ALGEBRA

UNI

CHAPTER 3

Factorización

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

F A C T O R I Z A C I Ó N

DEFINICIÓN

Es la transformación de un polinomio en el producto de dos o más factores primos.

Ejemplo

$$P_{(x)} = x^2 - 4 = \underbrace{(x+2).(x-2)}_{factorización}$$

Factores primos:

$$\begin{cases} x+2 \\ x-2 \end{cases}$$

FACTOR DE UN POLINOMIO

Un polinomio $f(x)$ *de grado no nulo, es considerado factor de otro polinomio* $P(x)$ *si existe un único polinomio* $q(x)$ *tal que:*

$$P(x) \equiv f(x).\,q(x)$$

es decir, la división de $P(x)$ *entre* $f(x)$ *es exacta.*

Ejemplo

$f(x) = x + 2$ *es un factor de* $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

por que: $$P(x) \equiv f(x).\,(x+1).\,(x+3)$$

FACTOR PRIMO DE UN POLINOMIO

Es un factor irreductible sobre un determinado campo.

Ejemplo

$P(x) = x^4 - 4$; *no es irreductible en* $\mathbb{Q}$ *por que*

$P(x) = (x^2 + 2).(x^2 - 2)$

$F(x) = x^2 - 2$; *es irreductible en* $\mathbb{Q}$ *, pero no en* $\mathcal{R}$

puesto que: $F(x) = (x + \sqrt{2}).(x - \sqrt{2})$

$G(x) = x^2 + 2$; *es irreductible en* $\mathbb{Q}$ *y* $\mathcal{R}$ *, pero no en* $\mathbb{C}$

puesto que: $G(x) = (x + \sqrt{2}\,i).(x - \sqrt{2}\,i)$; $i = \sqrt{-1}$

Criterios para Factorizar

1) Por Factor Común

Ejemplo:

$$P_{(x;y)} = x^4y^2 + 2x^2y^2$$

Factor común $x^2 . y^2$

$$P_{(x;y)} = x^2 . y^2 . (x^2+2).$$

Factores primos:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ x^2 + 2 \end{array} \right.$$

2) Por agrupación de términos

Ejemplo:

$$P_{(x;y)} = \underbrace{x^2 + xy} + \underbrace{zx + zy}$$

$$x(x+y) + z(x+y)$$

Factor común: $(x+y)$

$$P_{(x;y)} = (x+y).(x+z)$$

Factores primos:

$x + y$

$x + z$

3)Por Productos Notables

Binomio al cuadrado:

$$\boxed{x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2}$$

Diferencia de cuadrados:

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)}$$

Suma de cubos:

$$\boxed{x^3 + y^3 = (x + y).(x^2 - xy + y^2)}$$

$$x^3 + 1 = (x + 1).(x^2 - x + 1)$$

Diferencia de cubos:

$$\boxed{x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + xy + y^2)}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1).(x^2 + x + 1)$$

Ejemplos ***Factorice:***

$$25x^2 + 20x + 4 \longrightarrow (5x + 2)^2$$

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 \longrightarrow (2x - 3y)^2$$

$$x^3 + 64 \longrightarrow (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$$

$$x^3 - 125 \longrightarrow (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$x^4 - 1 \longrightarrow (x^2 + 1).(x + 1).(x - 1)$$

$$x^4 + x^2 + 1 \longrightarrow (x^2 + x + 1).(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 + 4 \longrightarrow (x^2 + 2x + 2).(x^2 - 2x + 2)$$

Criterio de las aspas

Aspa Simple

Se utiliza para factorizar polinomios de la forma:

$$\boldsymbol{P(x;y) = Ax^{2n} + Bx^n . y^m + Cy^{2m}}$$

$$\boldsymbol{P(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C}$$

Ejemplo

$$P(x) = 20x^2 \mathbf{- 13x} - 21$$

$$\begin{array}{lcr} 5x & & -7 \\ 4x & & +3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +15x \\ -28x \\ \hline \mathbf{-13x} \end{array}$$

$$\boldsymbol{P(x) = (5x - 7).(4x + 3)}$$

Ejemplo

$$P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & -9 \\ x^2 & & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9x^2 \\ -4x^2 \\ \hline -13x^2 \end{array}$$

