author:Owen

time:2021/1/18

# 产量模型

记时刻$t$渔场中鱼量为$x(t)$，关于$x(t)$的自然增长和人工捕捞作如下假设：

- 在无捕捞条件下$x(t)$的增长服从$logistic$规律（阻滞增长模型)即：

$$x(t)=f(x)=rx(1-\frac{x}{N})$$

  r是固有增长率，N是环境允许的最大鱼量，用f(x)表示单位时间的增长量。
- 单位时间的捕捞量（即产量）与渔场鱼量x(t)成正比，比例常数E表示单位时间捕捞率，又称为捕捞强度，可以用比如捕鱼网眼的大小或出海渔船数量来控制其大小，于是单位时间的捕捞量为:

$$h(x)=Ex$$

  捕捞情况下渔场鱼量满足的方程：

$$F(x)=f(x)-h(x)=rx(1-\frac{x}{N}-Ex$$

  只需要知道渔场的稳定鱼量和保持稳定的条件，因此不用去求解上述方程得到$x(t)$的动态变化过程。稳定鱼量即时间t足够长以后渔场鱼量x（t）的趋向，并由此确定最大持续产量，为此可以直接求上式的平衡点并分析其稳定性性。

令：

$$F(x)=x(1-\frac{x}{N})-Ex=0$$

得两个平衡点：

$$x_0=N(1-\frac{E}{r}),x_1=0$$

不难算出：

$$F'(x_0) = E - r, F'(x_1) = r - E$$

所以若:

$$E < r$$

有:

$$F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0$$

故: $x_0$点稳定, $x_1$点不稳定（判断平衡点稳定性的准则）,
若$E < r$, 结果相反。
上述分析表明, 只要捕捞适度（$E < r$）就可以获得持续产量$h(x_0) = Ex_0$;捕捞过度($E > r$),渔场鱼量将趋向于$x_1 = 0$, 无法获得持续产量。

渔场鱼量稳定在$x_0$的前提下, 如何控制捕捞强度$E$使得持续产量最大? 用图解法即可:

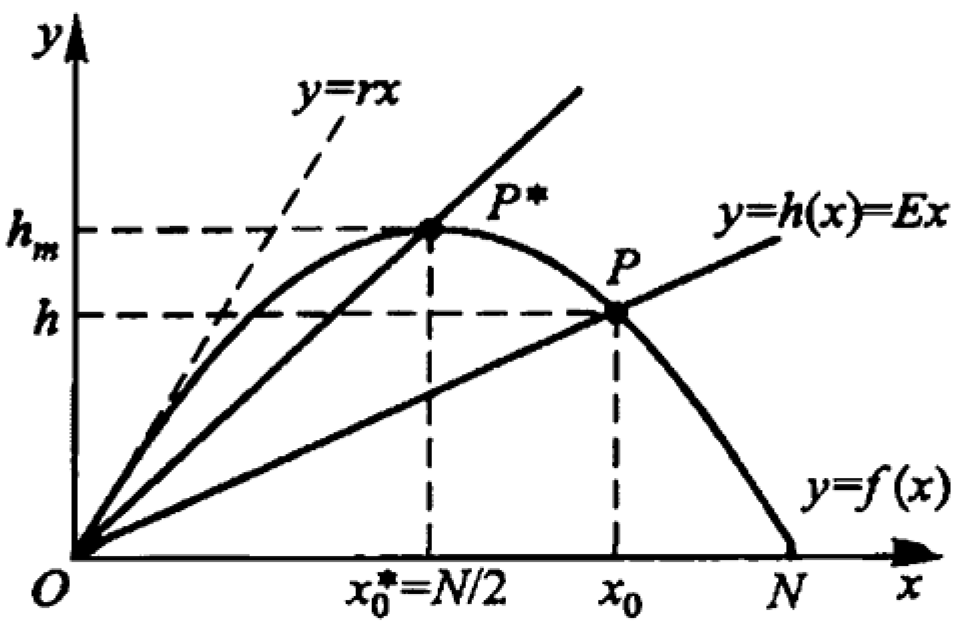


图 1 最大持续产量的图解法

注意$y = f(x)$在原点的切线, 其斜率恰好为$r$,所以在上述条件下直线与抛物线必有交点$P$,其横坐标就是稳定的平衡点$x_0$。

- 当直线和抛物线在顶点相交时可获得最大的持续产量, 此时的稳定平衡点为

$$x_0^* = \frac{N}{2}$$

单位时间的最大持续产量为：

$$h_m = \frac{rN}{4}$$

渔场鱼量稳定在$x_0^*$的捕捞率为

$$E^* = \frac{r}{2}$$

## 结论

将捕捞率控制在固有增长率r的一半，更简单的说，使渔场鱼量保持在最大鱼量N的一半时，能够获得最大的持续产量。

# 效益模型

从经济角度来说，不应该追求产量最大，而应该考虑效率最佳。
假设：

- 鱼儿的销售单价为常数$P$
- 单位捕捞率的费用为常数$C$

可得单位时间的收入$T$和支出$S$分别为：

$$T = ph(x) = pEx, S = cE$$

单位时间的利润为：

$$R = T - S = pEx - cE$$

在稳定条件$x = x_0$下，代入上面产量模型中平衡点$x_0 = N(1 - \frac{E}{r})$可得：

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE$$

用微分法，可求出使得利润$R(E)$达到最大的捕捞强度为：

$$E_R = \frac{r}{2}(1-\frac{c}{pN})$$

将$E_R$回代入

$$x_0 = N(1-\frac{E}{r})$$

得：

- 最大利润下的渔场稳定鱼量$x_R$：

$$x_R = \frac{N}{2}+\frac{c}{2p}$$

- 单位时间的持续产量$h_R$：

$$h_R = rx_R(1-\frac{x_R}{N}) = \frac{rN}{4}(1-\frac{c^2}{p^2N^2})$$

## 结论

对分析结果做定性分析可知，在最大效益原则下捕捞率和持续产量均减少，而渔场应保持的稳定鱼量增加，并且减少或增加的部分随着捕捞成本$c$的增长而变大，随着销售价格$p$的增长而变小，符合实际情况。

# 捕捞过度

盲目捕捞（开放式捕捞）将导致捕捞过度。
对捕捞过度的情况进行分析：
令利润与捕捞强度的关系式：

$$R(E) = pNE(1-\frac{E}{r})-cE = 0$$

解得：

$$E_s = r(1-\frac{c}{pN})$$

当$E < E_s$,利润$R(E) > 0$,盲目的捕捞者会加大捕捞强度。
当$E > E_s$,利润$R(E) < 0$,当然应该要减小捕捞强度，所以$E_s$是盲目捕捞下的临界强度。

$E_s$也可以用图解法来求：

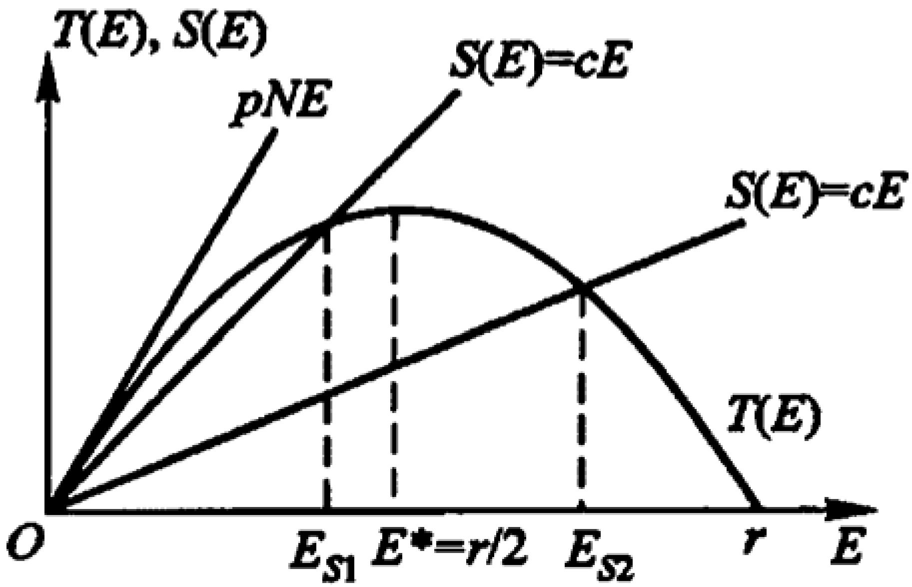


图 2　盲目捕捞强度的图解法

图中直线$S(E) = cE$和曲线$T(E)$的交点横坐标即为$E_s$，
可知其存在的条件为：

$$p > \frac{c}{N}$$

即：售价大于成本，并且由式$E_s = r(1 - \frac{c}{pN})$可知,成本越低，售价越高，$E_s$越大。
将$E_s = r(1 - \frac{c}{pN})$代入$x_0 = N(1 - \frac{E}{r})$
,得到盲目捕捞下的渔场稳定鱼量为：

$$x_s = \frac{c}{p}$$

可知，$x_s$的值完全由成本-价格比决定，随着价格的上升和成本的下降，其值将迅速减少，出现捕捞过度的情况。

比较式子：

- $E_s = r(1 - \frac{c}{pN})$
- $E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN})$

可知，$E_s = 2E_R$,即盲目捕捞强度比最大效益下捕捞强度大一倍。
图中$E_{s1}$点称为经济学捕捞过度，图中$E_{s2}$称为生态学捕捞过度。

# 结论

为研究渔业的产量、效益及捕捞过度问题，先假设对鱼的自然增长和捕捞情况的合理假设下，建立渔场鱼量的基本方程，并利用平衡点稳定性分析确定了保持渔场鱼量的稳定条件，产量、效益和捕捞过度3个模型在稳定的前提下步步研究，从而得到定性关系上与实际情况完全符合的结果。