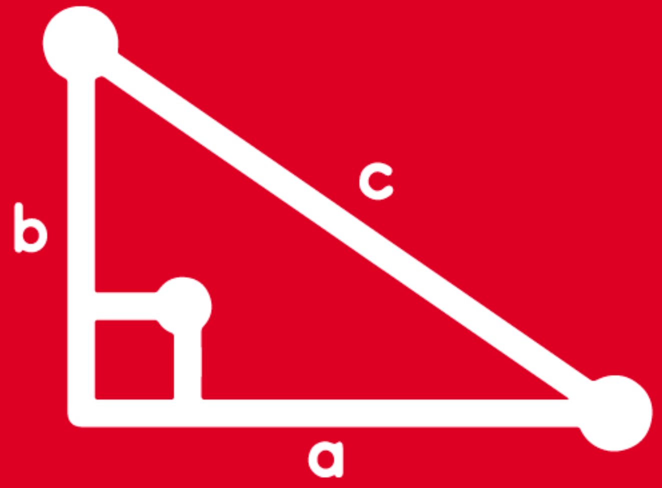
TRIGONOMETRY

Chapter 4

Verano 2021

SAN MARCOS



Identidades trigonométricas fundamentales y auxiliares

SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVACIÓN

El motor eléctrico transforma la energía eléctrica en trabajo mecánico.

En especial nos interesa el consumo de corriente eléctrica del motor ya que esto se traduce en tarifas (pagos) que hacen los usuarios.

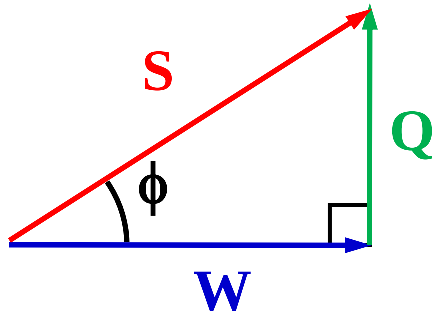
Así definimos :

W : **Potencia activa** , es la potencia utilizada por el motor , es la potencia a pagar. Se mide en kilowatts.

Q : **Potencia reactiva** , es la potencia consumida por el bobinado del motor.

S : **Potencia aparente** , es la suma vectorial de **W** y **Q**).

ϕ : Es el desfasaje (ángulo).



Del **triángulo de potencias** mostrado :

$$Q = S.\text{sen}\phi \Rightarrow Q^2 = S^2.\text{sen}^2\phi \quad +$$
$$W = S.\cos\phi \Rightarrow W^2 = S^2.\cos^2\phi$$

$$Q^2 + W^2 = S^2\left(\underbrace{\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi}_{1}\right)$$

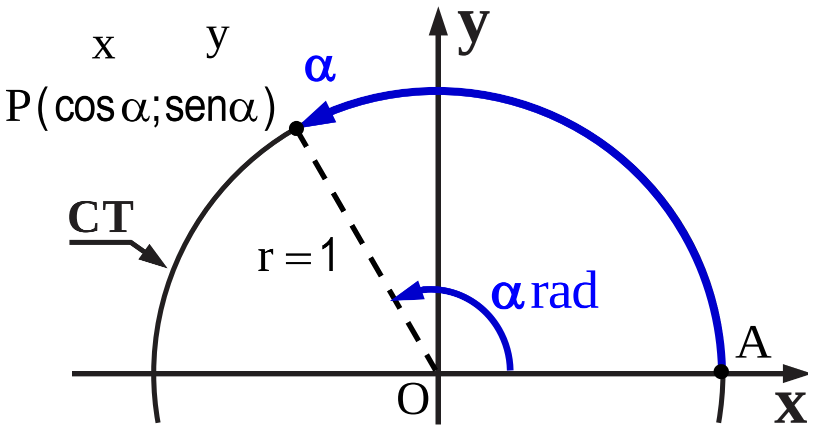
Así : $Q^2 + W^2 = S^2$

$\therefore W = \sqrt{S^2 - Q^2}$

¿ Cuál es la conclusión de este resultado ?

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

En la CT, ubicamos el arco $\alpha \in \text{IIC}$



Recordar que las coordenadas del punto P, son $(\cos\alpha;\operatorname{sen}\alpha)$.

En el sector circular AOP, trazamos el ángulo central $\alpha\,\text{rad}$.

