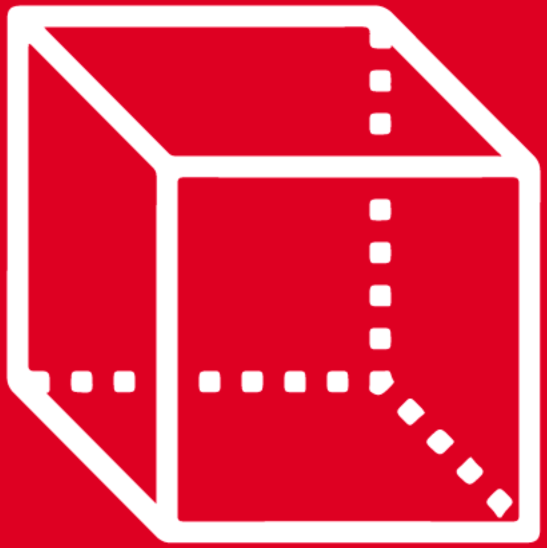
GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

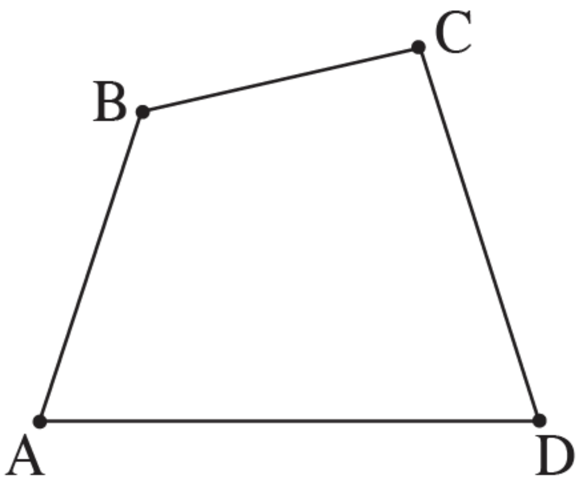
CAPITULO 2 TEORIA



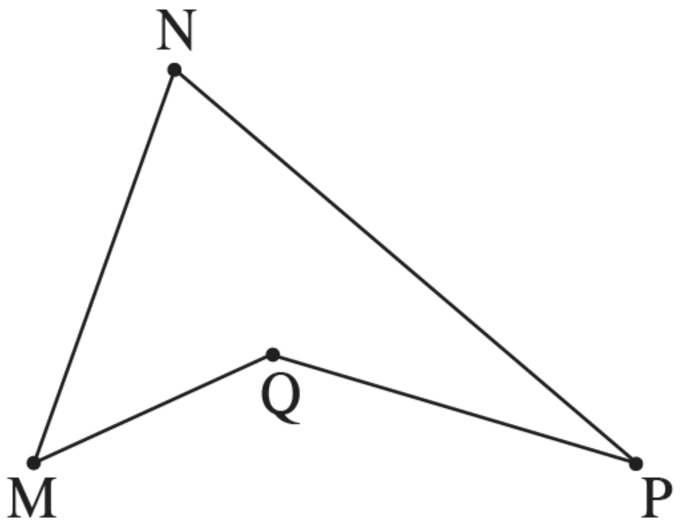
SACO OLIVEROS

CUADRILÁTERO

DEFINICIÓN : El cuadrilátero es el polígono de cuatro lados, puede ser convexo o no convexo



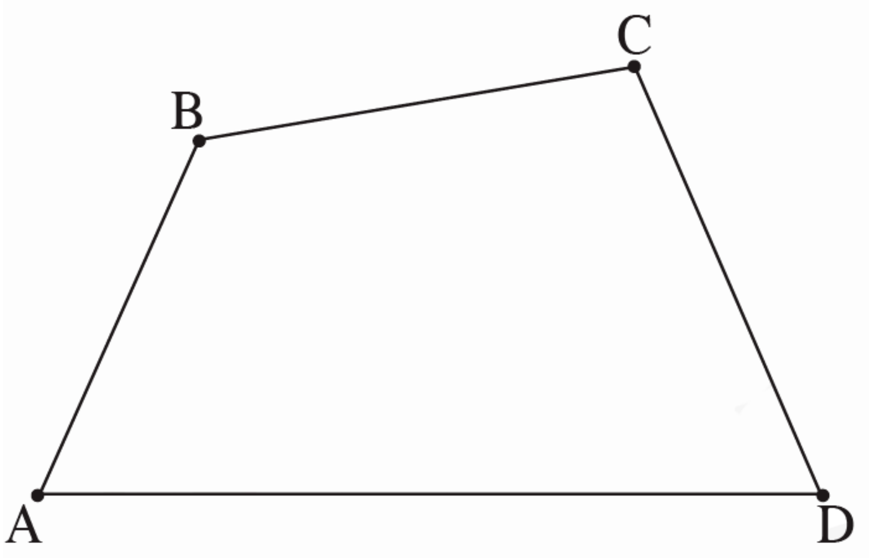
Cuadrilátero convexo



Cuadrilátero no convexo

CUADRILÁTERO

TRAPEZOIDE : Es el cuadrilátero que no tiene lados paralelos.



En la figura mostrada:

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no son paralelos

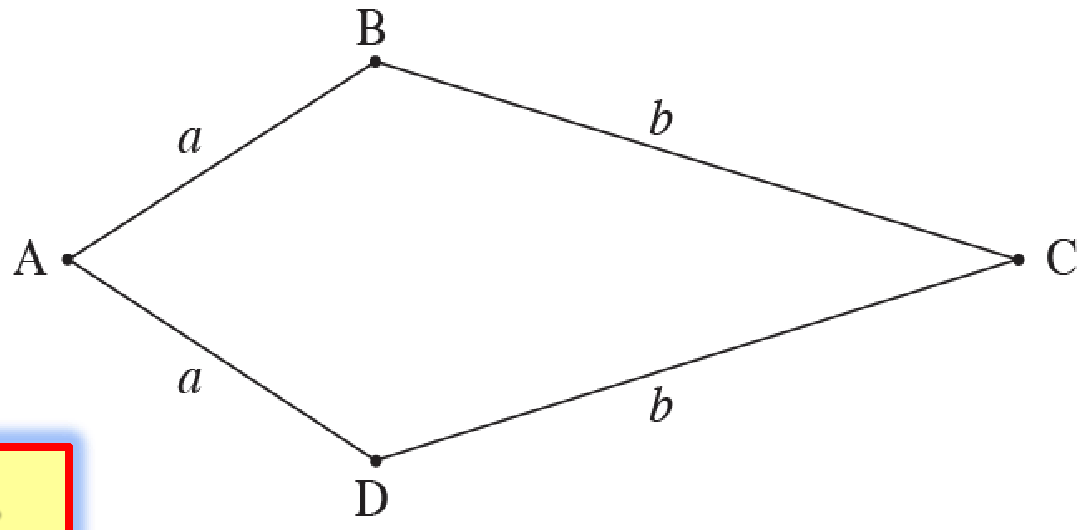
$\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ no son paralelos

entonces

$\boxed{ABCD \text{ es un } TRAPEZOIDE}$

CUADRILÁTERO - CLASIFICACIÓN

TRAPEZOIDE SIMÉTRICO : Es el trapezoide que tiene sus dos pares de lados consecutivos congruentes.



En la figura mostrada:

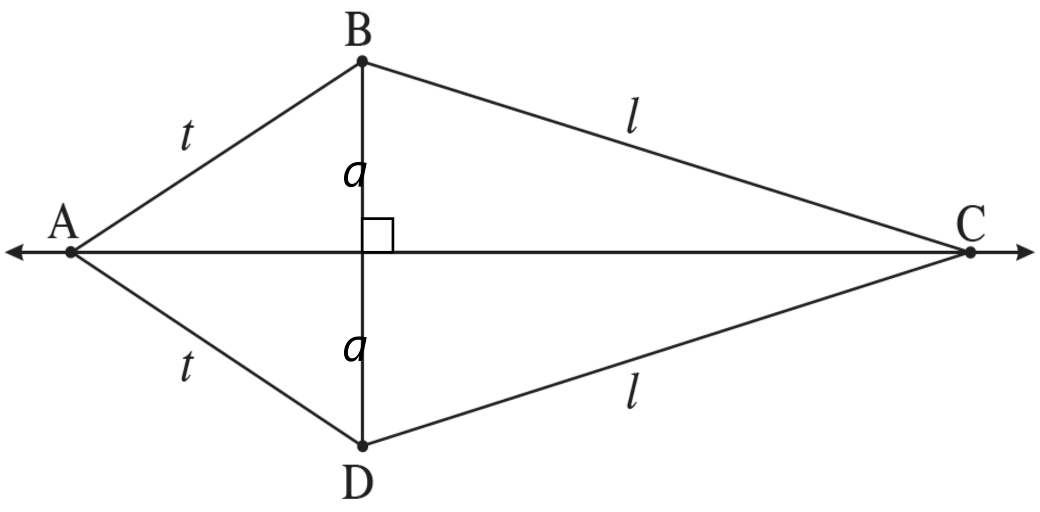
si $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{DC}$

Entonces

ABCD es un trapezoide simétrico.

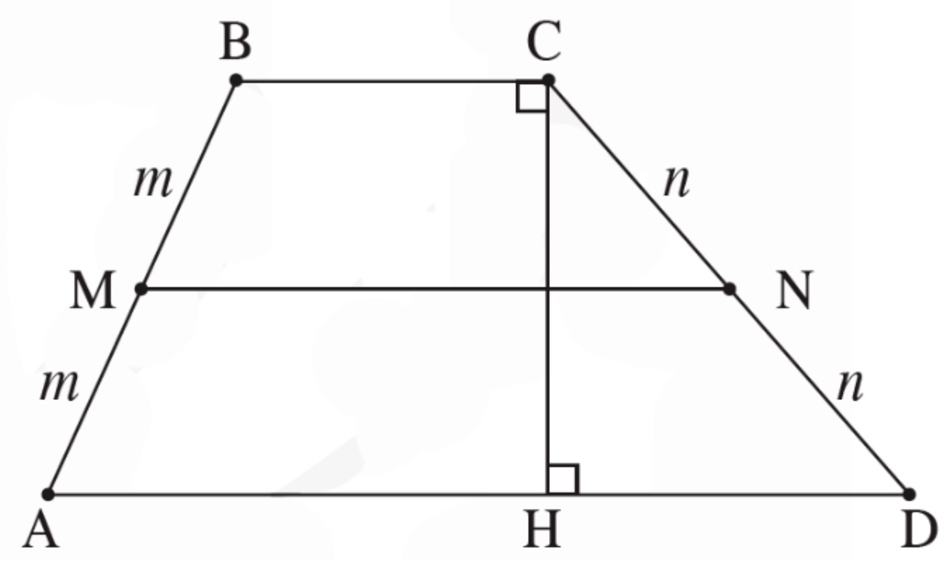
CUADRILÁTERO - CLASIFICACIÓN

TEOREMA : En el trapezoide simétrico, la recta que contiene a una diagonal es mediatriz de la otra



TRAPECIO

TRAPECIO : Es el cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.



En la figura mostrada:

Si $\overline{BC} // \overline{AD}$,

entonces

ABCD es un trapecio

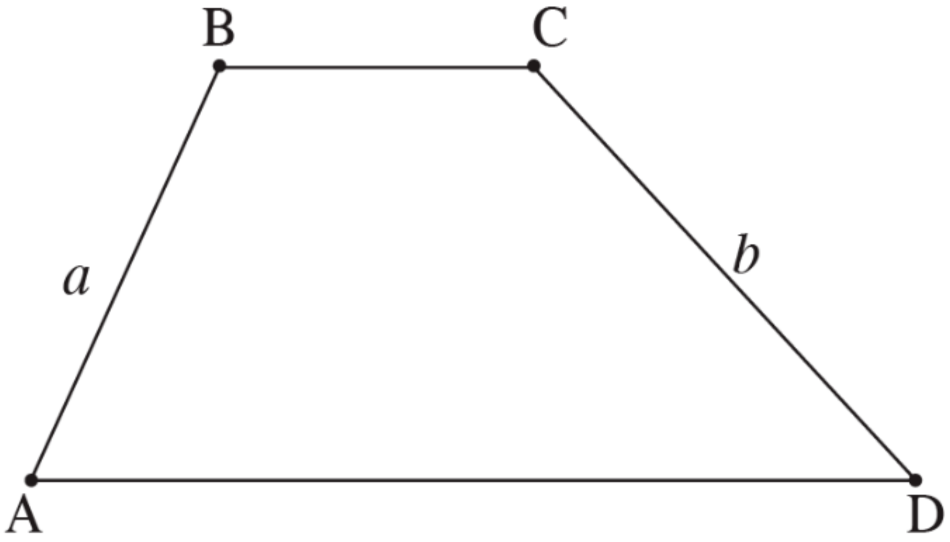
Bases: $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

Altura: $\overline{CH}$

Mediana: $\overline{MN}$

TRAPECIO - CLASIFICACIÓN

TRAPECIO ESCALENO : Cuando los lados opuestos no paralelos no son congruentes.



