ALGEBRA

UNI

CHAPTER 8

LOGARITM
OS

SACO OLIVEROS

LOGARITMACION EN R

Definición:

Es el proceso mediante el cual se calcula un logaritmo mediante reglas formales dentro del conjunto R.

Logaritmo (Log):

El logaritmo de un numero positivo en una base positiva diferente de la unidad es el exponente que debe afectar a dicha base para obtener el numero propuesto.

Matemáticamente:

$$\log_b (N) = m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Donde:

N = Numero propuesto ; $N > 0$.

b = Base del logaritmo ; $b > 0$, $b \neq 1$.

m = Logaritmo ; $m \in C$.

Según la definición:

$$b^m = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Veamos algunos ejemplos:

$\log_3 (x) = 12 \leftrightarrow 3^{12} = x$

$\log_x (23) = 5 \leftrightarrow x^5 = 23$

Teorema:

Reemplazando (1) en (2) tenemos:

$$b^{\log_b(N)} = N$$

Veamos algunos ejemplos:

$5^{\log_5(10)} = 10$; $2^{\log_2(\pi)} = \pi$

PRINCIPALES SISTEMAS DE LOGARITMOS

1. Sistema decimal:

Aquí la base es 10 y en su notación no es necesario su escritura.

$$\log_{10}(N) = \log(N)$$

Al logaritmo del sistema decimal se le da el nombre de logaritmo decimal, vulgar o de Briggs.

2. Sistema natural:

Aquí la base es el numero trascendente **e** cuyo valor aproximado es 2,7182.

Este numero irracional es conocido como el numero de Napier.

$$\log_e(N) = \ln(N)$$

Al logaritmo del sistema natural se le da el nombre de logaritmo natural, hiperbólico o neperiano.

Observación:

Existen infinitos sistemas de logaritmos pues cada sistema se forma con un valor de la base.

Teoremas:

01. El logaritmo de la unidad es cero.

$$\log_b(1) = 0$$

02. El logaritmo de la base es uno.

$$\log_b(b) = 1$$

Ejemplo aplicativo 01. Reducir.

$$ln(e) + \log(\tan(\frac{\pi}{4}rad))$$

Resolución:

Si k es la forma reducida, tenemos:

$k = \log_e(e) + \log_{10}(1)$

$k = 1 + 0 = 1$

Ejemplo aplicativo 02. Calcule el logaritmo de 125 en base 25:

Resolución:

Sea x el logaritmo solicitado, luego:

$$\log_{25}(125) = x$$

Por definición y teorema:

$$25^x = 125 \leftrightarrow 5^{2x} = 5^3$$

$$2x = 3 \rightarrow x = 1,5$$

Propiedades:

01. $\log_b(M) + \log_b(N) = \log_b(M\,N)$

02. $\log_b(M) - \log_b(N) = \log_b\left(\frac{M}{N}\right)$

03. $\log_b(M^n) = n.\log_b(M)$

04. $\log_b(M) = \log_{b^m}(M^m)\ ;\ m \neq 0$

Reglas adicionales:

01. $\log_{b^n}(b^m) = \frac{m}{n}\ ;\ n \neq 0$

02. $\log_{\sqrt[n]{b}}(\sqrt[m]{b}) = \frac{n}{m}\ ;\ m, n \neq 0$

Ejemplo aplicativo 03. Reducir:

$$\log_{\sqrt{7}}(\sqrt[3]{7}) + \log_{2^6}(2^{10}) + 5^{\log_5(4)}$$

Resolución:

Si k es la forma reducida, tenemos:

$$k = \frac{2}{3} + \frac{10}{6} + 4 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + 4 = \frac{7}{3} + 4$$

$$k = \frac{19}{3}$$

Cambio de base (de base b a base m):

$$\log_b(N) = \frac{\log_m(N)}{\log_m(b)}$$

Veamos algunos ejemplos de la formula anterior.

