ÁLGEBRA

SACO OLIVEROS APEIRON
SISTEMA HELICOIDAL

Capítulo 4

NÚMEROS COMPLEJOS

Ciclo

Verano UNI

EXPRESION IMAGINARIA

Definición: Tradicionalmente se denomina así al resultado de extraer signo radical de índice par a números negativos.

$\sqrt{-2}$; $\sqrt[4]{-7}$; $\sqrt[10]{-1}$; ....

Unidad imaginaria: Se denomina así a la raíz cuadrada del numero menos uno (-1) y se le representa por la letra i.

$$\mathbf{i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1}$$

Observación: Desde que la expresión dada es imaginaria, es obligatorio considerar a la unidad imaginaria.

$\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i = 2i$

$\sqrt{-18} = \sqrt{(18)(-1)} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{2}i$

Potencias de la unidad imaginaria: Siendo i la unidad imaginaria y k un numero natural.

$i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; ....

En general:

$$\mathbf{i^{4k} = 1 \; ; \; i^{4k+1} = i \; ; \; i^{4k+2} = -1 \; ; \; i^{4k+3} = -i}$$

Veamos algunos ejemplos:

$$i^{42} = i^{4k+2} = -1 \quad ; \quad i^{103} = i^{4k+3} = -i$$

Teorema: Siendo i la unidad imaginaria y n un numero natural:

$$i^{n} + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$$

Veamos un ejemplo:

$$i^{7} + i^{8} + i^{9} + i^{10} = 0$$

En efecto:

$$i^{4k+3} + i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} = 0$$

$$-i + 1 + i - 1 = 0$$

Nota: El teorema también se verifica si n es cualquier numero entero.

Propiedades:

01. $\frac{1+i}{1-i} = i$

02. $\frac{1-i}{1+i} = -i$

03. $(1+i)^2 = 2i$

04. $(1-i)^2 = -2i$

Veamos un ejemplo:

$$(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$$

Ejemplo aplicativo 01. Reducir:

$$k = i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} + \dots\dots\dots + i^{2006}$$

Resolución:

Según el teorema tenemos que:

$i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = 0$

$i^{11} + i^{12} + i^{13} + i^{14} = 0$

$i^{15} + i^{16} + i^{17} + i^{18} = 0$

.

.

$i^{2003} + i^{2004} + i^{2005} + i^{2006} = 0$

Finalmente tenemos K = 0

Ejemplo aplicativo 02. Reducir:

$$k = i^{120} + i^{115} + i^{110} + \dots\dots\dots + i^5 + 1$$

Resolución:

Reescribiendo la expresión dada así:

$K = (i^5)^{24} + (i^5)^{23} + (i^5)^{22} + \dots\dots\dots + (i^5) + 1$

Tenga en cuenta que $i^5 = i^{4k+1} = i$, ahora:

$K = i^{24} + i^{23} + i^{22} + \dots\dots\dots + i^2 + i + 1$

Por teorema desde i^{24} hasta i se anulan:

$K = 0 + 1$

Finalmente tenemos K = 1

Ejemplo aplicativo 03. Reducir:

$$Z = \frac{(1+i)^2}{i^9} + \frac{(1-i)^2}{i^5}$$

Resolución:

Según las propiedades tenemos:

$$Z = \frac{2i}{i} + \frac{-2i}{i} = 2 - 2 = 0$$

Ejemplo aplicativo 04. Reducir:

$$Z = \frac{3(1+i)^6}{(1-i)^6} - \frac{2(1-i)^7}{(1+i)^7}$$

Resolución:

Según las propiedades tenemos:

$$Z = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 = 3(i)^6 - 2(-i)^7$$

$$Z = 3i^6 + 2i^7 = 3(-1) + 2(-i)$$

Finalmente tenemos z = -3 – 2i

Ejemplo aplicativo 05. Simplificar:

$$K = \frac{(1+i)^2(1+3i)}{i-3}$$

Resolución:

Reescribiendo la expresión dada y teniendo en cuenta que i^2 = i . i = -1 tenemos:

$$K = \frac{(2i)(1+3i)}{i-3} = \frac{2(i+3i.i)}{i-3} = \frac{2(i-3)}{i-3}$$

Finalmente tenemos K = 2

NUMERO COMPLEJO (Z)