En la figura mostrada:

Si $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $a \neq b$

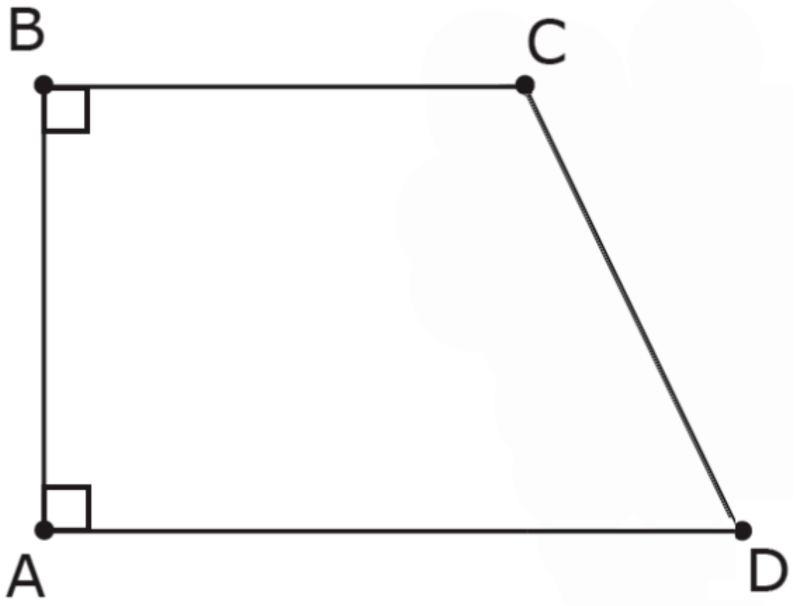
entonces

ABCD es un trapecio escaleno

Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ no son congruentes

TRAPECIO - CLASIFICACIÓN

TRAPECIO RECTÁNGULO : Cuando uno de sus lados no paralelos es perpendicular a las bases.



En la figura mostrada:

Si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ y Si $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

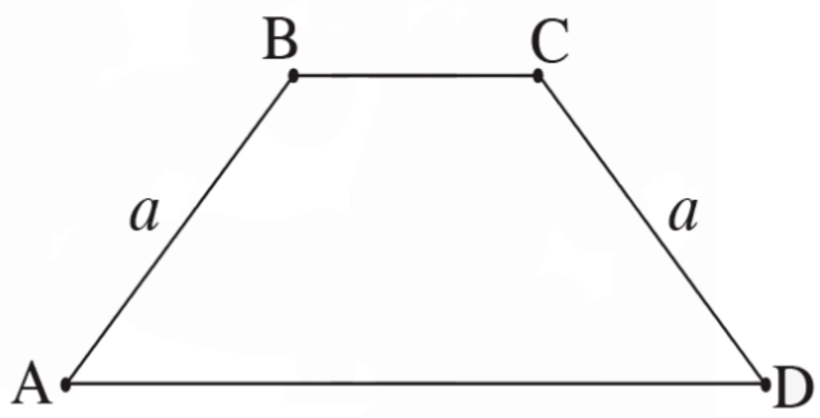
entonces

ABCD es un trapecio rectángulo

Recto en A y B

TRAPECIO - CLASIFICACIÓN

TRAPECIO ISÓSCELES : Cuando los lados opuestos no paralelos son congruentes.



En la figura mostrada:

Si $\overline{AD} // \overline{BC}$ y AB=CD=a

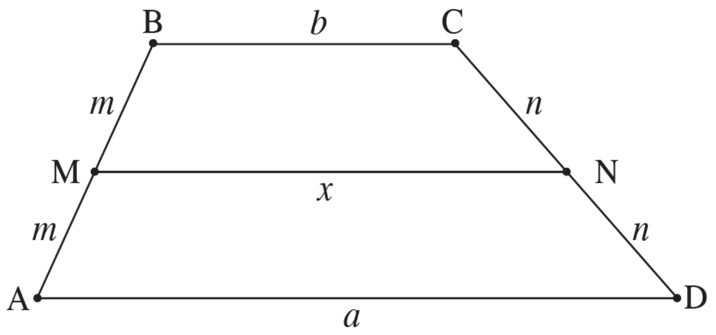
entonces

ABCD es un trapecio isósceles

Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son congruentes.

Los lados congruentes determinan con cada base ángulos congruentes

TRAPECIO - TEOREMAS

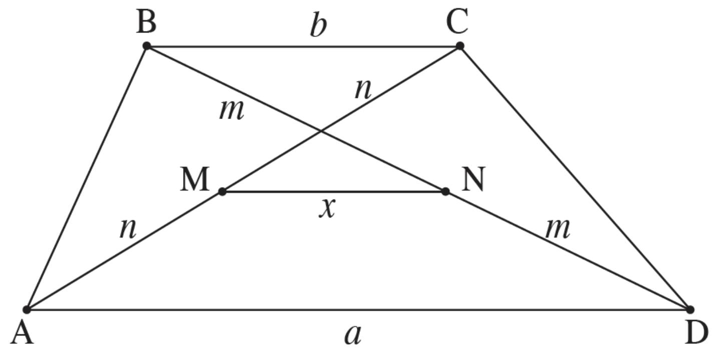


En la figura mostrada:

Si ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

entonces

$\overline{BC}$ // $\overline{MN}$ // $\overline{AD}$ y $X = \dfrac{a+b}{2}$



En la figura mostrada:

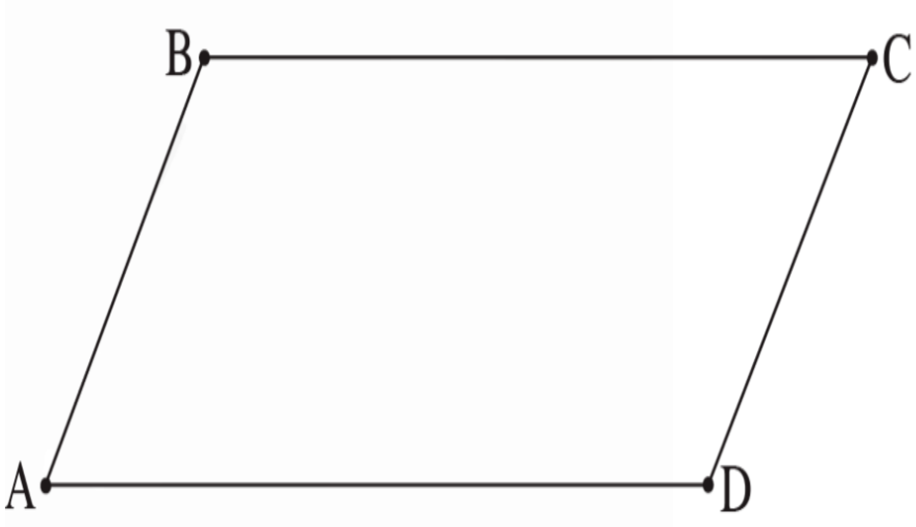
Si ABCD es un trapecio de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$

entonces

$\overline{BC}$ // $\overline{MN}$ // $\overline{AD}$ y $X = \dfrac{a-b}{2}$

PARALELOGRAMO

PARALELOGRAMO : Se denomina paralelogramo al cuadrilátero que tiene los dos pares de lados opuestos paralelos.



En la figura mostrada:

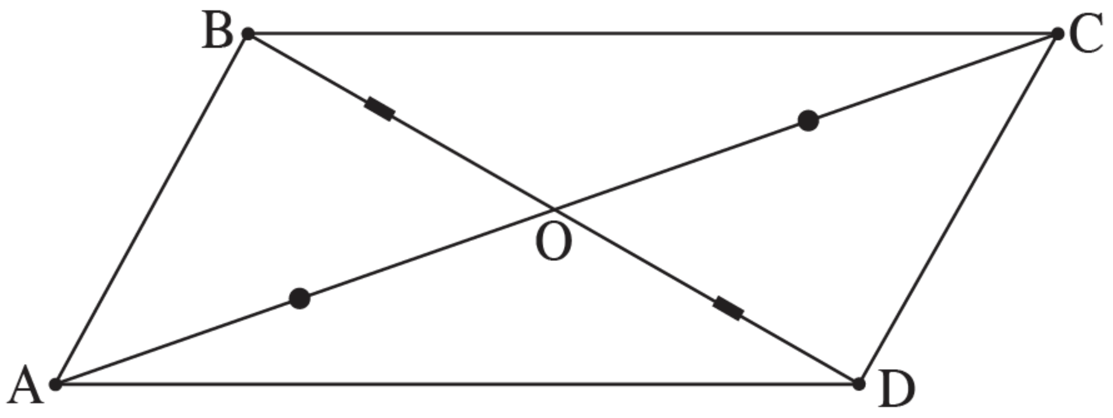
Si $\overline{BC} // \overline{AD}$ y $\overline{AB} // \overline{CD}$

entonces

ABCD es UN PARALELOGRAMO

PARALELOGRAMO - TEOREMA

TEOREMA : En todo paralelogramo las diagonales se bisecan



En la figura mostrada:

Si ABCD es un paralelogramo

Se cumple

A0=OC y BO = OD

O centro del paralelogramo ABCD

PARALELOGRAMO - CLASIFICACIÓN

ROMBOIDE : Es aquel paralelogramo cuyos ángulos consecutivos y lados consecutivos no son congruentes respectivamente.

En la figura mostrada:

Si $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$,

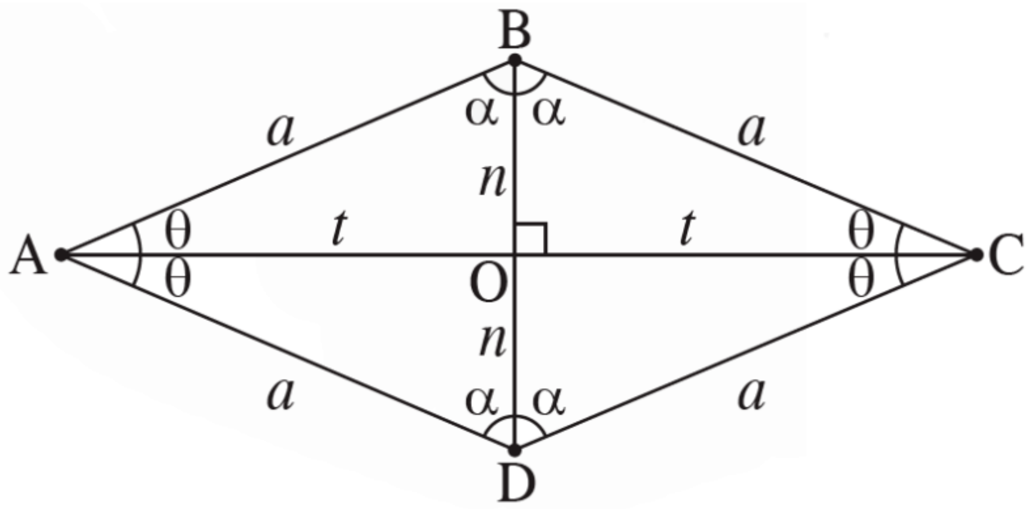
AB y BC no son congruentes

entonces

$$\boxed{ABCD \ \ es\ un\ romboide}$$

PARALELOGRAMO - CLASIFICACIÓN

ROMBO : Es el paralelogramo cuyos lados son congruentes.



En la figura mostrada:

Si $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$,$\overline{AD}$

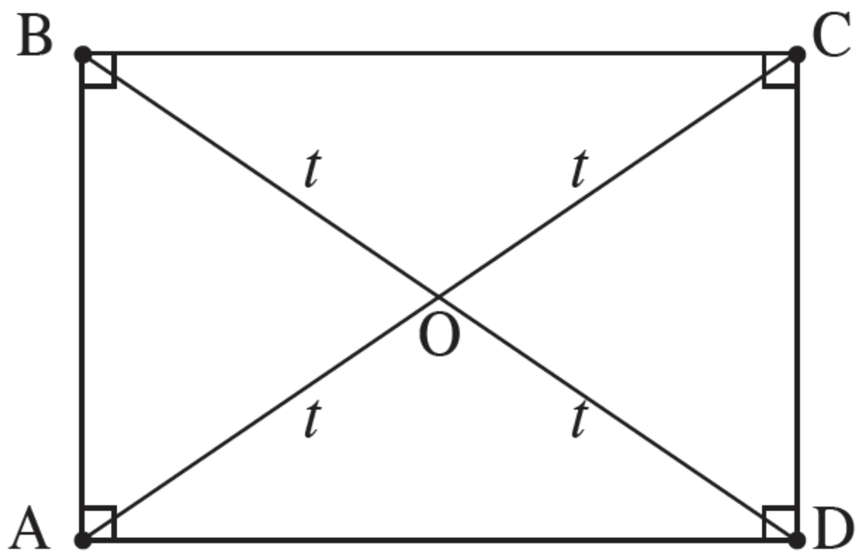
son congruentes

entonces

$$\boxed{ABCD \text{ es un rombo}}$$

PARALELOGRAMO - CLASIFICACIÓN

RECTÁNGULO : Es el paralelogramo cuyos ángulos son congruentes.



En la figura mostrada:

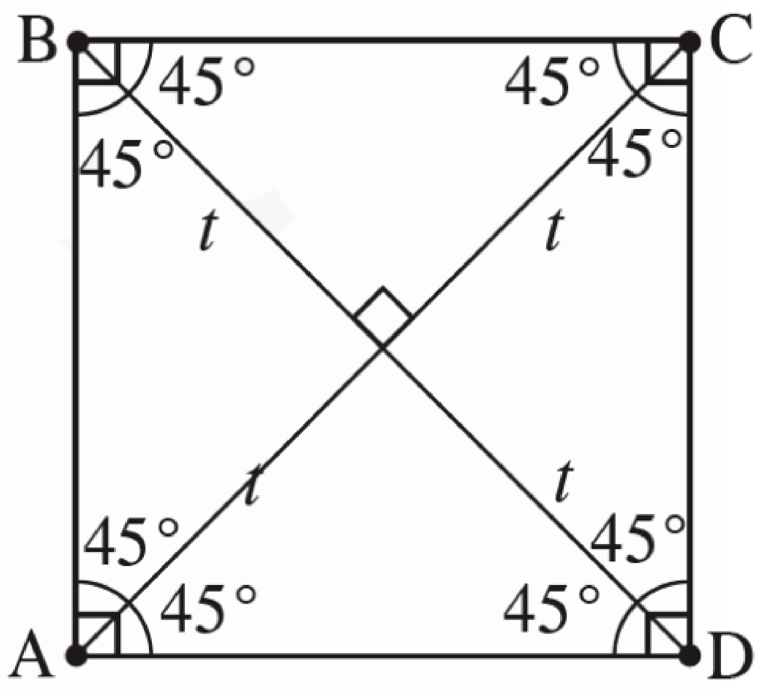
Si los ángulos ABC, BCD, CDA y DAC son rectos

entonces

$\boxed{ABCD \text{ es un rectángulo}}$

PARALELOGRAMO - CLASIFICACIÓN

CUADRADO : Es el paralelogramo cuyos lados y ángulos son congruentes respectivamente.