$$(x^2-9)(x^2-4)$$

$$P(x) = (x+3).(x-3).(x+2).(x-2)$$

Factorice por aspa simple

$$P(x) = 12x^2 - 23x - 24$$

$$G(x) = x^4 - 26x^2 + 25$$

$$H(x) = x^6 + 7x^3 - 8$$

$$G(x) = abx^2 - (3a-2b)x - 6$$

$$Q(x) = (x^2+x)^2 - 18(x^2+x) + 72$$

Aspa doble

Se aplica generalmente a los polinomios que presentan la forma:

$$P(x;y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Ejemplo ***factorice:***

$$P(x;y) = 2x^2 + 13xy + 15y^2 + 5x + 32y - 7$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & +3y & +7 \\ x & +5y & -1 \end{array}$$

$$P(x;y) = (2x + 3y + 7).(x + 5y - 1)$$

Ejemplo

factorice: $G(x;y) = 10x^2 - 7xy - 6y^2 - 18x + 25y - 4$

Aspa doble especial

Se aplica generalmente a los polinomios que presentan la forma:

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^{n} + E$$

Ejemplo

$$P(x) = x^4 + 9x^3 + 25x^2 + 22x + 6$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & +5x & +3 \\ x^2 & +4x & +2 \end{array}$$

$Suma: +3x^2 + 2x^2 = +5x^2$ $\qquad$ $falta: +25x^2 - 5x^2 = +20x^2$

$$P(x) = \left(x^2 + 5x + 3\right).\left(x^2 + 4x + 2\right)$$

Ejemplo ***factorice:***

$$P(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$$

$$P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

Ejemplo ***factorice:***

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 19x - 6$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & -5x & & +2 \\ x^2 & & +2x & & -3 \end{array}$$

$$S = -3x^2 + 2x^2 = -x^2$$

$$F = -10x^2$$

$$P(x) = \left(x^2 - 5x + 2\right).\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

$$P(x) = \left(x^2 - 5x + 2\right).(x+3).(x-1)$$

MÉTODO DE DIVISORES BINOMIOS

Se aplica para factorizar polinomios de grado superior, siempre y cuando admita por lo menos un factor lineal.

RAÍZ DE UN POLINOMIO (cero del polinomio)

Dado un polinomio $P(x)$, si $P(a) = 0$ entonces "a" es una raíz de $P(x)$ también $(x - a)$ es un factor de dicho polinomio.

Ejemplo (para polinomio mónico)

factorice: $$P(x) = x^3 - 5x^2 - 19x - 10$$

Se busca un valor que anule al polinomio (cero del polinomio) y estos posibles valores estan dados por los divisores del valor absoluto del T.I.

divisores de $|-10| = 10 \longrightarrow \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 5;\ \pm 10$

Los divisores se toman con doble signo.

aplicamos la división por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -5 & -19 & -10 \\ -2 & \downarrow & -2 & 14 & 10 \\ \hline & 1 & -7 & -5 & 0 \end{array}$$

el polinomio se anulo para $x=-2$; *es decir* $P(-2)=0$

luego un factor del polinomio es $(x+2)$

Luego: $P(x) = (x+2).(x^2 - 7x - 5)$

Ejemplo *factorice*: $P(x) = x^3 + x^2 - 22x + 8$

$H(x) = x^3 - 13x + 12$

$G(x) = x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 34x^2 + 23x - 6$

Ejemplo *(polinomio no mónico)*

factorice: $$P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x + 3$$

para este caso los posibles ceros son: $\pm\left\{\dfrac{Divisores\ de\ 3}{Divisores\ de\ 2}\right\}$

$$= \pm\left\{\frac{1;3}{1;2}\right\} = \pm\left\{1;3\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}$$

El polinomio posiblemente se anule para algunos de estos valores.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 7 & -17 & 3 \\ x=\dfrac{3}{2} & \downarrow & 3 & 15 & -3 \\ \hline & 2 & 10 & -2 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 - 10x - 2) \longrightarrow P(x) = (2x - 3)(x^2 - 5x - 1)$$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. Factorice

$Q(x;y) = x^{a+b} - (yx)^b + x^a - y^b + (xy)^a - y^{a+b}$ e indique un factor primo.

RESOLUCIÓN

$$\underline{x^a . x^b} - x^b . y^b + \underline{x^a} - y^b + \underline{x^a . y^a} - y^a . y^b$$

agrupamos y extraemos factor común

$$x^a . \underline{(x^b + 1 + y^a)} - y^b . \underline{(x^b + 1 + y^a)}$$

$$Q(x;y) = (x^b + y^a + 1).(x^a - y^b)$$

Hay 2 factores primos.

$$\boxed{(x^a - y^b)}$$

2. Factorice

$$P(x) = (x^2 + 2x)^2 - (2x + 4)^2$$

e indique el número de factores primos.

