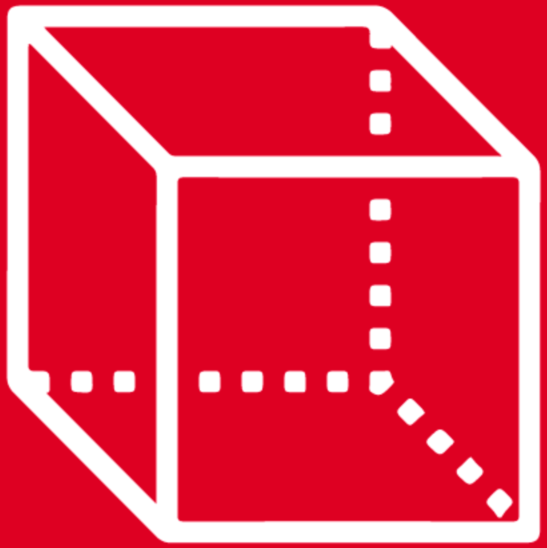
GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

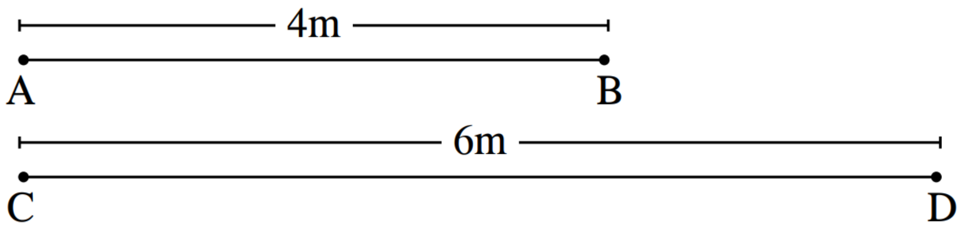
CAPITULO 4 TEORIA



SACO OLIVEROS

SEGMENTOS PROPORCIONALES

RAZON DE SEGMENTOS : Se denomina razón de dos segmentos al cociente de las longitudes de los segmentos expresados en la misma unidad.



En la figura mostrada:

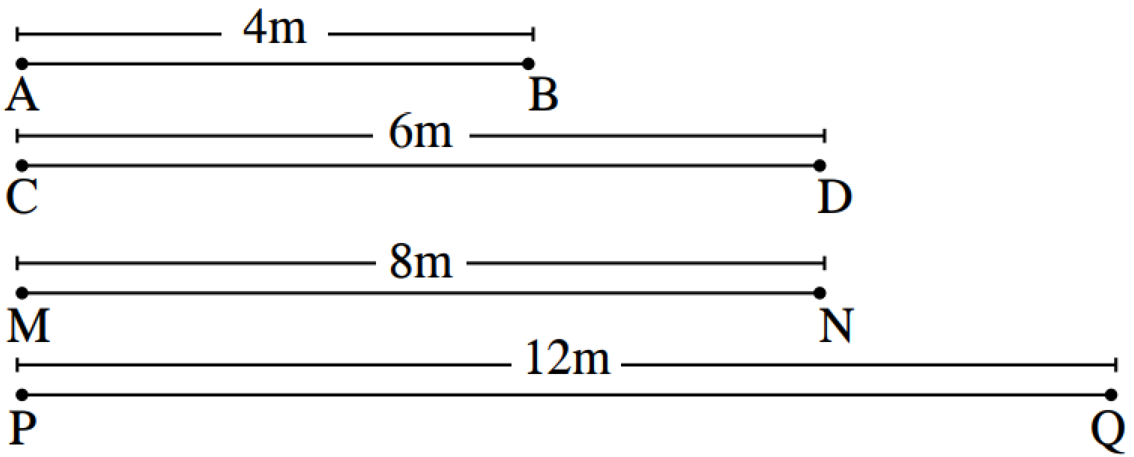
$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

entonces

la razón de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es 2/3

SEGMENTOS PROPORCIONALES

SEGMENTOS PROPORCIONALES : Dos segmentos son proporcionales a otros dos, si tienen la misma razón.



En la figura mostrada:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \frac{MN}{PQ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

entonces

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

PROPIEDADES DE PROPORCIONES

* $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=\frac{a+m}{b+n}=\frac{a-m}{b-n}$ Ejemplo $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=\frac{8+4}{6+3}=\frac{8-4}{6-3}$

* $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{m+n}{m-n}$ Ejemplo $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\rightarrow\frac{8+6}{8-6}=\frac{4+3}{4-3}$

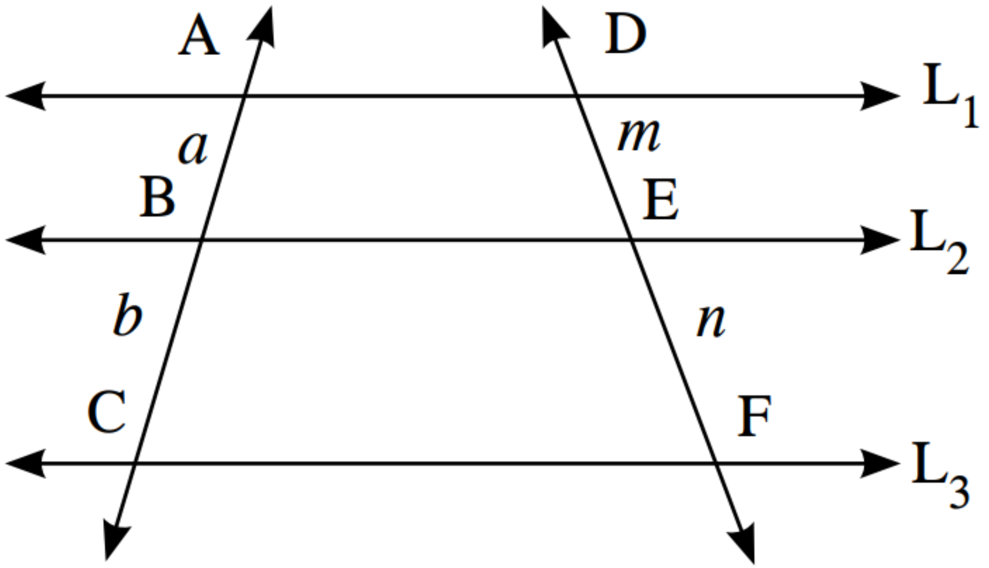
$$\frac{14}{2}=\frac{7}{1}$$

* $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{m+n}{n}$ $\rightarrow\frac{a}{b+a}=\frac{m}{n+m}$

$\rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{m-n}{n}$ $\rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{m}{n-m}$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

TEOREMA DE TALES : Tres o más rectas paralelas determinan en dos rectas secantes o transversales segmentos proporcionales.



En la figura mostrada:

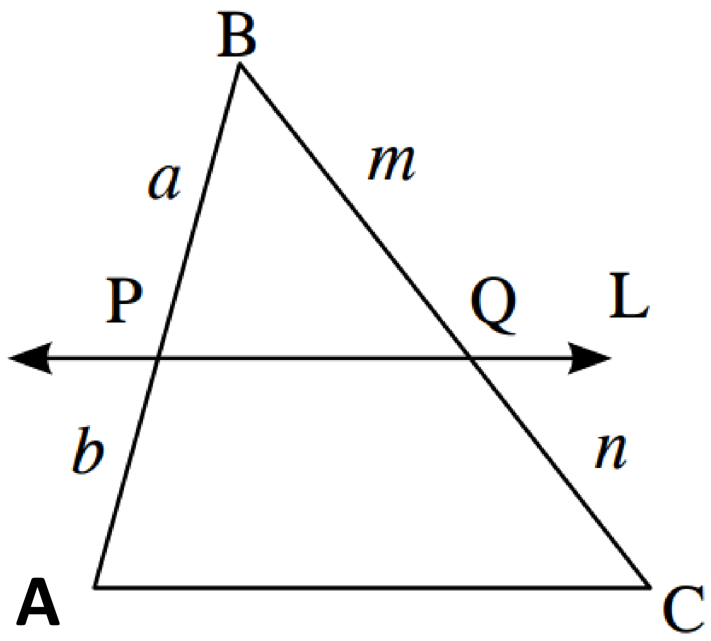
Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$

entonces

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

COROLARIO DE TALES:



En la figura mostrada:

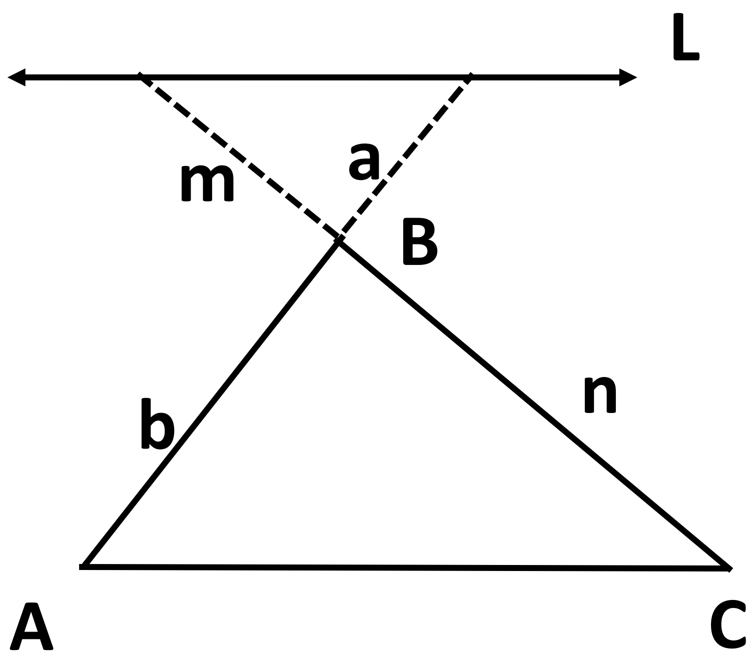
Si $\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$

Entonces

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

COROLARIO DE TALES:



En la figura mostrada:

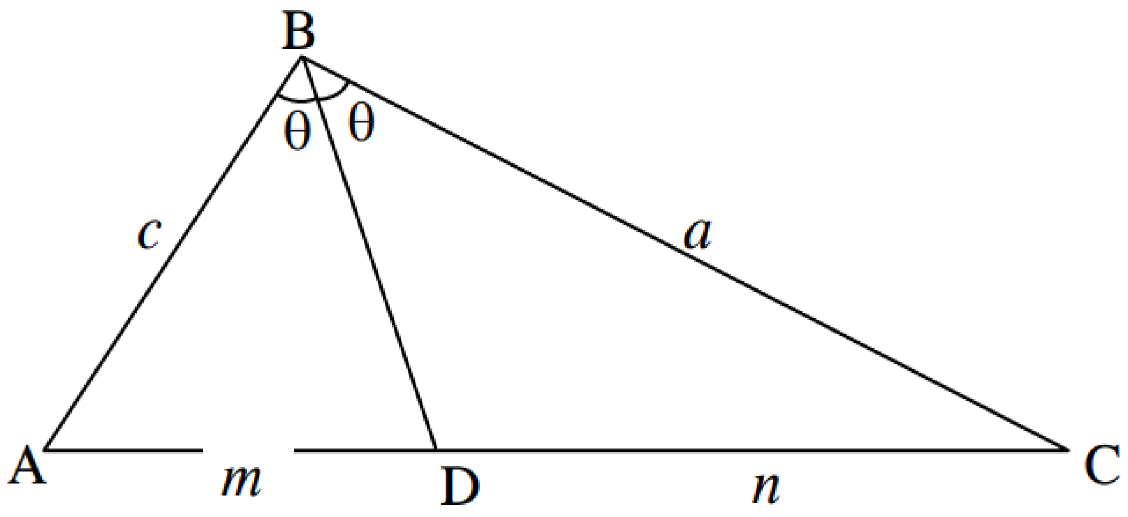
Si $\overleftrightarrow{L} \, // \, \overleftrightarrow{AC}$

Entonces

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR : En todo triángulo la bisectriz interior determina segmentos proporcionales con los lados concurrentes con la bisectriz interior.



En la figura mostrada:

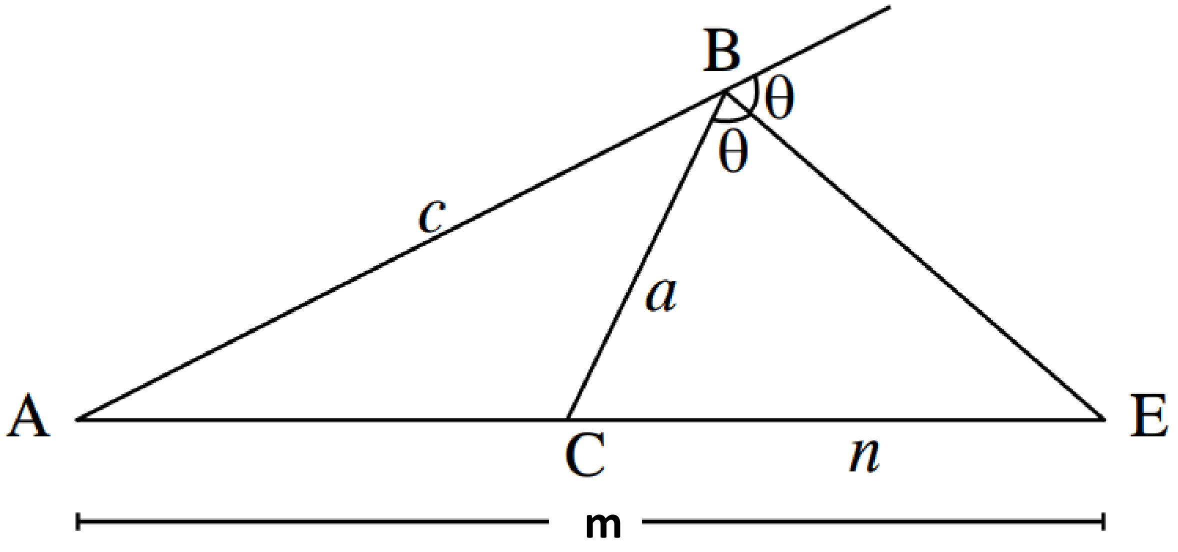
Si $\overline{BD}$: es bisectriz interior,

Entonces

$$\boxed{\frac{c}{a} = \frac{m}{n}}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR : Si en un triángulo se traza la bisectriz exterior, entonces se determinan en la prolongación del lado opuesto segmentos proporcionales a los lados concurrentes con la bisectriz exterior.