En la figura mostrada:

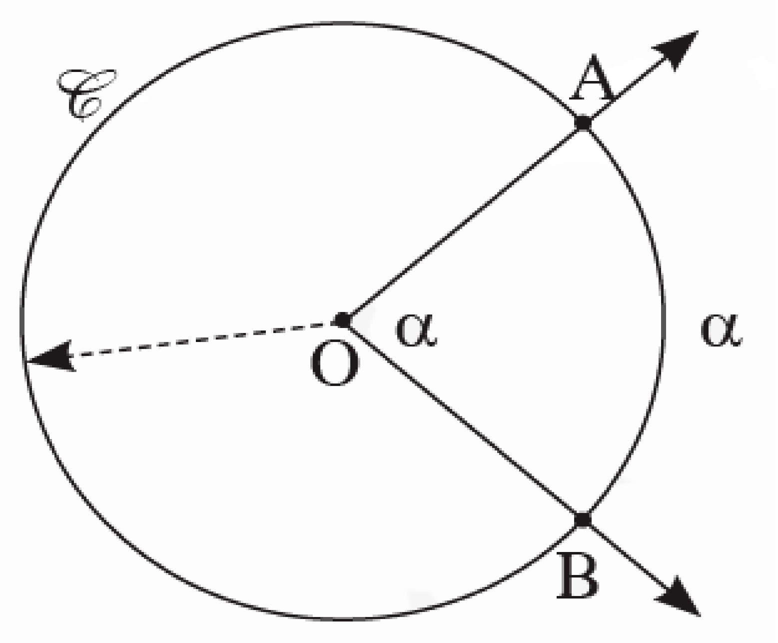
Si los ángulos ABC, BCD, CDA y DAC son rectos y los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ son congruentes

entonces

$$\boxed{ABCD\ \ es\, un\ \ cuadrado}$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

<u>ÁNGULO CENTRAL</u> : A un ángulo se le denomina ángulo central cuando su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados contienen a dos radios.



Si O es centro de la circunferencia,

entonces

$\angle AOB$: ángulo central

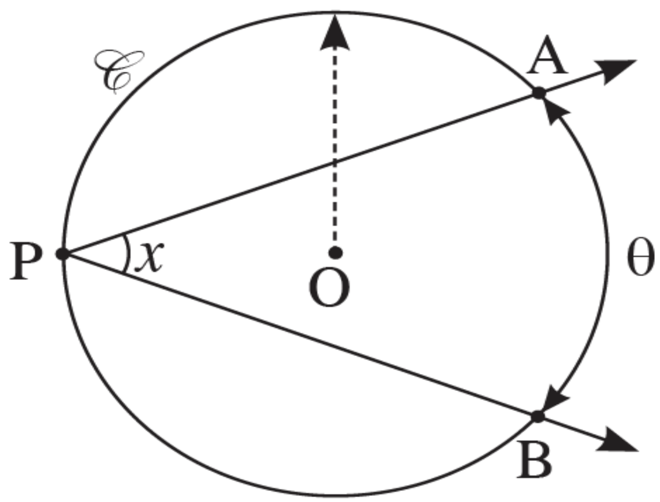
Si $m\angle AOB = \alpha$,

entonces

$$\boxed{m\overset{\frown}{AB} = \alpha}$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULO INSCRITO : A un ángulo se le denomina ángulo inscrito en una circunferencia cuando tiene su vértice en la circunferencia y sus lados contienen cada uno a una cuerda.

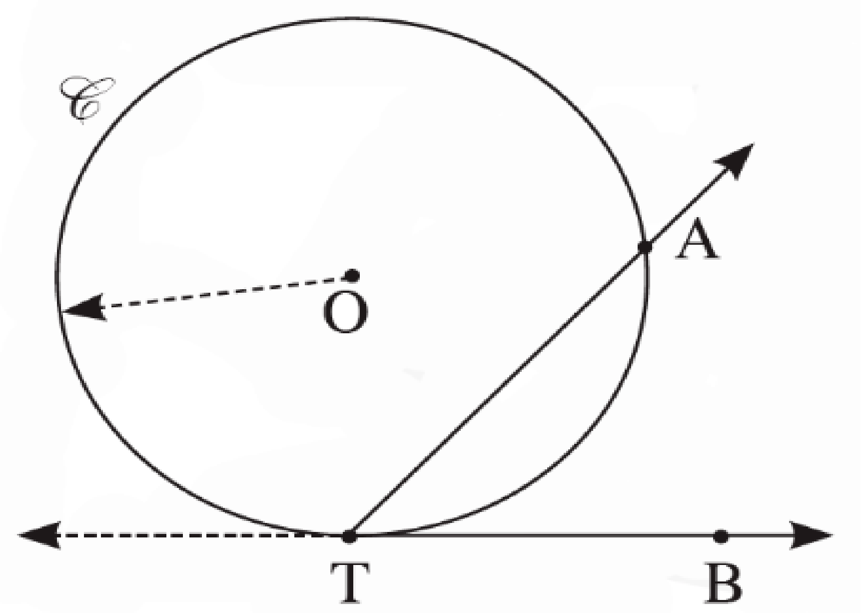


Si P es un punto de la circunferencia,
entonces
$\angle$ APB: ángulo inscrito
Si m$\overset{\frown}{AB}$ = θ,
entonces

$$\boxed{m\angle APB = \frac{\theta}{2}}$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

<u>ÁNGULO SEMI INSCRITO</u> : A un ángulo se le denomina ángulo semi inscrito cuando su vértice pertenece a la circunferencia, uno de sus lados está contenido en una recta tangente y el otro lado contiene a una cuerda.

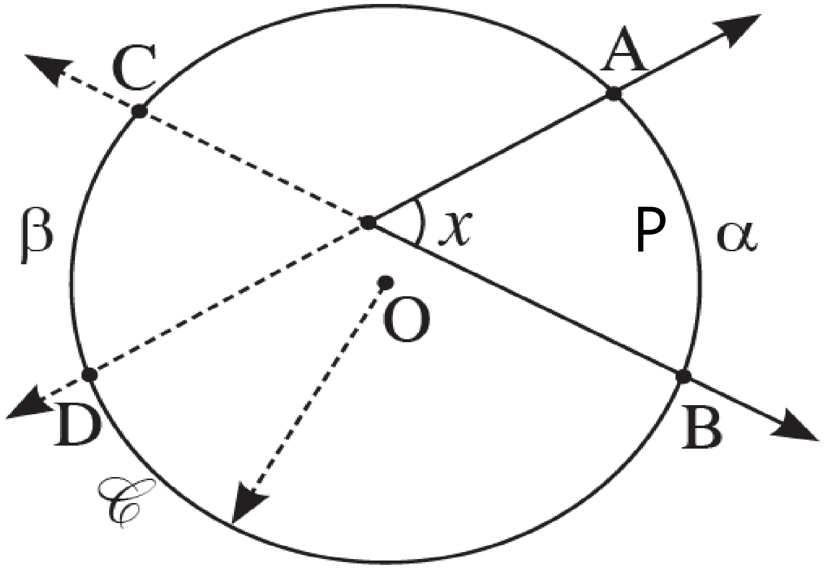


Si T es un punto de tangencia, entonces
$\angle$ATB: ángulo semi inscrito
Si m$\overset{\frown}{AT}$ = θ, entonces

$$\boxed{m\angle ATB = \frac{\theta}{2}}$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULO INTERIOR : Se denomina ángulo interior al que tiene su vértice en el interior de la circunferencia y sus lados están determinados por dos cuerdas secantes.



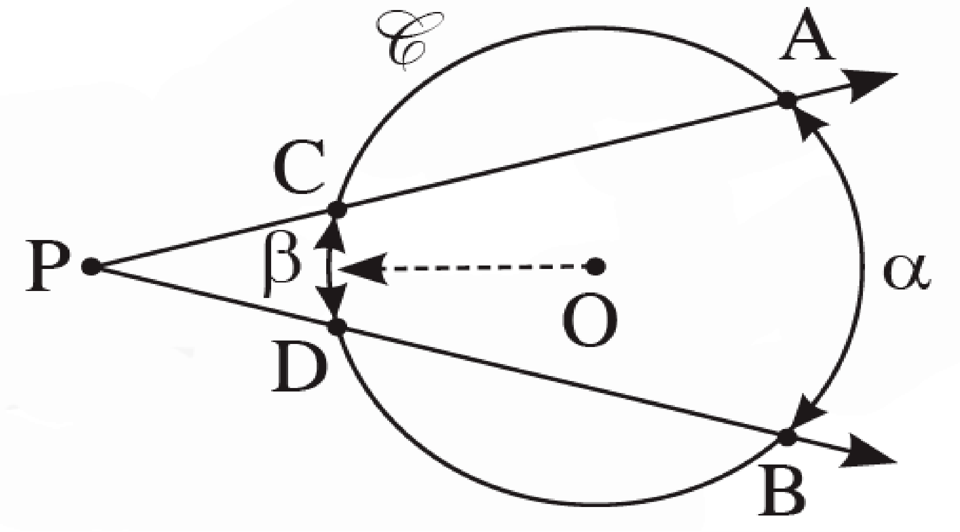
Si P es interior a la circunferencia, entonces

$\angle$APB: ángulo interior

$$\boxed{m\angle APB=\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

ÁNGULO EXTERIOR : Se denomina ángulo exterior cuando tiene su vértice en el exterior de la circunferencia y sus lados pueden estar contenidos en rectas secantes, o rectas tangentes o una recta secante y otra tangente.

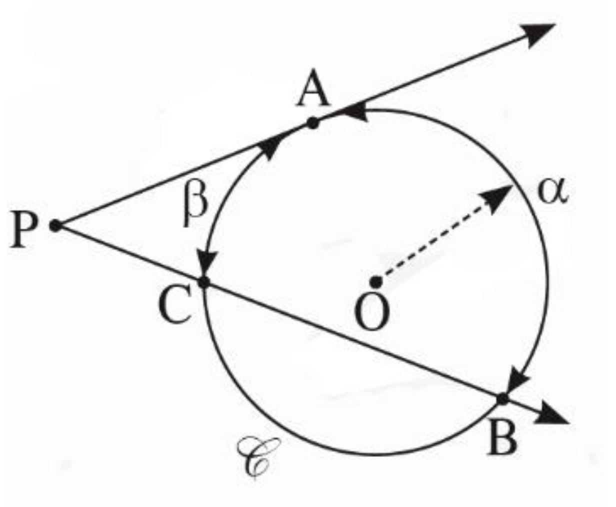


Si P es exterior, entonces
∠APB: ángulo exterior

$$\boxed{m\angle APB = \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

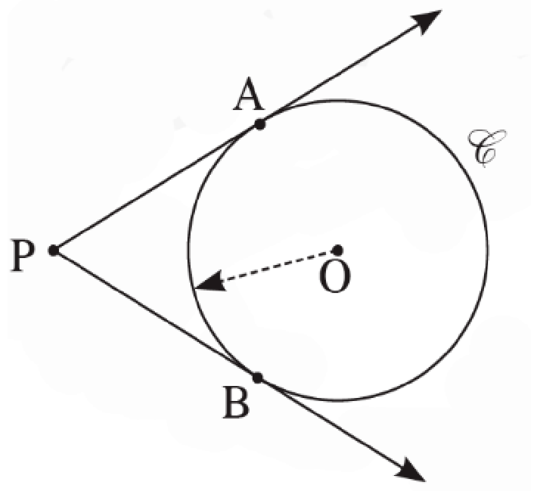
ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

Ángulo Exterior.-



Si P es exterior,
Entonces
$\angle$APB: ángulo exterior

$$\boxed{m\angle APB=\frac{\alpha-\beta}{2}}$$



Si P es exterior, A y B son puntos de tangencia, entonces
$\angle$APB: ángulo exterior

$$\boxed{m\angle APB= 180° - m\widehat{AB}}$$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