$\log_5(12)$ a base 7:

$$\log_5(12) = \frac{\log_7(12)}{\log_7(5)}$$

$\log_3(2)$ a base 2:

$$\log_3(2) = \frac{\log_2(2)}{\log_2(3)}$$

$$\log_3(2) = \frac{1}{\log_2(3)}$$

Propiedad:

$$\boldsymbol{log}_{\mathbf{b}}\,(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{log}_{\mathbf{a}}\,(\mathbf{b})}$$

a y b son positivos distinto de la unidad.

Regla de la cadena:

$$\boldsymbol{log}_{\mathbf{b}}\,(\mathbf{a})\,.\,\boldsymbol{log}_{\mathbf{a}}\,(\mathbf{c}).\ \boldsymbol{log}_{\mathbf{c}}\,(\mathbf{d}) = \boldsymbol{log}_{\mathbf{b}}\,(\mathbf{d})$$

Veamos un ejemplo:

$k = \boldsymbol{log}_{\mathbf{5}}\,(\mathbf{7})\,.\,\boldsymbol{log}_{\mathbf{7}}\,(\mathbf{2}).\ \boldsymbol{log}_{\mathbf{2}}\,(\mathbf{25})$

$k = \boldsymbol{log}_{\mathbf{5}}\,(\mathbf{25})$

$k = \boldsymbol{log}_{\mathbf{5}}\,(\mathbf{5}^{2}) = 2.\ \log_5(5) = 2.1 = 2$

Transformaciones adicionales:

01. Siendo c cualquier numero real y b un positivo distinto de la unidad.

$$c = log_b (b^c)$$

Por ejemplo 5 = $log_7 (7^5) = log_\pi (\pi^5)$

02. Siendo a , b y c positivos tal que b es distinto de la unidad.

$$a^{\log_b (c)} = c^{\log_b (a)}$$

Por ejemplo $2^{\log_5 (13)} = 13^{\log_5 (2)}$

COLOGARITMO Y ANTILOGARITMO

Cologaritmo (colog):

Siendo **N** un numero positivo y **b** cualquier positivo distinto de la unidad:

$$\mathrm{colog}_b (N) = -\log_b (N)$$

Por ejemplo:

$\mathrm{colog}_2 (8) = -\log_2 (8)$ = -3.1 = -3

Antilogaritmo (antilog):

Siendo **P** un numero real y **b** un numero positivo distinto de la unidad.

$$\mathrm{antilog}_b (P) = \exp_b (P) = b^P$$

Veamos algunos ejemplos:

$\text{antilog}_5\,(0) = \exp_5\,(0) = 5^0 = 1$

$\text{antilog}_3\,(4) = \exp_3\,(4) = 3^4 = 81$

$\text{antilog}_7\,(-1) = \exp_7\,(-1) = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

Reglas de composición:

01. $\text{antilog}_b\,(\log_b\,(x)) = x\,;\, x > 0$

02. $\log_b\,(\text{antilog}_b\,(x)) = x\,;\, x \in R$

03. $\text{antilog}_b\,(\text{colog}_b\,(x)) = \frac{1}{x}\,;\, x > 0$

04. $\text{colog}_b\,(\text{antilog}_b\,(x)) = -x\,;\, x \in R$

Ejemplo aplicativo 04. Reducir:

$$\text{antilog}_{\sqrt{7}}\,(4) + \text{colog}_3\,(9) + \log_{16}\,(4)$$

Resolución:

Según la definición tenemos:

$\text{antilog}_{\sqrt{7}}\,(4) = \sqrt{7}^{\,4} = 7^2 = 49$

$\text{colog}_3\,(9) = -\log_3(3^2) = -2.1 = -2$

$\log_{16}\,(4) = \log_{(4^2)}\,(4) = \frac{1}{2}$

Finalmente siendo k es la forma reducida:

$k = 49 - 2 + \frac{1}{2} = 47 + \frac{1}{2} = \frac{95}{2}$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. Si $a+b=ab$ y $\dfrac{1}{\log_a(ab)}+\dfrac{1}{\log_b(a+b)}=\sqrt{x}-1$.