Definición:

$$Z = (x ; y) = x + yi \,/\, x,y \in \mathbb{R} ; i = \sqrt{-1}$$

Donde se cumple que:

x es la parte real de Z = Re(Z)

y es la parte imaginaria de Z = Im(Z)

Por ejemplo para Z = 5 - 2i tenemos que:

Re(Z) = 5 ∧ Im(Z) = -2

Igualdad de números complejos:

Sean los complejos Z = x + yi ∧ W = a + bi

Tal que Z = W , es decir x + yi = a + bi

Entonces x = a ∧ y = b

Por ejemplo si 2 + 5i = x - 3 + (y + 2)i , luego:

x – 3 = 2 → x = 5 ∧ y + 2 = 5 → y = 3

Clasificación de los números complejos:

Sea $Z = (x ; y) = x + yi \,/\, x,y \in \mathbb{R} ; i = \sqrt{-1}$

01. Si y = 0 → Z = x es un numero real.

02. Si x = 0 ∧ y ≠ 0 → Z = yi es un numero imaginario puro.

03. Si Si x ≠ 0 ∧ y ≠ 0 → Z = x + yi es un numero imaginario.

04. Si x = 0 ∧ y = 0 → Z = 0 es nulo.

Números complejos especiales:

Dado el complejo $Z = x + yi$, se define:

01. Conjugado de Z ($\overline{Z}$)

$$\overline{Z} = x - yi$$

02. Opuesto de Z (Zop)

$$Zop = -x - yi = -Z$$

Por ejemplo para $Z = 3 + 7i$ tenemos:

$$\overline{Z} = 3 - 7i \quad \wedge \quad Zop = -3 - 7i$$

Operaciones con números complejos:

Sean los complejos $Z = 2+3i \wedge W = 1+i$

01. Adición:

$Z + W = 2 + 3i + 1 + i = (2+1) + (3 + 1)i$

$Z + W = 3 + 4i$

También:

$Z - W = 2 +3i - (1 + i) = 2 + 3i -1 - i = 1 + 2i$

02. Multiplicación:

$Z.W = (2+3i).(1 + i) = 2 + 2i + 3i - 3$

$Z.W = -1 + 5i$

Observación: Para dividir complejos, cuyo denominador es imaginario, se multiplica a cada termino por el complejo conjugado

del denominador.

Propiedades:

01. $\overline{(\overline{Z})} = Z$; $\overline{(\overline{((\overline{Z}))})} = \overline{Z}$

02. $\overline{(Z_1 + Z_2)} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$

03. $\overline{(Z_1 - Z_2)} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$

04. $\overline{(Z_1 . Z_2)} = \overline{Z_1} . \overline{Z_2}$

05. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$; $Z_2 \neq 0$

06. $\overline{(Z^n)} = (\overline{Z})^n$; $n \in \mathbb{Q}$

07. $Re(Z_1 + Z_2) = Re(Z_1) + Re(Z_2)$

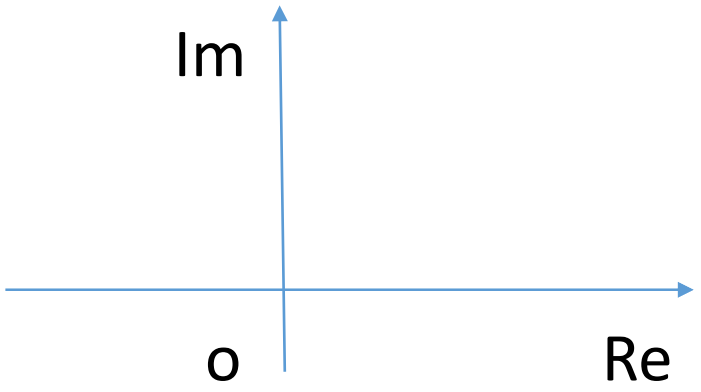
08. $Im(Z_1 + Z_2) = Im(Z_1) + Im(Z_2)$

09. $Z + \overline{Z} = 2Re(Z)$

10. $Z - \overline{Z} = 2Im(Z)i$

PLANO COMPLEJO

Definición:



Donde:

Re = Eje para la parte Real

Im = Eje para la parte imaginaria

O = Origen de coordenadas o polo

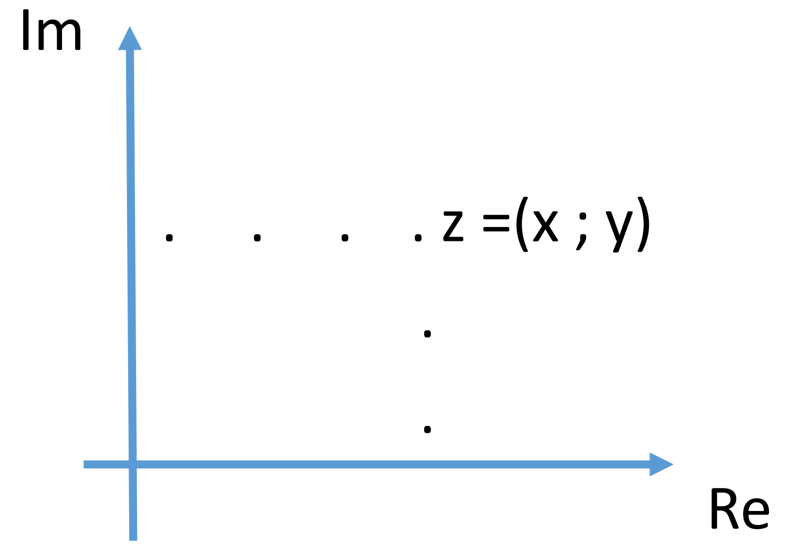
Observación: Al plano complejo también se le da el nombre de **Plano de Gauss o Diagrama de Argand.**

Representación grafica de un complejo z

Sea el complejo:

$$Z = (x\ ;\ y) = x + yi \ /\ x,y \in \mathbb{R}\ ;\ i = \sqrt{-1}$$

Su representación grafica en el plano de gauss será un punto al cual llamaremos **Afijo**.



MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO

Definición:

Dado el numero complejo:

$$Z = (x\ ;\ y) = x + yi\ /\ x,y \in \mathbb{R}\ ;\ i = \sqrt{-1}$$

Su modulo es igual que la distancia desde el polo del plano gausseano hasta su afijo

Para el numero complejo z su modulo se representa así:

$$\text{Mod}(Z) = |Z|$$

Matemáticamente:

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por ejemplo para el complejo:

$$Z = 3 - 4i$$

Tenemos:

$$|Z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Propiedades:

01. $|Z| \geq 0\ ;\ \forall\ Z \in C$

En el caso del complejo nulo ($Z = 0$), $|z| = 0$

02. $|Z| = |\overline{Z}| = |Zop|\ ;\ \forall\ Z \in C$

03. $|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|\ ;\ \forall\ Z_1, Z_2 \in C$

04. $|Z_1/Z_2| = |Z_1| / |Z_2|\ ;\ Z_1, Z_2 \in C\ ,\ Z_2 \neq 0$

05. $Z.\overline{Z} = |Z|^2$; $\forall\, Z \in C$

06. $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$; $\forall\, Z_1, Z_2 \in C$

Ejemplo aplicativo 08. Dado el complejo:

$$z = \frac{3+2i}{3-2i}$$

Determine su modulo.

Resolución:

Fácilmente podemos reconocer que en los términos de la fracción dada tenemos complejos donde uno es el conjugado del otro, es decir:

Si $w = 3 + 2i \rightarrow \overline{w} = 3-2i$

Con lo cual tenemos:

$$|Z| = \left|\frac{w}{\overline{w}}\right| = \frac{|w|}{|\overline{w}|} = \frac{|w|}{|w|} = 1$$

Ejemplo aplicativo 09. Dado el complejo:

$$Z = (1+i)(-2+3i)(3-i)$$

Determine su modulo.

