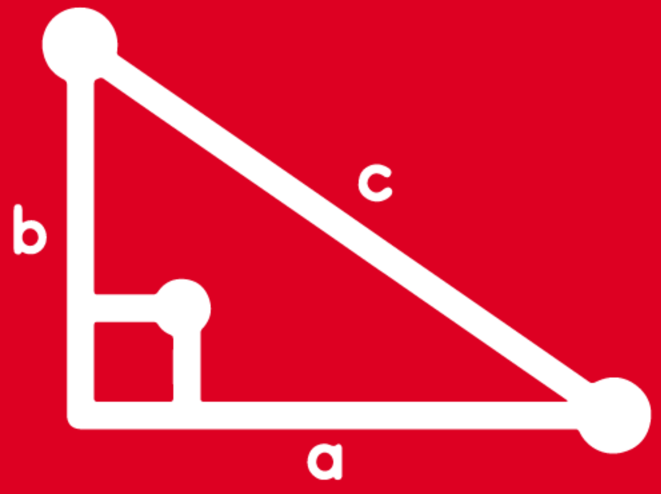
TRIGONOMETRY

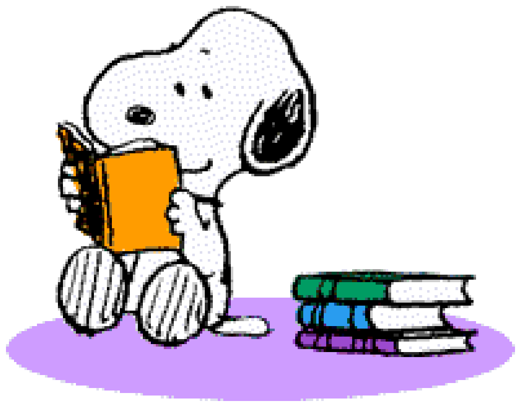


-Razones Trigonométricas de un Ángulo Agudo

VERANO UNI

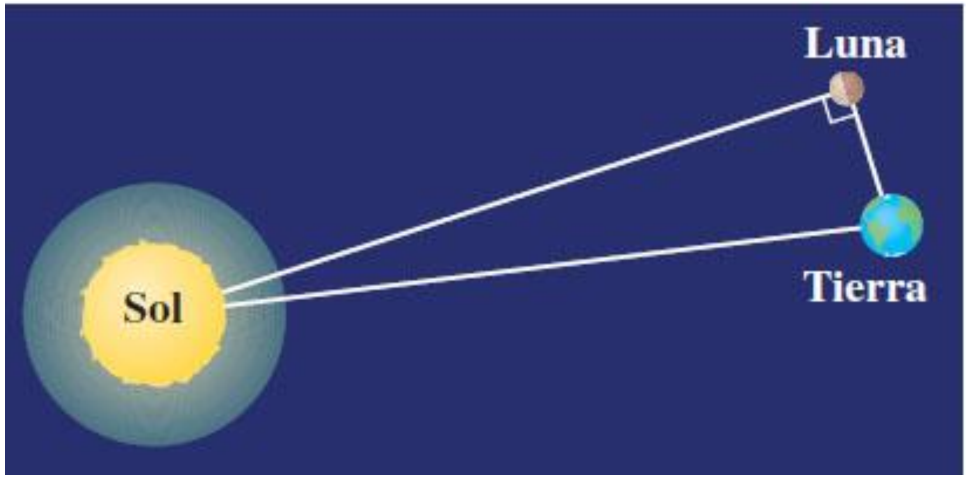
OBJETIVOS

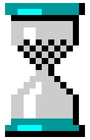
- Definir y calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo y de los ángulos notables.
- Utilizar propiedades para las razones trigonométricas recíprocas y de ángulos complementarios.
- Aplicar las razones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos y calcular el área de regiones triangulares.



HELICOMOTIVACIÓN

Aristarco de Samos (310 - 230 aC) fue un astrónomo griego que calculó la distancia de la Tierra al Sol , usando el siguiente método :
Cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente , la Tierra , la Luna y el Sol forman un triángulo rectángulo ; en ese momento el ángulo formado por el Sol , la Tierra y la Luna se mide y es 89,85° ; si la distancia de la Tierra a la Luna es de 386,240 km , ¿ Cuál es la distancia de la Tierra al Sol ?





Rpta : 147,5 millones de km

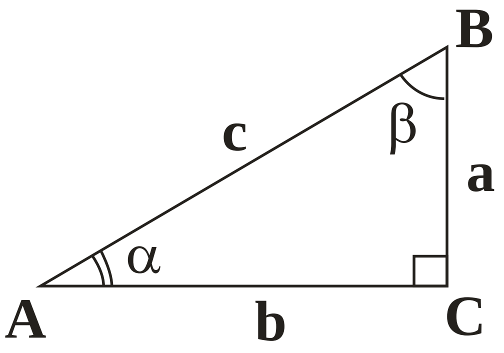
HELICOTEORÍA

Definición :

Sea el triángulo rectángulo ABC , talque C es el ángulo recto . Los lados opuestos a los vértices se representan por "a" , "b" y "c" respectivamente.

Donde :

a , b : catetos
c : hipotenusa
α y β : ángulos agudos



Las razones trigonométricas de un ángulo agudo , son los cocientes que se establecen entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo con respecto a uno de sus ángulos agudos.

Respecto al ángulo α , tenemos :

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto a } \alpha}{\text{Cateto Adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Cateto Adyacente a } \alpha}{\text{Cateto Opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

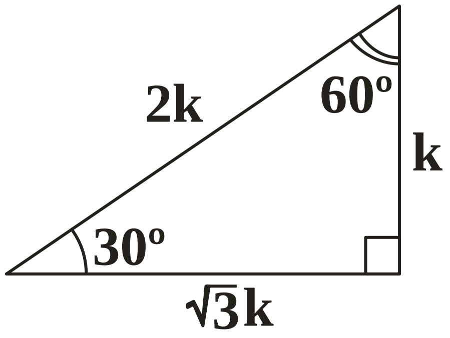
$$\csc\alpha = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$$

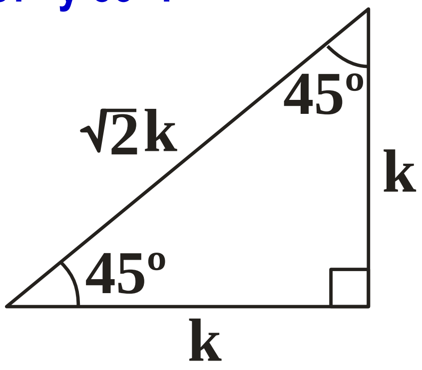
Teorema de Pitágoras :

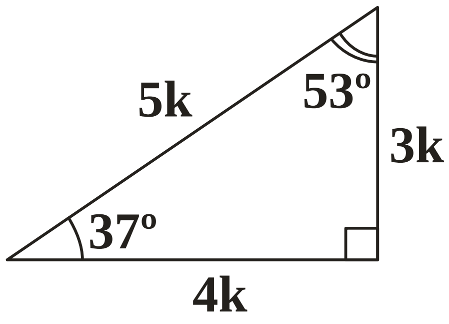
En todo triángulo rectángulo , el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos .

Del gráfico anterior : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Razones Trigonométricas de los ángulos notables de 30º , 60º , 45º , 37º y 53º :



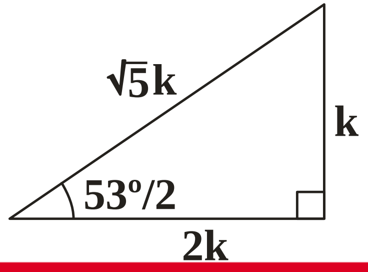


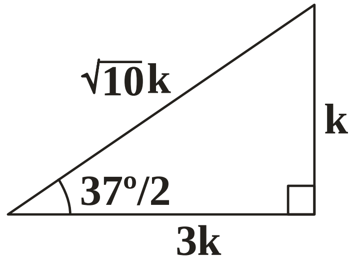


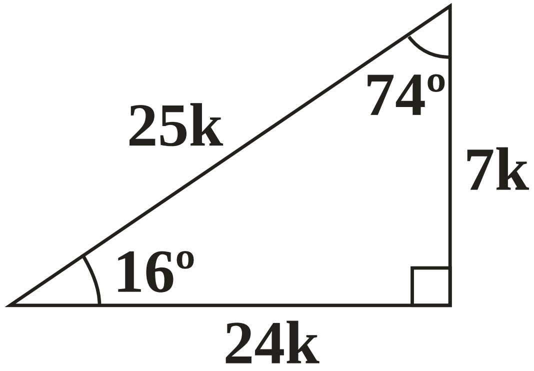
Así se pueden tener los valores :

