ y APQC. $= \dfrac{A_{PBQ}}{A_{APQC}}$



- Por Teorema RQ = PT = a

  PR = NQ = b

$$A_{PBQ} = a \cdot b \operatorname{Cot}(\theta/2) \quad \ldots.(\mathrm{I})$$

$$A_{PBQ} + A_{APQC} = 2a \cdot 2b \operatorname{Cot}(\theta/2) \quad \ldots.(\mathrm{II})$$

- I en II

$$A_{PBQ} + A_{APQC} = 4\,(\underbrace{a \cdot b \operatorname{Cot}(\theta/2)}_{A_{PBQ}})$$

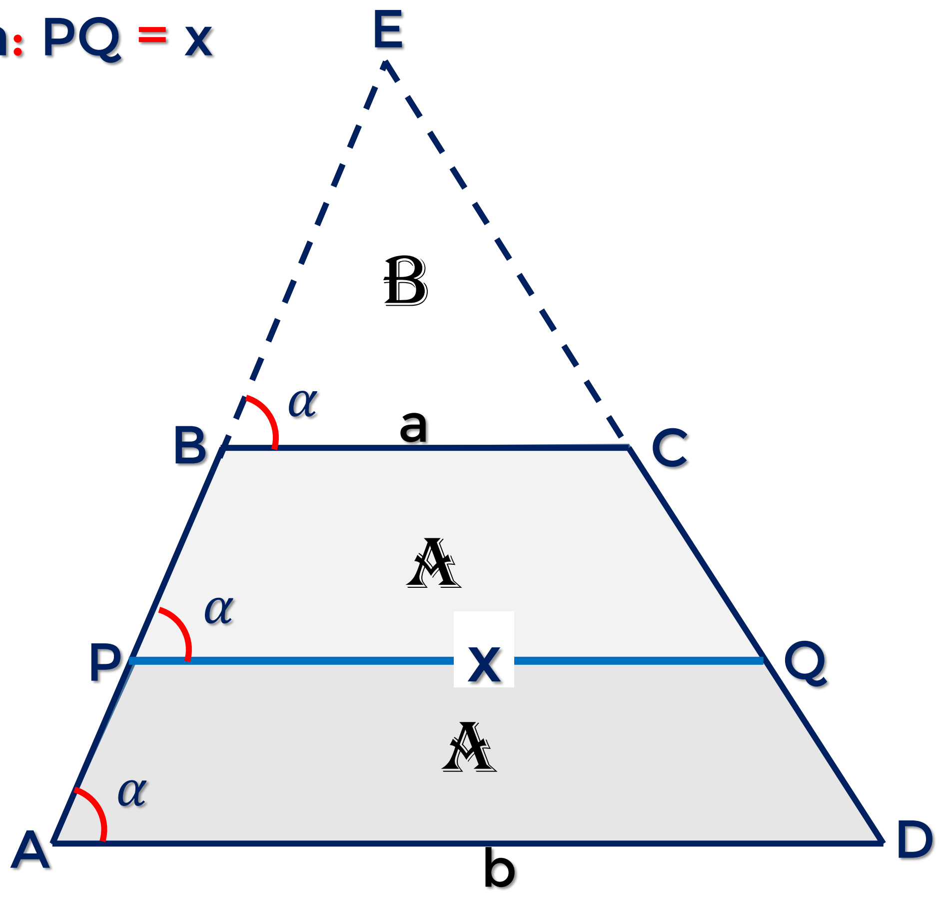
$$A_{APQC} = 3\,A_{PBQ}$$

$$\boxed{\therefore \frac{A_{PBQ}}{A_{APQC}} = \frac{1}{3}}$$

PROBLEMA 12 Las longitudes de las bases de un trapecio ABCD son: BC = a y AD = b. Una paralela a las bases biseca a la región trapecial ABCD y corta a los lados laterales en P y Q. La longitud de $\overline{PQ}$ es

RESOLUCIÓN :

Piden: PQ = x



- Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ hasta E

$$\frac{B}{A+B} = \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{a^2}{x^2 - a^2} \quad \ldots.(\mathrm{I})$$

$$\frac{B}{2A+B} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{B}{2A} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \quad \ldots.(\mathrm{II})$$

- I en II

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{x^2 - a^2}\right) = \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