Resolución:

Según las propiedades tenemos:

$$|Z| = \left(\sqrt{(1)^2+(1)^2}\right)\left(\sqrt{(-2)^2+(3)^2}\right)\left(\sqrt{(3)^2+(-1)^2}\right)$$

$$|Z| = (\sqrt{2})(\sqrt{13})(\sqrt{10})$$

$$|Z| = \sqrt{260}$$

Ejemplo aplicativo 10. **Determine la parte real del complejo Z =** $\frac{3+2i}{1-i}$

Resolución:

De acuerdo con la observación tenemos:

$Z = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+2i-2}{1+i-i+1} = \frac{1+5i}{2}$

$Z = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

Finalmente tenemos Re(Z) = $\frac{1}{2}$

Ejemplo aplicativo 11. **Dada la igualdad:**

$(1+i)^2 + (1+i)^4 + (1+i)^6 + (1+i)^8 = x + yi$

Calcular K= $\frac{x+y}{x-y}$

Resolución:

Según la teoría $(1+i)^2 = 2i$, luego:

$2i + (2i)^2 + (2i)^3 + (2i)^4 = x + yi$

$2i - 4 - 8i + 16 = 12 - 6i = x + yi$

Nótese que $x = 12 \wedge y = -6$

Finalmente tenemos K = $\frac{12-6}{12+6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

PROBLEMAS

1. Si $i^{39}=ai \wedge (2i)^{-3}=bi$, donde $\{a;b\}\subset\mathbb{R}$, calcule $\frac{a^2}{b^2}$.

A) $\frac{1}{64}$ B) 64 C) 32

D) $\frac{1}{8}$ E) 4

RESOLUCIÓN

- $i^{39}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=-i \quad \rightarrow -i=ai \quad \rightarrow a=-1$

- $(2i)^{-3}=\frac{1}{8i^3}=\frac{1}{8i} \quad \rightarrow \frac{1}{8i}=bi \quad \rightarrow -\frac{1}{8}=b$

Luego :

$$a^2=1 \;\; ; \;\; b^2=\frac{1}{64}$$

$$\boxed{\therefore \frac{a^2}{b^2}=64}$$

2. Sea

$$A = i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{\overline{ab}}$$

Calcule $\text{mín}(\overline{ab}) + \text{máx}(\overline{ab})$, tal que $A = 0$.

A) 96 B) 108 C) 12
D) 100 E) 112

Resolución

- $Para\ que\ \ A = 0 \quad \rightarrow \overline{ab} = multiplo\ de\ 4$

$$\min(\overline{ab}) = 12$$

$$\max(\overline{ab}) = 96$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{min(\overline{ab}) + max(\overline{ab}) = 108}}$$

3. Calcule el equivalente reducido de

$$M=\left(\frac{1+i^5}{1-i^5}+\frac{1-i^5}{1+i^5}\right)^2$$

A) $2i$ B) $5i$ C) 0
D) 2 E) 4

Resolución

- $Sabemos\ que:\ i^5=i$

$Reemplazando:$

$$M=\left(\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}\right)^2$$

RECORDAR:

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i}=i} \qquad \boxed{\frac{1-i}{1+i}=-i}$$

$Reemplazando:$

$$M=(i+(-i))^2$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{M=0}}$$

4. Halle el valor de n si se sabe que

$$z = \frac{3 + (n+1)i}{2 + 5i}$$

es un complejo real. (Considere que $n \in \mathbb{R}$).

A) 8,3 B) 8,5 C) 2,5
D) 6,5 E) 5,2

Resolución

- $Si\ Z\ es\ un\ complejo\ real\ ;se\ cumple\ que:$ $\dfrac{3 + (n+1)i}{2 + 5i} = k\ \ ;k\ \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow\ \ 3 + (n+1)i = 2k + 5ki$$

$$3 = 2k\ \ \wedge\ \ n + 1 = 5k$$

$$k = \frac{3}{2}\ \ \rightarrow n + 1 = 5\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{n} = \mathbf{6,5}}$$

5. Halle el valor de b si se sabe que

$$z = \frac{3 + 4i}{1 + bi}$$

es un imaginario puro. (Considere que $b \in \mathbb{R}$).

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $-\frac{3}{4}$

Resolución

- $Si\ Z\ \ es\ un\ imaginario\ puro\ ;se\ cumple\ que:$ $\dfrac{3 + 4i}{1 + bi} = ki$

$$3 + 4i = ki - bk \qquad Reemplazando:$$

$$\rightarrow\ 3 = -bk \quad \wedge \quad 4 = k \qquad\qquad 3 = -b(4)$$

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{b = -\frac{3}{4}}}$$

6. Calcule el módulo del complejo z si se sabe que

$$\frac{(1+i)z}{2+3i} = \cos 1° + i\,\text{sen}\, 1°$$

A) $\sqrt{6}$ B) $\frac{13}{3}$ C) 12

D) $\sqrt{\frac{13}{2}}$ E) 6

Resolución

- *Tomando el módulo a todo :* $\left|\frac{(1+i).Z}{2+3i}\right| = |cos1° + isen1°|$

$$\frac{|1+i|.|Z|}{|2+3i|} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}.|Z|}{\sqrt{13}} = 1$$

$$\boxed{\therefore |Z| = \sqrt{\frac{13}{2}}}$$

7. Siendo el complejo

$$Z = \cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-i}}} + 1$$

calcule el módulo de Z.