En la figura mostrada:

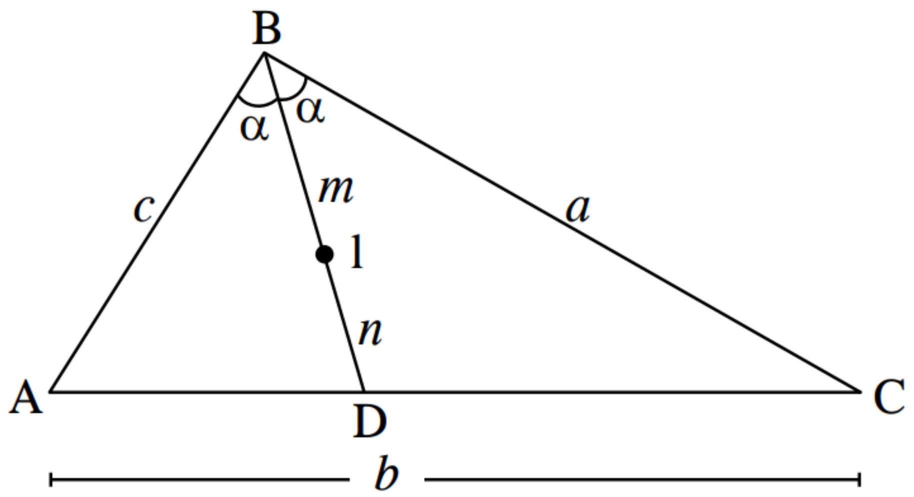
Si $\overline{BE}$: es bisectriz exterior,

Entonces

$$\boxed{\frac{c}{a} = \frac{m}{n}}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

TEOREMA DEL INCENTRO **:En todo triángulo, el incentro determina en la bisectriz interior dos segmentos cuyas longitudes son proporcionales a la suma de las longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz interior y a la longitud del lado al cual es relativo dicha bisectriz interior.**



En la figura mostrada:

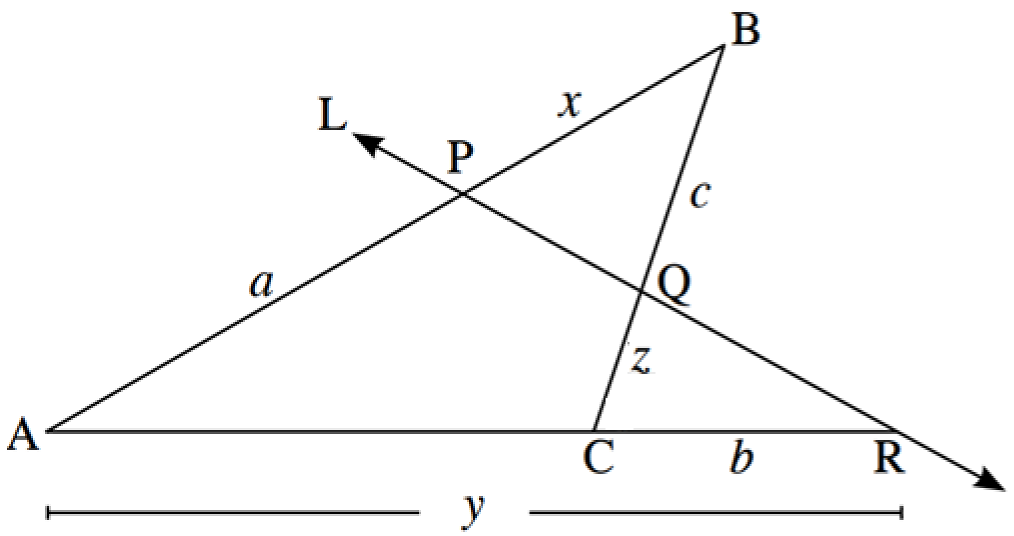
Si I: es incentro del ΔABC

Entonces

$$\frac{m}{n} = \frac{a+c}{b}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

TEOREMA DE MENELAO :Si una recta es secante a dos lados de un triángulo y a la prolongación del tercer lado o a las prolongaciones de los tres lados, entonces el producto de las razones de los segmentos determinados con extremo común es igual a uno.



En la figura mostrada:

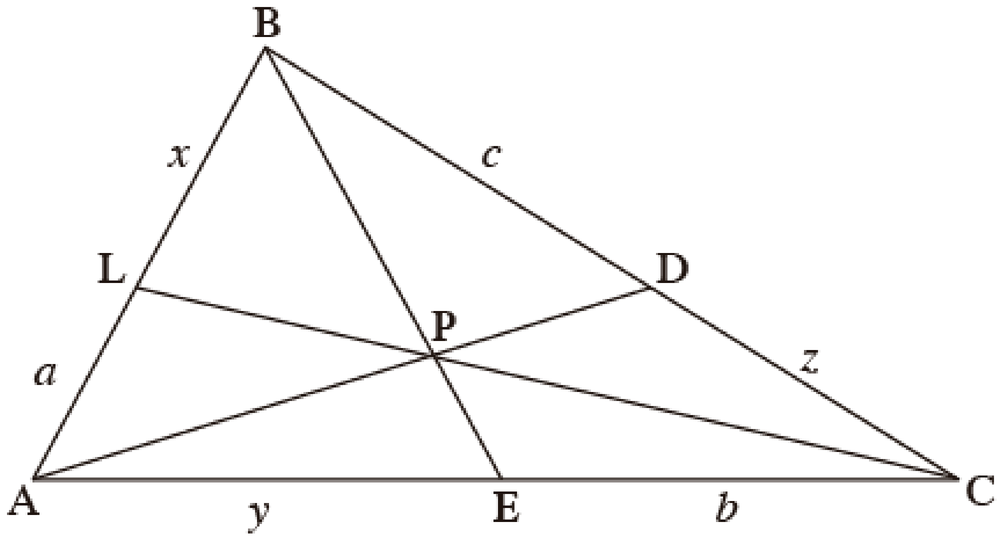
Si $\overleftrightarrow{L}$: es recta secante al ΔABC

Entonces

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}\right) = 1}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

TEOREMA DE CEVA: Si en todo triángulo se trazan tres cevianas concurrentes en un punto interior, entonces los productos de las razones de los segmentos determinados con un extremo común es igual a 1.



En la figura mostrada:

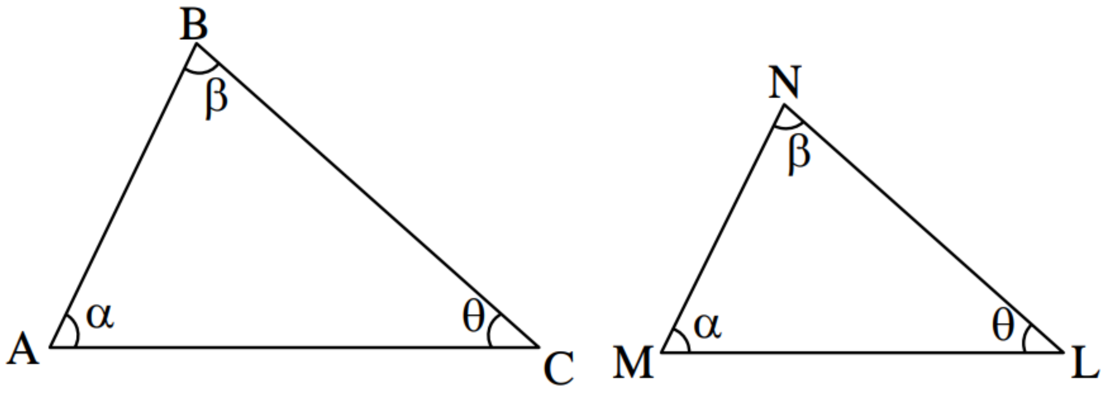
Si P es punto de concurrencia,

Entonces

$$\boxed{\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}\right) = 1}$$

TRIANGULOS SEMEJANTES

DEFINICIÓN: Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y los lados homólogos proporcionales.

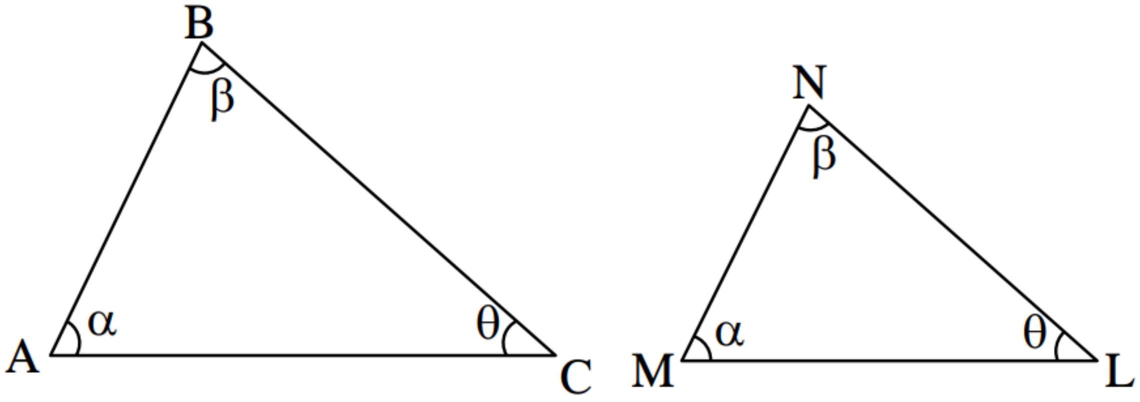


En la figura mostrada:
Los triángulos ABC y MNL son semejantes, y se denota por:

$\boxed{\Delta ABC \sim\text{▯}MNL}$

TRIANGULOS SEMEJANTES

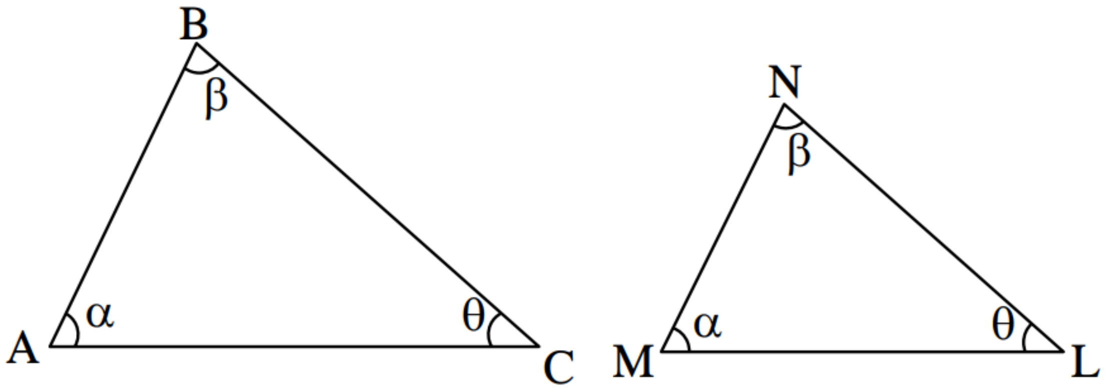
DEFINICIÓN: Se denominan lados homólogos a aquellos lados que se oponen a ángulos congruentes, estos son proporcionales.



$$\Delta ABC \sim \Delta MNL \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A \cong \angle M \\ \angle B \cong \angle N \wedge \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NL} = \dfrac{AC}{ML} \\ \angle C \cong \angle L \end{cases}$$

TRIANGULOS SEMEJANTES

TEOREMA: Si dos triángulos tienen respectivamente congruentes dos ángulos, entonces los triángulos son semejantes.