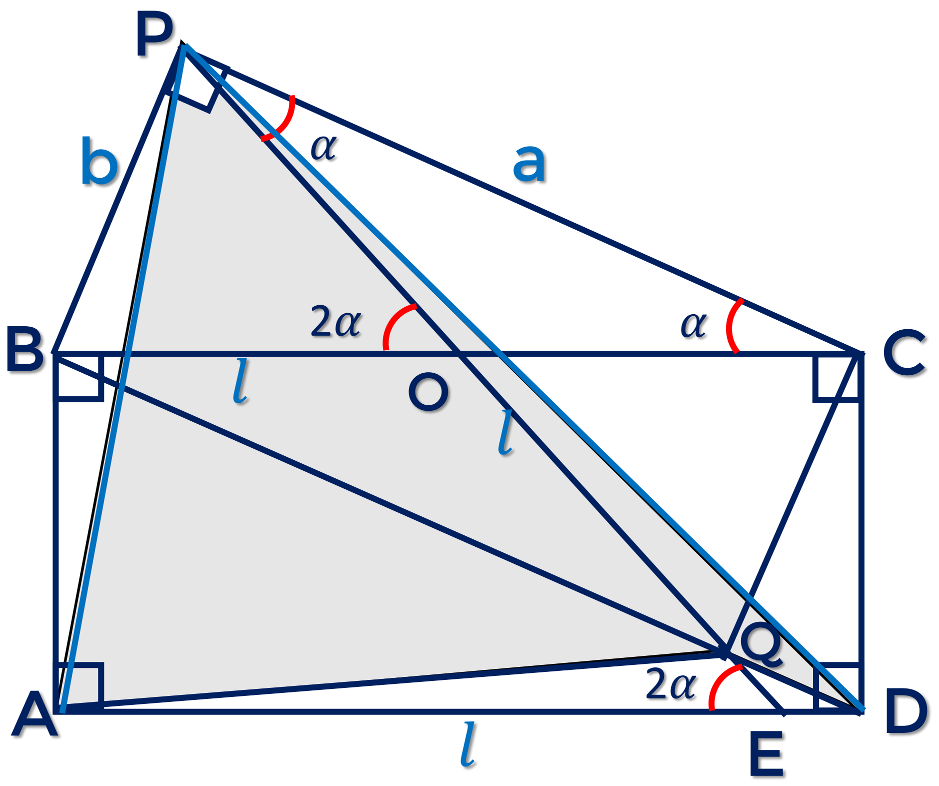
$$b^2 - a^2 = 2x^2 - 2a^2$$

$$\boxed{\therefore\ x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}}$$

PROBLEMA 13 Dado el rectángulo ABCD y el rectángulo BPCQ (Q interior al rectángulo ABCD), si PC = a y PB = b, calcule el área de la región cuadrangular no convexa APDQ.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región cuadrangular no convexa APDQ = A



Dato :

- BPCQ es un rectángulo

  ➡ PQ = BC y m∢ BOP = 2α

- ABCD es un rectángulo

  ➡ BC = AD y m∢ AEP = 2α

- ⊿ BPC Sen $\alpha = \frac{b}{l}$ y cos $\alpha = \frac{a}{l}$

- **Sabemos:** Sen 2α = 2 Sen α . Cos α

$$\text{Sen } 2\alpha = \frac{2\,a\,.\,b}{l^2}$$

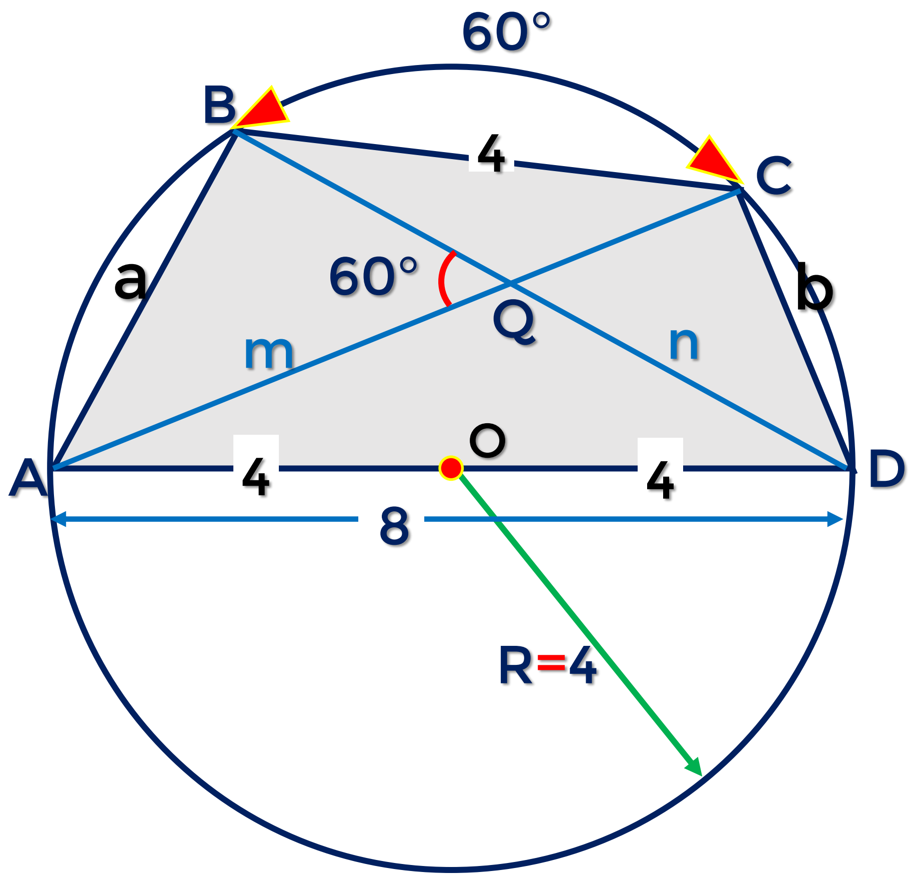
$$A = \frac{l^2}{2}\,.\,sen\ 2\alpha = \frac{l^{\,2}}{2}\,.\,\frac{2\,a.b}{l^2}$$

$$\boxed{\therefore A = a.b\ \ u^2}$$

PROBLEMA 14 Calcule el área de una región cuadrangular ABCD inscrita en una circunferencia de diámetro AD, si AD = 2BC = 8 cm y AB · CD = 18 cm^2.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de una región cuadrangular ABCD = A