Usando definiciones para el ángulo $\alpha\,\text{rad}$, en posición normal :

- $\tan(\alpha\,\text{rad}) = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$
- $\sec(\alpha\,\text{rad}) = \dfrac{r}{x} \Rightarrow \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha.\sec\alpha = 1}$

El punto $P \in CT$, entonces cumple : $x^2 + y^2 = 1$

$(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Concepto :

Una ecuación que contiene operadores trigonométricos tales como sen, cos, etc,. Y que es valida para todos los valores admisibles de la variable o variables ,recibe el nombre de identidad trigonométrica.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

1. Identidades por Cociente :

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

2. Identidades Recíprocas :

$$\operatorname{sen} x . \csc x = 1 \quad \begin{cases} \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\csc x} \end{cases}$$

$$\cos x . \sec x = 1 \quad \begin{cases} \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sec x} \end{cases}$$

$$\tan x . \cot x = 1 \quad \begin{cases} \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \\ \tan x = \dfrac{1}{\cot x} \end{cases}$$

3. Identidades Pitagóricas :

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{cases}$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \quad \begin{cases} \sec^2 x = \tan^2 x + 1 \\ \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1 \quad \begin{cases} \csc^2 x = \cot^2 x + 1 \\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \end{cases}$$

Ejemplo :

Reducir la expresión $E = \tan x . \operatorname{sen} x + \cos x$

Resolución

Usando las identidades :

$$E = \tan x . \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\Rightarrow E = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} . \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\Rightarrow E = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1}$$

m.c.m :

$$\Rightarrow E = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}}{\cos x}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\cos x} \qquad \therefore E = \sec x$$

Observación :

De las identidades pitagóricas :

Si: $\sec x + \tan x = n \Rightarrow \sec x - \tan x = \frac{1}{n}$

Si: $\csc x + \cot x = m \Rightarrow \csc x - \cot x = \frac{1}{m}$

Ejemplo :

Siendo : $\csc x + \cot x = 2$

Calcule : $\operatorname{sen} x$

Resolución

DATO : $\csc x + \cot x = 2 \quad \ldots \text{(I)}$

De la **Observación** anterior : $\csc x - \cot x = \dfrac{1}{2} \quad \ldots \text{(II)}$

(I) + (II) :

$$2\csc x = 2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\csc x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \csc x = \frac{5}{4} \qquad \therefore \operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

1. $\tan x + \cot x = \sec x . \csc x$
2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x . \csc^2 x$
3. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x$
4. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x$
5. $(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$

   $(1 + \operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \cos x)$

   $(1 - \operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 2(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$

   $(1 - \operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2(1 - \operatorname{sen} x)(1 - \cos x)$

1. *Reduzca*

$$L = (2senx + cosx)^2 + (senx - 2cosx)^2$$

$A)1$ $B)2$ $C)3$

$D)4$ $E)5$

Recordar la identidad:

$$\boxed{sen^2x + cos^2x = 1}$$

Resolución:

$$L = (2senx + cosx)^2 + (senx - 2cosx)^2$$

$$L = 4senx^2 + cosx^2 + \cancel{4\,senx\,cosx} + senx^2 + 4cosx^2 - \cancel{4\,senx\,cosx}$$

$$L = \underbrace{4senx^2 + 4cosx^2} \quad \underbrace{+senx^2 + cosx^2}$$

$$L = 4(senx^2 + cosx^2) \quad + \quad 1$$

$$L = \quad 4(1) \quad + \quad 1$$

$\therefore$ **L= 5**

2. *Reduzca*

$$E=(1+tan^2x)^2-(sec^2x\ -1)^2-tan^2x$$

$A)-2$ $B)-1$ $\cancel{C})sec^2x$

$D)tan^2x$ $E)1$

Recordar las identidades:

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$

$\sec^2 x-1=\tan^2 x$

Resolución:

$$E=(\underbrace{1+tan^2x}_{})^2-(\underbrace{sec^2x\ -1}_{})^2-tan^2x$$

$$E=(sec^2x)^2-(tan^2x)^2-tan^2x$$

$$E=(sec^4x-tan^4x)\ -tan^2x$$

$$E=(\underbrace{sec^2x-tan^2x}_{})(sec^2x+tan^2x)\ -tan^2x$$

$$E=1\ (sec^2x+tan^2x)\ -tan^2x$$

$$E=sec^2x+\cancel{tan^2x}-\cancel{tan^2x}$$

$$\therefore\ \boxed{E=sec^2x}$$

3. Reduzca:

$$T = (senx - cosx)^2 + 2\sqrt{(1 - sen^2x)(1 - cos^2x)}$$

siendo x la medida de un ángulo agudo

$A)\ 4\ senx.cosx$ $\quad$ $\cancel{B)}\ 1$ $\quad$ $C)\ -1$

$D)\ -4\ senx.cosx$ $\quad$ $E)\ 0$

Recordar las identidades:

$\mathrm{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$1 - \cos^2x = \mathrm{sen}^2x$ $\quad$ $1 - \mathrm{sen}^2x = \cos^2x$

Resolución:

$$T = (senx - cosx)^2 + 2\sqrt{(1 - sen^2x)(1 - cos^2x)}$$

$$T = \underbrace{sen^2x + cos^2x}_{} - 2\ senxcosx + 2\sqrt{(cos^2x)(sen^2x)}$$

$$T = \quad 1 - \quad 2\ senx \cdot cosx\ - 2|cosx \cdot senx|$$

Como $0° < x < 90°$

$$|cosx \cdot senx| = cosx \cdot senx$$

$$T = 1 - \cancel{2\ senx \cdot cosx} + \cancel{2\ cosx \cdot senx}$$

$$\therefore \boxed{T = 1}$$

4. Escriba verdadero(V) o falso (F) según corresponda, luego indique la alternativa correcta.

- $sen^4x - cos^4x = sen^2x - cos^2x$ (V)
- $sen^2x - cos^2y = sen^2y - cos^2x$ (V)
- $tanx + cotx = senx \cdot cosx$ ( )

$A)\ VVF$ $B)\ VVV$ $C)\ FVV$
$D)\ VFV$ $E)\ FVF$

Resolución:

- $sen^4x - cos^4x = sen^2x - cos^2x$ $\cdots (V)$

$$sen^4x - cos^4x = (sen^2x + cos^2x)(sen^2x - cos^2x)$$

$$sen^4x - cos^4x = 1\ (sen^2x - cos^2x)$$

- $sen^2x - cos^2y = sen^2y - cos^2x$ $.....(V)$

$$sen^2x - cos^2y = \left(1 - cos^2y\right) - (1 - sen^2x)$$

$$sen^2x - cos^2y = sen^2y - cos^2x$$

4. Escriba verdadero(V) o falso (F) según corresponda, luego indique la alternativa correcta.

- $sen^4x - cos^4x = sen^2x - cos^2x$ (V)
- $sen^2x - cos^2y = sen^2y - cos^2x$ (V)
- $tanx + cotx = senx \cdot cosx$ (F)

~~A)~~ VVF B) VVV C) FVV
D) VFV E) FVF

Resolución:

- $tanx + cotx = senx \cdot cosx$ $\cdots(F)$

$$tanx + cotx = \frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx}$$

$$tanx + cotx = \frac{sen^2x + cos^2x}{cosx \cdot senx}$$

$$tanx + cotx = \frac{1}{cosx \cdot senx}$$

$$tanx + cotx = secx \cdot cscx$$

5. *Si* $sen\theta + sen^3\theta = a$;

$cos\theta + cos^3\theta = b$,

calcule :

$$E = \frac{a}{sen\theta} + \frac{b}{cos\theta}$$

A)1 B)2 ~~C)~~3 D)4 E)5

Recordar la identidad:

$$\boxed{sen^2x + cos^2x = 1}$$

Resolución:

$sen\theta + sen^3\theta = a$

$sen\theta\,(1 + sen^2\theta) = a$

$cos\theta + cos^3\theta = b$

$cos\theta\,(1 + cos^2\theta) = b$

Reemplazando en E

$$E = \frac{sen\theta(1 + sen^2\theta)}{sen\theta} + \frac{cos\theta\ (1 + cos^2\theta)}{cos\theta}$$

$$E = 1 + sen^2\theta\ + 1 + cos^2\theta$$

$$E = 2 + \underbrace{sen^2\theta + cos^2\theta}$$

$$E = 2 \quad + \quad 1$$

$$\therefore\ \boxed{E = 3}$$

6. $Si\ cot^2x + cotx = 1\ calcule$

$$P = cotx - tanx$$

$A)0$ $\cancel{B})\ 1$ $C) - 1$

$D) - 2$ $E)\ 2$

Recordar la identidad:

$$\boxed{tanx.cotx = 1}$$

Resolución:

$$cot^2x + cotx = 1 \quad \cdots \times (tan\ x)$$

$$tanx \cdot cot^2x + tanx \cdot cotx = tanx \cdot 1$$

$$cotx + 1 = tanx$$

$$\underbrace{cotx - tanx}_{} = 1$$

$$P = 1$$

$$\therefore \boxed{P = 1}$$

7. $Si\ senx(1 + senx) = 1$

calcule el valor de

$$E = sen^2x + sec^2x$$

$A)1$ $\cancel{B}) 2$ $C)3$

$D)4$ $E) 5$

Recordar las identidades:

$$\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x} = 1$$

$$\mathrm{tan x} = \frac{\mathrm{senx}}{\mathrm{cosx}}$$

Resolución:

$$senx(1 + senx) = \underbrace{1}$$

$$senx + \cancel{sen^2x} = \cancel{sen^2x} + cos^2x$$

$$senx = cos^2x$$

$$senx = cosx \cdot cosx$$

$$tanx = cosx$$

$$(E^2) \ldots \quad tan^2x = cos^2x$$

$$tan^2x = 1 - sen^2x$$

$$sen^2x = 1 - tan^2x$$

Reemplazando en E

$$E = 1 \underbrace{- tan^2x + sec^2x}$$

$$E = 1 + 1$$

$\therefore$ $\boxed{E = 2}$

8. *Determine el equivalente de*

$$U = cosx\left(\frac{1+senx}{1\ -senx}-\frac{1-senx}{1+senx}\right)$$

$A)2\ senx$ $\qquad B)\ 2secx$ $\qquad \cancel{C})4\ tanx$

$D)4\ cotx$ $\qquad E)\ 1$

Identidad de Legendre:

$$\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2=4ab}$$

Recordar la identidad:

$$\boxed{1-sen^2x=\cos^2x}$$

Resolución:

$$U = cosx\left[\frac{1+senx}{1\ -senx}-\frac{1-senx}{1+senx}\right]$$

$$U = cosx\left[\frac{(1+senx)^2-(1-senx)^2}{(1\ -senx)(1+senx)}\right]$$

$$U = cosx\ \left[\frac{4(1)(senx)}{(1-sen^2x\ )}\right]$$

$$U = \frac{\cancel{cosx}.4.senx}{(cos\cancel{^2}x\ )}$$

$$U = 4\ .\frac{senx}{cosx}$$

$$U = 4\cdot tanx$$

$\therefore$ $\boxed{U = 4tanx}$

9. Calcule $\tan^2\theta$, si

$$a\,sen^2\theta + b\cos^2\theta = c$$

A) $\dfrac{c-b}{a-c}$ B) $\dfrac{c-b}{a+c}$ C) $\dfrac{c+b}{a-c}$

D) $\dfrac{a+c}{c-b}$ E) $\dfrac{a-c}{c-b}$

Recordar la identidad:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Resolución:

$a\,sen^2\theta + b\cos^2\theta = c$ .....$\div \cos^2\theta$

$$\frac{a\,sen^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{b\,\cancel{\cos^2\theta}}{\cancel{\cos^2\theta}} = \frac{c}{\cos^2\theta}$$

$$a\tan^2\theta + b = c\sec^2\theta$$

$$a\tan^2\theta + b = c\,(1 + \tan^2\theta)$$

$$a\tan^2\theta + b = c + c\tan^2\theta$$

$$a\tan^2\theta - c\tan^2\theta = c - b$$

$$\tan^2\theta(a-c) = c - b$$

$$\therefore \boxed{\tan^2\theta = \frac{c-b}{a-c}}$$

9. **Dada la siguente condición para el arco θ , calcule $\tan^2\theta$.**

$$a\,sen^2\theta + b\cos^2\theta = c$$

A) $\dfrac{c-b}{a-c}$ B) $\dfrac{c-b}{a+c}$ C) $\dfrac{c+b}{a-c}$

D) $\dfrac{a+c}{c-b}$ E) $\dfrac{a-c}{c-b}$

Resolución:

$$a\,sen^2\theta + b\cos^2\theta = c \qquad \ldots\ldots \div \cos^2\theta$$

$$\frac{a\,sen^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{b\cancel{\cos^2\theta}}{\cancel{\cos^2\theta}} = \frac{c}{\cos^2\theta}$$