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $2\sqrt{2}$

D) 2 E) $\sqrt{2}$

Resolución

$$Recuerda: \boxed{\frac{1+i}{1-i} = i}$$

$$z = \cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\underbrace{\boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}}_{i}}} + 1$$

$$z = \cfrac{1+i}{1-\underbrace{\boxed{\cfrac{1+i}{1-i}}}_{i}} + 1$$

$$Z = \boxed{\frac{1+i}{1-i}} + 1$$

$$z = i + 1$$

$$piden: \ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$\boxed{\therefore |z| = \sqrt{2}}$$

8. Efectúe

$(\pi + i)^{-2} - i(\pi + i)^{-1} + i(\pi - i)^{-1} + (\pi - i)^{-2}$

siendo $i = \sqrt{-1}$.

A) $2(\pi^2 + 1)^{-1}$
B) $-2(\pi^2 - 1)^2$
C) 0
D) $-4(\pi^2 + 1)^{-2}$
E) -1

Resolución

Sea la expresión :

$$M = \underbrace{\frac{1}{(\pi + i)^2} + \frac{1}{(\pi - i)^2}}_{\frac{2(\pi^2 + i^2)}{(\pi^2 - i^2)^2}} + \underbrace{\frac{i}{\pi - i} - \frac{i}{\pi + i}}_{\frac{2i^2}{\pi^2 - i^2}}$$

$$\frac{2(\pi^2 + i^2)}{(\pi^2 - i^2)^2} + \frac{2i^2}{\pi^2 - i^2}$$

$$M = \frac{2(\pi^2 - 1)}{(\pi^2 + 1)^2} + \frac{-2(\pi^2 + 1)}{(\pi^2 + 1)^2}$$

$$M = \frac{\cancel{2\pi^2} - 2 - \cancel{2\pi^2} - 2}{(\pi^2 + 1)^2}$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{M = -4\left(\pi^2 + 1\right)^{-2}}}$$

9. Sea $Z \in \mathbb{C} - \{(0;0)\}$; calcule el módulo de Z tal que la expresión

$$\frac{Z}{36+Z^2}$$

sea un complejo real.

A) 36 B) 6 C) $\sqrt{6}$
D) 8 E) 3

Resolución

$Sea\ z = x + yi$

$Reemplazando\ en\ lo\ que\ piden$

$$\frac{z}{36+z^2} = \frac{x+yi}{x^2-y^2+36+2xyi} = k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$x + yi = (x^2 - y^2 + 36)k + 2kxyi$$

$$\begin{cases} (x^2 - y^2 - 36)k = x \ldots (1) \\ 2kxy = y \ \ldots (2) \end{cases}$$

$(1) \div (2)$

$$\frac{x^2-y^2+36}{2x} = x$$

$$x^2 - y^2 + 36 = 2x^2$$

$$\rightarrow\ x^2 + y^2 = 36$$

$$\boxed{\therefore |z| = 6}$$

10. Si $Z \cdot \overline{Z} + \sqrt{Z \cdot \overline{Z}} - 2 = 0$; calcule $|Z|$.

A) 3 B) 2 C) –2

D) 4 E) 1

Resolución

$$Sabemos: z.\bar{z} = |z|^2$$

$$|z|^2 + |z| - 2 = 0$$

$$(|z| - 2)(|z| + 1) = 0$$

$$\rightarrow \quad |z| = 2 \quad \vee \quad |z| = -1$$

$$como: \ |z| \geq 0$$

$$\boxed{\therefore \ |z| = 2}$$

11. Calcule

$$N = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-4i}$$

A) $e^{-\frac{\pi}{4}}$　　B) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　C) $e^{2\pi}$