Dato : a . b = 18

- Por teorema:

BC = R = 4 ➡ m $\overset{\frown}{BC}$ = 60°

➡ m $\overset{\frown}{AB}$ + m $\overset{\frown}{CD}$ = 120°

➡ m∢ BQA = 60°

- Por teorema de Ptolomeo:

$\underbrace{a.b}_{18}$ + 8.4 = m.n ➡ m.n = 50

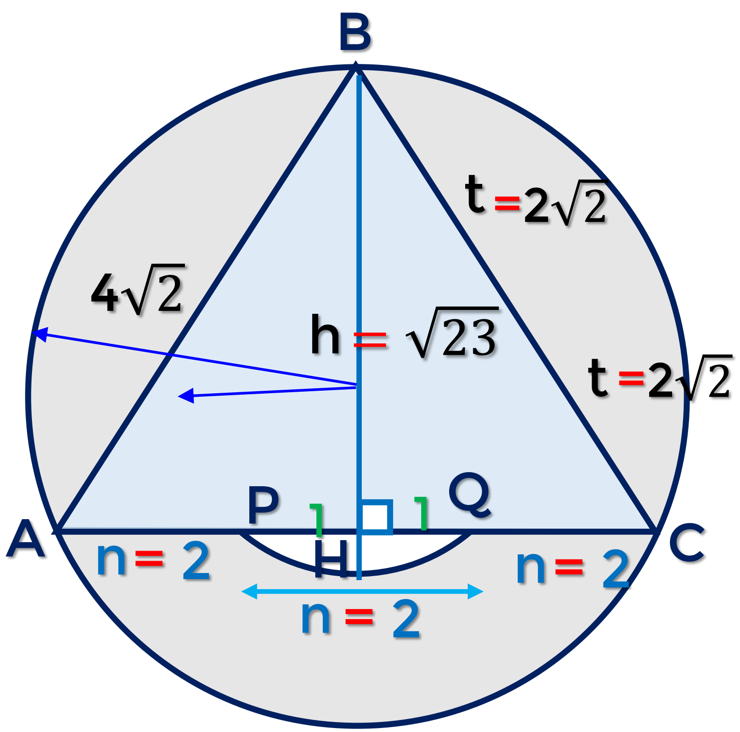
$$A = \frac{m.n}{2} . sen\ 60° = \frac{50}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore A = \frac{25\sqrt{3}}{2} cm^2$$

PROBLEMA 15 Calcule el área de la región limitada por un triángulo isósceles en el cual la circunferencia tangente a los lados laterales y que triseca a la base es concéntrica con la circunferencia circunscrita, determinando con esta una corona circular de $8\pi u^2$ de área.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región limitada por un triángulo isósceles = A



Dato : AP = PQ = QC

- A ● = 8π

  $\pi\, n\,(2n) = 8\pi \Rightarrow \boxed{n = 2}$

- Teorema de la tangente

  $t^2 = 2(4) \Rightarrow \boxed{t = 2\sqrt{2}}$

- ⊿ BHC (Teorema de Pitágoras)