$$a\tan^2\theta + b = c\sec^2\theta$$

$$a\tan^2\theta + b = c\,(1 + \tan^2\theta)$$

$$a\tan^2\theta + b = c + c\tan^2\theta$$

$$a\tan^2\theta - c\tan^2\theta = c - b$$

$$\tan^2\theta(a-c) = c - b$$

$$\therefore \boxed{\tan^2\theta = \frac{c-b}{a-c}}$$

10. *Elimine x si*

$$\frac{senx}{a} = \frac{cosx}{b} = \frac{cotx}{c}$$

$A) a^2(a^2 + b^2) = b^2$ $\quad$ $B) a^2(c^2 - b^2) = b^4$

$C) a^2(c^2 - b^2) = b$ $\quad$ $D) a^2(c^2 - b^2) = b$

$E) a^2(a^2 - b^2) = c^2$

Resolución:

$$\underset{1}{\frac{senx}{a}} = \underset{2}{\frac{cosx}{b}} = \underset{3}{\frac{cotx}{c}}$$

Igualando 1 y 2

$$\frac{senx}{a} = \frac{cosx}{b}$$

$$\frac{senx}{cosx} = \frac{a}{b}$$

$$tanx = \frac{a}{b} \quad \cdots (I)$$

Igualando 2 y 3

$$\frac{cosx}{b} = \frac{cotx}{c}$$

$$\frac{\cancel{cosx}}{b} = \frac{\cancel{cosx}}{senx \cdot c}$$

$$b = c \cdot senx$$

$$senx = \frac{b}{c} \quad \cdots (II)$$

De (I)

$$tanx = \frac{a}{b} \Rightarrow cotx = \frac{b}{a} \quad \cdots (III)$$

De (II)

$$senx = \frac{b}{c} \Rightarrow cscx = \frac{c}{b} \quad \cdots (IV)$$

De (III) y (IV) *Sabemos*

$$csc^2x - cot^2x = 1$$

$$\frac{c^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} = 1$$

$$c^2 \cdot a^2 - b^4 = a^2 \cdot b^2$$

$$c^2 . a^2 - a^2 . b^2 = b^4$$

$$\therefore \boxed{a^2(c^2 - b^2) = b^4}$$

11. Calcule:

$$E = 3\left(sen^4 x + cos^4 x\right) - 2\left(sen^6 x + cos^6 x\right)$$

$\cancel{A})1$ $\qquad B)2 \qquad C)3$

$D)\dfrac{2}{3} \qquad E)\dfrac{3}{2}$

Recordar las identidades:

$$sen^4 x + cos^4 x = 1 - 2sen^2 x.cos^2 x$$

$$sen^6 x + cos^6 x = 1 - 3sen^2 x.cos^2 x$$

Resolución:

$$E = 3\left(sen^4 x + cos^4 x\right) - 2\left(sen^6 x + cos^6 x\right)$$

$$E = 3\left(1 - 2\, sen^2 x \cdot cos^2 x\right) - 2\left(1 - 3\, sen^2 x \cdot cos^2 x\right)$$

$$E = 3 - \cancel{6\, sen^2 x \cdot cos^2 x} \quad -2 + \cancel{6\, sen^2 x \cdot cos^2 x}$$

$$E = 3 - 2$$

$$\boxed{E = 1}$$

12. Calcule: $E = \tan x + \cot x$

Si: $\sec x = 1 + \csc x$

$A)\,2\sqrt{2}$ $\quad$ $\cancel{B})\,1+\sqrt{2}$

$C)\,1-\sqrt{2}$ $\quad$ $D)\,1+\sqrt{3}$

$E)\,B\ y\ C$

Recordar las identidades:

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x.\csc^2 x$$

$$\tan x + \cot x = \sec x.\csc x$$

Resolución:

Del dato:

$$\sec x = 1 + \csc x$$

$$\sec x - \csc x = 1$$

$$(\sec x - \csc x)^2 = 1^2$$

$$\underbrace{\sec^2 x + \csc^2 x}_{} - 2\sec x \cdot \csc x = 1$$

$$\sec^2 x \cdot \csc^2 x\ -2\sec x \cdot \csc x = 1 \quad \cdots (I)$$

Piden:

$$E = \tan x + \cot x$$

$$E = \sec x \cdot \csc x \quad \cdots (II)$$

(II) en (I)