Recordar:

$$(A)^2 - (B)^2 = (A + B).(A - B)$$

RESOLUCIÓN

$$(x^2 + 2x)^2 - (2x + 4)^2$$

$$(x^2 + 2x + 2x + 4).(x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2x} - 4)$$

$$(x^2 + 4x + 4).(x^2 - 4) = (x + 2)^2.(x + 2).(x - 2)$$

$$P(x) = (x + 2)^3.(x - 2)$$

Hay 2 factores primos

3. Si $(x+1)$ es uno de los factores del polinomio

$$P(x) = x^4 + ax^3 - bx^2 + cx - 1$$

entonces, ¿cuál es el valor de $a + b + c$?

RESOLUCIÓN

Como $(x+1)$ *es un factor de* $P(x)$

entonces la división:

$$\frac{P(x)}{x+1} \quad ; \quad \textit{es exacta}$$

es decir; $P(-1) = 0$

$$P(-1) = (-1)^4 + a(-1)^3 - b(-1)^2 + c(-1) - 1 = 0$$

$$\cancel{1} + a(-1) - b(1) - c - \cancel{1} = 0$$

$$-a - b - c = 0$$

todo por -1

$$\boxed{a + b + c = 0}$$

4. Halle un factor primo del polinomio

$$P(a;b;c) = a^2b^3 + ab^3c + a^2b^2c + ab^4$$

RESOLUCIÓN

$$extraemos\ factor\ común:$$

$$a.b^2.\ (ab + bc + ac + b^2)$$

$$agrupando\ \ convenientemente:$$

$$a.b^2.[b(a+b) + c(a+b)]$$

$$a.b^2.\ (a+b).(b+c)$$

$$Los\ 4\ factores\ primos\ son:$$

$$\begin{cases} a \\ b \\ a+b \\ b+c \end{cases}$$

$$\boxed{b + c}$$

5. Factorice el polinomio

$$P(x) = \underline{(x-y)}\underline{(x-3y)}\underline{(x+4y)}\underline{(x+6y)} + 48y^4$$

e indique el número de factores primos.

RESOLUCIÓN

múltiplicando convenientemente

$$(x^2+3xy-4y^2).(x^2+3xy-18y^2)+48y^4$$

Hacemos el cambio: $x^2+3xy=a$

$$(a-4y^2).(a-18y^2)+48y^4$$

$$a^2-22ay^2+\underline{72y^4+48y^4}$$

$$a^2-22ay^2+120y^4$$

$$\begin{array}{lcr} a & & -10y^2 \\ a & & -12y^2 \end{array}$$

$$(a-10y^2).(a-12y^2)$$

$$(x^2+3xy-10y^2).(x^2+3xy-12y^2)$$

$$(x+5y).(x-2y).(x^2+3xy-12y^2)$$

Hay 3 factores primos

6. Si P(x) es un polinomio factorizable definido por

$$P(x) = x^5 + 3x^3 + x - 2$$

entonces, la suma de coeficientes de un factor primo es

RESOLUCIÓN

Sumando y restando "x^2"

$$x^5 + 3x^3 + x - 2 + x^2 - x^2$$

$$\underline{x^5 - x^2} + \underline{3x^3 - 3} + x^2 + x + 1$$

$$x^2(x^3 - 1) + 3(x^3 - 1) + x^2 + x + 1$$

Recordar:

$$x^3 - 1 = (x - 1).(x^2 + x + 1)$$

extraemos factor común

$$(x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 3(x - 1) + 1]$$

$$(x^2 + x + 1).(x^3 - x^2 + 3x - 3 + 1)$$

$$(x^2 + x + 1).\ (x^3 - x^2 + 3x - 2)$$

$1 + 1 + 1 = 3$ $\qquad$ $1 - 1 + 3 - 2 = 1$

$$\boxed{3}$$

7. Indique el número de factores primos binomios de

$$P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x - 6$$

RESOLUCIÓN

agrupando convenientemente

$$(x^5 + x^2) + (x^4 + x) - (6x^3 + 6)$$

$$x^2.(x^3 + 1) + x.(x^3 + 1) - 6.(x^3 + 1)$$

$$(x^3 + 1).(x^2 + x - 6)$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1).(x + 3).(x - 2)$$

Hay en total 4 factores primos pero 3 de ellos son factores primos binomios y solo uno es factor primo trinomio.

