author:Owen

time: 2021/1/18

# 种群竞争基本模型

当某个自然环境中只有一种生物的群体生存时，人们常用$logistic$模型来描述这个种群数量的演变特征，即

$$\dot{x}(t) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

$x(t)$是种群在时刻t的数量，r是固有增长率，N是环境资源容许的种群最大数量，由方程可以直接看出，当$t \to \infty$时，$x(t) \to N$。

# 模型建立

有甲乙两个种群，当他们独自在一个自然环境中生存时，数量的演变遵循$logistic$规律，记$x_1(t), x_2(t)$是两个种群的数量，$r_1, r_2$是它们的固有增长率，$N_1, N_2$是它们的最大容量。于是，对于种群甲有：

$$\dot{x_1}(t) = r_1 x_1(1 - \frac{x_1}{N_1})$$

- $(1 - \frac{x_1}{N_1})$：反映由于甲对有限资源的消耗导致的对它本身增长的阻滞作用
- $\frac{x1}{N1}$：相对于N1而言，单位数量的甲消耗的供养甲的食物量（设食物总量为1）。

假设两个种群在同一自然环境中生存，将由于乙消耗同一种有限资源对甲的增长产生的影响纳入考量，则可得：

$$\dot{x_1}(t) = r_1 x_1(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2})$$

- $\sigma_1$：单位数量乙（相对于N2而言）消耗的供养甲的食物量为单位数量甲(相对于N1)消耗的供养甲的食物量的$\sigma_1$倍。

同理，对于种群乙有：

$$\dot{x_2}(t) = r_2 x_2(1 - \frac{x_2}{N_2} - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1})$$

- $\sigma_2$：解释同上。

**注意：$\sigma$为关键指标，由模型可知，$\sigma_1 > 1$表示在消耗供养甲的资源中，乙的消耗多于甲，所以对甲的增长的阻滞作用是乙大于甲，即乙的竞争力强于甲，对$\sigma_2 > 1$可作类似的解释。**

假设两种群在消耗资源中对甲增长的阻滞作用与对乙增长的阻滞作用相同，也就是因为单位数量的甲和乙消耗的供养甲的食物量之比为$1:\sigma_1$，消耗的供养乙的食物量之比为$\sigma_2:1$，所谓的阻滞作用相同也就是：

$$1:\sigma_1=\sigma_2:1$$

即：

$$\sigma_1\sigma_2=1$$

# 独立$\sigma_1\sigma_2$情况下的稳定性分析

解代数方程：

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases}$$

得4个平衡点：

$$P_1(N_1,0),P_2(0,N_2),P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),P_4(0,0)$$

因为仅当平衡点位于平面坐标系的第一象限时($x_1,x_2\geqslant 0$)才有实际意义，所以对$P_3$而言，要求$\sigma_1,\sigma_2$同时小于1，或同时大于1.

按照判断平衡点稳定性的方法(见7.7节(18)，(19)式)，计算

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\sigma_1x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{\sigma_2x_1}{N_1}-\dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x_1}+g_{x_2})|_{P_i},\quad i=1,2,3,4$$

$$q=\det A|_{P_i},\quad i=1,2,3,4$$

将4个平衡点$p,q$的结果及稳定条件列入表1.

**表 1 种群竞争模型的平衡点及稳定性**

| 平衡点 | $p$ | $q$ | 稳定条件 |
|---|---|---|---|
| $P_1(N_1,0)$ | $r_1-r_2(1-\sigma_2)$ | $-r_1r_2(1-\sigma_2)$ | $\sigma_1<1,\sigma_2>1$ |
| $P_2(0,N_2)$ | $-r_1(1-\sigma_1)+r_2$ | $-r_1r_2(1-\sigma_1)$ | $\sigma_1>1,\sigma_2<1$ |
| $P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$ | $\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ | $\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$ | $\sigma_1<1,\sigma_2<1$ |
| $P_4(0,0)$ | $-(r_1+r_2)$ | $r_1r_2$ | 不稳定 |

再针对表中的情况采用相轨线分析即可。