D) $e^{-\frac{\pi}{2}}$　　E) e^{π}

Resolución

- *Sea el complejo :* $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

En su forma exponencial

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow \ |z| = 1$$

$$z = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

Piden :

$$N = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{-4i}$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{N = e^{\pi}}}$$

12. Dado

$$w = (2 + i)^2 + (1 + 3i)(1 - 3i) - 8i$$

halle el valor de

$$|w| + |\overline{w}| + |w^*| + |-w|$$

A) $2\sqrt{34}$ B) $\sqrt{34}$ C) $2\sqrt{136}$

D) $4\sqrt{185}$ E) $8\sqrt{17}$

Resolución

$Reduciendo\ w$

$$w = 3 + 4i + 1 + 9 - 8i$$

$$w = 13 - 4i$$

$Calculamos\ el\ módulo$

$$|w| = \sqrt{13^2 + (-4)^2}$$

$$|w| = 185$$

$Por\ teoria\ se\ sabe\ que:$

$$|w| = |\overline{w}| = |w^*| = |-w|$$

$$\therefore |w| + |\overline{w}| + |w^*| + |-w| = 16$$

SACO OLIVEROS APEIRON

13. Calcule la suma A de números complejos

$$A=(1+i)+\left(2+i^2\right)+\left(3+i^3\right)+\ldots+\left(4n+i^{4n}\right)$$

A) $n(2n+1)$
B) $2n(4n+1)$
C) 0
D) $n(4n+1)$
E) $2n(4n-1)$

Resolución

Ordenando la expresión:

$$A=\underbrace{1+2+3+4+\cdots+4n}+\underbrace{i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{4n}}$$

$$A=\quad\frac{\cancel{4}n(4n+1)}{\cancel{2}}\quad+\quad 0$$

$$\boxed{\therefore A=2n(4n+1}$$

14. Dados: $z = a^2 + 6i$, $w = 9 + (b^2 + a)i$,
$i = \sqrt{-1}$ y $z = w$

marque la alternativa incorrecta.

A) $z = 9 + 6i$
B) $a + b = 0$, para algunos $a \wedge b$
C) $ab = 9\sqrt{3}$
D) $ab = \pm 3\sqrt{3} \vee ab = \pm 9$
E) $\frac{a}{b} = -1$, para algunos $a \wedge b$

Resolución

$$z = a^2 + 6i \qquad w = 9 + (b^2 + a)i$$

$$Dato: z = w$$

$$\rightarrow a^2 = 9 \wedge b^2 + a = 6$$

- $a = 3 \rightarrow b = \sqrt{3} \vee -\sqrt{3}$
- $a = -3 \rightarrow b = 3 \vee -3$

$$z = 9 + 6i$$

$$Si\ a = -3\ y\ b = 3 \rightarrow a + b = 0$$

$$si\ a = -3\ y\ b = 3 \rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

La relación incorrecta es :

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{ab = 9\sqrt{3}}}$$

SACO OLIVEROS APEIRON

15. Sean $P(x) = x^2 - 4x + 13 \wedge z = 2 - 3i$.

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- $P(\bar{z}) = 0$ ( )
- $P(z+2) = 4 - 12i$ ( )
- $P(z^*) = 0$ ( )
- $P(z) = 0$ ( )

A) FVFV B) FFVV C) VVVV
D) VVFF E) VVFV

Resolución

$$P_{(x)} = x^2 - 4x + 13$$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4} + 9 = 0$$

$$(x-2)^2 - (3i)^2 = 0$$

$$(x - 2 + 3i)(x - 2 - 3i) = 0$$

Raices z :

$$z_1 = 2 - 3i \quad \vee \quad z_2 = 2 + 3i$$

$$\boxed{\therefore VVFV}$$

16. Determine la parte real de z^{15} si $z = 1 + i$.

A) –128 B) 128 C) 0
D) 1 E) 64

Resolución

$$sea\ \ z^{15} = (1+i)^{15} \ \ \rightarrow \ \ z^{15} = \left((1+i)^2\right)^7 . (1+i)$$

$$z^{15} = (2i)^7(1+i) \ \ \rightarrow z^{15} = 128i^7(1+i)$$

$$z^{15} = -128i(1+i) \ \ \rightarrow \ \ z^{15} = 128 - 128i$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{Re}_{(z^{15})} = \mathbf{128}}$$