$$\boxed{3}$$

8. Calcule la suma de los factores primos del siguiente polinomio

$$P(x;y) = x^2 + x - y^2 - y + x^2y - xy^2$$

RESOLUCIÓN

agrupando convenientemente

$$\left(x^2 - y^2\right) + (x - y) + \left(x^2y - xy^2\right)$$

$$(x + y).(x - y) + (x - y) + xy.(x - y)$$

extraemos factor común

$$(x - y).(x + y + 1 + xy)$$

factorizando

$$(x - y).(x + 1).(y + 1)$$

Hay 3 factores primos.

$$\sum fact.primos$$

$$= x - \cancel{y} + x + 1 + \cancel{y} + 1$$

$$\boxed{2x + 2}$$

9. Calcule la suma de los factores primos no comunes de los siguientes polinomios

$$P(x) = x^2 + 3x + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$R(x) = x^2 + 5x + 4$$

RESOLUCIÓN

factorizando cada polinomio por el método del aspa simple

$$P(x) = (x+2).(x+1)$$

$$Q(x) = (x+3).(x+1)$$

$$R(x) = (x+4).(x+1)$$

$$piden: \ + \begin{cases} x+2 \\ x+3 \\ x+4 \end{cases}$$

$$3x+9$$

$$\boxed{3(x+3)}$$

$S = -(p)x^2$

$F = -(1)x^2$

10. Luego de factorizar

$$P(x) = x^4 - (p+1)x^2 + (p-2p^2)x + p^3 - p^4$$ calcule la suma de sus factores primos.

RESOLUCIÓN *Aplicando el aspa doble especial*

$$x^4 + 0x^3 - (p+1)x^2 + (p-2p^2)x + p^3 - p^4$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & -x & -p+p^2 \\ x^2 & +x & -p^2 \end{array}$$

$$(x^2 - x - p + p^2).(x^2 + x - p^2).$$

La suma de factores primos es: $2x^2 - p$

11. Luego de factorizar

$$P(x;y)=(2x-y)^4+64$$

podemos afirmar que

RESOLUCIÓN

Hacemos: $2x-y=a$

$$a^4+64$$

Sumamos y restamos: $16a^2$

$$\underbrace{a^4+64+16a^2}-16a^2$$

$$(a^2+8)^2-(4a)^2$$

$$(a^2+8+4a).(a^2+8-4a)$$

$$(a^2+4a+8).(a^2-4a+8)$$

reemplazando $a=2x-y$

$$(4x^2-4xy+y^2+8x-4y+8)$$

$$(4x^2-4xy+y^2-8x+4y+8)$$

2 *factores primos*

c) *hay dos factores primos*

12. Factorice e indique la suma de coeficientes de uno de sus factores.

$$M(x;y) = x^3 + \underline{9y^3} + 3xy(x+y)$$

RESOLUCIÓN

$$\underbrace{x^3 + y^3 + 3xy(x+y)}\ + 8y^3$$

$$(x+y)^3 + (2y)^3$$

$$(x+y+2y).\left[(x+y)^2 - (x+y).(2y) + (2y)^2\right]$$

$$(x+3y).\left[x^2 + \cancel{2xy} + y^2 - \cancel{2xy} - 2y^2 + 4y^2\right]$$

$$(x+3y).\left(x^2+3y^2\right)$$

***Recordar*:**

$$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$$

$$(x+3y).\quad (x^2+3y^2)$$

$$1+3=4 \qquad 1+3=4$$

La suma de coeficientes de cualquier factor primo es: $\boxed{4}$

13. Factorice

$$P(x;y;z) = x^4 - x^2y + 5yz^2 - x^2z^2 - 2y^2 - 2z^4$$

luego, calcule la suma de coeficientes de un factor primo.

RESOLUCIÓN

Acomodando y aplicando el aspa simple

$$x^4 - (y + z^2)x^2 - (2y^2 - 5yz^2 + 2z^4)$$

$$\begin{array}{ll} 2y & -z^2 \\ y & -2z^2 \end{array}$$

$$x^4 - (y + z^2)x^2 - (2y - z^2)(y - 2z^2)$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & -(2y - z^2) \\ x^2 & +(y - 2z^2) \end{array}$$

$$(x^2 - 2y + z^2).(x^2 + y - 2z^2)$$

$$1 - 2 + 1 = 0 \qquad 1 + 1 - 2 = 0$$

Hay 2 factores primos y en ambos la suma de coeficientes es cero.

$$\boxed{0}$$

14. Si al factorizar el polinomio

$$P(x) = 8x^2 - cx - 15$$

se obtiene $(8x + a)(bx - 5)$, calcule $a + b + c$.