Calcule $\dfrac{x}{2}$.

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{5}$
D) 0,5 E) 1

RESOLUCIÓN

$$\frac{1}{\log_a(ab)}+\frac{1}{\log_b(a+b)}=\sqrt{x}-1$$

$$\frac{1}{\log_a(ab)}+\frac{1}{\log_b(ab)}=\sqrt{x}-1$$

$$\log_{(ab)}(a)+\log_{(ab)}(b)=\sqrt{x}-1$$

$$\log_{(ab)}(ab)=\sqrt{x}-1$$

$$1=\sqrt{x}-1$$

$$2=\sqrt{x}$$

$$x=4$$

$$\therefore \frac{x}{2}=2$$

2. Halle el valor de $\log_{2\sqrt{2}} 0,25$

A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{4}{3}$

D) $-\frac{5}{3}$ E) -2

RESOLUCIÓN

$$\log_{2\sqrt{2}} 0,25 = m \qquad \left(2\sqrt{2}\right)^{m} = 0,25$$

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{m} = 2^{-2} \qquad 2^{\frac{3m}{2}} = 2^{-2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{3m}{2} = -2$$

$$\therefore m = -\frac{4}{3}$$

3. Simplifique

$$K = \log_{\left[\frac{4}{25}\right]}\left(\log_{32} 4\right)$$

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75

D) 1 E) 1,25

RESOLUCIÓN

$$K = \log_{\left[\frac{4}{25}\right]}\left(\log_{2^5}\ 2^2\right)$$

$$K = \log_{\left(\frac{2}{5}\right)^2}\left(\frac{2}{5}\cancel{\log_2 2}\right)$$

$$K = \log_{\left(\frac{2}{5}\right)^2}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\cancel{\log_{\left(\frac{2}{5}\right)}\left(\frac{2}{5}\right)}$$

$$\boxed{\therefore k = \frac{1}{2}}$$

4. Si $\log 4 = x$, $\log 9 = y$, el valor de la expresión

$\log\dfrac{1024}{81} + 2\log 36$ en términos de x e y es

A) $5x-24$ B) $3x-4y$ C) $2x-5y$

D) $4x-3y$ E) $7x$

RESOLUCIÓN

$$dato: \ \log 2^2 = x \rightarrow \log 2 = \frac{x}{2} \qquad \log 3^2 = y \rightarrow \log 3 = \frac{y}{2}$$

$$piden \quad \log\left(\frac{2^{10}}{3^4}\right) + 2\log 6^2$$

$$10\log 2 - 4\log 3 + 4[\log 3 + \log 2]$$

Reemplazando :

$$10.\frac{x}{2} - 4.\frac{y}{2} + 4\left[\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right]$$

$$5x - \cancel{2y} + 2x + \cancel{2y}$$

$$\boxed{\therefore 7x}$$

5. Si $5^{\log_b 3} + 7^{\log_7 b^2} = 3^{\log_b 5} + \log_{\sqrt[3]{3}} 3$, calcule $b^2 + 2$.

A) -5 B) 5 C) $\{5; -1\}$

D) -1 E) $\{1; -5\}$

RESOLUCIÓN

$$\cancel{5^{\log_b 3}} + 7^{\log_7 b^2} = \cancel{5^{\log_b 3}} + \log_{\sqrt[3]{3}} 3^3$$

$$b^2 = 3 \log_3 3$$

$$b^2 = 3$$

$$\boxed{\therefore\ b^2 + 2 = 5}$$

6. Indique el valor de

$$\left[\sqrt[\log_3 2]{4}\,.\,\sqrt[\log_2 3]{9}\right]^{\log_6 5}$$

A) 1 B) 5 C) 25

D) 125 E) 625

RESOLUCIÓN

$$\left[\sqrt[\log_3 2]{2^2}.\ \sqrt[\log_2 3]{3^2}\right]^{\log_6 5}$$

$$\left[\left(\sqrt[\log_3 2]{2}.\ \sqrt[\log_2 3]{3}\right)^2\right]^{\log_6 5}$$