17. Halle el valor de

$$S=\frac{2}{i}+\frac{3}{i^2}+\frac{4}{i^3}+\frac{5}{i^4}+\ldots+\frac{397}{i^{396}}$$

A) $198(1+i)$ B) $199(1+i)$

C) $396(1+i)$ D) $397(1+i)$

E) $243(1+i)$

Resolución

$$S=\frac{2}{i}+\frac{3}{i^2}+\frac{4}{i^3}+\frac{5}{i^4}+\cdots+\frac{397}{i^{396}}$$

$$\frac{S}{i}=\frac{2}{i^2}+\frac{3}{i^3}+\frac{4}{i^4}+\frac{5}{i^5}+\cdots+\frac{397}{i^{397}}$$

$-$

$$S\left(\frac{i-1}{i}\right)=\frac{2}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{396}}-\frac{397}{i}$$

$$S\left(\frac{i-1}{i}\right)=-2i+\frac{1}{i^2}\left[1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\cdots+\frac{1}{i^{394}}\right]+397i$$

$$S\left(\frac{i-1}{i}\right)=395i-\left[\frac{\left(\frac{1}{i}\right)^{395}-1}{\frac{1}{i}-1}\right]$$

$$S\left(\frac{i-1}{i}\right)=395i-\left[\frac{\frac{1}{-i}-1}{\frac{1-i}{i}}\right]$$

$$S\left(\frac{i-1}{i}\right)=395i-(-i)$$

$$S\left(\frac{i-1}{i}\right)=396i\ \rightarrow S=\frac{396i^2}{i-1}$$

$$\boxed{\therefore S=198i}$$

18. Simplifique

$$M=\left[\frac{a^{bi}+a^{-bi}}{2}\right]^2-\left[\frac{a^{bi}-a^{-bi}}{2}\right]^2+\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$$

donde n es un entero positivo y $a>0$.

A) 2 B) $1+i^{n-1}$ C) $1-2i^{n+1}$

D) $2i^{n-1}$ E) $1+2i^n$

Resolución

$$M=\underbrace{\left[\frac{a^{bi}+a^{-bi}}{2}\right]^2-\left[\frac{a^{bi}-a^{-bi}}{2}\right]^2}+\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$$

$$M=\cancel{4}\left[\frac{a^{bi}}{\cancel{2}}\right]\left[\frac{a^{-bi}}{\cancel{2}}\right]+\left(\frac{1+i}{\underbrace{1-i}_{i}}\right)^n.(1-i)^2$$

$$M=1+i^n.(-2i)$$

$$\boxed{\therefore\ M=1-2i^{n+1}}$$

19. Si

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20} \wedge w = i^{401} + (1-i)^4$$

calcule $\operatorname{Re}(z+w) + \operatorname{Im}(z-w)$.

A) -4 B) 4 C) 2

D) 1 E) -1

Resolución

$$z = i^{20} \quad \rightarrow \quad z = 1$$

$$w = i + (-2i)^2 \rightarrow w = -4 + i$$

$$z + w = -3 + i$$

$$z - w = 5 - i$$

$$\boxed{\therefore \boldsymbol{Re_{(z+w)} + Im_{(z-w)} = -4}}$$

20. Halle el valor de n si se sabe que el módulo del complejo z es igual a $n\sqrt{530}$.

$$z = \sum_{k=1}^{2n}\left[k + (-1)^k(k+1)i\right]$$

A) 10 B) 11 C) 12

D) 13 E) 14

Resolución

$$z = 1 - 2i + 2 + 3i + 3 - 4i + 4 + 5i + \cdots + 2n - (2n+1)i$$

Ordenando

$$z = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + 2n} + (\underbrace{3 + 5 + 7 + \cdots + 2n + 1})i - 2(\underbrace{1 + 2 + 3 + .. + n})i$$

$$z = \frac{\cancel{2}n(2n+1)}{\cancel{2}} + \frac{(3 + 2n + 1)}{2}n - \cancel{2}.\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\therefore\ \boldsymbol{n = 11}}$$

$$\rightarrow z = n(2n+1) + ni \qquad [z] = \sqrt{n^2(2n+1)^2 + n^2} \qquad \rightarrow n^2(2n+1)^2 + n^2 = n^2.\sqrt{530}^2$$