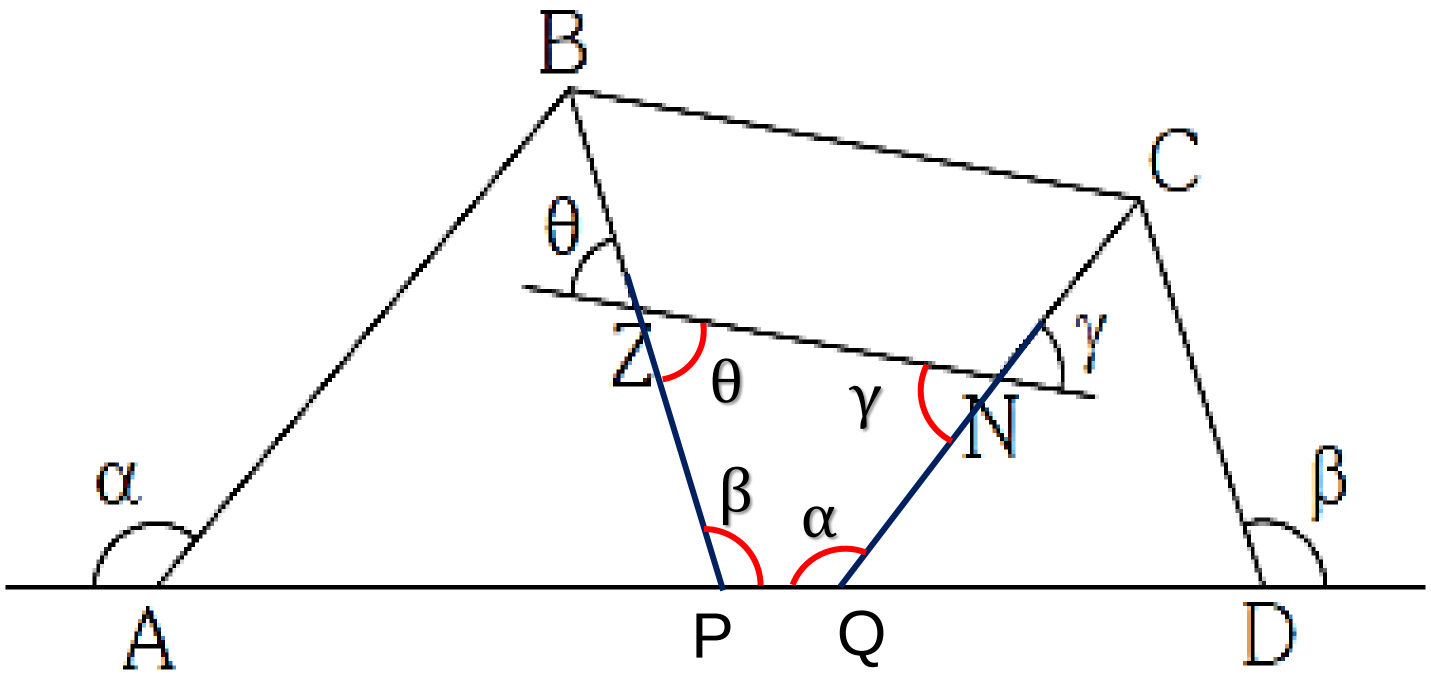
CAPITULO 2 PRACTICA

SACO OLIVEROS

Problema 1 En la figura; $\overline{AB} \parallel \overline{NC}$, $\overline{BZ} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{ZN}$. Calcule $\alpha+\beta+\theta+\gamma$.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de $\alpha+\beta+\theta+\gamma$



- Se prolonga $\overline{BZ}$ hasta P

$\Rightarrow$ m ∢ ZPD = β

- Se prolonga $\overline{CN}$ hasta Q

$\Rightarrow$ m ∢ NQA = α

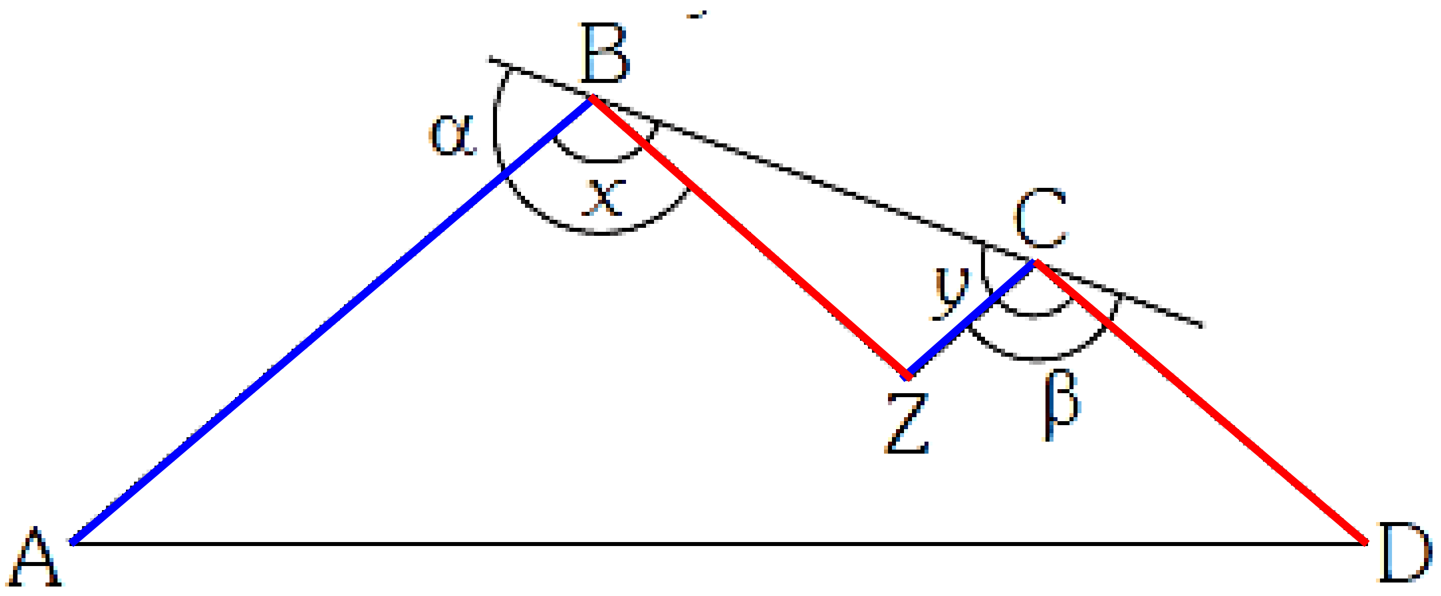
- En el cuadrilátero PZNQ

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\theta+\gamma = 360°$$

Problema 2 En la figura; $\alpha + \beta = 200°$, $\overline{AB}$ // $\overline{ZC}$ y $\overline{BZ}$ // $\overline{CD}$. Calcule $x + y$.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de x + y



- Si : $\overline{AB}$ // $\overline{ZC}$

➡ $\boxed{x = \beta}$

- Si : $\overline{BZ}$ // $\overline{CD}$

➡ $\boxed{y = \alpha}$

Dato: $\underbrace{\alpha + \beta}$ = 200°

x + y = 200°

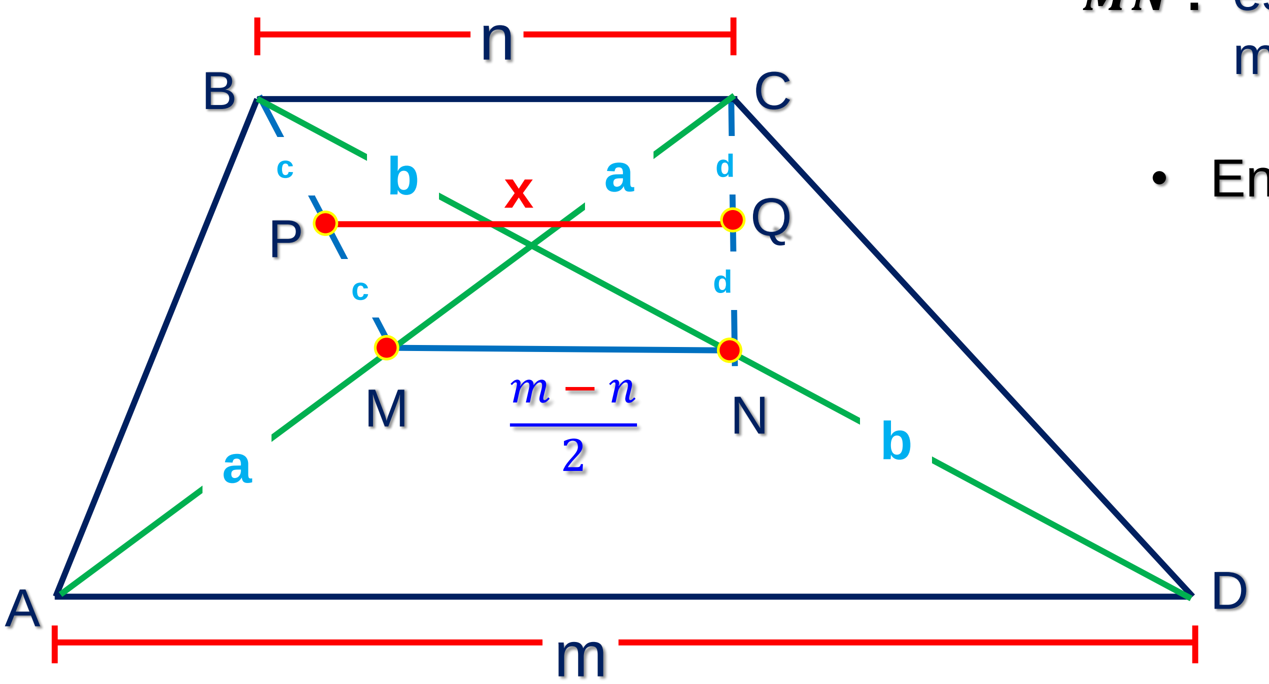
$\boxed{\therefore \quad x + y = 200°}$

Problema 3 En un trapecio ABCD, $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$ y BC < AD, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si AD + BC = 16, calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$.

RESOLUCIÓN

Dato: m + n = 16

Piden: la distancia entre los puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ = PQ



- En el trapecio ABCD

$\overline{MN}$: es la longitud de los puntos medios de las diagonales

$$\boxed{\overline{MN} = \frac{m-n}{2}}$$

- En el trapecio BCNM ($\overline{MN}$ // $\overline{BC}$)

$\overline{PQ}$: es la mediana del trapecio

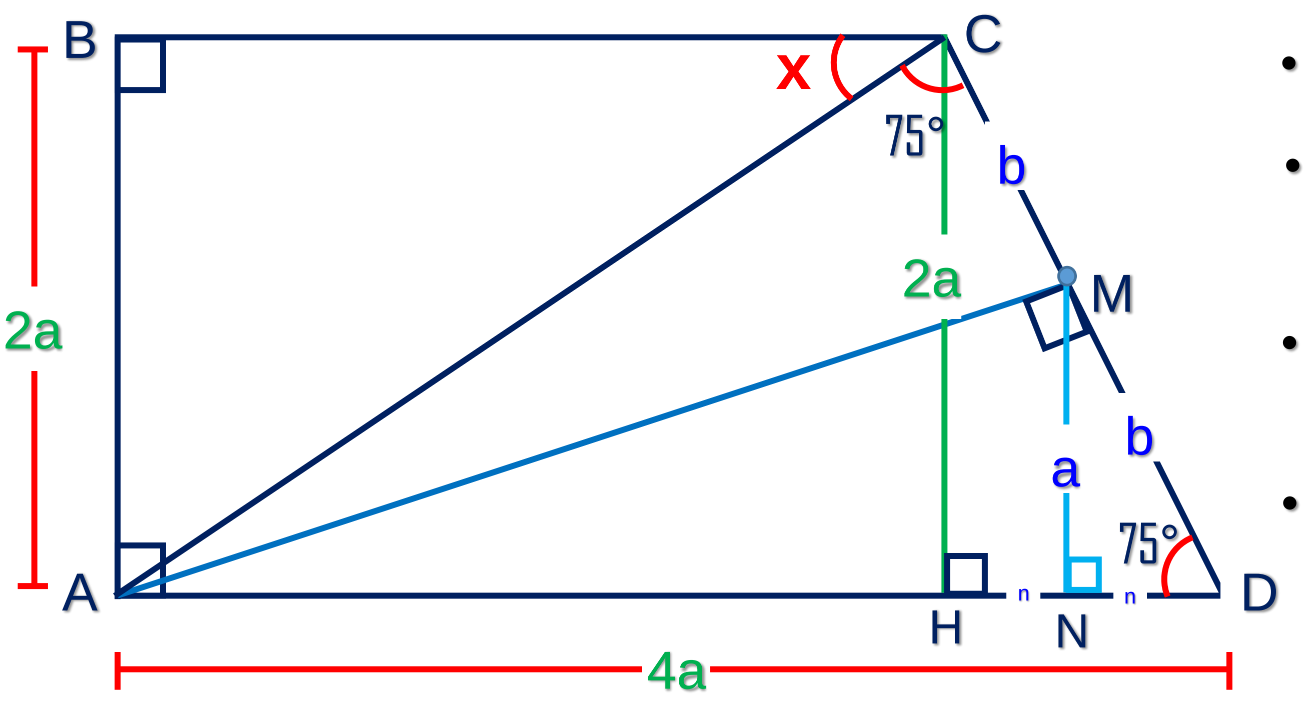
$$PQ = \frac{\frac{m-n}{2} + n}{2} = \frac{m+n}{4} = \frac{16}{4}$$

$$\boxed{\therefore \quad PQ = 4}$$

Problema 4 **En un trapecio rectangular ABCD, recto en A y B, AD = 2AB y m∢ADC = 75°. Calcule m∢ACB.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de m∢ACB = x



- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD}$ ➡ AB = CH = 2a
- Sea M punto medio de $\overline{CD}$
- Se traza $\overline{MN} \perp \overline{AD}$

  ⊿ **CHD** $\overline{MN} // \overline{CH}$ y CM = MD ➡ HN = ND
- El Δ CHD $\overline{MN}$ es base media ➡ MN = a
- El Δ AMD MN = $\frac{AD}{4}$ y m∢ADM = 75°