En la figura mostrada:

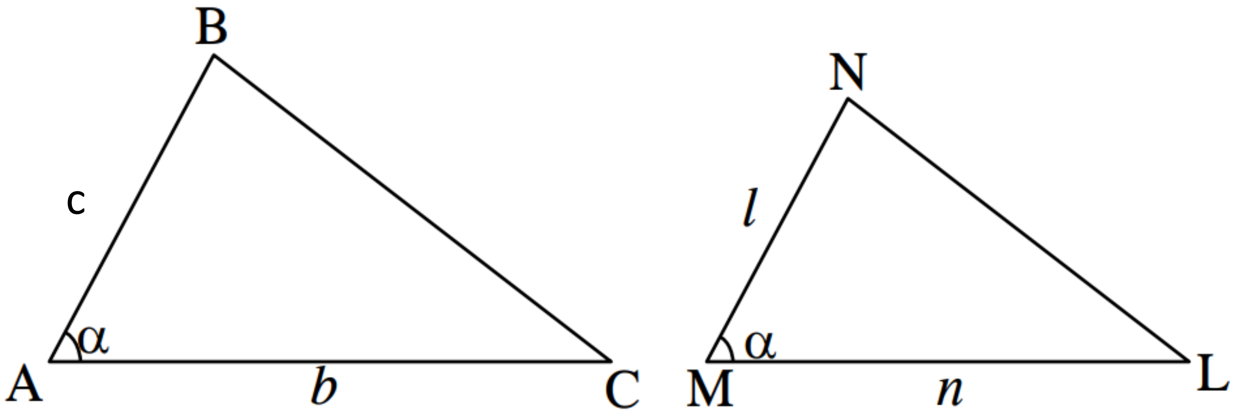
Si ∠A ≅ ∠M y ∠C ≅ ∠L,

Entonces

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta MNL}$$

TRIANGULOS SEMEJANTES

TEOREMA: Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales y congruentes el ángulo determinado por dichos lados, entonces los triángulos son semejantes.



En la figura mostrada:

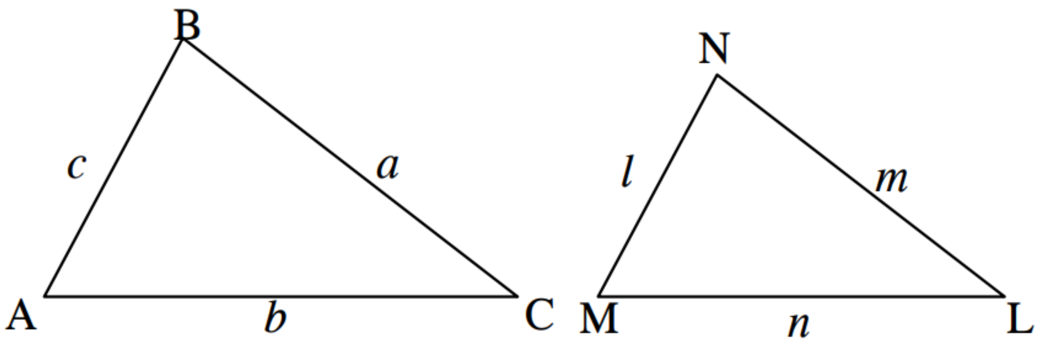
Si $\angle A \cong \angle M$ y $\frac{b}{n} = \frac{c}{l}$

Entonces

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta MNL}$$

TRIANGULOS SEMEJANTES

TEOREMA: Si dos triángulos tienen tres lados respectivamente proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



En la figura mostrada:

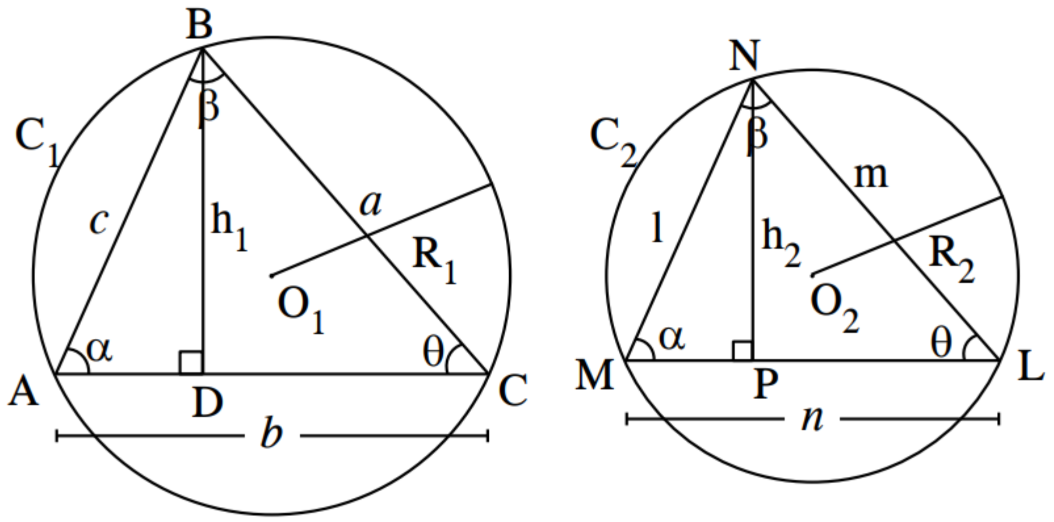
Si $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{l}$

Entonces

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta MNL}$$

TRIANGULOS SEMEJANTES

TEOREMA: Si dos triángulos son semejantes, entonces los lados homólogos y elementos homólogos son respectivamente proporcionales



En la figura mostrada:

Si $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

Entonces

$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{l} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2} = \cdots}$$

GEOMETRY

VERANO Uni

ACADEMIA

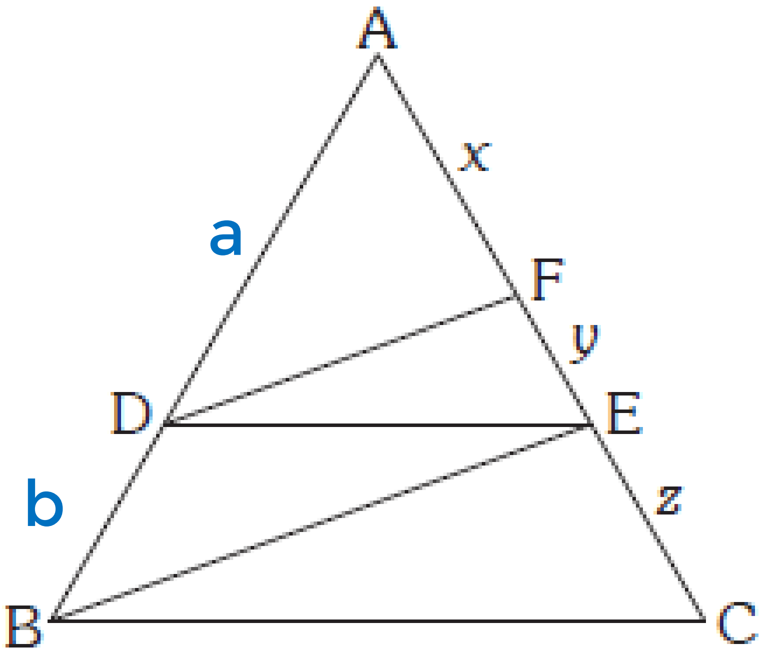
CAPITULO 4 PRACTICA

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 En la figura mostrada, $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ y $\overline{DF} \,//\, \overline{BE}$.

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

RESOLUCIÓN:



➤ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{z}$

Dato: $\overline{DF} \,//\, \overline{BE} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$

$\overline{DE} \,//\, \overline{BC} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{x+y}{Z}$

$\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{z}$ (V)

➤ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z-y}$

De lo anterior:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+y}{Z} \Rightarrow$ x z = x y + y^2

x z - x y = y^2

$\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z-y}$ (V)

➤ $\dfrac{2x+y}{y+z} = \dfrac{x}{y}$

De lo anterior:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{Z-y} \Rightarrow$ x z - x y = y^2

x z = y^2 + x y

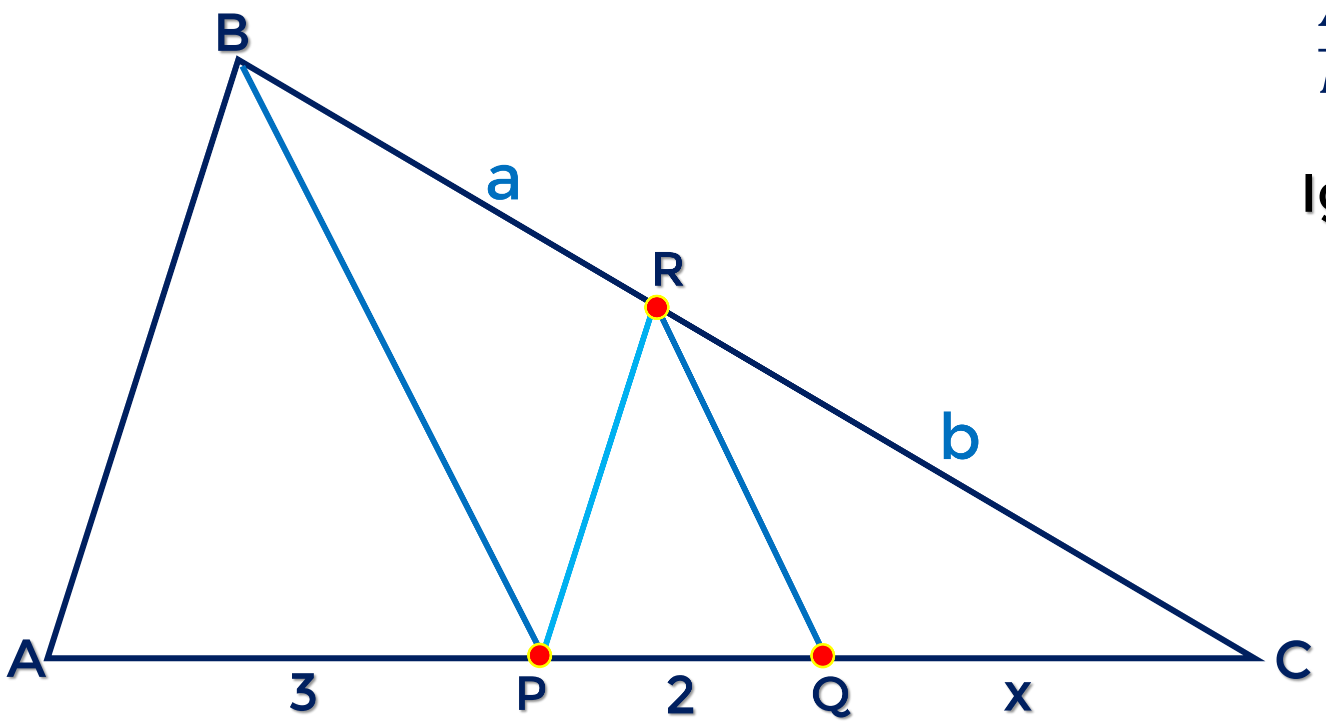
x z + x y = y^2 + 2xy

$\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{2x+y}{z+y}$ (V)

PROBLEMA 2 En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BP}$, luego se ubican los puntos R y Q en $\overline{BC}$ y $\overline{PC}$, respectivamente, tal que $\overline{AB} // \overline{PR}$ y $\overline{BP} // \overline{RQ}$. Si AP=3 y PQ = 2, calcule QC

RESOLUCIÓN :

Piden: QC = x



Dato:

$\overline{BP} // \overline{RQ}$ ➡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{x}$ ....(I)

$\overline{AB} // \overline{PR}$ ➡ $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2+x}$ ....(II)

Igualando (I) y (II)

➡ $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{2+x}$

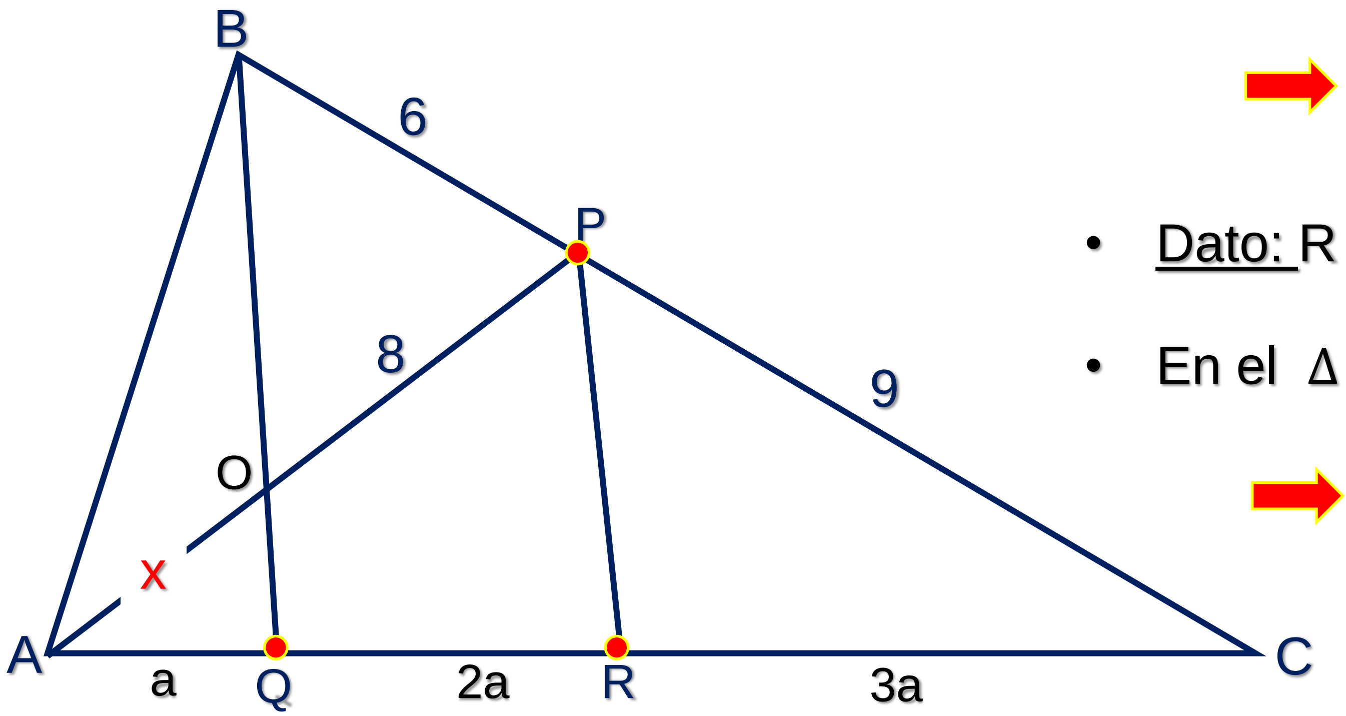
$4 + 2x = 3x$

$\boxed{\therefore\ x = 4}$

PROBLEMA 3 **En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ que se intersecan en el punto O. Se traza $\overline{PR}$ paralela a la ceviana $\overline{BQ}$, siendo R el punto medio del lado $\overline{AC}$. Si BP=6, PC=9 y PO=8; calcule AO.**