$$\left[2^{\frac{1}{\log_3 2}}.\ 3^{\frac{1}{\log_2 3}}\right]^{2\log_6 5}$$

$$\left[\cancel{2}^{\cancel{\log_2} 3}.\ \cancel{3}^{\cancel{\log_3} 2}\right]^{\log_6 5^2}$$

$$[3.2]^{\log_6 25}$$

$$\cancel{6}^{\cancel{\log_6} 25}$$

$$\boxed{\therefore\ 25}$$

7. Si $\log 2 = a$, calcule $\log_5 \sqrt[3]{500}$

A) $\dfrac{3-a}{3(1-a)}$ B) $\dfrac{3-a}{1-a}$ C) $\dfrac{2-a}{1-a}$

D) $\dfrac{2-a}{2(1-a)}$ E) $\dfrac{3+a}{3(1+a)}$

RESOLUCIÓN

$$M = \frac{1}{3}\log_5 500 \rightarrow M = \frac{1}{3}[\log_5 125 + \log_5 4]$$

$$M = \frac{1}{3}[3 + 2\log_5 2] \rightarrow M = \frac{1}{3}\left[3 + 2\frac{\log 2}{\log 5}\right]$$

$$M = \frac{1}{3}\left[3 + 2\frac{\log 2}{\log\left(\frac{10}{2}\right)}\right] \rightarrow M = \frac{1}{3}\left[3 + 2\frac{\log 2}{1 - \log 2}\right]$$

Reemplazandoel dato :

$$M = \frac{1}{3}\left[3 + 2\frac{a}{1-a}\right]$$

$$M = \frac{1}{3}\left[\frac{3 - 3a + 2a}{1-a}\right]$$

$$\boxed{\therefore M = \frac{3-a}{3(1-a)}}$$

8. Si $\log_a 3 = \log_b 2$ y $ab = 10$, halle el valor de b.

A) $\sqrt[\log 5]{2}$ B) $\sqrt[\log 6]{2}$ C) $\sqrt[\log 4]{2}$

D) $\sqrt[\log 7]{2}$ E) $\sqrt[\log 11]{2}$

RESOLUCIÓN

$$\log_a 3 = \log_b 2 = k \quad \rightarrow 3 = a^k \;\wedge\; 2 = b^k \qquad Piden\ "b"$$

$$Del\ dato: ab = 10 \;\rightarrow\; a^k . b^k = 10^k \qquad 2 = b^{\log 6}$$

$$3.2 = 10^k \quad \rightarrow 6 = 10^k \qquad 2^{\frac{1}{\log 6}} = b$$

$$\log 6 = k$$

$$\boxed{\therefore b = \sqrt[log6]{2}}$$

9. Reduzca

$$\frac{1}{1+\log_3(10e)}+\frac{1}{1+\mathrm{Ln}(30)}+\frac{1}{1+\log(3e)}$$

A) 1 B) log3 C) Ln(10)

D) Ln(10) E) log(3e)

RESOLUCIÓN

$$M=\frac{1}{\log_3 3+\log_3(10e)}+\frac{1}{\ln e+\ln(30)}+\frac{1}{\log 10+\log(3e)}$$

$$M=\frac{1}{\log_3(30e)}+\frac{1}{\ln(30e)}+\frac{1}{\log 30e}$$

$$M=\log_{(30e)}(3)+\log_{(30e)}(e)+\log_{(30e)}(10)$$

$$M=\log_{(30e)}(30e)$$

$$\boxed{\therefore M=1}$$

10. Los logaritmos decimales de 2 y 3 son

$\log 2 = 0{,}3010;\ \log 3 = 0{,}4711$

calcule $\log\sqrt{2880}$ con cuatro cifras decimales.