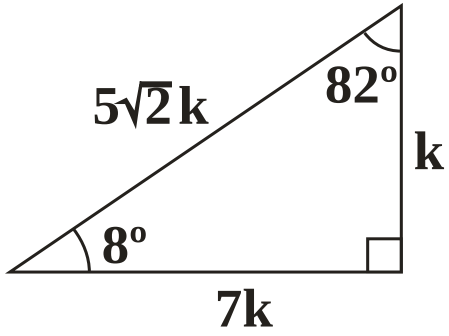
R.T. \ ∡	30°	37°	45°	53°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{3}$	2
csc	2	$\frac{5}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

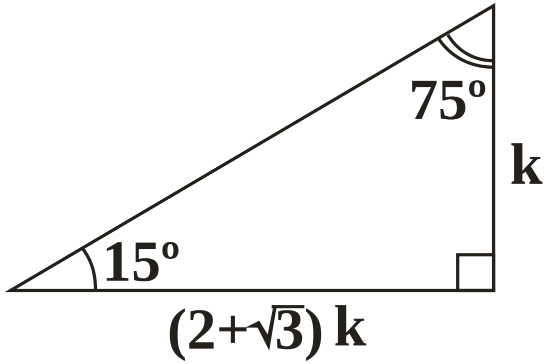
También son triángulos notables :

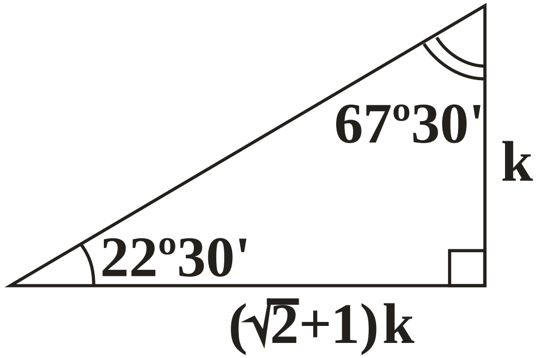












Razones Trigonométricas Recíprocas :

Para un ángulo " α " agudo , se cumplen :

$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha . \csc\alpha = 1}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha . \sec\alpha = 1}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha . \cot\alpha = 1}$$

Razones Trigonométricas de Ángulos Complementarios :

Siendo α y β ángulos agudos tal que se cumplen :

$$\alpha + \beta = 90^{\circ}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \cot\beta}$$

$$\boxed{\sec\alpha = \csc\beta}$$

De lo anterior ; a las razones :

- seno y coseno
- tangente y cotangente
- secante y cosecante

Se llaman co-razones trigonométricas.

Resolución de Triángulos Rectángulos :

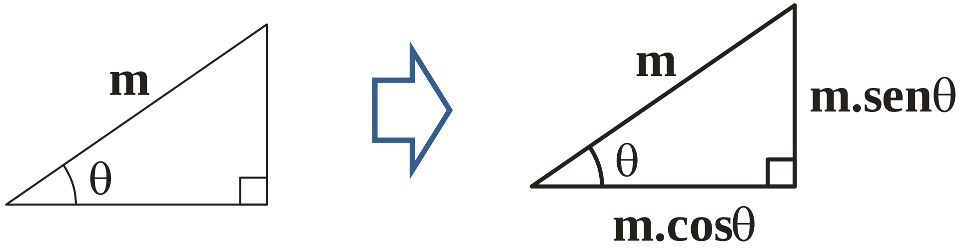
Resolver un triángulo significa hallar la longitud de sus lados y ángulos . Para los casos siguientes , necesitamos como datos un lado y un ángulo agudo.

Regla práctica :

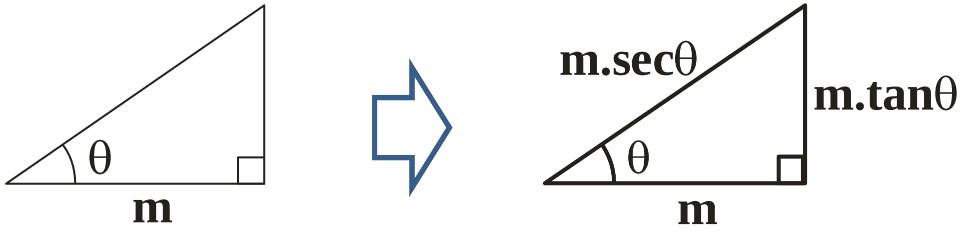
$$\boxed{\frac{[\text{lado incognita}]}{[\text{lado dato}]} = RT\left(\measuredangle\ \text{dato}\right)}$$

Casos :

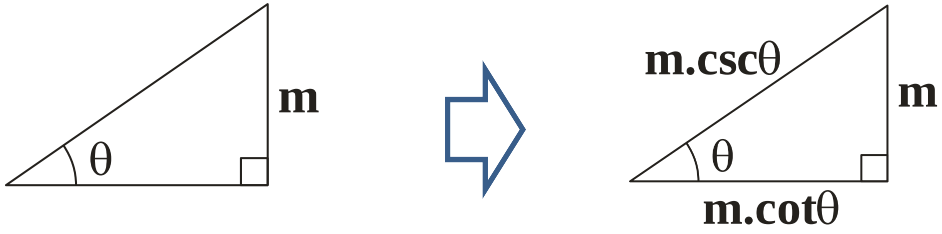
I)



II)

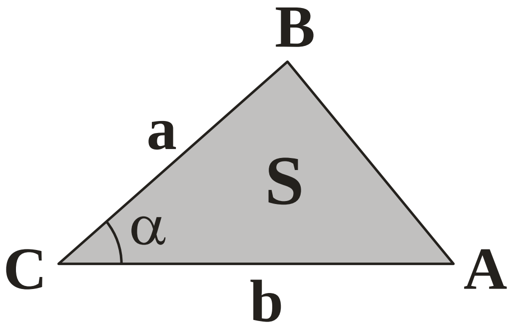


III)



Área de una Región Triangular :

Siendo **S** el área de la región triangular ABC.



Se cumple :

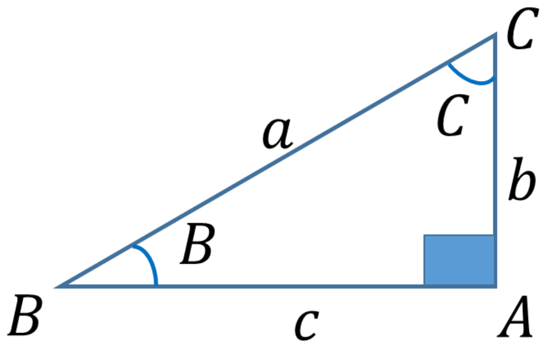
$$\boxed{S = \frac{a.b}{2}\text{sen}\alpha}$$

1. *En un triángulo ABC, recto en A, halle el valor de la expresión* $a^2 tanB senB senC$

A) c B) b C) a D) a^2 E) b^2

RESOLUCIÓN:

Del dato:



luego del gráfico:

$$tanB = \frac{CO}{CA} = \frac{b}{c}$$

$$senB = \frac{CO}{H} = \frac{b}{a}$$

$$senC = \frac{CO}{H} = \frac{c}{a}$$

reemplazando en :

$$E = a^2 tanB senB senC$$

$$E = a^2 . \left(\frac{b}{c}\right) . \left(\frac{b}{a}\right) . \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\boxed{E = b^2}$$

2. $Se\ tiene\ que\ \theta\ es\ agudo\ y\ , además,$

$$\tan\theta = sen30° + \tan45°$$

$calcule\ el\ valor\ de\ E = 2 + \sqrt{13}(sen\theta + \cos\theta)$

$A)1$ $B)3$ $C)5$ $D)7$ $E)9$

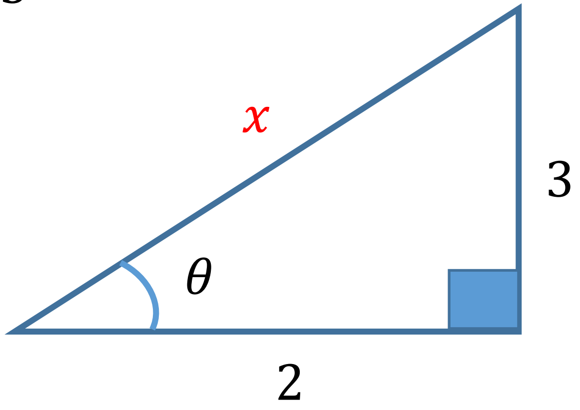
RESOLUCIÓN:

del dato:

$$\tan\theta = sen30° + \tan45°$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} + 1$$

$$\tan\theta = \frac{3}{2} = \frac{CO}{CA}$$



por el teorema de pitágoras:

$$x^2 = 2^2 + 3^3 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$

$$sen\theta = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad y \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

reemplazando en :

$$E = 2 + \sqrt{13}(sen\theta + \cos\theta)$$

$$E = 2 + \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$E = 2 + (3+2)$$

$$\boxed{E = 7}$$

3. *Dadas las igualdades*

$$sen(a+b) = \cos(a-b)$$
$$\tan(2a-b).\cot(a+2b) = 1$$

calcule el valor de

$$E = tan^2(a+b) + \csc(a-b)$$

$A)5 \quad B)4 \quad C)3 \quad D)2 \quad E)1$

RESOLUCIÓN:

de la primera condición:

$$sen(a+b) = \cos(a-b)$$

$$a+b+a-b = 90°$$
$$2a = 90°$$
$$a = 45° \quad \ldots(I)$$

recordar:

siendo α y β agudos, si

RT(α)=CO-RT(β)