  ➡ m∢AMD = 90°
- El Δ CAD (Isósceles AD = AC)

  m∢ACD = m∢ADC = 75°
- Si $\overline{BC} // \overline{AD}$

  75° + 75° + x = 180°

$\boxed{\therefore\ x = 30°}$

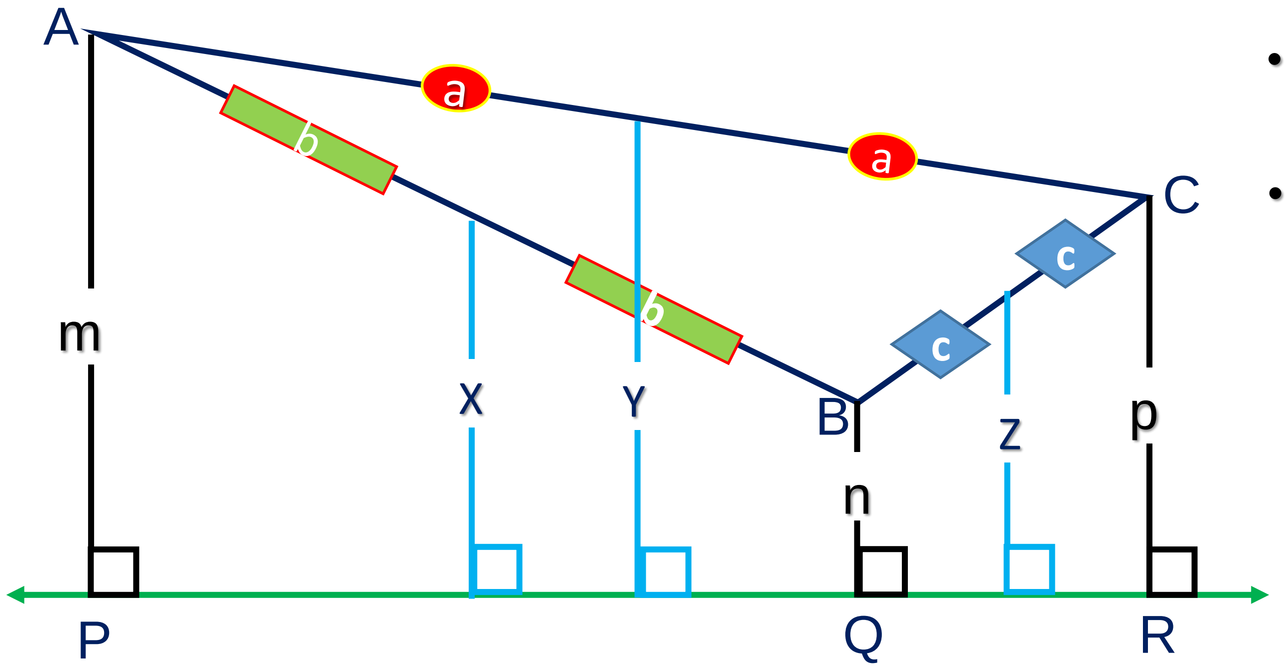
Problema 5

Se traza una recta exterior a un triángulo (dicha recta no interseca a los lados). Si la suma de distancias de los vértices del triángulo hacia dicha recta es 18, calcule la suma de distancia de los puntos medios de los lados del triángulo hacia dicha recta.

RESOLUCIÓN

Dato: $m + n + p = 18$

Piden: la suma de las distancias de los puntos medios = x + y + x



- En el ⏢ ABQP $\quad x = \dfrac{m+n}{2} \Rightarrow m + n = 2x$
- En el ⏢ BCRQ $\quad z = \dfrac{n+p}{2} \Rightarrow n + p = 2z$
- En el ⏢ ACRP $\quad y = \dfrac{m+p}{2} \Rightarrow m + p = 2y$

Sumando:

$$2m + 2n + 2p = 2x + 2y + 2z$$

$$36 = 2x + 2y + 2z$$

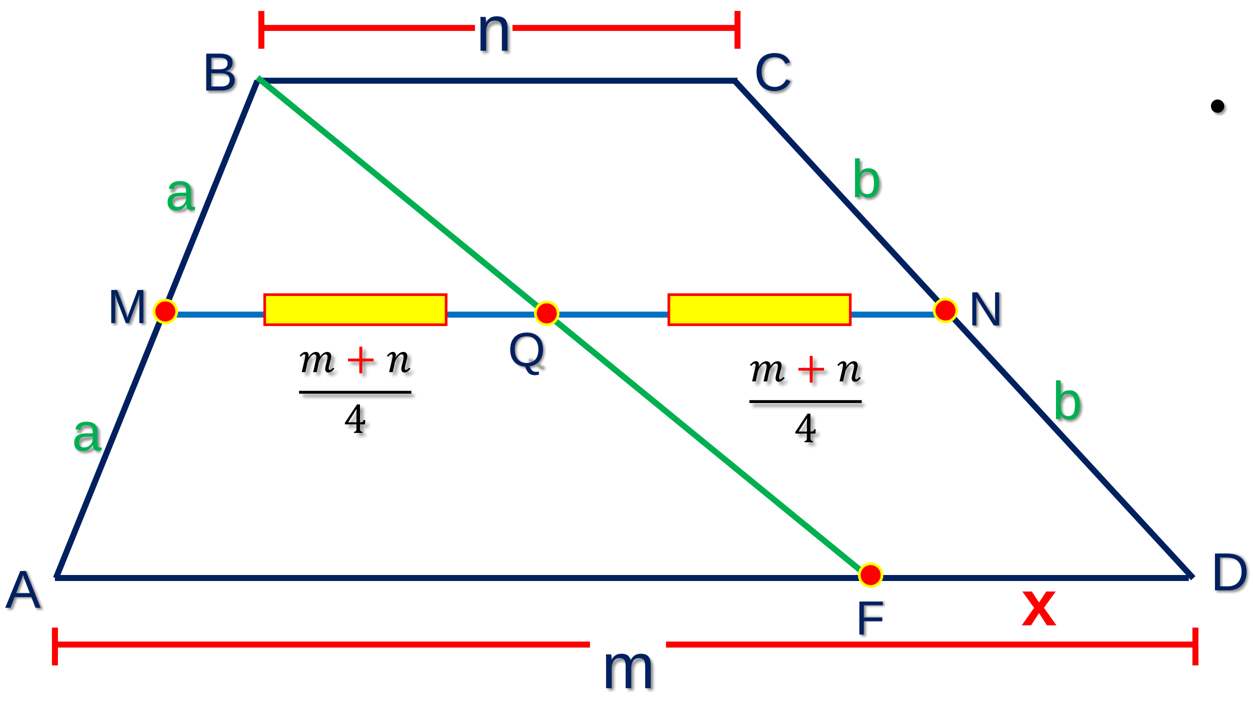
$$\boxed{\therefore \quad x + y + z = 18}$$

Problema 6

En un trapecio ABCD, por B se traza una recta que biseca a la base media e interseca a la base mayor en F. Si la distancia entre los puntos medios de las diagonales es 4, calcule FD.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de FD



Dato: La distancia entre los puntos medios de las diagonales

$$\frac{m-n}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{m - n = 8}$$

- $\overline{QN}$ es la base media del trapecio FDCB

($\overline{FD}$ // $\overline{BC}$)

$$\frac{m+n}{4} = \frac{n+x}{2}$$

$$\frac{m-n}{2} = x$$

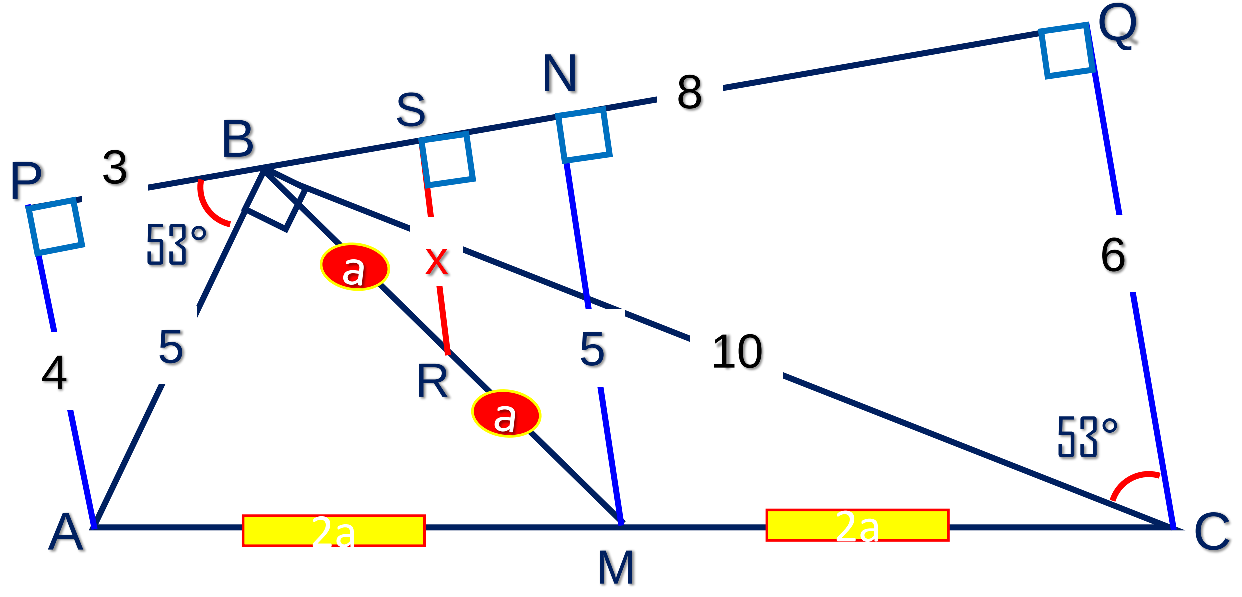
$$\Rightarrow \frac{8}{2} = x$$

$$\boxed{x = 4}$$

Problema 7 **Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza una recta que no interseca al lado $\overline{AC}$. La distancia de A hacia dicha recta es 4 y B dista 3 del pie de dicha perpendicular trazada por A a la recta. Calcule la distancia del punto medio de la mediana relativa a la hipotenusa a dicha recta. Además, BC = 2AB.**

RESOLUCIÓN

Piden: la distancia del punto medio de la mediana relativa a la recta = X



- El ⊿ APB (notable 37°-53°)

➡ AB = 5 y BC = 2 (5) = 10

- El ⊿ BQC (notable 37°-53°)

➡ BQ = 8 y QC = 6

- Se traza $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$

- ⏢ APQC $\overline{MN}$ Base media del trapecio

➡ $MN = \frac{4+6}{2} = 5$

- $\overline{RS}$ base media del ⊿ BNM

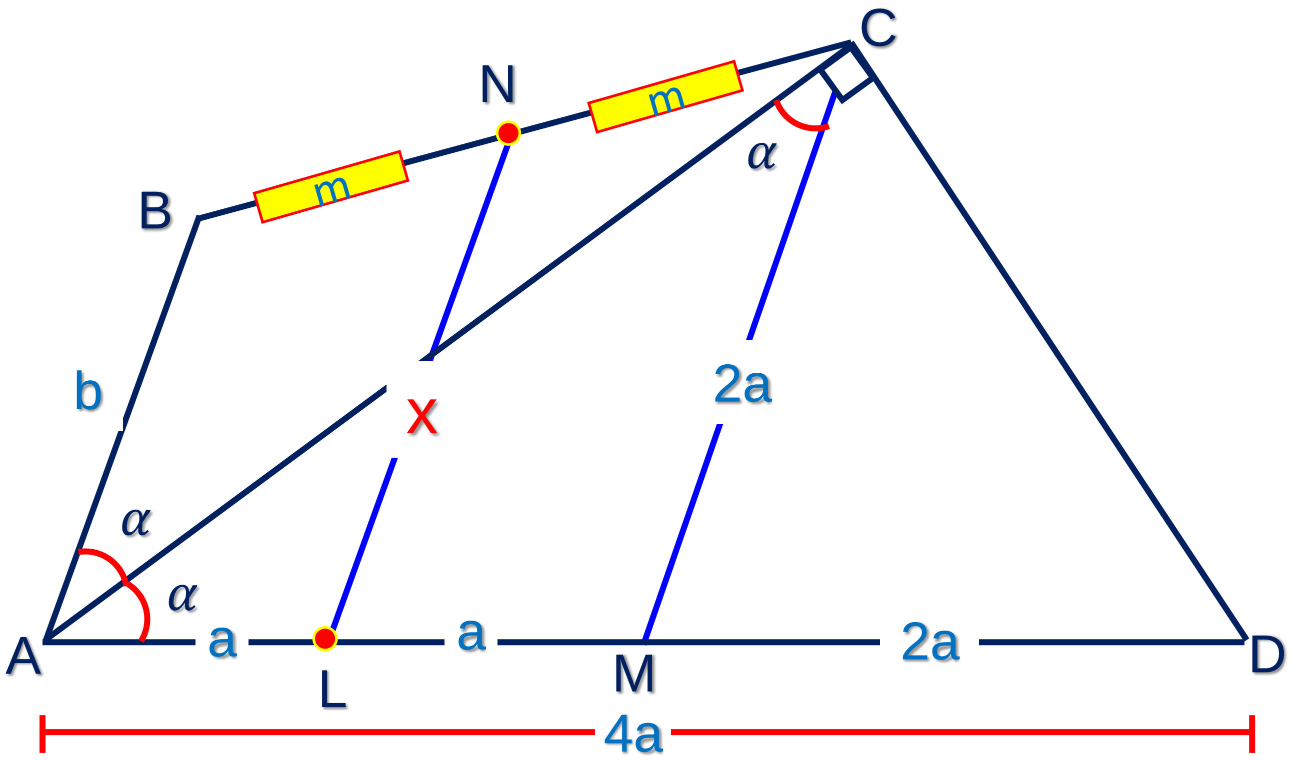
$X = \frac{5}{2}$

$\therefore$ **x = 2, 5**

Problema 8 **En un cuadrilátero ABCD, en $\overline{AD}$ se ubica el punto L, tal que AD = 4LA, m∢BAC = m∢CAD, m∢ACD = 90° y AD + 2AB = 24. Calcule la distancia de L al punto medio de $\overline{BC}$.**