A) 11,4116 B) 1,7236 C) 2,2236
D) 1,7080 E) 2,0103

RESOLUCIÓN

$$M = \frac{1}{2}[\log(10x288)]$$

$$M = \frac{1}{2}[1 + \log(32x9)]$$

$$M = \frac{1}{2}[1 + \log 32 + \log 9]$$

$$M = \frac{1}{2}[1 + 5\log 2 + 2\log 3]$$

$reemplazamos\ los\ datos:$

$$M = \frac{1}{2}[1 + 5(0{,}3010) + 2(0{,}4711)]$$

$$\boxed{\therefore M = 1{,}7236}$$

11. Si $a > b > c > 1$, reduzca

$$E = \frac{\log_c a + 1}{\log_c b \cdot \log_b \left(a^2 c^2\right)}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{ac}{b}$ C) abc

D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\log_c a + \log_c c}{\log_c \cancel{b} . \log_{\cancel{b}}(a^2 c^2)}$$

$$E = \frac{\log_c (ac)}{\log_c (a^2 . c^2)}$$

$$E = \log_{(ac)^2}(ac)$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{1}{2}}$$

12. Si $\log 15 = a$, $\log 21 = b$ y $\log 35 = c$, halle $\log 49$.

A) $b+c-a$ B) $a-b+c$ C) $2a-b+c$

D) $b-2a+c$ E) $c-a-b$

RESOLUCIÓN

$$\log 5 + \log 3 = a \ \dots (i)$$

$$\log 7 + \log 3 = b \ \dots (ii)$$

$$\log 7 + \log 5 = c \ \dots (iii)$$

$$(ii) - (i): \quad \log 7 - \log 5 = b - a \ \dots (iv)$$

$$(iii) + (iv): \quad 2\log 7 = c + b - a$$

$$\boxed{\therefore \log \mathbf{49} = \boldsymbol{c + b - a}}$$

13. Si se verifica que

$$\log_{\frac{11}{10}}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^{-n}=n$$

calcule $\log(n^2+10n)$.

A) 3log2 B) 2log2 C) 3+log2
D) 2+log2 E) 2+log3

RESOLUCIÓN

$$\log_{\frac{11}{10}}\left[1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right]^{-n}=n$$

$$\log_{\frac{11}{10}}\left[\frac{n}{n+1}\right]^{-n}=n \quad \rightarrow \quad \left[\frac{n+1}{n}\right]^{n}=\left(\frac{11}{10}\right)^{n}$$

$\longrightarrow$ $n=10$ $\quad$ *reemplazamos en lo que piden:*

$$\log(10^2+10x10) \ \rightarrow\ \log 200 \ \rightarrow\ \log(2x100)$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbf{2}+\log 2}$$

14. Halle los valores de x que satisfacen la ecuación

$$5^{\log_x\left(x^2-5x+15\right)}=3^{\log_x 25}$$

A) $2 \vee 2$ B) $2 \vee 3$ C) $2 \vee 4$
D) $3 \vee 0$ E) $3 \vee 5$

RESOLUCIÓN

$$5^{\log_x\left(x^2-5x+15\right)}=(5^2)^{\log_x 3}$$

$$5^{\log_x\left(x^2-5x+15\right)}=5^{\log_x 3^2}$$

$$\rightarrow \log_x(x^2-5x+15)=\log_x 9$$

- $x>0 \wedge x\neq 1$

$$x^2-5x+15=9$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$\rightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$x-2=0 \vee x-3=0$$

$$\boxed{\therefore x=2 \vee 3}$$

15. Calcule

$$E=\left[\frac{1}{2+\log_3 5}\right]\left[\frac{1}{1-\log_{45} 9}\right]\left[\frac{\mathrm{Ln}25}{\mathrm{Ln}3}\right]$$