* sen(α)=cos(β)

$\Longrightarrow$ α + β=90°

de la segunda condición:

$$\tan(2a-b).\cot(a+2b) = 1$$

$$2a-b = a+2b \quad \ldots(II)$$
$$a = 3b$$

recordar:

si sen θ.csc θ=1

tan θ.cot θ =1

sec θ.cos θ =1

$\Longrightarrow$ α = β

resolviendo (I) y (II)

$$a = 45° \quad y \quad b = 15°$$

Piden: $E = tan^2(a+b) + \csc(a-b)$

$$E = tan^2(45°+15°) + \csc(45°-15°)$$
$$E = tan^2(60°) + \csc(30°)$$
$$E = \sqrt{3}^2 + 2$$

$$\boxed{E = 5}$$

4. *En un triángulo ABC, recto en B, se cumple*

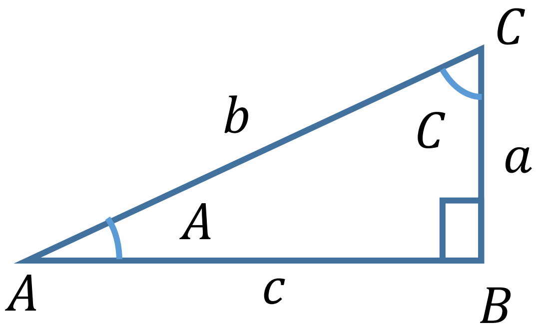
$$\tan A \cos C = 3$$

calcule $M = \sqrt[4]{\sec^2 A - 3\csc C}$

A) 1 B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt[4]{2}$ D) 2 E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

Construimos el triángulo ABC



luego en el del dato:

$$\tan A \cos C = 3$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{a}{b} = 3$$

$$\boxed{a^2 = 3bc}$$

reemplazando en "M" :

$$M = \sqrt[4]{\sec^2 A - 3\csc C} = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 3\frac{b}{c}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{b^2}{c^2} - 3\frac{b.c}{c.c}}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{b^2 - \mathbf{3bc}}{c^2}}$$

por teorema de pitágoras:

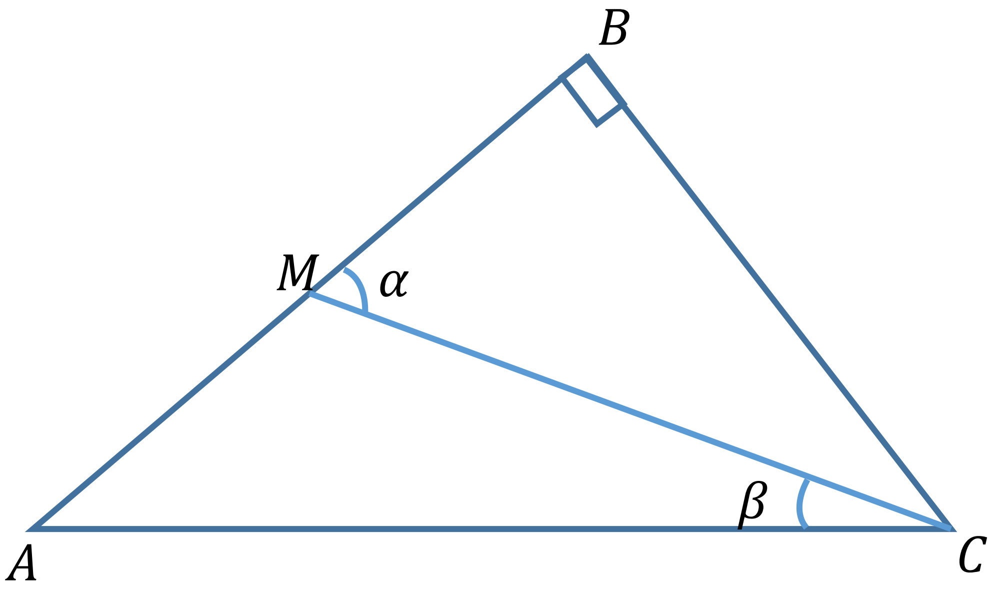
$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$\boxed{b^2 - a^2 = c^2}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{b^2 - \mathbf{a^2}}{c^2}}$$

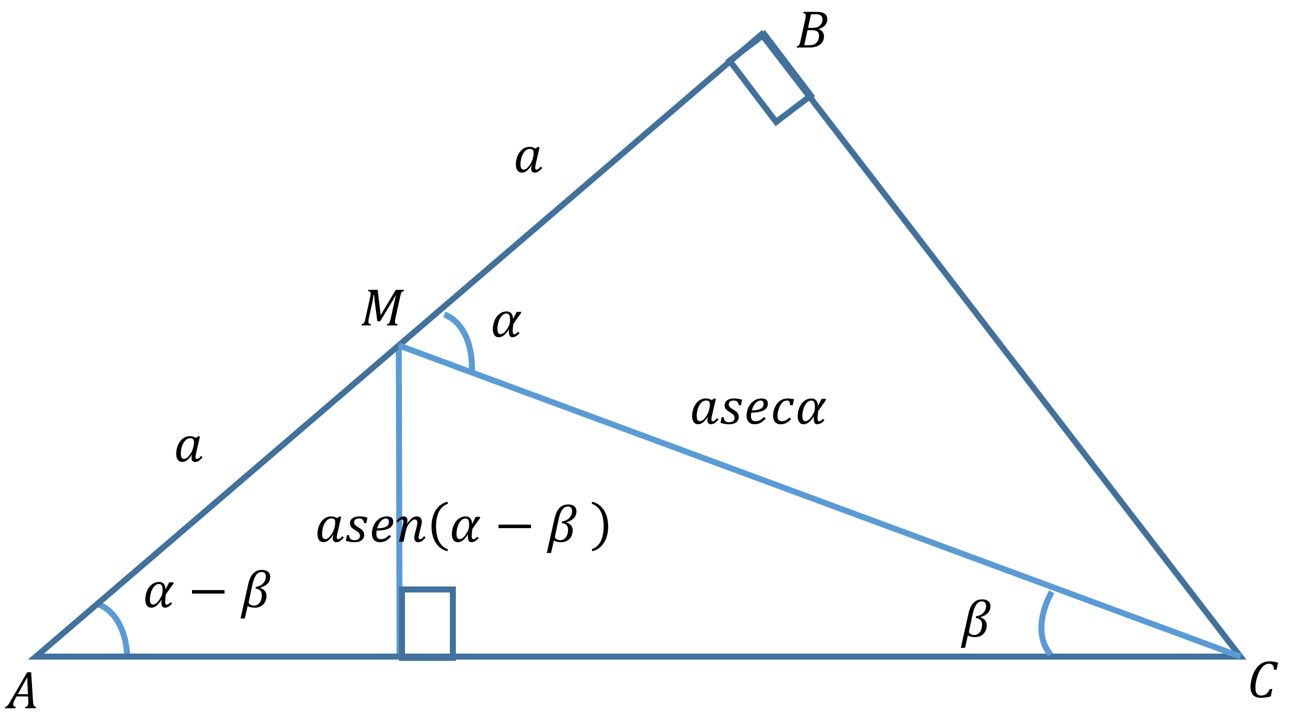
$$M = \sqrt[4]{\frac{c^2}{c^2}} \quad \boxed{= 1}$$

$$5. Si\ AM = MB, calcule\ \frac{sen(\alpha - \beta)cos\alpha}{sen\beta}$$



$A)2 \quad B)1 \quad C)3 \quad D)\frac{1}{2} \quad E)\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:



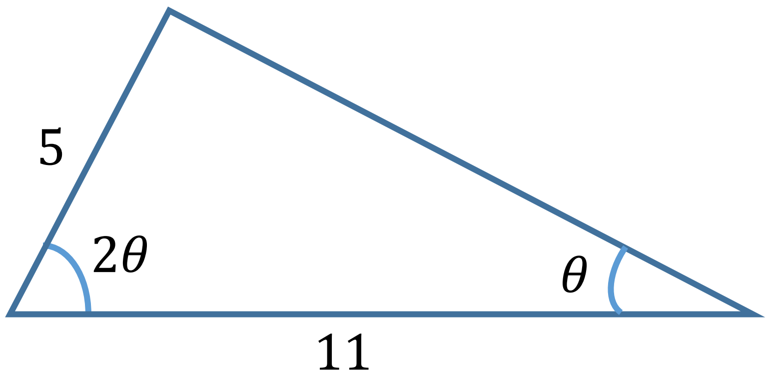
del gráfico : $sen\beta = \frac{\cancel{a}sen(\alpha - \beta)}{\cancel{a}sec\alpha}$

$$sen\beta . sec\alpha = sen(\alpha - \beta)$$

reemplazando en la expresión pedida

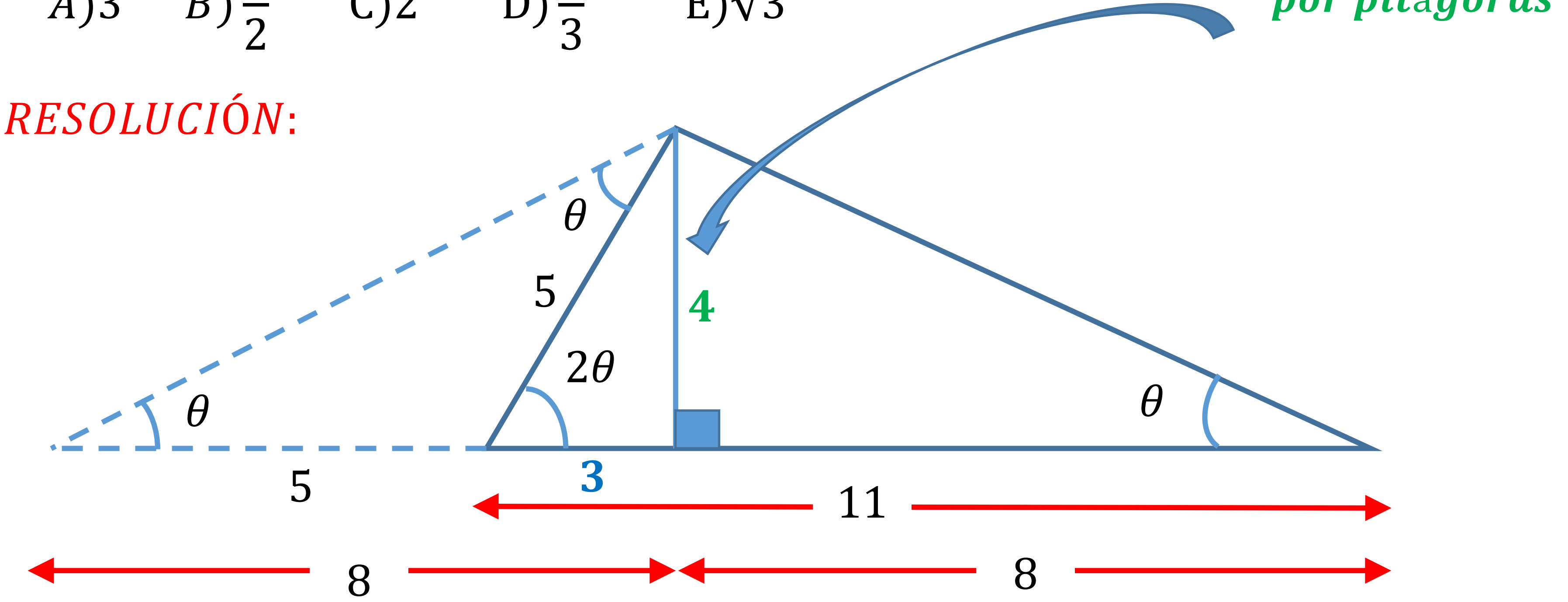
$$\frac{sen\beta . sec\alpha . cos\alpha}{sen\beta} = \boxed{1}$$

6. *Según el gráfico, calcule* $\cot\theta$



A) 3   B) $\frac{1}{2}$ C) 2   D) $\frac{1}{3}$ E) $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:



del gráfico:

$$\cot\theta = \frac{5+3}{4}$$

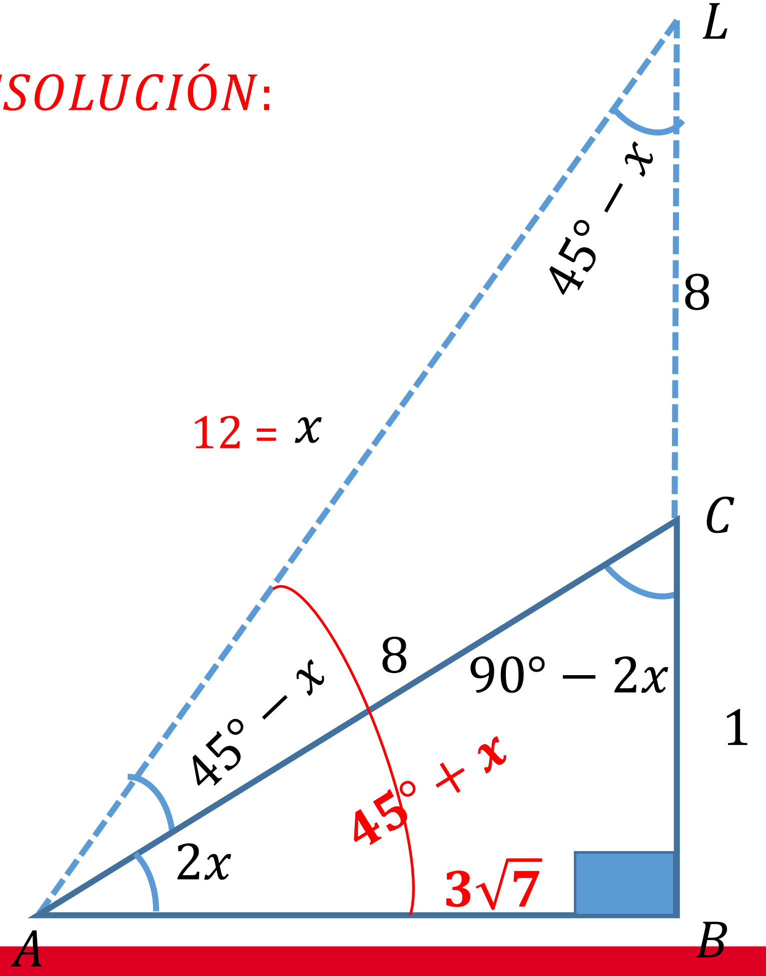
$$\boxed{=\frac{8}{4}=2}$$

7. $Si\ 0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ $y\ sen2x = \dfrac{1}{8}$, $calcule$

$sen(45° + x) + \sqrt{7}cot(45° - x)$

A) $\dfrac{9}{17}$ B) $\dfrac{7}{3}$ C) $\dfrac{7}{4}$ D) $\dfrac{15}{4}$ E) $\dfrac{9}{4}$

RESOLUCIÓN:



en el triángulo ABL

$$x^2 = \left(3\sqrt{7}\right)^2 + 9^2$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

en el gráfico

$$* \ sen(45° + x) = \frac{9}{12}$$

$$* \ cot(45° - x) = \frac{9}{3\sqrt{7}}$$

piden: $sen(45° + x) + \sqrt{7}cot(45° - x)$

$$= \frac{9}{12} + \sqrt{7}.\frac{9}{3\sqrt{7}} = \boxed{\frac{15}{4}}$$

$8. Si\ \theta\ y\ \alpha\ son\ ángulos\ agudos\ que\ cumplen$

$$6cos\theta tan\alpha = 2cos\theta + 3tan\alpha - 1$$

$$calcule:\ tan\left(\frac{\theta}{2} + 2\alpha + 8°\right)$$

$A)2$ $\quad B)2+\sqrt{3}$ $\quad C)1+\sqrt{2}$

$D)2-\sqrt{3}$ $\quad E)\sqrt{2}-1$

$RESOLUCIÓN:$

$Del\ dato:$

$$6cos\theta tan\alpha - 2cos\theta = 3tan\alpha - 1$$

$factorizamos:\ "\ 2cos\theta\ "$

$$\mathbf{2cos\theta}(\cancel{3tan\alpha} - 1) = \cancel{3tan\alpha - 1}$$

$$2cos\theta = 1 \quad \vee \quad 3tan\alpha - 1 = 0$$

$$cos\theta = \frac{1}{2} \quad \vee \quad tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\theta = 60° \qquad \alpha = \frac{37°}{2}$$

$$piden:\ tan\left(\frac{\theta}{2} + 2\alpha + 8°\right)$$

$$= tan(30° + 37° + 8°)$$

$$= tan(75°)$$

$$\boxed{= 2 + \sqrt{3}}$$

$9.$ *En un triángulo ABC, recto en A, se cumple que*

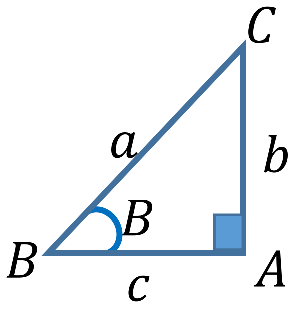
$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=\frac{8}{a^2} \qquad calcule\ \ tan^2B+4$$