RESOLUCIÓN

Piden: la distancia de L al punto medio $\overline{BC}$ = x



Dato: $4a + 2b = 24$

$2a + b = 12$

- En el ⊿ ACD Traza la mediana $\overline{CM}$

➡ AM = MD = CD = 2a

- Del gráfico $\overline{AB}$ // $\overline{CM}$

- ⏢ ABCM $\overline{LN}$ base media

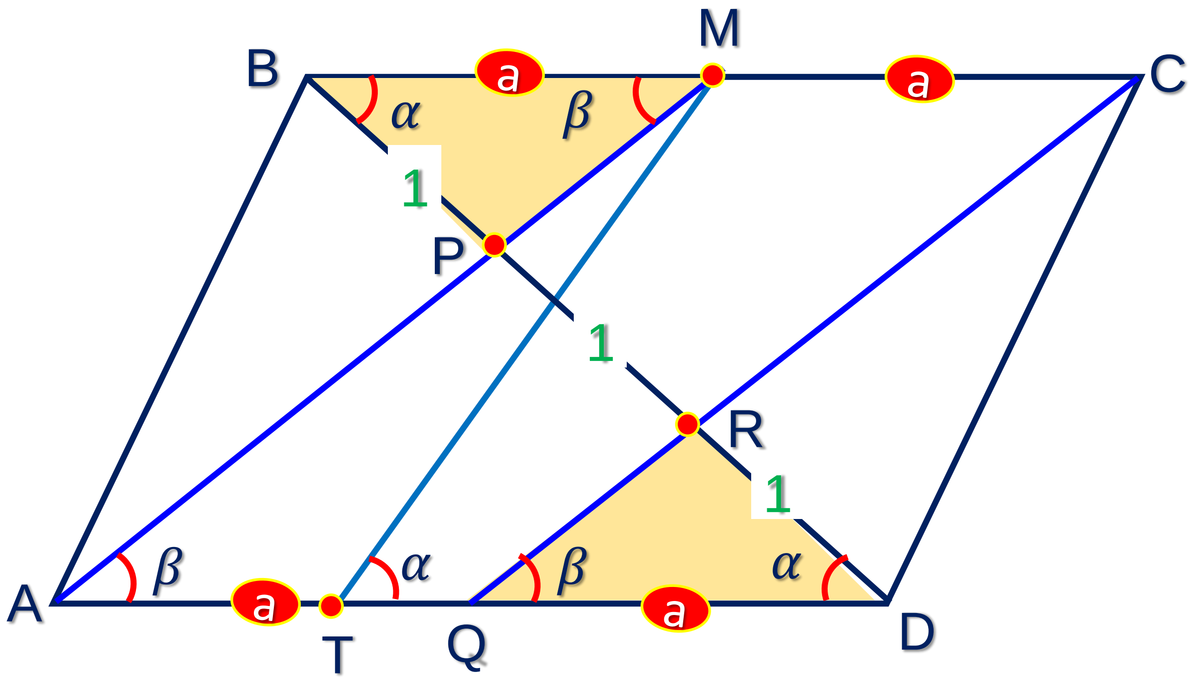
$$X = \frac{2a+b}{2} = \frac{12}{2}$$

$\boxed{\therefore\ x = 6}$

Problema 9 **En un paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{AM} \cap \overline{BD}$ = {P} y PB = 1. En $\overline{AD}$ se ubica el punto T, tal que m∢CBD = m∢MTD. Calcule MT.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de MT



Dato: ABCD es un paralelogramo

- Se traza $\overline{CQ}$ // $\overline{MA}$

  Q punto medio de $\overline{AD}$

- En Δ BCR $\overline{PM}$ Base media

  ➡ BP = PR = 1

- El Δ BPM ≅ Δ BCM

  ➡ BP = RD = 1

- Del gráfico BD = MT

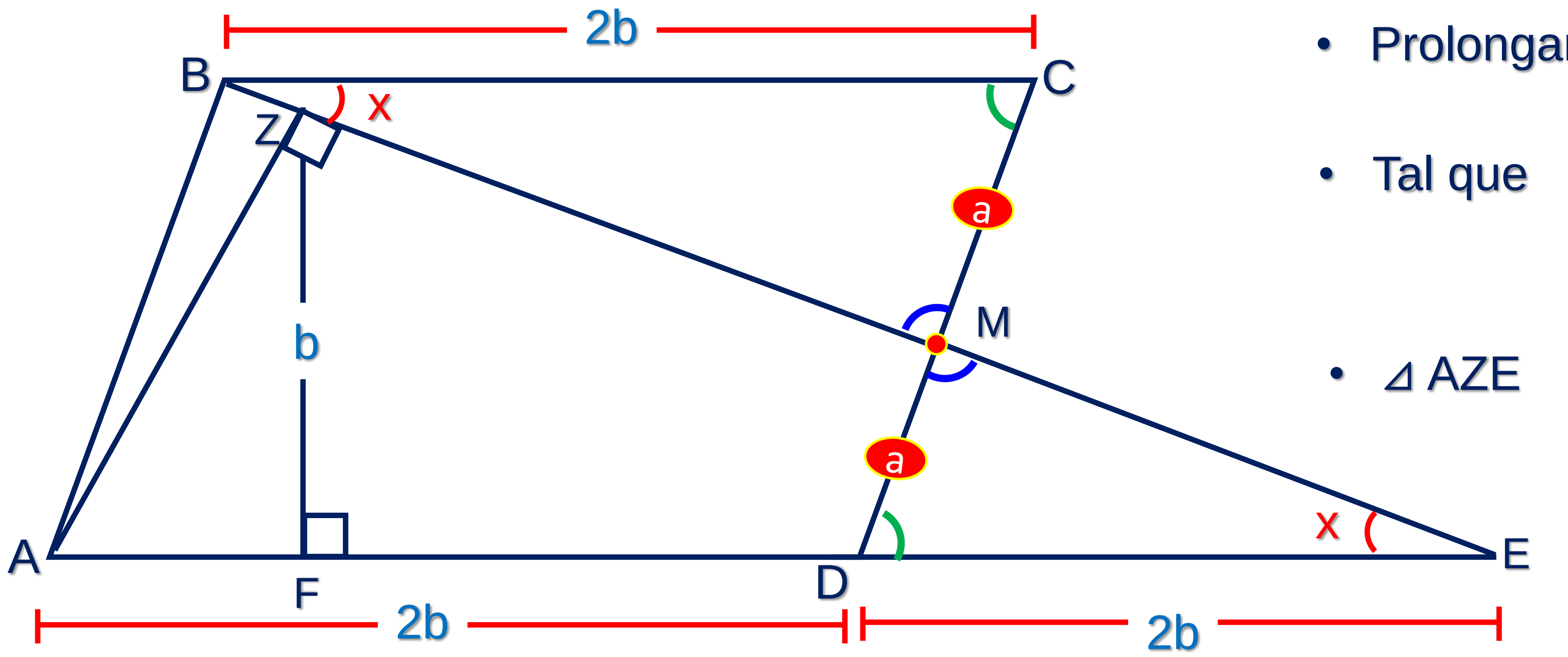
$\therefore$ **MT = 3**

Problema 10

En un paralelogramo ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$, en $\overline{BM}$ se ubica en punto Z tal que $\overline{AZ} \perp \overline{BM}$, luego se traza $\overline{ZF} \perp \overline{AD}$, F ∈ $\overline{AD}$. Si BC = 2ZF, calcule m∢MBC.

RESOLUCIÓN

Piden: la m∢MBC = x



Dato: ABCD es un paralelogramo

- Prolongamos $\overline{BM}$ y $\overline{AD}$ hasta E
- Tal que Δ BCM ≅ Δ EDM

BC = DE = 2b

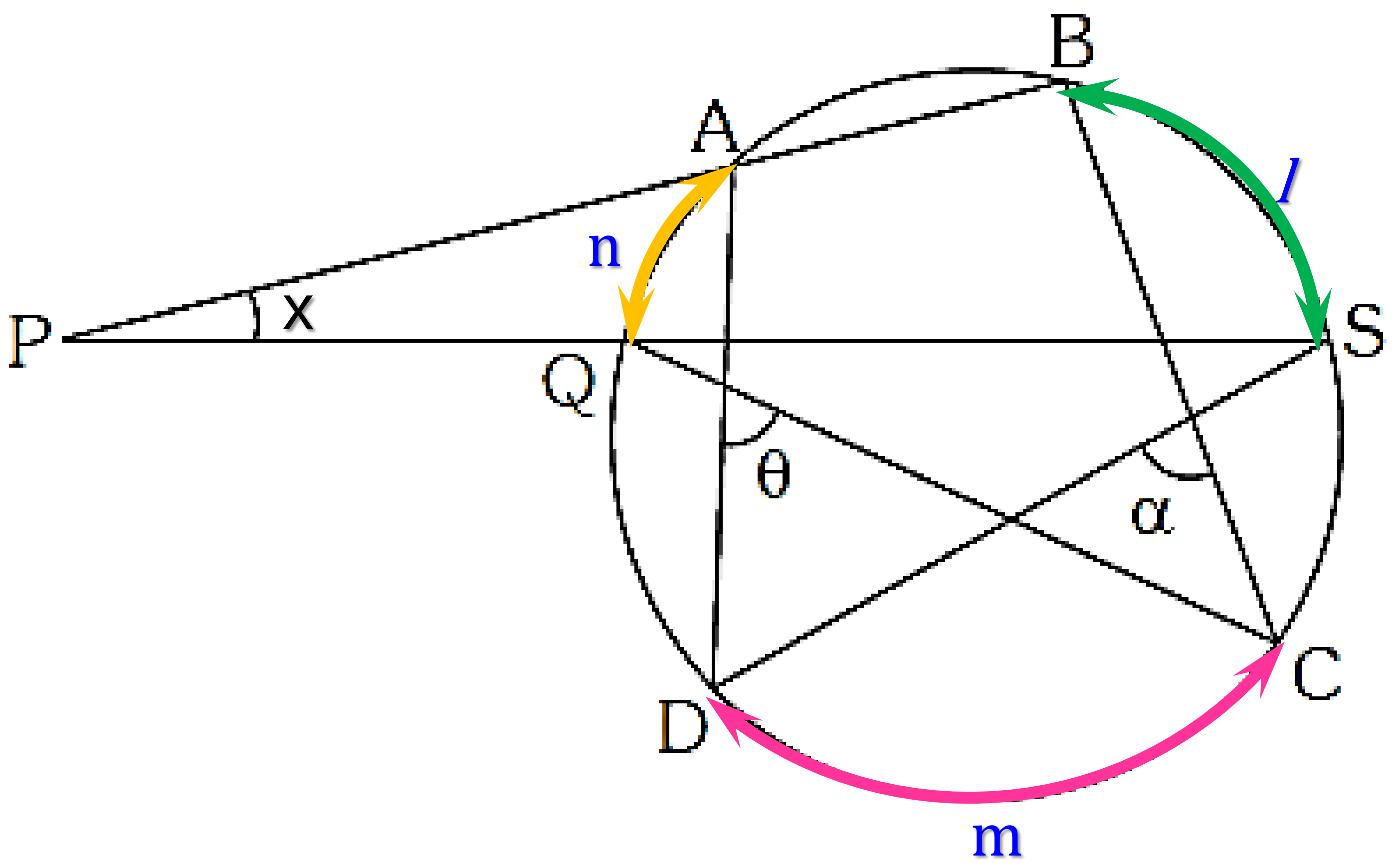
- ⊿ AZE (Notable 15° y 75°)

$\therefore$ **x = 15**

Problema 11 **En la figura mostrada, calcule el valor de x en términos de α y θ.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de x



- Por ángulo exterior $x = \frac{l - n}{2}$
- Por ángulo interior $\theta = \frac{n+m}{2}$

$\alpha = \frac{l+m}{2}$ (-)