  $h^2 + 3^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt{23}}$

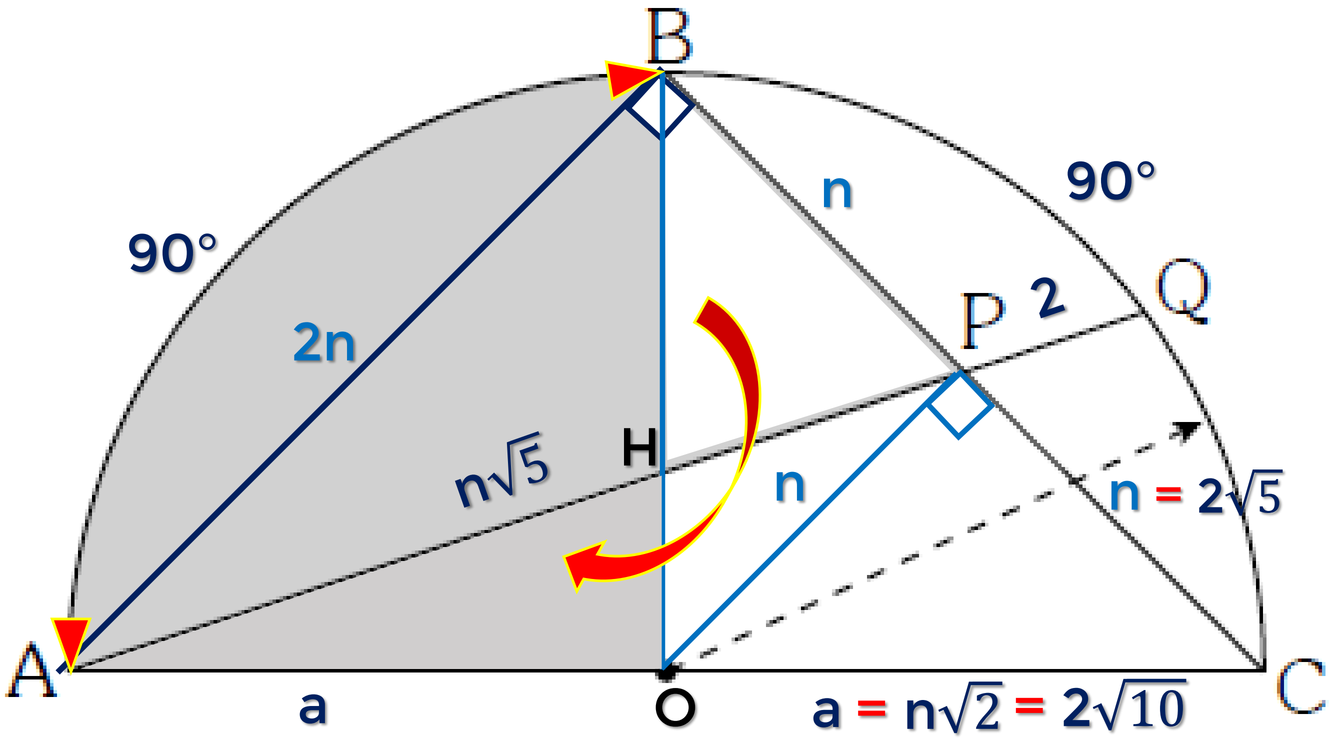
$$A = \frac{6 \cdot \sqrt{23}}{2}$$

$$\therefore A = 3\sqrt{23}\ u^2$$

PROBLEMA 16 Según el gráfico mostrado, B es punto medio del arco AC, BP = PC y PQ = 2 u. Calcule el área de la región sombreada.

RESOLUCIÓN :

Piden: el área de la región sombreada = A_x



Dato : B es punto medio de $\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

- Por teorema $\overline{OP} \perp \overline{BC}$
- Δ ABC: $\overline{OP}$: Base media $\Rightarrow$ $\boxed{OP = n}$
- $\triangle$ ABP (Aproximado 53°/ 2) $\Rightarrow$ $\boxed{AP = n\sqrt{5}}$
- Teorema de la cuerda:

$$n\sqrt{5} \cdot 2 = n \cdot n \Rightarrow \boxed{n = 2\sqrt{5}}$$

- Trapecio ABPO: $A_{BPH} = A_{AOH}$
- Del gráfico: $A_x = A_{\text{sector AOB}}$