$A)\sqrt{15}$ $\quad B)\sqrt{21}$ $\quad C)\sqrt{17}$ $\quad D)\sqrt{7}$ $\quad E)\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN:

Del dato:

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=\frac{8}{a^2}$$



$$\frac{c^2-b^2}{b^2c^2}=\frac{8}{a^2}$$

por teorema de pitágoras:

$$\boxed{a^2=c^2+b^2}$$

$$\frac{c^2-b^2}{b^2c^2}=\frac{8}{c^2+b^2}$$

$$(c^2+b^2)(c^2-b^2)=8b^2c^2$$

$$c^4-b^4=8b^2c^2$$

$$1-\frac{b^4}{c^4}=\frac{8b^2}{c^2}$$

en el gráfico:

$$\boxed{tanB=\frac{b}{c}}$$

$$1-tan^4B=8tan^2B$$

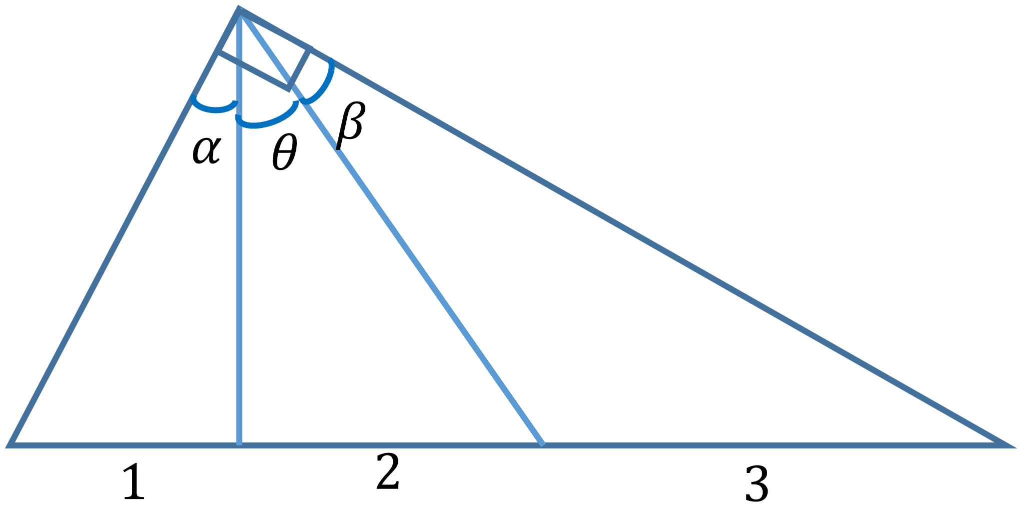
$$1=tan^4B+8tan^2B$$

$$1+16=tan^4B+8tan^2B+16$$

$$17=(tan^2B+4)^2$$

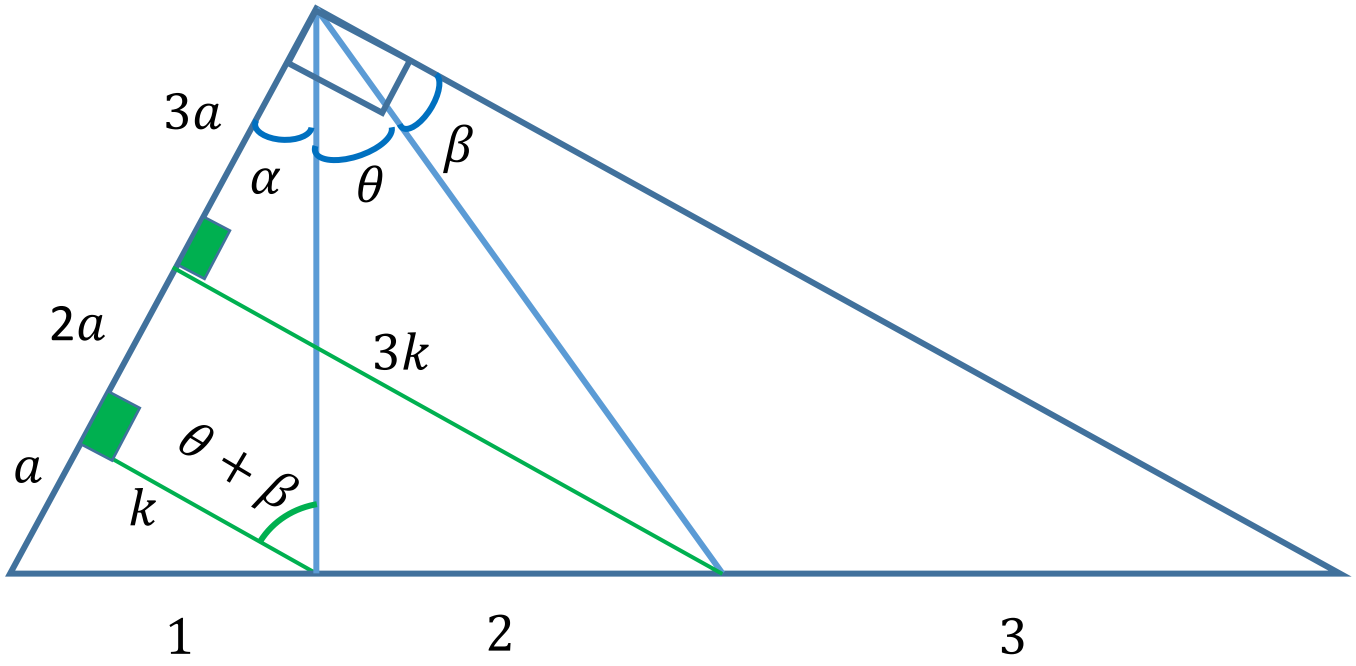
$$\boxed{\sqrt{17}=tanB+4}$$

10. *Del gráfico, calcule* $\tan(\alpha+\theta)\tan(\theta+\beta)$



A) 5 B) $\frac{1}{4}$ C) 4 D) $\frac{1}{5}$ E) 3

RESOLUCIÓN:



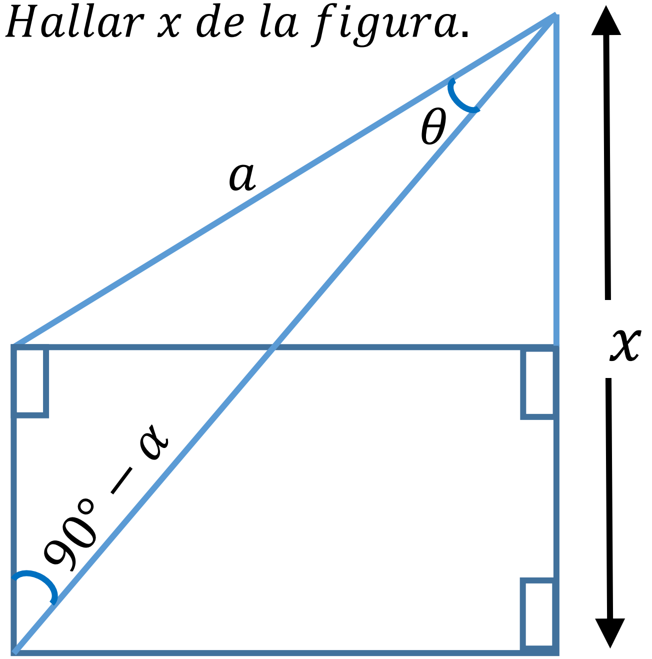
del gráfico:

$$tan(\alpha+\theta) = \frac{3k}{3a} \quad \wedge \quad tan(\theta+\beta) = \frac{5a}{k}$$