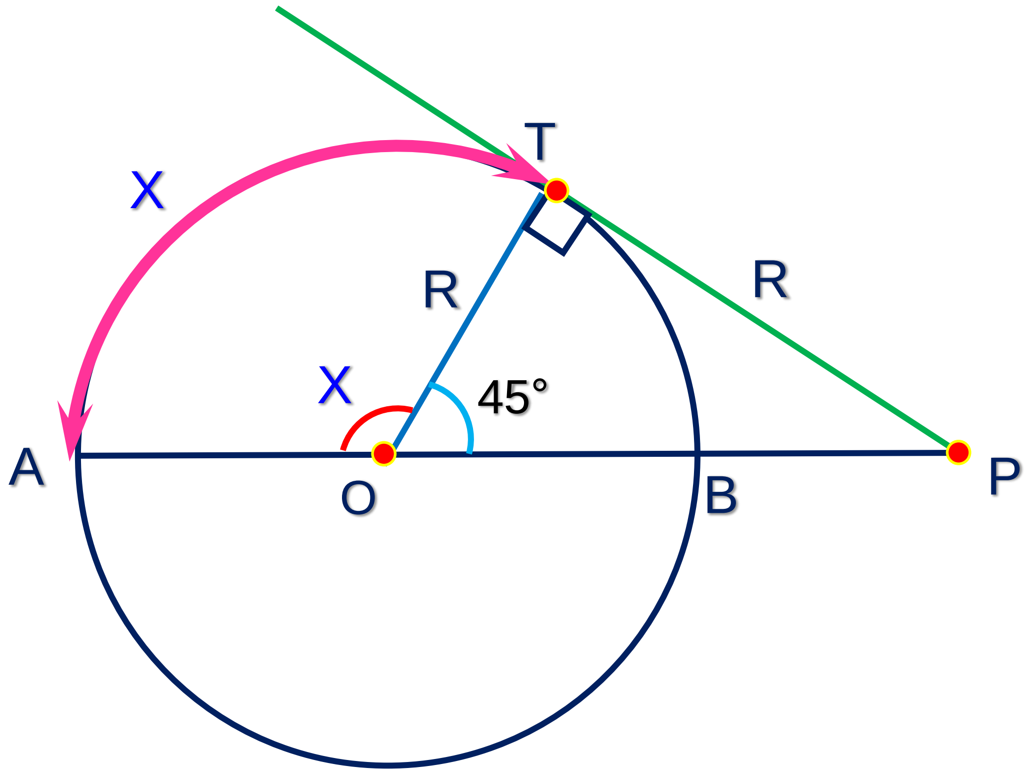
$$\alpha - \theta = \frac{l-n}{2}$$

$\boxed{\therefore\ x = \alpha - \theta}$

Problema 12 En una circunferencia de centro O, se prolonga el diámetro $\overline{AB}$ hasta el punto P y se traza la tangente $\overline{PT}$. Si $\overline{PT}$ tiene la misma longitud que el radio, calcule la medida de $\overset{\frown}{AT}$.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de $\overset{\frown}{AT} = X$



Dato: TP = R

- Por ángulo central

$m\sphericalangle AOT = m\overset{\frown}{AT} = x$

- ⊿ TOP (Notable 45° y 45°)

$m\sphericalangle TOP = 45°$

- Del gráfico O es cetro

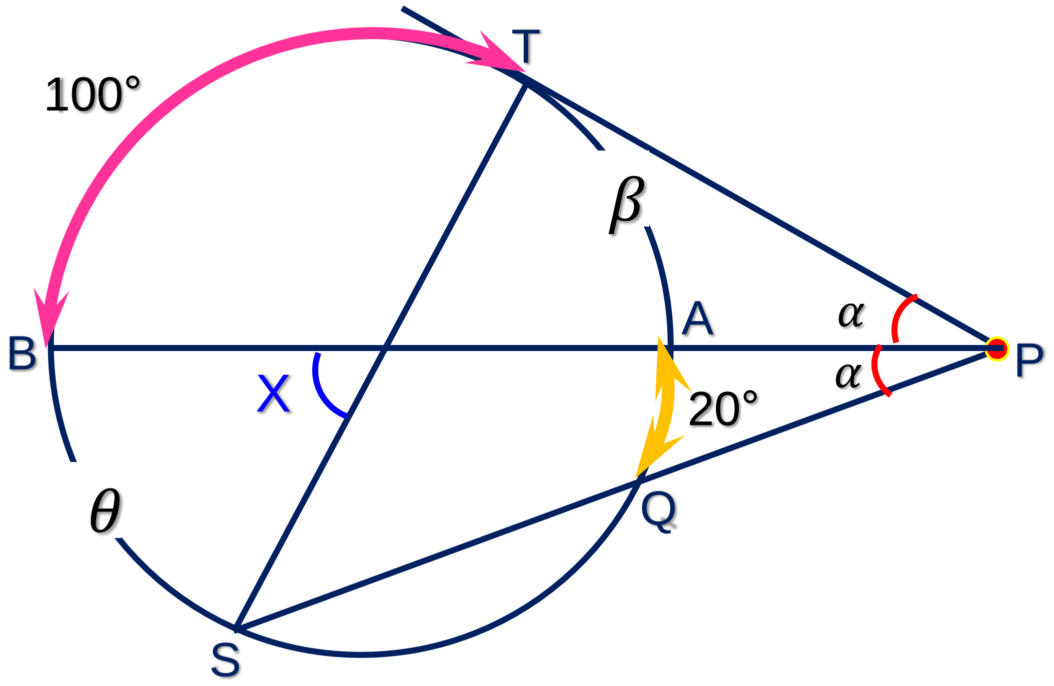
$X + 45° = 180°$

$\boxed{\therefore\ x = 135°}$

Problema 13 Una circunferencia es tangente a un lado del ángulo TPS en el punto T y secante al otro lado en los puntos Q y S, Q ∈ $\overline{PS}$, la bisectriz de dicho ángulo interseca a la circunferencia en los puntos A y B, A ∈ $\overline{PB}$. Si m$\overset{\frown}{AQ}$ = 20° y m$\overset{\frown}{BT}$ = 100°, calcule la medida del ángulo que determinan $\overline{PB}$ y $\overline{TS}$.

RESOLUCIÓN

Piden: Medida del ángulo que determina $\overline{PB}$ y $\overline{TS}$ = x



- Por ángulo interior $x = \dfrac{\theta+\beta}{2}$ . . . (1)

- Por ángulo exterior
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{100° - \beta}{2} \\ \alpha = \dfrac{\theta - 20°}{2} \end{cases}$$

➡ $\theta + \beta = 120°$ . . . (2)

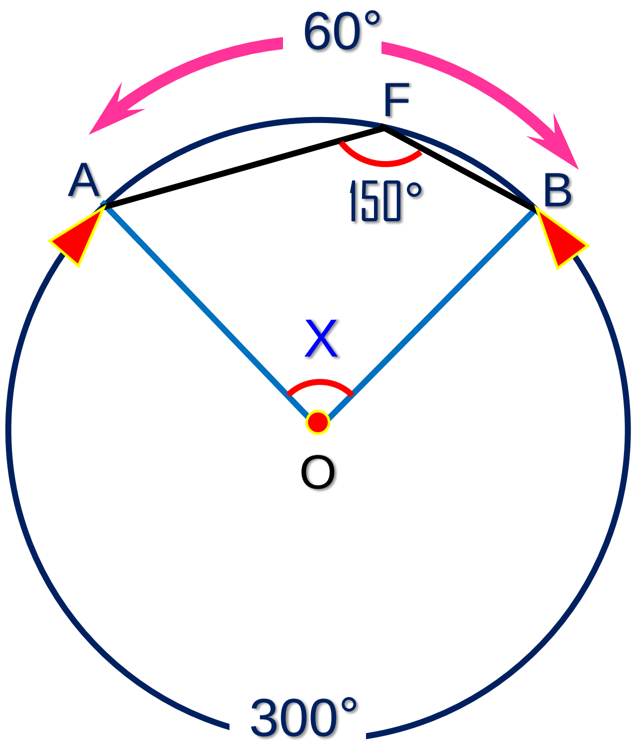
Reemplazo (2) en (1) $x = \dfrac{120°}{2}$

$\boxed{\therefore\ x = 60°}$

Problema 14 $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de una circunferencia de centro O. Sobre el menor arco $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto F, tal que el ángulo AFB mide 150°. Calcule la medida del ángulo AOB.

RESOLUCIÓN

Piden: La $m\sphericalangle AOB = x$



- Por ángulo inscrito:

$$m\,\overset{\frown}{AT} = 300°$$

- En la circunferencia:

$$300° + m\,\overset{\frown}{AFB} = 360°$$

$$m\,\overset{\frown}{AFB} = 60°$$

- Por ángulo central:

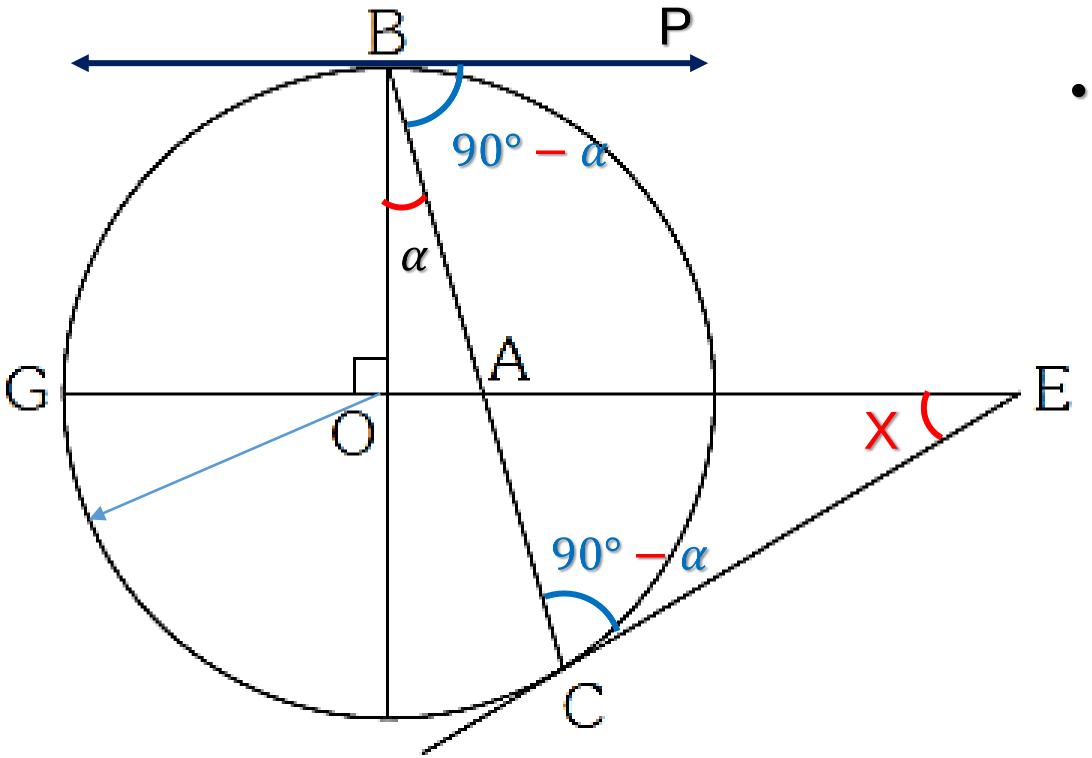
$$\therefore\ x = 60°$$

Problema 15 **En la figura se muestra una circunferencia tal que m∢OBA = α y $\overline{EC}$ es tangente en C. Halle la medida del ángulo GEC.**

RESOLUCIÓN

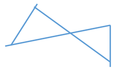
Dato O es el centro

Piden: la m∢GEC = x



- Trazar la recta BP tangente a la circunferencia en B
- Por Teorema:

$$m \measuredangle PBC = m \measuredangle BCE = 90° - \alpha$$

- Por Teorema: En  BOEC

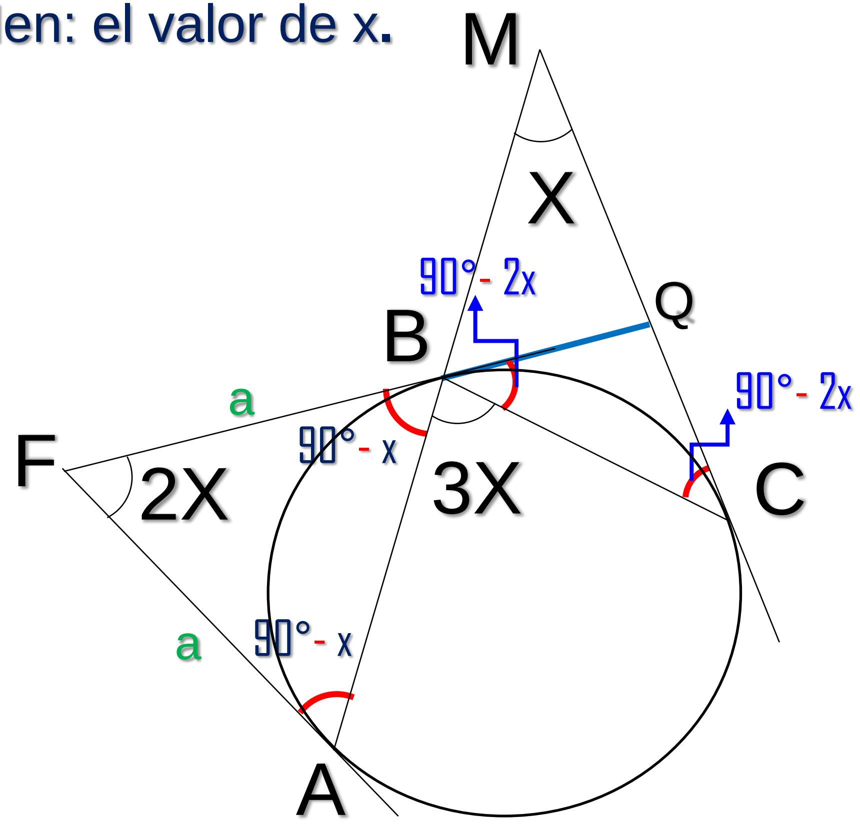
$$90° + \alpha = 90° - \alpha + x$$

$$\therefore\ x = 2\alpha$$

Problema 16 **En la figura se muestra una circunferencia tal que A, B y C son puntos de tangencia. Calcule *x*.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de x.