RESOLUCIÓN:

Piden: AO = x



Dato: $\overline{PR} \parallel \overline{BQ}$

- En el Δ BQC (Corolario de Tales)

$$\Rightarrow \frac{RC}{RQ} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{6}} = \frac{3}{2}$$

- Dato: R es punto medio de $\overline{AC}$

- En el Δ APR (Corolario de Tales)

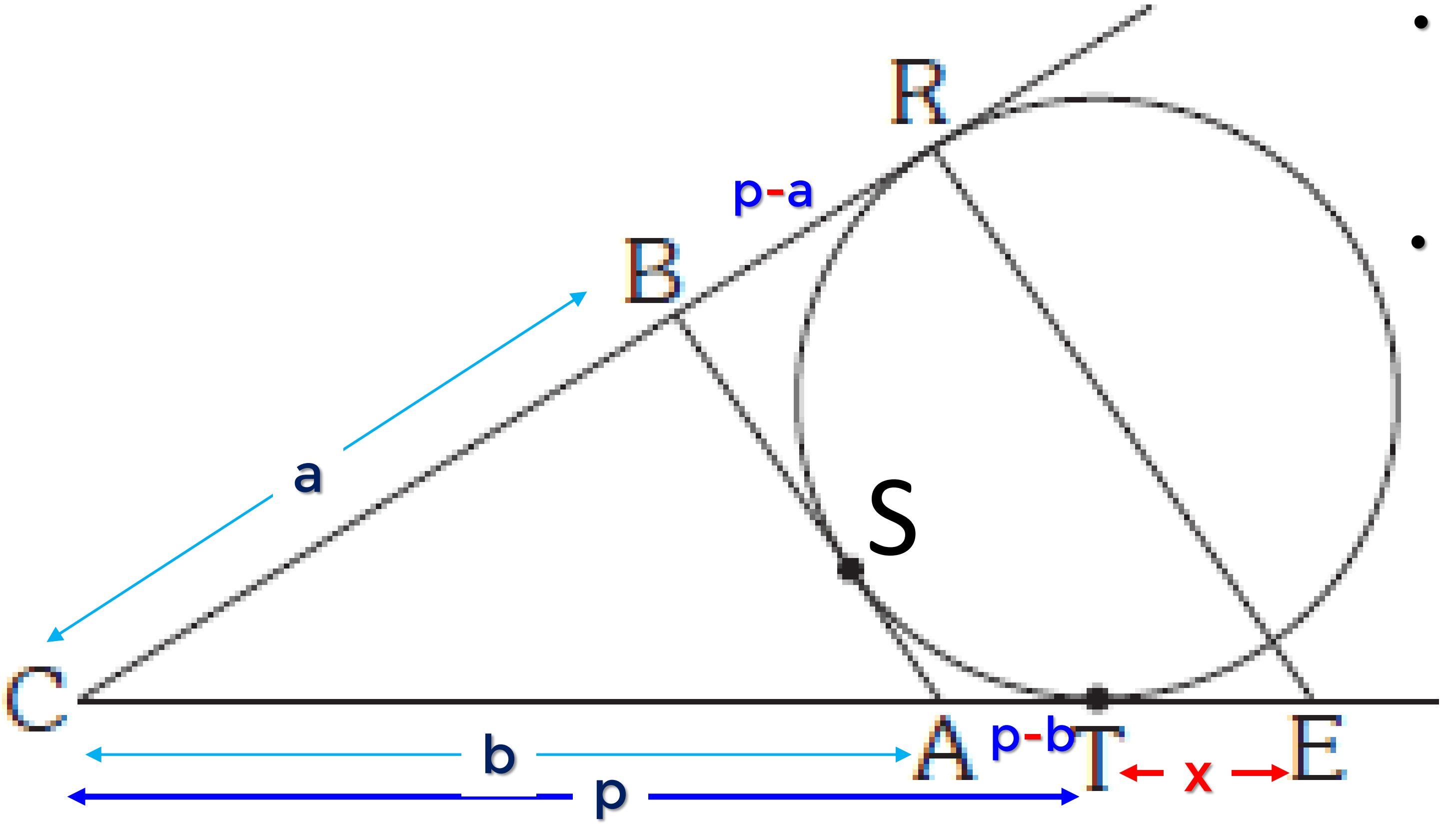
$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{a}{2a}$$

$$\boxed{\therefore\ x = 4}$$

PROBLEMA 4 En la figura mostrada; R, S y T son puntos de tangencia; $\overline{RE} \,//\, \overline{AB}$. Si BC = a, AC = b y el semiperímetro del triángulo ABC es p; calcule $\overline{TE}$.

RESOLUCIÓN:

Piden: TE = x



Dato: Semiperímetro del Δ ABC = p

- Por teorema CT = p
- Por teorema CR = CT = p

Dato: $\overline{RE} \,//\, \overline{AB}$

- En el Δ RCE (Corolario de Tales)

$$\frac{a}{p-a} = \frac{b}{p-b+x}$$

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{p+x}$$

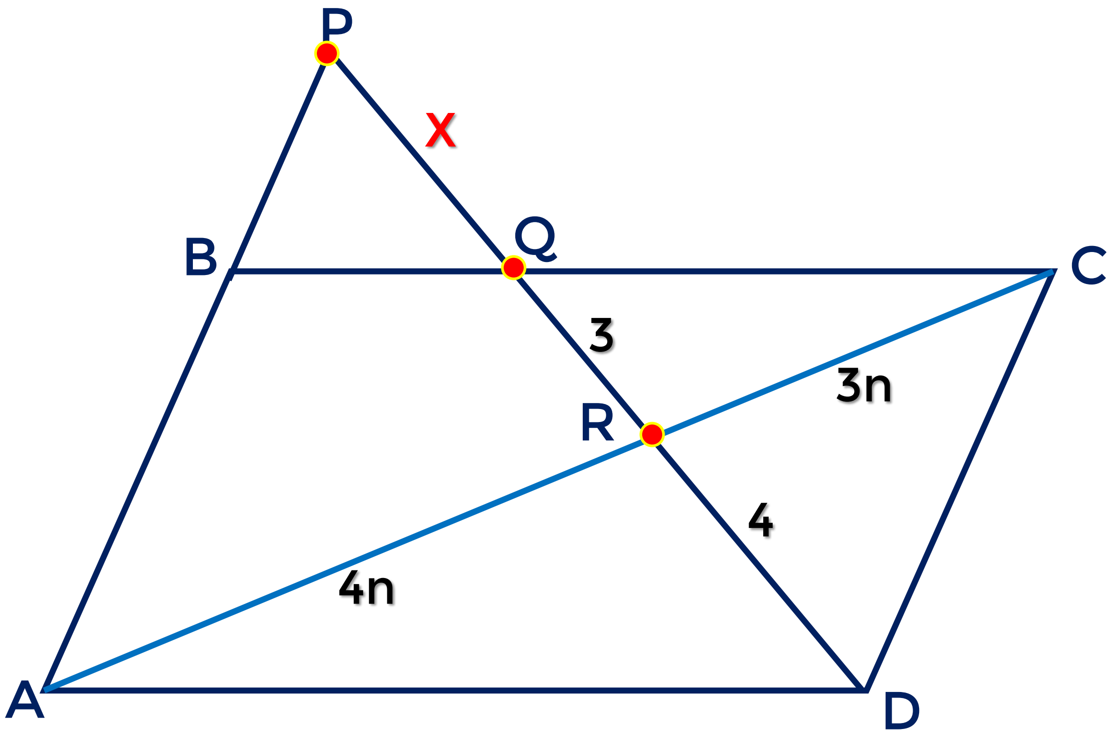
a p + a x = b p

$$\boxed{\therefore\ x = \frac{p}{a}(b-a)}$$

PROBLEMA 5 En un paralelogramo ABCD se traza una recta que pasa por D e interseca a $\overline{AC}$ en R, al lado $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AB}$ en P, respectivamente. Si QR = 3 y RD = 4, calcule PQ.

RESOLUCIÓN:

Piden: PQ = x



Dato: $\overline{QC} \,//\, \overline{AD}$

- En el Δ ARD (Corolario de Tales)

$$\frac{RC}{RA} = \frac{3}{4}$$

Dato: $\overline{CD} \,//\, \overline{PA}$

- En el Δ PRA (Corolario de Tales)

$$\frac{3n}{4n} = \frac{4}{x+3}$$

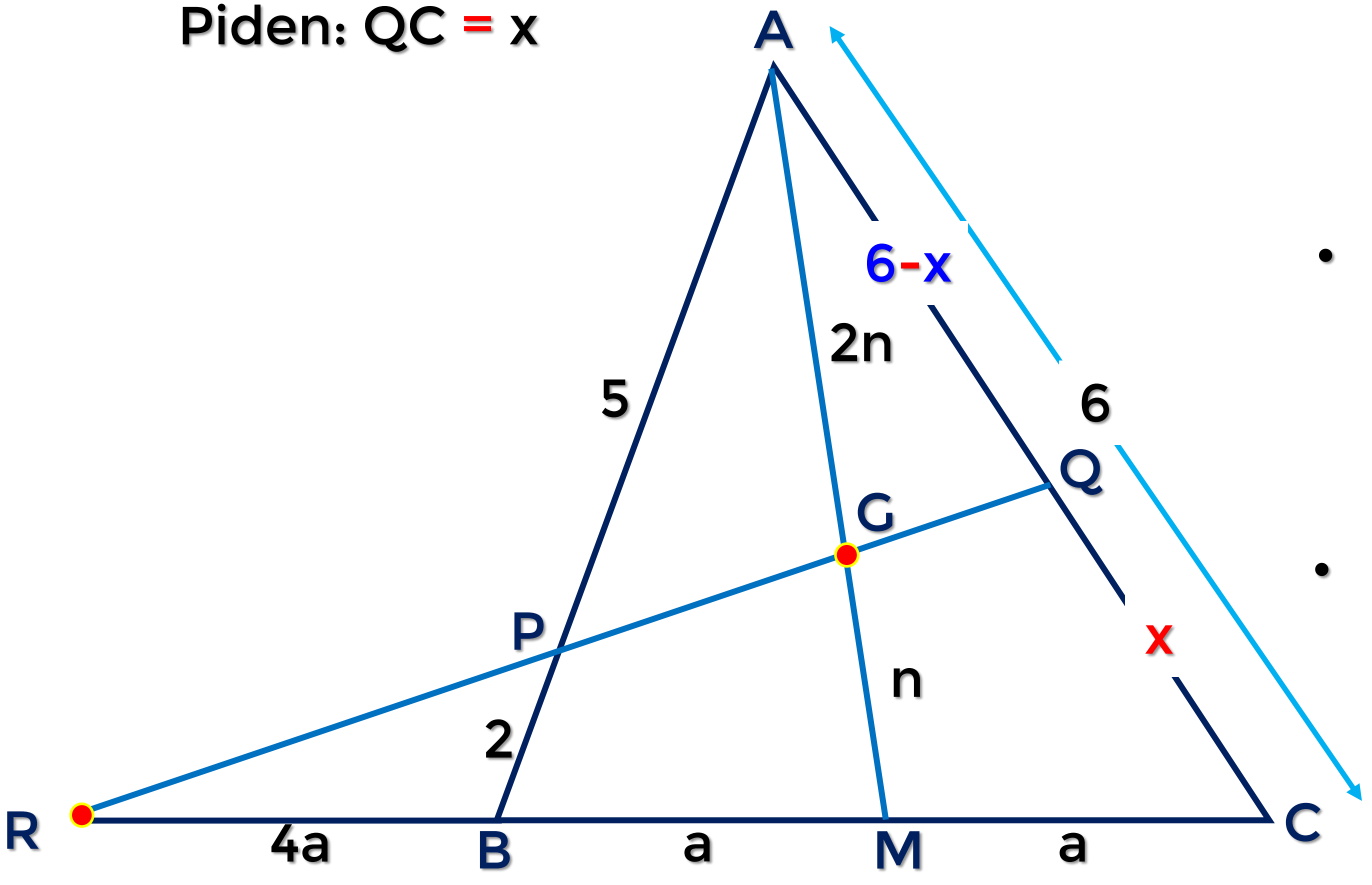
$3x + 9 = 16$

$$\therefore\ x = \frac{7}{3}$$

PROBLEMA 6 Por el baricentro de la región triangular ABC, se traza una recta que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Si AP = 5, BP = 2 y AC = 6; calcule QC.