piden: $tan(\alpha+\theta).tan(\theta+\beta)$

$$= \frac{3k}{3a} \cdot \frac{5a}{k} \boxed{= 5}$$

11. $Hallar\ x\ de\ la\ figura.$



$A)\ asen\alpha.sen(\alpha-\theta)$

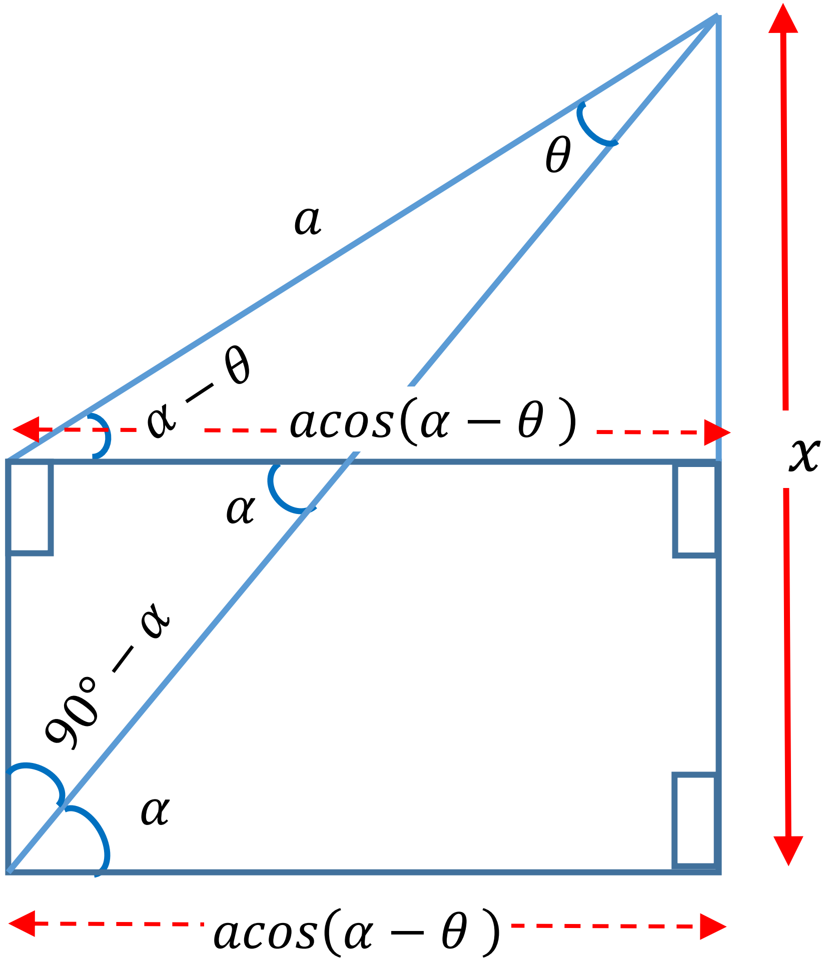
B) $acos\alpha.sen(\alpha-\theta)$

C) $atan\alpha.sen(\alpha-\theta)$

D) $atan\alpha.cos(\alpha-\theta)$

E) $atan\alpha.cos(\theta-\alpha)$

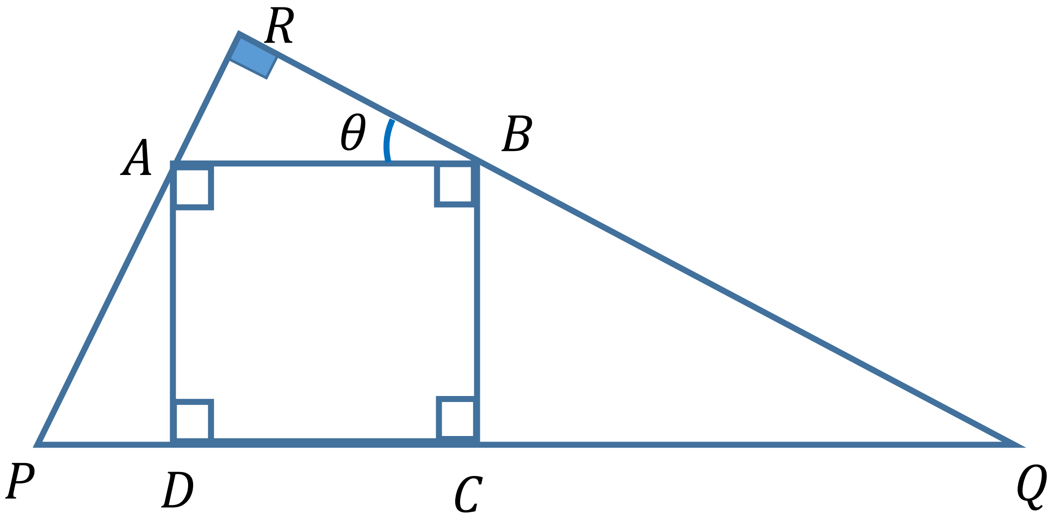
$RESOLUCIÓN:$



$$del\ gráfico:\quad tan\alpha=\frac{x}{acos(\alpha-\theta)}$$

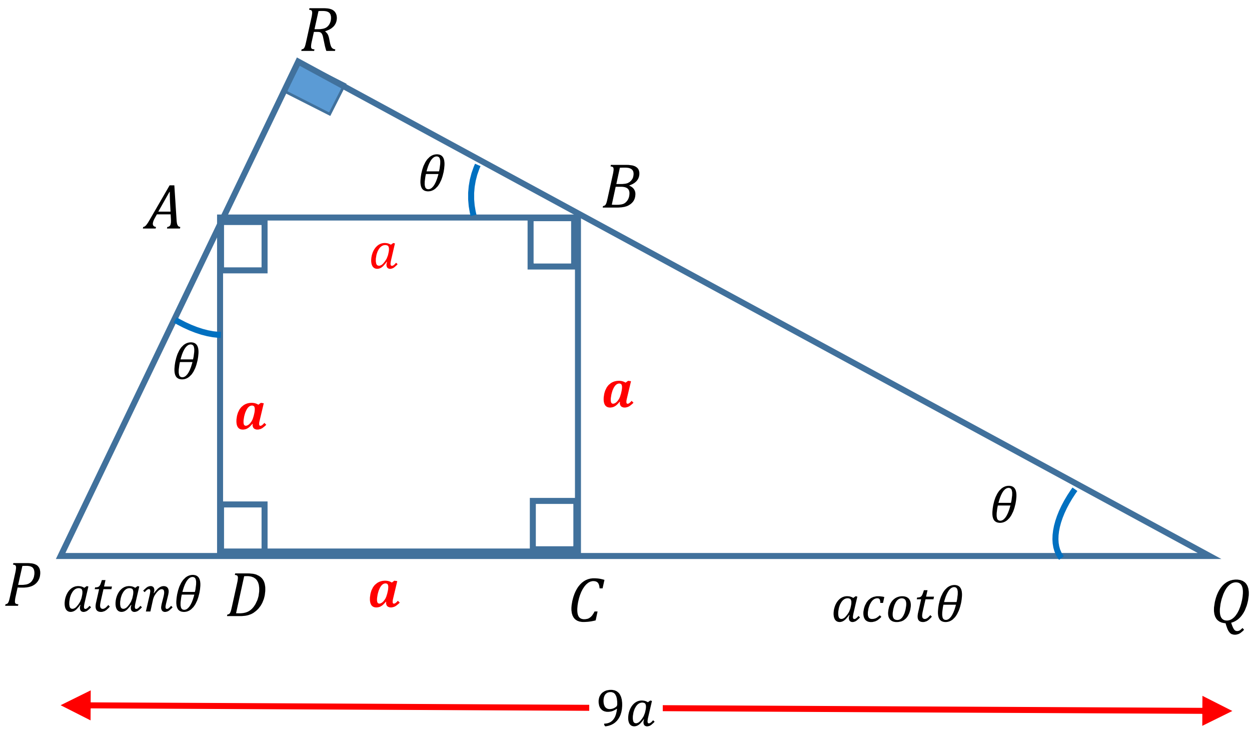
$$\boxed{x=atan\alpha.cos(\alpha-\theta)}$$

12. *De la figura mostrada, calcule* $\tan\theta + \cot\theta$ *si se tiene que* $ABCD$ *es un cuadrado y, además,* $PQ = 9AB$



A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN:



