

author: Owen

time:2021/1/18

军备竞赛模型

基于L.F.Richardson 1939年提出的模型，影响军备竞赛的因素是错综复杂的，无法用数学工具给以恰当的圆满的描述。本模型仅限于告诉我们一个复杂的实际过程可以被合理地简化到什么程度，得到的结果又怎样用来解释实际现象，并且如果允许军备竞赛沿着机械的本能和固定的模式发展的话，会导致什么样的结局。xlzl

模型的假设与构成

为方便起见，用军备表示军事力量的总和，如兵力、装备、军事预算等。甲乙双方在时刻 t 的军备分别记作 $x(t)$ 和 $y(t)$ ，假定它们的变化只取决于下面三个因素：

- 由于相互不信任及矛盾的发展，一方军备越大，另一方的军备增加的越快。
- 由于各方本身竞技实力的限制，任一方军备越大，对军备增长的制约作用越大。
- 由于相互敌视或领土争端，每一方都存在着增加军备的固有潜力。

进一步假设前两个因素的影响是线性描述的，第三个因素的影响是常数，那么 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的变化可表示为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$$

微分方程可解出竞赛的过程。

针对研究时间充分长后 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的变化趋势，即上述方程的平衡点的稳定情况：

令上述方程组右端等于0，可得平衡点：

$$x_0 = \frac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}, y_0 = \frac{lg + ah}{\alpha\beta - kl}$$

方程1 的系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$$

按照判断平衡点稳定性的方法计算：

$$p = -(a_{11} + a_{22}) = \alpha + \beta > 0$$

$$q = \det, \quad A = \alpha\beta - kl$$

由稳定性准则，当：

$$\alpha\beta > kl$$

时，平衡点 (x_0, y_0) 稳定，反之则不稳定。在 $\alpha\beta > kl$ 的条件下，军备竞赛是稳定的。

模型定性分析

1. $\alpha\beta > kl$ 表明，当双方的经济制约程度 $\alpha\beta$ 大于双方的军备刺激程度 kl 时，军备竞赛才会趋于稳，反正， $x(t), y(t)$ 趋于无穷，可能导致战争。
2. 若 $g = h = 0$, 则 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 是方程组的平衡点，并且在 $\alpha\beta > kl$ 下是稳定的。于是存在 $t = t_0$, 使得 $x(t_0) = y(t_0) = 0$, x, y 就永远保持为0。这种情况可以解释为双方不存在任何的敌视和争端，通过裁军就可以达到持久和平，即两个友好邻国的情况。
3. 如果 $g, h \neq 0$, 即使由于某个原因（如裁军协定）在某个时候双方军备大减，设 $x(t_0) = y(t_0) = 0$, 因为 $\dot{x} = g, \dot{y} = h$, 也将使得双方重整军备，这说明未经过和解的裁军（即不消除敌视或领土争端）是不会持久的。
4. 如果由于某种原因（战败或协议），导致某一方的军备大减，可设 $x(t_0) = 0$ 那么因为 $\dot{x} = ky + g$, 也将使得双方重整军备。这说明存在不信任($k \neq 0$)或固有争端($g \neq 0$)的单方面裁军也不会持久

模型参数估计

- k, l 的估计

设 $x(0)=0$, 当 t 较小时，忽略 $g, -\alpha x$ 的作用，并假定 $y = y_1$ 不变，由方程组得：

$$\dot{x} = ky_1$$

当 $t = \tau$ 时， $x = y_1$ ，则由上式得：

$$k^{-1} = \tau$$

这说明 k^{-1} 是甲方军备从0到赶上乙方军备 y_1 所需的时间。

- α, β 的估计

设 $g = 0, y = 0$ 由方程组得：

$$x(t) = x(0)e^{-\alpha t}$$

以 $t = \alpha^{-1}$ 代入, 算出:

$$x(\alpha^{-1}) = \frac{x(0)}{e}$$

这表明 α^{-1} 是在乙方无军备时甲方军备减到原来的 $\frac{1}{e}$ 所需的时间。Richardson认为这大概是一个国家议会的任期, 对于议会任期5年的国家来说, $\alpha \approx 0.2$ 。

结论

用简单的模型合理地描述错综复杂的军备竞赛过程必然将忽略许多因素的影响, 应该进一步去研究军备竞赛过程的数学模型 (例如:三方、多方军备竞赛)