RESOLUCIÓN :

Piden: QC = x



Dato: G es el baricentro del Δ ABC

$\Rightarrow$ AG = 2 (GM)

BM = MB

- En el Δ MAB (Teor. Menelao)

$$n \, . \, 5 \, . \, RB = 2n \, . \, 2 \, . \, (RB + a)$$

$$\boxed{RB = 4a}$$

- En el Δ CAM (Teor. Menelao)

$$x \, . \, 2n \, . \, 5a = (6 - x) \, . \, n \, . \, 6a$$

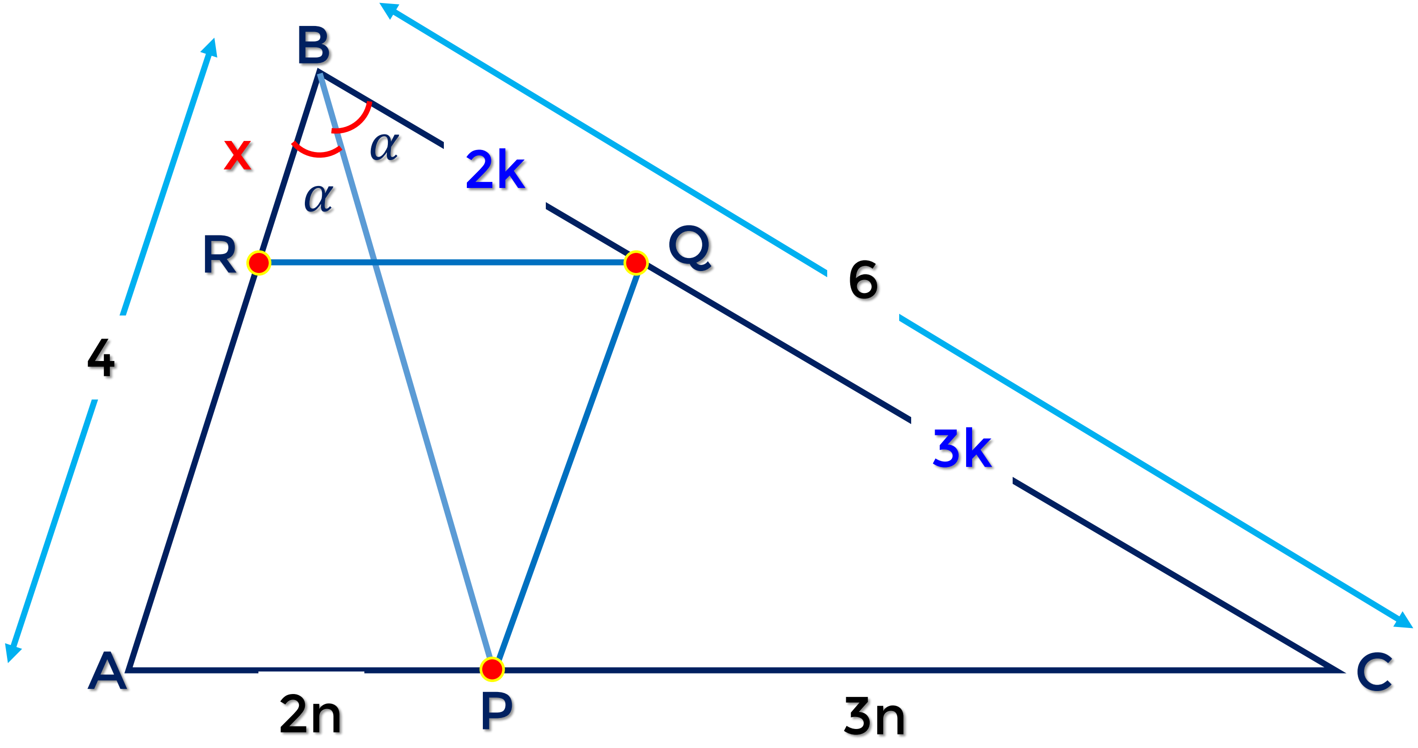
$$5x = 18 - 3x$$

$$\boxed{\therefore \; x = 2{,}25}$$

PROBLEMA 7 En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$. Se ubican los puntos Q en $\overline{BC}$ y R en $\overline{AB}$, tal que $\overline{PQ}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{QR}$ // $\overline{AC}$. Si AB = 4 y BC = 6, calcule RB.

RESOLUCIÓN :

Piden: RB = x



- En el Δ ABC (Teor. Bisectriz interior)

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

Dato: $\overline{QP}$ // $\overline{BA}$

$$\Rightarrow \frac{QC}{BQ} = \frac{3}{2}$$

Dato: $\overline{RQ}$ // $\overline{AC}$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2\cancel{k}}{5\cancel{k}}$$

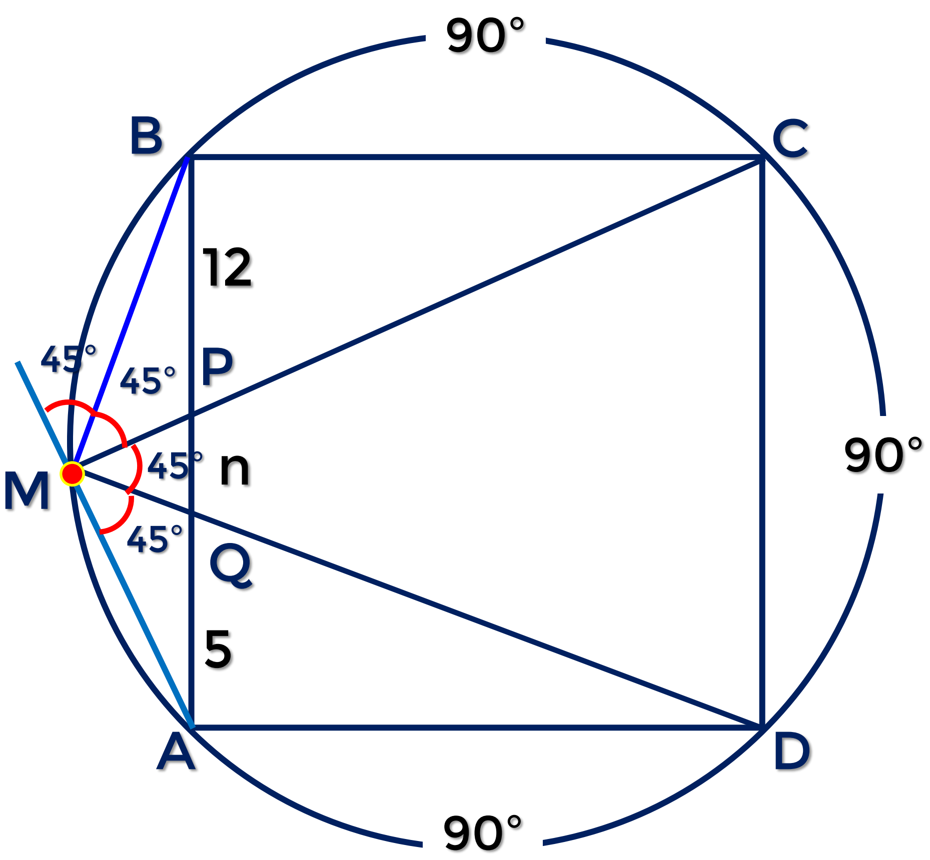
$$\boxed{\therefore\ x = 1{,}6}$$

PROBLEMA 8 En una circunferencia se inscribe el cuadrado ABCD. En el arco $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto M, las cuerdas $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$ se intersecan al lado $\overline{AB}$ en los puntos P y Q. Si AQ = 5 y PB = 12, entonces la longitud del lado del cuadrado es

RESOLUCIÓN :

Piden: La longitud del lado del cuadrado

AB = 17 + n



- En el gráfico:

$$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{AD} = 90°$$

- En el Δ AMP (Teor. Bisectriz interior)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{5}{n}$$

- En el Δ AMP (Teor. Bisectriz exterior)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{17+n}{12}$$

- Igualando

$$\Rightarrow \frac{5}{n} = \frac{17+n}{12}$$

$\boxed{n = 3}$

$\boxed{\therefore \ AB = 20}$

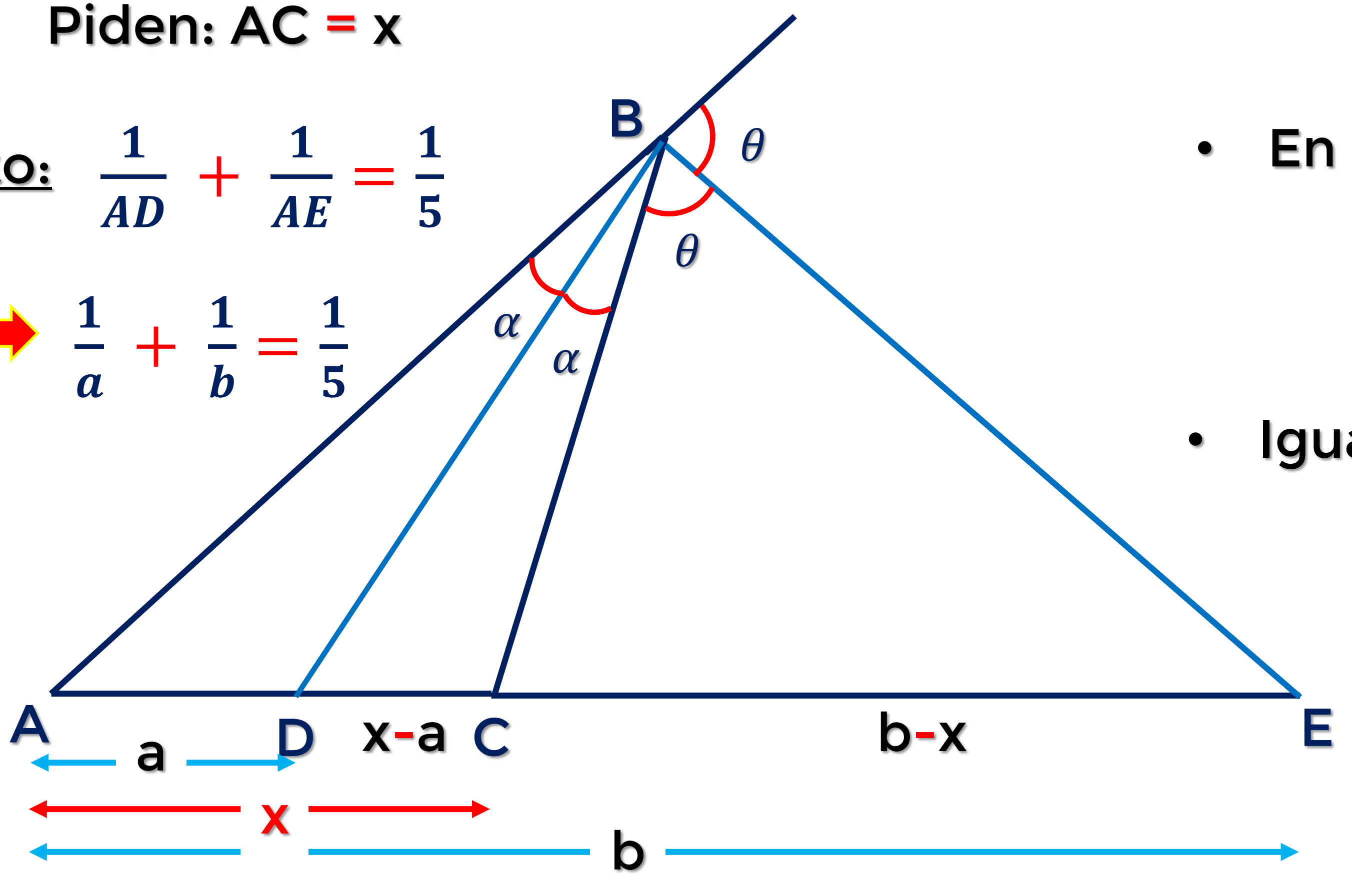
PROBLEMA 9 En un triángulo ABC (AB > BC) se trazan la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la bisectriz exterior $\overline{BE}$. Si $\frac{1}{AD}+\frac{1}{AE}=\frac{1}{5}$, entonces AC es

RESOLUCIÓN:

Piden: AC = x

Dato: $\frac{1}{AD}+\frac{1}{AE}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{5}$



- En el Δ ABC (Teor. Bisectriz interior)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{a}{x-a}$$

- En el Δ ABC (Teor. Bisectriz exterior)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{b}{b-x}$$