$$A_x = \frac{\pi.\left(2\sqrt{10}\right)^2}{4}$$

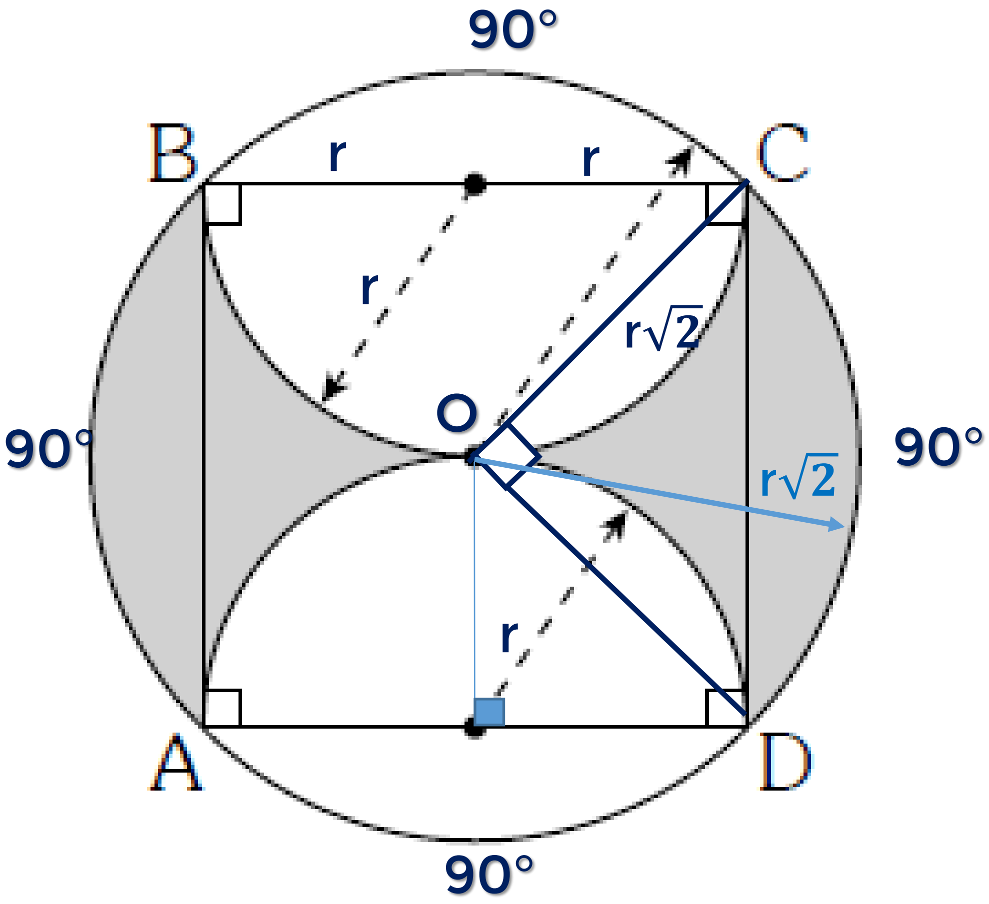
$$\therefore A_x = 10\,\pi\ u^2$$

PROBLEMA 17 Calcule el área de la región sombreada, sabiendo que su perímetro es igual a $\pi(\sqrt{2}+1)$ cm.

RESOLUCIÓN :

Dato : $2p_{\text{región sombreada}} = \pi(\sqrt{2}+1)$

Piden: el área de la región sombreada = A_x



$$L_{\substack{\text{circunf. de}\\ \text{radio r}}} + L_{\substack{\text{semi-circunf.}\\ \text{de radio } r\sqrt{2}}} = \pi(\sqrt{2}+1)$$

$$2\pi r + \frac{\cancel{2}\,\pi r\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \pi(\sqrt{2}+1)$$

$$r\sqrt{2}\,\cancel{\pi(\sqrt{2}+1)} = \cancel{\pi(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$A_x = 2\,(A_{COD} - 2A\ )$$

$$A_x = 2\left\{\frac{\pi}{4}(r\sqrt{2})^2 - 2\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right)\right\}$$

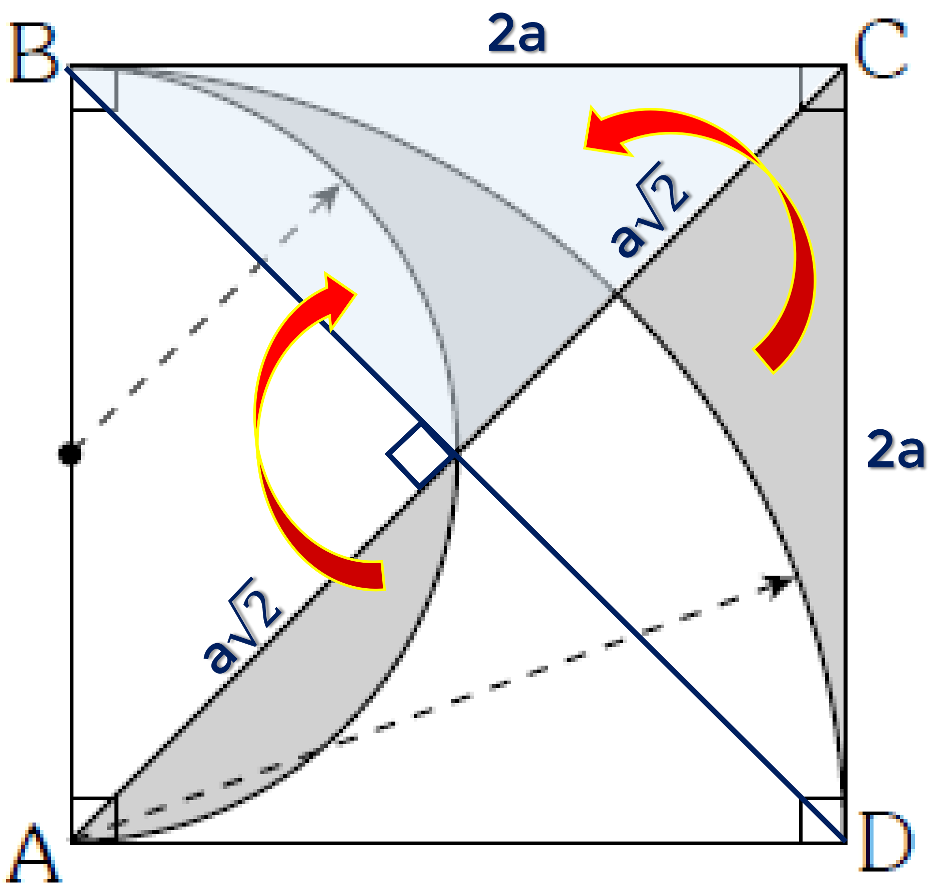
$$A_x = 2r^2$$

$$\boxed{\therefore A_x = 1\ \text{cm}^2}$$

PROBLEMA 18 Calcule el lado del cuadrado ABCD si el área de la región sombreada es numéricamente igual a su perímetro.