$$E^2 - 2E = 1$$

$$E^2 - 2E + 1 = 1 + 1$$

$$(E-1)^2 = 2$$

$$E - 1 = \pm\sqrt{2}$$

$$E_1 = 1 - \sqrt{2}$$

$$E_2 = 1 + \sqrt{2}$$

13. Si $tan\,x + cot\,x = 4$,calcule:

$$E = sen^4 x + cos^4 x$$

$A)\ \cancel{\frac{7}{8}}$ $\quad B)\ \frac{3}{8}$ $\quad C)\ \frac{7}{16}$

$D)\ \frac{3}{16}$ $\quad E)\ \frac{3}{7}$

Recordar las identidades:

$$\boxed{sen^4 x + cos^4 x = 1 - 2sen^2 x.cos^2 x}$$

$$\boxed{tan x + cot x = sec x.csc x}$$

Resolución:

Piden:

$$E = sen^4 x + cos^4 x$$

$$E = 1 - 2\,sen^2 x \cdot cos^2 x$$

$$E = 1 - 2(sen\,x \cdot cos\,x)^2 \quad \cdots (I)$$

Del dato:

$$\underbrace{tan\,x + cot\,x}_{} = 4$$

$$sec\,x \cdot csc\,x = 4$$

$$cos\,x \cdot sen\,x = \frac{1}{4} \quad \cdots (II)$$

(II) en (I)

$$E = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$E = 1 - 2 \times \frac{1}{16}$$

$$\boxed{E = \frac{7}{8}}$$

14. Si se cumple:

$$\frac{cos^4 x - sen^4 x}{cos^8 x - sen^8 x}$$

Calcule:

$$M = 1 + sen^6 x + cos^6 x$$

A) $\dfrac{2m-1}{m}$

B) $\dfrac{2m+1}{m}$

C) $\dfrac{m-3}{2m}$

D) $\dfrac{m-3}{m}$

E) $\dfrac{m+3}{2m}$

Resolución:

$$\frac{cos^4 x - sen^4 x}{cos^8 x - sen^8 x} = m$$

$$\frac{\cancel{cos^4 x - sen^4 x}}{(cos^4 x + sen^4 x)\cancel{(cos^4 x - sen^4 x)}} = m$$

$$\frac{1}{cos^4 x + sen^4 x} = m$$

$$\frac{1}{1 - 2\,sen^2 x \cdot cos^2 x} = m$$

$$\frac{1}{m} = 1 - 2\,sen^2 x \cdot cos^2 x$$

$$sen^2 x \cdot cos^2 x = \frac{1 - \frac{1}{m}}{2}$$

$$sen^2 x \cdot cos^2 x = \frac{m-1}{2m}$$

Piden:

$$M = 1 + sen^6 x + cos^6 x$$

$$M = 1 + 1 - 3\,sen^2 x \cdot cos^2 x$$

$$M = 2 - 3\left(\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$M = \frac{4m - 3m + 3}{2m}$$

$$\boxed{M = \frac{m+3}{2m}}$$

15. **Determine el valor de A para que la siguiente igualdad sea una identidad**

$$(1 + sen\,x - cos\,x)^2 = A(1 + sen\,x)(1 - cos\,x)$$

Calcule: A

$A)1$ $\cancel{B})2$ $C) - 1$

$D) - 2$ $E)4$

Recordar la identidad:

$$(1 + senx - cosx)^2 = 2(1 + senx)(1 - cosx)$$

Resolución:

$$(1 + sen\,x - cos\,x)^2 = A(1 + sen\,x)(1 - cos\,x)$$

$$2\cancel{(1 + sen\,x)}\cancel{(1 - cos\,x)} = A\cancel{(1 + sen\,x)}\cancel{(1 - cos\,x)}$$

$$2 = A$$

$$\boxed{A = 2}$$

16. Halle a para tener una identidad

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$A)\,1$ $\quad B)\,2$ $\quad C)\,-\frac{1}{3}$

~~D~~$)\,-\frac{1}{2}$ $\quad E)\,3$

Recordar la identidad:

$$1-\cos^2 x=\operatorname{sen}^2 x$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right)=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]$$

Resolución:

$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$$\sqrt{\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right)^{1/2}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$$\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{-1/2}=\left[\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^{a}$$

$$\boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

17. $Elimine\ \theta\ si$

$$\tan\theta + \cot\theta = m$$

$$\sec\theta + \csc\theta = n$$

$A)\ n^2 = m^2 + 2$

$B)\ n^2 = m^2 - 2m$

$\cancel{C})\ n^2 = 2m + m^2$

$D)\ n^2 = 2n - m$

$E)\ n^2 = 2m - m^2$

Recordar las identidades:

$$\boxed{\tan x + \cot x = \sec x . \csc x}$$

$$\boxed{\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x . \csc^2 x}$$

Resolución:

Del dato:

$$\underbrace{\boxed{\tan\theta + \cot\theta = m}}$$

$$\sec\theta \cdot \csc\theta = m \quad \cdots (I)$$

$$\boxed{\sec\theta + \csc\theta = n}$$

$$(\sec\theta + \csc\theta)^2 = n^2$$

$$\underbrace{\sec^2\theta + \csc^2\theta} + 2\sec\theta \cdot \csc\theta = n^2$$

$$(\sec\theta \cdot \csc\theta)^2 + 2\sec\theta \cdot \csc\theta = n^2 \quad \cdots (II)$$

$(I)\ en\ (II)$

$$m^2 + 2m = n^2$$

$$\boxed{n^2 = m^2 + 2m}$$

18. Si: $tan\,x + tan^2 x + tan^3 x = 1$

Calcule: $F = cot\,x + tan^3 x$

$A)\,3$ $\quad\cancel{B})\,2$ $\quad C)\,1$

$D)\,-1$ $\quad E)\,-2$

Recordar la identidad:

$$\boxed{\text{tanx.cotx} = 1}$$

Resolución:

Del dato:

$$tan\,x + tan^2 x + tan^3 x = 1$$

$$cot\,x\left(tan\,x + tan^2 x + tan^3 x\right) = cot\,x\,(1)$$

$$1 + tan\,x + tan^2 x = cot\,x$$

Piden:

$$F = cot\,x + tan^3 x$$

$$F = \overbrace{1 + \underbrace{tan\,x + tan^2 x + tan^3 x}_{1}}$$

$$F = 1 + 1$$

$$\boxed{F = 2}$$

19. Si $cos^2 x = sen\,x - cos\,x$

entonces el valor de:

$$E = 2\cot x - cos^2 x$$

A) $-cos\,x$

B) $1 + cos\,x$

C) $sen\,x \cdot cos\,x$

~~D)~~ **1**

E) -2

Resolución:

Del dato:

$$cos^2 x = sen\,x - cos\,x$$

$$(cos^2 x)^2 = (sen\,x - cos\,x)^2$$

$$\underbrace{cos^2 x \cdot cos^2 x} = \underbrace{sen^2 x + cos^2 x} - 2\,sen\,x \cdot cos\,x$$

$$cos^2 x\,(1 - sen^2 x) = 1 - 2\,sen\,x \cdot cos\,x$$

$$cos^2 x - cos^2 x \cdot sen^2 x = 1 - 2\,sen\,x \cdot cos\,x \quad \div (sen^2 x)$$

$$cot^2 x - cos^2 x = csc^2 x - 2\cot x$$

$$\underbrace{2\cot x - cos^2 x} = csc^2 x - cot^2 x$$

$$\boxed{E = 1}$$

20. *Calcule*

$$E=\frac{sec^4 x\left(1-csc^4 x\right)+csc^4 x}{2\,sec^2 x}$$

A) $2sec^2 x$ B) $2\,csc^2 x$

C) $2sec^2 x.\,csc^2 x$ $\cancel{D)}$ $-csc^2 x$

E) $sen^2 x.\,cos^2 x$

Resolución:

$$E=\frac{sec^4 x\left(1-csc^4 x\right)+csc^4 x}{2\,sec^2 x}$$

$$E=\frac{sec^4 x\left(-cot^2 x\right)\left(1+csc^2 x\right)+csc^4 x}{2\,sec^2 x}$$

$$2E=\underbrace{-sec^2 x\cdot cot^2 x}\left(1+csc^2 x\right)+\ csc^4 x\cdot cos^2 x$$

$$2E=-csc^2 x\left(1+csc^2 x\right)+\ csc^4 x\cdot cos^2 x$$

$$2E=-csc^2 x\ \underbrace{-csc^4 x\ +csc^4 x\cdot cos^2 x}$$

$$2E=-csc^2 x\ \ +csc^4 x\underbrace{\left(cos^2 x-1\right)}_{-sen^2 x}$$

$$2E=-csc^2 x\ \ -csc^2 x$$

$$2E=-2\,csc^2 x$$

$$\boxed{E=-csc^2 x}$$