- Igualando $\frac{a}{x-a}=\frac{b}{b-x}$

$$\Rightarrow ab - ax = bx - ab$$

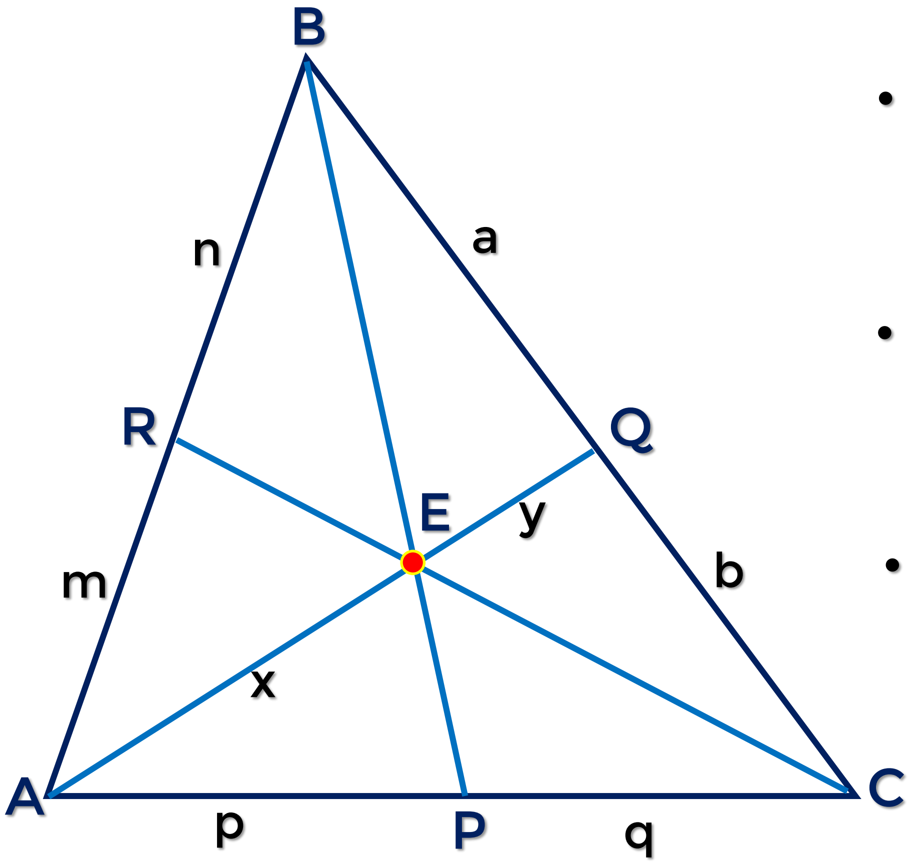
$$2ab = bx + ax$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{x}=\frac{1}{5}$$

$$\boxed{\therefore\ x = 10}$$

PROBLEMA 10 En un triángulo ABC, las cevianas interiores $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CR}$ concurren en el punto E; demuestre la relación $\dfrac{AE}{EQ} = \dfrac{AR}{RB} + \dfrac{AP}{PC}$

RESOLUCIÓN:



- Demostrar $\dfrac{AE}{EQ} = \dfrac{AR}{RB} + \dfrac{AP}{PC} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q}$

- En el Δ CAQ (Teor. Menelao)

  q . x . a = p . y . (a + b) $\Rightarrow \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{y}{x}$ . . . (I)

- En el Δ BAQ (Teor. Menelao)

  n . x . b = m . y . (a + b) $\Rightarrow \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{m}{n}$ . . . (II)

- Sumando (I) y (II)

$$\frac{a+b}{a+b} = \left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right)\frac{y}{x}$$

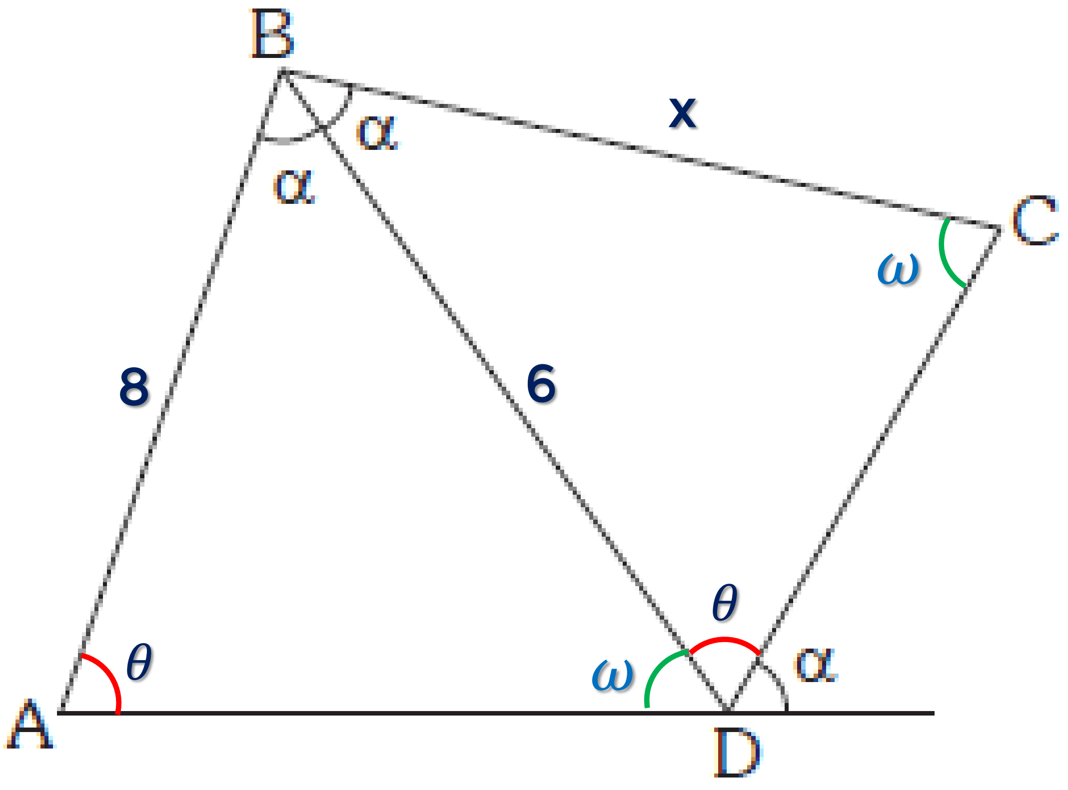
$$1 = \left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right)\frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}$$

PROBLEMA 11 Si AB = 8 y BD = 6, calcule BC.

RESOLUCIÓN:

Piden: BC = x



- El Δ ABD ~ Δ DBC

$$\frac{6}{x} = \frac{8}{6}$$

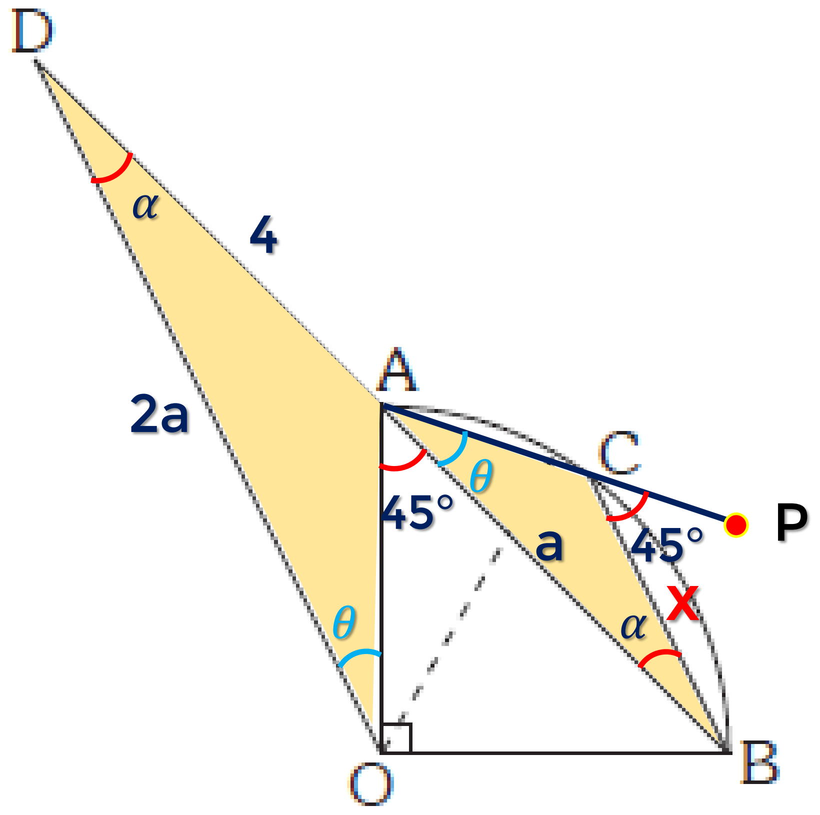
36 = 8x

$\therefore$ x = 4,5

PROBLEMA 12 Si $\overline{BC} // \overline{OD}$, OD = 2AB y AD = 4; calcule BC.

RESOLUCIÓN:

Piden: BC = x



Dato: $\overline{BC} // \overline{OD}$

- Por teorema

$m \measuredangle BCP = 45°$

- El $\Delta DAO \sim \Delta BCA$

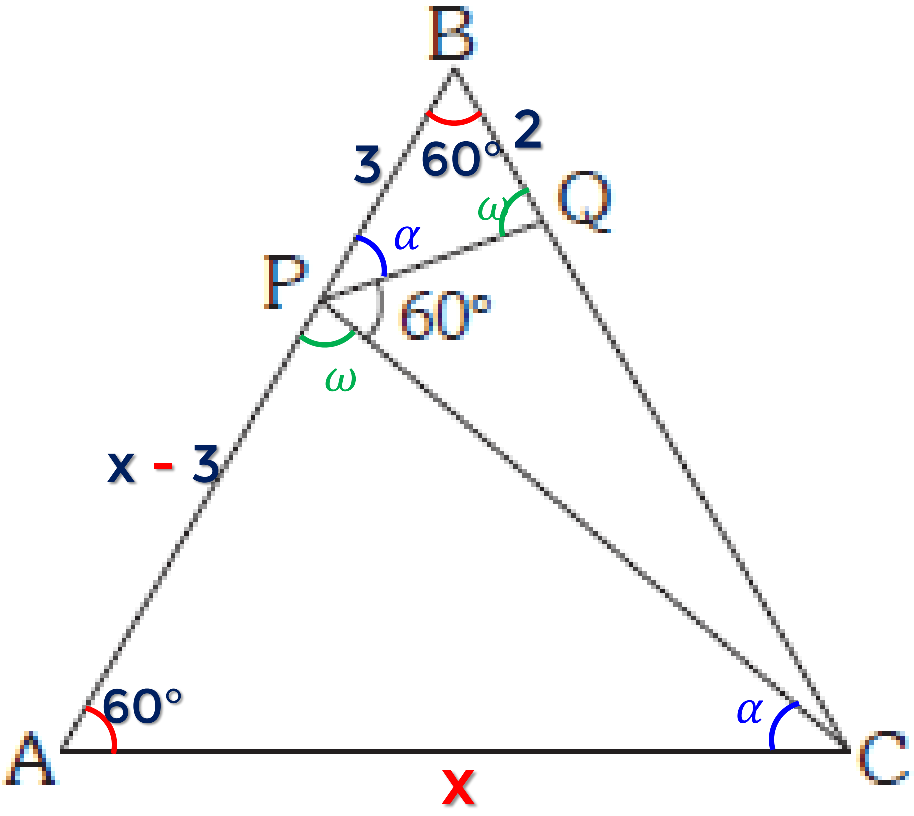
$$\Rightarrow \frac{2a}{a} = \frac{4}{x}$$

$\boxed{\therefore \ x = 2}$

PROBLEMA 13 Si ABC es equilátero, BP = 3 y BQ = 2; calcule AC.

RESOLUCIÓN:

Piden: AC = x



Dato:

- El Δ ABC (Es equilátero)

- El Δ ACP ~ Δ BPQ

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x-3}{2}$$

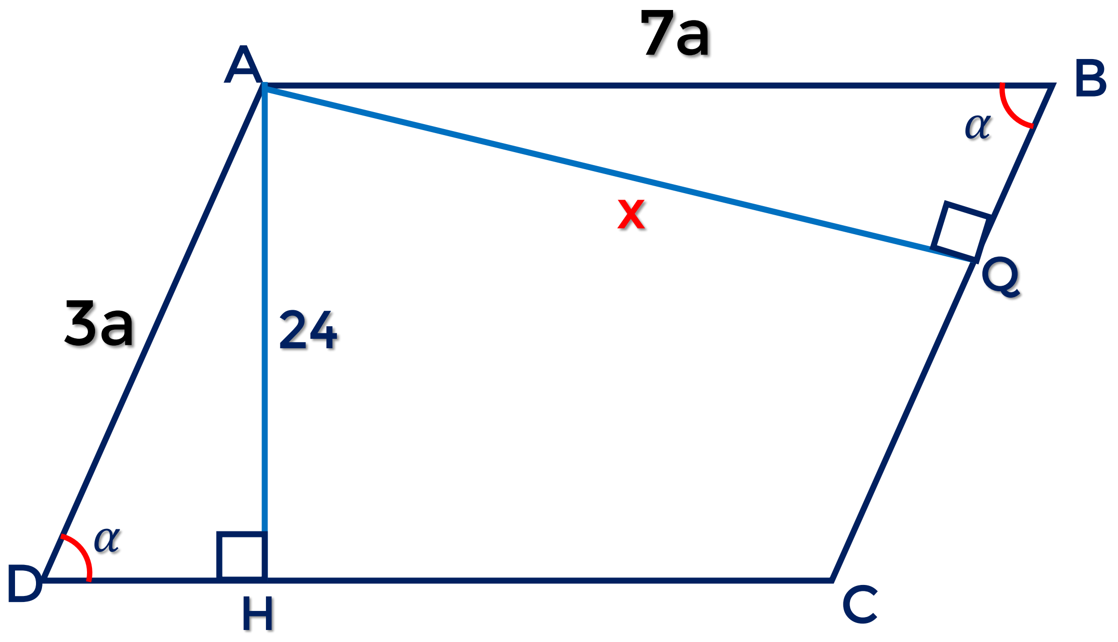
$$2x = 3x - 9$$

$$\boxed{\therefore\ x = 9}$$

PROBLEMA 14 En un romboide ABCD, 3AB = 7BC. Si la distancia entre los lados mayores es 24, calcule la distancia entre los lados menores.