RESOLUCIÓN

$$8x^2 - cx - 15$$

$$8x \qquad + a$$

$$bx \qquad - 5$$

$Se\ deduce\ que$: $a = -3$

$también\ que$: $b = 1$

además:

$$8.(-5) + a.b = -c$$

$$-40 - 3 = -c$$

$$-43 = -c$$

$$c = 43$$

$$\boxed{a + b + c = 41}$$

15. Calcule la suma de coeficientes de uno de los factores primos del polinomio

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

RESOLUCIÓN

Aplicando el aspa doble especial

$$Suma = +2x^2$$
$$Falta = -3x^2$$

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{array}{lll} x^2 & -3x & +1 \\ x^2 & +x & +1 \end{array}$$

$$(x^2 - 3x + 1).(x^2 + x + 1)$$

$1 - 3 + 1 = -1$ $\quad$ $1 + 1 + 1 = 3$

$$\boxed{-1}$$

16. Si $f(x)$ es uno de los factores primos del polinomio P, evalúe $f(-1)$.

$$P(x) = 6x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 7x + 12$$

RESOLUCIÓN

Aplicando el aspa doble especial

$$\boldsymbol{Suma = 12x^2 + 6x^2 = 18x^2}$$

$$\boldsymbol{Falta = +x^2}$$

$$6x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 7x + 12$$

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 & +\ x & +\ 3 \\ 2x^2 & +\ x & +\ 4 \end{array}$$

$$(3x^2 + x + 3)\,.\,(2x^2 + x + 4)$$

$\boldsymbol{f(-1) = 3 - 1 + 3}$ $\boldsymbol{f(-1) = 2 - 1 + 4}$

$\boldsymbol{f(-1) = 5}$ $\boldsymbol{f(-1) = 5}$

$$\boldsymbol{f(-1) = 5}$$

17. Si el polinomio

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x - 2$$

admite una raíz entera positiva, halle el menor valor de a.

RESOLUCIÓN

Según el método de los divisores binomios los posibles valores que anulan al polinomio son:

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}$$

para $x = 2$

	2	a	3	-2
$+2$	$\downarrow$	4	-2	2
	2	-1	1	0

$$a + 4 = -1 \ \rightarrow \ a = -5$$

es el menor valor que toma "a"

$$\boxed{-5}$$

18. Factorice el siguiente polinomio

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

RESOLUCIÓN

Por divisores binomicos

	1	-4	5	-2
$+1$		1	-3	2
	1	-3	2	0

Como el polinomio se anula para $x = +1$ *tiene como factor a* $(x-1)$

$$(x-1).(x^2 - 3x + 2)$$

$$\begin{array}{cc} x & -1 \\ x & -2 \end{array}$$

$$(x-1).(x-1).(x-2)$$

$$P(x) = (x-1)^2.(x-2)$$

19. Halle el factor primo con menor suma de coeficientes del siguiente polinomio

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$$

RESOLUCIÓN

Por divisores binomicos

	2	7	7	2
-1	$\downarrow$	-2	-5	-2
	2	5	2	0

Como el polinomio se anula para $x = -1$ *tiene como factor a* $(x+1)$

$$(x+1).(2x^2 + 5x + 2)$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +2 \end{array}$$

$$(x+1).(2x+1).(x+2)$$

$1+1=2$ $\quad$ $2+1=3$ $\quad$ $1+2=3$

el factor primo $(x+1)$ *tiene la menor suma de coeficientes.*

$$\boxed{(x+1)}$$

20. Indique cuántos factores primos tiene el siguiente polinomio

$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$$

RESOLUCIÓN

Agrupando convenientemente

$$x^4(x-2) - 13x^2(x-2) + 36(x-2)$$

$$(x-2).(x^4 + 13x^2 + 36)$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & -9 \\ x^2 & & -4 \end{array}$$

$$(x-2).(x^2-9).(x^2-4)$$

$$(x-2).(x+3)(x-3).(x+2).(x-2)$$

$$(x-2)^2.(x+3)(x-3).(x+2)$$

Hay 4 factores primos

$$\left\{\begin{array}{l} (x-2) \\ (x+3) \\ (x-3) \\ (x+2) \end{array}\right.$$

$$\boxed{4}$$