RESOLUCIÓN :

Piden: El lado del cuadrado ABCD = 2a



Dato : $A = 2p_A$

$$\frac{(2a)^2}{4} = L_{\overset{\frown}{AB}} + L_{\overset{\frown}{BD}} + AC + CD$$

$$a^2 = \frac{2\pi \cdot a}{2} + \frac{2\pi \cdot 2a}{4} + 2a\sqrt{2} + 2a$$

$$a^2 = 2a\,(\pi + \sqrt{2} + 1)$$

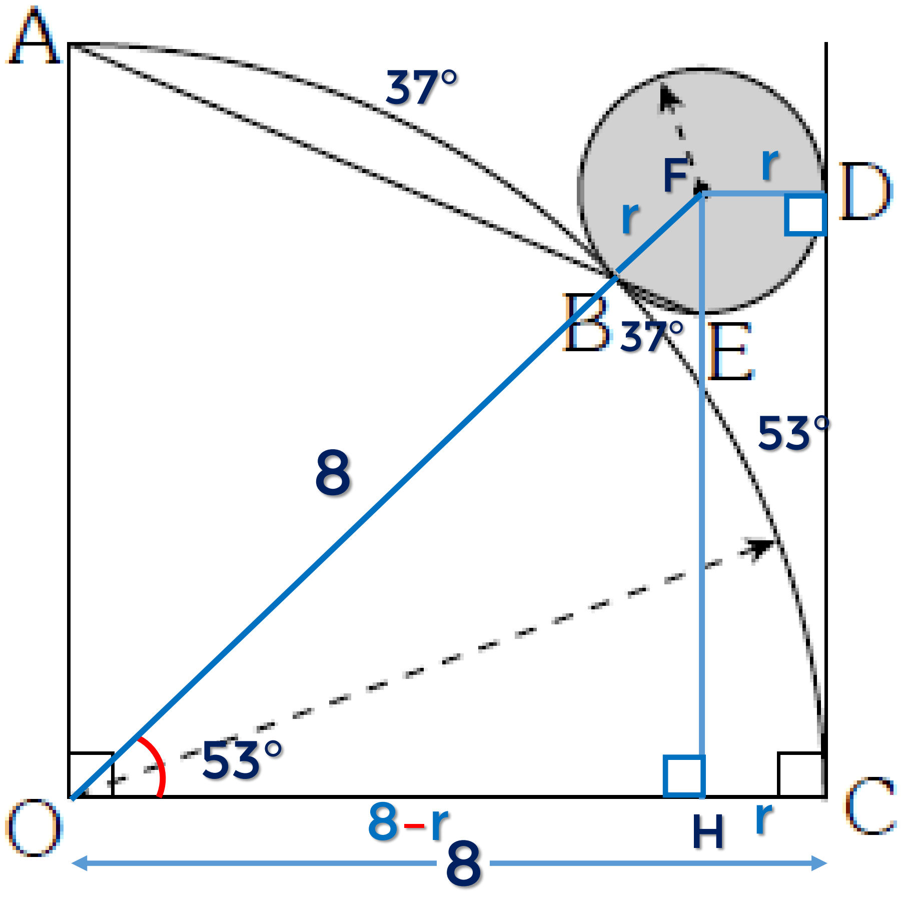
$$a = 2(\pi + \sqrt{2} + 1)$$

$$\boxed{\therefore 2a = 4(\pi + \sqrt{2} + 1)}$$

PROBLEMA 19 Del gráfico, B y D son puntos de tangencia. Si $m\overset{\frown}{BE} = 37°$ y $OC = 8$, calcule el área del círculo sombreado.

RESOLUCIÓN :

Piden: El área del círculo sombreado = A



- Por teorema:

$$m\overset{\frown}{BE} = m\overset{\frown}{AB} = 37°$$

- Por teorema:

O , B y F son colineales

Se traza $\overline{FH} \perp \overline{OC}$

- ⊿ QHF (Aproximado 53° - 37°)