RESOLUCIÓN:

Piden la distancia entre los lados menores = x



Dato:

- El ABCD (Es un romboide)
- El Δ AHD ~ Δ AQB

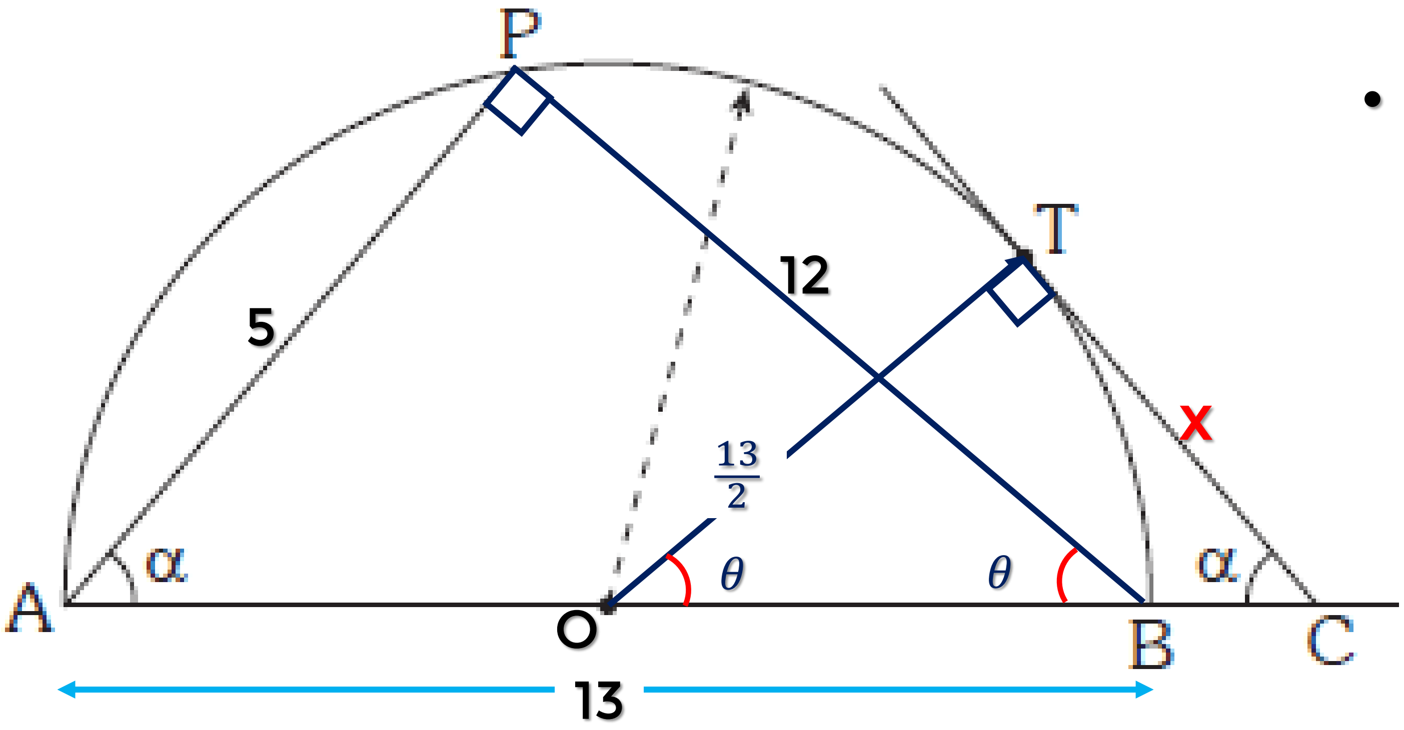
$$\frac{3\cancel{a}}{7\cancel{a}} = \frac{24}{x}$$

$\boxed{\therefore\ x = 56}$

PROBLEMA 15 Si AP = 5, AB = 13 y T es punto de tangencia; calcule CT.

RESOLUCIÓN:

Piden: CT = x



- En el ⊿ APB (Teor. Pitágoras)

PB = 12

- El ⊿ APB ~ ⊿ CTO

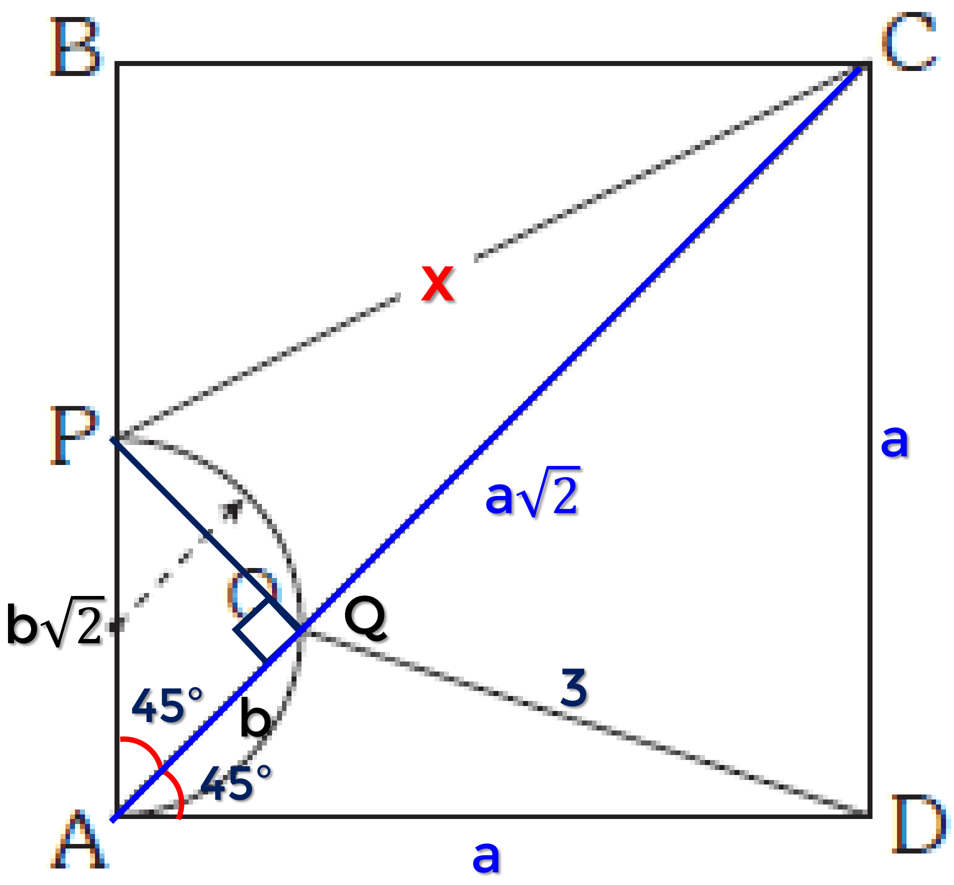
$$\Rightarrow \frac{12}{13/2} = \frac{5}{x}$$

$$\boxed{\therefore\ x = \frac{65}{24}}$$

PROBLEMA 16 En el cuadrado ABCD calcule PC si QD = 3.

RESOLUCIÓN:

Piden: PC = x



Dato:

- ABCD es un cuadrado

  ➡ El ⊿ CDA (notable 45°)

  El ⊿ PQA (notable 45°)

- El Δ PAC ~ Δ QAD (L-A-L)

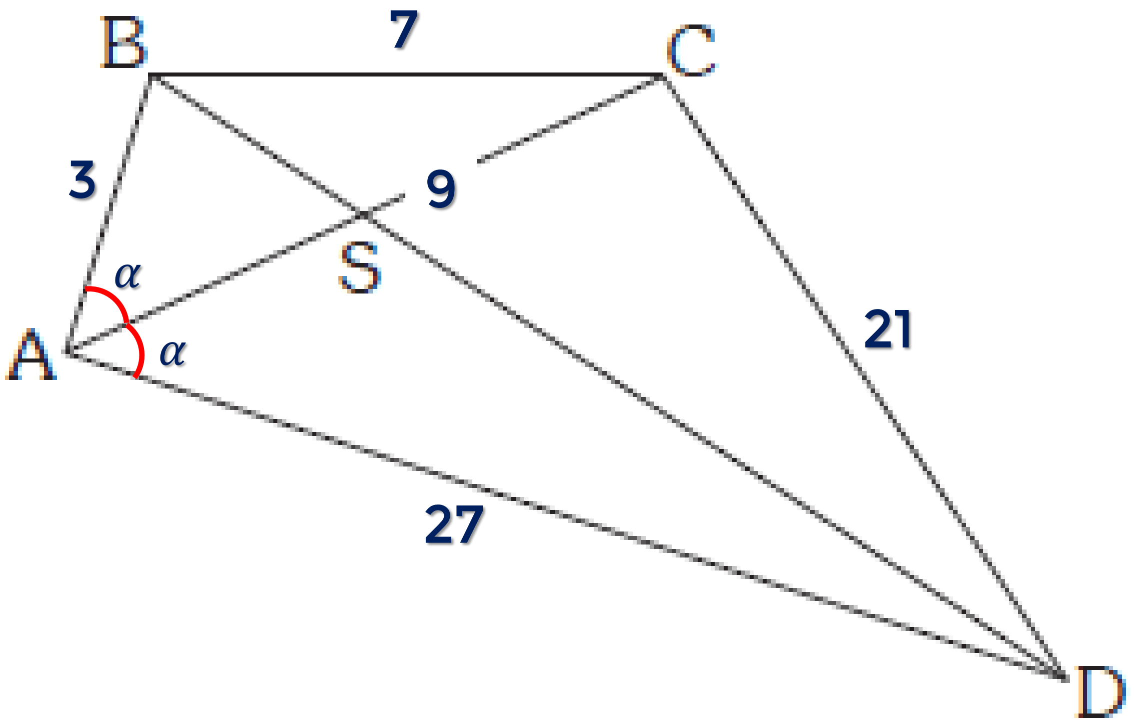
$$\frac{x}{3} = \frac{\cancel{a}\sqrt{2}}{\cancel{a}}$$

$$\boxed{\therefore\ x = 3\sqrt{2}}$$

PROBLEMA 17 Si AB = 3, BC = 7, CD = 21, AD = 27 y AC = 9; calcule $\frac{BS}{SD}$.

RESOLUCIÓN:

Piden: $\frac{BS}{SD}$



- $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD}$

- El Δ ABC ~ Δ ACD (L-L-L)

$m \measuredangle BAC = m \measuredangle CAD = \alpha$

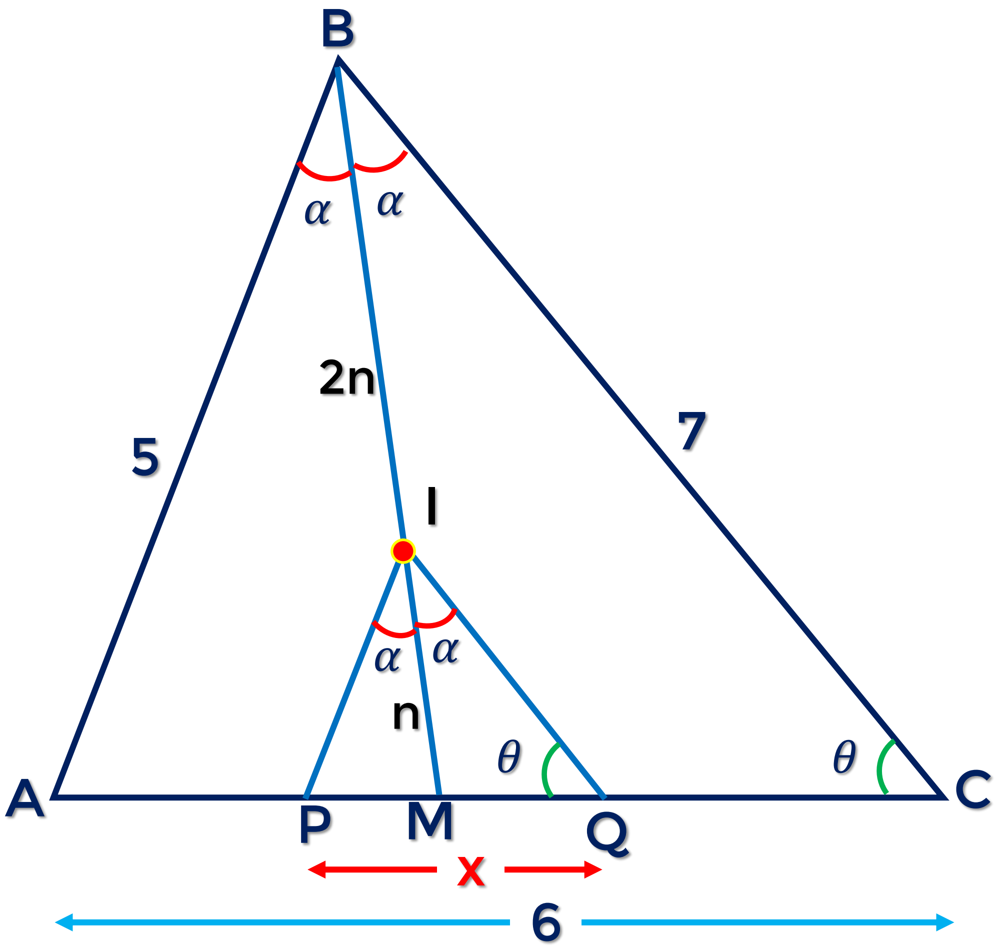
- En el Δ BAD (Teor. Bisectriz interior)

$$\Rightarrow \frac{BS}{SD} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{27}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{BS}{SD} = \frac{1}{9}}$$

PROBLEMA 18 Por el incentro de un triángulo ABC se trazan rectas paralelas a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ que intersecan al lado $\overline{AC}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Si AB=5, BC=7 y AC=6; calcule PQ.