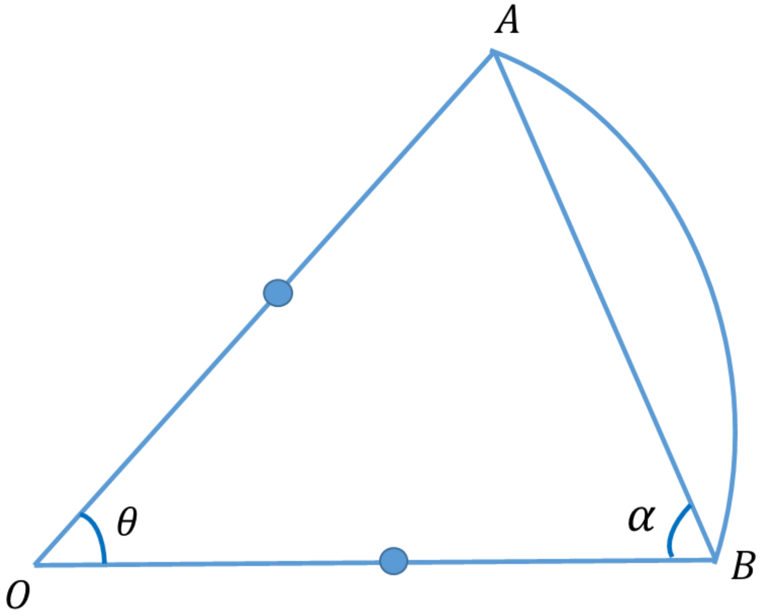
del gráfico:

$$a\tan\theta + a + a\cot\theta = 9a$$

$$\cancel{a}(\tan\theta + \cot\theta) = 8\cancel{a}$$

$$\boxed{\tan\theta + \cot\theta = 8}$$

13. *Del gráfico calcule* $\cot\alpha$*, además,* O *es centro.*

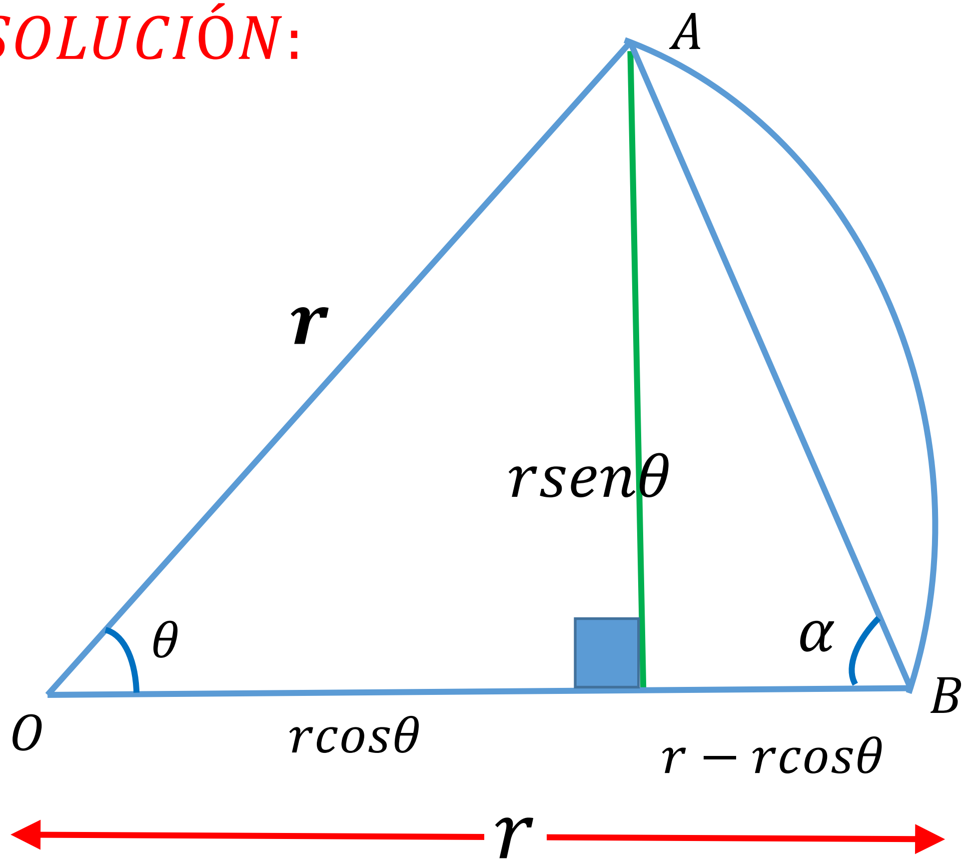


A) $\dfrac{1+sen\theta}{\cos\theta}$ B) $\dfrac{1-sen\theta}{\cos\theta}$

C) $\dfrac{1+\cos\theta}{sen\theta}$ D) $\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta}$

E) $\dfrac{1-\cos\theta}{sen\theta}$

RESOLUCIÓN:



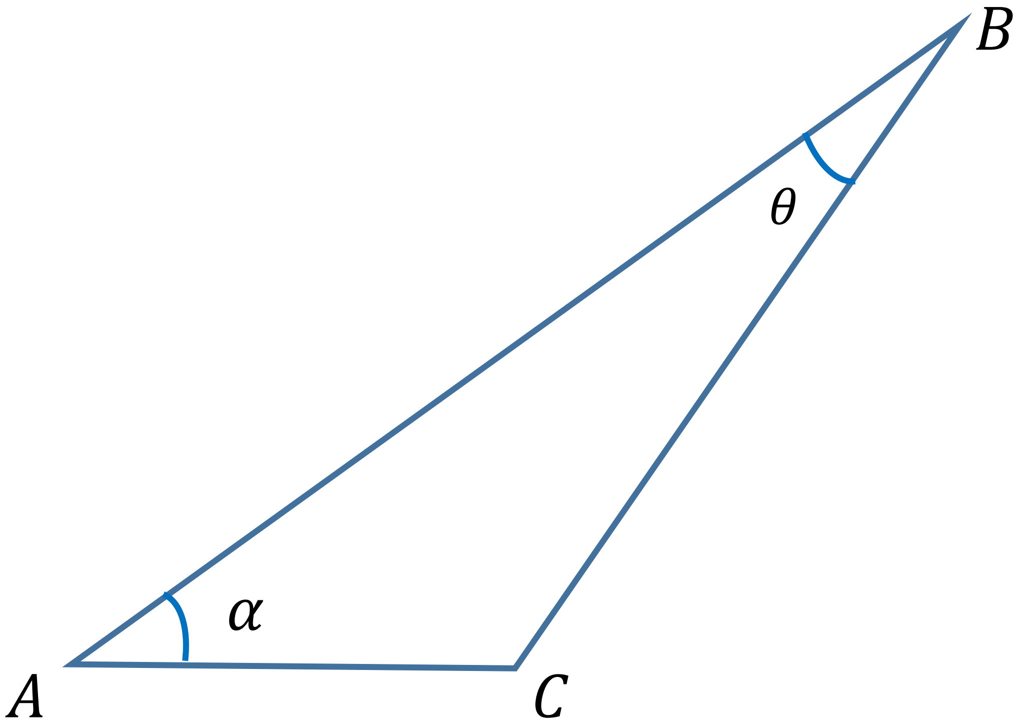
del gráfico: $\cot\alpha=\dfrac{r-r\cos\theta}{rsen\theta}=\dfrac{\cancel{r}.(1-\cos\theta)}{\cancel{r}sen\theta}$