A) 2 B) 5 C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{5}$ E) 10^{-1}

RESOLUCIÓN

$$E=\left[\frac{1}{2.\log_3 3+\log_3 5}\right]\left[\frac{1}{\log_{45} 45-\log_{45} 9}\right]\log_3 25$$

$$E=\left[\frac{1}{\log_3 3^2+\log_3 5}\right]\left[\frac{1}{\log_{45}\left(\frac{45}{9}\right)}\right]\log_3 25$$

$$E=\left[\frac{1}{\log_3 45}\right]\left[\frac{1}{\log_{45} 5}\right]\log_3 25$$

$$E=\cancel{\log_{45} 3}.\log_5 \cancel{45}.\cancel{\log_3}25$$

$$E=\log_5 25$$

$$\boxed{\therefore E=2}$$

16. Si $\log_{ab}a=4$, $a>1$, $b>1$. Calcule

$$\log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{13}{6}$

D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{17}{6}$

RESOLUCIÓN

- $(ab)^4 = a \rightarrow a^3b^4 = 1 \rightarrow \sqrt{b} = a^{-\frac{3}{8}}$

Reemplazando :

$$\log_{ab}\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{3}{8}}}\right) \rightarrow \log_{ab}(a)^{\frac{17}{24}} \rightarrow \frac{17}{24}\log_{ab} a \rightarrow \frac{17}{\cancel{24}}(\cancel{4})$$

$$\boxed{\therefore \frac{17}{6}}$$

17. Si $\log_4 x + \log_x 2 = \frac{3}{2}$. Halle el mayor valor de $\log_a b$, siendo a y b soluciones de la ecuación.

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 4

D) $\frac{1}{4}$ E) 1

RESOLUCIÓN

$$\frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{3}{2}$$

$$(\log_2 x)^2 + 2 = 3\log_2 x$$

$$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$$

$$(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \log_2 x = 2 \ \vee \ \log_2 x = 1$$

$$x = 4 \ \vee \ x = 2$$

$piden:$

$$\log_2 4 \ \vee \ \log_4 2$$

$$\rightarrow 2 \ \vee \ \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\therefore mayor = 2}$$

18. Si $\log_3 5 = a$, entonces $\log_{15} 81$ es

A) $4(a+1)^{-1}$ B) $2(a+1)^{-1}$ C) $(a+4)^{-1}$

D) $3(a+2)^{2}$ E) $4(a+2)^{-1}$

RESOLUCIÓN

hacemos un cambio de base :

$$\log_{15} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 15} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{\log_3 5 + \log_3 3}$$

$$\frac{4}{a+1}$$

$$\boxed{\therefore \log_{15} 81 = 4(a+1)^{-1}}$$

19. Resuelva la ecuación

$$(\log x)^{\frac{\operatorname{co}\log \operatorname{anti}\log x}{\log \log x}} = 10^{-2}$$

A) 0　　B) 1　　C) 2

D) 3　　E) 4

RESOLUCIÓN

$$(\log x)^{\frac{-\log 10^{x}}{\log logx}} = 10^{-2}$$

$$(\log x)^{\frac{\log 10^{-x}}{\log logx}} = 10^{-2}$$

$$\cancel{(\log x)}^{\log_{\cancel{\log x}} 10^{-x}} = 10^{-2}$$

$$10^{-x} = 10^{-2}$$

$$\boxed{\therefore\, x = 2}$$

20. Si $\log_{2006}(\log_{2005}(\log_{2004}x))=0$, halle el valor de x.

A) 2004^{2006} B) 2005^{2006} C) 2005^{2004}

D) 2004^{2005} E) 2006^{2005}

RESOLUCIÓN

$$\log_{(2006)}\underbrace{(\log_{2005}(\log_{2004}x))}_{1} = 0 \quad \rightarrow \quad \log_{2004}x = 2005$$

$$\log_{2005}(\log_{2004}x) = 1$$

$$\boxed{\therefore x = 2004^{2005}}$$