RESOLUCIÓN: Piden: PQ = x



- Siendo I : es el incentro del Δ ABC

<u>Dato:</u> $\overline{AB} \,//\, \overline{PI}$ ➡ m ∢ ABM = m ∢ PIM = α

$\overline{BC} \,//\, \overline{IQ}$ ➡ m ∢ MBC = m ∢ MIQ = α

➡ m ∢ MCB = m ∢ MQI = θ

- Además: (Teor. Del incentro)

$$\frac{BI}{IM} = \frac{5+7}{6} = \frac{2}{1}$$

- El Δ PIQ ~ Δ ABC

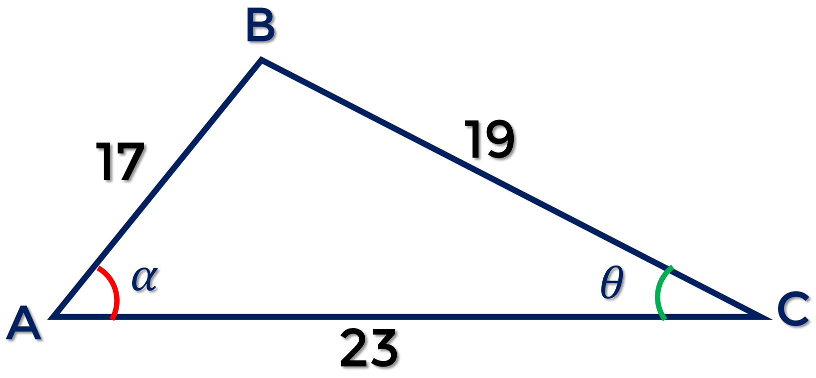
$$\frac{x}{6} = \frac{\cancel{n}}{3\cancel{n}}$$

$\boxed{\therefore\ x = 2}$

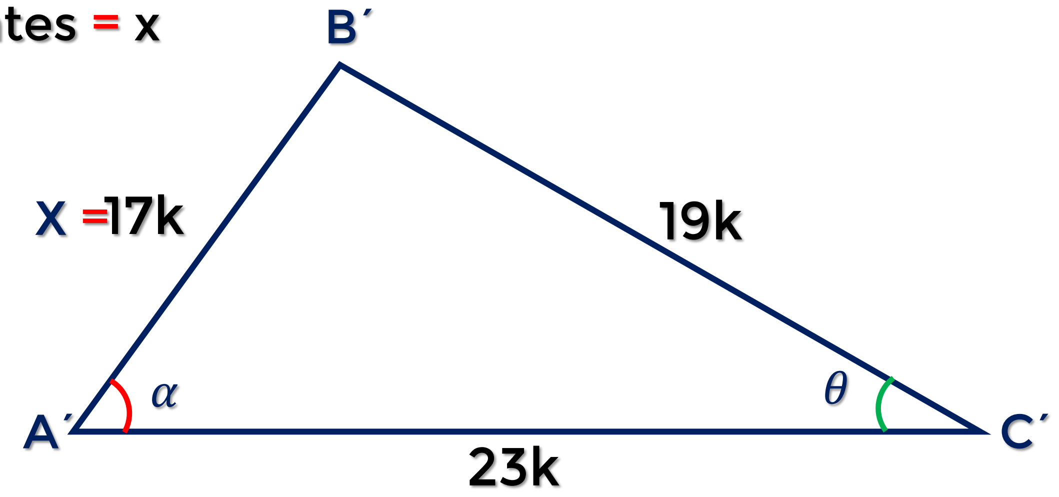
PROBLEMA 19 Si los lados de un triángulo miden 17, 19 y 23; calcule las medidas del menor lado de otro triángulo semejante a él cuyo perímetro es 177.

RESOLUCIÓN:

Piden: El menor lado del otro triángulo semejantes = x



$\sim$



Dato:

Δ ABC $\sim$ Δ A´B´C´

$\Rightarrow$ A´B´ = 17k

B´C´ = 19k

A´C´ = 23k

Además:

$2p_{\Delta A'B'C'} = 177$

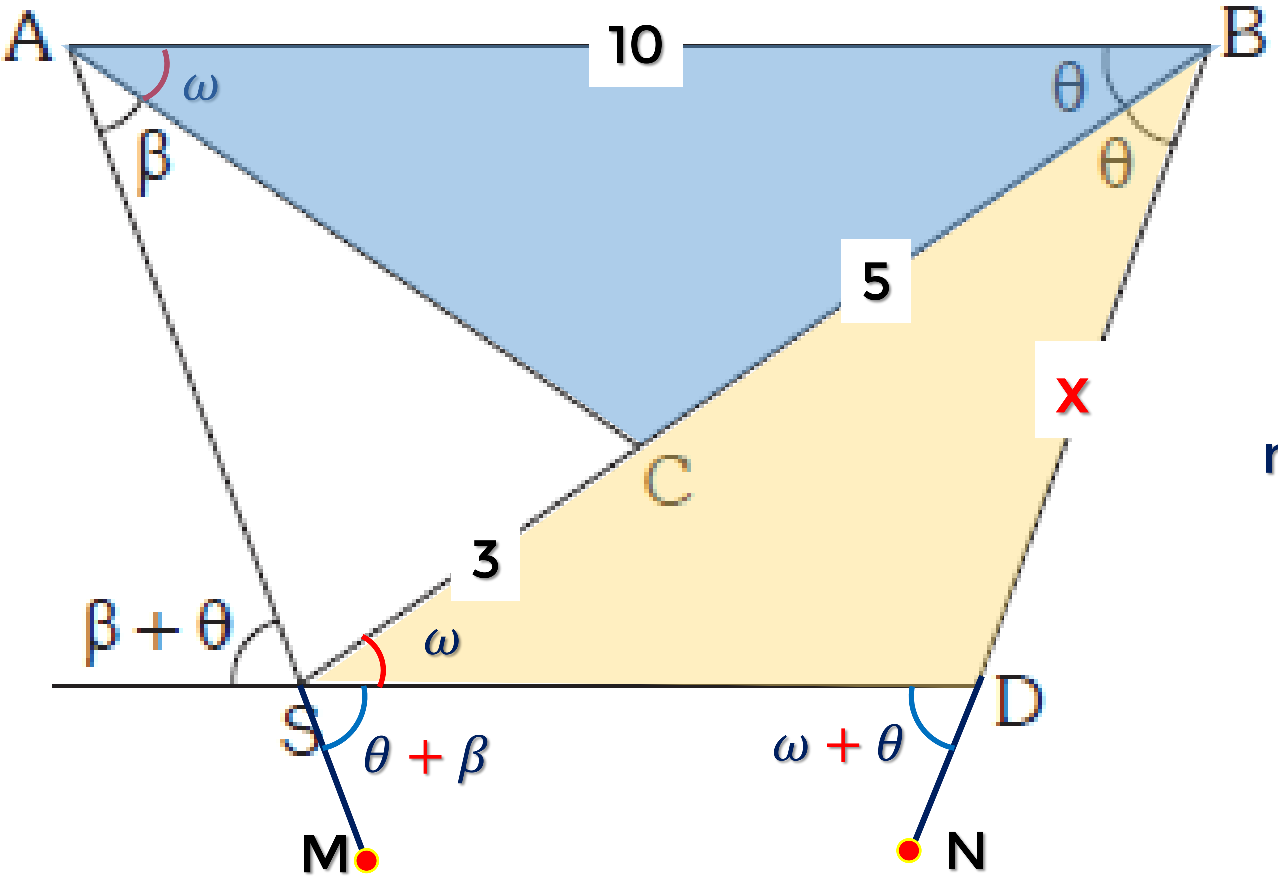
$17k + 19k + 23k = 177$

$\Rightarrow$ $\boxed{k = 3}$

$\therefore\ x = 51$

PROBLEMA 20 Si AB = 10, BC = 5 y SC = 3; calcule BD.

RESOLUCIÓN:



Piden: BD = x

- En el ⏢ ABDS

Por teorema :

m ∢ SAB + m ∢ ABN = m ∢ MSD + m ∢ SDN

➡ m ∢ SDN = $\omega + \theta$

- El Δ SDB ~ Δ ACB

$$\frac{x}{5} = \frac{8}{10}$$

$\therefore$ **x = 4**

SEGMENTOS PROPORCIONALES

PROPIEDADES DE PROPORCIONES

* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{a+m}{b+n} = \dfrac{a-m}{b-n}$ Ejemplo $\dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{8+4}{6+3} = \dfrac{8-4}{6-3}$

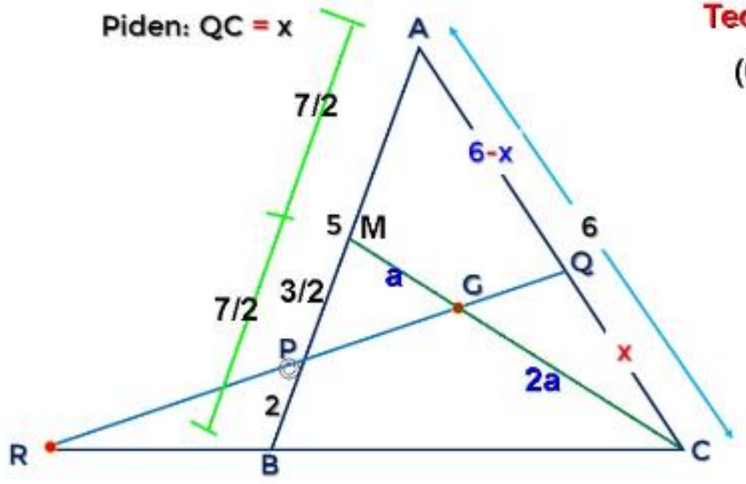
* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \rightarrow \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{m+n}{m-n}$ Ejemplo $\dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} \rightarrow \dfrac{8+6}{8-6} = \dfrac{4+3}{4-3}$

$$\frac{14}{2} = \frac{7}{1}$$

PROBLEMA 6 Por el baricentro de la región triangular ABC, se traza una recta que interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Si AP = 5, BP = 2 y AC = 6; calcule QC.

RESOLUCIÓN :

Piden: QC = x



Teorema de Menelao en △ACM

$$(6 - x)(2a)(3/2) = (x)(a)(5)$$

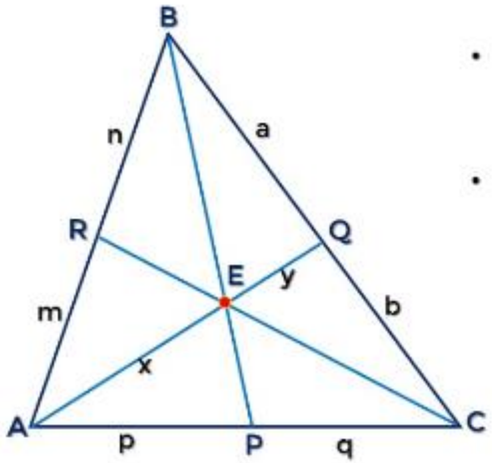
$$18 - 3x = 5x$$

$$18 = 8x$$

$$\boxed{x = \frac{9}{4}}$$

PROBLEMA 10 En un triángulo ABC, las cevianas interiores $\overline{AQ}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CR}$ concurren en el punto E; demuestre la relación $\frac{AE}{EQ} = \frac{AR}{RB} + \frac{AP}{PC}$

RESOLUCIÓN:



- Demostrar $\frac{AE}{EQ} = \frac{AR}{RB} + \frac{AP}{PC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q}$
- En el Δ CAQ (Teor. Menelao)

$$q \cdot x \cdot a = p \cdot y \cdot (a + b) \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{py}{qx}$$

- En el Δ BAQ (Teor. Menelao)

$$n \cdot x \cdot b = m \cdot y \cdot (a + b) \Rightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{my}{nx}$$

Sumando

$$1 = \frac{y}{x}\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right)$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}}$$ **l.q.q.d.**