$\Rightarrow$ $\boxed{r = 2}$

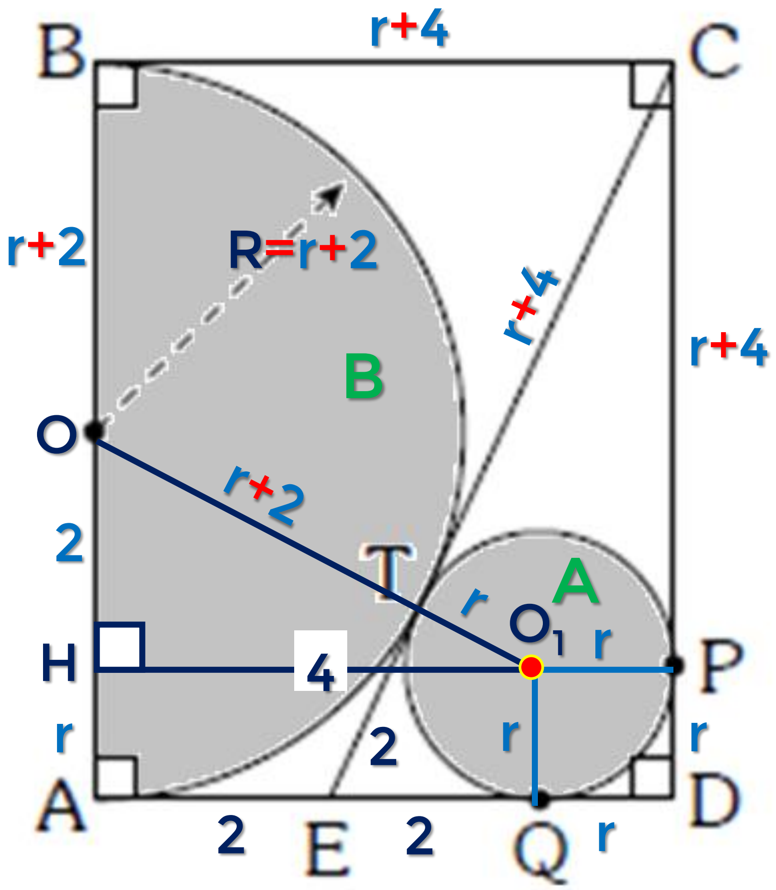
$$A = \pi\, 2^{2}$$

$$\therefore A = 4\pi\ u^2$$

PROBLEMA 20 En el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia. Si AE = 2, calcule el área de la región sombreada.

RESOLUCIÓN :

Piden: el área de la región sombreada = A + B



- Por teorema: AE = ET = EQ = 2

  QD = PD = r

- ABCD (es un rectángulo) ➡ AD = BC = r + 4
- Por teorema: BC = TC = r + 4

  TC = CP = r + 4

- ABCD (es un rectángulo) ➡ AB = CD = 2r + 4
- O , B y F son colineales
- $\triangle OHO_1$ (Teorema de Pitágoras)