Dato: A, B, C, D son puntos de tangencia

- Por Teorema:

  AF = FB

  m ∢ FAB = m ∢ FBA = $90° - x$

- En B:

  m ∢ QBC = $90° - 2\alpha$

- Por Teorema:

  m ∢ QBC = m ∢ BCM = $90° - 2\alpha$

- En el Δ BMC (Áng exterior)

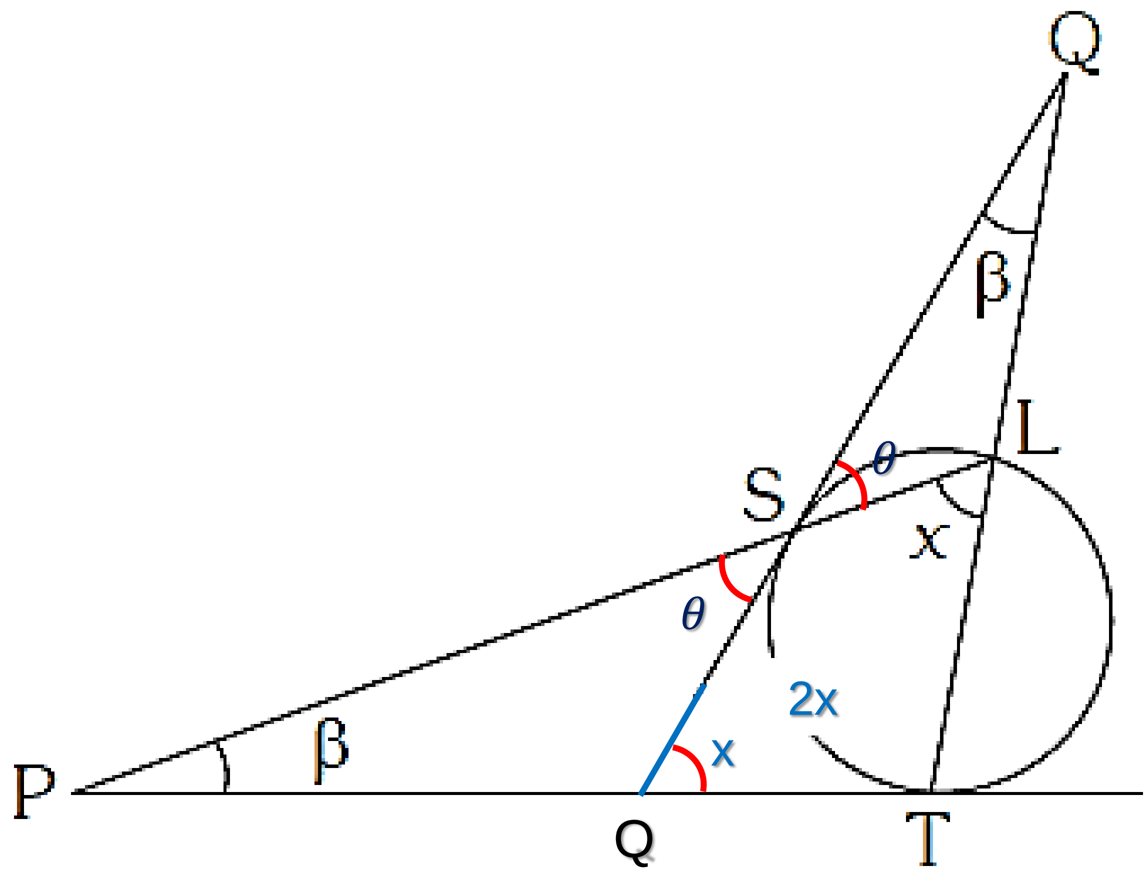
  3x = x + 90°- 2x

$\therefore$ **x = 22,5°**

Problema 17 **En la figura, T y S son puntos de tangencia. Halle el valor de *x*.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de x.



Dato: S, T son puntos de tangencia

- Del gráfico

$$\theta + \beta = x$$

- Por ángulo inscrito:

$$m \overset{\frown}{ST} = 2x$$

- Por Teorema:

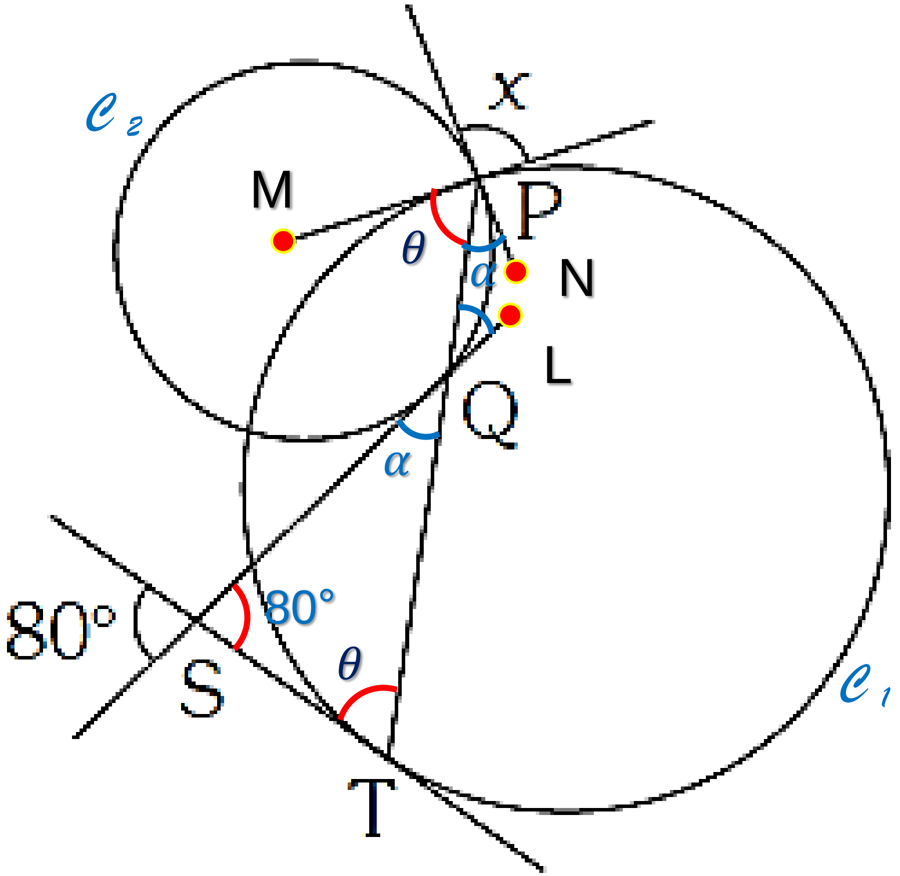
$$x + 2x = 180°$$

$$\therefore\ x = 60°$$

Problema 18 **En la figura; P, Q y T son puntos de tangencia. Halle el valor de *x*.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de x.



Dato: P, Q, T son puntos de tangencia

- En $\mathscr{C}_1$ Por Teorema:

$$m \sphericalangle MPQ = m \sphericalangle STQ = \theta$$

- En $\mathscr{C}_2$ Por Teorema:

$$m \sphericalangle NPQ = m \sphericalangle LQP = \alpha$$

- En el Δ SQT

$$80° + \alpha + \beta = 180°$$

$$\alpha + \beta = 100°$$

- Del gráfico en P

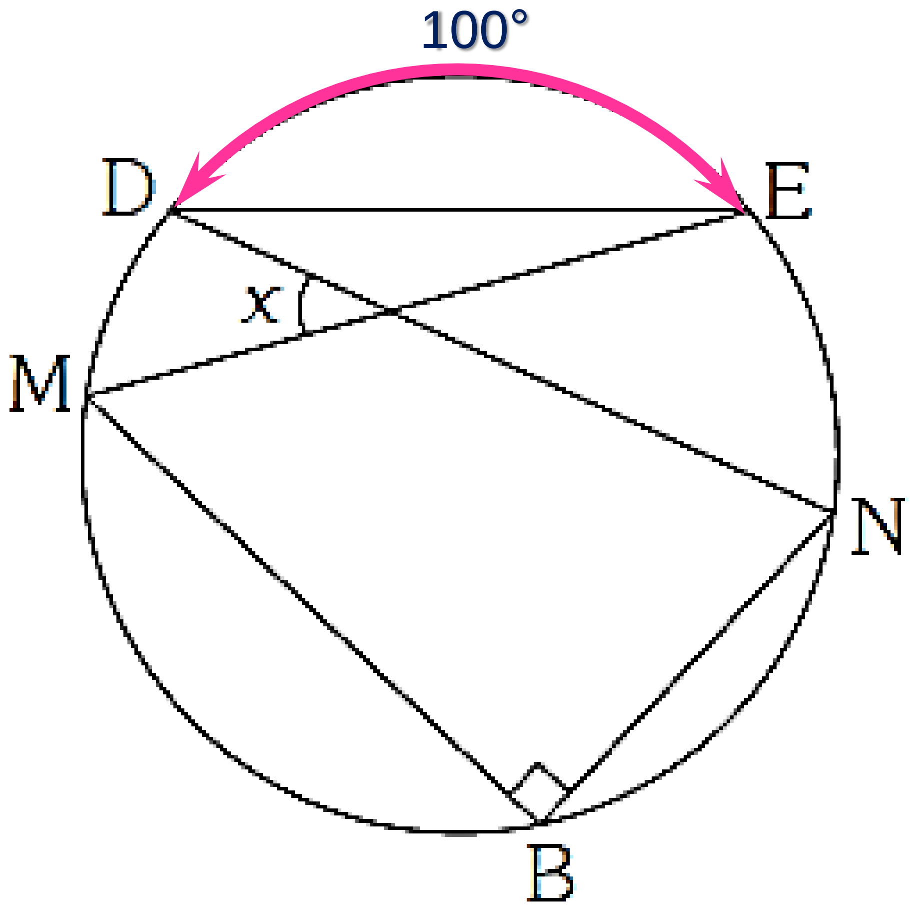
$$x = \alpha + \beta$$

$$\boxed{\therefore\ x = 100°}$$

Problema 19 En la figura, m $\overset{\frown}{DE}$ = 100°. Halle el valor de *x*.

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de x.



- Por ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{MBN} = 180°$$

$$\Rightarrow m\overset{\frown}{MD} + m\overset{\frown}{EN} = 80°$$

- Por ángulo interior:

$$x = \frac{m\overset{\frown}{MD} + m\overset{\frown}{EN}}{2}$$

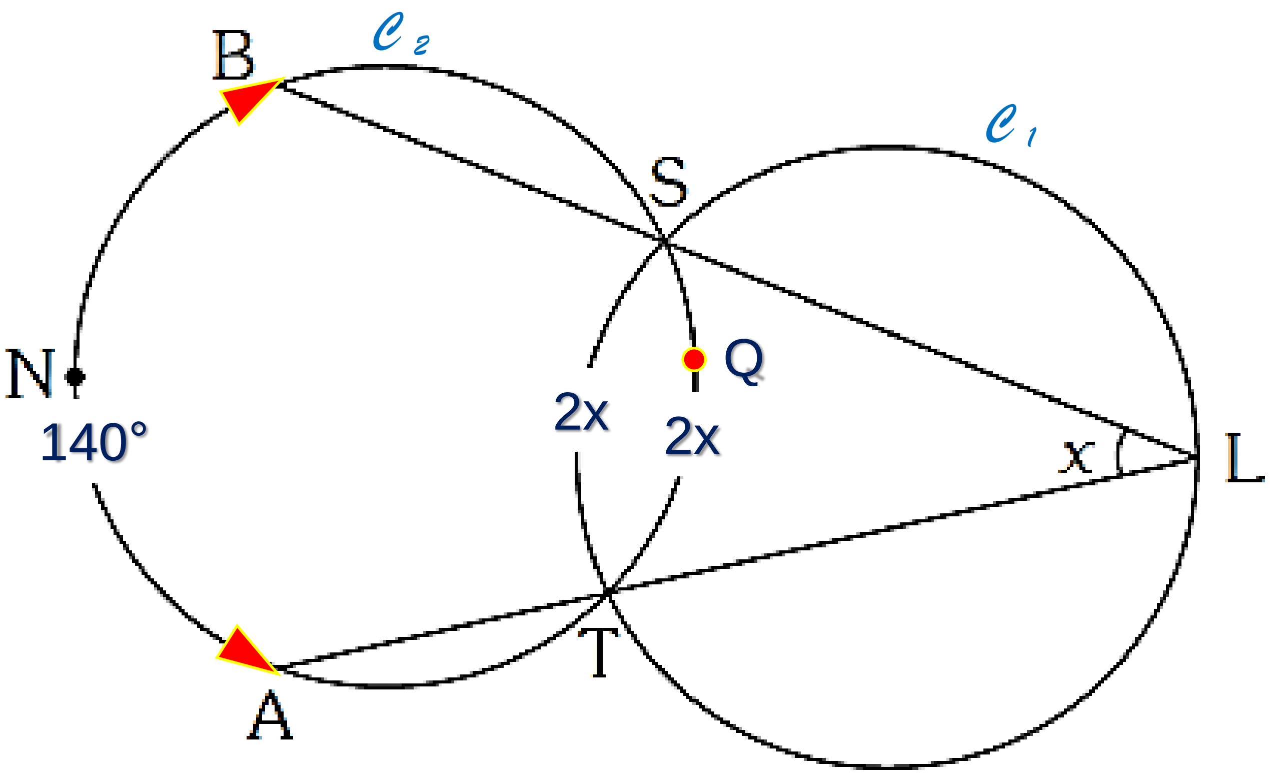
$$x = \frac{80°}{2}$$

$$\therefore\ x = 40°$$

Problema 20 **En la figura, las circunferencias son congruentes y $m\overset{\frown}{ANB} = 140°$. Halle el valor de *x*.**

RESOLUCIÓN

Piden: el valor de *x*.



Dato: Las circunferencias son congruentes

- En $\mathcal{C}_1$ por Ángulo inscrito:

$$m\overset{\frown}{ST} = 2x$$

- Por Teorema:

$$m\overset{\frown}{ST} = m\overset{\frown}{SQT} = 2x$$

- En $\mathcal{C}_2$ por Ángulo Exterior:

$$x = \frac{140° - 2x}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ x = 35°}$$