$$\boxed{\cot\alpha=\dfrac{1-\cos\theta}{sen\theta}}$$

14. *En el gráfico,* $AB = b$ *y* $AC = a$. *Calcule*

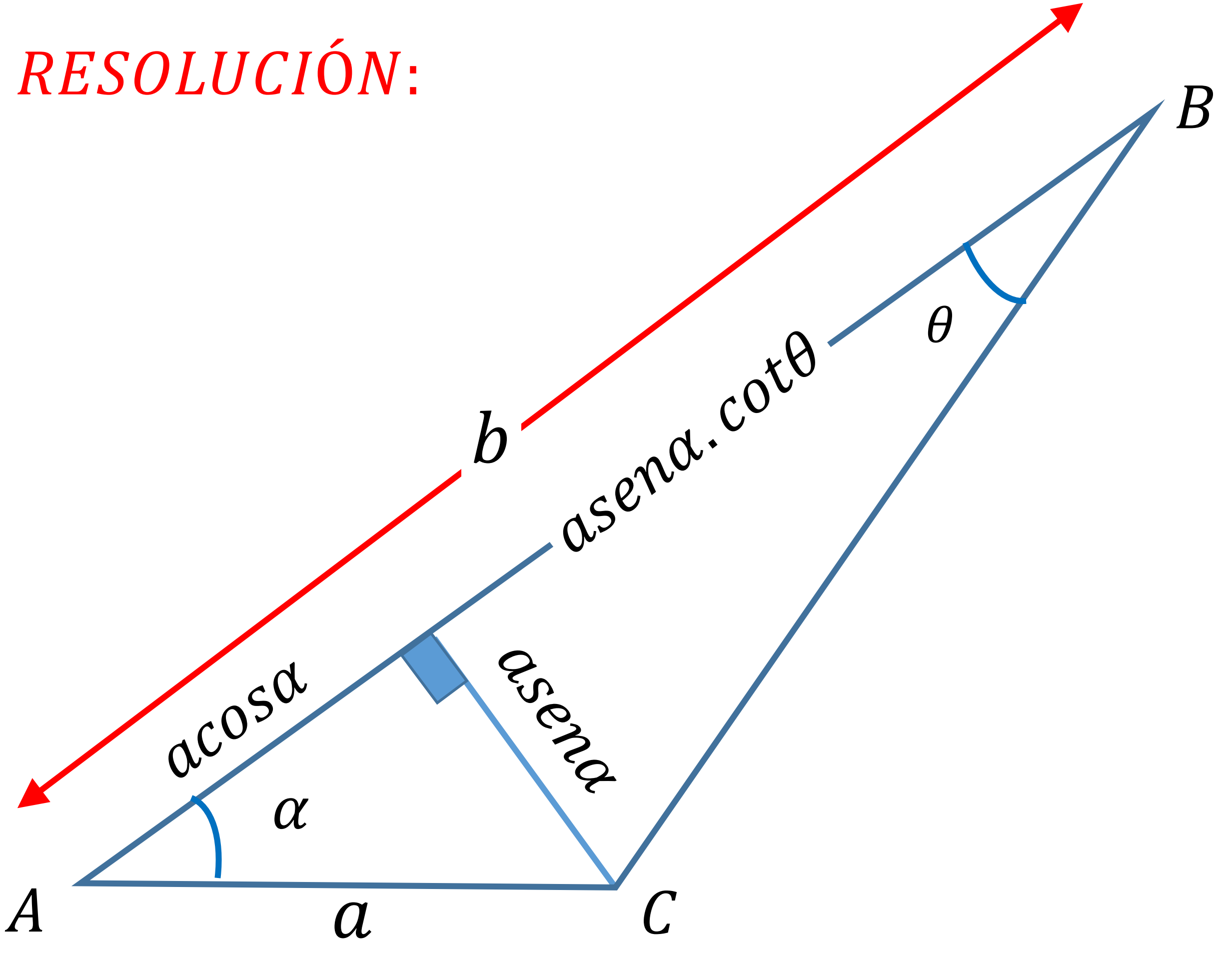
$$\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha.\cot\theta$$

en términos de a y b



A) $\dfrac{b}{a}$ B) $\dfrac{a}{b}$ C) $\dfrac{2a}{b}$ D) $\dfrac{2b}{a}$ E) $\dfrac{b}{2a}$

RESOLUCIÓN:



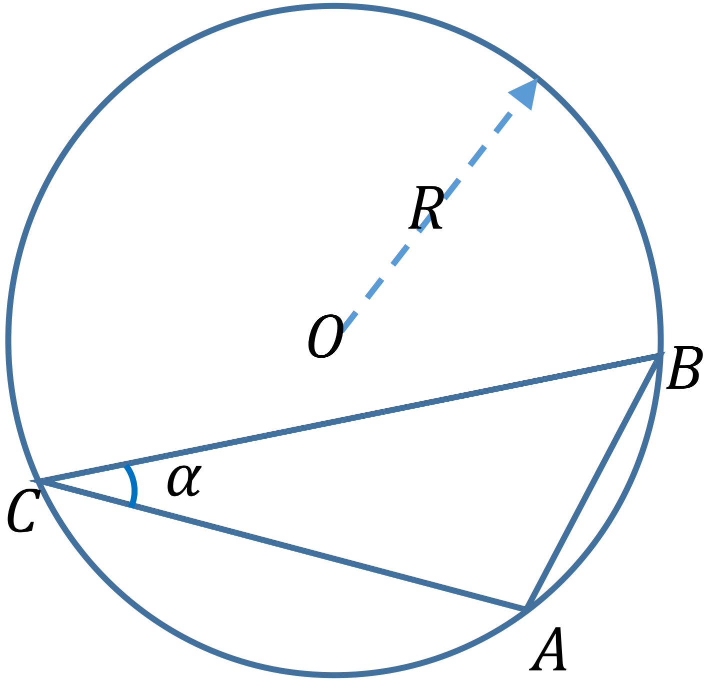
del gráfico :

$$a\cos\alpha + a\operatorname{sen}\alpha.\cot\theta = b$$

$$a(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha.\cot\theta) = b$$

$$\boxed{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha.\cot\theta = \frac{b}{a}}$$

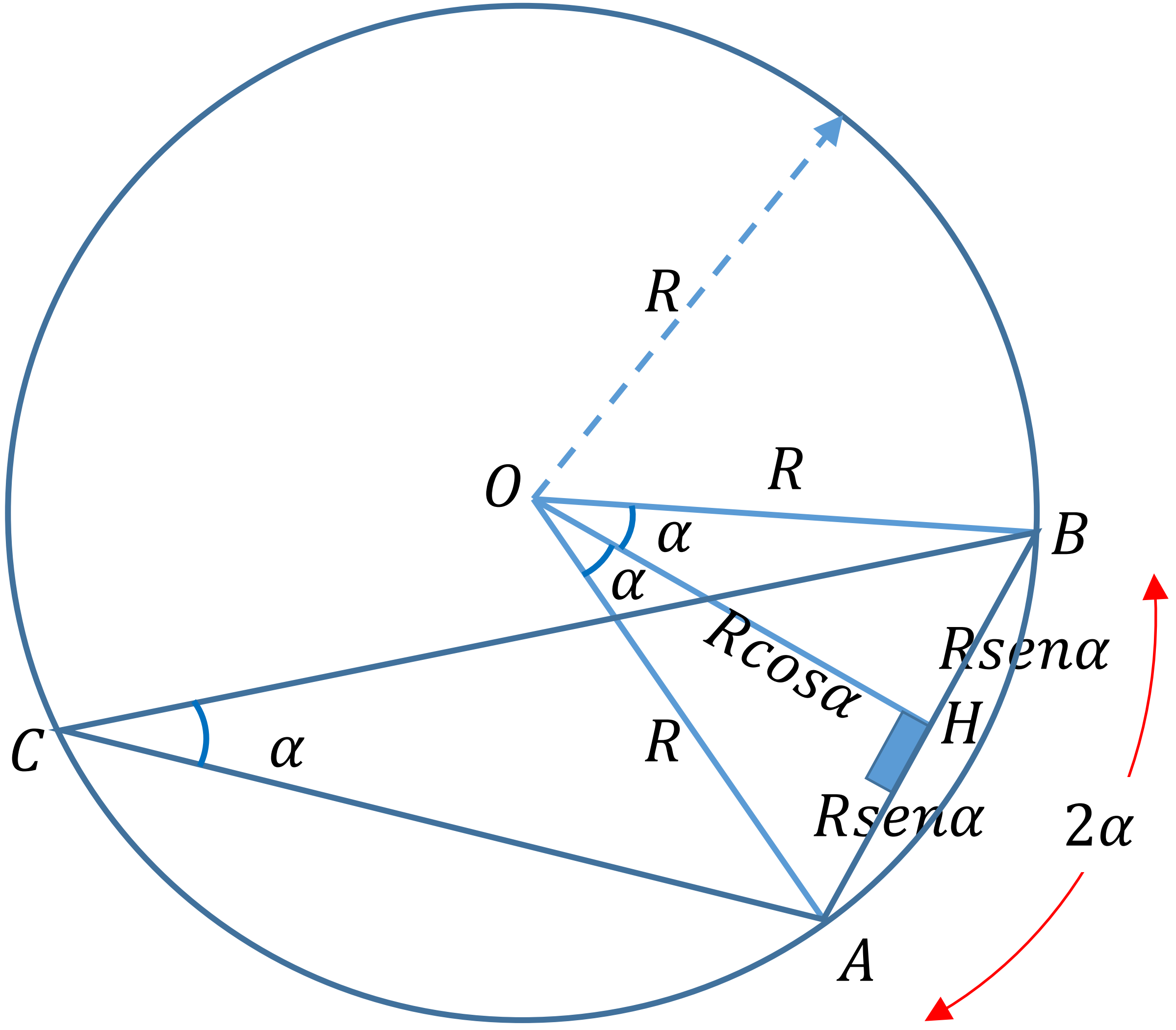
15. *Determine* $\overline{AB}$ *en función de* R *y* α.



A) $Rsen\alpha$ B) $Rcos\alpha$ C) $2Rsen\alpha$ D) $2Rcos\alpha$ E) $2Rtan\alpha$

RESOLUCIÓN:

* *unimos* $\overline{OA}$ *y* $\overline{OB}$
* *luego trazamos la altura* $\overline{OH}$
* *completamos ángulos en el triángulo AOB*
* *completamos lados*



del gráfico: $\boxed{AB = 2Rsen\alpha}$