  $(2r + 2)^2 = 2^2 + 4^2$ ➡ $\boxed{r = \sqrt{5} - 1}$ $\boxed{R = \sqrt{5} + 1}$

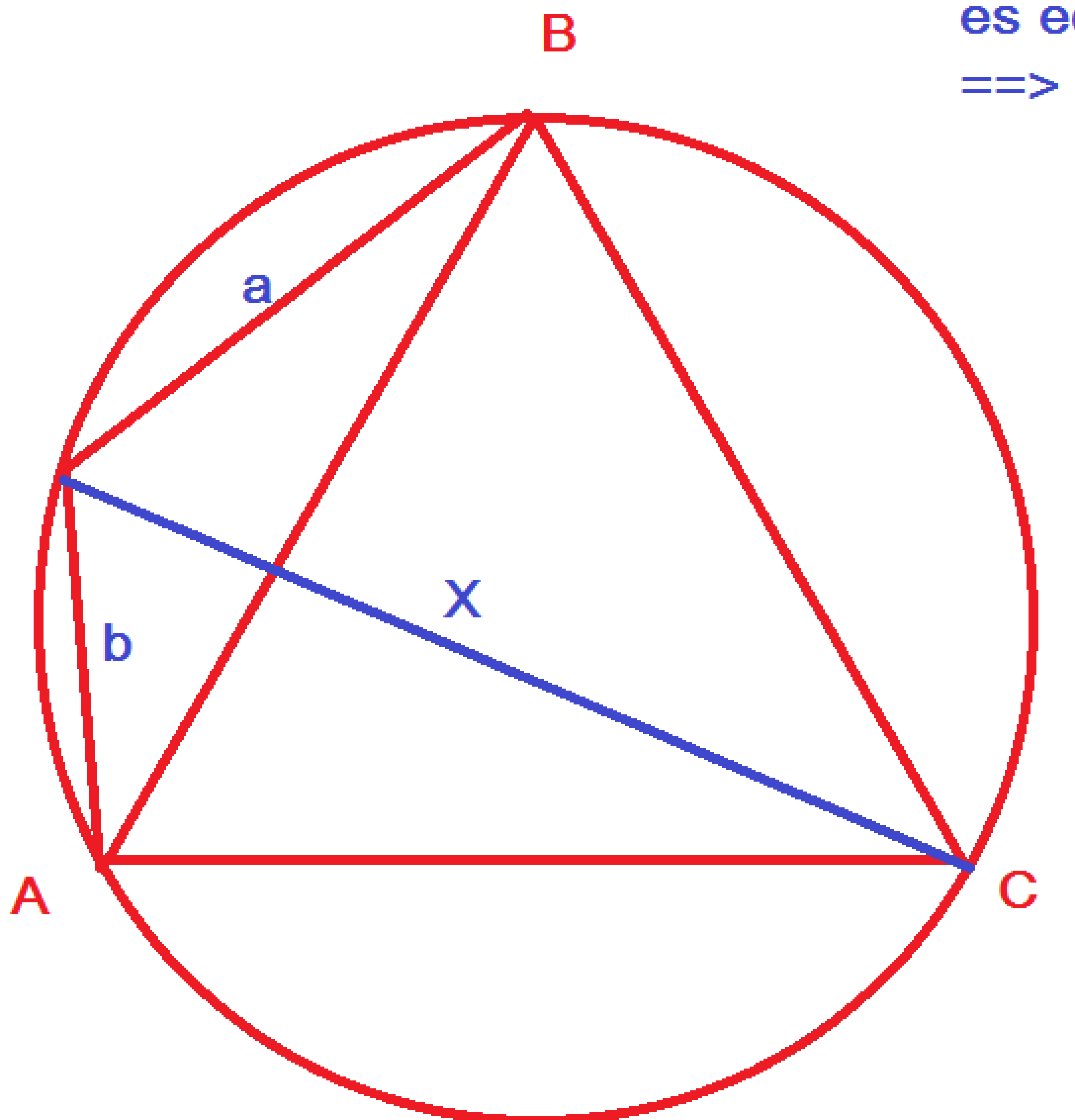
$A = \pi(\sqrt{5} - 1)^2$

$B = \dfrac{\pi(\sqrt{5} + 1)^2}{2}$

$\boxed{\therefore A + B = (9 - \sqrt{5})\,\pi\ u^2}$

TEOREMA DE CHADU

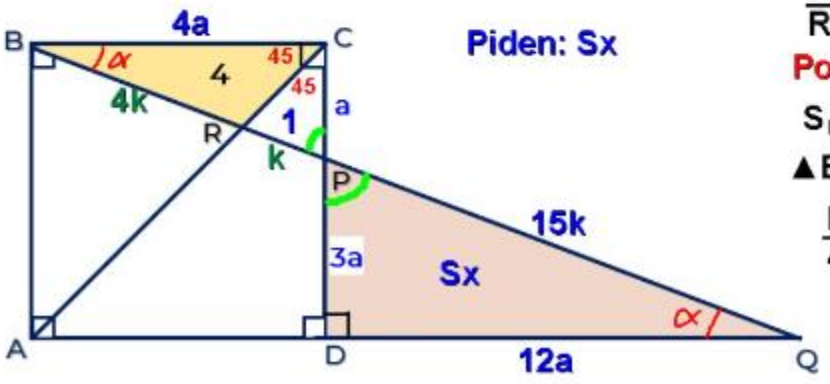
Si triangulo ABC
es equilátero
==> X= a + b



PROBLEMA 5 En un cuadrado ABCD se ubica el punto P en $\overline{CD}$, tal que PD = 3PC. Los rayos BP y AD se cortan en Q. $\overline{AC}$ y $\overline{BP}$ se cortan en R. Si el área de la región triangular BRC es igual a 4 cm^2, entonces el área de la región PDQ es

RESOLUCIÓN :

Piden: El área de la región PDQ = A PDQ



Piden: Sx

Teorema de la bisectriz interior

$$\frac{BR}{RP} = \frac{4a}{a} \rightarrow \begin{array}{l} BR = 4k \\ RB = k \end{array}$$

Por relación de áreas

$S_{RCP} = 1$

$\blacktriangle BCP \sim \blacktriangle QDP$

$$\frac{DQ}{4a} = \frac{3\cancel{a}}{\cancel{a}} \rightarrow DQ = 12a$$

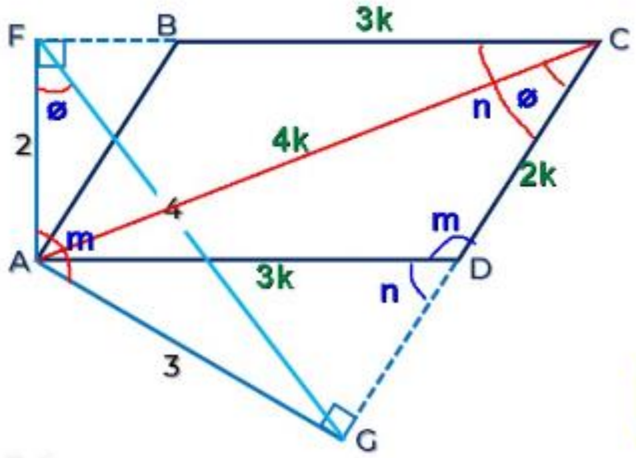
$$Sx = \frac{(12a)(3a)}{2} = 18a^2$$

$$S_{BCP} = \frac{(4a)(a)}{2} = 2a^2 = 5$$

$$\boxed{Sx = 45\ cm^2}$$

PROBLEMA 9 Desde el vértice de A de un paralelogramo ABCD se trazan las perpendiculares $\overline{AF}$ y $\overline{AG}$ a $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Si AF = 2 u, AG = 3 u y FG = 4 u, calcule el área de la región ABCD.

RESOLUCIÓN :



AFCG: Inscriptible

$m + n = 180°$

$\blacktriangle AFG \sim \blacktriangle DCA$

Teorema de Herón

$$S_{ADC} = \sqrt{(9k/2)(5k/2)(3k/2)(k/2)} = \frac{3k^2\sqrt{15}}{4}$$

$$\frac{3k^2\sqrt{15}}{4} = \frac{(3k)(2)}{2} \rightarrow k = \frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$S_{ABCD} = (3k)(2)$$

$$S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{15}}{5}$$